UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

USO DE APPLETS DO GEOGEBRA NA MATEMÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO.

Luís Lindemberg Souza Abreu

Orientador: Prof^{a} Dra. Ana Carla Percontini da Paixão

Feira de Santana

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

USO DE APPLETS DO GEOGEBRA NA MATEMÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO.

Luís Lindemberg Souza Abreu

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof[a]. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão

Feira de Santana

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Abreu, Luís Lindemberg Souza
A145u Uso de applets do GeoGebra na matemática: uma sequência didática de análise combinatória para o ensino médio/ Luís Lindemberg Souza Abreu. - 2025.
91f. : Il.

Orientadora: Ana Carla Percontini da Paixão

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2025.

1. Análise combinatória - Ensino. 2. GeoGebra. 3. Sequência didática. 4. Applet (computação). I. Paixão, Ana Carla Percontini da, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU: 519.1

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Luís Lindemberg Souza Abreu do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos treze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 14 horas, no Auditório do PPGM/PROFCIAMB, localizado atrás do LABEXA - UEFS, ocorreu a defesa pública da dissertação apresentada sob o título "**USO DE APPLETS DO GEOGEBRA NA MATEMÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO",** do discente **Luís Lindemberg Souza Abreu** do Programa de Mestrado Profissional em Mateḿatica em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Ana Carla Percontini da Paixão (Orientadora, UEFS), Joilma Silva Carneiro (UEFS) e Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito **APROVADO**. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 13 de dezembro de 2024.

gov.br Documento assinado digitalmente
ANA CARLA PERCONTINI DA PAIXAO
Data: 11/02/2025 16:31:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Ana Carla Percontini da Paixão (Orientadora, UEFS)

Profª Drª Joilma Silva Carneiro (UEFS)

gov.br Documento assinado digitalmente
JOILMA SILVA CARNEIRO
Data: 11/02/2025 18:01:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB)

Visto do Coordenador:

gov.br Documento assinado digitalmente
ELEAZAR GERARDO MADRIZ LOZADA
Data: 12/02/2025 09:11:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

gov.br Documento assinado digitalmente
JEAN FERNANDES BARROS
Data: 12/02/2025 10:15:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dedico este trabalho a todas as pessoas que, de algum modo, contribuíram para a sua realização.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre iluminar o caminho e estar presente em minha trajetória de vida. Aos meus pais, Aderson e Raimunda, e aos meus irmãos, Éder, Vinicius e Gabriel, pelas palavras de apoio e incentivo incondicional. A minha esposa Maria Rosana, pelo companheirismo, compreensão e por me apoiar ao longo dessa caminhada, pelo incentivo, por não ter me deixado desistir nos momentos de dificuldades, sempre do meu lado. À minha orientadora, Dra. Ana Carla Percontini da Paixão que por meio de muita dedicação, paciência e ensinamentos tornou possível a concretização desse sonho. Aos amigos e professores de toda minha jornada acadêmica, que de alguma forma contribuíram com o profissional que sou hoje. E a todos que se fizeram presentes durante esta jornada, me apoiando e encorajando. Meus sinceros agradecimentos!

"O caminho a gente faz andando"
Humberto Gessinger

Resumo

No ensino de Matemática, a busca por metodologias inovadoras tem se intensificado, especialmente para superar desafios relacionados à compreensão de conceitos abstratos e à resolução de problemas. Uma dessas abordagens é a sequência didática, que destaca o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem. Este estudo apresenta o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória, utilizando o software GeoGebra como recurso pedagógico. A proposta visou integrar atividades práticas, como exploração visual de combinações e simulações interativas, à resolução de problemas contextualizados, promovendo uma compreensão mais concreta e dinâmica dos conceitos.

Os resultados apontaram que o uso do GeoGebra tem o potencial de promover a aprendizagem significativamente, especialmente por meio de propostas de applets desenvolvidos para o ensino de combinatória. Essas ferramentas auxiliam na exploração de conceitos de permutação e contagens, além de favorecer a resolução de problemas aplicados a cenários reais.

Os quatro applets propostos neste trabalho oferecem recursos inovadores e interativos para o ensino de Matemática, contribuindo para o aprimoramento das práticas educativas e fornecendo subsídios para a adoção de estratégias mais eficazes e contextualizadas em sala de aula.

Abstract

In Mathematics teaching, the search for innovative methodologies has intensified, especially to overcome challenges related to the understanding of abstract concepts and problem-solving. One of these approaches is the didactic sequence, which highlights the student's leading role in the learning process. This study presents the development of a didactic sequence for teaching Combinatorial Analysis, using GeoGebra software as a pedagogical resource. The proposal aimed to integrate practical activities, such as visual exploration of combinations and interactive simulations, with the resolution of contextualized problems, promoting a more concrete and dynamic understanding of the concepts.

The results indicated that the use of GeoGebra has the potential to significantly promote learning, especially through proposals for applets developed for teaching combinatorics. These tools assist in the exploration of concepts such as modifications, permutations and combinatorial patterns, in addition to favoring the resolution of problems applied to real scenarios.

The four applets proposed in this work offer innovative and interactive resources for teaching Mathematics, contributing to the improvement of educational practices and providing support for the adoption of more effective and contextualized strategies in the classroom..

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

Estudar e aprender Matemática é essencial para todos os alunos da Educação Básica, desde o ensino fundamental ao médio. Isso se deve tanto à sua ampla aplicação em sociedade contemporânea quanto às suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e conscientes de suas responsabilidades sociais. No entanto, o ensino de matemática apresenta algumas dificuldades tanto para os alunos quanto para os professores. Os primeiros, em muitos casos, sentem-se desmotivados em estudar a matemática que lhes é apresentada com pouca relação com sua vivência cotidiana e com mera memorização de fórmulas. Já os professores, muitas vezes, por falta de recursos disponíveis nas escolas apresentando os conceitos matemáticos de forma que não dialoga com a realidade deles.

Assim, de um lado, reconhece-se a importância da Matemática como uma área de conhecimento fundamental na formação do cidadão. Por outro lado, há insatisfação em relação aos resultados negativos obtidos pelos alunos em estimativas de aprendizagem, pois existem altas taxas de reprovação e desinteresse dos estudantes pela disciplina [18]. Para o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes [12], o Brasil quando comparado aos outros 78 países, tem baixa compreensão em Leitura, Matemática e Ciências. Sendo que em 2018, 68,1% dos estudantes brasileiros não possuíam nível básico de Matemática. Por esse motivo, surgem diversos estudos sobre metodologias de ensino, visando uma forma diferente de adquirir conhecimento, sendo o jogo uma delas.

Para o ensino de matemática existem diversas metodologias que podem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem, com a finalidade de proporcionar a aquisição de conceitos e habilidades pelos alunos, tendo o professor a autonomia para escolher a melhor metodologia a ser utilizada, de acordo com os recursos disponíveis. Dentre essas metodologias podemos citar o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), em especial o uso de software como o GeoGebra.

Souza (2023) Recomenda o uso do GeoGebra, para professores que desejam explorar didáticas inovadoras e motivar os alunos, o GeoGebra oferece a possibilidade de acessar e aplicar materiais compartilhados, mesmo sem experiência prévia com o software. Barros (2024) apresenta em seu trabalho uma sequencia de 17 atividades no GeoGebra, utilizando applets que exploram desde a noção básica de frações até operações matemáticas, mostrando-se uma ferramenta inovadora para o ensino na Educação Básica. Silva Júnior (2021) conclui que os applets são ferramentas complementares no ensino de frações, promovendo o desenvolvimento de estratégias, facilitando o conteúdo e ampliando a interação entre professores e alunos. Os trabalhos apresentados destacam o GeoGebra como uma ferramenta poderosa para o ensino de matemática, oferecendo recursos que promovem a interação e a interação dos alunos. A utilização de applets permite uma abordagem dinâmica, que vai desde a introdução de conceitos básicos até operações mais complexas, facilitando a compreensão e o desenvolvimento de estratégias didáticas. Além disso, os applets são considerados complementares ao ensino, criando um ambiente mais colaborativo e eficiente entre professores e alunos, tornando o processo de aprendizagem mais acessível e interativo.

Maia (2022) afirma que o software GeoGebra, como recurso didático para apoiar as atividades realizadas em sala de aula, permite ao professor apresentar situações que seriam difíceis e demoradas de expor apenas com lousa. Além disso, possibilita aos alunos a compreensão dos conteúdos trabalhados, otimizando o tempo. Contribui para a visualização e, à medida que as iterações aumentam, melhoram a exatidão dos traçados, facilitando a compreensão.

Entre as inúmeras metodologias que proporcionam ambientes estimulantes e desafiantes que funcionam como ferramentas de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, vamos focar no uso de applets no ensino de matemática. Applets são pequenos softwares que executam uma atividade específica em um programa maior. Geralmente, os applets são escritos em linguagens de programação como Java, JavaScript ou Flash e são executados em navegadores da web ou em ambientes de desktop. São diferentes de aplicativos autônomos, que são programas executados no sistema operacional do computador ou smartphone. Os applets são projetados para serem executados dentro de um ambiente controlado, como um navegador da web ou uma máquina virtual. Têm várias vantagens, uma delas é a capacidade de serem executados em várias plataformas diretamente no navegador da web, sem a necessidade de um ambiente de execução separado.

Pode-se construir applets utilizando diversos softwares, entre eles o GeoGebra, que é livre e gratuito e oferece diversas ferramentas matemáticas. O GeoGebra é frequentemente utilizado no ensino de matemática, especialmente em atividades que exploram visualização de gráficos e figuras. Os applets disponibilizados no GeoGebra tornam viável a execução de inúmeras simulações e animações, apresentando diversos conteúdos matemáticos, não se limitando apenas ao ensino de geometria. Também permitem a experimentações e reflexões que viabilizam a exploração e construção de diversos conceitos e conteúdo, funcionando assim como uma excelente ferramenta didática e pedagógica disponível para o ensino de matemática. De Oliveira (2012), comenta que o uso do software GeoGebra pode simplificar o acesso à informação e tornar as aulas mais dinâmicas.

Melo (2022) afirma que o emprego do software GeoGebra proporciona várias vantagens para o aprimoramento da aprendizagem dos estudantes, despertando sua motivação e interesse tendo como obstáculo a capacitação dos professores. Lopes (2016) que estudou o uso do software Geogebra no ensino dos conceitos de funções quadráticas, destaca uma aplicação prática e eficiente que pode ser uma excelente ferramenta de apoio para o ensino de funções.

Os autores citados reforçam os benefícios do uso dessa tecnologia, como a melhoria da qualidade das aulas, o estímulo à motivação e interesse dos alunos, além de uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. No entanto, também mencionam que a capacitação dos professores é um obstáculo a ser superado, destacando a necessidade de investir em formação e atualização constante dos educadores para que possam aproveitar todo o potencial dessa ferramenta. Assim, o uso de applets do GeoGebra, que utiliza uma interface intuitiva e recursos interativos, pode tornar a aprendizagem mais atraente e as aulas mais interessantes e efetivas.

Embora os estudos citados evidenciem o potencial do GeoGebra e de seus applets no ensino de matemática e na promoção de metodologias inovadoras, uma lacuna de pesquisa notável é a análise de como essas ferramentas impactam o aprendizado dos alunos em contextos específicos, como o ensino de Matemática no semiárido baiano, onde a realidade educacional enfrenta dificuldades de aprendizagem. Além disso, é importante considerar as possíveis limitações do uso dos applets, como problemas de compatibilidade com diferentes dispositivos, a necessidade de acesso contínuo à internet e as restrições no desenvolvimento de applets mais complexos, que podem dificultar sua aplicação em algumas escolas.

Os applets apresentados neste trabalho foram construídos de forma autoral com o auxílio do GeoGebra, visando a sua utilização na sequência didática e, assim, auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. O objetivo da utilização dos applets foi demonstrar como o uso de softwares pode motivar e envolver os alunos, proporcionando uma melhor fixação da aprendizagem em matemática, especialmente em relação aos conceitos de contagem.

No presente trabalho, apresentamos uma abordagem inovadora no ensino de matemática, utilizando metodologias ativas e tecnologias da informação. Destaca-se o papel fundamental do GeoGebra como ferramenta para a construção de applets que auxiliam no processo de aprendizado de conceitos matemáticos, na área de Análise Combinatória. O trabalho também apresenta propostas de applets inéditos, o que evidencia a possibilidade de criação de novos recursos pedagógicos com o uso dessa ferramenta tecnológica. Com isso, espera-se que a utilização do GeoGebra no desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes de matemática, tornando o processo de ensino mais dinâmico, interessante e efetivo.

No Capítulo 1, são abordados conceitos fundamentais de Análise Combinatória aplicada à educação básica, com o objetivo de estabelecer uma base sólida para o entendimento do tema.

No Capítulo 2, são introduzidos quatro applets, que podem ser usados em uma sequência didática para a consolidação dos conceitos de Análise Combinatória, oferecendo aos estudantes uma experiência prática e interativa.

No Capítulo 3, é detalhado o processo de programação do primeiro applet, exemplificando as etapas envolvidas na criação de ferramentas interativas para o ensino da Análise Combinatória. Este capítulo também descreve como os princípios utilizados na programação desse applet podem ser aplicados aos demais, que seguem a mesma estrutura, permitindo a replicação e adaptação para diferentes contextos educativos.

O objetivo deste trabalho foi aplicar, numa perspectiva teórico-prática, o uso do GeoGebra no desenvolvimento do ensino da Matemática, especificamente relacionando com conhecimentos da Análise Combinatória. Além disso, apresentar uma sequência didática como ferramenta pedagógica para o ensino de conteúdos de Aanálise Combinatória e compreender as mobilizações teóricas que fundamentam o uso de recursos alternativos para a docência em matemática e relacionar os conteúdos com possíveis cenários didáticos dentro da matemática.

CAPÍTULO 1

ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Análise Combinatória é um ramo da matemática que lida com a contagem e a organização de elementos de conjuntos finitos. Seu campo de estudo envolve a investigação e o desenvolvimento de técnicas para contar, organizar e analisar arranjos, combinações, permutações e outras estruturas discretas. Em outras palavras, a Análise Combinatória fornece as ferramentas e técnicas para resolver problemas que envolvem a escolha e a organização de objetos, elementos ou eventos, de modo a determinar quantas possibilidades diferentes existem. É aplicada em diversas áreas do conhecimento, como a Estatística, a Probabilidade, a Física, a Computação e a Economia.

Entre os conceitos fundamentais da Análise Combinatória incluem o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), o qual leva a determinação das fórmulas para o cálculo de Arranjos, Combinações e Permutações, sendo essenciais para compreender o número total de possibilidades em sucessivas tomadas de decisão. Para [10], a Analise Combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto, tendo como papel de facilitar a contagem.

Segundo Cardoso (2007), a Análise Combinatória proporciona o estudo da contagem e as propriedades de agrupamentos, cujo elementos são objetos ou pessoas. Quando todos os elementos de um agrupamento são diferentes, ele é chamado de *agrupamento simples*. Quando alguns dos elementos se repetem, ele é chamado de *agrupamento com repetição*. Se forem classificados de acordo com o modo de formação, eles podem ser divididos em *arranjos, permutações e combinações*.

Análise Combinatória está presente em diversos aspectos do cotidiano, desde a organização de eventos até a análise de dados. É importante fazer essa associação para que se possa escolher a abordagem mais adequada para resolver um problema. Com as técnicas, fórmulas corretas e compreensão de seus conceitos, a Análise Combinatória pode facilitar muito a contagem de elementos de um conjunto e ajudar na solução de problemas complexos. É uma ferramenta matemática capaz de desenvolver habilidades cognitivas importantes, como a análise, a investigação, a reflexão,a formulação de hipóteses e testes, argumentação.

O raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Por isso, trata-se de um tema fundamental na matemática com aplicações em diversos contextos da vida cotidiana e que contribui significativamente para o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais.

O estudo de Análise Combinatória exige que o aluno adquira habilidades que lhe permita construir modelos e resolver problemas em vários contextos, verificando a razoabilidade dos resultados e embasando interpretações mais bem fundamentadas de eventos práticos, a fim de sustentar argumentações racionais. Entretanto, o ensino tradicional utilizado na maioria das escolas, com metodologia voltada para transmissão de informações e resolução de exercícios repetitivos, torna o ensino de Análise Combinatória, muito cansativo e desmotivante e tido como de difícil compreensão. Assim, é importante repensar a forma como essa disciplina é ensinada, buscando métodos mais criativos e dinâmicos que estimulem a curiosidade e a reflexão dos alunos. Ao desenvolver nos estudantes a capacidade de construir e aplicar conceitos dessa área em situações práticas, é possível tornar o aprendizado mais significativo e interessante. Dessa forma, a Análise Combinatória e outros conteúdos matemáticos podem ser vistos pelos alunos como ferramentas úteis e importantes para suas vidas, ao invés de meramente como um conjunto de regras e fórmulas abstratas. Bastos (2020) comenta que o ensino de Análise Combinatória no ensino médio é frequentemente considerado um dos assuntos mais difíceis de serem compreendidos pelos alunos. Muitas vezes, o ensino é realizado de maneira mecânica e baseada em situações padronizadas, ou ainda, é apresentado como um conjunto de fórmulas complicadas.

Infelizmente, é comum que alguns professores se limitem ao uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjos, combinações ou permutações, sem proporcionar aos alunos a oportunidade de derivar essas fórmulas por meio da manipulação dos elementos. Isso pode ocorrer devido a diversos fatores, como a insegurança em relação ao domínio do conteúdo ou a falta de formação adequada durante a graduação. Da Silva Rodrigues (2019) observa que muitos professores de Matemática do ensino fundamental não tiveram uma apropriação sólida dos conceitos de Análise Combinatória, nem foram expostos a abordagens metodológicas que favorecem um ensino mais investigativo e dinâmico.

Além disso, a pressão para cumprir um extenso currículo em um tempo limitado muitas vezes leva os professores a priorizarem métodos mais diretos e rápidos, como a memorização de fórmulas, em detrimento de práticas que envolvem maior exploração e compreensão dos conceitos pelos alunos. Essa abordagem, embora prática, acaba prejudicando o desenvolvimento de habilidades fundamentais, como o raciocínio lógico e a resolução de problemas, que são melhor desenvolvidos quando os estudantes têm a oportunidade de construir seu próprio conhecimento por meio de atividades interativas e manipulativas.

Para tornar o aprendizado de Análise Combinatória mais acessível e interessante é fundamental adotar uma abordagem pedagógica dinâmica e criativa, buscando relacionar o conteúdo com situações práticas que ocorrem no cotidiano dos alunos. Os professores devem estimular os estudantes a desenvolver suas próprias estratégias de resolução de problemas, fazendo uso de recursos visuais e tecnológicos para tornar o ensino mais lúdico e envolvente. Acreditamos que, dessa forma, seja possível tornar o aprendizado mais significativo e interessante para os alunos.

Essas práticas educacionais alinham-se com as habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o estudo de Análise Combinatória, quais sejam: Os estudantes devem ser capazes de resolver e elaborar problemas de contagem, utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, e recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (EM13MAT310). Além disso, eles devem ser capazes de resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando o espaço amostral e realizando a contagem das possibilidades (EM13MAT311). Essas habilidades ressaltam a importância de uma abordagem pedagógica dinâmica e criativa, que permita aos alunos compreender a relevância e aplicação da Análise Combinatória em diversos contextos.

No ensino médio, a Análise Combinatória é apresentada a partir do Princípio Multiplicativo da Contagem, seguido pelas noções de Fatorial, Permutação, Arranjo Simples e Combinação. Esses são os temas que serão abordados a seguir.

1.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como princípio multiplicativo, é a base fundamental da Análise Combinatória, geralmente apresentado aos alunos com o diagramas de árvores. Essa teoria é introduzida já no Ensino Fundamental, onde são abordados os problemas de contagem. Em certa medida, isso é um incentivo para que os alunos utilizem, nas resoluções de problemas, uma variedade de representações, tais como: diagramas de árvore, tabelas, desenhos e esquemas.

O Princípio Multiplicativo é uma ferramenta essencial para a contagem de agrupamentos que podem ser descritos por uma sequência de decisões. Ao estudar o Princípio Multiplicativo e suas aplicações, as fórmulas usadas na análise combinatória podem ser compreendidas como sínteses de raciocínios, ao invés de meras definições sem justificativa, tornando-as mais acessíveis e naturais. Os problemas básicos que envolvem o raciocínio combinatório, podem ser solucionados de diversas maneiras incluindo o uso do Princípio Fundamental da Contagem.

O Princípio Fundamental da Contagem diz que, *se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões* D_1 e D_2 é $x \times y$. Sendo definido da seguinte forma.

Definição 1.1.1. Se um evento D_1 apresenta x resultados distintos e um evento D_2 apresenta y resultados distintos, então o experimento composto de D_1 e D_2, nessa ordem apresenta $x \times y$ resultados distintos; ou seja, esse método consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa da experiência.

Para demonstrar as aplicações dessa definição, apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. No menu de uma pastelaria estão disponíveis 6 sabores distintos de pastel e 5 sabores distintos de suco, de quantos modos pode-se formar um pedido, composto por um pastel e um suco?

