



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



# Geometria Esférica: Algumas Aplicações

por

Edson Marinho de Lima

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



# Geometria Esférica: Algumas Aplicações

por

**Edson Marinho de Lima**

sob a orientação do

**Prof. Pedro Antonio Hinojosa Vera**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/ 2024  
João Pessoa - PB

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

L732g Lima, Edson Marinho de.

Geometria esférica : algumas aplicações / Edson Marinho de Lima. - João Pessoa, 2024.

65 f. : il.

Orientação: Pedro Antonio Hinojosa Vera.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Astronomia. 2. Geometria esférica. 3. Funcionamento do GPS. I. Vera, Pedro Antonio Hinojosa. II. Título.

UFPB/BC

CDU 52(043)

# Geometria Esférica: Algumas Aplicações

por

**Edson Marinho de Lima**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE**

---

**Prof. Dr. Wallace Manguiera de Sousa - UFPB**

**Agosto/ 2024**



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL**

Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE  
MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA  
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA  
PARAÍBA

No dia vinte e três de agosto de dois mil e vinte e quatro (23/08/2024), às 10:30 horas, na sala 02 da Pós-Graduação do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado “*Geometria Esférica: Algumas Aplicações*”, do aluno **EDSON MARINHO DE LIMA**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor Pedro Antonio Hinojosa Vera. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores Pedro Antonio Hinojosa Vera (presidente), Wállice Manguieira de Sousa (membro interno) e Jorge Antonio Hinojosa Vera (membro externo/UFRPE). O professor Pedro Antonio Hinojosa Vera, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 23 de agosto de 2024.

**Banca Examinadora**

Pedro Antonio Hinojosa Vera \_\_\_\_\_

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** PEDRO ANTONIO HINOJOSA VERA  
Data: 23/08/2024 13:30:25-0300  
verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Wállice Manguieira de Sousa \_\_\_\_\_

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** WALLACE MANGUEIRA DE SOUSA  
Data: 23/08/2024 15:38:17-0300  
verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Jorge Antonio Hinojosa Vera \_\_\_\_\_

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** JORGE ANTONIO HINOJOSA VERA  
Data: 09/09/2024 17:10:01-0300  
verifique em <https://validar.iti.gov.br>

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram no meu crescimento como estudante e como pessoa nesses dois anos, dizer nomes fica difícil, pois sempre esquecemos alguém, mas algumas pessoas não podem ser esquecidas, em ordem não necessariamente de importância. Ao meu Deus, que me deu saúde e força para continuar e encerrar essa caminhada. A minha família, que foi meu apoio em acreditar que eu concluiria. Aos meus professores do curso, que foram extremamente pacientes e competentes no decorrer dessa jornada, em particular ao meu orientador prof. Pedro Hinojosa com sua excelente orientação. Aos meus colegas de turma, que sem eles, possivelmente eu não teria concluído. Foram um suporte considerável, pois em nossas conversas e tempo de qualidade, pudemos aprender bastantes, tirar dúvidas e enxergar onde estávamos errando e ainda servia de estímulo, diante de todas as dificuldades vivenciadas.

# Dedicatória

*Ao professor Vamberto Sérgio do Carmo, que foi o ponta pé para eu decidir estudar a geometria esférica, onde ele apresentou que existiam outras geometrias além da euclidiana, em que as propriedades acontecem um pouco diferente e aguçou a curiosidade de procurar entendê-la, começando apenas, com um pedaço de laranja.*

# Resumo

Neste trabalho estudamos a evolução da astronomia e geometria, desde os gregos com pensamento geocêntrico até a revolução do GPS baseado em geometria esférica. A geometria esférica explica retas ilimitadas e ângulos em triângulos, fundamentais para entender o funcionamento do GPS com 24 satélites em órbita a 20.200 km. A história da astronomia e geometria, juntamente com as aplicações práticas da geometria esférica, são abordadas, destacando a importância desses conhecimentos em diversas áreas.

**Palavras-chaves:** Astronomia; Geometria Esférica; GPS.

# Abstract

We will study the evolution of astronomy and geometry, from the Greeks with their geocentric thinking to the revolution of GPS based on spherical geometry. Spherical geometry explains unlimited lines and angles in triangles, which are fundamental to understanding the functioning of GPS with 24 satellites in orbit at 20,200 km. The history of astronomy and geometry, along with the practical applications of spherical geometry, are addressed, highlighting the importance of this knowledge in various areas.

**Key-words:** Astronomy; Geometry; GPS.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Um Pouco de História</b>	<b>3</b>
1.1 História da Geometria Euclidiana . . . . .	3
1.2 História da Geometria Não Euclidiana . . . . .	5
1.3 História da Astronomia até o GPS . . . . .	12
1.4 Uma breve linha do tempo da Astronomia . . . . .	12
<b>2 Geometria Esférica - Principais Resultados</b>	<b>19</b>
2.1 Geometria Esférica . . . . .	19
2.1.1 Comprimento de uma Curva na Esfera . . . . .	20
2.1.2 Distância entre Dois Pontos na Esfera $\mathbb{S}_\rho^2$ . . . . .	21
2.1.3 Triângulos e Fusos . . . . .	23
2.2 Trigonometria Esférica . . . . .	25
<b>3 Algumas Aplicações da Geometria Esférica</b>	<b>32</b>
3.1 Coordenadas Astronômicas . . . . .	32
3.1.1 Coordenadas Equatoriais . . . . .	35
3.1.2 Coordenadas Eclípticas . . . . .	35
3.1.3 Coordenadas Horizontais . . . . .	35
3.1.4 Coordenadas Horárias . . . . .	36
3.2 Triângulo de Posição Astronômica (Triângulo da PAZ) . . . . .	36
3.3 Transformando Coordenadas Cartesianas em Geográficas . . . . .	38
3.3.1 Coordenadas Geográficas . . . . .	39
3.4 Distâncias Entre Duas Cidades . . . . .	40

---

3.4.1	Distâncias Entre Cidades Sobre o Equador . . . . .	40
3.4.2	Distâncias Entre Cidades no Mesmo Meridiano . . . . .	40
3.4.3	Distâncias Entre Cidades no Mesmo Paralelo . . . . .	40
3.4.4	Distância Entre Duas Cidades Por Um Círculo Máximo . . . . .	41
3.5	Área de um Triângulo Esférico . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Funcionamento do GPS</b>	<b>43</b>
4.1	A divisão em segmentos . . . . .	43
4.1.1	Segmento Espacial . . . . .	43
4.1.2	Segmento de Controle . . . . .	43
4.1.3	Segmento do Usuário . . . . .	44
4.2	Fundamentos Matemáticos do GPS . . . . .	44
4.3	Uma Aplicação . . . . .	46
	<b>Sequência Didática</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Usando Materiais Pedagógicos para Estudar Propriedades dos Triângulos Planos e Esféricos</b>	<b>48</b>
	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
	<b>Referências</b>	<b>55</b>

# Introdução

A geometria, uma das disciplinas mais antigas da matemática, tem desempenhado um papel fundamental na história do pensamento humano e no desenvolvimento da ciência. Desde os primórdios da civilização, os seres humanos têm se fascinado com as formas, os padrões e as relações espaciais que permeiam o mundo ao nosso redor. A geometria, como disciplina formal, teve seu início na antiga Mesopotâmia e no Egito, onde as sociedades antigas utilizavam conceitos geométricos para a medição de terras, a construção de edifícios e a previsão de eventos astronômicos.

E no entanto, foi na Grécia Antiga que a geometria encontrou sua expressão mais refinada e sistemática, com os trabalhos de Euclides de Alexandria. Por volta do século III a.C., Euclides escreveu "Os Elementos", uma obra monumental que estabeleceu os fundamentos da geometria, baseados em cinco postulados ou axiomas fundamentais. Estes postulados, que incluem conceitos como a existência de uma linha reta que pode ser estendida infinitamente em ambos os sentidos e a possibilidade de se traçar um círculo com um ponto e um raio dados, formaram a base da geometria por mais de dois milênios.

No século XIX, as fundações da geometria euclidiana foram abaladas com a descoberta de geometrias não euclidianas por matemáticos como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Bernhard Riemann. Esses matemáticos demonstraram que era possível formular sistemas geométricos consistentes sem aceitar o quinto postulado de Euclides, conhecido como o postulado das paralelas. Essa descoberta revolucionária abriu novos horizontes na compreensão do espaço e levou a um enriquecimento significativo da teoria geométrica.

Paralelamente ao desenvolvimento da geometria, a astronomia desempenhou um papel crucial na exploração do espaço e na busca por entender os mistérios do universo. Desde as observações astronômicas dos povos antigos até os avanços tecnológicos dos telescópios modernos, os astrônomos têm se dedicado à compreensão dos corpos celestes e dos padrões que governam o cosmos.

No século XX, o surgimento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) marcou uma nova era na interseção entre geometria, astronomia e tecnologia. Baseado em princípios de geometria esférica, o GPS permite a determinação precisa da posição e do tempo em qualquer lugar do mundo, proporcionando benefícios significativos em áreas como navegação, mapeamento, ciência e logística.

Nesta dissertação, no primeiro capítulo, exploramos a rica história das geometrias euclidiana e não euclidiana, juntamente com um panorama da evolução da astronomia até o surgimento do GPS. No segundo, examinaremos resultados importantes da geometria e trigonometria esférica. No terceiro, exploramos algumas aplicações dessa geometria na

---

astronomia e na geolocalização. No quarto capítulo, investigamos o funcionamento do GPS e os cálculos envolvidos na localização de pontos sobre a superfície da terra.

Finalmente, concluímos com uma sugestão de sequência didática com a finalidade de explicar a estudantes do ensino médio a existência de outras geometrias, em particular a geometria esférica, onde dentre outras curiosidades, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que  $180^\circ$ .

# Capítulo 1

## Um Pouco de História

Neste Capítulo apresentamos um breve relato sobre o surgimento da geometria e seu desenvolvimento até chegar ao que conhecemos hoje por geometria esférica. Traremos também um pouco da história do desenvolvimento da astronomia, até o surgimento do sistema de GPS. As informações contidas nas seções referentes a história da geometria estão baseadas principalmente em [1] [2] [8] [9] [10] [22] [23]

### 1.1 História da Geometria Euclidiana

Na matemática, muito do que se sabe tem influência dos Egípcios e Babilônicos, porém, por volta do fim do segundo milênio a.C, houve uma mudança no cenário político e econômico, a ponto que a influência desses povos se enfraqueceu em muitas áreas do conhecimento, inclusive na matemática. Como consequência, muito do material produzido por essas nações se perdeu. Foi aí que o desenvolvimento da matemática se concentrou na Grécia; os gregos entendiam que as propriedades geométricas deveriam ser determinadas por argumentos lógicos e não procedimentos puramente experimentais ou empíricos. Tales de Mileto, por volta da primeira metade do Século VI a.C, foi o precursor desta geometria. Os primeiros registros referentes à geometria demonstrativa, assim como os métodos dedutivos, são associados a Tales de Mileto.

Pitágoras, nascido em 572 a.C., foi o sucessor de Tales na sistematização do conhecimento. Fundou a escola pitagórica, que teve um impacto significativo na matemática grega, contribuindo para o desenvolvimento da álgebra geométrica e da teoria das proporções. Essa teoria, suficientemente completa, foi usada pra deduzir propriedades de figuras planas, porém limitada a medidas comensuráveis.

Houveram muitas tentativas de exposição lógica matemática, em especial da Geometria. Porém, foi com Euclides por volta de 300 a.C que houve a primeira produção publicada, escrita em caráter dedutivo e formal: Os Elementos [2]. A obra é composta por 13 livros contendo 465 proposições e compilou todo o conhecimento matemático existente até então, sendo o protótipo da Matemática moderna.

Euclides foi um matemático muito importante que viveu na época de 300 a.C e contribuiu bastante para as grandes descobertas do período da Grécia clássica. Em

seu principal trabalho, Os Elementos, ele conta não somente a história da matemática conhecida até o momento, como também traz alguns resultados focados na geometria.

Os livros estão divididos na seguinte ordem:

Livro I – Os fundamentos da geometria plana.

Livro II – Álgebra geométrica.

Livro III – Teoria da circunferência.

Livro IV – Figuras inscritas e circunscritas.

Livro V – Teoria das proporções abstratas.

Livro VI – Figuras geométricas semelhantes e proporcionais.

Livro VII – Fundamentos da teoria dos números.

Livro VIII – Continuação de proporção e teoria dos números.

Livro IX – Teoria dos números.

Livro X – Classificação dos incomensuráveis.

Livro XI – Geometria dos sólidos.

Livro XII – Medição de figuras.

Livro XIII – Sólidos regulares.

O Livro I inicia com definições e postulados que dão base para a geometria plana e, dentre eles, está o quinto postulado, o mais famoso e envolto em mistérios. Por ser o de mais difícil compreensão, se achava que poderia ser uma proposição e não um postulado. Começa aí uma corrida por tentar demonstrá-lo,

Vejamos o enunciado dos 5 primeiros postulados na versão original deste livro I

Primeiro - Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

Segundo - Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

Terceiro - E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

Quarto - E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

Como foi dito anteriormente: o quinto postulado é o que gera a maior confusão no estudo dessa geometria, haja vista a linguagem usada em sua descrição.

O quinto postulado diz o seguinte:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no mesmo lado no qual estão os menores do que os dois retos. [5]

Dos postulados de Euclides, todos os quatro anteriores a este, pareciam muito mais

aceitáveis, daí acreditava-se que este postulado poderia ser provado com base nos quatro anteriores e, portanto, seria uma proposição e não um postulado. Porém, como não se conseguiu fazer essa prova, alguns passaram a acreditar que não seria verdade o postulado em questão e, com isso, tentaram provar a negação desse postulado. Esta tentativa fez com que se descobrissem novas geometrias, baseadas nos quatro postulados e na negação do quinto. A saber, as geometrias hiperbólicas e esféricas.

Mais na frente no tempo, em 1795, o quinto postulado foi reescrito por Jhon Playfair e passou a ter seu enunciado como é conhecido hoje

"Dado um ponto  $P$  que não está na reta  $r$ , existe uma só reta no plano que contém  $P$  e  $r$ , que passa por  $P$  e não intersepta  $r$ ." [11]

## 1.2 História da Geometria Não Euclidiana

Para fins de esclarecimento do que há de seguir, vejamos o que é uma reta paralela a outra: Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum deles se encontram.

Negar o quinto postulado de Euclides, é assumir uma das duas afirmações: dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$  que não o contém, ou existem mais de uma reta paralela a  $r$  passando por  $P$ , ou não existe reta paralela a  $r$  passando por  $P$ .

A primeira afirmação gerou a geometria hiperbólica e a segunda, a geometria elíptica, da qual a geometria esférica é uma particularidade.

Newton, afirmava que "os matemáticos de antes de 1800 estavam convencidos que a geometria euclidiana era a idealização correta das propriedades do espaço físico e das figuras espaciais" [11]

Os esforços para provar o quinto postulado de Euclides a partir dos demais axiomas e postulados ocuparam vários matemáticos por cerca de 2000 anos, acarretando, assim, em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da Matemática. Houve diversos avanços nessas tentativas de demonstração, entretanto, no final todas essas tentativas baseavam-se em suposições implícitas equivalentes ao quinto postulado. A seguir, apresentaremos um breve relato das tentativas de demonstração mais famosas do quinto postulado. [19], [6] e [9]

### I. Girolamo Saccheri (1667- 1733)

O primeiro estudo matemático do quinto postulado de Euclides foi publicado em 1733 pelo jesuíta italiano Girolamo Saccheri. Há poucas informações referentes a sua vida pessoal, mas sabe-se que, após concluir seu noviciado, passou a maior parte de sua vida na função de professor.

Saccheri ao ler Os Elementos ficou fascinado com os métodos de demonstração por absurdo utilizados na obra e, anos depois, publicou o seu trabalho Lógica Demonstrativa, onde fazia uso dos métodos de demonstrações usados por Euclides, assim como o uso da lógica formal.

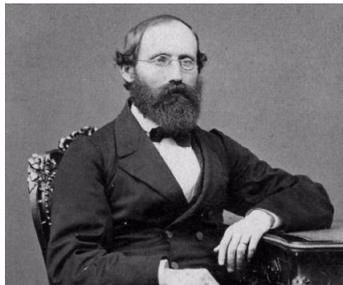


Figura 1.1: Fonte: <https://www.sutori.com/es/historia/oltre-il-quinto-postulato-da-una-a-molte-geometrie-em3nd7Mbyj7CW1aGRJdeJzvs> em 02 de julho de 2024

Saccheri utilizou o método de redução ao absurdo em seu estudo do quinto postulado e escreveu o livro *Euclides livre de toda imperfeição*, que só foi publicado após sua morte em 1733. Nesse trabalho, são aceitas as 28 proposições iniciais de *Os Elementos*, que são totalmente independentes do quinto postulado. A partir daí ele iniciou seu trabalho partindo de um quadrilátero  $ABCD$  com diagonais  $AC$  e  $BD$ , tais que os ângulos  $\sphericalangle(BAD)$  e  $\sphericalangle(ABC)$  são retos e  $AD$  e  $BC$  são congruentes. Veja a figura 1.2 abaixo. Este quadrilátero ganhou fama e foi intitulado, posteriormente, de “Quadrilátero de Saccheri”.



Figura 1.2: Quadrilátero de Saccheri Imagem retirada de [2]

Ao traçar as diagonais  $BD$  e  $AC$  e usar algumas das proposições de Euclides (dentre elas os teoremas de congruência de triângulos), Saccheri mostrou que os ângulos  $\sphericalangle(BCD)$  e  $\sphericalangle(ADC)$  são congruentes. Com isso, restou a ele estudar três hipóteses para esses ângulos:

- 1) Os ângulos serem agudos;
- 2) Os ângulos serem retos;
- 3) Os ângulos serem obtusos.

Segundo [6], o plano de trabalho de Saccheri consistia em encontrar um absurdo ao considerar as hipóteses dos ângulos serem agudos ou obtusos. Sendo assim, deveria valer a hipótese dos ângulos serem retos, a qual foi provada por ele, contudo deve-se observar que garantir essa hipótese é chegar a uma afirmação equivalente ao quinto postulado. Ao assumir implicitamente a infinitude da reta, Saccheri eliminou a hipótese do ângulo obtuso, mas o caso referente à hipótese do ângulo agudo mostrou-se mais complexo. Neste caso, ele utilizou noções obscuras de conceitos matemáticos usados na sua demonstração e, então, a contradição encontrada foi forçada. Sem saber, na tentativa de demonstração do quinto postulado ele obteve resultados importantes para as Geometrias não-Euclidianas.

## II. Johann Heinrich Lambert (1728-1777)



Figura 1.3: Fonte: <https://fixquotes.com/authors/johann-heinrich-lambert.htm> Acesso em 10 de Agosto de 2024

Nascido em 1728, o suíço Johann Heinrich Lambert publicou um estudo semelhante ao de Saccheri, pouco tempo após a morte dele, chamado de Teoria das Paralelas. Nesse trabalho, ele considerou um quadrilátero  $ABCD$ , que mais tarde ficou conhecido como “Quadrilátero de Lambert”, em que os ângulos  $\sphericalangle(DAB)$ ,  $\sphericalangle(ABC)$  e  $\sphericalangle(BCD)$  são retos 1.4.



Figura 1.4: Quadrilátero de Lambert Imagem retirada de [2]

Lambert, assim como Saccheri, considerou as mesmas três hipóteses para o quarto ângulo D. São elas:

- 1) O ângulo agudo;
- 2) O ângulo reto;
- 3) O ângulo obtuso.

Lambert demonstrou que para as três hipóteses, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que, igual ou maior que dois ângulos retos, que são equivalentes às hipóteses 1, 2 e 3, respectivamente. Lambert chegou a resultados, consideravelmente, avançados se comparado aos encontrados por Saccheri. Lambert conseguiu eliminar a hipótese do ângulo obtuso assim como Saccheri, entretanto seus resultados a respeito da hipótese do ângulo agudo também foram imprecisos.

## III. John Playfair (1748-1819)

John Playfair nasceu em 1748 na Escócia. Foi educado em casa por seu pai até o início de sua adolescência quando foi enviado para a Universidade de St. Andrews, onde conquistou respeito e admiração de professores devido à sua aptidão matemática. Anos



Figura 1.5: Fonte: <https://pixels.com/featured/john-playfair-paul-d-stewart.html> em 02 de julho de 2024

mais tarde, Playfair conquistou um cargo de professor na Universidade de Edimburgo e, segundo [13], em 1795, encontrou outra maneira de reescrever o quinto postulado, uma equivalência. Sem dúvidas, tal equivalência é a mais famosa e mais simples de compreender. Ela é comumente conhecida como “Postulado das Paralelas” e foi publicada em seu trabalho intitulado *Elementos de Geometria*, em 1795. O enunciado do Postulado das Paralelas é o seguinte:

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Para verificar a demonstração dessa equivalência, sugerimos a leitura de [6]

#### IV. Adrien-Marie Legendre (1752-1833)



Figura 1.6: Fonte: <https://educavita.blogspot.com/2015/01/adrien-marie-legendre-biografia-e-vida.html> Acesso em 10 de Agosto de 2024

Nascido em 1752, o analista francês Adrien-Marie Legendre foi um dos mais importantes matemáticos de sua geração. Ele contribuiu para diversas áreas como Estatística, Teoria dos Números e Equações Diferenciais. Seus esforços para provar o quinto postulado aparecem em seu trabalho *Os Elementos de Geometria*, sendo o mais influente de sua época e propiciando a popularização do problema do Postulado das Paralelas. Na tentativa de provar o quinto postulado, Legendre assumiu que a soma dos ângulos internos de um triângulo fosse menor, igual, ou maior que dois ângulos retos. Ele conseguiu facilmente eliminar a terceira hipótese, entretanto, mesmo com diversas tentativas não foi possível eliminar a primeira hipótese.

A tentativa de provar o quinto postulado como proposição ou de negá-lo, gerou por bastante tempo, muita dúvida e do esforço de sanar essa dúvida surgiram as outras geometrias, mas esse processo não foi rápido, nem simples. d’Alambert ao analisar a

dificuldade de se refutar o postulado, com todas as tentativas em vão, chamou esse problema de "O escândalo dos elementos da geometria".

Segundo [3], 2018, Johann Lambert escreveu

Demonstrações do postulado de Euclides podem ser levados até um ponto tal que aparentemente só falta uma bagatela. Mas uma análise cuidadosa mostra que nessa aparente bagatela está o cerne da questão, usualmente ela contém ou a proposição que se quer provar ou um postulado equivalente a ele. [3]

Esta afirmativa diz que o 5º postulado não pode ser provado a partir dos demais axiomas de Euclides.

De mesmo modo, as outras geometrias geradas a partir da negação do postulado das paralelas são consistente, não gerando nenhuma contradição a partir dos postulados e Gauss foi provavelmente o primeiro a chegar a esta conclusão e o fez usando o que hoje chamamos de geometria hiperbólica. Ele escreveu em 8 de novembro de 1824 uma carta a Franz Adolph Taurinus falando do modelo [24]

*No que diz respeito a sua tentativa, não tenho nada ( ou não muito ) para dizer, exceto que está incompleto. é verdade que sua demonstração da prova de que a soma dos três ângulos de um triângulo plano não pode ser superior a dois ângulos retos carece de um rigor geométrico. Mas isso em si pode ser facilmente corrigido, e não há dúvida de que a impossibilidade pode ser provada de forma mais rigorosa. Mas a situação é bastante diferente na segunda parte, que a soma dos ângulos não pode ser inferior a 180°, este é o ponto crítico, o recife em que ocorrem todos os destroços. Imagino que este problema não tenha envolvido você por muito tempo. Eu me debruço sobre ele há mais de 30 anos e não acredito que alguém possa ter pensado mais sobre essa segunda parte do que eu, embora eu nunca tenha publicado nada sobre isso. A suposição de que a soma dos três ângulos é inferior a 180 leva a uma curiosidade geométrica, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas completamente consistente, que eu venho desenvolvendo por satisfação pessoal, para que eu possa resolver todos os problemas nele com exceção da determinação de uma constante, que não pode ser designada a priori. O maior toma essa constante, mais próxima da geometria euclidiana, e quando é escolhida infinitamente grande, as duas coincidem. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais e, para os não iniciados, absurdos, mas calma, reflexão constante revela que elas não contém nada impossível.[24]*

Concluimos com isto, que Gauss, apesar de não ter publicado nada a respeito, foi o criador do termo geometria não euclidiana e ele não quis publicar, pois os matemáticos da época não estavam receptíveis à quebra do paradigma estabelecido pela geometria euclidiana. O começo do estudo dessa geometria, através do conceito de curvatura de superfície (a curvatura Gaussiana) serviu de sustentação para a Geometria Riemanniana, que por sua vez, serviu de base para a Teoria Geral da Relatividade [1].

Bolyai e Lobatchevsky, 1823 e 1826 respectivamente, tentaram sem êxito provar o postulado das paralelas, como não conseguiram, se enveredaram em desenvolver uma

geometria onde assumem que há mais de uma paralela a uma reta dada e que passa por um ponto dado, que é equivalente à suposição de Gauss de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a  $180^\circ$ .

Os trabalhos de János Bolyai, filho de Farkas Boyai foram dissuadidos pelo seu pai, levando em consideração, outros que já tentaram e não conseguiram resolver, porém quando viu o êxito do filho, o estimulou a publicar. Gauss, em uma carta a Farkas, aprovou o trabalho de János, mas afirmou ter desenvolvido essa mesma teoria há 30 anos. Com esta carta, János acabou não publicando nada sobre o assunto, como o fez Lobatchevsky. Suas publicações aconteceram em Kazan Messenger em russo em 1829, depois em francês em 1837, em alemão em 1840 e em francês de novo em 1855. Mesmo depois de todas essas publicações, seu nome só foi associado a geometria hiperbólica, anos após sua morte.

Os estudos de Gauss e seus trabalhos eram conhecidos por Georg Bernhard Riemann, que em 1854, na faculdade de Göttingen, com Gauss presente, apresentou pela primeira vez uma palestra que foi publicada em 1868 cujo título era "Sobre As Hipóteses Que Se Encontram Na Fundação Da Geometria". Apresentada para sua admissão como professor adjunto desta Universidade. Nela Riemann trabalhou outro modelo geométrico.

Para começar o estudo dessa geometria, Riemann levou em consideração o que todo o estudo do espaço físico. Que certeza e condições são pressupostas no espaço antes de determinar os axiomas existem no espaço físico (por exemplo, o formato da terra) trataremos disso no Capítulo 2. Na verdade o que Riemann fez para começar foi tratar um pouco da filosofia da geometria para com isso mostrar que os axiomas de Euclides eram empíricos e não verdades absolutas. Assim, questionando toda a geometria desenvolvida até então e a filosofia que a envolvia, reconheceu no espaço físico em que se encontrava uma outra geometria, a geometria esférica, que será o foco do nosso trabalho.

Segundo [18], 2017, Riemann modificou os postulados 1, 2 e 5, ficando dessa forma

Primeiro - Dois pontos distintos determinam pelo menos uma linha reta.

Segundo - Uma linha reta é limitada, mas não necessariamente de comprimento infinito

Quinto - Quaisquer duas linhas retas em um plano se cruzam.

Uma Geometria Elíptica (conhecida também como Geometria Riemanniana) é uma geometria tal que, dada uma reta  $L$  e um ponto  $P$  não pertencente a  $L$ , não existe reta paralela a  $L$  passando por  $P$ .

Modelos de geometria elíptica incluem a Geometria Projetiva, a Geometria Estereográfica e a Geometria Hiperesférica.

Tal geometria foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Riemann para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen.

Um modelo ideal de visualização é a superfície esférica; nela, as retas são as geodésicas ou círculos máximos da superfície. Observa-se, entretanto, que tais círculos máximos se interceptam em dois pontos.

Nesta geometria, abandona-se a noção de "estar entre" e a reta não é mais infinita

como na Geometria Euclidiana, mas sim, ilimitada.[23]

O uso do modelo esférico ajuda a explicar o que significa uma reta ilimitada. Embora um círculo máximo na esfera, representando uma reta da Geometria Elíptica, tenha um comprimento finito, ele não pode ser enclausurado por uma curva da superfície. Apesar do comprimento finito, não há um aberto da esfera que contenha o círculo máximo.

Nesta geometria

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos;
2. O plano é uma superfície esférica, e a reta uma geodésica, ou circunferência do círculo máximo;
3. Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, se interceptam;
4. Uma reta não é dividida em duas por um ponto;
5. A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;
6. Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

Como perspectiva interdisciplinar o estudo da esfera e seus elementos permite uma associação com o globo terrestre. Pode-se fazer um estudo da superfície terrestre estabelecendo relações entre a disciplina de Matemática e a de Geografia. “A relação com a Geografia se estabelece, na medida em que o saber geográfico contribui para a compreensão do mundo e institui uma rede entre os elementos que constituem a natureza, o social, o econômico, o cultural e o político”. [16]

Para determinar a localização de um ponto no plano em Matemática pudesse utilizar um sistema de coordenadas cartesianas, em Geografia para se determinar a posição de um ponto em qualquer lugar da superfície terrestre é necessário saber as Coordenadas Geográficas que são dois valores angulares, a saber, a latitude e a longitude.

Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes ideias geométricas (círculos máximos, ângulos, perpendicularismo, distância entre dois pontos, etc) que, quando trabalhadas no contexto da superfície da Terra levam o aluno a ter uma melhor compreensão e aprendizagem do assunto.

O estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas constituem a fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns modernos sistemas de navegação por satélites, em especial do GPS (Sistema Global de Posicionamento), sofisticado sistema de navegação ou posicionamento global, que informa com exatidão a latitude, a longitude e a altitude de um lugar.

Então, os grandes nomes sem menosprezar os outros envolvidos para o desenvolvimento da geometria não euclidiana foram:

1. Carl Friederich Gauss (1777 - 1855);

2. Nikolai Lobatchevsky (1792 - 1856);
3. János Bolyai (1802 - 1860)
4. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

## 1.3 História da Astronomia até o GPS

Muitas civilizações antigas tratavam os astros como divindades, tendo em vista que eram eles, os referenciais para tempos; estações; dia, noite; tempo de plantio e colheita, alguns povos mais antigos foram responsáveis pela criação de calendários complexos, baseados no movimento do sol e de outros astros, o nosso calendário por exemplo, apesar de não tão antigo (comparado a outros) é baseado na regularidade da posição da lua em relação a terra. Esses astros também passaram a ser usados, como referência para orientação nos deslocamentos, tendo em vista que antes disso, se usava outras formas de marcação para orientar, como por exemplo, pedras, árvores, rios, porém com o passar do tempo, essas marcações eram perdidas, devido à perecibilidade desses marcadores, então, necessitava-se de um referencial mais seguro e esse referencial, eram dado pelos astros.