Solução:

Seja D_1 a decisão de escolher o sabor do pastel e seja D_2 a decisão de escolher o suco. Temos $x = 6$ modos de escolher o sabor de pastel e $y = 5$ modos de escolher o sabor de suco. Assim serão $x \times y = 6 \times 5 = 30$ modos de formar um pedido.

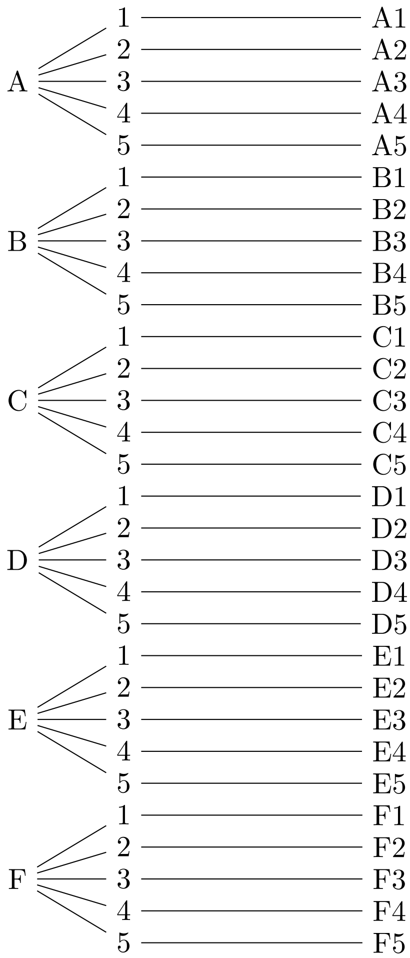
Podemos ainda apresentar essa resolução em diferentes formas, tais como diagramas de árvore, tabelas e desenhos. Para simplificar a representação vamos enumerar as 6 (seis) opções de pasteis com A, B, C, D, E e F e os 5 (cinco) sabores de suco com $1, 2, 3, 4,$ e 5.

Tabela .

	A	B	C	D	E	F
1	A1	B1	C1	D1	E1	F1
2	A2	B2	C2	D2	E2	F2
3	A3	B3	C3	D3	E3	F3
4	A4	B4	C4	D4	E4	F4
5	A5	B5	C5	D5	E5	F5

Tabela 1.1: Representação de todos os pedidos que podem ser formados

Diagrama de Árvore .



Exemplo 1.2. Para gerar o código de desbloqueio de seu celular Luís Felipe resolveu fazer uma combinação de 1 letra maiúscula, 1 letra minúscula, 1 número e 1 símbolo, que será um ponto (.) ou um traço (-). Quantas senhas distintas Luís Felipe pode formar?

Solução:

Podemos dividir a contagem de senhas em duas etapas:

1° Etapa: Escolha do tipo de símbolo (letra maiúscula, letra minúscula, número e ponto ou traço): Existem 26 letras maiúsculas, 26 letras minúsculas, 10 números e 2 símbolos possíveis para escolher. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$26 \times 26 \times 10 \times 2 = 13520$$

modos de escolher os símbolos.

2° Etapa: Definição da posição de cada símbolo (letra maiúscula, letra minúscula, número e ponto ou traço): Como a senha possui 4 símbolos distintos são 4 posições para colocar a letra maiúscula, feito isso, sobram 3 posições para colocar a letra minúscula, ficando 2 posições para colocar o ponto e, por fim, resta 1 posição para colocar o traço. Dessa forma, temos

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

modos de escolher a posição de cada símbolo.

Ainda usando o Princípio Fundamental da Contagem, e sabendo que há 13520 modos para escolher o símbolo na primeira etapa e 24 modos de escolher a posição de cada símbolo. Logo, Luís Felipe poderá formar

$$13520 \times 24 = 324480$$

senhas distintas para desbloquear seu celular.

Ao utilizar o Princípio Fundamental da Contagem como ponto de partida, é possível estabelecer uma base sólida para a compreensão dos tópicos subsequentes facilitando a resolução de problemas. Por exemplo, ao ensinar arranjo, o professor pode iniciar demonstrando como o número de arranjos é obtido através desse princípio, permitindo que os alunos compreendam a lógica por trás da fórmula. Dessa forma, o ensino da análise combinatória pode ser mais eficiente quando o professor utiliza o Princípio Fundamental da Contagem como uma intervenção inicial.

Além disso, na resolução de problemas de Análise Combinatória, algumas estratégias são importantes para alcançar êxito, entre elas destacamos.

Atitude: devemos nos colocar no lugar da pessoa que tem o problema a ser resolvido.

Partição: dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, pois isso facilitará a resolução do problema.

Priorizar restrições: a resolução do problema deve ser sempre iniciada pelas restrições, ou seja, nunca devemos adiar as dificuldades. Assim, devemos começar o problema pelas decisões mais difíceis.

1.2 Permutação Simples

A Permutação Simples consiste basicamente na troca de posição de todos os elementos de uma lista finita. Ela é uma técnica utilizada na Análise Combinatória para calcular o número de alterações que podem ser feitas na ordem dos elementos de um conjunto, quando essa ordem importa e cada elemento só pode ser utilizado uma vez. Por exemplo, se temos os números 1, 2 e 3, quantos números de três dígitos diferentes podemos formar? A permutação simples nos ajuda a responder essa pergunta.

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição, como explica DANTE(2016). Ao considerarmos um conjunto que contenha os dígitos $1, 2$ e 3, podemos organizá-los de diversas formas simples, como 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

Antes de apresentarmos a fórmula geral de como calcular o número de permutações de n objetos distintos, vamos apresentar a definição do conceito de fatorial.

Definição 1.2.1. Sendo n um número natural, definimos o fatorial de n como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 a n e indicamos por $n!$ (lê-se: n fatorial ou fatorial de n).

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Define-se, também: $1! = 1$ e $0! = 1$.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser empregado para determinar o número total de permutações de um conjunto contendo n objetos distintos. Para isso, consideramos considerar n etapas consecutivas nas quais selecionamos o primeiro, o segundo, o terceiro objeto e assim sucessivamente, até chegarmos ao n-ésimo objeto. Ou seja, para a escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar existem n possibilidades, para o objeto que ocupará o segundo lugar existem $n-1$ possibilidades,para a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar existem $n-2$ possibilidades, seguindo até a escolha do último objeto, com apenas 1 possibilidade. Assim, usando o PFC temos

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n!.$$

Logo, podemos escrever que a permutação simples de n objetos é

$$P_n = n!,$$

cuja definição é dada por

Definição 1.2.2. Seja E um conjunto com n elementos, permutação simples dos n elementos é qualquer ordenação de todos os n elementos distintos de E, onde a ordem dos elementos importa. A permutação trata-se, pois de uma ordenação de n objetos. Definimos como

$$P_n = n!$$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos pra ilustrar esse conceito.

Definição 1.2.3. Um anagrama é uma palavra ou frase formada pelo rearranjo das letras de utra palavra ou frase, utilizando exatamente todas as letras originais uma única vez. As letras podem ser reorganizadas em qualquer ordem, mas devem ser as mesmas e na mesma quantidade. a palavra LUVA pode ser rearranjada para formar UALV, que é um anagrama de LUVA. Os anagramas são frequentemente utilizados como desafios em jogos de palavras e enigmas, bem como na literatura e na criptografia

Exemplo 1.3. Determine a quantidade de anagramas que podem ser formados com a palavra LUVA.

Solução:

Iniciamos a solução utilzando a abordagem do PFC.

Cada anagrama corresponde a reorganização da posição das letras de uma palavra, com ou sem sentido. Assim, para a escolha da letra que ocupará o primeiro lugar são 4 possibilidades (L, U, V ou A), escolhida essa letra, a segunda letra poderá ser escolhida de

3 modos. Restando 2 opções para a escolha da letra que ocupará o terceiro lugar e uma opção para a escolha da última letra do anagrama. Então, pelo PFC, tem-se $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades, concluímos que

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

LUVA	ULAV	VLUA	ALUV
LUAV	ULVA	VLAU	ALVU
LVUA	UALV	VULA	AULV
LVAU	UAVL	VUAL	AUVL
LAUV	UVLA	VALU	AVLU
LAVU	UVLA	VAUL	AVUL

Tabela 1.2: Anagramas da palavra LUVA

Exemplo 1.4. De quantas maneiras podemos organizar 5 canetas de cores diferentes, 4 lápis de grafite e 3 borrachas de tipos diferentes, garantindo que os itens de cada categoria fiquem agrupados?

Solução: Pode-se dividir a resolução em duas etapas.

1°etapa: Iniciamos definindo a ordem de colocação dos três tipos de objetos, ou seja, decidir se começamos por lápis, por canetas ou por borrachas. Esse processo é um exemplo de permutação simples de 3 itens, resultando em

$$P_3 = 3!$$

2° etapa: Agora, escolhemos a ordem dos objetos entre si, em cada tipo de objeto.

Dentro da categoria "canetas"existem 5 tipos (definidas pela cor) para ocupar a primeira posição, 4 tipos para ocupar a segunda posição 3 tipos para a terceira posição, 2 tipos para ocupar a quarta posição e tipo para ocupar a última posição, 1 tipo para ocupar a última posição. Dessa forma, essa contagem pode ser feita usando permutação simples de 5 objetos, isto é, $P_5 = 5!$

Analogamente tem-se $P_4 = 4!$ maneiras para organizar os lápis e $P_3 = 3!$ maneiras para as borrachas. Usando o PFC, obtemos

$$5! \times 4! \times 3!$$

Juntando as duas etapas e aplicando novamente o PFC, obtemos a contagem final para o númeoro total de modos de organizar os objetos, que é dado

$$3! \times (5! \times 4! \times 3!) = 6 \times (120 \times 24 \times 6) = 103680.$$

Usando o **Exemplo 2.3** e fazendo uma modificação da palavra LUVA para LAVA, quantos anagramas poderiam ser formados agora? Nessa nova situação, ocorre a repetição de elementos, especificamente a repetição da letra “A” na palavra “LAVA”.

Solução: Se as letras fossem diferentes, a resposta seria $P_4 = 4!$. No entanto, quando trocamos as letras "A" entre si, obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama diferente. Dessa forma, estamos contando o mesmo anagrama 2! vezes, precisando retirá-los da contagem em $P_4 = 4!$. A contagem correta fica

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = 12,$$

onde P_4 é a permutação das 4 letras e P_2 é a permutação das letras A.

LAVA	ALAV	AVAL	VALA
LAAV	ALVA	AALV	VAAL
LVAA	AVLA	AAVL	VLAA

Tabela 1.3: Anagramas da palavra LAVA

Esse tipo de permutação é chamado de Permutação com elementos repetidos e definimos abaixo.

Definição 1.2.4. O número de permutações de n elementos, dos quais um elemento é repetido a vezes, outro elemento é repetido b vezes, outro repetido c vezes, e assim por diante, é dado por

$$P_n^{a,b,c,..} = \frac{n!}{a!b!c!...}.$$

Após a definição de permutação com repetição, que trata dos casos em que alguns elementos se repetem dentro de um conjunto, podemos explorar outro tipo de permutação chamada a permutação circular. Enquanto na permutação simples ou com repetição a ordem dos elementos em linha reta é o foco, a permutação circular é utilizada quando os elementos são organizados em um círculo, onde a posição relativa entre eles é o que importa. Vamos ilustrar isso com um exemplo.

Exemplo 1.5. Uma pizzaria está promovendo uma nova campanha para divulgar quatro novos sabores de pizza: A, B, CeD. A promoção consiste em uma pizza especial que deve conter exatamente quatro fatias, cada uma com um novo sabor distinto. De quantas maneiras diferentes o pizzaiolo pode montar a pizza promocional?

Solução: A primeira vista, parece que, para montar a pizza com os quatros sabores promocionais basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de 4! maneiras. Porém, as pizzas representadas pelas sequências $ABCD, BCDA, CDAB$ e $DABC$ são equivalentes, pois todas abrangem a mesma pizza vista em diferentes rotações. Cada uma dessas representações é obtida ao girar a pizza, mantendo inalterada a posição relativa entre as fatias, conforme ilustrado na Figura 1.1. Como a pizza pode ser girada, uma mesma disposição de sabores se repete em blocos de quatro, onde cada bloco corresponde a uma rotação da mesma combinação. Dessa forma, para não contar disposições repetidas, precisamos dividir o total 4! pelo número de rotações 4. Isso nos dá o número correto de sabores na pizza, eliminando repetições. A contagem correta é

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3! = 6.$$

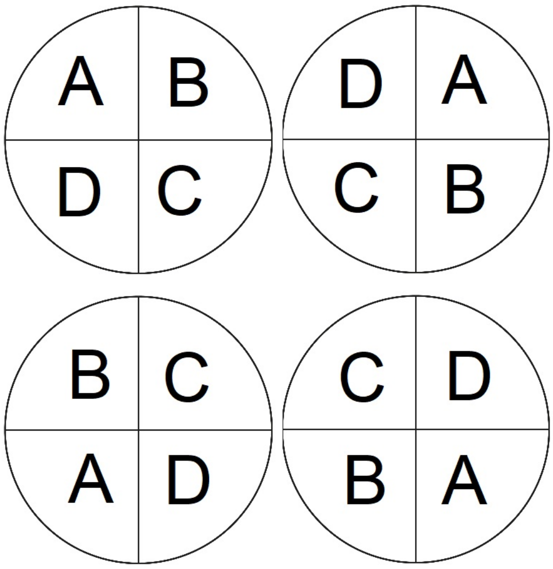


Figura 1.1: Representação de repetição na montagem da pizza

Esse exemplo apresenta outro caso particular de permutação que é quando os elementos são dispostos circularmente , nesse cado o que importa é a posição relativa dos elementos entre si ao formarem o círculo. Ao fazermos a contagem estamos repetindo n vezes a mesma pizza, pois cada circulo pode ser girado n vezes obtendo a mesma pizza, consequentemente a mesma permutação.

Desta forma, podemos definir a permutação circular como segue.

Definição 1.2.5. Chama-se Permutação Circular de n objetos distintos quaisquer disposição desses n objetos em torno de um círculo, colocados em lugares igualmente espaçados. Portanto, o número de permutação circular de n objetos distintos é dada por:,

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Após explorarmos os conceitos de Permutação Simples, com repetição e Permutação Circular, nos quais o objetivo foi a organização de todos os elementos levando em consideração sua ordem, passamos agora a um novo tipo de problema de contagem, o Arranjo Simples. Diferente das permutações, onde todos os elementos do conjunto são utilizados, no arranjo simples trabalhamos com subconjuntos, ou seja, selecionamos uma quantidade limitada de elementos de um conjunto maior, sempre levando em conta a ordem dos elementos escolhidos. A seguir, apresentaremos em detalhes o conceito de Arranjo Simples com alguns exemplos.

1.3 Arranjo Simples

Nos exemplos anteriores focamos em determinar quantas maneiras diferentes existem para ordenar elementos distintos utilizando todos os elementos disponíveis. Agora, nosso objetivo será explorar quantas formas possíveis existem para formar subconjuntos com p elementos a partir de um conjunto com n elementos, $n \geq p$, com n, $p \in \mathbb{N}$. Quando um subconjunto difere do outro pela ordem e pela natureza dos elementos que os compõe, sem ocorrer repetição dos elementos, teremos o que chamamos de Arranjo Simples.

No próximo exemplo vamos mostrar como resolver um problema de Arranjo Simples pelo PFC. Note que essa solução é uma forma de resolver o problema de Arranjo sem a necessidade de utilização de fórmula, tornando-a uma maneira interessante para apresentar o conceito.

Exemplo 1.6. Dado um grupo composto por quatro pessoas: André, Bruna, Carla e Daniel, o número de maneiras pelas quais podemos formar uma chapa de diretor(a) e vice-diretor(a)?

Solução: Pode-se dividir e apresentar a solução de duas maneiras.

1° Solução: Vamos descrever todas as chapas possíveis, organizando-as de forma clara, começando pelas cargos de Direção e Vice-Direção, respectivamente. Em seguida, faremos uma contagem para obter o total.

André-Bruna, André-Carla, André-Daniel, Bruna-André, Bruna-Carla, Bruna-Daniel, Carla-André, Carla-Bruna, Carla-Daniel, Daniel-André, Daniel-Bruna e Daniel-Carla.
É importante destacar que a chapa André-Bruna é diferente da chapa Bruna-André, já que André e Bruna ocuparão cargos diferentes nas duas chapas.

O resultado obtido foi um total de 12 chapas que podem ser formadas com os professores disponíveis.

2° Solução: Vamos usar o PFC para encontrar o número total de chapas.

A escolha da chapa de Direção - Vice Direção ocorre em duas etapas sucessivas, assim definidas: A etapa A, escolher o(a) diretor(a) e etapa B escolher o(a) vice-diretor(a).
A etapa A pode ocorrer de $m = 4$ maneiras. A etapa B pode ocorrer de $n = 3$ maneiras, pois um dos quatro professore já foi escolhido na etapa anterior.
O número de maneiras de formar a chapa é igual a $m \times n = 4 \times 3 = 12$. Assim, temos 12 possibilidades de agrupamentos possíveis para formar a chapa de Direção - Vice Direção. Note que a solução é igual ao encontrado na 1° Solução. Porém, a segunda solução é melhor para casos com um maior número de elementos e etapas envolvidas.

De maneira geral, dado um conjunto E com n elementos distintos, queremos formar grupos com p elementos cada (onde, $n \geq p$), de modo que não haja repetição de elementos e a ordem dos elementos seja relevante na formação dos grupos. Esse resultado corresponde ao número de Arranjos Simples de n elementos, tomados p a p, que indicaremos por $A(n, p)$. Agora, vamos deduzir a fórmula de Arranjo Simples a partir do PFC.

Considere o conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ com n elementos distintos e formemos grupos com p elementos cada,onde $n \geq p$. Existem n maneiras para escolha do primeiro elemento, $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento, $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento, e continuando, o último elemento do arranjo pode ser escolhido de $n-(p-1) = n-p+1$ maneiras diferentes. Assim, pelo PFC concluímos que

$$A(n,p) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1).$$

Multiplicando essa relação, em ambos os lados, por $(n-p)!$, obtemos

$$(n-p)!A(n,p) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)!,$$

donde, desenvolvendo o último fatorial, ficamos com

$$(n-p)!A(n,p) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Assim,

$$(n-p)!A(n,p) = n!$$

Dividindo ambos os lados por $(n-p)!$, obtemos

$$A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

A seguir damos uma definição formal para Arranjo Simples.

Definição 1.3.1. Seja E um conjunto com n elementos, $n \geq p$, com n, $p \in \mathbb{N}$. Denomina-se Arranjo Simples de nelementos tomados p a p, $n \geq p$,são os agrupamentos ordenados que é possível formar com p dos n elementos distintos dados. denotada por

$$A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!.} \tag{1.1}$$

Aplicando essa definição ao **Exemplo 3.6**, teremos uma terceira maneira de solucionar a questão.

3° Solução: Aplicando a Equação 1.1, obtemos

$$A(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12,$$

onde $n = 4$ é o número de elementos do conjunto e $p = 2$ representa a quantidade de elementos do subconjunto, isto é, a escolha de duas pessoas para formar a chapa Diretor/Vice-diretor.

Note que um caso particular de Arranjo Simples ocorre quando no agrupamento utilizamos todos os elementos de E. Dessa forma, o conjunto com n elementos distintos de E será tomado n a n, ou seja, $p = n$.

Desta forma, a fórmula de arranjo se reduz à permutação simples.

$$A(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n. \tag{1.2}$$

Ou seja, a Permutação é um caso especial de Arranjo Simples, quando ocorre a utilização de todos os elementos para formar os subconjuntos.

1.4 Combinação Simples

Agora estamos interessados em descobrir de quantas maneiras podemos ordenar elementos distintos utilizando parte deles ou todos eles na ordenação, quando a ordem dos elementos nos subconjuntos seja irrelevante. Nesse caso, teremos um problema de Combinação Simples. Esse tipo de agrupamento na Análise Combinatória consiste em contar a quantidade de subgrupos que podem ser formados a partir de um conjunto maior de elementos.

É importante notar que, ao contrário dos Arranjos Simples, em que a ordem dos elementos importa, na Combinação Simples a ordem dos elementos não altera a formação do agrupamento. Isso implica que um mesmo agrupamento é contado mais vezes, sendo necessário retirar da contagem, dividindo pelo número de vezes que foi contado a mais. Veremos que esse número é $p!$.
Em geral, dado um conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ com n elementos distintos, queremos formar grupos com p elementos, $n \geq p$, de tal forma que não ocorra repetição dos elementos e a ordem dos elementos não importa na formação dos grupos. Esse resultado corresponde ao número de Combinações Simples de n elementos, tomados p a p, que indicaremos por $C(n,p)$. A seguir apresentamos a definição e alguns exemplos de Combinação Simples.