Esses astros então, passaram a ser estudados com mais ímpeto, seu movimento e posição em relação a terra, esse estudo é chamado de astronomia. A astronomia, apesar de ser utilizada desde bastante cedo, foi com os gregos que ela teve grande avanço, muitos dos filósofos gregos elaboraram modelos com o intuito de explicar o formato da terra, as estações do ano, bem como a movimentação do sol, lua, estrelas e planetas, visíveis a olho nu, da terra, com um breve problema, os gregos tinham um pensamento geocêntrico, pois acreditavam que todos esses astros giravam em torno da terra, pois apareciam de um lado e depois, desapareciam de outro. Para Platão, o céu era perfeito e para descrever esta perfeição, se utilizava o círculo.[13]

## 1.4 Uma breve linha do tempo da Astronomia

4000 a.C. Na região da Mesopotâmia, surgiram muitos povos, dentre eles, os Sumérios que são os primeiros habitantes da região e os primeiros a usarem a astronomia. Em princípio, a observação dos astros era por motivos místicos e religiosos, mas com o passar do tempo, passaram de astrólogos para astrônomos. Foram os Sumérios que implementaram a matemática para descrever o movimento da Lua e dos Planetas. Utilizavam os zigurates para fazer as observações, estes são estruturas monumentais construídas na antiga Mesopotâmia, que compreende as atuais regiões do Iraque, Kuwait e partes da Síria e Turquia. Esses edifícios tinham uma função religiosa e eram frequentemente associados a templos dedicados aos deuses das cidades-estado mesopotâmicas.

**Tales de Mileto (624 - 546 a.C.)** Introduziu na Grécia, os fundamentos da geometria e astronomia, conhecidas pelo Egito. Ele pensava que a Terra era um disco plano, em uma vasta extensão de água

**Pitágoras de Samos (572 - 497 a.C.)** Pitágoras, acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e dos outros astros celestes. Ele acreditava que o Sol e a Lua eram carregados por esferas que eram separadas das que carregavam as estrelas. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

**Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.)** explicou que as fases da Lua dependem de quanto da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol, um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. Afirmava que o Universo é esférico e finito. Aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), propondo em seu livro *De Caelo*, que "o Universo é finito e esférico, ou não terá centro e não pode se mover."

**Heraclides de Pontus (388-315 a.C.)** propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol, e a existência de epiciclos.

**Aristarco de Samos (310-230 a.C.)** foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua. Ele propôs o duplo movimento da Terra: rotação em torno do seu eixo polar e translação ao redor do sol e acreditou que as estrelas se encontram em diferentes distâncias da Terra.

**Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.)**, bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a calcular o diâmetro da Terra. Ele notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Já em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente sete graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5000 estádios. Um estádio era uma unidade de distância usada na Grécia antiga. Um camelo atravessa 100 estádios em um dia, e viaja a cerca de 16km/dia. Como 7 graus corresponde a  $\frac{1}{50}$  de um círculo (360 graus), Alexandria deveria estar a  $\frac{1}{50}$  da circunferência da Terra ao norte de Siena e a circunferência da Terra deveria ser  $50 \times 5000$  estádios. Infelizmente, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a  $\frac{1}{6}$  km, o valor está a 1% do valor correto de 40000 km. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se a circunferência por  $\pi$ .

**Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.) (Claudius Ptolemaeus)** foi o último astrônomo importante da antiguidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. Ele compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o *Almagesto*, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia. Responsável pela formulação do modelo geocêntrico, onde esse modelo apresentava diversas órbitas circulares, que descreviam com relativa precisão o movimento dos planetas conhecidos,

mas não era capaz de explicar o movimento retrógrado de alguns planetas, quando observados da Terra. O modelo foi usado até a época do Renascimento Científico, no século XVI.

**Nicolau Copérnico (1473 – 1543)**, considerado o fundador da astronomia moderna, nasceu na Polônia e desenvolveu conhecimentos nos campos da matemática, geografia e astronomia. Sua teoria heliocêntrica afirmava que a Terra e os demais planetas se moviam ao redor de um ponto vizinho ao Sol, sendo, este, o verdadeiro centro do Sistema Solar. A alternância entre dias e noites é uma consequência do movimento que a Terra realiza sobre seu próprio eixo, denominado movimento de rotação.

**(1600) Galileu Galilei** realizou experimentos de queda dos corpos e chegou muito próximo do conceito moderno de inércia, contrariando as ideias vigentes sobre o movimento dos astros.

Na mesma época, Giordano Bruno afirmava existir outros planetas similares à Terra fora do Sistema Solar e orbitando outras estrelas. Foi julgado como herege pelo Tribunal da Inquisição e sentenciado à fogueira. Galileu Galilei (1564 – 1642) é considerado o pai da ciência moderna ou do Renascimento Científico – período entre 1500 e 1700 tido como era de transição entre a crença religiosa e a razão científica. Foi pioneiro na arte de criar e desenvolver teorias acerca do funcionamento do Universo que ajudaram nos ramos da Física e da Astronomia. Em 1609, o italiano realizou uma das principais contribuições para o ramo da Astronomia, quando inventou seu próprio telescópio e o apontou para o céu, com a intenção de explorar o universo, com isso, conseguiu identificar quatro das maiores luas de Júpiter (total de 79 satélites), provando que nem todos os astros orbitavam em volta da Terra. Observou também irregularidades na superfície da Lua.

O telescópio, denominado por Galileu *perspicillum* (**achar imagem**), foi um instrumento revolucionário à época, especialmente para a ciência, por ter contribuído significativamente para aprimorar a capacidade de observação do olho humano.

(1667) Isaac Newton desenvolveu a Gravitação Universal, fornecendo argumentos matemáticos capazes de explicar as órbitas planetárias e prever novos eventos astronômicos.

(1718) Edmund Halley descobriu que as estrelas não são fixas, mas que se movem com velocidades muito grandes.

(1781) William Herschel descobriu o planeta Urano e, tempos depois, conseguiu determinar a velocidade do Sol, bem como o formato achatado da Via Láctea.

(1842) Christian Johann Doppler descreveu o efeito Doppler, que mede a variação na frequência da luz. Esse importante fenômeno mais tarde foi usado para calcular as velocidades de aproximação e afastamento de estrelas e galáxias.

(1859-1875) James Clerk Maxwell descobriu que a distribuição de velocidades das partículas de um gás depende de sua temperatura. Em 1875, Lorde Kelvin e Hermann von Helmholtz realizaram uma estimativa da idade do Sol.

(1929) Edwin Hubble descobriu que o Universo está em constante expansão.

(1965) Lançamento da sonda espacial Mariner 4, a primeira a conseguir tirar fotos da superfície de outro planeta. Ela conseguiu obter imagens da superfície de Marte.

(1969) Neil Armstrong e Edwin Aldrin foram as primeiras pessoas a pisar na superfície da Lua.

(1973) As sondas Voyager 1 e 2 chegaram a Júpiter e usaram sua grande aceleração gravitacional como impulso para explorar outros planetas fora do Sistema Solar.

(1990) Lançamento do telescópio Hubble em órbita da Terra

De fato, muito progresso científico foi feito ao longo dos séculos desde que o ser humano passou a observar o céu noturno. Profundas mudanças tecnológicas e sociais foram possíveis graças às grandes descobertas da Astronomia.

Nos primórdios das civilizações, o processo de localização era baseado em rios, árvores, montanhas, pedras, porém com o passar do tempo, esses referenciais podem sofrer alterações, fazendo com que eles fossem referenciais apenas para curtas distâncias. Com isto, o homem procuraria outros meios para se localizar e poder percorrer maiores distâncias e para isto, eles olharam para o céu, referenciais que eram constantes e poderiam guiá-los com mais confiança por distâncias maiores. Surgiu daí a necessidade de ferramentas próprias para ajudá-los a serem orientados de maneira mais eficaz, ferramentas estas que foram sendo produzidas com o passar dos anos. Citaremos algumas delas:

**A Balestilha** conjunto com duas varas graduadas perpendiculares entre si de modo que uma deslize sobre a outra. Para utilizá-la desvia-se o olhar por uma extremidade de maior vara e mover a menor de modo a visualizar simultaneamente, por suas extremidades a linha do horizonte e astro. Este instrumento foi largamente utilizado na época dos descobrimentos nos séculos XV e XVI.

**A Bússula** (agulha metálica, magnetizada, suspensa pelo centro de gravidade de modo a girar livremente e apontando sempre para o polo sul magnético da terra que equivale ao polo norte geográfico) que, no período das grandes navegações, foi amplamente utilizada assim como a Balestilha e os instrumentos que serão abaixo citados.

**O Astrolábios** roda graduada que tem, presa ao seu centro, uma seta móvel que quando alinhada com o astro, indicava, na roda, a altura do mesmo. Esse instrumento foi bastante utilizado pelos Persas no século XVIII.

**O Quadrante** quarta parte de um círculo graduado em sua borda, feito com madeira ou latão e com duas miras em um dos lados retos. Mirando no astro determinava-se, por um fio prumo preso ao centro do arco, o ângulo de elevação do astro. Esse instrumento foi largamente utilizado no século XVIII

**O Kamal** Pequena tábua quadrada ou retangular presa a uma corda com nós, que era erguida a altura dos olhos e suas bordas opostas eram alinhadas com o horizonte e a estrela polar, respectivamente. A corda era presa aos dentes e esticada de modo que os nós determinavam o ângulo de elevação. Foi utilizado entre os séculos XVIII e XIX.

Mas, mesmo com esses instrumentos, haviam dificuldades, pois alguns deles só poderiam ser usados em condições específicas de clima. Continuou-se então, a busca por instrumentos mais confiáveis a respeito da ajuda com a localização e com o avanço da

ciência, veio por exemplo o conceito de latitude e longitude. A latitude era facilmente determinada, pela visibilidade da estrela polar, porém a longitude dependia da diferença entre o horário local e o horário em Greenwich. Porém, os relógios não eram confiáveis, não suportavam aos intempéries marítimos.

Em 1761, o inglês John Harrison desenvolveu cronômetros marítimos com compensadores de dilatação térmica e peças resistentes ao desgaste. Apesar desses avanços, ainda não tínhamos um meio eficiente de localização. Foi somente durante a Segunda Guerra Mundial, quando começamos a usar ondas de rádio para localizar veículos e tropas, com isto ocorreu um grande avanço no processo de localização. Isso foi feito com o auxílio do efeito Doppler, que relaciona a velocidade do veículo com a diferença entre as frequências das ondas de rádio incidentes e refletidas, determinando assim as distâncias até as emissoras. A localização era definida pelo processo de trilateração, utilizando três circunferências cuja interseção é um único ponto. Exemplos de sistemas desenvolvidos com essa tecnologia incluem o "LORAN"(navegação de longo alcance em inglês), "Decca" e "Omega". Esses sistemas tinham limitações, como o alcance limitado dos sinais de rádio e a disponibilidade reduzida de estações.

Já a corrida espacial teve início com o lançamento do satélite Sputnik 1 pela antiga União Soviética em 1957, seguido pela contrapartida americana com o satélite Explorer 1 em 1958. Isso levou à criação do primeiro sistema de navegação por satélite, baseado no efeito Doppler, em 1960, quando os Estados Unidos lançaram o satélite Transit 1B. No entanto, esse sistema era bidimensional e seu uso era restrito à navegação devido a interferências nos satélites e por calcular posições de veículos em baixas velocidades.

Em 1973, iniciou-se o projeto que revolucionaria o processo de navegação mundial. Esse projeto recebeu constantes investimentos e melhorias e, em 1991, o NAVSTAR/GPS (Sistema de Posicionamento Global por Satélite com Tempo e Medição de Distância) entrou em pleno funcionamento. A autoria desse sistema foi atribuída a pelo menos três americanos.

- a) O astrofísico Ivan Getting (1912 - 2003);



Figura 1.7: Fonte: Imagem retirada de [17]

- b) O engenheiro Bradford Parkinson (1935 - );  
c) O físico Roger L. Easton (1921 - 2014)

Outros sistemas de posicionamento estão disponíveis, como o GALILEU (da Europa), Compass (da China) e a modernização dos satélites GLONASS (Sistema de Navegação Global Russo), porém estão significativamente atrás da tecnologia empregada



Figura 1.8: Fonte: Imagem retirada de [17]



Figura 1.9: Fonte: Imagem retirada de [17]

no GPS. Inicialmente, o GPS era utilizado exclusivamente para fins militares, mas, como muitas outras inovações tecnológicas, foi posteriormente liberado para uso civil. Essa liberação foi motivada por um incidente em que uma aeronave comercial americana invadiu o espaço aéreo russo e foi derrubada por mísseis. Os Estados Unidos, temendo que o sistema GPS fosse utilizado contra eles, deliberadamente distorceram o sinal para reduzir a precisão da localização. Somente em 2000, essa distorção do sinal foi corrigida, permitindo que qualquer pessoa com um receptor GPS pudesse determinar informações como latitude, longitude, altitude e velocidade em tempo real.

O GPS (Sistema de Posicionamento Global) é um sistema de navegação por satélite criado e operado pelo governo dos Estados Unidos. Ele utiliza uma constelação de 24 satélites que orbitam o planeta a cerca de 20 mil km de altitude e enviam sinais para os dispositivos receptores. Esses satélites fornecem informações precisas sobre a localização geográfica de qualquer ponto na superfície terrestre, incluindo latitude, longitude e altitude. Além disso, o GPS também informa o horário exato e a velocidade de deslocamento entre diferentes localidades.

O funcionamento do GPS envolve três partes principais:

1. Segmento Espacial: Composto pelos 24 satélites em órbita, cada um pesando 1600 kg. Esses satélites trafegam em 6 órbitas, com 4 satélites em cada órbita, espaçados a 60 graus um do outro. Suas órbitas são inclinadas em 55 graus em relação ao plano que contém a linha do Equador. Essa configuração garante que, a qualquer momento, pelo menos quatro satélites estejam visíveis em qualquer ponto da superfície terrestre. Além disso, cada satélite possui quatro relógios de alta precisão, dois de césio e dois de rubídio.
2. Segmento de Controle: composto por cinco estações estrategicamente localizadas nas proximidades da linha do Equador: Colorado Springs (EUA), a principal estação que gerencia todo o sistema, Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshall, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul) e Ilha de Diego Garcia (no Oceano

Índico). Estas estações monitoram os satélites, atualizam suas posições orbitais, calibram e sincronizam seus relógios. Além disso, desempenham um papel crucial na determinação das órbitas de cada satélite e na previsão de suas trajetórias para as próximas 24 horas. Essas informações são transmitidas para cada satélite e posteriormente repassadas por este aos receptores.

3. Segmento do Usuário: representado por um aparelho receptor utilizado para captar e converter o sinal GPS em informações de posição, velocidade e tempo. Este segmento engloba todos os componentes necessários para esse processo, incluindo antenas e software de processamento.

O GPS é fundamental para diversas atividades cotidianas e profissionais, como navegação, mapeamento, logística, defesa territorial e até mesmo aplicativos de mapas em smartphones

## Capítulo 2

# Geometria Esférica - Principais Resultados

Neste capítulo abordamos alguns conceitos e resultados da geometria esférica. Começamos definindo os principais elementos da esfera: círculos máximos (ou grandes círculos), ângulos triângulos esféricos, fusos esféricos de ângulo  $\alpha$ , etc. A seguir calculamos a área de triângulos e fusos esféricos; passando logo após a estudar um pouco de trigonometria, em particular as Leis (esféricas) dos senos e cossenos.

### 2.1 Geometria Esférica

**Definição 2.1** No espaço  $\mathbb{R}^3$ , uma esfera de centro  $C = (x_0, y_0, z_0)$  e raio  $\rho$ , denotada por  $\mathbb{S}^2(C, \rho)$ , é o conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que

$$\mathbb{S}^2(C, \rho) = \left\{ P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{CP}\| = \rho \right\}$$

onde  $\|\overrightarrow{CP}\|$  é a norma do vetor  $\overrightarrow{CP}$  ou equivalentemente a distância entre os pontos  $P$  e  $C$ . Ou seja,

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (= \text{dist}(P, C).)$$

Em geral o ponto  $C$ , centro da esfera, será a origem  $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  do sistema de coordenadas, neste caso, denotaremos tal esfera simplesmente por  $\mathbb{S}_\rho^2$ .

Na definição acima temos associado, como é de costume, a cada ponto  $P \in \mathbb{R}^3$  uma tripla  $(x, y, z)$ , onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, respectivamente, as projeções de  $P$  sobre os eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , que são chamadas de coordenadas cartesianas do ponto  $P$ . Contudo, em alguns casos, é mais conveniente associarmos aos pontos da esfera uma tripla  $(\rho, \phi, \theta)$  definida como segue-se:

$\rho$  é a distância do ponto  $P$  à origem  $O$ .  $\rho = \text{dist}(P, O)$ ;

$\phi$  é o ângulo, medido em radianos, do eixo positivo  $Z$  ao vetor  $\overrightarrow{OP}$ ;

## 2.1. GEOMETRIA ESFÉRICA

---

$\theta$  é o ângulo, medido em radianos, do eixo positivo  $X$  à projeção de  $\overrightarrow{OP}$  sobre o plano  $XY$

$\rho$ ,  $\phi$  e  $\theta$  são chamadas coordenadas esféricas do ponto  $P$ .

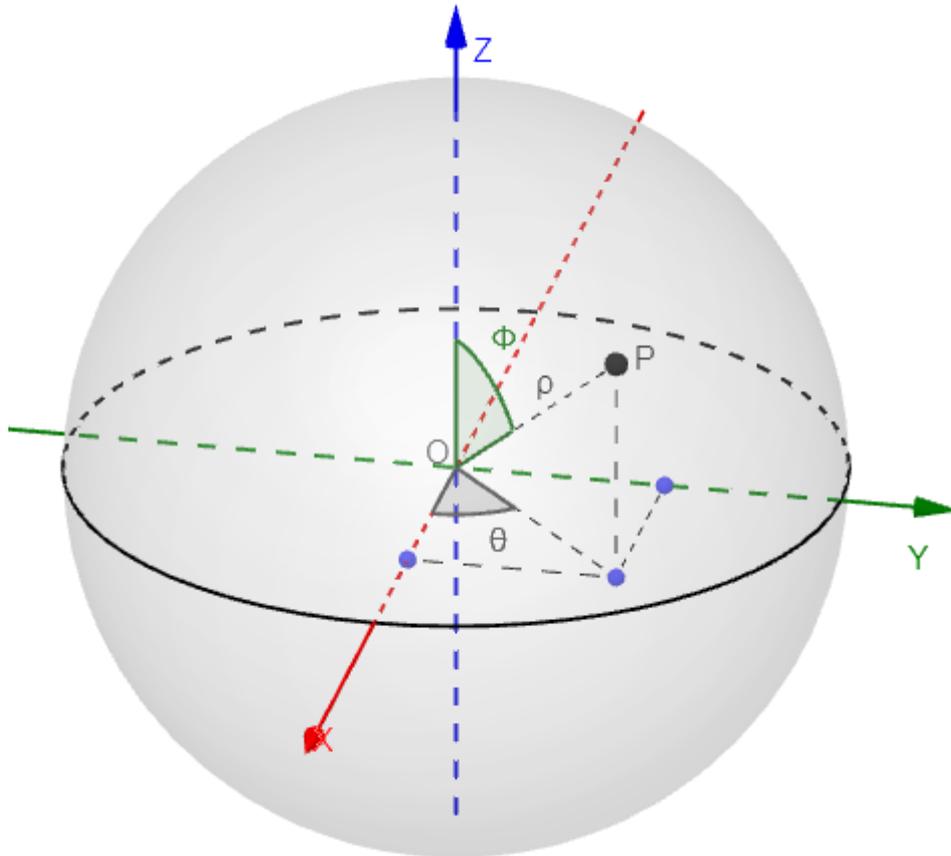


Figura 2.1: Fonte: Construção do Autor

Os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  estão relacionados, respectivamente, com as chamadas longitude e latitude, conceitos estes que serão definidos mais adiante.

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas é dada por:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

e quando restringimos  $(\rho, \phi, \theta)$  ao conjunto  $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  obtemos um difeomorfismo sobre  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ .

### 2.1.1 Comprimento de uma Curva na Esfera

Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma curva parametrizada, onde  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis com derivadas contínuas.

Então o comprimento de  $\gamma$  é dado por:

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2 + z'(t))^2} dt$$

**Observação 2.1** *Este comprimento pode ser infinito*

Quando  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}_\rho^2$ ,  $\gamma(t) = (\rho \cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t), \rho \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t), \rho \cos \phi(t))$  uma curva parametrizada na esfera  $\mathbb{S}_\rho^2$ , temos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\rho \operatorname{sen}(\theta(t))\theta'(t) \operatorname{sen}(\phi(t)) + \rho \cos(\theta(t)) \cos(\phi(t))\phi'(t) \\ y'(t) &= \rho \cos(\theta(t))\theta'(t) \operatorname{sen}(\phi(t)) + \rho \operatorname{sen}(\theta(t)) \cos(\phi(t))\phi'(t) \\ z'(t) &= -\rho \operatorname{sen}(\phi(t))\phi'(t) \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi)(\theta')^2 + \rho^2 \cos^2(\phi)(\phi')^2 + \rho \operatorname{sen}^2(\phi)(\phi')^2 \\ &= \rho^2 ((\theta')^2 \operatorname{sen}^2(\phi) + (\phi')^2) \end{aligned}$$

Assim,

$$L(\gamma) = \rho \int_I \sqrt{(\theta'(t))^2 \operatorname{sen}^2(\phi(t)) + (\phi'(t))^2} dt$$

Em particular se, por exemplo, a curva  $\gamma$  liga o ponto  $P = (0, 0, \rho)$  ao ponto  $Q = (\rho \operatorname{sen}(\phi(T)), 0, \rho \cos(\phi(T)))$ ,  $0 \leq T \leq \pi$ , ao longo do Equador obtido ao intersestar  $\mathbb{S}_\rho^2$  com o plano  $XZ$ , ou seja  $\gamma(t) = (\rho \operatorname{sen}(\phi(t)), 0, \rho \cos(\phi(t)))$ ,  $0 \leq t \leq T$ , então:

$$L(\gamma) = \rho \int_0^T \sqrt{(\phi'(t))^2} dt = \rho \int_0^T |\phi'(t)| dt.$$

Claramente o comprimento deste segmento de Equador é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva ligando os pontos  $P$  e  $Q$ . De fato,

$$\rho \int_0^T |\phi'(t)| dt \leq \rho \int_I \sqrt{(\theta'(t))^2 \operatorname{sen}^2(\phi(t)) + (\phi'(t))^2} dt$$

Em resumo, as curvas de menor comprimento ligando dois pontos da esfera  $\mathbb{S}_\rho^2$  são obtidas como interseção da esfera com um plano que passa pelo centro da mesma. Estas curvas são as chamadas **geodésicas da esfera**.

### 2.1.2 Distância entre Dois Pontos na Esfera $\mathbb{S}_\rho^2$

Um dos problemas, para cartógrafos e navegadores antigos da “Terra Redonda” era a determinação da distância entre dois pontos ou dois lugares. Utilizando coordenadas esféricas este problema torna-se algo mais simples.

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois pontos na esfera  $\mathbb{S}_\rho^2$  dados em coordenadas esféricas por:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\rho \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\phi_1), \rho \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\phi_1), \rho \cos(\phi_1)) & \text{e} \\ P_2 &= (\rho \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\phi_2), \rho \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\phi_2), \rho \cos(\phi_2)). \end{aligned}$$

Seja  $\alpha$  o ângulo, medido em radianos, entre os vetores  $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}$  e  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ . A distância entre  $P_1$  e  $P_2$  em  $\mathbb{S}_\rho^2$  é:

$$d(P_1, P_2) = \rho \cdot \alpha$$

Para determinar  $\alpha$  podemos usar a lei dos cossenos no triângulo  $\Delta OP_1P_2$ .

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos(\alpha).$$

Por outro lado,

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 - 2\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle + \|\vec{v}_2\|^2.$$

Assim,

$$2\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos(\alpha) = 2\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

e, como neste caso temos  $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \rho$ , obtemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\rho^2} \tag{2.1}$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= \rho^2 \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\phi_1) \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\phi_2) + \rho^2 \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\phi_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\phi_2) + \\ &\quad + \rho^2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &= \rho^2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2)) \operatorname{sen}(\phi_1) \operatorname{sen}(\phi_2) + \rho^2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &= \rho^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sen}(\phi_1) \operatorname{sen}(\phi_2) + \rho^2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\rho^2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sen}(\phi_1) \operatorname{sen}(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) (\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + \operatorname{sen}(\phi_1) \operatorname{sen}(\phi_2)) - \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &\quad + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) + (1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) + 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \end{aligned}$$

De modo que o ângulo  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \arccos \left( \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) + 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \right)$$

Por outro lado, sabemos que rotações da esfera preservam distância, então podemos fazer uma rotação em  $\mathbb{S}_\rho^2$  de modo que o ponto  $P_1$  fique no plano  $XY$ , neste caso,  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  e portanto,  $2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) = 0$ .

Assim,

$$d(P_1, P_2) = \rho \arccos \left( \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \right) = \rho \cdot \alpha.$$

onde  $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$  e  $\tilde{\phi} = \phi_1 - \phi_2$  ( $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ ).

### 2.1.3 Triângulos e Fusos

Dados dois pontos  $A, B \in \mathbb{S}_\rho^2$ ,  $A \neq B$ , sabemos que existe uma única geodésica que os contém (um grande círculo). Desse modo, dois pontos  $A, B$ ,  $A \neq B$  definem dois arcos de geodésica e se  $A$  e  $B$  não são antípodas, um desses arcos tem comprimento menor do que  $\rho\pi$ . Denotaremos esse arco de geodésica por  $\gamma_{AB}$ . No caso desses pontos serem antípodas temos dois arcos do mesmo comprimento,  $\rho\pi$ . Denotaremos esses arcos, indistintamente, por  $\gamma_{AB}$ .

**Definição 2.2** *Três pontos  $A, B, C \in \mathbb{S}_\rho^2$  que não estão sobre um mesmo grande círculo definem uma região convexa  $T \subset \mathbb{S}_\rho^2$  limitada pelas geodésicas  $\gamma_{AB}$ , que liga os pontos  $A$  e  $B$ ,  $\gamma_{AC}$ , ligando  $A$  e  $C$  e  $\gamma_{BC}$ , que liga  $B$  e  $C$ .*

*A região convexa  $T \subset \mathbb{S}_\rho^2$  descrita acima é chamada **triângulo esférico** de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .*

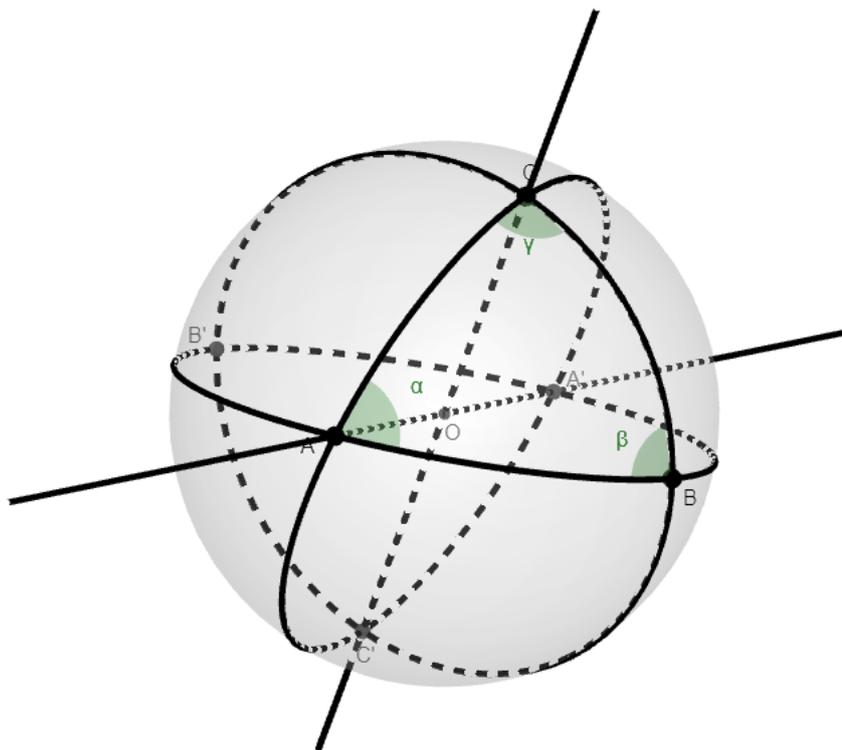


Figura 2.2: Triângulo Esférico: Construção do Autor

Note que os ângulos internos de um triângulo esférico são sempre menores do que  $\pi$ . Além disso, os lados do triângulo, ou seja, as geodésicas  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{AC}$  e  $\gamma_{BC}$  têm comprimentos maiores do que zero e menores ou iguais do que  $\rho\pi$ . Sendo que, no máximo, uma dessas geodésicas tem comprimento igual a  $\rho\pi$ .

Neste contexto, entendemos um ângulo esférico como o menor ângulo formado por dois círculos máximos. Sua medida é a mesma do menor ângulo plano formado pelo diedro definido pelos planos que contém esses círculos máximos.

**Definição 2.3** Chamamos **Fuso Esférico de ângulo**  $\alpha$  à região da esfera compreendida entre dois círculos máximos que definem o ângulo  $\alpha$

**Proposição 2.1 (Área do Fuso Esférico)** A área de um fuso esférico de ângulo  $\alpha$ , na esfera de raio  $\rho$ , é  $A_f = 2\alpha\rho^2$ .

**Demonstração:** Um fuso de ângulo  $2\pi$  cobre a esfera toda e sabemos que a área da esfera de raio  $\rho$  é  $4\pi\rho^2$ . Assim, basta fazer uma regra de três nas áreas do fuso de ângulo  $\alpha$  e da esfera.

$$\frac{A_f}{4\pi\rho^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Donde obtemos,

$$A_f = \frac{4\pi\rho^2\alpha}{2\pi} = 2\alpha\rho^2$$

■

**Teorema 2.1 (Soma Dos Ângulos Internos de um Triângulo Esférico)** Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico em  $\mathbb{S}_\rho^2$  e seja  $\mathbf{a}$  a área desse triângulo. Então

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathbf{a}}{\rho^2}$$

para a demonstração, usaremos como base a figura 2.2

**Demonstração:** Prolongando os lados do triângulos, construímos 3 fusos "duplos", com os mesmos ângulos internos do triângulo. Estes fusos, têm áreas  $4\alpha\rho^2, 4\beta\rho^2$  e  $4\gamma\rho^2$  respectivamente. Sejam  $A, B$  e  $C$  os vértices do triângulo e sejam  $A', B'$  e  $C'$  os pontos antípodas de  $A, B$  e  $C$  respectivamente. Os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  têm a mesma área e quando somamos as áreas dos fusos duplos obtemos:

$$4\alpha\rho^2 + 4\beta\rho^2 + 4\gamma\rho^2 = \text{área}(\mathbb{S}_\rho^2) + 2 \text{área}(\Delta ABC) + 2 \text{área}(\Delta A'B'C').$$

Donde,

$$4\rho^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi\rho^2 + 4\mathbf{a}$$

e portanto,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathbf{a}}{\rho^2}.$$

■

**Corolário 2.1** Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico. Então

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

**Demonstração:** De fato,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathbf{a}}{\rho^2} > \pi.$$

Além disso,  $\mathbf{a} < \frac{1}{2} \text{área} \mathbb{S}_\rho^2 = 2\pi\rho^2$ . Logo,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathbf{a}}{\rho^2} < \pi + 2\pi = 3\pi.$$

■

## 2.2 Trigonometria Esférica

Para o desenvolvimento da astronomia de posição, é de suma importância desenvolver a trigonometria presente nos triângulos esféricos, existem várias relações. Neste trabalho mencionamos só algumas, o teorema de Pitágoras, a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos.