Definição 1.4.1. Seja E um conjunto com n elementos e p, $n \in \mathbb{N}$. Denomina-se combinação simples todo subconjunto formado por p dos n elementos de um conjunto. Difere do arranjo porque, aqui, a ordem não é importante. Para determinarmos a combinação simples de n elementos tomados p a p, utilizamos:

$$C(n,p) = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.7. Seja E o conjunto formado por André, Bruna, Carla e Daniel. De quantas formas distintas podemos formar uma comissão de dois desses elementos?

É importante notar que, ao contrário do **Exemplo 3.6**, a ordem dos escolhidos neste caso não importa. Isso significa que uma comissão formada por André e Bruna é considerada a mesma que uma formada por Bruna e André. No exemplo anterior, no entanto, a ordem é relevante, pois cada posição (diretor e vice) é distinta. Assim, os mesmos indivíduos em posições diferentes representam arranjos distintos. Por exemplo, uma chapa com André como diretor e Bruna como vice é diferente de uma chapa com Bruna como diretora e André como vice.

Solução: Sabemos que a ordem dos componentes da comissão não importa, pois a comissão André e Carla é a mesma comissão Carla e André, nessa ordem. Ou seja, uma reorganização desses elementos resultará na formação de uma mesma comissão. Assim todas as comissões possíveis são:

$$\{André, Bruna\}, \{André, Carla\}, \{André, Daniel\},$$

$$\{Bruna, Carla\}, \{Bruna, Daniel\}, \{Carla, Daniel\}$$

Como o conjunto possui quatro elementos, isto é $n = 4$, para formar cada comissão devemos escolher 2 pessoas entre 4 dadas, ou seja, $p = 2$.

Logo,

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6.$$

A diferença entre os resultados encontrados nos cálculos com arranjo e combinação está na importância da ordem, ou não, dos elementos. No **Exemplo 3.6** a ordem importa, resultando em um maior número de chapas e no **Exemplo 3.7** a ordem não importa, resultando em un número menor de comissões.

O exemplo a seguir mostra como aplicar Combinação e Permutação de forma integrada, estimulando o raciocínio lógico e a habilidade de resolução de problemas.

Exemplo 1.8. Quantos são os anagramas da palavra TRIUNFO que não possuem duas vogais adjacentes?

Solução: Vamos dividir o processo em etapas.

1° Etapa: Primeiro vamos organizar as consoantes. Para tal, temos $P_4 = 24$ modos de fazer.

2°Etapa: Agora vamos intercalar as vogais, considerando que não podemos colocar duas vogais juntas. Logo, temos cinco posições possíveis: 3 entre cada consoante, 1 antes da primeira consoante e 1 depois da última consoante. Resultando em

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10.$$

3°Etapa: Por fim, faremos a permutação das 6 vogais, ou seja, $P_3 = 6$. Assim, a a quantidade de anagramas é dada por

$$P_4 \times C(5,3) \times P_3 = 24 \times 10 \times 6 = 1440.$$

CAPÍTULO 2

UMA PROPOSTA DE CRIAÇÃO DE APPLETS

2.1 Aprendendo Análise Comninatória com Applets do GeoGebra

A Análise Combinatória é um tema apresentado no ensino fundamental e médio. As diretrizes educacionais recomendam que, desde o início do Ensino Fundamental I até o Ensino Médio, os alunos sejam expostos a esse tipo de pensamento matemático. O seu estudo deve proporcionar aos alunos a aquisição da habilidade de pensar criativamente e utilizar diferentes estratégias de resolução. Considerando as dificuldades de aprendizagem que os alunos geralmente têm ao estudar a Análise Combinatória, apresentaremos nesse trabalho quatro applets do Geogebra utilizados em uma sequência didática, com o objetivo de demonstrar como o uso de softwares pode motivar e envolver os alunos, proporcionando uma melhor fixação da aprendizagem em relação aos conceitos de contagem.

Sequência Didática (SD) é uma técnica pedagógica que se utiliza de um conjunto de atividades ordenadas para consolidar conceitos em ambientes escolares, com aplicações em diversas etapas do ensino. Zabala (1998) define Sequência Didática como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Dessa forma, o docente, com base nos objetivos que pretende alcançar com seus alunos, deve planejar cuidadosamente uma série de atividades com o propósito de promover a compreensão dos temas abordados na unidade didática proposta. É fundamental que tais atividades sejam estruturadas de maneira clara e organizada para alcançar os resultados desejados.

Uma Sequência Didática é uma série de atividades planejadas pelo professor para explorar o conhecimento dos alunos em sala de aula. Ela consiste na seleção e organização de atividades que visam atingir objetivos específicos de aprendizagem e aprimoramento das habilidades dos estudantes em relação ao conteúdo estudado. Paula e Barreto (2016) destacam que, Sequência Didática não se trata de um aglomerado de atividades soltas, mas sim representa uma articulação entre as atividades, que devem proporcionar níveis progressivos de desafios e habilidades necessárias, além da necessidade de o professor ter definido o objetivo da aprendizagem.

Monteiro (2019) diz que a utilização de sequências didáticas como recurso pedagógico permite ao professor organizar o conteúdo de forma estruturada, partindo da problematização para orientar os alunos a revisitar seus conhecimentos prévios e construir novos significados. Além disso, a sequência didática promove a participação ativa dos alunos, incentivando-os a resolver situações-problemas e a desenvolver habilidades de pensamento crítico e reflexivo. Sendo assim, ao utilizar a Sequência Didática como recurso pedagógico, o professor é capaz de adotar uma nova perspectiva em relação à organização do conteúdo, partindo da problematização para orientar os alunos a revisitar seus conhecimentos prévios e construir novos significados.

Nesse capítulo apresentamos uma Sequência Didática com o objetivo de proporcionar um ambiente favorável para que os alunos se sintam motivados e compreendam os conceitos de Análise Combinatória, identificando possíveis dificuldades durante o processo de aprendizagem. A proposta da Sequência Didática foi dividida em seis momentos que estão descritos abaixo:

1° momento: Apresentação do cronograma de atividades que compõem a sequência didática e a aplicação da metodologia Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), que consiste na apresentação de uma questão desafio antes de um determinado conteúdo. Além disso, serão apresentados de forma breve os conceitos sobre Análise Combinatória.

2° momento: Divisão da turma em grupos de até quatro alunos e apresentação da primeira situação-problema, que será usada na construção do conhecimento sobre o Princípio Fundamental da Contagem. Os alunos em grupo deverão discutir e descrever possíveis métodos de resolução para a situação-problema. Após isso, as respostas de cada grupo serão apresentadas para toda a turma, seguindo com o uso do primeiro applet, que abordará o PFC. Finalizamos com a apresentação da definição do PFC.

3° momento: Entrega aos grupos da segunda situação-problema, agora abordando o conceitos de Permutação. Novamente, estimula-se a discussão em grupo e a apresentação das possíveis respostas, seguindo para o uso do segundo applet, que apresentará de maneira dinâmica a resposta da situação-problema. Finalizando com a definição de Fatorial de um número natural e Permutação Simples.

4° momento: Entrega aos grupos a terceira situação-problema, que abordará, os conceitos de Arranjo Simples. Após discussão e resolução, os grupos deverão apresentar suas respostas ao ser disponibilizado o link do applet com a representação dinâmica do Arranjo Simples. Por fim, serão discutidos como toda a turma os conceitos e definição de Arranjo Simples.

5° momento: A última situação-problema abordará conceitos de Combinações Simples. Os aluno terão um tempo para a resolução e apresentação das respostas. Em seguida exibiremos o último applet.

6° momento: Discussão com a turma sobre as principais características e diferenças entre Permutação, Arranjo Simples e Combinação Simples, destacando a utilização do PFC com o objetivo de encontrar soluções de problemas. Além disso, será aplicado um questionário avaliativo com o objetivo de analisar a efetividade do SD.

O objetivo da aplicação dos appleste dentro de uma SD é proporcionar aos alunos uma participação ativa na aprendizagem de conceitos e na resolução de problemas. A organização da SD foi planejada para que cada situação-problema sirva como uma base sólida para a compreensão de conteúdos como Permutação, Arranjo Simples e Combinação Simples. Após a resolução de cada situação-problema, serão discutidas e apresentadas as diversas estratégias adotadas pelos grupos. Por fim, é exibiremos o applet para uma melhor visualização e entendimento do conteúdo. Os conteúdos estarão ordenados, permitindo a realização de atividades conectadas ao estudo da Análise Combinatória com níveis de dificuldade crescentes, o que favorece a aprendizagem dos alunos

Com o crescente uso de dispositivos móveis é importante investigar as possibilidades pedagógicas desses recursos. Para elaboração da SD, foram utilizando recursos gratuitos, como applets do Geogebra. Quatro applets foram criados, cada um abordando diferente conceitos da Análise Combinatória.

2.2 Apresentação da Sequência Didática

A seguir é apresentada a estrutura da Sequência Didática (SD), com seus objetivos, requisitos conceituais, atividades propostas, quantidade de aulas previstas, além dos materiais e recursos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Sequência Didática

Tema

Análise Combinatória.

Objetivos

- Objetivo principal:
  - Trabalhar com o processo de contagem, visando a construção de conceitos e conteúdos relativos à Análise Combinatória.
- Objetivos subsidiários:
  - Compreender e aplicar o Princípio Multiplicativo;
  - Utilizar materiais concretos para a resolução de problemas;
  - Integrar tecnologias digitais para reforçar o entendimento do Princípio Multiplicativo.

Requisitos

- Conhecimento prévio em operações aritméticas.

Atividades

- PFC: Primeira situação-problema com applet sobre PFC;
- FATORIAL: Definição de Fatorial;
- PERMUTAÇÃO SIMPLES: Segunda situação-problema com applet sobre PERMUTAÇÃO;
- ARRANJO SIMPLES: Terceira Situação-Problema com applet sobre ARRANJO SIMPLES;
- COMBINAÇÃO SIMPLES: Quarta Situação-Problema com applet sobre COMBINAÇÃO SIMPLES.

Recursos e materiais

- Computador, datashow, Wi-Fi para acesso à internet, smartphones, lousa, pincel.

Carga horária total

- 12 horas aulas.

2.3 Desenvolvimento das Atividades da Sequência Didática

Atividade nº 1: Montando um pedido na Sorveteria GelaDante.

O objetivo dessa atividade é estimular os alunos a utilizarem estratégias de Resolução de Problemas (RP), como recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Por meio dessa abordagem, o pensamento e a ação dos alunos são estimulados e aprimorados quando eles se envolvem ativamente no enfrentamento dos desafios que lhes são apresentados (BRASIL, 2002). Durante a realização dessa atividade, optamos por selecionar problemas que estimulassem o pensamento dos alunos. A seleção apropriada dos problemas é um dos primeiros passos para a implementação da Resolução de Problemas, vista aqui como uma abordagem metodológica de ensino potencial, pois, segundo Allevato e Onuchic, a RP proporciona um contexto altamente favorável para a construção do conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades, enquanto reconhece o papel essencial do professor como organizador e mediador no desenvolvimento dessas atividades. A seguir, apresentamos as situações-problemas que serão propostas aos alunos durante todas as atividade.

Lanches 1	Sucos
A- Clássico 3	Laranja
B - Supreme 3	Limão
C - Estrela 3	Cajá
D - Tradicional	

Tabela 2.1: Cardápio GelaDante

SITUAÇÃO-PROBLEMA 01 - A Sorveteria e Lanchonete GelaDante tem em seu cardápio as opções de lanches e sucos mostrado no quadro abaixo.

Quantas maneiras podemos montar um pedido composto por um lanche e um suco?

Nessa Sequência Didática foi concedido um período de quinze minutos para que os alunos lessem e resolvessem individualmente o problema. Durante esse tempo os alunos poderão levantar questionamentos para encontrar uma solução do problema. No entanto, o professor deve sempre responder com outra pergunta, procurando fazer com que eles visualizem suas dúvidas de uma maneira diferente. Essas novas perguntas visam auxiliar os alunos a ampliarem seu entendimento. Após todos os alunos resolverem e entregarem suas anotações com a resolução do problema proposto, o mesmo será projetado na lousa, dando início à sessão discussão. Nesse momento, serão disponibilizados mais dez minutos para alcançar um consenso em relação à resposta correta. Alguns alunos serão convidados a compartilhar suas ideias de resolução na lousa, independentemente de serem corretas ou não.

Em seguida apresentaremos o software GeoGebra, destacando algumas de suas ferramentas e funcionalidades para proporcionar um melhor entendimento. Após isso, exibiremos um applet que apresenta de forma dinâmica e interativa a resolução da situação-problema proposta. Os alunos terão dez minutos para explorar o applet. Após a interação com o GeoGebra, o applet será projetado na lousa, iniciando uma nova sessão de discussão. Nesse momento, serão disponibilizados mais cinco minutos para que todos possam contribuir com suas observações e verificar o entendimento dos conceitos do PFC. Na sequencia, serão apresentadas as telas do primeiro applet, onde será abordado o uso do PFC.

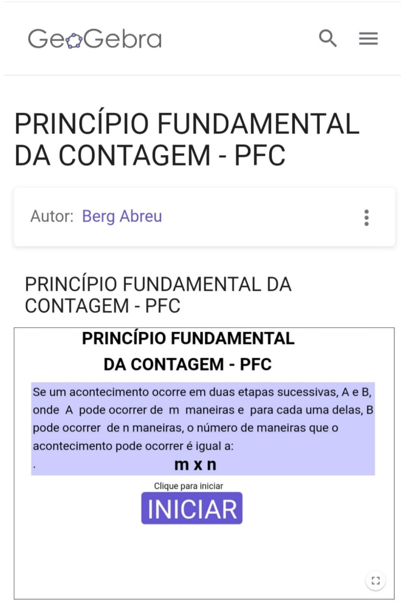


Figura 2.1: Tela inicial do PCF.

Na Figura 2.1, temos a Tela Inicial do applet onde é apresentada a definição do Princípio Fundamental da Contagem. Ao clicar no botão INICIAR, o aluno avançará para a próxima tela, onde encontrará a primeira situação-problema aplicando o conceito de PFC.

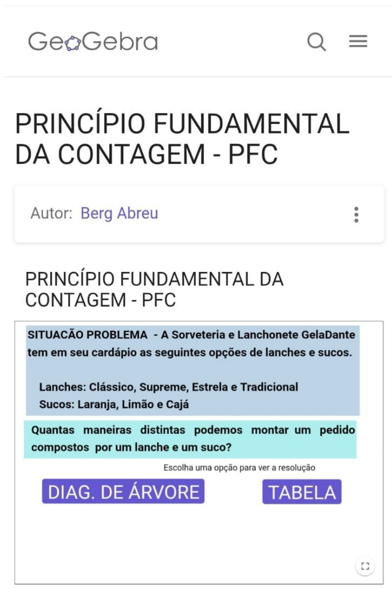


Figura 2.2: Situação-Problema 01.

Na Figura 2.2, o aluno tem a opção de escolher como a animação da resolução da Situação-Problema será apresentada, seja utilizando o diagrama de árvores ou uma tabela. Ao Clicar no botão DIAG. DE ÁRVORE será levado para as telas abaixo.

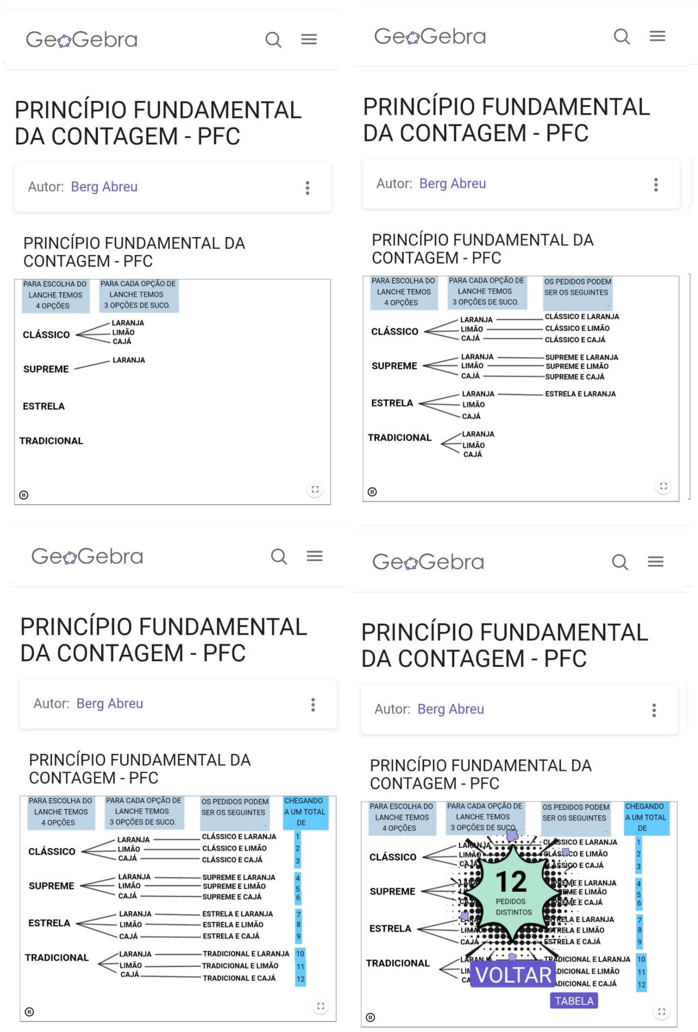


Figura 2.3: Diagrama de Árvore.

Na Figura 2.3, apresentamos quatro cenas da animação montadas,coluna por coluna, em velocidade reduzida. Na primeira coluna, são apresentadas as opções de lanche disponíveis e na segunda coluna, os sabores de suco que podem ser escolhidos. Na terceira coluna, são descritas todas as possibilidades de lanches que podem ser montados na sorveteria GelaDante. Por fim, na última coluna, é feita a contagem das possíveis maneiras de montar o lanche. Ao término da animação, o número total de pedidos possíveis é exibido, juntamente com os botões VOLTAR e TABELA. Clicando no primeiro botão, o usuário retorna à tela da Figura 2.2; clicando no segundo botão, será direcionado para as próximas telas.

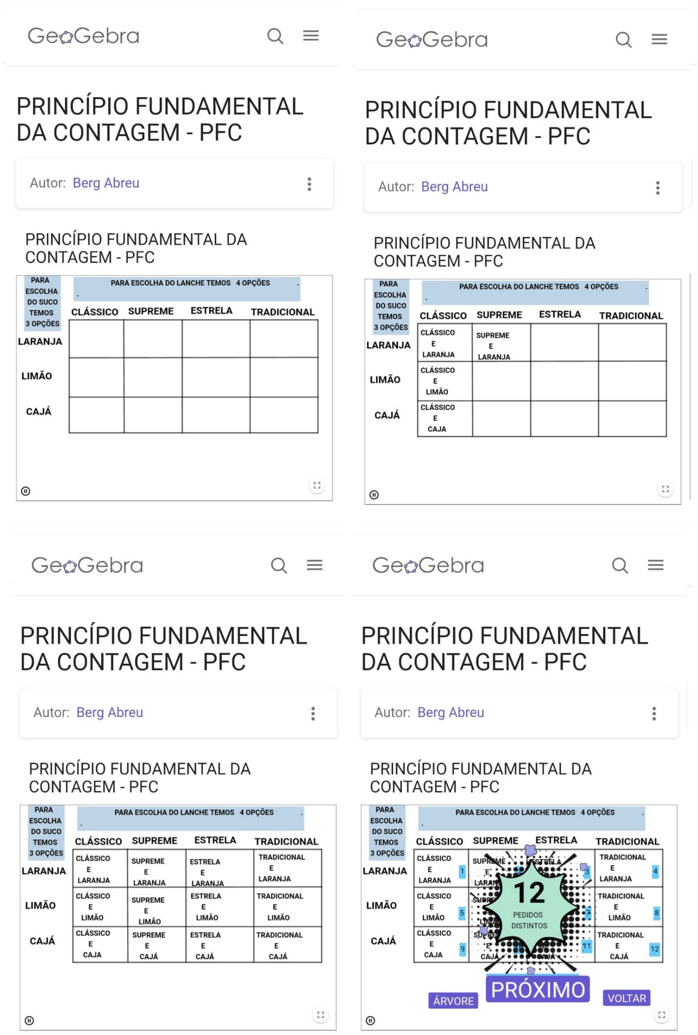


Figura 2.4: Montagem da tabela.

A Figura 2.4, mostra a sequencia da animação, onde é montada a tabela com todos os lanches possíveis. Inicialmente, surge uma tabela com 4 colunas e 3 linhas. Em cada coluna são mostrados os 4 sabores de lanche, enquanto nas linhas são exibidas as opções de suco. Conforme a animação progride, cada espaço vazio da tabela é preenchido com uma opção de pedido, combinando o nome da coluna com o da linha. Após o preenchimento da tabela, é realizada a contagem dos pedidos possíveis. Em seguida, são apresentados 3 botões: VOLTAR, PRÓXIMO e ÁRVORE.

Ao clicar no primeiro, o usuário retorna à Figura 2.2; ao clicar em ÁRVORE, retorna à tela da Figura 2.3; e ao clicar em PRÓXIMO, avança para a próxima sequência de telas.