**Definição 2.4 (Triângulo Retângulo Esférico)** *Um triângulo esférico em  $\mathbb{S}_\rho^2$  no qual um de seus ângulos é reto diz-se um Triângulo Retângulo Esférico.*

**Teorema 2.2 (Teorema de Pitágoras em  $\mathbb{S}_\rho^2$ )** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo retângulo esférico em  $\mathbb{S}_\rho^2$ . Suponha que o ângulo reto está no vértice  $A$  e que os lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente, então*

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{\rho}\right) \quad (2.2)$$

**Demonstração:**

Como as rotações na esfera são isometrias (preservam comprimentos) podemos supor que o lado  $AC$  está sobre o Equador ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) com o ponto  $A$  no eixo  $X$ .

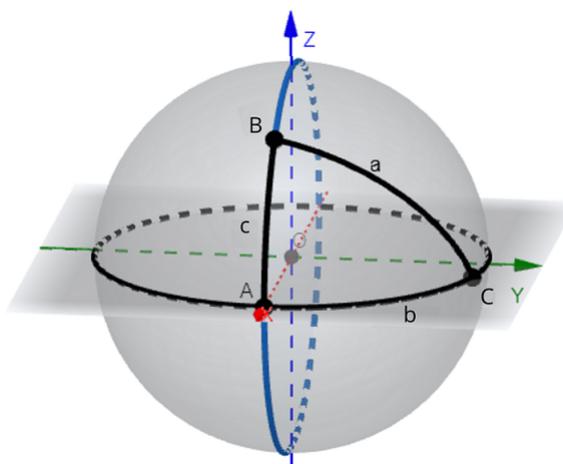


Figura 2.3: Construção do Autor

## 2.2. TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Assim as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são:

$$A = (\rho, 0, 0), \quad B = \left( \rho \cos \left( \frac{c}{\rho} \right), 0, \rho \operatorname{sen} \left( \frac{c}{\rho} \right) \right) \quad C = \left( \rho \cos \left( \frac{b}{\rho} \right), \rho \operatorname{sen} \left( \frac{b}{\rho} \right), 0 \right),$$

Pela equação 2.1 temos:

$$\cos \left( \frac{a}{\rho} \right) = \frac{\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle}{\rho^2} = \cos \left( \frac{c}{\rho} \right) \cdot \cos \left( \frac{b}{\rho} \right)$$

■

**Observação 2.2** Se na equação 2.2 fizermos  $\rho \rightarrow \infty$  obtemos o clássico Teorema de Pitágoras no plano. De fato, consideremos a expansão do cosseno, em série de Taylor, em torno de  $x = 0$ .

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos \left( \frac{a}{\rho} \right) &= 1 - \frac{a^2}{2\rho^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\left( \frac{a}{\rho} \right)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{a^2}{2\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left( \frac{a}{\rho} \right)^{2n}}{(2n+2)!} \\ &= 1 - \frac{a^2}{2\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} C_a, \quad \text{onde, } C_a = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left( \frac{a}{\rho} \right)^{2n}}{(2n+2)!} \end{aligned}$$

e da igualdade (2.2) temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} C_a &= \left( 1 - \frac{b^2}{2\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} C_b \right) \cdot \left( 1 - \frac{c^2}{2\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^2} C_c \right) \\ &= 1 - \frac{c^2}{2\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^2} C_c - \frac{b^2}{2\rho^2} + \frac{b^2 c^2}{4\rho^4} - \frac{b^2 c^2}{2\rho^4} C_c + \frac{b^2}{\rho^2} C_b - \frac{b^2 c^2}{2\rho^4} C_b + \frac{b^2 c^2}{\rho^4} C_b C_c \\ &= 1 - \frac{b^2}{2\rho^2} - \frac{c^2}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left( b^2 C_b + c^2 C_c + \frac{b^2 c^2}{2\rho^2} - \frac{b^2 c^2}{2\rho^2} C_b - \frac{b^2 c^2}{2\rho^2} C_c + \frac{b^2 c^2}{\rho^2} C_b C_c \right) \end{aligned}$$

Daí,

$$-\frac{a^2}{2} + a^2 C_a = -\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + b^2 C_b + c^2 C_c + \frac{b^2 c^2}{2\rho^2} \left( \frac{1}{2} - C_b - C_c + 2C_b C_c \right)$$

Note que todas as séries envolvidas na equação acima são convergentes, então tomando limite quando  $\rho \rightarrow \infty$  obtemos:

$$-\frac{a^2}{2} = -\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}.$$

O que nos dá o Teorema de Pitágoras no plano:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**Teorema 2.3 (Lei dos Cossenos para Triângulos Esféricos)** Seja  $\Delta ABC$  um triângulo esférico em  $\mathbb{S}_\rho^2$ . Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente e seja  $\alpha$  o ângulo interno no vértices  $A$ . Então:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos \left( \frac{a}{\rho} \right) - \cos \left( \frac{b}{\rho} \right) \cos \left( \frac{c}{\rho} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{b}{\rho} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{c}{\rho} \right)} \quad (2.3)$$

Analogamente, se  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos nos vértices  $B$  e  $C$  respectivamente, então

$$\cos(\beta) = \frac{\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\sin\left(\frac{a}{\rho}\right)\sin\left(\frac{c}{\rho}\right)} \quad e \quad \cos(\gamma) = \frac{\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\sin\left(\frac{a}{\rho}\right)\sin\left(\frac{b}{\rho}\right)}$$

**Demonstração:** Como no caso do Teorema de Pitágoras, sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos  $A$  e  $B$  estão no plano  $XY$  com o ponto  $A$  no eixo  $X$ , agora o ponto  $B$  não necessariamente está no plano  $XZ$ . Então as coordenadas de  $A$ ,  $B$  e  $C$  são:

$$A = (\rho, 0, 0), \quad B = (\rho \cos(\phi_B) \cos(\theta_B), \rho \cos(\phi_B) \sin(\theta_B), \rho \sin(\phi_B)) \quad e$$

$$C = \left( \rho \cos\left(\frac{b}{\rho}\right), \rho \sin\left(\frac{b}{\rho}\right), 0 \right).$$

Temos:

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = \frac{\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle}{\rho^2} = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \sin(\phi_B) \cos(\theta_B) + \sin\left(\frac{b}{\rho}\right) \sin(\phi_B) \sin(\theta_B) \quad (2.4)$$

$$\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle}{\rho^2} = \cos\frac{b}{\rho}$$

$$\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\rho^2} = \sin(\phi_B) \cos(\theta_B) \quad (2.5)$$

Donde obtemos:

$$\sin\left(\frac{a}{\rho}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{b}{\rho} - \theta_B\right) \sin^2(\phi_B)}$$

$$\sin\left(\frac{b}{\rho}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{b}{\rho}\right)} =$$

$$\sin\left(\frac{c}{\rho}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{c}{\rho}\right)} = \sqrt{1 - \sin^2(\phi_B) \cos^2(\theta_B)}$$

O ângulo interno  $\alpha$  é o ângulo diedral formado pelo plano  $\pi_1$  que contém os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  e o plano  $\pi_2$  que contém os pontos  $O$ ,  $A$  e  $C$ . Este ângulo corresponde ao ângulo entre os vetores  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  e  $(0, 0, 1)$ .

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = (0, -\rho^2 \cos(\phi_B), \rho^2 \sin(\phi_B) \sin(\theta_B)).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha) &= \frac{\langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, (0, 0, 1) \rangle}{\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|} = \frac{\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B)}{\sqrt{\cos^2(\phi_B) + \text{sen}^2(\phi_B) \text{sen}^2(\theta_B)}} \\
 &= \frac{\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\phi_B) + \text{sen}^2(\phi_B) \text{sen}^2(\theta_B)}} = \frac{\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\phi_B)(1 - \text{sen}^2(\theta_B))}} \\
 &= \frac{\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\phi_B) \cos^2(\theta_B)}} = \frac{\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B)}{\text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{sen}(\phi_B) \text{sen}(\theta_B) = \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) \cos(\alpha) \quad (2.6)$$

As equações 2.5 e 2.6 nos permite reescrever a equação 2.4 como:

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cos\left(\frac{c}{\rho}\right) + \text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right) \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) \cos(\alpha)$$

Donde obtemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right) \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}$$

Analogamente obtemos as equações:

$$\cos(\beta) = \frac{\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) \cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} \quad \text{e} \quad \cos(\gamma) = \frac{\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}$$

■

**Observação 2.3** Quando, na lei dos cossenos, tomamos  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  obtemos:

$$\frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right) \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} = 0.$$

Ou seja,

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cos\left(\frac{c}{\rho}\right).$$

Que é o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos esféricos.

**Observação 2.4** Procedendo como na observação 2.2, quando fazemos  $\rho \rightarrow \infty$  obtemos a lei dos cossenos no plano

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

De fato, da lei dos cossenos, (equação 2.3), temos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}$$

Lembrando que:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

e

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Fazendo

$$C_x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} \quad e \quad S_x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

podemos escrever:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 C_x \quad e \quad \operatorname{sen}(x) = x + x S_x.$$

E denotando  $C_{\frac{a}{\rho}}$  e  $S_{\frac{a}{\rho}}$  simplesmente por  $C_a$  e  $S_a$  respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) &= \left(1 - \frac{b^2}{2\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} C_b\right) \left(1 - \frac{c^2}{2\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^2} C_c\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2\rho^2} (b^2 + c^2 - b^2 C_b - c^2 C_c) + \frac{b^2 c^2}{2\rho^4} \left(\frac{1}{2} - C_b - C_c + C_b C_c\right) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) &= \frac{1}{2\rho^2} (-a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{\rho^2} (a^2 C_a - b^2 C_b - c^2 C_c) + \\ &\quad + \frac{b^2 c^2}{2\rho^4} \left(\frac{1}{2} + C_b + C_c - 2C_b C_c\right). \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) &= \left(\frac{b}{\rho} + \frac{b}{\rho} S_b\right) \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c}{\rho} S_c\right) \\ &= \frac{bc}{\rho^2} + \frac{bc}{\rho^2} (S_b + S_c) + \frac{bc}{\rho^2} S_b S_c. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\rho^2} (-a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{\rho^2} (a^2 C_a - b^2 C_b - c^2 C_c) + \frac{b^2 c^2}{2\rho^4} \left(\frac{1}{2} + C_b + C_c - 2C_b C_c\right)}{\frac{bc}{\rho^2} + \frac{bc}{\rho^2} (S_b + S_c) + \frac{bc}{\rho^2} S_b S_c} \\ &= \frac{\frac{1}{2} (-a^2 + b^2 + c^2) + a^2 C_a - b^2 C_b - c^2 C_c + \frac{b^2 c^2}{2\rho^2} \left(\frac{1}{2} + C_b + c_c - 2C_b C_c\right)}{bc + bc (S_b + S_c + S_b S_c)} \end{aligned}$$

## 2.2. TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

---

Como todas as séries envolvidas convergem, tomando limite quando  $\rho \rightarrow \infty$  obtemos :

$$\cos(\alpha) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Daí,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$

**Teorema 2.4 (Lei dos Senos para Triângulos Esféricos)** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo esférico em  $\mathbb{S}_\rho^2$ . Sejam  $a, b$  e  $c$  os comprimentos dos lados opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$  respectivamente e sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos internos nos vértices  $A, B$  e  $C$ . Então:*

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\gamma)} \quad (2.7)$$

**Demonstração:** Da lei dos cossenos, equação 2.3, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\alpha) &= 1 - \left( \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} \right)^2 \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{c}{\rho}\right) - \left[ \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) \right]^2}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{c}{\rho}\right)} \\ &= \frac{\left[ 1 - \cos^2\left(\frac{b}{\rho}\right) \right] \left[ 1 - \cos^2\left(\frac{c}{\rho}\right) \right] - \left[ \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) \right]^2}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{c}{\rho}\right)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{c}{\rho}\right) + 2\cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}$$

Analogamente obtem-se:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{c}{\rho}\right) + 2\cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}$$

e

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos^2\left(\frac{c}{\rho}\right) + 2\cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) = \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) = \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)$$

E dessa forma,

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

■

**Observação 2.5** Novamente, como no caso do teorema de Pitágoras, fazendo  $\rho \rightarrow \infty$  obtemos a lei clássica dos senos no plano,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}.$$

# Capítulo 3

## Algumas Aplicações da Geometria Esférica

Neste capítulo abordamos algumas aplicações dos resultados desenvolvidos no capítulo anterior, consideramos as Coordenadas Astronômicas e algumas curiosidades interessantes sobre a geometria da esfera.

### 3.1 Coordenadas Astronômicas

Para localizar um ponto na Esfera Celeste utilizamos, em geral, 4 sistemas de coordenadas astronômicas:

1. Coordenadas Equatoriais
2. Coordenadas Eclípticas
3. Coordenadas Horizontais
4. Coordenadas Horárias

Estes sistemas se relacionam através da trigonometria esférica. As referências básicas nesta seção são [4], [12] e [20]

Antes de apresentar os sistemas de coordenadas acima mencionados vamos dar algumas definições que nos facilitarão tal tarefa.

Os astros que vemos no céu, estão muito distantes de nós, a distâncias astronômicas e dizemos que eles estão dispostos em uma esfera muito grande, de raio tendendo ao infinito, essa esfera é chamada *Esfera Celeste*. Ao longo dela, as projeções dos objetos celestes movem-se ao redor de um eixo específico, chamado *Eixo Polar*, que coincide com o eixo de rotação da Terra. É de se observar que o raio da terra é muito pequeno comparado com o raio da Esfera Celeste e portanto, comparativamente a Terra é um ponto dentro dessa esfera, a saber, o centro dela. O centro da terra será o centro da esfera celeste.

A figura abaixo nos ajudará na compreensão dos conceitos que seguem.

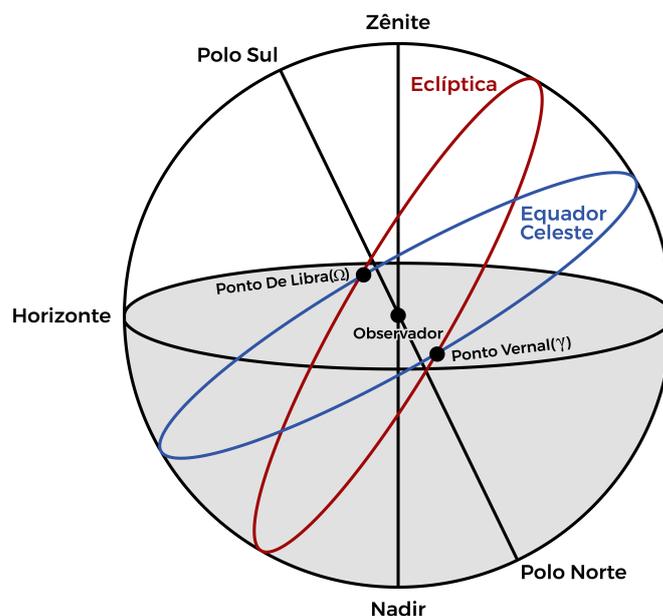


Figura 3.1: Sistema Equatorial

**Definição 3.1 (Direção Vertical)** *É a direção norte-sul com relação ao observador.*

*O ponto da esfera celeste ao norte do observador é chamado **Zênite**, e o ponto ao sul do observador chama-se **Nadir***

**Definição 3.2 (Plano Horizontal)** *É o plano que contém o círculo máximo da esfera celeste, que é perpendicular a direção vertical do observador. Este círculo máximo é chamado de horizonte.*

Note que este plano contém o observador.

**Definição 3.3 (Equador Celeste)** *É a circunferência máxima, na esfera celeste, contida no plano perpendicular ao eixo de rotação da terra.*

**Definição 3.4** *Os pontos de interseção entre eixo de rotação da terra e a esfera celeste são chamados de **Polos Norte e Sul Celestes** sendo o norte o ponto ao norte do Equador.*

Para um observador que se encontra no polo norte terrestre, o polo norte celeste, coincide com o zênite e o polo sul celeste com o nadir. No caso do observador se encontrar no polo sul terrestre, o sul celeste será o zênite e o norte celeste o nadir.

**Definição 3.5 (Meridianos)** *São semicírculos máximos que contém os polos norte e sul. O meridiano que passa pelo zênite é chamado **meridiano local**.*

### 3.1. COORDENADAS ASTRONÔMICAS

---

Os meridianos são perpendiculares ao Equador.

**Definição 3.6 (Paralelos)** *São círculos na esfera celeste paralelos ao plano que contém o equador celeste.*

O movimento das estrelas no decorrer do dia é sempre sobre um paralelo.

**Definição 3.7 (Círculos Verticais)** *São círculos máximos que contém o zênite e o nadir.*

A eclíptica, equinócios e solstícios estão inter-relacionados de forma fundamental na astronomia e na compreensão das estações do ano. Vamos explorar cada um desses conceitos e como eles se conectam.

**Definição 3.8 (Eclíptica)** *A eclíptica é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol. Quando observamos o céu, a eclíptica aparece como uma linha traçada pelo movimento aparente do Sol ao longo do ano.*

**Definição 3.9 (Equinócios)** *Os equinócios são dois pontos no ano em que o Sol cruza o equador celeste. Isso ocorre duas vezes por ano, e nesses momentos, o dia e a noite têm aproximadamente a mesma duração. Existem dois equinócios:*

**Equinócio Vernal:** *Ocorre por volta de 20 de março no hemisfério norte, quando o Sol cruza o equador celeste de sul para norte. Marca o início da primavera no hemisfério norte e do outono no hemisfério sul. Denotado por  $\gamma$  é a intersecção entre o Equador Celeste e a Eclíptica.*

*Este ponto também é chamado de **Ponto de Áries**.*

**Equinócio Outonal:** *Ocorre por volta de 22 de setembro no hemisfério norte, quando o Sol cruza o equador celeste de norte para sul. Marca o início do outono no hemisfério norte e da primavera no hemisfério sul. Denotado por  $\Omega$  é a intersecção entre o Equador Celeste e a Eclíptica e antípoda ao Ponto de Áries*

*Este ponto também é chamado de **Ponto de Libra**.*

**Definição 3.10 ( Solstícios)** *Os solstícios são dois pontos no ano em que o Sol atinge sua maior declinação ao norte ou ao sul do equador celeste. Estes são os momentos em que temos o dia mais longo e a noite mais curta do ano (solstício de verão) e o dia mais curto e a noite mais longa do ano (solstício de inverno). Existem dois solstícios:*

**Solstício de Verão** *Ocorre por volta de 21 de junho no hemisfério norte, quando o Sol está na sua posição mais ao norte no céu. Marca o início do verão no hemisfério norte e do inverno no hemisfério sul.*

**Solstício de Inverno** *Ocorre por volta de 21 de dezembro no hemisfério norte, quando o Sol está na sua posição mais ao sul no céu. Marca o início do inverno no hemisfério norte e do verão no hemisfério sul.*

**Definição 3.11 (Meridiano do Astro)** *É o semi Círculo que passa pelo polo Norte Celeste, pelo astro e pelo polo Sul Celeste*

### 3.1.1 Coordenadas Equatoriais

Esse sistema de coordenadas, consiste de três parâmetros a ascensão reta, a declinação e a distância polar

**Definição 3.12 (Ascensão reta)** *É a medida do ângulo central que subtende o arco, no Equador, formado pelos meridianos do ponto de aries e do astro, medido no sentido anti-horário. Este ângulo varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  e será denotado por  $\alpha$*

**Definição 3.13 (Declinação)** *É a medida do ângulo central que subtende o arco, no meridiano do astro, entre o Equador celeste e o astro. Este ângulo varia de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  e será denotado por  $\sigma$ .*

**Definição 3.14 (Distância Polar)** *É a medida do ângulo central que subtende o arco, sobre o meridiano do astro, entre o polo norte celeste e o astro. Este ângulo varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  e será denotado por  $\Delta$ .*

### 3.1.2 Coordenadas Eclípticas

Neste sistema, o plano principal é o Plano da Eclíptica e os parâmetros são a *Latitude Celeste* e a *Longitude Celeste*

**Definição 3.15 (Círculo de Longitude)** *Qualquer círculo que contenha os polos da Eclíptica*

**Definição 3.16 (Latitude Celeste)** *É a medida do arco que vai da Eclíptica até o astro, sobre o Círculo de Longitude que contém o astro. Esse arco será denotado por  $\beta$  e varia de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ .*

**Definição 3.17 (Longitude Celeste)** *É o arco entre o ponto de áries e o círculo de longitude que contém o astro, medido no sentido anti horário, será denotado por  $\lambda$  e varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .*

### 3.1.3 Coordenadas Horizontais

Neste sistema de coordenadas, o plano fundamental é o horizonte e o eixo perpendicular é o círculo vertical do astro.

**Definição 3.18 (Altura)** *É o ângulo formado entre o horizonte e o astro, sobre o círculo vertical do astro. Denotado por  $h$  varia entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ , abaixo do horizonte, negativo e acima do horizonte, positivo. a altura do zênite é  $90^\circ$  e a altura do nadir  $-90^\circ$ .*

**Definição 3.19 (Distância Zenital)** *É o ângulo formado pelo astro e o zênite, é o complemento da altura. Denotado por  $z$  varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .*

## 3.2. TRIÂNGULO DE POSIÇÃO ASTRONÔMICA (TRIÂNGULO DA PAZ)

---

É de se observar, que  $h + z = 90^0$ .

**Definição 3.20 (Azimute)** *é contado sobre o horizonte, comumente de leste para oeste, no sentido NESO (norte-leste-sul-oeste). Ele pode ser contado em ângulos ou em horas, variando de  $0^0$  até  $360^0$ , ou de 0h a 24h.*

### 3.1.4 Coordenadas Horárias

Neste sistema de coordenadas, assim como no sistema equatorial, o plano principal, é o horizonte do observador e os parâmetros, são a declinação e o ângulo horário. A declinação, é a mesma definida no Sistema Equatorial, então nos concentraremos em definir o ângulo horário.

**Definição 3.21 (Ângulo Horário)** *Denotado por  $H$ , o ângulo horário é o ângulo medido sobre o horizonte, no sentido horário com origem no meridiano local até o meridiano do astro. E varia de  $0^0$  a  $360^0$ . Também pode ser medido em horas, variando de -12h a 12h ou de 0h a 24h, sendo 0h se o astro estiver sobre o meridiano local, será negativo se o astro estiver a leste do meridiano local e positivo se tiver a oeste do meridiano local*

## 3.2 Triângulo de Posição Astronômica (Triângulo da PAZ)

É um triângulo esférico com vértices no polo, no astro e no zênite. Ele será usado para determinar localização dos astros quando se sabe a posição geográfica da observação, posição essa que pode ser determinada com o uso do GPS. Podemos relacionar a trigonometria esférica e a astronomia para mapear Posições Celestes e Locais na Terra, determinar Distâncias Angulares, corrigir Efeitos Atmosféricos e também permite relacionar dois ou mais sistemas de coordenadas. Vamos focar nos sistemas equatorial e horizontal

Considere a figura abaixo:

Nela, identificamos:

1. O lado formado pelo polo e o zênite é o arco de medida  $90^0 - \phi$ , onde  $\phi$  é a latitude do observador
2. O lado formado pelo zênite e o astro, é a distância zenital de medida  $90^0 - h$ , onde  $h$  é a altura do astro.
3. O lado formado pelo polo e o astro, é a distância polar de medida  $90^0 - \delta$ , onde  $\delta$  é a declinação do astro.

Os ângulos internos são:

1. O ângulo no zênite de medida  $A$  (Azimute), quando o polo é o norte e  $A - 180^0$  quando o polo é o sul.

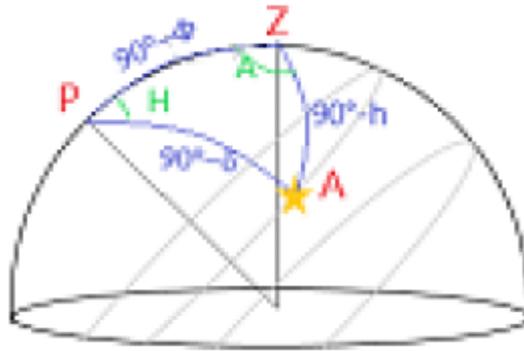


Figura 3.2: Triângulo da Paz. Fonte: <https://noic.com.br/astronomia/curso/aplicacoes-da-trigonometria-esferica/> Acesso em 31 de Julho de 2024

2. O ângulo com vértice no polo tem medida  $H$  (ângulo horário).
3. O ângulo com vértice no astro.

Aplicando a lei dos cossenos nesse triângulo, temos:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H$$

Como  $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$  para qualquer que seja o  $\phi$  e  $\sin(90^\circ - \phi) = \cos \phi$  também para todo  $\phi$ , temos da relação acima

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \quad (3.1)$$

$$\sin \delta = \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos A$$

Aplicando a lei dos senos temos:

$$\frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin H} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin A}$$

$$\frac{\cos h}{\sin H} = \frac{\cos \delta}{\sin A}$$

Temos então uma relação entre as Coordenadas Horárias  $(H, \delta)$  e as Coordenadas Horizontais  $(A, h)$ .

$$\sin H \cos \delta = \sin A \cos h$$

### 3.3. TRANSFORMANDO COORDENADAS CARTESIANAS EM GEOGRÁFICAS

Ainda de 3.1 é possível calcular o tempo que um astro fica visível no horizonte. Temos:

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H.$$

Donde,

$$\cos H = \frac{\sin h}{\cos \phi \cos \delta} - \frac{\sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

Para isto, precisamos entender que, no momento do nascente e do poente do astro sua altura é zero e portanto, fazemos  $h = 0$ , vale ressaltar, que o tempo que ele leva para subir e para descer é o mesmo, que é o ângulo horário e portanto, o tempo que o astro está acima do horizonte (visível) é o dobro do ângulo horário. Temos assim que

$$\cos H = -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta$$

O exemplo a seguir foi extraído de [4]

Quanto tempo o sol permanecerá acima do horizonte em Porto Alegre, cuja latitude é  $30^\circ$  em um dia de Solstício de verão no hemisfério sul, em que a declinação do sol é  $23^\circ 27'$ ?

Temos:  $\cos H = -\operatorname{tg}(30^\circ) \operatorname{tg}(23^\circ 27')$ . Então,

$$\cos H = -0,2504.$$

Donde,  $H = 104,4^\circ$ . Assim, o ângulo de permanência no horizonte é de  $208,8^\circ$ .

Uma volta completa na terra, acontece em 24h, fazendo uma regra de três, temos  $360^\circ$  corresponde a 24h e  $208,8^\circ$  corresponde a 14h aproximadamente.

### 3.3 Transformando Coordenadas Cartesianas em Geográficas

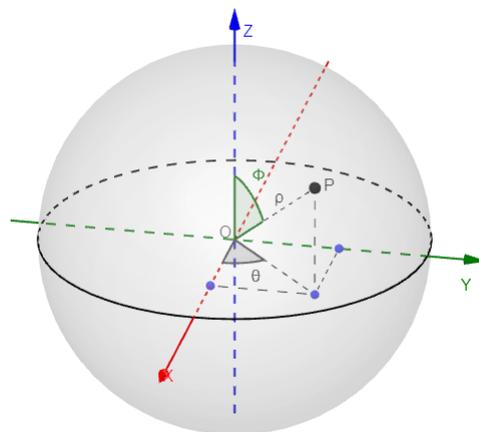


Figura 3.3: Coordenadas Esféricas e Geográficas

Se  $P$  tem coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , então sabemos que as suas coordenadas esféricas são  $(\rho, \theta, \phi)$  dadas pelas relações

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\y &= \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\z &= \rho \cos(\phi)\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\operatorname{sen}(90 - \phi) = \frac{z}{\rho}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

### 3.3.1 Coordenadas Geográficas

O ângulo  $\theta$  é chamado *longitude* do ponto  $P$  e o ângulo  $90^\circ - \phi$  denomina-se *latitude* do ponto  $P$ .

**Observação:** Quando  $z > 0$  dizemos que o ponto  $P$  está no hemisfério Norte e neste caso, a latitude será positiva, se  $z < 0$  dizemos que  $P$  está no hemisfério Sul e a latitude será negativa e se  $z = 0$ , dizemos que  $P$  está sobre o Equador e sua latitude será zero.

No caso de  $x > 0$ , dizemos que  $P$  está a leste do Meridiano de Greenwich e tem longitude positiva e no caso de  $x < 0$  dizemos que  $P$  está a Oeste do Meridiano de Greenwich e tem longitude negativa.

Vale ainda ressaltar que a latitude varia de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  e a longitude varia de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ .

Por exemplo, se um ponto  $P$  tem coordenadas  $P = (\sqrt{3} \cdot 10^6, 0, 1 \cdot 10^6)$  vamos encontrar as coordenadas geográficas do ponto  $P$ .

Temos:

$$\operatorname{sen}(90 - \phi) = \cos \phi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cdot 10^{12} \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 3 \cdot 10^{12}$$

$$\cos \phi = \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} = \frac{1}{2}, \quad \text{logo} \quad \phi = 60^\circ, \quad \text{ou seja, a latitude é } 30^\circ.$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10^6} = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{0}{\sqrt{3} \cdot 10^6} = 0.$$

Assim,  $\cos \theta = 1$  e  $\operatorname{sen} \theta = 0$ , com isto,  $\theta = 0$ . A longitude será  $0^\circ$ .

Este lugar, de latitude  $30^\circ$  e longitude  $0^\circ$  encontra-se no deserto da Argélia sobre o Meridiano de Greenwich.

## 3.4 Distâncias Entre Duas Cidades

### 3.4.1 Distâncias Entre Cidades Sobre o Equador

Duas cidades que estão praticamente sobre a linha do Equador, são Macapá, no Amapá e Pontianaki, na Indonésia. Elas estão localizadas respectivamente a  $51^\circ\text{W}$  e  $109^\circ\text{E}$ . Como seria feito o cálculo da distância entre elas?

Observe que o Equador é um círculo máximo sobre a terra, portanto, para calcular a distância entre as duas cidades, usaremos a seguinte fórmula

$$d_{A,B} = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{360} \cdot 2\pi \cdot \rho$$

$\theta_1$  e  $\theta_2$  são as longitudes das duas cidades e  $\rho$  é o raio da terra. Então:

Considerando o Raio da Terra igual a 6400 e  $\pi = 3,14$ , teremos

$$d_{A,B} = \frac{160}{360} \cdot 6,28 \cdot 6400 = 17871\text{km}$$

Usando um site de busca, encontramos a medida de 17835km. A diferença acontece, devido a aproximações que fazemos nos cálculos dos valores.

### 3.4.2 Distâncias Entre Cidades no Mesmo Meridiano

Duas cidades que estão sobre o mesmo meridiano são Jaboatão e João Pessoa, que estão aproximadamente a  $8^\circ\text{S}$  e  $7^\circ\text{S}$ .

O cálculo será feito da mesma forma de como se estivesse no Equador, pois todo meridiano é um círculo máximo na terra. Com isto, chegamos ao resultado de 111,64Km e usando o mesmo site de buscas, temos 106,56km.