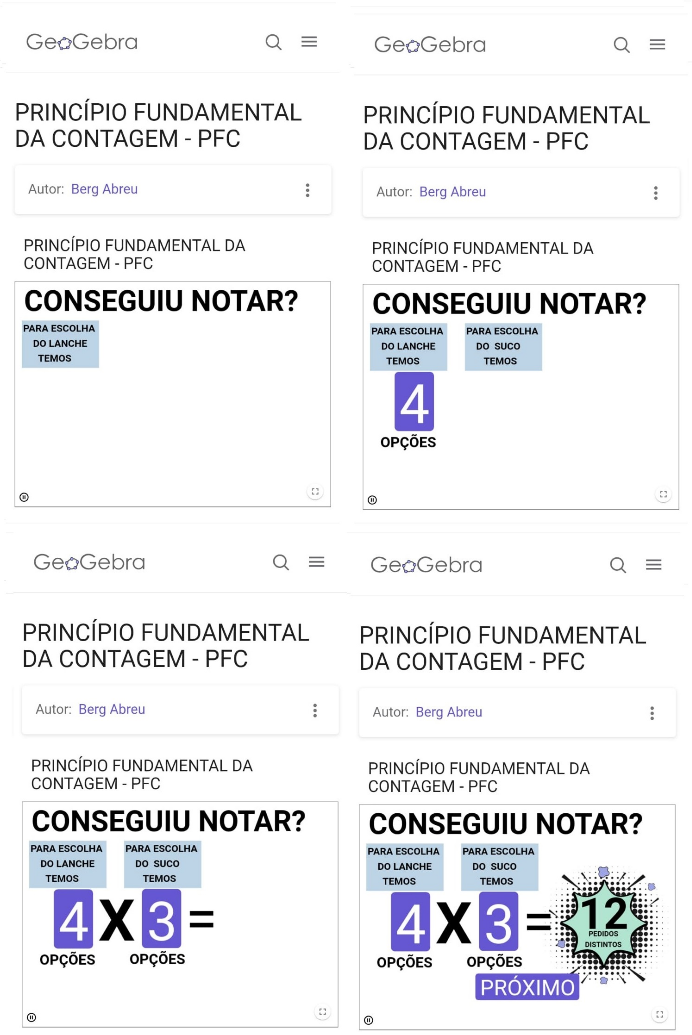


Figura 2.5: Animações do PFC.

A Figura 2.5, exibe uma pergunta ao usuário do applet: CONSEGUIU NOTAR?. Em seguida, uma animação chega ao resultado de 12 pedidos possíveis, valor que também é exibido no diagrama de árvore e na tabela, em imagens anteriores, o que é uma aplicação do PFC. Ao final, surge o botão PRÓXIMO, que leva à tela seguinte de encerramento do applet.

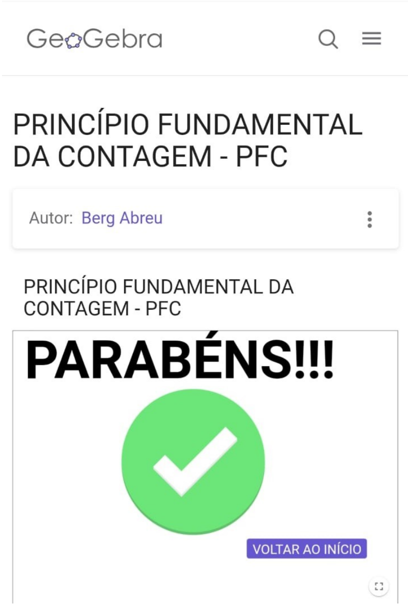


Figura 2.6: Tela final do PFC.

A Figura 2.6 apresenta a tela de encerramento do applet, com a opção de voltar a tela inicial para refazer todos os passos, caso o aluno apresente alguma dúvida ou tenha o interesse em refazer.

A próxima atividade mostra um problema da aplicação de Arranjo Simples.

Atividade nº 2: PFC e Fatorial

Nessa segunda atividade, apresentamos os conceitos de fatorial de um número natural, seguidos pela resolução de problemas relacionados ao PFC. Após a definição do fatorial, será proposta uma atividade de aprendizagem intitulada **EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 01 - PFC** composta por quatro problemas para serem resolvidos individualmente. O professor deverá estipular um prazo de 30 minutos para a realização da tarefa e observar como os alunos estão progredindo, intervindo diretamente caso identifiquem dificuldades ou dúvidas específicas durante a execução, mas sem apresentar a solução ou parte dela.

Após a conclusão da atividade, será realizada uma correção coletiva, permitindo que os alunos revisem seus erros e compreendam melhor os conceitos envolvidos. Na sequência, será reservado um momento final de cinco minutos para que os estudantes exponham suas observações sobre a atividade e avaliem seu entendimento sobre os conceitos de PFC e fatorial. Todas as atividades serão recolhidas ao final, com o objetivo de oferecer uma devolutiva em momento posterior, contribuindo para consolidar o aprendizado.

EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 01 - PFC

1. A lanchonete da praça oferece vários tipos de lanches:

Tipo de pão	Recheio
Pão de Sal	Queijo
Pão Doce	Frango
Pão de Forma	Presunto
Pão de leite	Bacon
	Ovo
	Peito de Peru

Tabela 2.2: Opções de lanche

De quantas maneiras possíveis podemos montar um lanche usando um tipo de pão e um tipo recheio?

(a) 10.
(b) 20.
(c) 24.
(d) 4.
(e) 6.

2. Quantos são os números de três dígitos distintos em que o digito 0 (zero) não ocupa a primeira posição?

(a) 1000
(b) 900.
(c) 810.
(d) 729.
(e) 648.

3. Uma bandeira é formada por 5 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores vermelha, verde, amarela e azul. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

(a) 5!.
(b) 4!.
(c) 4^5
(d) 5^4

(e) 4.3^4.

4. Felipe tem seis livros distintos de matemática. De quanta formas distintas Felipe pode organizar esses livros em uma estante?

(a) 6!

(b) 1.

(c) 6.

(d) 6^2.

(e) 5!.

Atividade nº 3: Permutação

A partir da premissa de que, nas atividades 1 e 2, os alunos tenham compreendido de maneira satisfatória o conceito de PFC e Fatorial de um número natural, progredimos para a atividade 3, com o intuito de explorar a Permutação Simples. Iniciamos essa etapa com a apresentação do segundo problema motivador, também de forma individual.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 02 - Um anagrama é uma palavra formada pela reorganização das letras, onde todas as letras originais devem ser utilizadas e nenhuma letra pode ser removida. Por exemplo, ROMA é um anagrama da palavra AMOR. Os anagramas são geralmente usados como um jogo de palavras ou como um desafio para testar a habilidade de alguém em rearranjar as letras para formar novas "palavras". Podemos determiná-los sem usar qaulquer fórmula, por exemplo, os anagramas da palavra AMOR, são:

AMOR, AMRO, AOMR, AORM, ARMO, AROM, MAOR, MARO, MOAR, MORA, MRAO, MROA, ORAM, ORMA, OMAR, OMRA, OARM, OAMR, RAMO, RAOM, RMAO, RMOA, ROAM, ROMA.

Resultando um total de 24 anagramas possíveis. Agora calcule quantos anagramas podemos formar com as palavras:

a) MEL

b) FLOR

c) CRAVO

Na sequência, foi concedido um período de quinze minutos para que os alunos lessem e resolvessem individualmente o problema. Durante esse tempo os alunos poderão levantar questionamentos objetivando encontrar uma solução para o problema. Após todos resolverem e entregarem suas anotações com a resolução do problema proposto, o problema será projetado na lousa, dando início à sessão de discussão. Nesse momento, serão disponibilizados mais dez minutos a fim de alcançar um consenso em relação à resposta correta. Alguns alunos serão convidados a compartilhar suas ideias de resolução na lousa, independentemente de serem corretas ou não. Em seguida será disponibilizado o applet, que apresenta de forma dinâmica e interativa a resolução da **Situação-Problema 02**, para que os alunos manipulem por 10 minutos. Em seguida o applet será projetado na lousa, dando início à uma nova sessão discussão. Nesse momento, serão disponibilizados mais cinco minutos a fim de que todos possam dar sua contribuição sobre o que foi apresentado e verificar o entendimento dos conceitos de Permutação Simples. A seguir são apresentadas as telas do segundo applet onde é abordado o conceito de Permutação Simples.

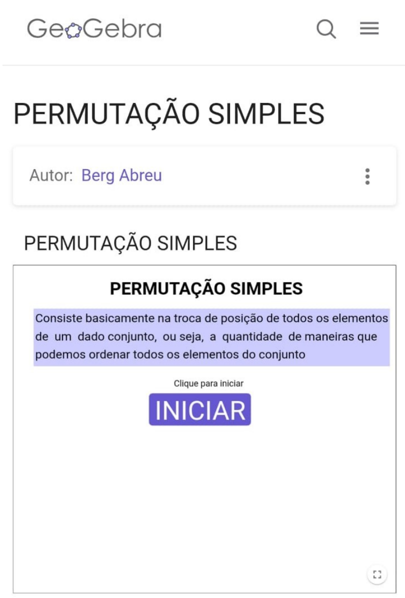


Figura 2.7: Tela inicial de Permutação Simples.

Na Figura 2.7, temos a Tela Inicial do applet. Nesta tela, é apresentada a definição de Permutação Simples. Ao clicar no botão INICIAR, o aluno avançará para a próxima tela, onde encontrará a segunda **Situação-Problema 02** abordando o conceito de Permutação Simples.

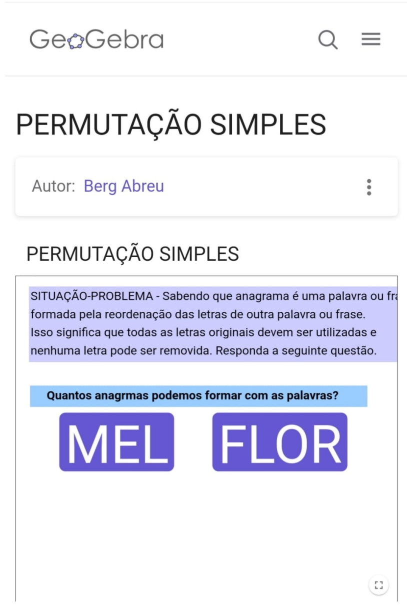


Figura 2.8: Apresentação da situação-problema 02.

Na Figura 2.8 é apresentada a **Situação-Problema 02** onde o aluno tem a possibilidade de escolher com qual palavra, MEL ou FLOR, iniciará a animação, clicando em um dos respectivos botões, sendo direcionado para a tela da Figura 2.9. Ao clicar na opção MEL o applet apresenta as seguintes telas.

Figura 2.9: Tela inicial do Diagrama de Árvore da palavra MEL.

A última figura apresenta uma animação do diagrama de árvore , formando os anagramas da palavra mel. Ao selecionar o botão ÁRVORE, a animação segue para as telas abaixo.

Figura 2.10: Animações do Diagrama de Árvore.

A Figura 2.10 apresenta quarto cenas da animação que mostram a montagem dos anagramas da palavra MEL. Na primeira coluna, são exibidas as opções de escolha para a primeira letra que formará o anagrama. Na segunda coluna, são mostradas as opções restantes para a segunda letra. Na terceira coluna, estão as opções para a última letra. Na quarta coluna, são descritos todos os anagramas possíveis da palavra MEL. Por fim, na última coluna, é realizada a enumeração dos possíveis anagramas da palavra escolhida, terminando a animação exibindo o número total de anagramas obtidos, juntamente com o botão PRÓXIMO, que levará para a tela seguinte.

Figura 2.11: Iniciar o PFC da palavra MEL.

As Figuras 2.11 e 2.12 apresentam uma animação aplicando PFC na contagem de anagramas da palavra mel.

Figura 2.12: Animações do PFC aplicado a palavra MEL.

A animação da Figura 2.12 demonstra as diferentes possibilidades para escolher a primeira, a segunda e a terceira letras da palavra MEL. Primeiramente, há 3 opções para a escolha da primeira letra, pois qualquer uma das três letras (M, E ou L) podem ser escolhidas. Depois de escolher a primeira letra, restam 2 opções para a segunda. Finalmente, para a terceira letra, resta apenas 1 opção, pois apenas uma letra ainda não foi utilizada. Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), multiplicamos essas possibilidades, obtendo $3 \times 2 \times 1 = 6$ anagramas possíveis para a palavra MEL. Ao final da animação, é exibido o botão PRÓXIMO, que abrirá a tela de exibição do diagrama de árvore da palavra FLOR.

Figura 2.13: Tela inicial do Diagrama de Árvore da palavra FLOR.

A Figura 2.13 inicia a construção do diagrama de árvore da palavra FLOR. Ao selecionar o botão ÁRVORE a animação segue, sucessivamente, para as telas da Figura 2.14.

Figura 2.14: Diagrama de Árvore palavra FLOR.

Na primeira coluna da primeira tela tem-se o número de letras que podem ser escolhidas, isto é, F, L, O ou R. Na segunda, coluna tem-se as letras disponíveis após a primeira escolha, por exemplo, se a primeira letra é o F, restarão as letras L,O ou R. Na última animação, tem-se o número de todos os anagramas possíveis. Ao clicar no botão PRÓXIMO inicia-se a animação da Figura 2.15.

Figura 2.15: Iniciar o PFC da palavra FLOR.

A figura 2.15 inicia o calculo do número de anagramas da palavra FLOR, ao selecionar o botão PFC.

Figura 2.16: Contagem dos anagramas da palavra FLOR.

A Figura 2.16 apresenta quatro cenas com a resolução da situação-problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Nessa animação, são mostradas as possibilidades para a escolha das letras da palavra FLOR. Primeiramente, há 4 opções para a escolha da primeira letra, pois qualquer uma das quatro letras (F, L, O ou R) podem ser escolhidas. Depois de escolher a primeira letra, restam 3 opções para a escolha da segunda letra, pois apenas três letras permanecem disponíveis. Em seguida, restam 2 opções para a escolha da terceira letra, já que duas letras ainda não foram utilizadas. Finalmente, para a quarta e última letra, resta apenas 1 opção, pois somente uma letra ainda está disponível. Utilizando o PFC, multiplicamos essas possibilidades, para obter o total de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas possíveis para a palavra FLOR. Ao final da animação, será exibido o botão PRÓXIMO, que levará para a tela seguinte de encerramento do applet.

Figura 2.17: Tela final de Permutação Simples.

Atividade nº 4: Conceitos de Permutação Simples

Na quarta atividade, serão apresentados conceitos, definições e formas de cálculo referentes à Permutação Simples, seguidos pela resolução de outros problemas envolvendo permutação, que podem ser respondidos utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Após a conclusão da parte conceitual da Permutação Simples, será proposta uma atividade de aprendizagem , denominada **EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 02 - PERMUTAÇÃO SIMPLES**, composta por quatro problemas a serem resolvidos individualmente, com um prazo estipulado de 30 minutos. Durante a execução, o professor observará o progresso dos alunos e entrevistará sempre que identificará dúvidas ou dificuldades específicas, oferecendo orientações pontuais.

Ao término do prazo, será realizada uma correção coletiva, permitindo que os alunos revisem seus erros e esclareçam dúvidas em grupo. As atividades serão recolhidas ao final para que o professor possa analisá-las mais detalhadamente e fornecer uma devolutiva em um momento posterior. Essa devolutiva será feita de forma coletiva, destacando os erros mais comuns, os pontos que precisam de reforço e os acertos que podem servir de exemplo para todos, promovendo um feedback construtivo que fortalece o aprendizado. Além disso, serão reservados cinco minutos finais para que os estudantes compartilhem suas observações sobre a atividade, facilitando a compreensão dos conceitos de trabalho

EXERCÍCIO E DE CONSOLIDAÇÃO 02 - PERMUTAÇÃO SIMPLES

1. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra TRIUNFO?

(a) 7
(b) 5!
(c) 6!
(d) 120
(e) 7!

2. Quantos números de cinco algarismos distintos formamos com os algarismos 5,6,7,8 e 9?

(a) 1
(b) 6
(c) 24
(d) 120
(e) 5

3. Quantos são os anagramas da palavra "QUIJINGUE"?

(a) 9.
(b) 9!
(c) $\frac{9!}{4!}$
(d) $\frac{9!}{2!}$
(e) $\frac{9!}{2!.2!}$

4. Isadora tem dois livros distintos de matemática e três livros distintos de Física. De quantos modos Isadora pode arrumar os seus livros, de modo que, livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

(a) 5
(b) 7
(c) 12
(d) 18
(e) 24

Atividade nº 5: Situação-Problema sobre Arranjo Simples.

Partindo da premissa de que nas atividades de 1 a 4, os alunos tenham compreendido de maneira satisfatória o conceito de PFC, fatorial de um número natural e permutação simples, progredimos para a atividade 5, com o intuito de explorar os conceitos de arranjo simples. Iniciamos esta etapa com a apresentação do segundo problema motivador, também de forma individual.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 03 - Em um Colégio foi aberto o período eleitoral para ocupação dos cargos de Direção e Vice Direção. Sabendo que há quatros professores interessados e habilitados para concorrer as funções, que ambas devem ser preenchidas e que um mesmo professor não pode ocupar o dois cargos simultaneamente, de quantas formas distintas as funções de Direção e Vice Direção poderão ser ocupadas?

Seguindo a mesma estrutura utilizada nas situações-problemas anteriores, foi concedido um tempo de quinze minutos para que os alunos lessem e resolvessem individualmente o problema. Durante esse tempo os alunos podem levantar questionamentos enquanto tentam encontrar a solução. Após todos resolverem e entregarem suas anotações com a resolução do problema proposto, o mesmo será projetado na lousa, dando início à sessão de discussão. Nesse momento, serão disponibilizados no mínimo mais dez minutos para alcançar um consenso em relação à resposta correta. Alguns alunos serão convidados a compartilhar suas ideias de resolução na lousa, independentemente de serem corretas ou não. Em seguida será disponibilizado o applet que apresenta de forma dinâmica e interativa a resolução da situação-problema proposta, com quinze minutos para utilização e interação. Após todos os alunos interagirem com o GeoGebra, o applet será projetado na lousa, dando início à uma nova sessão de discussão. Serão disponibilizados mais dez minutos para que todos possam contribuir com o que foi apresentado e verificar o entendimento dos conceitos de Arranjo Simples. A seguir, são apresentadas as telas do terceiro applet onde é abordado o Arranjo Simples.

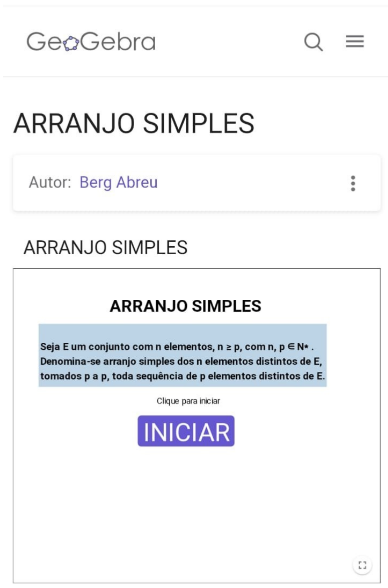


Figura 2.18: Tela inicial de Arranjo Simples.

Na Figura 2.18, temos a Tela Inicial do applet sobre Arranjo Simples. Nesta tela, é apresentada a definição de Arranjo Simples. Ao clicar no botão INICIAR, o aluno avançará para a próxima tela, onde encontrará a terceira situação-problema.

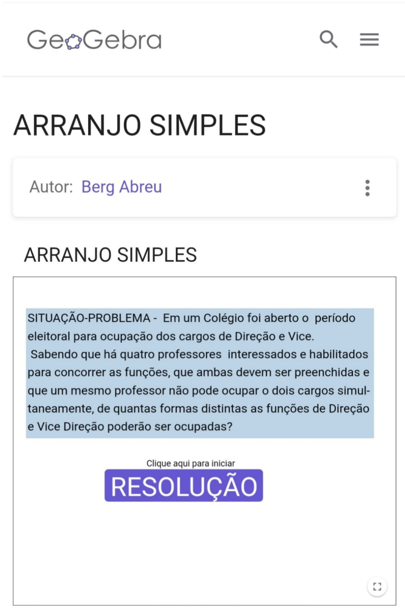


Figura 2.19: Situação-Problema de Arranjo.

Na Figura 2.19, é apresentado a terceira situação-problema e para iniciá-la o aluno deve clicar em RESOLUÇÃO, sendo levado para a tela da Figura 2.20.

Figura 2.20: Tela inicial de Arranjo Simples.

Na Figura 2.20 são apresentados os quatro bonequinhos representando os professores abordados na questão. Ao clicar em FORMAR AS CHAPAS é inciada a animação da Figura 2.21.