### 3.4.3 Distâncias Entre Cidades no Mesmo Paralelo

Chicago e Roma situam-se na mesma latitude  $42^\circ\text{N}$ , mas em longitudes diferentes: a de Chicago é aproximadamente  $88^\circ\text{W}$  e a de Roma aproximadamente  $12^\circ\text{E}$

Suponha que um piloto tenha ido de Chicago a Roma em voo no rumo leste, permanecendo o tempo todo na mesma latitude. (Muita gente acha que esse é o caminho mais curto possível.) Que distância o piloto teve de voar?

Primeiro vamos calcular o arco percorrido longitudinalmente, que foi  $\theta = 12 - (-88) = 100$ , seguindo assim que a distância percorrida pelo piloto foi

$$d = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi\rho \text{sen } \phi$$

$$d = \frac{100}{360} \cdot 2\pi \cdot 6400 \operatorname{sen} 48$$

Essa distância dá aproximadamente 8300km.

Essa distância longitudinal não é a menor, isto acontece porque a circunferência usada para calcular distâncias sobre o mesmo paralelo, não é uma geodésica ou seja, uma circunferência máxima.

### 3.4.4 Distância Entre Duas Cidades Por Um Círculo Máximo

Observe a figura abaixo

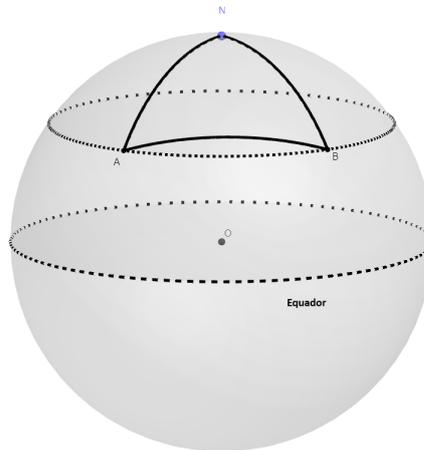


Figura 3.4: Construção do Autor

Vamos pegar o mesmo exemplo anterior e calcular a distância que se percorreria se o caminho tomado, fosse um arco de circunferência máxima.

Tomando como referência o polo norte e as duas cidades, temos um triângulo esférico, onde conhecemos a distância ao polo norte, que é  $90^\circ - \text{latitude}$  e queremos descobrir a distância, que será o comprimento do círculo máximo. Para isto, usaremos a lei dos cossenos.

Usando a lei dos cossenos dos triângulos esféricos, temos:

$$\cos(d) = \cos(48^\circ) \cos(48^\circ) + \operatorname{sen}(48^\circ) \operatorname{sen}(48^\circ) \cos(100^\circ)$$

$$\cos d = 0,91873$$

O ângulo que o cosseno é essa medida é  $\theta = 69,4^\circ$

Calculando a distância sobre o círculo máximo, temos

### 3.5. ÁREA DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

---

$$d = \frac{69,4}{360} \cdot 2\pi \cdot 6400 = 7748 \text{Km}$$

Se consultarmos essa distância em um site de geolocalização, encontramos 7746Km.

Concluindo então, que na situação em questão, que realmente a menor distância entre dois pontos na superfície da terra, segue os parâmetros da geometria esférica, sendo a distância sobre um arco de círculo máximo.

## 3.5 Área de um Triângulo Esférico

Considere um triângulo esférico com três ângulos retos.

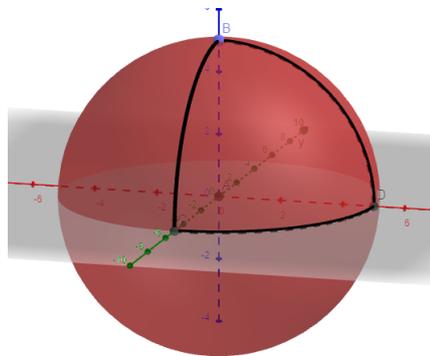


Figura 3.5: Construção do Autor

A área de um triângulo esférico é calculada por

$$A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot \rho^2$$

Se os ângulos medem  $\frac{\pi}{2}$ , temos  $A = (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi) \cdot \rho^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \rho^2$ , que corresponde a  $\frac{1}{8}$  da esfera, sabemos que a esfera tem área  $4\pi\rho^2$ , dividindo por 8, temos  $\frac{\pi}{2} \cdot \rho^2$  a área calculada, de  $\frac{1}{8}$  da esfera.

# Capítulo 4

## Funcionamento do GPS

Neste capítulo, estudaremos como se distribui a estrutura de funcionamento do sistema de GPS, que cálculos estão envolvidos na localização de pontos sobre a superfície da terra e veremos um exemplo de como é feito esse cálculo. O conteúdo a seguir é baseado nas referências [7], [14], [15], [17] e [21].

### 4.1 A divisão em segmentos

#### 4.1.1 Segmento Espacial

O Segmento Espacial abrange os satélites e seus sinais transmitidos. O Sistema de Posicionamento Global é formado por uma rede de 24 satélites em funcionamento que transmitem informações para a Terra. Eles orbitam a uma altitude de cerca de 20.200 km em seis órbitas, inclinadas a  $55^\circ$  em relação ao Plano Equatorial. Cada satélite completa uma órbita ao redor da Terra aproximadamente a cada 12 horas e tem uma vida útil de cerca de 10 anos, sendo periodicamente substituídos pelo Segmento de Controle. Em cada plano orbital, há pelo menos quatro satélites, distribuídos de forma equidistante. O Sistema foi projetado para garantir que pelo menos quatro satélites estejam visíveis acima do horizonte em qualquer ponto da Terra e que esses satélites visíveis não estejam todos no mesmo plano.

#### 4.1.2 Segmento de Controle

O Segmento de Controle é encarregado de supervisionar, gerar, corrigir e avaliar todo o Sistema. Ele inclui uma estação central (MASTER) localizada nos Estados Unidos (em Colorado Springs, Colorado), além de outras estações de monitoramento espalhadas pelo mundo. A estação central rastreia os satélites, atualiza suas posições orbitais, ajusta e sincroniza seus relógios. Essas informações são enviadas para cada satélite e, em seguida, transmitidas por este ao receptor.

### 4.1.3 Segmento do Usuário

O segmento do usuário é o dispositivo receptor utilizado para captar e transformar o sinal do GPS em informações de posição, velocidade e tempo. Ele engloba todos os elementos necessários para este processo, como antenas e o software de processamento. Ao adquirirmos um dispositivo GPS, estamos adquirindo, na verdade, um aparelho que recebe os sinais do GPS e utiliza as informações contidas neles para determinar sua própria localização.

Os sinais emitidos pelos satélites são em forma de ondas eletromagnéticas, compostas por campos elétricos e magnéticos perpendiculares entre si, que se propagam no vácuo à velocidade da luz,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ km/s}$ . A modulação de fase dessas ondas eletromagnéticas é apropriada para transmitir códigos no sistema binário de numeração, ou seja, informação codificada em "bits" (0 e 1).

O sinal emitido pelos satélites contém um conjunto de informações astronômicas, chamado de almanaque, com as quais é possível calcular a posição absoluta de cada satélite que transmite os dados para o usuário em tempo real. Essas informações incluem sua posição, horário de transmissão, os meios para o cálculo da distância até os satélites e parâmetros de correção das influências atmosféricas. No entanto, pequenos erros nas órbitas são inevitáveis, e, por isso, informações sobre correções, atualizadas a cada hora para cada satélite, são codificadas diretamente no sinal emitido.

Cada satélite emite um sinal continuamente. O período do sinal é fixo, e o tempo de início do ciclo pode ser determinado pelo uso do almanaque. Além disso, cada satélite é equipado com um relógio atômico extremamente preciso, que permite que ele esteja sincronizado com os tempos de início no almanaque. Quando o receptor grava o sinal do satélite, imediatamente começa a compará-lo com o sinal gerado pelo próprio receptor, que deveria coincidir exatamente. Geralmente, os sinais não coincidem instantaneamente, então o receptor ajusta o sinal gerado até que esteja em fase com o sinal recebido, o que determina, por cálculos, a correção entre os dois. Assim, o dispositivo é capaz de calcular o tempo que o sinal leva para chegar do satélite até ele.

O GPS funciona com um sistema de triangulação, calculando as distâncias de si aos satélites, dessa forma, fazendo os satélites como centro de esferas de raio igual às distâncias dos satélites ao receptor, temos que a localização exata se dá pela intersecção de quatro esféricas com centros nos satélites. Veremos como isso é expresso por meio de equações matemáticas.

## 4.2 Fundamentos Matemáticos do GPS

Seja  $P = (x, y, z)$  um ponto da esfera de raio  $r$  com centro em  $(a, b, c)$ , esse ponto satisfaz a seguinte equação  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Considere que o receptor de um GPS esteja na terra, localizado no ponto  $P = (x, y, z)$ , esse aparelho recebe sinal de 4 satélites que distam dele  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$ , respectivamente e com coordenadas  $C_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $C_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $C_3 = (a_3, b_3, c_3)$  e  $C_4 = (a_4, b_4, c_4)$ . Tome então, a esfera de centro em  $C_1$  e raio  $r_1$ , o ponto  $P$  é um ponto

dessa esfera, então o satélite com coordenadas  $C_1$  satisfaz a seguinte equação

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 \quad (4.1)$$

Da mesma forma, as esferas de centros em  $C_2, C_3$  e  $C_4$  obedecem respectivamente as seguintes equações:

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 \quad (4.2)$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 \quad (4.3)$$

$$(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = r_4^2 \quad (4.4)$$

Com isto, o ponto  $P$  é um ponto da intersecção das 4 esferas. Se os centros  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  não são coplanares, a intersecção é um único ponto. A saber, o próprio ponto  $P$

**Teorema 4.1** *Sejam  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  esferas distintas, tais que  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ . Se os centros dessas esferas não são coplanares, então o conjunto  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  contém um único ponto.*

**Demonstração:** Sejam  $C_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $C_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $C_3 = (a_3, b_3, c_3)$  e  $C_4 = (a_4, b_4, c_4)$  os centros dessas esferas.

As equações de  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  são:

$$\begin{cases} S_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 \\ S_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 \\ S_3 : (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 \\ S_4 : (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = r_4^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo os quadrados, fazendo  $S_4 - S_1, S_4 - S_2, S_4 - S_3$  e pondo,

$$\begin{aligned} d_1 &= r_4^2 - r_1^2 + a_1^2 - a_4^2 + b_1^2 - b_4^2 + c_1^2 - c_4^2 \\ d_2 &= r_4^2 - r_2^2 + a_2^2 - a_4^2 + b_2^2 - b_4^2 + c_2^2 - c_4^2 \\ d_3 &= r_4^2 - r_3^2 + a_3^2 - a_4^2 + b_3^2 - b_4^2 + c_3^2 - c_4^2 \end{aligned}$$

obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z = \frac{1}{2}d_1 \\ x(a_2 - a_4) + y(b_2 - b_4) + z(c_2 - c_4) = \frac{1}{2}d_2 \\ x(a_3 - a_4) + y(b_3 - b_4) + z(c_3 - c_4) = \frac{1}{2}d_3 \\ (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = r_4^2 \end{cases}$$

Considerando as três primeiras equações do sistema acima, temos um sistema linear  $3 \times 3$  e o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo, já que os vetores

$\overrightarrow{C_4C_1}$ ,  $\overrightarrow{C_4C_2}$  e  $\overrightarrow{C_4C_3}$  são linearmente independentes (os centros  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são não coplanares).

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \\ a_2 - a_4 & b_2 - b_4 & c_2 - c_4 \\ a_3 - a_4 & b_3 - b_4 & c_3 - c_4 \end{pmatrix} \neq 0$$

Assim

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_1 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \\ \frac{1}{2}d_2 & b_2 - b_4 & c_2 - c_4 \\ \frac{1}{2}d_3 & b_3 - b_4 & c_3 - c_4 \end{pmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 - a_4 & \frac{1}{2}d_1 & c_1 - c_4 \\ a_2 - a_4 & \frac{1}{2}d_2 & c_2 - c_4 \\ a_3 - a_4 & \frac{1}{2}d_3 & c_3 - c_4 \end{pmatrix}}{D}$$

e

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & \frac{1}{2}d_1 \\ a_2 - a_4 & b_2 - b_4 & \frac{1}{2}d_2 \\ a_3 - a_4 & b_3 - b_4 & \frac{1}{2}d_3 \end{pmatrix}}{D}$$

É fundamental notar que a solução de sistemas de equações quadráticas por meio da subtração par a par, visando a eliminação dos termos quadráticos, só é viável neste caso específico porque sabemos que o sistema tem uma solução. Isso assegura que a solução obtida a partir do sistema linear também resolverá o sistema quadrático, pois são sistemas equivalentes e no caso em questão, estamos cientes de que os sinais são gerados dos satélites para o GPS, localizado sobre a Terra, o que garante a existência de uma solução para o problema. Vale ressaltar a importância do Teorema: se quatro superfícies esféricas compartilham um ponto em comum, esse ponto é único.

■

## 4.3 Uma Aplicação

Imagine que temos a localização, em coordenadas cartesianas, de 4 satélites, a saber

$$\text{Satélite 1: } (-10 \cdot 10^6, 20 \cdot 10^6, 2 \cdot 10^6)$$

$$\text{Satélite 2: } (-14 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^6, 13 \cdot 10^6)$$

$$\text{Satélite 3: } (-18 \cdot 10^6, 4 \cdot 10^6, 4 \cdot 10^6)$$

$$\text{Satélite 4: } (-12 \cdot 10^6, 15 \cdot 10^6, 1 \cdot 10^6)$$

Um receptor GPS recebe o sinal desses 4 satélites em tempos respectivamente de: 0,068s; 0,070s; 0,072s e 0,067s.

Com isto, considerando a velocidade da luz,  $c = 2,997 \cdot 10^8$ , conseguimos calcular as distâncias desses satélites ao aparelho, multiplicando o tempo, pela velocidade da luz que serão:

$$d_1 = 0,203796 \cdot 10^8, \quad d_2 = 0,20979 \cdot 10^8, \quad d_3 = 0,215784 \cdot 10^8 \quad \text{e} \quad d_4 = 0,200799 \cdot 10^8$$

Assim, temos o sistema de equações

$$\begin{aligned} S_1 : (x + 10 \cdot 10^6)^2 + (y - 20 \cdot 10^6)^2 + (z - 2 \cdot 10^6)^2 &= 415 \cdot 10^{12} \\ S_2 : (x + 14 \cdot 10^6)^2 + (y - 7 \cdot 10^6)^2 + (z - 13 \cdot 10^6)^2 &= 440 \cdot 10^{12} \\ S_3 : (x + 18 \cdot 10^6)^2 + (y - 4 \cdot 10^6)^2 + (z - 4 \cdot 10^6)^2 &= 466 \cdot 10^{12} \\ S_4 : (x + 12 \cdot 10^6)^2 + (y - 15 \cdot 10^6)^2 + (z - 1 \cdot 10^6)^2 &= 403 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

que ao resolver obtemos:

$$x = -27,71 \cdot 10^6, \quad y = 21,31 \cdot 10^6 \quad \text{e} \quad z = 9,87 \cdot 10^6$$

Essas são as coordenadas cartesianas, podemos converter para coordenadas geográficas conforme 3.3, dando um ponto de latitude  $16^\circ$  Norte e longitude  $37^\circ$  Leste. Este lugar é um ponto sobre Eritrêia, um país na Africa. Para mais detalhes, consulte [15]

## Capítulo 5

# Usando Materiais Pedagógicos para Estudar Propriedades dos Triângulos Planos e Esféricos

Este capítulo corresponde a uma sequência didática que foi desenvolvida em cumprimento a exigência do regimento do PROFMAT Nacional em seu art 13°, que preconiza a produção de um recurso didático para a obtenção do título de mestre. Esta sequência está posta como sugestão de atividade a ser aplicada.

**Público-alvo:** Estudantes do 3° Ano do Ensino Médio

**Assunto:** Paralelismo, Soma dos Ângulos Internos de Um Triângulo, Área da Esfera, Área do Fuso Esférico, Soma dos Ângulos Internos de Um Triângulo Esférico.

**Objetivos:** Ao final da atividade didática, o estudante deve:

- Entender que em um triângulo no plano, a soma dos ângulos internos é  $180^\circ$
- Saber que existe uma geometria onde a soma dos ângulos internos de um triângulo não é  $180^\circ$
- Saber que na geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que  $180^\circ$

**Ponto de partida:**

- Axioma das paralelas;
- Estudo dos ângulos: características e instrumentos de medidas;
- Estudo dos triângulos: características, medidas de lados e ângulos internos.

Antes de começar de fato essa proposta de atividade, não podemos deixar que comentar que o ensino de geometrias euclidianas e não euclidianas é raramente abordado nas escolas, apesar de estar presente em documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros

Curriculares Nacionais de Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular. Acreditamos que ensinar conteúdos de Geometria Esférica na Educação Básica permite aos alunos conectar esse conhecimento com o seu cotidiano, entender os diferentes modelos geométricos que os rodeiam, e expandir seu repertório de pensamento geométrico. Neste trabalho, propomos atividades de ensino de Geometria Esférica fundamentadas nos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem, de forma acessível a todos os estudantes. Essas atividades podem estimular novas discussões sobre o ensino de Geometrias Não-Euclidianas e proporcionar uma compreensão mais ampla aos estudantes, considerando suas experiências cotidianas.

## Procedimento didático metodológico

Dividido em 4 atividades, O professor irá trabalhar conceitos matemáticos da geometria euclidiana e da geometria esférica para demonstrar a soma das medidas de ângulos nos triângulos. A primeira atividade é voltada para que o estudante conheça sobre ângulos, suas medidas, instrumentos para medir ângulos e utilizar desses conhecimentos para compreender que, na geometria euclidiana e utilizando instrumentos de medidas de ângulos, dado um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos mede  $180^\circ$  (desconsiderando erros de instrumento).

A segunda atividade é mais conceitual, onde o professor irá trabalhar o Axioma das Paralelas para demonstrar que de fato a soma dos ângulos internos de um triângulo mede  $180^\circ$ . Podendo utilizar para isto, a demonstração no quadro de forma “tradicional” de uma aula ou usando o software de Geometria Dinâmica, GEOGEBRA, onde o estudante pode ver de forma dinâmica a preservação dos ângulos e a demonstração do Teorema.

Na terceira atividade, o estudante terá uma nova percepção sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Utilizando agora, retas não paralelas, o professor irá mostrar que existe uma possibilidade de a soma desses ângulos serem diferentes de  $180^\circ$ . Introduzindo o conceito de geometria esférica, o aluno irá perceber uma nova abordagem sobre triângulos, entendendo a ideia de retas sobre regiões curvas, medidas de ângulos e o fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de  $180^\circ$ . Para isto, ele também vai poder se utilizar do GEOGEBRA, construindo um triângulo esférico, com três ângulos retos e com isto, mostrar que tem pelo menos uma geometria onde isso de fato não acontece, a geometria esférica.

A quarta atividade é dividida em duas partes: na primeira parte, o professor irá lançar mão da fórmula para cálculo de área de uma esfera, para explicar calcular a área de um fuso esférico ( uma regra de três simples ). Na segunda parte da atividade, os alunos irão pintar os fusos esféricos formados por um triângulo esférico e com isso mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que  $180^\circ$ , na geometria esférica.

## Primeira atividade

Esta atividade será desenvolvida em uma aula, na qual será estudado o conceito de ângulo, suas unidades de medida e como medi-lo, utilizando o transferidor. A seguir, os alunos medirão, usando um transferidor, os ângulos internos de triângulos previamente impressos com a finalidade de observar que essa soma será de  $180^\circ$ .

É aconselhável, que se haja 1 vários tipos de triângulos: equiláteros, retângulos, obtusângulo, acutângulo, etc.

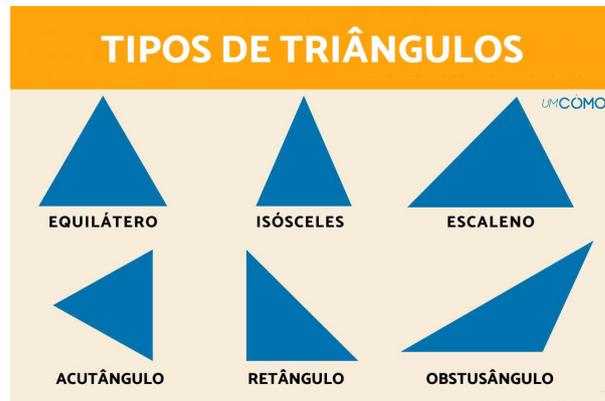


Figura 5.1: Tipos de Triângulos

Fonte: <https://educacao.umcomo.com.br/artigo/classificacao-dos-triangulos-tipos-e-caracteristicas-30679.html> Acesso em 31 de julho de 2024



Figura 5.2: Medindo os ângulos

A aula será finaliza com as seguintes questões para os alunos:

1. Escreva com suas palavras o que é um ângulo
2. Quais as unidades de medidas utilizadas para medir o ângulo?
3. Qual a unidade de medida mais comum para medir ângulo?

4. Quantos ângulos internos tem um triângulo?
5. Em cada triângulo, meça a medida dos ângulos internos.
6. Quanto deu a soma dos ângulos internos em cada triângulo? (isso pode mudar, na prática, dependendo da habilidade de quem manuseia o transferidor)
7. Os valores das somas são próximos um do outro? Qual seria o valor "aproximado"?

No final desta atividade - aula, o estudante deverá ter condições de determinar o valor aproximado da medida dos ângulos internos de um triângulo, independente do seu formato.

## Segunda Atividade

Nesta atividade o professor explicará os conceitos de retas paralelas e transversais e a relação entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, deverá mencionar : ângulos correspondentes, ângulos colaterais internos e externos, ângulos alternos internos e externos.

Feito isto, desenhará, no quadro, duas retas paralelas e por um ponto qualquer de uma das retas, duas transversais, formando assim um triângulo. Usando as relações conhecidas entre os ângulos adjacentes e os alternos internos, determinará a relação entre os ângulos do triângulo, fazendo com que o aluno perceba que a soma dos três ângulos do triângulo é  $180^0$ .

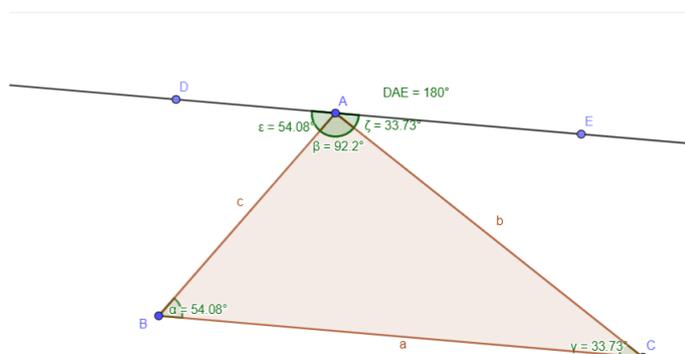


Figura 5.3: Triângulo Entre Retas Paralelas

Sugerimos que esta atividade seja feita também utilizando o GEOGEBRA. Podendo seguir o roteiro abaixo:

1. Marque dois pontos distintos  $A$ ,  $B$ ;
2. Trace a reta  $r_{AB}$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ ;
3. marque um ponto  $P$  fora da reta  $r_{AB}$ ;
4. Trace a reta paralela à  $r_{AB}$ , passando pelo ponto  $P$ ;
5. Marque o triângulo  $ABP$ ;

6. Marque os ângulos internos e os ângulos alternos internos do triângulo  $ABP$ .

O item 6 permitirá ao aluno observar que, independente do formato do triângulo gerado, esses ângulos se preservam, então calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo é o mesmo que formar um ângulo raso ( $180^\circ$ ).

Veja: <https://www.geogebra.org/m/h5ry6ub2>

## Terceira Atividade

A terceira atividade, terá duas etapas que acontecerão em uma aula.

Na primeira etapa, o professor construirá, a reta  $r_{BC}$  que passa pelos pontos  $B$  e  $C$ , marcando um ponto  $A$  fora da reta  $r_{BC}$ . A partir daí, vai construir uma reta, passando por  $A$ , que não seja paralela a reta  $r_{BC}$  e marcará os pontos  $D$  e  $E$  sobre esta reta, de maneira que  $A$  esteja entre  $D$  e  $E$ . Logo pedirá que os estudantes meçam os ângulos internos do triângulo  $ABC$  e os ângulos  $\sphericalangle(BAE)$  e  $\sphericalangle(CAD)$  e notarem que  $\sphericalangle(BAE)$  não é igual a  $\sphericalangle(CBA)$  e que  $\sphericalangle(CAD)$  não é igual a  $\sphericalangle(BCA)$ . Induzindo os estudantes a supor que a soma dos ângulos internos do triângulo não seja  $180^\circ$ .

Para a atividade acima, os estudantes podem movimentar os pontos no GEOGEBRA e notar que os ângulos não se preservam, quando as retas não são paralelas

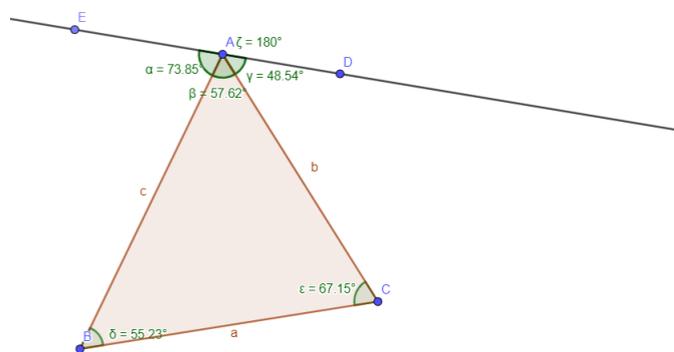


Figura 5.4: Triângulo Entre Retas Concorrentes

Pode ser usado, o link abaixo

<https://www.geogebra.org/m/ewnebt9j>

Na segunda parte, ele pede cortar  $\frac{1}{8}$  da laranja e fazer com que os alunos notem, que se conseguem 3 ângulos retos, somando  $270^\circ$  e então comentar, que existem geometrias, onde essa soma não dá  $180^\circ$ . Essa é uma geometria onde não existem retas paralelas. Essa percepção se dará, após o professor introduzir os conceitos desta geometria.

## Quarta Atividade

Esta atividade será desenvolvida em duas aulas.

Na primeira aula, será explicado como calcular a área da esfera e a área do fuso esférico. O estudante deverá calcular a área de algumas esferas e alguns fusos esféricos.

Na segunda aula, serão marcados 3 pontos em uma esfera de isopor e traçar os círculos máximos que passam por esses pontos, formando um triângulo esférico. Essa construção forma 6 fusos esféricos. Os estudantes vão pintar os fusos formados de cores diferentes e deve notar, que tem duas regiões que são pintadas mais de uma vez, é o excesso da área do triângulo esférico. Com base neste percepção, será demonstrado que a área dos 6 fusos, é a área da superfície esférica, mais o que foi pintado a mais, concluindo assim, que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que  $180^\circ$



Figura 5.5: Esfera Dividida em Fusos

# Conclusão

No presente trabalho pesquisamos os principais resultados da geometria esférica e procuramos entender o funcionamento do GPS.

Quanto à Geometria Esférica, vimos vários tipos de coordenadas, calculamos distâncias entre pontos na esfera, em particular distância entre cidades (supondo que a terra é redonda), Calculamos a área de triângulos esféricos, estudamos o Teorema de Pitágoras e as leis dos senos e dos cossenos na esfera. Em relação ao GPS, entendemos o processo de localização de um ponto na superfície da terra, com esta localização determinada em vários momentos, consegue-se calcular: a velocidade, a direção e o sentido do movimento, descrevendo assim, o trajeto a ser realizado.

Outro dos nossos objetivos, foi elaborar uma sequência didática a fim de explicar a estudantes do ensino médio a existência de geometrias nas quais a soma dos ângulos internos de um triângulo não  $180^0$ . Fizemos isto em uma sequência de 5 aulas.

Há muitos outros tópicos relacionados ao estudo da Geometria Esférica e ao estudo do GPS que não tratamos aqui, por exemplo, como a trigonometria esférica está ligada à localização de astros na esfera celeste e como isso se relaciona com a astronomia, ciência esta que se preocupa com a localização e a orientação.

# Referências Bibliográficas

- [1] Athanasio, Thales Graça. Geometria esférica: uma proposta de introdução no Ensino Médio a partir da geometria na esfera. Diss. Universidade de São Paulo, 2019.
- [2] Bittencourt Neto, Jessica Laila Ferreira. "Uma introdução à geometria esférica no ensino básico." Monografia, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2017.
- [3] Boyer, C.B. História da Matemática. Tradução de Helena Castro. 3° Ed.[S.1]: Edgard Blucher, 2018. 313 p.
- [4] de Abreu, Shyrlene Martins, and Jose Eloy Ottoni. Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas a astronomia de posição. Diss. dissertação Profmat, 2015.
- [5] Euclides. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. 86e. ed. [S.1]: Editora da UNESP, 2009. 98 p.
- [6] Eves, H., Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- [7] Freitas, Jeferson Teixeira de. Projeções, mapas e GPS: algumas aplicações na educação básica. Dissertação de Mestrado, UnB, 2017.
- [8] Freitas, Tenivâm Lins. Proposta de Inserção de um Modelo de Geometria Não Euclidiana na Educação Básica. Dissertação de Mestrado, UEFS, 2014.
- [9] Gomes, M. P., Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, UFF, Niterói/RJ, 2014.
- [10] Heim, Luciane. Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a Geografia. Dissertação de Mestrado, UFRPE, 2013.
- [11] Kline, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press. 1972
- [12] Lopes, Bruna, Aplicações da Trigonometria Esférica. Disponível em <https://noic.com.br/astrologia/curso/aplicacoes-da-trigonometria-esferica/>. Acesso em 23 de Dezembro de 2023.
- [13] Matos, David Hermann Lucena. A Terra não é Plana. Dissertação de Mestrado, UFCE, Ceará, 2021.
- [14] Moraes, Marcelo Cardozo de. O funcionamento do GPS e a matemática do ensino médio. Dissertação de Mestrado, UFSCar, 2015.

- [15] Neto, Pedro César Gomes. O GPS Como Fator Motivacional No Processo De Aprendizagem. Dissertação de Mestrado, UENF, 2013.
- [16] Pataki, Irene. ALMOULOU, Saddo Ag. Equador, Paralelos e Meridianos: Apenas linha Imaginárias? Dissertação. PUC-SP.2003.
- [17] Pereira, Expedito Henrique Ulisses. A matemática do GPS. 2014.
- [18] Ravindran, Renuka. "Euclid's fifth postulate." Resonance 12 (2007): 26-36. Disponível em <https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/012/04/0026-0036>
- [19] Roque, T.; Pitombeira, J. B., Tópicos de História de Matemática. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.
- [20] Santos, Carla Patrícia Ferreira dos. Fundamentos de geometria e astronomia esférica. Dissertação de Mestrado, Unesp, Rio Claro, 2020.
- [21] Scannavino, Fernando Foresto. A matemática e o GPS. Dissertação de Mestrado UNESP, 2015.
- [22] Silva, Eduardo Luini da. A contextualização da geometria esférica pelo estudo do globo terrestre e suas representações com o uso do software Geogebra. Dissertação de Mestrado. Campina Grande, 2017.
- [23] Thomaz, Mara Lucia, and Valdeni Soliani Franco. "Geometria Não Euclidiana/Geometria Esférica." Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná, PDE 2008 (2007).
- [24] Wolfe. H. E. Introduction to Non - Euclidean Geometry. New York: The Dryden Press, 1945 45-49 p.