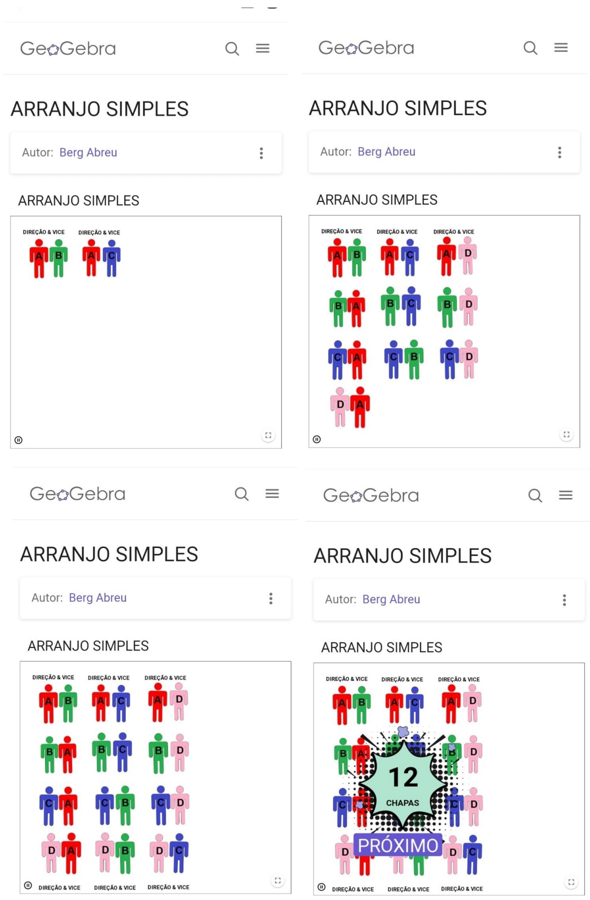


Figura 2.21: Arranjos possíveis.

A Figura 2.21 exibe a animação que apresenta todas as chapas que podem ser formadas e o número total delas. O botão PRÓXIMO levará para a tela da Figura 2.22.

Figura 2.22: Distinção de chapas formadas por dois professores.

A Figura 2.22 apresenta a distinção entre as chapas formadas por dois professores. Observamos que a chapa em que o professor A é o Diretor e o professor B é o Vice-Diretor é diferente daquela em que o professor B é o candidato a Diretor e o professor A é o Vice-Diretor. E ao clicar no botão PFC é apresentado a animação mostradas na Figura 2.23.

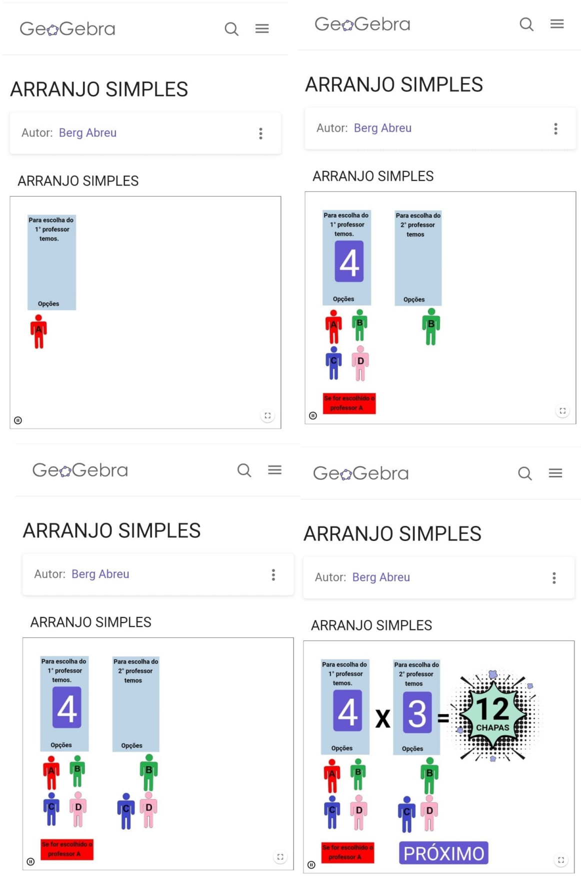


Figura 2.23: Animação para Arranjo Simples.

A Figura 2.23 apresenta quatro cenas das animações que mostra a resolução da terceira situação-problema, com uso do PFC. Nessas animações, são mostradas os números de possibilidades para escolha do professor que pode ocupar o cargo de direção, seguido do número de professores que podem ocupar a vice-direção. Em seguida, concluímos com a tela de encerramento desta situação-problema.

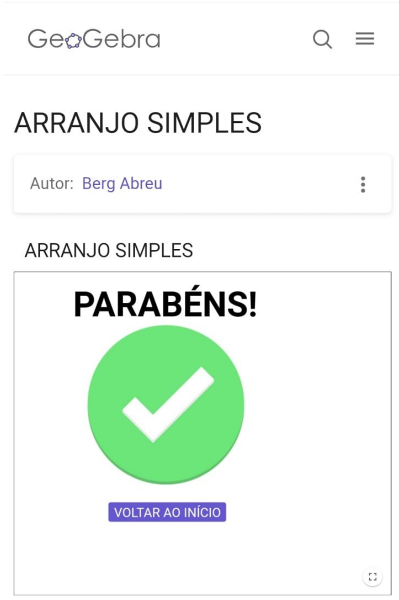


Figura 2.24: Tela final Arranjo.

Atividade nº 6: Conceitos de Arranjo Simples

Nesta atividade da Sequência Didática, serão apresentados conceitos, definições e métodos de resolução relacionados a Arranjo Simples, e destacando as semelhança e diferenças com Permutação Simples. Após a conclusão da conceitualização de Arranjo Simples, será proposta uma atividade de aprendizagem, o **EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 03 - ARRANJO SIMPLES**, com quatro problemas que devem ser resolvidos individualmente, seguidos de uma correção coletiva. O professor deve estipular um prazo de 30 minutos para que os alunos resolvam a atividade. Durante esse período, será observado como os alunos estão respondendo e se necessitam ou solicitam a intervenção do professor. Após o término do tempo, todas as atividades devem ser recolhidas para posterior devolutiva. Finalmente, serão disponibilizados mais cinco minutos para que os alunos possam compartilhar suas observações sobre a atividade proposta e verificar o entendimento dos conceitos.

EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 03 - ARRANJO SIMPLES

1. Quantas são as senhas numéricas com 4 dígitos distintos ?

   (a) 4.
   (b) 4!
   (c) 10!
   (d) $\frac{10!}{4!} = 10.9.8.7.6.5$

(e) $\frac{10!}{6!} = 10.9.8.7$

2. Miguel possui 12 livros distintos de matemática. De quantas maneiras distintas Miguel pode organizar 4 livros na sua mochila escolar?

   (a) 4!

   (b) 12!

   (c) $\frac{12!}{8!}$

   (d) $\frac{12!}{4!}$

   (e) $\frac{12!}{8!.4!}$

3. Considerando que há 10 pedras preciosas distintas e um quadro cuja moldura possui 6 espaços para cravejar as pedras. De quanta formas podemos cravejar os 6 espaços da moldura usando a pedras preciosas disponíveis?

   (a) $\frac{10!}{6!}$

   (b) 10!

   (c) 10^6

   (d) $\frac{10!}{6!.4!}$

   (e) $\frac{10!}{4!}$

4. Com o objetivo de incentivar os estudantes da escola a participarem do evento junino, um colégio decidiu sortear 3 prêmios entre 15 estudantes que estiverem melhores caracterizados com roupas tipicas. Os prêmios são: um livro, um cesta com comidas tipicas e um tablet. De quantas maneiras distintas podemos realizar esse sorteio?

   (a) 2730

   (b) 15^3

   (c) 3^15

   (d) 15!

   (e) $\frac{15!}{3!}$

Atividade nº 7: Situação-Problema sobre Combinação Simples

Partindo da premissa de que, em todas as atividades desenvolvidas até aqui, os alunos tenham compreendido de maneira satisfatória os conceitos de PFC, fatorial de um número natural, permutação simples e arranjo simples, avançamos para a atividade 7. Nosso objetivo é explorar os conceitos de Combinação Simples, destacando suas semelhanças e diferenças em relação ao Arranjo Simples. Iniciamos essa etapa com a apresentação o quarto problema, também de forma individual.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 04 - No colégio será formada uma comissão para organizar e deliberar sobre quais itinerários formativos serão aplicados no próximo ano letivo. A comissão deverá ser composta por dois professores. Sabendo que há quatros professores interessados e habilitados para ocupar as funções, e que um mesmo professor não pode ocupar a duas funções simultaneamente, calcule de quantas formas distintas é possível formar as comissões. Observe que as comissões formadas pelos professores A e B, nessa ordem, são as mesmas que as formadas por B e A, devendo ser contadas uma única vez.

Seguindo o mesmo procedimento aplicadonas situações-problemas anteriores, foi concedido um tempo de quinze minutos para que os alunos leiam e resolvam individualmente o problema. Durante esse tempo os alunos podem levantar questionamentos na tentativa de encontrar uma solução. Após todos terem resolvido e entregue suas anotações com a solução do problema proposto, o mesmo será projetado na lousa, dando início à sessão de discussão. Nesse momento, serão disponibilizados, no mínimo, mais quinze minutos para que se chegue a um consenso sobre a resposta correta. Alguns alunos serão convidados a compartilhar suas ideias de resolução na lousa, independentemente de estarem corretas ou não. Em seguida, será disponibilizado um applet que apresenta de forma dinâmica e interativa a resolução da situação-problema proposta com quinze minutos para que os alunos interajam com ele. Após essa interação com GeoGebra, o applet será novamente = projetado na lousa, dando início a uma nova sessão de discussão. Nesse momento, serão disponibilizados mais cinco minutos para que todos possam contribuir com o que foi apresentado. A seguir, será apresentado o último applet onde foi abordada a Combinação Simples.

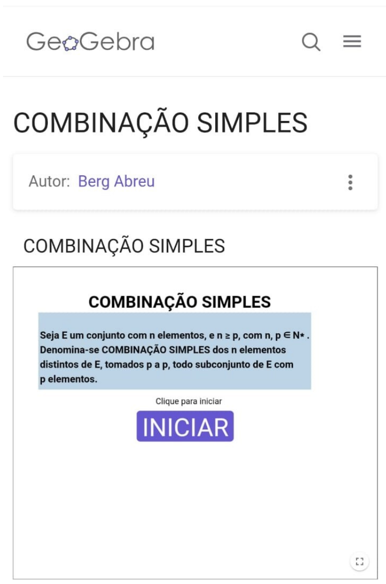


Figura 2.25: Tela inicial de Combinação Simples

Na Figura 2.25, temos a tela inicial do applet sobre Combinação Simples. Nessa tela, assim como nos três primeiros applets, é apresentada a definição de Combinação Simples.

Ao clicar no botão INICIAR, o aluno avançará para a próxima tela, onde encontrará a quarta e última situação-problema.

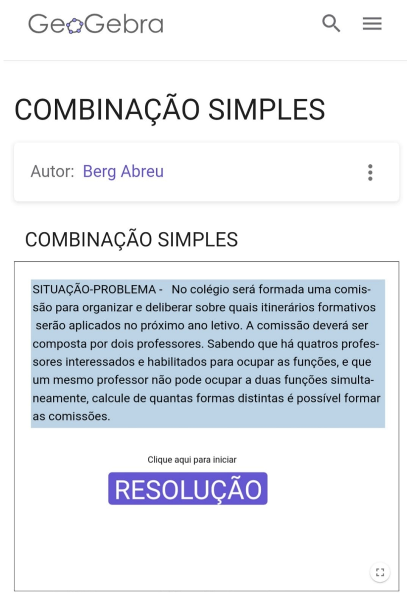


Figura 2.26: Tela com a Situação-Problema 4

Na Figura 2.26, é apresentada a quarta situação-problema. Para iniciar a animação da resolução, o aluno deve clicar no botão RESOLUÇÃO, sendo então levado para próxima tela.

Figura 2.27: Bonequinho representando os professores

Na Figura 2.27 são apresentados os quatro bonequinhos representam os quatro professores disponíveis para formar a comissão com dois deles. Ao clicar no botão FORMAR

AS COMISSÕES, inicia-se a animação mostrada na Figura 2.28.

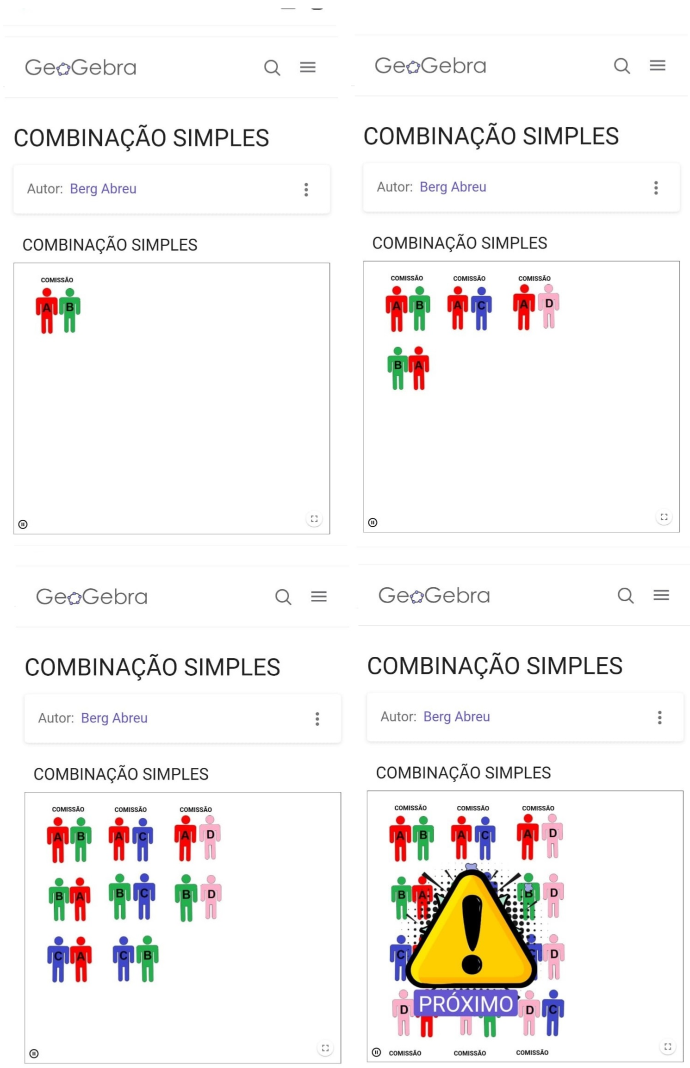


Figura 2.28: Tela com todas as combinações possíveis.

Na Figura 2.28, estão as cenas da animação em que são formadas as comissões com os professores disponíveis. Após a formação de todas as comissões, surge um símbolo de alerta e o botão "PRÓXIMO".

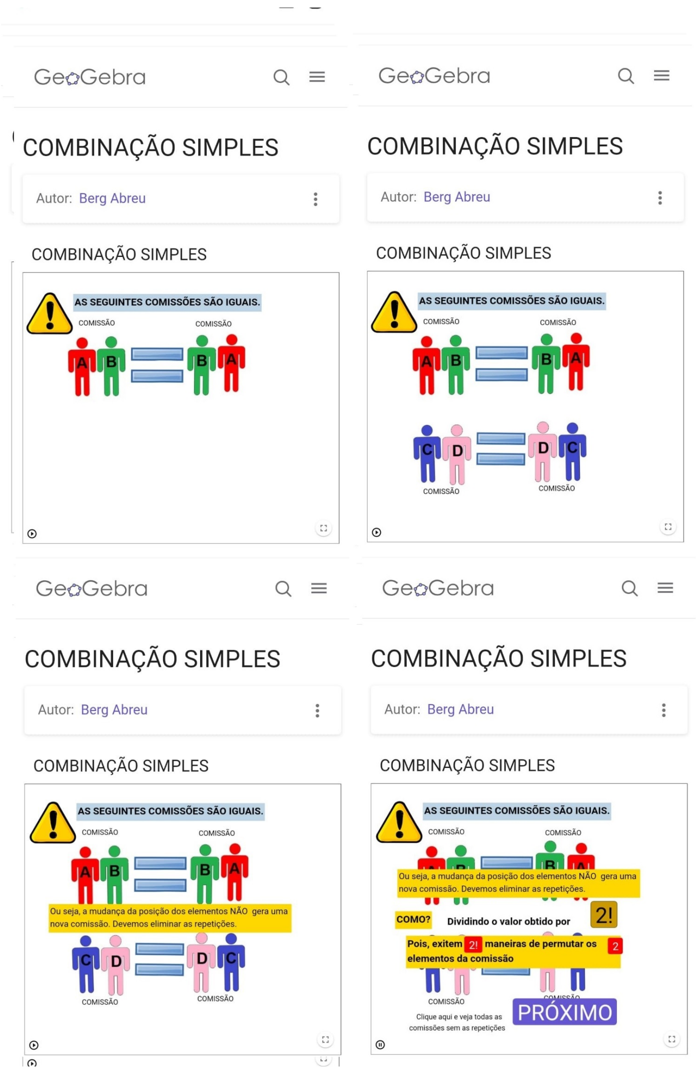


Figura 2.29: Telas descrevendo as comissões que se repetem.

Ao clicar em PRÓXIMO Figura 2.28, surge a animações da Figura 2.29, onde aparecem dois exemplos de comissões que se repetem e por isso, devem ser retiradas da contagem final. Na última cena, é destacado o processo de eliminação das repetições que devem ser excluídas da contagem.

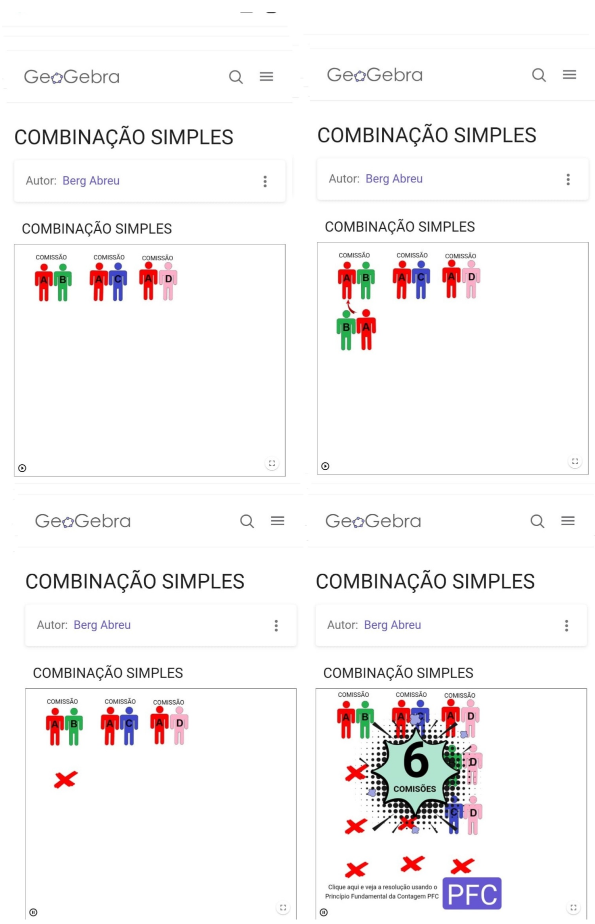


Figura 2.30: Contagem da comissões sem as repetições.

Na Figura 2.30, finalmente surge a contagem das comissões, sendo refeita e sinalizado, por meio de uma seta, aquelas que se repetem. Essas comissões são retiradas, e assim, aparece o botão PFC, que levará para a próxima figura, a Figura 2.31.

Figura 2.31: PFC para contagem das Combinação.

Na tela da Figura 2.31, apresenta-se uma resolução da quarta situação-problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Nessa animação, é mostrado o número de possibilidades de duplas de professores que formarão a comissão. Ao final, há um botão "PRÓXIMO"que levará para a tela seguinte, encerrando o applet.

Figura 2.32: Tela final de combinação simples.

Atividade nº 8: Conceitos de Combinação Simples

Nessa oitava atividade, serão apresentados conceitos e definições de Combinação Simples, destacando as semelhança e diferenças em relação ao Arranjo Simples. Ao final, será proposta uma atividade de aprendizagem, denominado **EXERCÍCIO DE CONSOLIDAÇÃO 04 - COMBINAÇÃO SIMPLES**, com quatro problemas, que devem ser resolvidos individualmente, seguidos de uma correção coletiva. O primeiro problema aborda o estudo de Arranjo Simples, enquanto os demais tratarão da Combinação Simples. Optamos por apresentar os problemas nessa configuração com o objetivo de fazer com que os alunos percebam as diferenças entre Arranjo e Combinação, ao mesmo tempo em que estabelecessem as relações entre os conceitos envolvidos. Ao entregar a atividade, o professor deve estipular um prazo de 30 minutos para que os alunos a solucionem. Em seguida, será observado como os alunos estão respondendo e se precisam ou solicitam a intervenção do professor. Passado o tempo, todas as atividades devem ser recolhidas com o objetivo de realizar a devolutiva em um momento seguinte. Também serão disponibilizados mais cinco minutos para que todos possam expor suas observações a respeito da atividade proposta e verificar o entendimento dos conceitos.

EXERCÍCIO E DE CONSOLIDAÇÃO 01 - PFC

1. A turma do terceiro ano deverá formar uma comissão de três alunos para decidir sobre a confraternização de final de ano. No entanto apenas seis alunos se propuseram a formar a comissão. De quantas formas distintas podemos formar essas comissões?

(a) 6!

(b) 6

(c) 20

(d) 120

(e) $\frac{6!}{3!}$

2. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e outro de 3 objetos?

(a) 8!

(b) 12!

(c) $\frac{8!}{5.3!}$

(d) $\frac{8!}{3!}$

(e) 3!

(f) 5!

3. Miguel possui 12 livros distintos de matemática e vai emprestar 4 dos seus livros para seu primo Vitor Hugo. De quantas maneiras distintas Miguel pode escolher os 4 livros a serem emprestados?

(a) 4!

(b) 12!

(c) $\frac{12!}{8!}$

(d) $\frac{12!}{4!}$

(e) $\frac{12!}{8!.4!}$

4. A Pizzaria tem em seu cardápio 10 sabores diferentes. Quantas pizzas com dois sabores a pizzaria pode montar?

(a) $\frac{10!}{8!.2!}$

(b) 90

(c) $\frac{10!}{8!}$

(d) $\frac{10!}{2!}$

(e) 10!

CAPÍTULO 3

PROGRAMANDO OS APPLETS COM USO DE GEOGEBRA.

3.1 GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica e gratuito, disponível para diferentes sistemas operacionais como iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Ele pode ser baixado por meio da Play Store ou do site oficial www.geogebra.org. Essa ferramenta é amplamente utilizada em sala de aula para tornar o ensino de conteúdos matemáticos mais acessível e didático. Além de possibilitar o trabalho com geometria e álgebra, o GeoGebra inclui funcionalidades como planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo, o que o torna uma escolha versátil para professores e alunos da Educação Básica, abrangendo desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Por ser um software livre e intuitivo, o GeoGebra incentiva a interação dos alunos com conceitos matemáticos de forma prática e exploratória. Como afirmam Arzarello et al. (2012), o GeoGebra permite a criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos, onde os alunos podem explorar propriedades geométricas e algébricas simultaneamente, observando como pequenas alterações em um parâmetro podem influenciar o comportamento geral de uma função ou forma. Isso torna o aprendizado mais tangível e motivador, permitindo que os alunos manipulem e experimentem as ferramentas disponíveis.

O GeoGebra se destaca como uma ferramenta que transforma a experiência de aprendizado em matemática ao torná-la mais visual e interativa. Sua interface amigável permite que alunos manipulem equações, gráficos e formas de forma dinâmica, observando mudanças em tempo real a partir de variáveis ajustadas por eles mesmos (Bretas, 2020; Gerônimo et al., 2010). Na janela de visualização, por exemplo, é apresentado o plano cartesiano, onde objetos podem ser inseridos e modificados utilizando a barra de ferramentas ou o campo de entrada por meio de comandos específicos. Paralelamente, a Janela de Álgebra registra o histórico de comandos e objetos, possibilitando edições que automaticamente se refletem na visualização gráfica. Essa dinâmica torna mais acessível a compreensão de conceitos matemáticos abstratos e promove um aprendizado mais envolvente.

Além de facilitar o entendimento, o GeoGebra oferece aos professores a possibilidade de criar atividades interativas que incentivam a exploração autônoma por parte dos alunos (Bretas, 2020). Com isso, os estudantes podem descobrir conceitos matemáticos por conta própria, o que promove maior engajamento e senso de protagonismo no aprendizado. A interatividade do software se torna ainda mais valiosa ao ser utilizada para a criação de jogos educativos digitais, que podem ser adaptados às necessidades específicas de diferentes turmas e níveis de ensino, ampliando sua aplicabilidade pedagógica.

Pinheiro (2017) diz que a flexibilidade do GeoGebra também permite a personalização de conteúdos, algo especialmente útil no desenvolvimento de jogos que ajudam os alunos a aprimorar habilidades matemáticas essenciais, como a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a criatividade. Essas possibilidades fortalecem o papel do professor como mediador do conhecimento, ao mesmo tempo em que colocam o aluno no centro do processo de aprendizado, facilitando a construção de significados.

Dessa forma, o GeoGebra não é apenas uma ferramenta tecnológica, mas um aliado poderoso no ensino de matemática. Ele combina recursos visuais, dinâmicos e interativos que transformam a sala de aula em um espaço mais atrativo e eficaz para a aprendizagem. Sua natureza de código aberto e acessibilidade amplia ainda mais seu impacto, possibilitando que tanto professores quanto alunos explorem suas funcionalidades para criar experiências educacionais enriquecedoras.

Entre suas principais características, destacam-se a integração dinâmica entre gráficos, álgebra e tabelas, sua interface amigável e a capacidade de criar aplicativos interativos para páginas web. O software está disponível em vários idiomas, atendendo milhões de usuários em todo o mundo. Gratuito e de código aberto, o GeoGebra não apenas facilita o ensino e aprendizado, mas também democratiza o acesso a recursos avançados de matemática e tecnologia.

3.2 Interface GeoGebra

Para a criação dos Applets aqui apresentados foi usado a versão online do GeoGebra. Observe, na Figura 3.1, que o software dispõe de uma janela de visualização onde é apresentado o plano cartesiano. Nesse ambiente, o aluno pode interagir com gráficos e objetos, os quais são inseridos por meio da barra de ferramentas ou do campo de entrada, utilizando comandos específicos. Na barra de ferramentas exibe todos os objetos e funções disponíveis, que podem ser utilizados tanto pelo professor quanto pelo aluno na elaboração de atividades. Complementarmente, há uma Janela de Álgebra, onde fica registrado o histórico de comandos e objetos inseridos, possibilitando a interação e edição de fórmulas. Essas edições geram alterações automáticas e dinâmicas nos objetos e funções exibidas na janela de visualização. Assim, a compreensão de conceitos abstratos torna-se mais acessível, promovendo o envolvimento do aluno com os conteúdos de forma prática e lúdica.

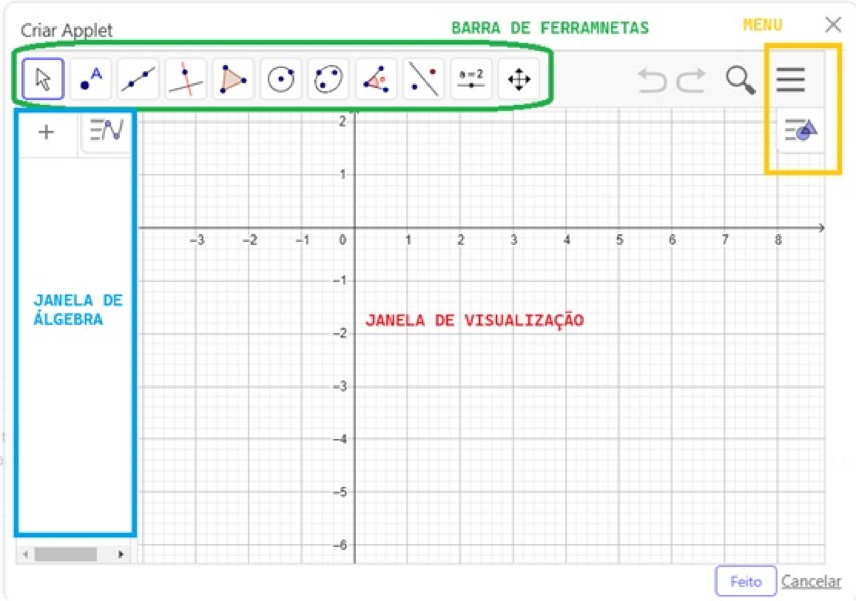


Figura 3.1: Tela Inicial do GeoGebra

3.3 Página do autor

A Página do Autor no GeoGebra é o ponto de partida para professores, estudantes e criadores que desejam organizar e compartilhar seus conteúdos matemáticos e interativos. Ao acessar essa página, o usuário se depara com uma interface intuitiva e funcional, projetada para facilitar a navegação e o gerenciamento de recursos.

Na parte superior da tela, há uma barra de navegação que inclui as opções principais: Perfil , Meus Materiais , Explorar , e Configurações . O nome do autor e uma foto de perfil (se configurada) aparecem em destaque, personalizando a página.

Logo abaixo, uma seção chamada Meus Materiais apresenta uma visão geral dos conteúdos publicados, como gráficos, atividades, simuladores, applets, jogos e livros interativos. Esses materiais podem ser organizados em categorias, facilitando o acesso e a reutilização. A visualização pode ser ajustada em formato de lista ou grau, dependendo da preferência do usuário.

A área central da página exibe recomendações de atividades recentes e as mais populares do autor, permitindo fácil acesso a trabalhos em destaque. Um botão de ação rápida, geralmente localizado no canto superior direito, possibilita criar novos materiais ou iniciar projetos diretamente.

Por fim, o rodapé da página oferece links para suporte, comunidade e configurações avançadas, incentivando a integração com outros usuários e o aprimoramento constante dos conteúdos criados. É portanto, um ambiente prático e versátil para estimular a criatividade e o compartilhamento de conhecimento na comunidade GeoGebra.

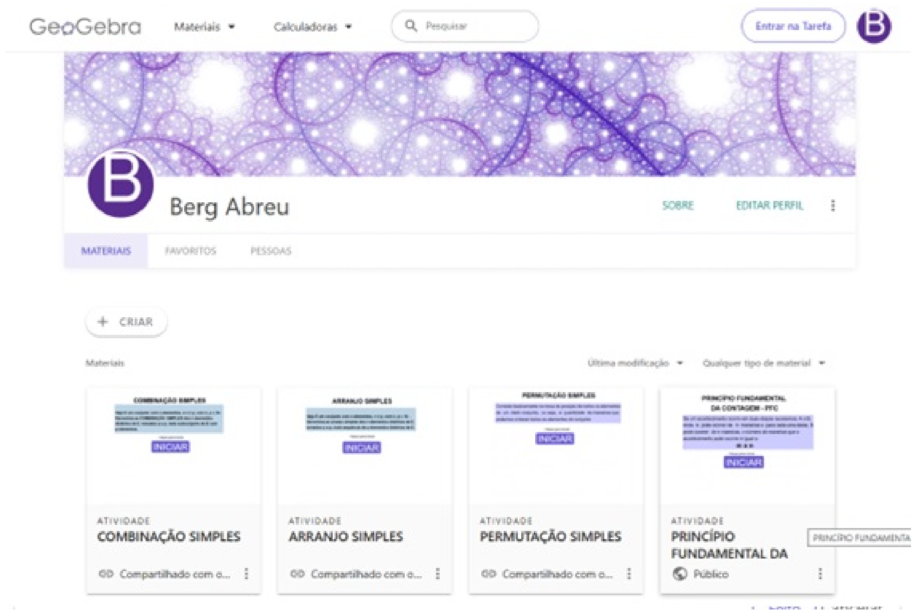


Figura 3.2: Página incial do Autor

3.4 Comandos Utilizados

Para desenvolver applets no GeoGebra, ou qualquer outro material, é fundamental compreender os princípios básicos de seu funcionamento. As construções realizadas no software são compostas por diversos objetos, como variáveis, pontos, retas, polígonos e gráficos. Cada um desses objetos possui propriedades geométricas, que definem aspectos como posição e forma (por exemplo, a localização de um ponto ou o raio de um círculo), além de atributos que determinam características visuais, como cor, transparência e preenchimento. Esses elementos trabalham de forma integrada, permitindo a criação de estruturas dinâmicas e interativas.

Uma característica essencial do GeoGebra é a relação de dependência entre os objetos. Quando uma propriedade geométrica de um objeto é alterada, todos os objetos dependentes dele são automaticamente recalculados. Por exemplo, se a exibição de uma imagem estiver condicionada ao valor de n, sendo n um controle deslizante, a imagem será mostrada apenas quando n assumir o valor específico previamente definido.

Além de possibilitar construções geométricas interativas, o GeoGebra permite a criação de animações, sendo amplamente utilizado para ilustrar conceitos matemáticos de forma visual e prática. No entanto, para explorar todo o potencial do software e desenvolver applets que exijam maior interação com o usuário, é necessário um entendimento mais avançado de seus comandos. Esse aprofundamento possibilita a elaboração de atividades educativas ainda mais criativas e complexas.

Ao dominar essas funcionalidades, professores e alunos podem ir além das aplicações tradicionais do GeoGebra, utilizando-o como uma plataforma para criar experiências inovadoras no ensino da matemática. A integração entre objetos, propriedades e atributos, aliada à possibilidade de programação, transforma o software em uma ferramenta versátil para promover um aprendizado ativo e envolvente.

Nesta seção, serão apresentados os comandos e elementos utilizados no GeoGebra com o objetivo de esclarecer o funcionamento dos Comandos de Entrada, que definem ações específicas. Será fornecida também uma descrição detalhada do uso e do significado de cada item solicitado na estrutura, permitindo uma compreensão clara e objetiva sobre como utilizar os comandos de forma eficaz.

Controle Deslizante

Na barra de ferramentas do GeoGebra, a opção Controle Deslizante, figura 3.3 permite criar uma variável que apresenta variações numéricas com um incremento definido pelo usuário. Essas variáveis são extremamente importantes para a construção de interações, pois, ao variar dentro de um intervalo previamente previsto, elas facilitam a criação de condições para executar comandos, associar imagens, criar ações e alterar o estado de objetos.

O controle deslizante oferece uma ampla gama de funcionalidades e possibilidades de clareza entre diferentes elementos no GeoGebra. Suas descobertas incentivam a criatividade, permitindo explorar diversas aplicações e criar interações dinâmicas e personalizadas.

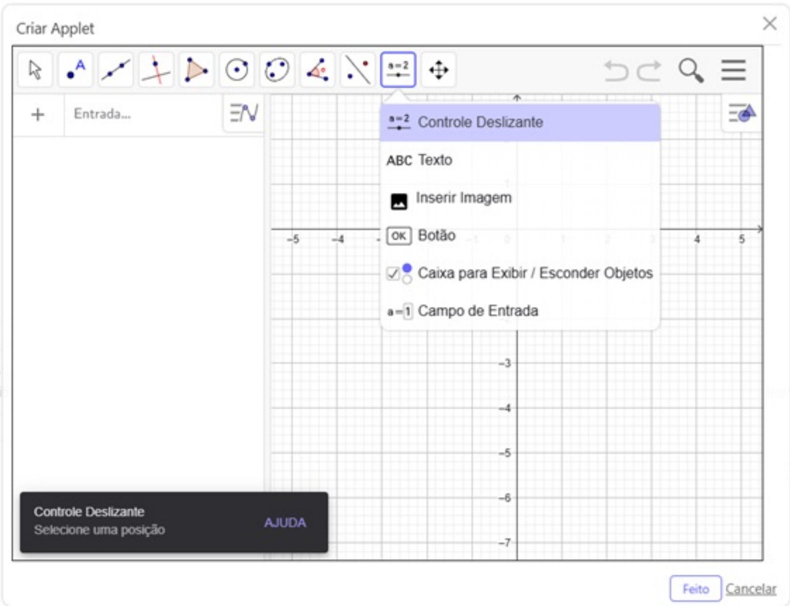


Figura 3.3: Controle Deslizante

Inserir Botão

O botão é um dos elementos mais tradicionais e intuitivos em um jogo. Por meio dele, o usuário pode executar uma ou várias funções programadas dentro de um applet de forma simples e prática. No GeoGebra, é possível inserir um botão utilizando a barra de ferramentas, conforme ilustrado na Figura 3.4.

Uma das principais vantagens do botão no GeoGebra é suas características. Ele pode ser configurado para ativar ou desativar objetos, iniciar ou interromper animações, executar cálculos e até mesmo alterar propriedades visuais de elementos na tela. Além disso, os botões permitem associar scripts programáveis, como comandos em GGBScript ou JavaScript, ampliando ainda mais suas possibilidades de interação.

Ao criar um botão, é possível personalizar seu rótulo, definindo um texto que descreva claramente sua função. Essa abordagem contribui para a usabilidade e torna a experiência do usuário mais intuitiva, especialmente em atividades educativas. O botão também pode ser integrado a outras ferramentas do GeoGebra, permitindo, por exemplo, que seu funcionamento esteja condicionado a valores de variáveis ou condições lógicas.

O uso do botão no desenvolvimento de jogos e atividades interativas no GeoGebra é, portanto, uma excelente forma de promover o engajamento do usuário, oferecendo uma interface acessível e funcional para a execução de ações dinâmicas.

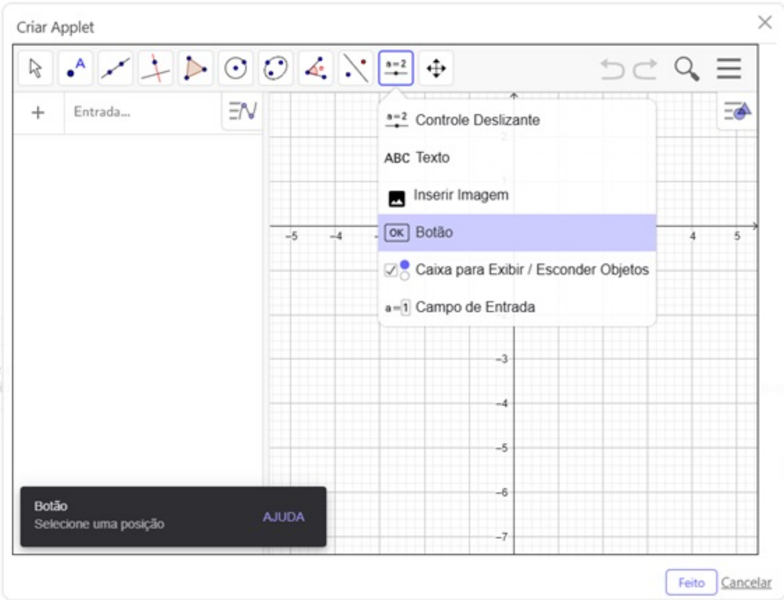


Figura 3.4: Botão

Na Figura 3.5, é possível observar que, ao inserir um botão no GeoGebra, uma janela com dois campos editáveis é exibida para configuração. O primeiro campo, denominado Legenda, permite inserir o texto que será exibido no botão.

O segundo campo, chamado Código do Botão , oferece um espaço para escrever o código ou a programação que será realizada ao clicar no botão. Esse código pode conter comandos específicos do GeoGebra, como criar objetos, alterar propriedades, ativar animações ou realizar cálculos, possibilitando uma grande variedade de ações dinâmicas.

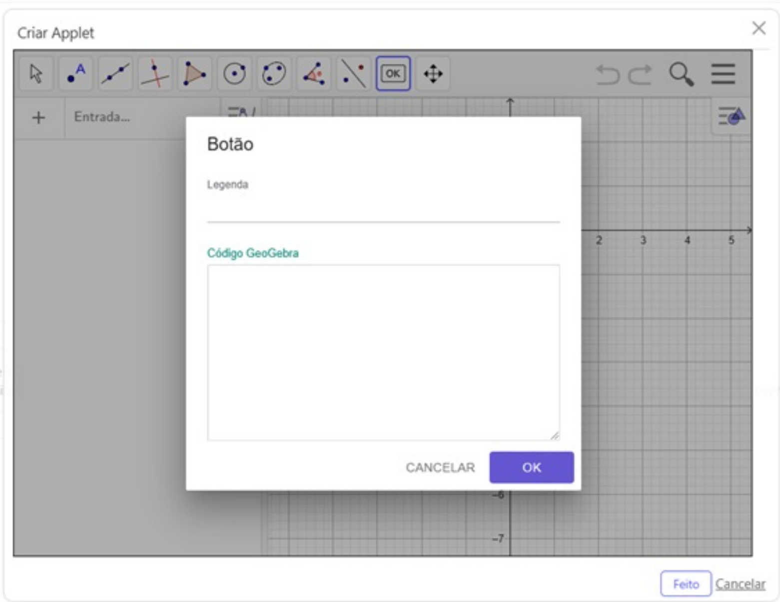


Figura 3.5: Configuração do Botão

Inserir Texto

Os elementos textuais podem ser utilizados para apresentar mensagens, instruções ou compor o cenário de um jogo, oferecendo uma forma clara e visual de comunicação. No GeoGebra, esses elementos podem ser inseridos por meio da Barra de Ferramentas, conforme ilustrado na Figura 3.5.

Ao optar por inserir um texto, uma janela de edição é exibida, permitindo que o conteúdo desejado seja digitado diretamente. Além disso, a edição pode ser enriquecida utilizando os elementos disponíveis na caixa de ferramentas dessa janela. O GeoGebra possibilita a criação de textos simples ou mais complexos, incluindo objetos dinâmicos em uso, que podem ser incorporados ao texto ao clicar no ícone do software.

Uma funcionalidade especialmente útil é a compatibilidade com o código $LaTeX$, acessível diretamente na janela de edição. Isso permite a fácil inserção de equações e símbolos matemáticos, tornando os textos ainda mais versáteis e adequados para aplicações educacionais ou jogos interativos que demandem representações matemáticas precisas.

Após ser inserido, o texto, assim como os demais objetos do GeoGebra, pode ser usado de forma interativa. Ele pode ser associado a comandos ou vinculado à programação de outros objetos, criando relações dinâmicas que enriquecem a experiência do usuário. Essa flexibilidade torna os elementos textuais uma ferramenta poderosa para integrar explicações, instruções e feedbacks diretamente em atividades interativas, como demonstra a Figura 3.6.

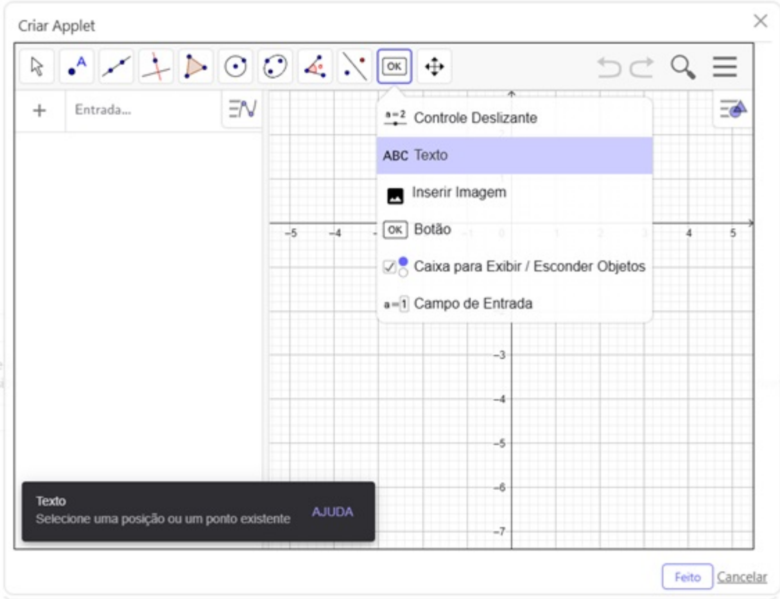


Figura 3.6: Inserir Texto

Inserir Imagem

Seja para compor cenários ou representar personagens e suas ações, os elementos visuais desempenham um papel fundamental na criação de atividades lúdicas para o ensino, especialmente em jogos. Esses elementos podem ser inseridos no GeoGebra a partir de arquivos de imagem, permitindo uma personalização fácil e eficiente das atividades ou jogos desenvolvidos no ambiente do software. A Figura 3.7 e Figura 3.8ilustram o processo para inserir imagens no GeoGebra.

Assim como os demais objetos do GeoGebra, as imagens inseridas podem ser definidas para executar ações programadas por meio de comandos. Essa funcionalidade amplia as possibilidades de interação, permitindo que as imagens se relacionem com o usuário ou com outros objetos já existentes na construção. Por exemplo, uma imagem pode ser vinculada a um controle deslizante para alterar sua posição ou tamanho dinamicamente, ou associada a condições lógicas que definem sua exibição em cenários específicos.

A capacidade de integrar elementos visuais interativos transforma as atividades e os jogos em experiências mais imersivas e envolventes. Ao explorar as possibilidades de personalização e programação das imagens, professores e alunos podem criar recursos educativos criativos e adaptados às necessidades de diferentes contextos de ensino.

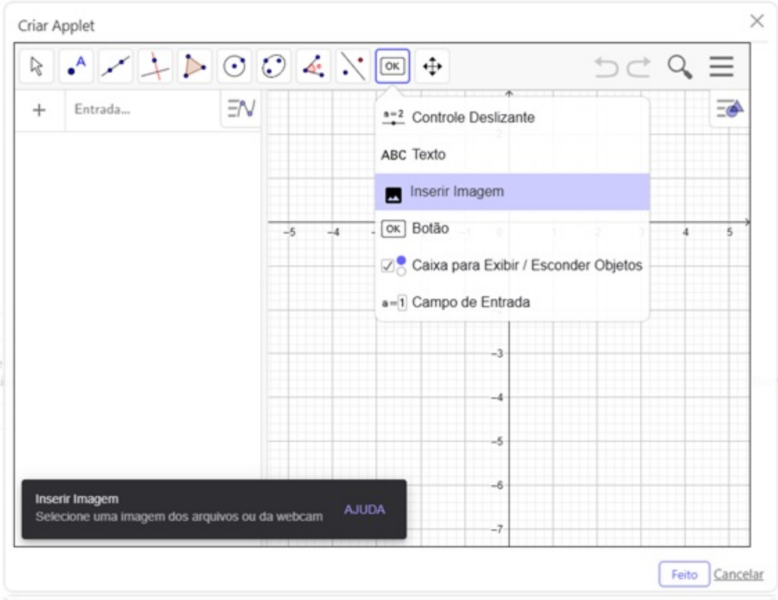


Figura 3.7: Inserir Imagem

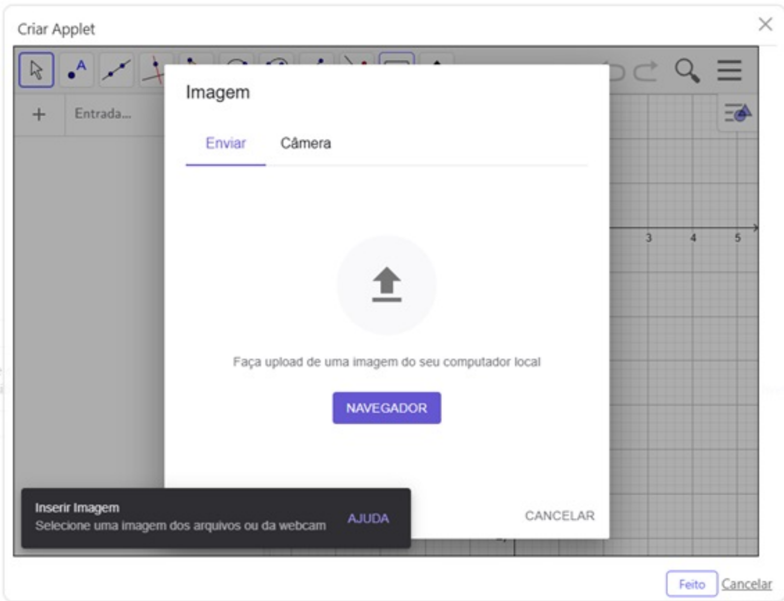


Figura 3.8: Inserindo a Imagem

3.5 Programando o Applet sobre Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Na programação dos quatro applets apresentados neste trabalho, foram utilizados, principalmente, os comandos Controle Deslizante , Texto , Imagens , Segmentos de Reta e Botão . A exibição de cada tela foi condicionada ao valor do controle deslizante, que é acionado ao clicar no botão correspondente. Dessa forma, toda a animação dos applets é resultado da interação dinâmica entre o botão, o controle deslizante e os demais elementos inseridos no applet.

Neste contexto, o botão funciona como o elemento de disparo das ações, enquanto o controle deslizante é responsável por determinar as condições que regulam a exibição e o comportamento dos objetos na tela. Já os textos, imagens e segmentos de reta atualizados para enriquecer a experiência visual e funcional, tornando as animações mais claras e interativas.

A seguir, serão apresentados alguns comandos usados no applet que abordam o PFC (Princípio Fundamental da Contagem) , ou que servem como estrutura básica para os demais applets propostos neste trabalho. Essa abordagem permite não apenas compreender a lógica empregada na construção dos applets, mas também replicar e adaptar os conceitos a outras aplicações interativas.

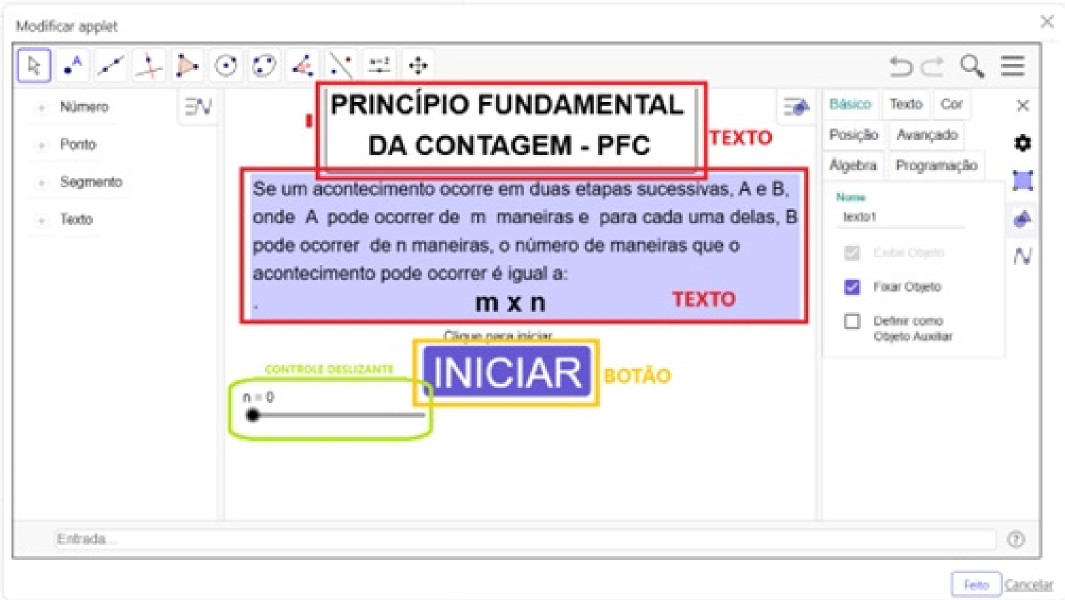


Figura 3.9: Primeira Tela do Applet sobre PFC

A Figura 3.9 apresenta a tela inicial do applet, destacando os comandos exibidos na Janela de Álgebra. Esses comandos representam a estrutura lógica e funcional que define o comportamento do applet.

A exibição desta tela inicial está condicionada ao valor de $n = 0$. Quando o valor de n é alterado, os elementos inicialmente apresentados deixam de ser exibidos, como pode er observado na Figura 3.10, e novos elementos são automaticamente introduzidos na tela, conforme programado. Essa dinâmica permite uma interação fluida e adaptativa, essencial para o desenvolvimento de atividades interativas e lúdicas.

Esse recurso de condicionamento baseado em variáveis, como n, demonstra a flexibilidade do GeoGebra na criação de experiências personalizadas, possibilitando que diferentes cenários ou etapas de um applet ou atividade sejam controlados de maneira eficiente.

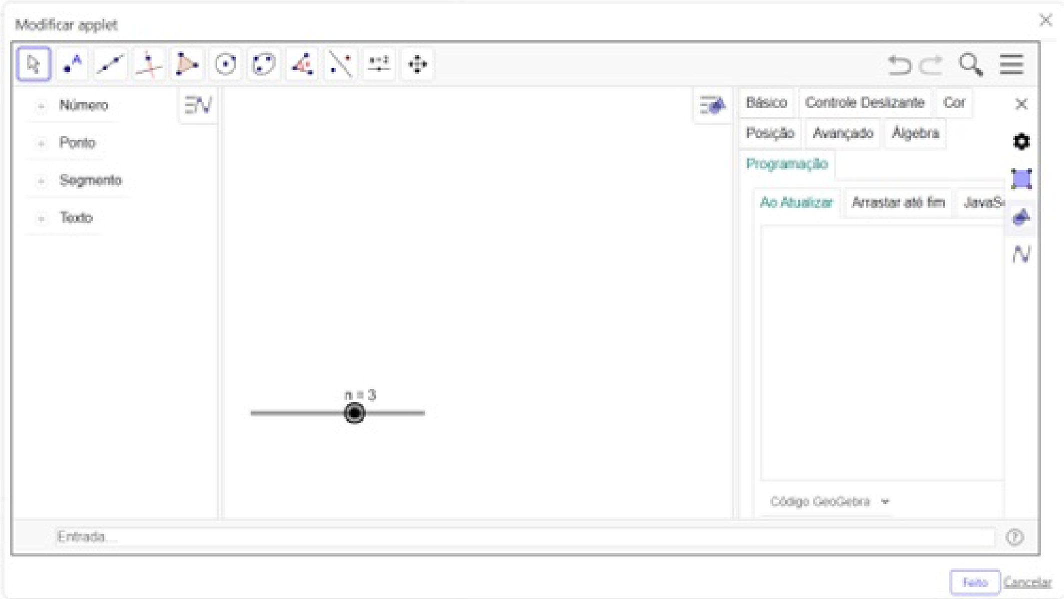


Figura 3.10: Alterando o valor de n

Os botões inseridos nos applets foram configurados para ativar e/ou iniciar animações nos controles deslizantes também presentes nesses applets. Em outras palavras, a função dos botões é alterar o valor de um controle deslizante e, simultaneamente, acionar a animação em outro controle deslizante.

Essa configuração fornece uma experiência mais interativa para o usuário, permitindo que diferentes elementos, segmento de reta, imagens, outros botões, surjam de maneira sincronizada na tela do applet, o que foi útil para criar efeitos visuais mais dinâmicos ou simulações interativas. Além disso, a implementação foi pensada para garantir que as transições entre os valores dos controles deslizantes e as animações ocorram de forma fluida e sem interrupção. Como pode-se notar na Figura 3.11 ao clicar no botão INICIAR, n assumirá o valor igual a 1, indo para a tela da Figura 3.12.

Figura 3.11: Configuração do Botão INICIAR

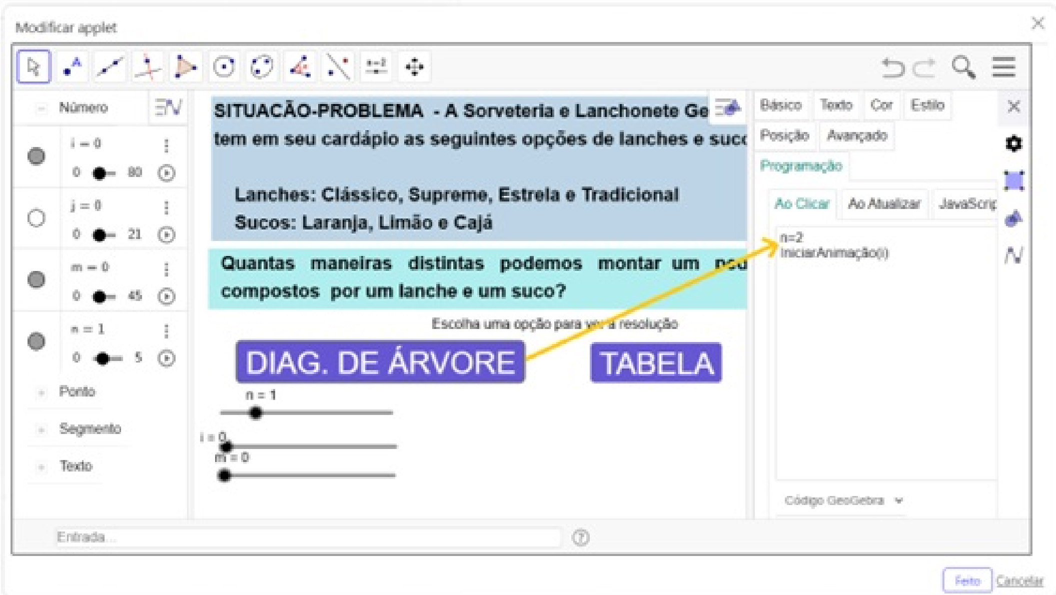


Figura 3.12: Configuração do Botão DIG DE ÁRVORE

Na Figura 3.12, aparecem todos os elementos condicionados ao valor $n = 2$, que incluem dois textos e dois botões. Esses botões têm a função de acionar uma animação e alterar o valor de n.

Ao clicar no botão DIAG. DE ÁRVORE, Figura 3.12 o valor de n permanece igual a 2, e é iniciada a animação do controle deslizante i, que será responsável por montar o diagrama de árvores correspondente à situação-problema proposta. De forma semelhante, ao clicar no botão TABELA, Figura3.13, ocorrerá a animação da montagem da tabela, também relacionada à mesma situação-problema.

Essa abordagem permite apresentar as informações de maneira clara e interativa, facilitando a compreensão visual dos conceitos.

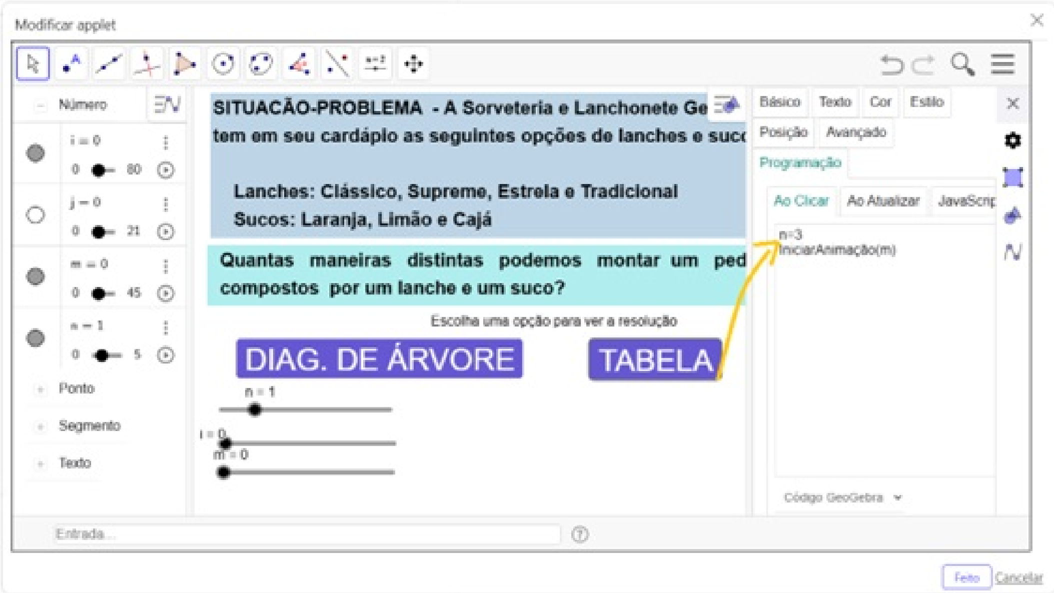


Figura 3.13: Configuração do Botão TABELA

Ao clicar no botão DIAG. DE ÁRVORE, é iniciada a animação do controle deslizante, que passa a assumir valores naturais com incremento de uma unidade (Figura 3.14). À medida que o valor de i aumenta, o applet exibe um número crescente de elementos, proporcionando uma representação visual dinâmica e interativa. Isso permite ao usuário acompanhar de forma clara a evolução dos elementos no diagrama de árvore conforme o valor de i progride.

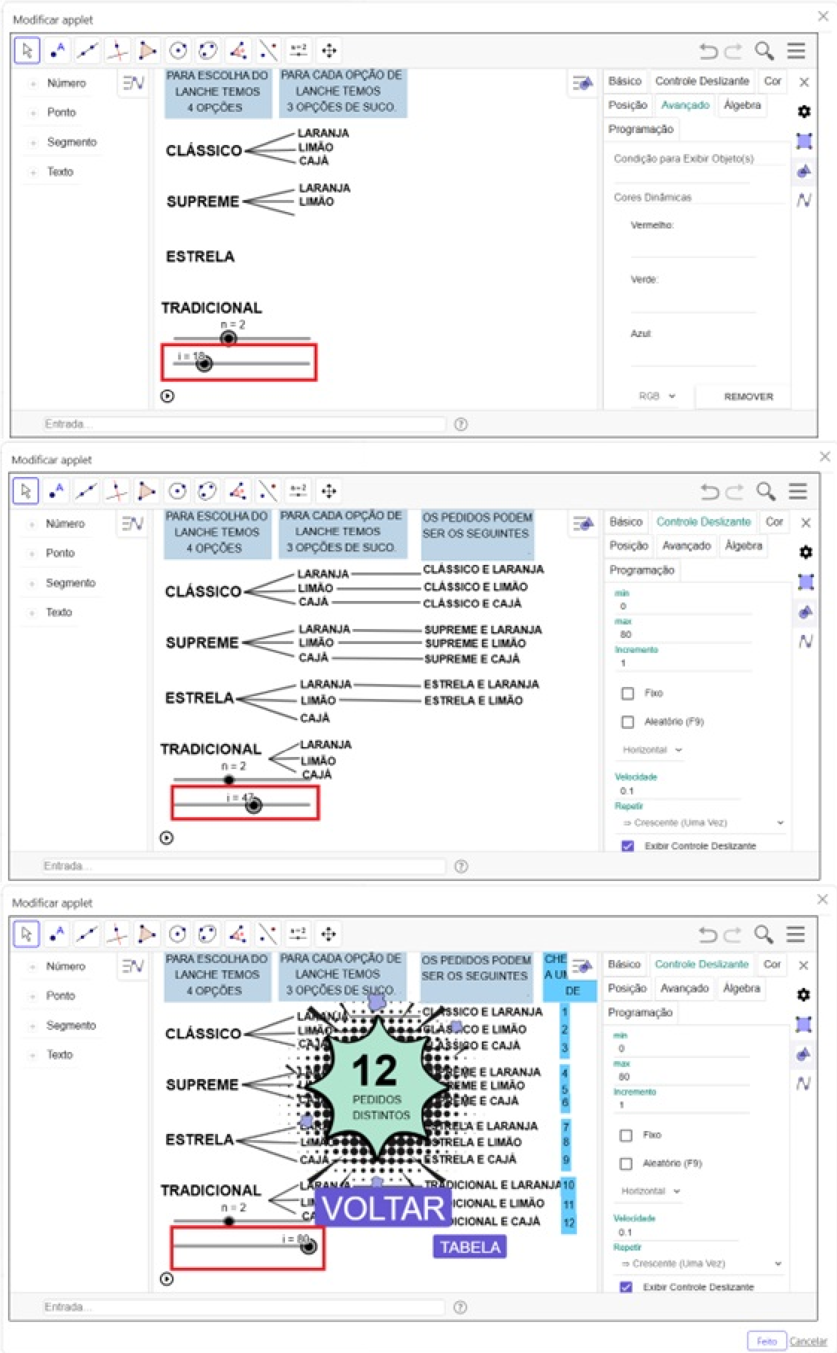


Figura 3.14: Animação com uso do controle deslizante i

O mesmo ocorre ao clicar no botão TABELA , quando é iniciada a animação do controle deslizante m, que passa a assumir valores naturais com incremento de uma unidade. À medida que o valor de m aumenta, o applet exibe um número crescente de elementos, permitindo ao usuário visualizar a forma clara e progredir a construção da tabela.(Figura 3.15).

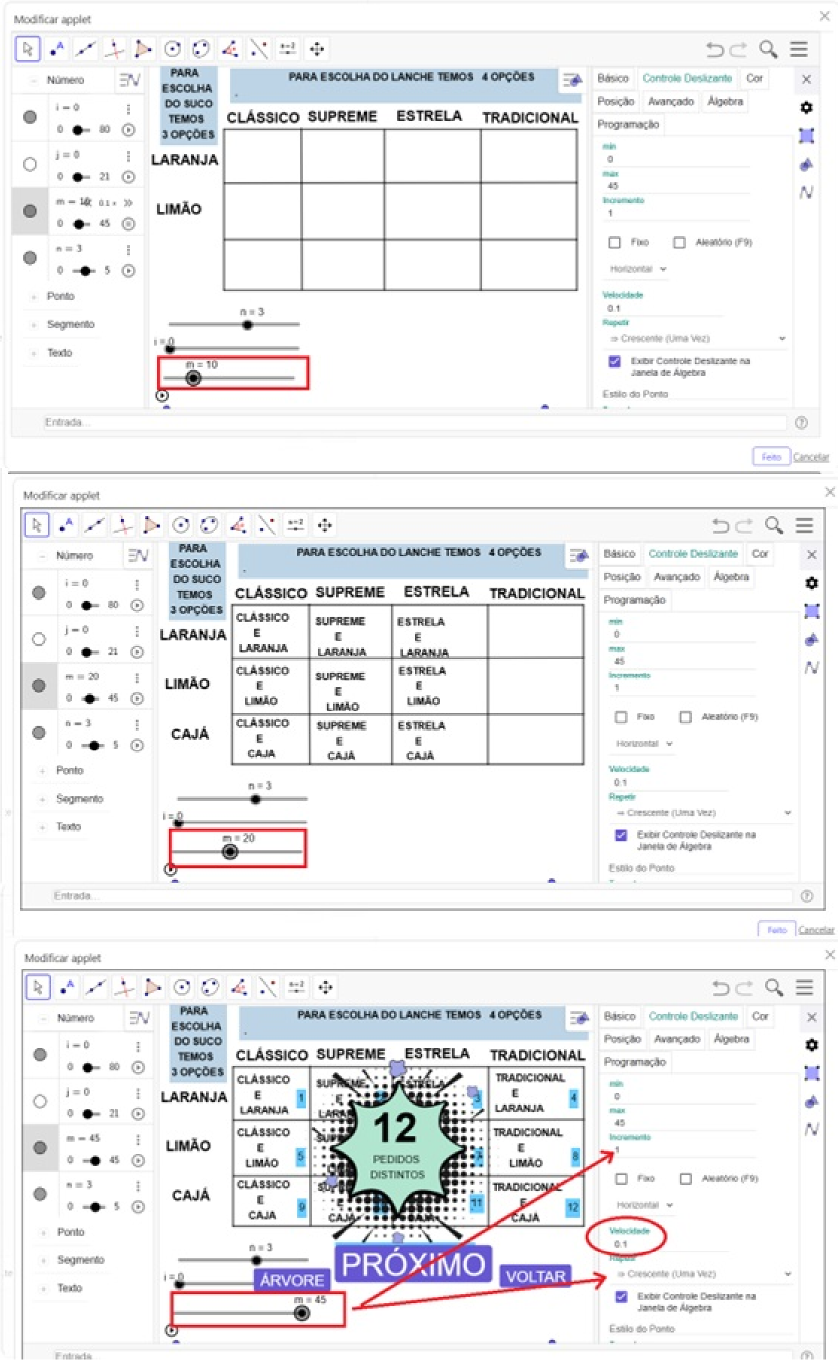


Figura 3.15: Animação com uso do controle deslizante m

Ao final da animação (Figura 3.16), três botões são exibidos: ÁRVORE, PRÓXIMO e VOLTAR. Ao clicar no botão PRÓXIMO, inicia-se uma nova animação, seguindo a estrutura anterior. Essa animação utiliza o controle deslizante j, que assume valores de 0 a 21 (Figura 3.17). Nessa tela, são apresentados 21 elementos, incluindo textos, imagens e números.

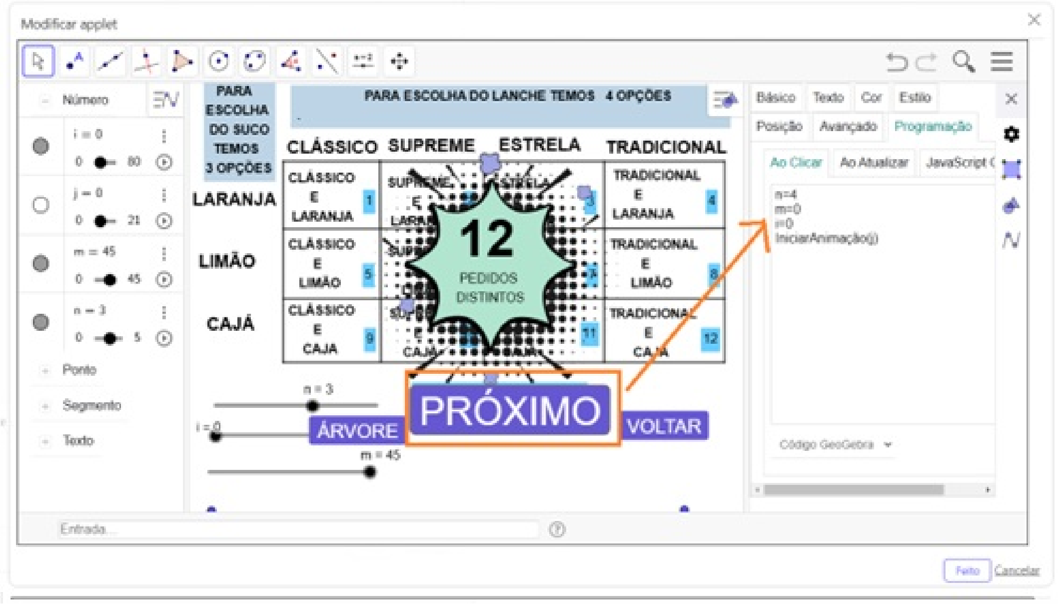


Figura 3.16: Configuração do Botão PRÓXIMO

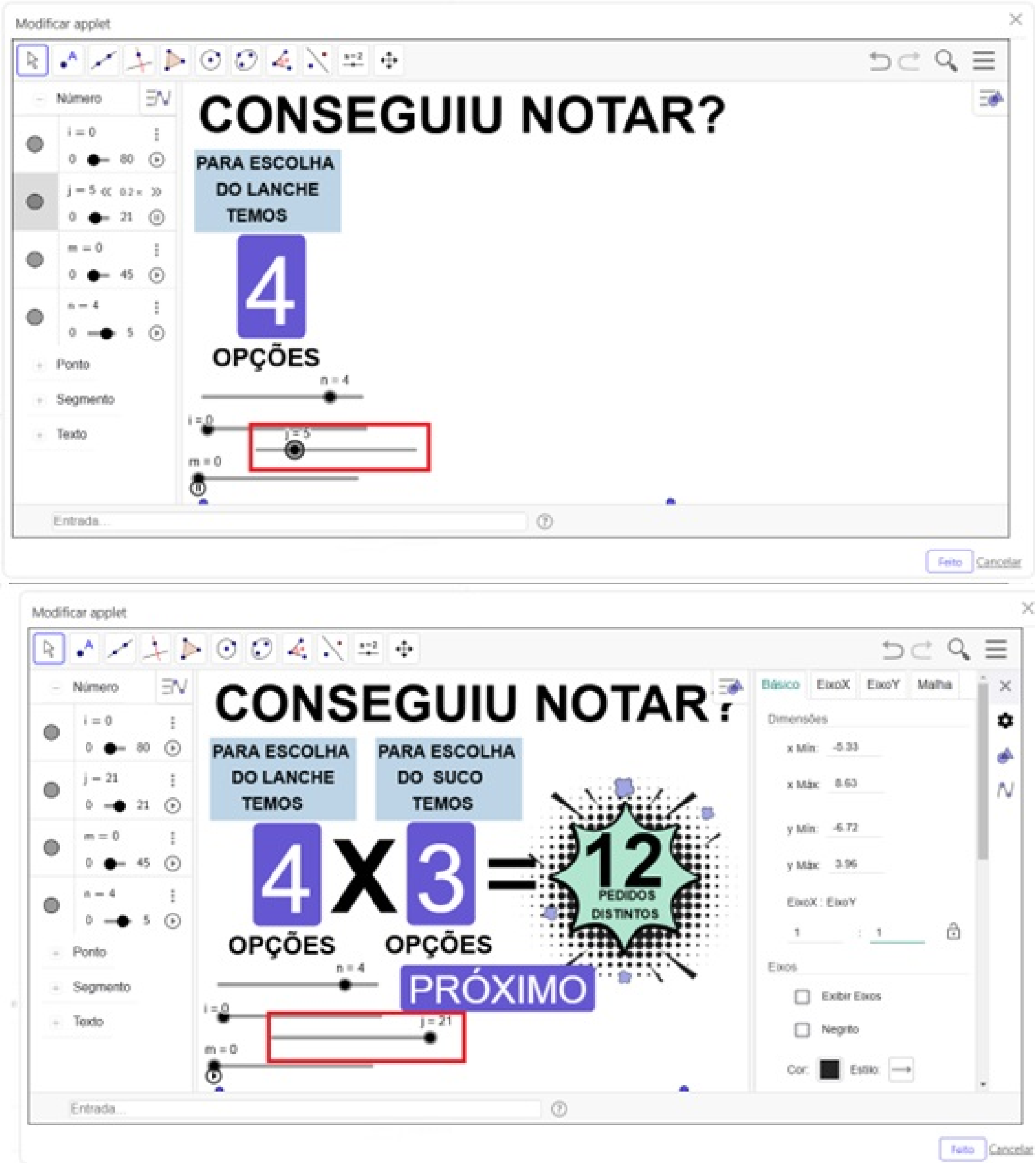


Figura 3.17: Animação com uso do controle deslizante j

Ao final da animação, o botão PRÓXIMO é exibido. Ao clicar nesse botão, o applet avança para sua última tela(Figura 3.19). Vale destacar que o botão **PRÓXIMO** foi programado para, ao ser acionado, definir os seguintes valores para os controles deslizantes:$n = 5$,$i = 0$, $m = 0$ e $j = 0$(Figura 3.18).

Figura 3.18: Configuração do Botão PRÓXIMO

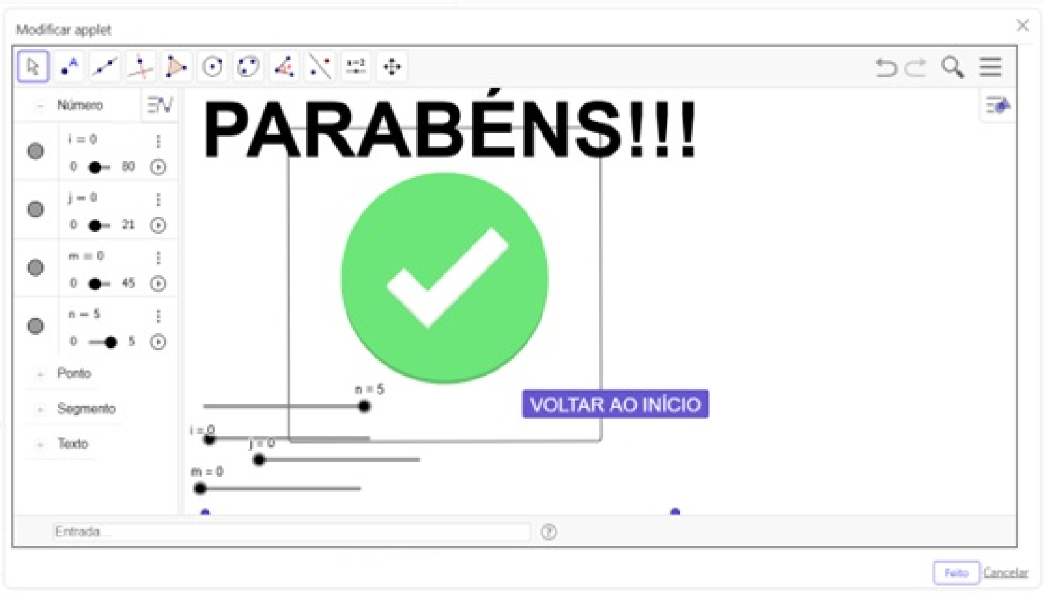


Figura 3.19: Tela final do Applet

Na Figura3.20 apresenta a exibição simultânea de praticamente todos os elementos utilizados ao longo da sequência didática, incluindo textos, imagens, botões, controles deslizantes e segmentos de reta. Esta composição, embora proposital, resulta em uma tela extremamente sobrecarregada e desorganizada, reforçando a importância de um planejamento cuidadoso e da compreensão aprofundada das ferramentas de programação do GeoGebra.

Figura 3.20: Todos elementos do presente no Applet

A experiência demonstra que, para que um applet funcione de maneira eficiente e cumpra seu papel como recurso educacional, é necessário que o docente ou desenvolvedor dedique tempo e esforço à programação e organização dos elementos. A integração harmônica entre animações, botões, e controles deslizantes exige não apenas familiaridade com o GeoGebra, mas também uma visão clara dos objetivos pedagógicos e de como cada ferramenta pode contribuir para a aprendizagem dos conceitos interativos.

Vale ressaltar que a estrutura apresentada neste applet serviu de base para a configuração dos outros três applets desenvolvidos neste trabalho. A uniformidade na programação e nos comandos aplicados possibilitou a criação de recursos consistentes e alinhados às propostas pedagógicas de ensino de Análise Combinatória.

Assim, espera-se que esta metodologia, baseada em sequências didáticas interativas, sirva de inspiração para outros educadores explorarem o potencial do GeoGebra como ferramenta educacional. Embora seja desafiador, o processo de criação e programação de applets é recompensador, permitindo o desenvolvimento de recursos personalizados que podem tornar o ensino de matemática mais atraente e acessível.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Esta dissertação apresenta uma sequência didática que aborda a Análise Combinatória com o uso de recursos tecnológicos, especificamente os applets do GeoGebra. Entende-se que é essencial que os educadores reflitam constantemente sobre o processo de ensino e aprendizagem, pois o professor desempenha um papel fundamental ao oferecer estratégias que tornem os conceitos matemáticos mais acessíveis e compreensíveis para os alunos.

Os recursos tecnológicos desempenham um papel crucial nesse processo, atuando como motivadores e oferecendo inúmeras possibilidades quando integrados às metodologias de ensino. O GeoGebra, por exemplo, é uma ferramenta que permite a criação de atividades simples ou complexas, contextualizando o ensino da matemática. No caso deste trabalho, o uso do GeoGebra foi aplicado especificamente ao ensino de Análise Combinatória. Nesse contexto, a implementação de uma sequência didática baseada na metodologia ativa de Aprendizagem Baseada em Resolução de Problemas mostrou-se uma abordagem eficaz. Com o uso dos applets do GeoGebra, foi possível facilitar a compreensão dos conceitos fundamentais de Análise Combinatória por parte dos estudantes.

O GeoGebra oferece uma ampla variedade de recursos que permitem aos alunos explorar e manipular conceitos de forma interativa, realizando tentativas e conjecturas sobre o tema. Contudo, para que a inserção de recursos tecnológicos realmente contribua para a aprendizagem, é essencial que haja uma integração efetiva com o processo de ensino. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cabe ao professor realizar uma investigação criteriosa dos recursos disponíveis na ferramenta, identificando aqueles mais adequados para cada conteúdo. Somente após essa análise, o docente poderá elaborar estratégias que incorporem os recursos de forma eficaz à sua prática pedagógica.

Dessa forma, espera-se que este trabalho contribua para a disseminação e o desenvolvimento do uso de applets no ensino da Análise Combinatória. Além disso, o trabalho reforça a importância de o professor atuar como mediador nesse processo, refletindo sobre suas práticas e utilizando a tecnologia para motivar os alunos, contextualizar os conteúdos e facilitar o aprendizado.

Por fim, este trabalho busca oferecer uma perspectiva renovada sobre como metodologias lúdicas e tecnológicas podem tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo. Ao integrar recursos digitais como o GeoGebra, propomos caminhos para superar as dificuldades do aprendizado em matemática, incentivando práticas pedagógicas inovadoras.

Bibliografia

[1] ALLEVATO, N. S. G., ONUCHIC, L. R. *Conhecimentos de análise combinatória dos futuros professores de Matemática.*Em: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35 – 52.

[2] ARZARELLO, Ferdinando; FERRARA, Francesca; ROBUTTI, Ornella. Mathematical modelling with technology: The role of dynamic representations. Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA, v. 31, n. 1, p. 20-30, 2012.

[3] BARROS, Thiago Basílio Lopes. Aprendizagem de frações com applets do GeoGebra. 2024.

[2] BASTOS, Antonio Carlos; LOPES, Jurema Rosa; VICTER, Eline das Flores. L.*Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio.* Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 11, n. 3, p. 330–344, 2020. DOI: 10.26843/rencima.v11i3.2491.

[4] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEF

[5] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular* Brasília:2018.

[6] DA SILVA RODRIGUES, R. S.; RODRIGUES, M. U*Conhecimentos de análise combinatória dos futuros professores de Matemática.* CoInspiração-Revista dos Professores que ensinam Matemática (ISSN 2596-0172), v. 2, n. 1, p. 95-112, 2019.

[7] DA SILVA SCHMITZ, Elieser Xisto; DOS REIS, Susana Cristina. *Sala de aula invertida: investigação sobre o grau de familiaridade conceitual teórico-*

prático dos docentes da universidade. ETD-Educação Temática Digital, v. 20, n. 1, p. 153-175, 2018.

[8] DE OLIVEIRA, Juliana Barcelos; SANTANA, Anderson Messias; REALI, Graciela Aluizio *O uso de tablets e o geogebra como ferramentas auxiliadoras no ensino da matemática.*2012.

[9] DE OLIVEIRA MAIA, Lucas Emanuel; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima. *O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS, EM ESPECIAL O GEOGEBRA, PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA* Revista Prática Docente, v. 7, n. 1, p. e031-e031, 2022.

[10] LEONARDO, Fabio Martins.*Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna*obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. – 1. ed. – São Paulo : Moderna, 2020.

[11] LOPES, T. B.; MORAES, R. S. *Estudo dos coeficientes da função quadrática por meio do software GeoGebra.* In: II Jornada de Estudos em Matemática, 2., 2016, Marabá. Anais... Marabá: UNIFESSPA, 2016. P. 194-203.

[12] MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep). *Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil.* Brasília: Inep, 2020.

[13] MONTEIRO, Jair Curcino; CASTILHO, Weimar Silva; DE SOUZA, Wallysonn Alves. Sequência didática como instrumento de promoção da aprendizagem significativa. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, v. 9, n. 01, 2019.

[14] PAULA, M. A. S.; BARRETO, D. E.S. *Sequência didática de Matemática com livros paradidáticos na perspectiva de uma avaliação formativa e reguladora.* Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo

[15] PINHEIRO, Paulo Geovane Ramalho. Criação e adaptação de jogos para GeoGebra. 2017.

[16] SILVA JÚNIOR, José Ivanildo Veríssimo da. Applets dos materiais didáticos do GEOGEBRA como recurso para ensino e aprendizagem de frações: uma análise das dimensões epistêmica e mediacional utilizando a Teoria da Idoneidade Didática. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso.

[17] SOUZA, Diana da Cruz et al. Desenvolvimento de jogos no GeoGebra. 2023.

[18] STRAPASON, L. P. R.; BISOGNIN, E *Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio.* 2013.

[19] VASCONCELOS, C. A. V., & Santos, J E *Contribuições das Tecnologias da Informação e Comunicação à prática dos professores de Matemática.* Com a Palavra, O Professor, 6(16), 205-228, 2021.

[20] ZABALA, A.*CA Prática Educativa: como ensinar* Porto Alegre: ArtMed, 1998. CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Pibid - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência.