UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Reflexões sobre o Princípio Fundamental da Contagem e suas consequências

por

Leonardo Vieira da Silva

João Pessoa, 28 de maio de 2024.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

UFPB

Reflexões sobre o Princípio Fundamental da Contagem e suas consequências

por

Leonardo Vieira da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa, 28 de maio de 2024.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586r Silva, Leonardo Vieira da.
Reflexões sobre o princípio fundamental da contagem e suas consequências / Leonardo Vieira da Silva. - João Pessoa, 2024.
95 f. : il.

Orientação: Carlos Bocker Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Análise Combinatória. 2. Princípio Fundamental da Contagem. 3. Métodos de Contagem. I. Bocker Neto, Carlos. II. Título.

UFPB/BC CDU 519.1(043)

Elaborado por CHRISTIANE CASTRO LIMA DA SILVA - CRB-15/865

Reflexões sobre o Princípio Fundamental da Contagem e suas consequências

por

Leonardo Vieira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)

José Laudelino de Menezes Neto

Prof(a). Dr(a). José Laudelino de Menezes Neto - UFPB

Daniel Tomaz de Araújo

Prof(a). Dr(a). Daniel Tomaz de Araújo - UFRPE

João Pessoa, 28 de maio de 2024.

“Quem a Deus tem, nada lhe falta. Só Deus basta.” (Sta. Teresa d’Ávila)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus amados pais, José Francisco da Silva Filho e Márcia Maria Vieira da Silva, a quem tenho muita gratidão e os quais, com muito esforço, renúncias, humildade e generosidade, fizeram tudo o que estava ao seu alcance para me oferecer o estudo e as condições necessárias para bem realizá-lo. Aqui, agradeço também aos meus irmãos e familiares, que sempre foram apoio garantido para o meu bem, utilizando-se de muita paciência e bondade.

Agradeço aos meus professores, todos, desde os do Ensino Infantil aos do Ensino Superior. Devo muito a todos eles, pois, com muita paciência, me ensinaram muitos conhecimentos, com os quais pude entender melhor o mundo que me cerca e assim apreciá-lo com suas diversidades e beleza.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Bocker Neto, que com muita paciência, respeito e dedicação contribuiu substancialmente para eu escrever esta dissertação com qualidade e relevância.

Sou grato aos colegas do PROFMAT-UFPB, com os quais pude aprender mais sobre Matemática e encontrei ânimo para trilhar esse percurso.

Agradeço também aos amigos feitos na graduação em Matemática da UFRN. Alguns não se cansaram em me dar forças e incentivo a respeito não só do mestrado, mas também do trabalho árduo no Ensino Básico e da continuidade nos estudos na própria Matemática.

Por fim, registro minha gratidão mais profunda e cheia de paz ao infinito bom Deus, que, com sua misericórdia, sempre me conduziu, me sustentou e me ajudou a voltar ao bom caminho em todas as vezes que me distanciei. Em particular, sou grato à Igreja Católica Apostólica Romana, pois foi nela, por providência Divina, que encontrei a mim mesmo, encontrei a vida e encontrei ao próprio Deus, Aquele que é a verdadeira Paz.

Dedicatória

A todos os professores e alunos de Matemática do Ensino Básico e Superior.

Resumo

A Análise Combinatória é um assunto da Matemática ainda considerado difícil por grande parte dos professores e alunos. Isso torna essa área da Matemática temida e, às vezes, evitada pelos próprios educadores. Por, geralmente, não haver uma compreensão adequada desse assunto, encontramos, até mesmo, livros e sites apresentando conceitos com inconsistências ou limitações, o que aprofunda ainda mais as dificuldades de entendimento do tema. Diante disso, este trabalho tem como objetivo contribuir para a melhoria da compreensão da Análise Combinatória através de um estudo focado no Princípio Fundamental da Contagem, parte considerada essencial para o bom entendimento dessa área. Buscamos explicar esse princípio detalhadamente, com a finalidade de tornar claro o que ele produz e em quais situações pode ser utilizado. Além da sua versão referente à tomada de duas decisões, apresentamos a sua versão iterada e formalizações para cada uma delas utilizando a linguagem de conjuntos. Analisamos os enunciados desse princípio em livros e sites, com o intuito de verificar se a sua apresentação está sendo feita de modo correto ou adequado. Em seguida, utilizando-o, desenvolvemos as técnicas de contagem abordadas no Ensino Básico e falamos sobre a importância de uma modelagem adequada para a resolução de problemas e para a criação de outras técnicas além das tratadas anteriormente. Depois disso, abordamos algumas formas de enfrentar problemas de Análise Combinatória de modo a contribuir para uma boa aplicação dos métodos conhecidos, bem como apresentamos um roteiro que possa auxiliar no enfrentamento desses problemas com maior segurança. Por fim, propomos algumas atividades que podem ser aplicadas e trabalhadas em sala de aula com o objetivo de promover o aprendizado correto e o mais completo possível do Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Básico.

Palavras-chaves: Princípio Fundamental da Contagem; Princípio Multiplicativo; Análise Combinatória; Métodos de Contagem; n-uplas.

Abstract

Combinatorial Analysis is a Mathematics topic that is still considered difficult by most teachers and students. This makes this area of Mathematics feared and, sometimes, avoided by educators themselves. Because usually there is no adequate understanding of this subject, we even find books and websites presenting concepts with inconsistencies or limitations, which further deepens the difficulties in understanding the topic. Therefore, this work aims to contribute to improving the understanding of Combinatorics Analysis through a study focused on the Fundamental Counting Principle, a part considered essential for a good understanding of this area. We seek to explain this principle in detail, aiming to make clear what it produces and in which situations it can be used. In addition to its version regarding the making of two decisions, we present its iterated version and formalizations for each of them using set language. We analyze the statements of this principle in books and websites, in order to verify whether its presentation is being done correctly or adequately. Futhermore, using it, we developed the counting techniques covered in Basic Education and explained the importance of adequate modeling for solving problems and creating other techniques apart those previously discussed. After that, we address some ways of facing Combinatorial Analysis problems in order to contribute to a good application of known methods, as well as presenting a script that can help in facing these problems with greater security. Finally, we propose activities that can be applied and worked on in the classroom to promote the correct and most complete learning possible of the Fundamental Principle of Counting in Basic Education.

Key-words: Fundamental Counting Principle; Multiplicative Principle; Combinatorial Analysis; Counting Methods; n-tuples.

Sumário

Introdução

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que se dedica a problemas de contagem, os quais se estendem desde aqueles mais simples, caracterizados pela enumeração de um conjunto finito, até aqueles mais complexos, que buscam determinar a quantidade de elementos de um conjunto formado a partir de certas características específicas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Infantil e Fundamental [4], instituída em 22 de dezembro de 2017 através da Resolução CNE/CP nº 2, é o documento que atualmente rege a Educação Básica brasileira. Ela determina os assuntos, competências e habilidades que devem ser trabalhados nesse nível de ensino, devendo ser respeitada obrigatoriamente ao longo deste em todas as suas etapas e respectivas modalidades. Segundo esse documento, a contagem deve ser estudada a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de desenvolver a capacidade de enumeração de elementos de um conjunto finito simples. Porém, a partir do 4º ano, ele estabelece o estudo da contagem de agrupamentos formados pela combinação de elementos de dois conjuntos distintos, buscando assim desenvolver a capacidade combinatória do estudante.

A Análise Combinatória é, em geral, considerada uma parte difícil da Matemática, tanto pelos alunos quanto pelos professores. É comum alguém resolver um problema de contagem e ficar com dúvida se sua resposta está correta. Desse modo, a insegurança e a fuga de questões do tipo é frequente. Até mesmo os professores passam por isso, ficando confusos em qual método de contagem utilizar para resolver algumas situações problemas.

Pensando em contribuir para a superação dessas dificuldades, resolvemos desenvolver este trabalho. Nele pretendemos apresentar o conteúdo de Análise Combinatória de modo formal, trazendo explicações e discussões a respeito dos seus principais pontos, sobretudo em relação ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC), considerado um princípio base sobre o qual essa área é construída. Nesse sentido, é possível encontrarmos diversas falas, de professores renomados, nas edições do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), realizadas pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), cujas gravações podem ser encontradas no seu canal do Youtube em [5]. Em uma dessas edições, o professor Augusto César Morgado se refere ao PFC, falando que a " Contagem, ou seja, essa Análise Combinatória que ensinamos no Ensino Médio, gira em torno desse princípio" [9, 2min].

No primeiro capítulo, falamos a respeito dos fundamentos matemáticos da contagem, apresentando e demonstrando algumas proposições e um corolário que caracterizam matematicamente o significado desse procedimento, tanto em relação aos elementos de um conjunto dado explicitamente, quanto aos elementos resultantes da união de dois conjuntos disjuntos.

O segundo capítulo é dedicado à apresentação do Princípio Fundamental da Contagem, princípio através do qual contamos elementos de um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos. Além de sua versão mais conhecida, baseada na definição e tomada de decisões, apresentamos uma versão na linguagem de conjuntos, buscando tornar mais claro o significado da versão anterior. Ainda neste capítulo, mostramos o PFC em sua forma iterada, que se aplica a situações envolvendo mais de duas decisões/conjuntos, e aplicamos e discutimos ambos através de alguns exemplos. Por fim, propomos algumas orientações e sugerimos um roteiro sobre a aplicação do PFC em questões de Análise Combinatória.

No terceiro capítulo, fazemos uma discussão a respeito de palavras e expressões que comumente aparecem nos enunciados do PFC. Mostramos que algumas delas podem dificultar ou auxiliar no entendimento desse princípio. E para ilustrar tal realidade trazemos alguns enunciados que encontramos em diferentes fontes.

No quarto capítulo, utilizamos o PFC para desenvolver os métodos de contagem mais utilizados no Ensino Básico, que são aqueles que contam permutações, arranjos e combinações, e trazemos alguns exemplos onde discutimos a aplicação de cada um deles.

No quinto capítulo, destacamos a importância, diante da resolução de problemas, da criação de modelos que possibilitem a utilização dos métodos de contagem já estudados para a obtenção de uma resposta. Além disso, discutimos a importância da criação de modelos para o desenvolvimento de novos métodos de contagem que utilizam o PFC como base, como é o caso das combinações completas, bem como de outros métodos que não o utilizam, como é o caso da contagem por recorrência.

No sexto capítulo, falamos sobre algumas estratégias de enfrentamento dos problemas de Análise Combinatória, com o intuito de contribuir para a utilização, não só de modo correto, mas também inteligente, do PFC e das outras técnicas de contagem.

No sétimo capítulo, apresentamos uma síntese de como resolver e ter segurança na resposta dada a um problema de Análise Combinatória, trazendo alguns pontos importantes conforme discutidos e exemplificados ao longo de todo o trabalho.

Por último, no oitavo capítulo, propomos algumas atividades visando desenvolver as habilidades definidas pela BNCC para os anos do Ensino Básico na área de Análise Combinatória. Nessas atividades trazemos questões que podem auxiliar no correto entendimento do PFC e de outras técnicas de contagem.

Capítulo 1

Fundamentos da contagem

Aprendemos desde a nossa infância, de forma bastante intuitiva, a noção de contar os mais variados objetos que fazem parte de nossa vida cotidiana. Ao responder questões como "quantos dedos você tem?", "qual é a sua idade?", "quantos dias tem o mês de junho?"etc, estamos realizando processos de contagem, que é o de determinar a quantidade de elementos de um dado conjunto finito. Esse é um processo tão natural que nem sequer pensamos nos conceitos matemáticos utilizados. Mas, afinal, o que é contar, matematicamente falando? Como formalizar o processo de contagem? Que conceitos matemáticos estão presentes ao contar objetos? Essas e outras perguntas devem ficar esclarecidas no que segue.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, que utilizamos para contagem hoje em dia, foi formalizado pelo matemático Giuseppe Peano (1858-1932). Ele caracterizou-o através dos seguintes axiomas, conhecidos como *Axiomas de Peano*:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

3. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$, e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O último axioma, chamado de *Axioma da Indução*, destaca-se por ser um artifício capaz de garantir que um subconjunto X de $\mathbb{N}$ seja, na verdade, igual ao próprio $\mathbb{N}$. Na prática, consideramos uma afirmação $P(n)$ com respeito a cada número natural n, podendo, a princípio, ser verdadeira ou falsa. Nessas condições vale o seguinte:

Proposição 1.1 (Princípio de Indução)**.** *Se*

i) $P(1)$ *é válida; e*

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

então $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Tome $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Assim, $1 \in X$, e se $n \in X$ então $n+1 \in X$. Pelo Axioma de Indução, $X = \mathbb{N}$ e o resultado está provado. □

Tendo caracterizado o conjunto $\mathbb{N}$ dessa forma, observamos que todos os seus elementos surgem a partir do 1 e pela operação de se tomar o sucessor. Em linguagem usual, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1 etc. A soma é definida de forma indutiva por:

1. $n+1$ é o sucessor de n;

2. Supondo definido $n+m$, definimos $n+(m+1)$ pelo sucessor de $n+m$.

A multiplicação é definida por:

1. $n \cdot 1 = n$;

2. Supondo definido $n \cdot m$, definimos $n \cdot (m+1) = n \cdot m + n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o subconjunto $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Contar um determinado conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os elementos de I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$. Quando for possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto finito e que n é o número de elementos de X.

Assim, para contar os elementos de um dado conjunto finito não vazio X, devemos definir uma função bijetora entre X e I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$, que é o número de elementos de X. Para verificarmos que este número está bem definido, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Se $n \neq m$ então nenhuma função $f : I_n \to I_m$ pode ser bijetora.*

Demonstração. Note, primeiramente, que o resultado é válido para $n < m$ se, e somente se, vale para $n > m$. Então provemos apenas o caso $n < m$.

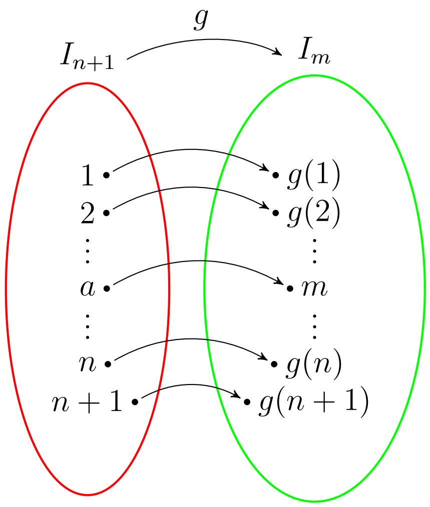
Para $n = 1$, temos $m > n$, de modo que $\{1, 2\} \subset I_m$ e pelo menos um dos números 1 ou 2 é diferente de $f(1)$. Logo f não é sobrejetora, donde não é bijetora.

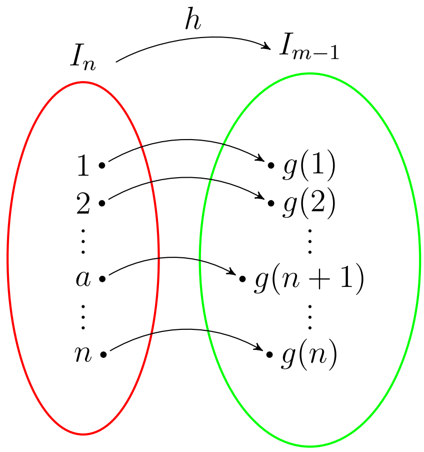
Agora, suponha por hipótese de indução que para todo $1 \leq k \leq n$ e todo $m > n$ nenhuma função $f : I_k \to I_m$ seja bijetora. Provaremos que nenhuma função $g : I_{n+1} \to I_m$ pode ser bijetora, para todo $m > n+1$.

Por contradição, suponha que exista tal g bijetora. Defina $h : I_n \to I_{m-1}$ de modo que, para $1 \leq j \leq n$, tenhamos $h(j) = g(j)$, se $g(j) \neq m$, e $h(j) = g(n+1)$, se $g(j) = m$. Assim, $h(I_n) \subset I_{m-1}$ e h é uma bijeção, contradizendo a hipótese de indução.

Logo, g não pode ser bijetora e o resultado está provado por indução. □

Podemos ilustrar a situação da demonstração acima utilizando a representação a seguir, onde consideramos $g(a) = m$ para algum $a \in I_{n+1}$.





Corolário 1.2.1. *Se existem bijeções $f : I_n \to X$ e $g : I_m \to X$, então $n = m$. Em particular, o número de elementos de um conjunto está bem definido.*

Demonstração. $g^{-1} \circ f : I_n \to I_m$ é uma bijeção, então pela contrapositiva da Proposição 1.2, tem-se $n = m$. $\square$

Usaremos, de agora em diante, a notação $n(X)$ para indicar o número de elementos de um conjunto finito não vazio X. Quando $X = \emptyset$ definimos $n(X) = 0$.

Proposição 1.3 (Princípio Aditivo)**.** *Se A e B são conjuntos disjuntos finitos não vazios então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.*

Demonstração. Sejam $n(A) = n$ e $n(B) = m$. Assim, existem bijeções $f : I_n \to A$ e $g : I_m \to B$. Definamos $h : I_{n+m} \to A \cup B$, para $1 \leq j \leq n$, por $h(j) = f(j)$, e, para $n + 1 \leq j \leq n + m$, por $h(j) = g(j - n)$.

Provemos que h é injetiva. Sejam $x_1, x_2 \in I_{n+m}$, tais que $x_1 \neq x_2$. Consideremos quatro casos:

- Se $x_1, x_2 \leq n$, então $h(x_1) = f(x_1)$ e $h(x_2) = f(x_2)$. Mas f é uma bijeção, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, donde $h(x_1) \neq h(x_2)$.
- Se $n + 1 \leq x_1, x_2 \leq n + m$, então $h(x_1) = g(x_1 - n)$ e $h(x_2) = g(x_2 - n)$. Mas g é uma bijeção e $x_1 - n \neq x_2 - n$, então $g(x_1 - n) \neq g(x_2 - n)$, donde $h(x_1) \neq h(x_2)$.
- Se $x_1 \leq n$ e $n+1 \leq x_2 \leq n+m$, pelas bijeções f e g temos que $h(x_1) = f(x_1) \in A$ e $h(x_2) = g(x_2) \in B$. Como A e B são disjuntos, $f(x_1) \neq g(x_2)$, donde $h(x_1) \neq h(x_2)$.
- Se $x_2 \leq n$ e $n + 1 \leq x_1 \leq n + m$, o caso é análogo ao anterior.

Portanto, em qualquer caso, temos $x_1 \neq x_2$ implicando $h(x_1) \neq h(x_2)$, logo h é injetiva.

Agora, mostremos que ela é sobrejetiva. De fato, seja $y \in A \cup B$. Se $y \in A$, visto que f é uma bijeção, existe $x \in I_n \subset I_{n+m}$ tal que $h(x) = f(x) = y$. Por outro lado, se $y \in B$, como g é uma bijeção, existe $x \in I_{n+m} \backslash I_n \subset I_{n+m}$ tal que $x - n \in I_m \subset I_{n+m}$ e $h(x) = g(x - n) = y$.

Consequentemente, h é bijetiva e, portanto, $n(A \cup B) = n + m = n(A) + n(B)$.

□

Outra propriedade importante é que o número de elementos do produto cartesiano de dois conjuntos finitos não vazios A e B é o produto dos números de elementos dos dois conjuntos, isto é, definindo e denotando o produto cartesiano entre A e B por:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\},$$

tem-se que $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. Esta propriedade é facilmente provada por indução, uma vez que $A \times B$ é a união disjunta dos conjuntos $\{a\} \times B$, onde $a \in A$.

Na próxima seção, vamos generalizar essa propriedade contando determinados subconjuntos não vazios do produto cartesiano de conjuntos finitos. Tal propriedade é mais conhecida como Princípio Fundamental da Contagem, e grande parte de toda análise combinatória nos ensinos fundamental e médio está ancorada neste princípio.

Capítulo 2

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, é geralmente apresentado usando a ideia de contagem de possíveis tomadas de decisões sucessivas. Isso é o que faremos a seguir, mas depois mostraremos que isso coincide com a contagem de determinados subconjuntos de um produto cartesiano.

Antes de apresentarmos esse princípio, é importante nos perguntarmos: "o que significa tomar uma decisão?". No cotidiano, significa escolher uma dentre algumas opções disponíveis. Para o nosso estudo, "tomar uma decisão" significará escolher um elemento de um conjunto. Por exemplo, escolher um dos dígitos de 0 a 9 é uma tomada de decisão que significa escolher um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Quando houver mais de uma decisão a ser tomada, digamos que n decisões, uma ordem deve ser escolhida, de modo que tomá-las consecutivamente nos dá uma *n-upla* cuja *i-ésima* coordenada é uma escolha da *i-ésima* decisão. Assim, essa representação associa biunivocamente cada decisão a uma coordenada de uma *n-upla*.

O Princípio Fundamental da Contagem nos apresenta uma forma de calcularmos a quantidade de possibilidades de se tomar decisões consecutivas. Em outras palavras, ele nos ajuda a calcularmos a quantidade total de *n-uplas* possíveis referentes a uma situação na qual n decisões são tomadas sucessivamente.

A seguir, apresentaremos esse princípio para o caso mais simples de duas decisões sucessivas.

2.1 Enunciados e equivalência

Teorema 2.1 (Princípio Fundamental da Contagem 1)**.** *Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras distintas e, independentemente da escolha feita, uma outra decisão B pode ser tomada de y maneiras distintas, então o número de formas de se tomar consecutivamente as decisões A e B é $x \cdot y$.*

Demonstração. Consideremos que as escolhas possíveis para a decisão A sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_x$.

Assim, para cada a_i da decisão A, com $i \in \{1, 2, \ldots, x\}$, existem y maneiras de se tomar a decisão B. Portanto, a quantidade de maneiras de se tomar as decisões A e B, iniciando pela escolha a_i, é y. Podemos representar essas escolhas sucessivas pelos pares ordenados $(a_i, b_{i1}), (a_i, b_{i2}), \ldots, (a_i, b_{iy})$.

Como i varia de 1 a x, o número total de maneiras de se tomar as decisões A e B, iniciando com alguma escolha de A é:

$$\sum_{i=1}^{x} y = x \cdot y.$$

$\square$

O outra maneira de interpretar e entender melhor o PFC é observá-lo sob a perspectiva da contagem do número de elementos de um subconjunto de um produto cartesiano com determinadas características. Vamos então à descrição precisa desse ponto de vista: dados A e B, conjuntos finitos não vazios, com $n(A) = x$, considere um conjunto $C \subset A \times B$ satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $a \in A$, o conjunto $B_a = \{b \in B \mid (a, b) \in C\}$ possui y elementos. Nessas condições, $C = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B_a$ e vale o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Princípio Fundamental da Contagem 2)**.** *O conjunto C possui $x \cdot y$ elementos.*

Demonstração. Inicialmente, note que C é a união disjunta dos conjuntos $\{a\} \times B_a$, com $a \in A$. De fato, por definição, C é a união desses conjuntos, e se tomarmos $c_1 \in \{a_1\} \times B_{a_1}$ e $c_2 \in \{a_2\} \times B_{a_2}$, onde $a_1, a_2 \in A$, com $a_1 \neq a_2$, eles possuem a primeira coordenada distinta. Assim, $c_1 \neq c_2$, donde essa união é disjunta.

A prova do teorema será por indução sobre x.

Para $x = 1$, tem-se $A = \{a\}$. Nesse caso, é claro que $n(C) = n(B_a) = y = 1 \cdot y = x \cdot y$.

Agora, suponha que o resultado vale para $x = n$, isto é, para $n(A) = n$, o conjunto C possui $n \cdot y$ elementos. Provemos que vale para $x = n + 1$.

Sendo $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ e $M = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \times B_{a_i}$ (uniões disjuntas), podemos escrever $C = M \cup \big(\{a_{n+1}\} \times B_{a_{n+1}}\big)$. Então, por hipótese de indução, $n(M) = n \cdot y$ e, pelo Princípio Aditivo, $n(C) = n(M) + n(B_{a+1}) = n \cdot y + y = (n + 1) \cdot y$.

Isso completa a indução, e o resultado está provado. $\square$

Na linguagem de decisões, vimos que para cada escolha a_i da primeira decisão, com $1 \leq i \leq x$, há y maneiras distintas de se tomar a segunda decisão, de modo que a tomada consecutiva das decisões A e B pode ser representada pelos pares ordenados

$(a_i, b_{i1}), (a_i, b_{i2}), \ldots, (a_i, b_{iy})$, de quantidade igual a $x \cdot y$. Vamos relacionar essas ideias com a linguagem de conjuntos utilizada no Teorema 2.2, a fim de percebermos uma equivalência entre essas duas formas de apresentar o PFC.

Cada escolha a_i da primeira decisão corresponde a uma escolha $a \in A$. De fato, i varia de 1 a x e $n(A) = x$, donde a quantidade de elementos a_i é igual à quantidade de elementos $a \in A$. E para cada a_i há y escolhas possíveis, representadas pelos elementos $b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{iy}$, o que equivale a dizer que existem y escolhas possíveis em $B_a \subset B$. Por fim, a quantidade de pares ordenados da forma $(a_i, b_{i1}), (a_i, b_{i2}), \ldots, (a_i, b_{iy})$, com $1 \leq i \leq x$, é a mesma quantidade de pares ordenados de $\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B_a$, dado por $x \cdot y$. Portanto vemos que as duas formas acima de apresentar o PFC são equivalentes.

2.2 Características do PFC e aplicações

Vamos analisar o PFC para ficar claro o que ele diz e o que ele se propõe a fazer, assim entenderemos melhor em quais situações de contagem ele pode ser aplicado.

Devemos perceber que ele considera situações nas quais é possível definir decisões e escolher uma ordem entre elas de modo que, ao aplicá-lo, ele conta configurações relacionadas com essa relação estabelecida. Compreenderemos melhor como isso se dá a partir dos pontos a seguir.

- **Definição de decisões sucessivas**

  O PFC fala de duas decisões, uma decisão A e uma decisão B. Precisamos perceber que existe uma ordem entre elas. De fato, a decisão A é a primeira, visto que possui uma determinada quantidade de formas de ser tomada independentemente de qualquer condição. E a decisão B é a segunda, pois a sua quantidade de formas de ser tomada é observada, como diz o próprio princípio, apenas após considerar a "escolha feita" em A. Portanto o PFC trata sobre a tomada de duas decisões sucessivas. Desse modo, para utilizá-lo, precisamos definir quais serão essas decisões e a ordem entre elas. **Só assim poderemos determinar o número de possibilidades de ocorrência de cada uma**. Isso é de extrema importância e se não for feito da maneira correta pode gerar erros na resolução de problemas.

  Com o objetivo de entendermos melhor esse enunciado, utilizaremos a linguagem de conjuntos em muitos momentos. Assim, à primeira decisão, que trataremos como sendo a decisão A, associaremos um conjunto, também de nome A, cujos elementos serão as maneiras distintas de ela ser tomada. E, portanto, a quantidade de maneiras de se tomar a decisão A será igual à quantidade de elementos do conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_x\}$, que nesse caso é x.

  Já a segunda decisão será denotada por B e estará associada a um conjunto de mesmo nome $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Porém, dependendo da escolha feita em A, pode ser que o conjunto com as escolhas possíveis referentes à tomada da segunda decisão varie. Assim, dado que a primeira escolha foi o elemento a_i, a tomada da segunda decisão estará associada à escolha de um elemento do conjunto que denotaremos por $B_{a_i} = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{iy}\} \subset B$. De qualquer modo, a quantidade de possibilidades de escolha para a segunda decisão será $y \leq n$. Assim, temos que $B \supset \bigcup_{a \in A} B_a$.

- **Característica de constância na quantidade de possibilidades de cada decisão**

  Definidas as decisões e as suas ordens, conforme descrito no ponto anterior, uma característica importante a ser analisada é se, **independentemente da escolha feita em A, o número de maneiras de se tomar a segunda decisão é constante**. Em outras palavras, queremos analisar se, de acordo com as decisões definidas, os conjuntos B_{a_i}, com $i \in \{1, 2, \ldots, x\}$, possuem o mesmo número de elementos.

- **Aplicabilidade de contagem das configurações produzidas**

  O PFC fala sobre "o número de formas de se tomar consecutivamente as decisões A e B", por conseguinte sua proposta é calcular o número de formas de se tomar uma decisão e, na sequência, uma outra. Assim, **a sua aplicação serve para contar pares ordenados** da forma (a_i, b_{ij}), como caracterizados anteriormente, por meio do produto:

  $$n(A) \cdot n(B_{a_i}),$$

  para qualquer i.

No enunciado do PFC, nem sempre esses três pontos ficam claros para o leitor, e dessa forma ele acaba utilizando o princípio de modo equivocado.

Às vezes, ele não compreende que uma decisão é definida como a primeira e a outra como a segunda, nem que essas decisões, após tomadas, vão gerar pares ordenados como resultados possíveis para o problema analisado. Se alguns dos pares ordenados formados não forem considerados como respostas distintas, o princípio contará um valor acima do desejado, gerando uma resposta que não corresponde à situação apresentada. E se houver outras respostas possíveis além dos pares ordenados criados, a contagem fornecida estará abaixo da desejada. Por isso é necessário analisar se a contagem que o PFC fornece se adéqua ao que a questão pede.

Outras vezes, o leitor não percebe que, independentemente da escolha feita na primeira decisão, o número de possibilidades da segunda deve ser sempre o mesmo. Assim, ele acaba utilizando o PFC em situações em que isso não ocorre e produz respostas equivocadas.

A seguir, vamos analisar alguns exemplos a fim de entendermos melhor como e quando o PFC pode ser aplicado.

Exemplo 2.1. *Rafael quer viajar da cidade P para a cidade Q e, em seguida, para a cidade R. Sabendo que há 2 caminhos distintos de viagem de P para Q, e 3 caminhos distintos de Q para R, diga quantos percursos diferentes Rafael pode tomar para ir de P a R.*

Vamos tentar identificar nesse problema a possibilidade de aplicação do PFC a partir das características pontuadas anteriormente.

1) Definição de decisões sucessivas: de acordo com a questão, podemos definir duas decisões a serem tomadas, e uma ordem para elas:

1ª decisão: escolher um trajeto da cidade P à cidade Q = escolher um elemento do conjunto $A = \{a_1, a_2\}$;
2ª decisão: escolher um trajeto da cidade Q à cidade R = escolher um elemento do conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Assim, o PFC fornecerá a contagem de pares ordenados do tipo (a_i, b_j), onde a_i representa um trajeto da cidade P à cidade Q, e b_j um trajeto da cidade Q à cidade R. Isso é exatamente o que queremos, pois Rafael viajará primeiro de P a Q, e depois de Q a R.

2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: fazendo as definições das decisões dessa maneira, podemos perceber que, independentemente da escolha feita em A, a segunda decisão será sempre representada pelo mesmo conjunto, o B. De fato, os trajetos possíveis de Q para R serão os mesmos, qualquer que seja o caminho escolhido por Rafael na primeira decisão. Portanto a quantidade de escolhas possíveis na segunda decisão é constante, igual a 3.

3) Contagem das configurações produzidas: ainda de acordo com as definições escolhidas, ao aplicarmos o PFC estaremos contando pares ordenados do tipo (a_i, b_j), em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

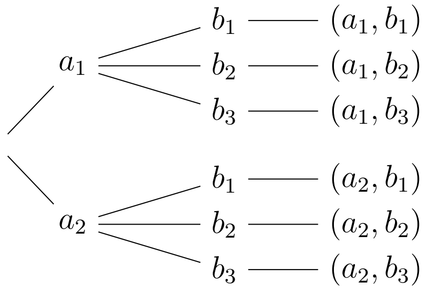
Daí, aplicando o PFC, calculamos o número de percursos possíveis que Rafael pode tomar para ir de P a R por:

$$n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Podemos visualizar esses percursos possíveis escrevendo todos os pares ordenados (a_i, b_j), com $a_i \in A$ e $b_j \in B$. Veja:

$$\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$$

Outra forma de visualizar essa solução é por meio da árvore de possibilidades:



Com a árvore de possibilidades fica mais fácil de observar que não importa a escolha feita em A, há o mesmo número de escolhas possíveis para a segunda decisão.

Exemplo 2.2. *Joana quer se vestir com uma blusa e uma calça. Sabendo que ela possui 3 calças que combinam com 5 blusas, diga com quantos looks distintos ela pode se vestir com essas peças.*

Vamos analisar se esse problema pode ser resolvido utilizando-se o PFC.

1) Definição de decisões sucessivas: duas decisões serão tomadas: escolher uma calça, e escolher uma blusa.

Nesse exemplo não existe uma ordem específica de escolha das peças. Joana pode escolher primeiro uma calça e, só depois, uma blusa, ou, primeiramente, uma blusa, e depois uma calça. Desse modo, essa situação não se caracteriza de modo natural por haver uma sucessão determinada de decisões a serem tomadas.

Apesar disso, podemos definir a decisão de escolher uma calça como sendo a primeira, e a de escolher uma blusa como sendo a segunda, gerando pares ordenados da forma (calça, blusa). Portanto, definimos:

1ª decisão: escolher uma calça = escolher um elemento de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$;
2ª decisão: escolher uma blusa = escolher um elemento de $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_5\}$.

Dessa forma, a aplicação do PFC fornecerá a contagem de pares ordenados do tipo (a_i, b_j), onde a_i é uma calça e b_j é uma blusa. Esses pares correspondem aos objetos que queremos contar, pois para cada um deles é como se Joana estivesse, primeiramente, colocando uma calça e, depois, uma blusa. A contagem dessas formas de se vestir cobre todas as possibilidades de *looks* que queremos contar.

2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: para cada escolha de A, a quantidade de escolhas possíveis para a segunda decisão é a mesma, já que não importa qual calça Joana escolha, as possibilidades para a blusa são os elementos do conjunto B. Assim como no exemplo anterior, a segunda decisão pode ser representada por um único conjunto, de modo que a quantidade de seus elementos é constante, igual a 5.

3) Contagem das configurações produzidas: queremos contar quantos *looks* Joana pode montar, ou seja, queremos contar os elementos da forma (a_i, b_j).

Ao fazer isso, percebemos que os resultados possíveis são adequadas à situação, uma vez que cada par ordenado é uma solução para o problema, e não há outras soluções que não estejam entre esses pares ordenados. Portanto aplicando o PFC temos como resposta:

$$n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Podemos visualizar essa solução através dos pares ordenados abaixo. Considerando S como sendo o conjunto solução desse problema, temos:

$$\begin{aligned} S &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_1, b_5), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) \\ &\quad (a_2, b_4), (a_2, b_5), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4), (a_3, b_5)\}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. *Dentre 5 pessoas de uma equipe serão selecionadas uma para o cargo de chefia e outra para o de vice-chefia de uma empresa. De quantas formas distintas essa escolha pode ser feita?*

1) Definição de decisões sucessivas: podemos definir duas decisões a serem tomadas: escolher uma pessoa para a chefia, e escolher outra para a vice-chefia.

1ª decisão: escolher uma pessoa para a chefia, ou seja, escolher um elemento de $A = \{$as 5 pessoas da equipe$\}$;
2ª decisão: escolher uma pessoa para a vice-chefia, com exceção da escolhida para a chefia, ou seja, escolher um elemento do conjunto $B_{a_i} = \{$alguma das pessoas que não foi escolhida para a chefia$\}$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Estabelecendo essa ordem, produziremos pares ordenados do tipo (chefe, vice-chefe), como desejado.

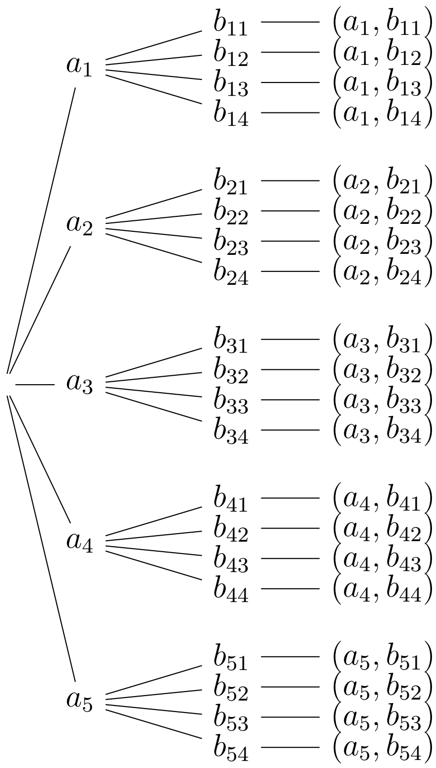
2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: podemos ver que as opções de escolha para a segunda decisão dependem da escolha feita na 1ª decisão, porém para cada escolha de A, a quantidade de escolhas possíveis para a segunda decisão é a mesma. Não importa qual pessoa tenha sido escolhida para a chefia, sempre sobram 4 opções para a vice-chefia, que é o número de elementos de B_{a_i} para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Logo, mesmo que a segunda decisão não possa ser representada por um único conjunto, sempre haverá 4 possibilidades de ela ser tomada.

3) Contagem das configurações produzidas: os pares ordenados do tipo (chefe, vice-chefe), produzidos de acordo com as definições dadas, são respostas possíveis para a situação problema e não há outras respostas possíveis. Assim queremos contar a quantidade de pares ordenados da forma (a_i, b_{ij}), onde $a_i \in A$, com $1 \leq i \leq 5$, e $b_{ij} \in B_i$, com $1 \leq j \leq 4$.

Aplicando o PFC, temos como resposta:

$$n(A) \cdot n(B_{a_i}) = 5 \cdot 4 = 20.$$

É interessante visualizarmos essa resposta na forma de árvore de possibilidades:



Exemplo 2.4. *Joana vai fazer uma viagem e quer levar dois dos seus 5 livros preferidos. De quantas maneiras ela pode fazer essa escolha?*

Vamos tentar resolver esse problema utilizando o PFC:

1) Definição de decisões sucessivas:

<u>1ª decisão</u>: escolher um dos 5 livros preferidos, isto é, escolher um elemento de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$;
<u>2ª decisão</u>: escolher um livro além do já selecionado, isto é, escolher um elemento do conjunto $B_{a_i} = \{\text{livros preferidos de Joana com exceção do livro } a_i\}$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

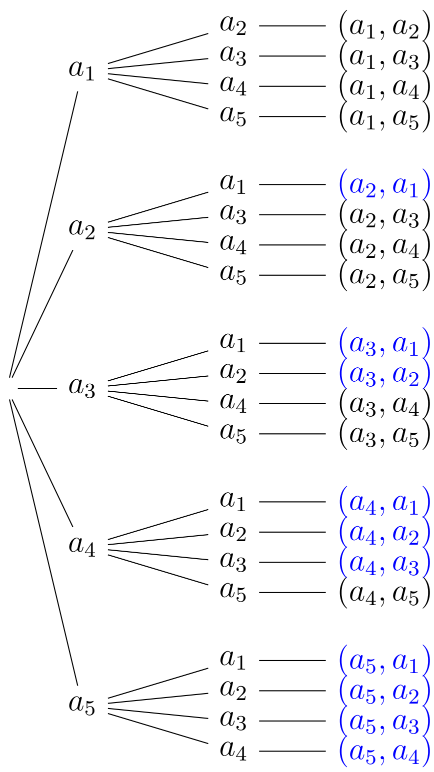
Vejamos que todos os pares ordenados formados são objetos correspondentes a uma contagem para o nosso problema.

2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: é possível notar que as opções de escolha para a segunda decisão dependem da escolha feita na primeira. Contudo, independentemente do primeiro livro escolhido, a quantidade de possibilidades de escolha do segundo é igual a 4, pois são os livros preferidos de Joana com exceção do já escolhido.

3) Contagem das configurações produzidas: as configurações produzidas a partir das definições das decisões e de suas ordens são pares ordenados do tipo (livro, livro), de modo que cada um deles corresponde a uma contagem possível para a situação problema.

Contudo é preciso perceber que o PFC diz que o número de formas de se tomar a decisão A e a decisão B "consecutivamente" é dado pelo produto $n(A) \cdot n(B)$, isto é, dois livros que se repitam em ordens distintas estão sendo contados duas vezes. Por exemplo, pares ordenados do tipo (a_1, a_2) e (a_2, a_1) estarão sendo formados e considerados como respostas distintas, de modo que se utilizarmos o PFC ele fará uma contagem superior à necessária. Portanto, caso queiramos utilizá-lo nessa questão, precisamos analisá-la com mais cuidado.

Se a primeira escolha de Joana for levar o livro a_1, ela poderá levar os outros livros como segunda opção. Assim, os pares ordenados contados serão os $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4)$ e (a_1, a_5). Contudo se sua primeira decisão for o livro a_2, os pares ordenados contados pelo PFC serão os $(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4)$ e (a_2, a_5). Se continuarmos com essa análise, observaremos que cada solução do problema estará sendo contada duas vezes. Podemos visualizar esse fato através da árvore de possibilidades abaixo, onde os pares ordenados pretos correspondem a algum azul:



Dessa forma, até podemos utilizar o PFC para resolver este problema, mas, ao final, precisamos dividir o resultado por 2. Assim, segue que o número de possibilidades de Joana escolher dois dos seus 5 livros preferidos para a viagem é:

$$\frac{n(A) \cdot n(B_{a_i})}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Em situações semelhantes a essa é comum o aluno não entender por que a aplicação direta do PFC não fornece o resultado desejado. Isso se dá porque ele não compreendeu ainda que o PFC conta pares ordenados, fazendo-se necessário uma análise por parte de quem o utiliza para verificar se os pares considerados estão relacionados de modo biunívoco com as respostas que se quer contar.

Posteriormente, trataremos de situações semelhantes de modo mais direto através de um conhecimento sistematizado, visto que elas aparecem em grande quantidade nos problemas de contagem.

Exemplo 2.5. *Quantos são os anagramas da palavra SOMA?*

Como utilizar o PFC para resolver esse problema? Podemos associar a construção de um anagrama à tomada de algumas decisões, porém, nesse caso, não apenas duas, e sim quatro decisões, que seriam:

1ª decisão: escolher a 1ª letra do anagrama;
2ª decisão: escolher a 2ª letra do anagrama, excluindo a utilizada na decisão anterior;
3ª decisão: escolher a 3ª letra do anagrama, excluindo as utilizadas nas decisões anteriores;
4ª decisão: escolher a 4ª letra do anagrama, excluindo as utilizadas nas decisões anteriores.

Isso nos leva a questionarmos se o PFC pode ser aplicado na tomada de mais de duas decisões consecutivas. E é o que trataremos a seguir.

2.3 Princípio Fundamental da Contagem Iterado e aplicações

Teorema 2.3 (Princípio Fundamental da Contagem Iterado 1)**.** *Sejam n decisões $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ que devem ser tomadas consecutivamente. Se D_1 pode ser tomada de d_1 modos e, para cada $2 \leq j \leq n$, tomadas as decisões $D_1, D_2, \cdots, D_{j-1}$, a decisão D_j pode ser tomada de d_j maneiras, independentemente das $j-1$ decisões tomadas anteriormente, então o número de maneiras de tomar essas n decisões consecutivas é $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_n$.*

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Finita sobre n. O caso $n = 2$ é exatamente o resultado do Teorema 2.1.

Agora, supondo que o resultado vale para n decisões, provemos que ele também vale para $n + 1$ decisões.

Podemos dividir essas $n + 1$ decisões consecutivas em apenas duas, de modo que a primeira seria "tomar, consecutivamente, as decisões $D_1, D_2, \ldots, D_n$", e a segunda seria "tomar a decisão D_{n+1}". Definindo X_1 como a primeira delas, e X_2 como a segunda, temos, pela hipótese de indução, que o número de formas de tomarmos a decisão X_1 é $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_n$, e o número de formas de tomarmos a decisão X_2 é d_{n+1}. Portanto, aplicando o Teorema 2.1, segue que o número de formas de tomarmos consecutivamente as decisões X_1 e X_2, isto é, as decisões $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, D_{n+1}$ consecutivamente é $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_n \cdot d_{n+1}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

De modo semelhante como fizemos para duas decisões, vamos apresentar a forma análoga do PFC iterado na linguagem de conjuntos. Porém, dessa vez, não vamos prová-lo, visto que já percebemos uma equivalência entre eles para o caso de duas decisões, além de que a linguagem utilizada tornaria a leitura demasiadamente cansativa.

Teorema 2.4 (Princípio Fundamental da Contagem Iterado 2). *Sejam os conjuntos A_i, com $1 \leq i \leq n$, finitos e um subconjunto $C \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Defina $C_j \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_j$, para $1 \leq j \leq n$, como a projeção de C sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_j$.*

Se $n(C_1) = y_1$ e para todo $\boldsymbol{a_j} \in C_j$, com $1 \leq j \leq n-1$, o conjunto $B_{\boldsymbol{a_j}} = \{b \in A_{j+1} \mid (\boldsymbol{a_j}, b) \in C_{j+1}\}$ tem a mesma quantidade de elementos, denotada por y_{j+1}, então:

$$n(C) = y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_n.$$

Observação: *A projeção de $C \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_j$, para cada $1 \leq j \leq n$, é o conjunto:*

$$C_j = \{\boldsymbol{a_j} \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_j \mid \{\boldsymbol{a_j}\} \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n \cap C \neq \emptyset\}.$$

Precisamos destacar que, de modo análogo ao PFC para duas decisões, que conta pares ordenados, o PFC iterado aplicado a n decisões sucessivas serve para contar *n-uplas* cuja i-ésima coordenada é a escolha da i-ésima decisão. Assim, de modo semelhante aos pontos destacados para o PFC, a aplicação da versão para n decisões requer atenção para itens equivalentes. Isso se faz necessário para que possamos entender como e para que ele deve ser utilizado. Os pontos são:

- **Definição de decisões sucessivas**

  Para utilizar o PFC iterado é preciso definir quais serão as decisões utilizadas e a ordem de cada uma. De modo geral, as decisões, da primeira à última, serão nomeadas por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e estarão associadas aos conjuntos de mesmo nome. Os elementos de tais conjuntos serão as escolhas possíveis para as respectivas decisões. Assim, associamos as tomadas dessas n decisões sucessivas a uma *n-upla* da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, em que a_i é a escolha feita na i-ésima decisão.

  O conjunto A_{j+1}, correspondente à decisão $j+1$, é tal que $A_{j+1} \supset \bigcup_{\boldsymbol{a_j} \in C_j} B_{\boldsymbol{a_j}}$, onde $B_{\boldsymbol{a_j}} = \{b \in A_{j+1} \mid (\boldsymbol{a_j}, b) \in C_{j+1}\}$ é o conjunto das possíveis escolhas para a decisão $j+1$, dado que as escolhas anteriores foram a *j-upla* $\boldsymbol{a_j} \in C_j$, e $n(B_{\boldsymbol{a_j}}) = y_{j+1}$.

- **Característica de constância na quantidade de possibilidades de cada decisão**

  Definidas as decisões e as suas ordens, uma característica necessária para que o PFC iterado seja aplicável é que, independentemente das escolhas feitas nas decisões A_1 a A_j, a decisão A_{j+1} tenha um número constante de possibilidades de ser tomada. Essa característica corresponde ao fato de os conjuntos $B_{\boldsymbol{a_j}}$ terem um número fixo de elementos para cada $\boldsymbol{a_j} \in C_j$.

- **Aplicabilidade de contagem das configurações produzidas**

  O PFC iterado calculará o número de formas de se tomar as n decisões sucessivas definidas, ou seja, a sua aplicação servirá para contar as *n-uplas* caracterizadas anteriormente. Esse valor é obtido através do produto:

  $$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_n,$$

  ou, equivalentemente, na linguagem do Teorema 2.4:

  $$n(C_1) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} n(B_{\boldsymbol{a_j}}),$$

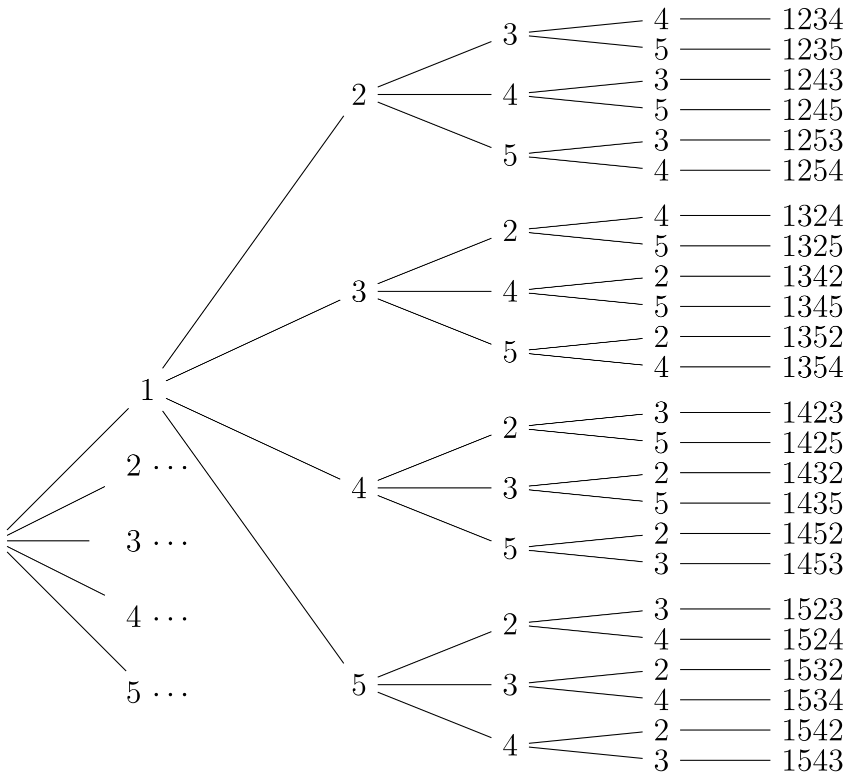
  onde $\boldsymbol{a_j}$ é um elemento qualquer de C_j.

Destacamos a importância de se entender tais pontos referentes à aplicação do PFC iterado para que ela gere o resultado desejado. Se o aluno, ou professor, não souber o que esse princípio faz, ele provavelmente não conseguirá modelar matematicamente uma questão. Acreditamos que essa falta de entendimento é um dos motivos que gera a insegurança diante da resolução e do resultado obtido em uma questão de Análise Combinatória. A seguir vamos utilizar esse princípio para responder algumas questões, explicando-as adequadamente para tornar mais claro o que ele faz.

Antes de voltarmos ao exemplo 2.5, vamos explicar outro de acordo com o que acabamos de discutir sobre o PFC iterado.

Exemplo 2.6. *Quantos números de quatro dígitos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?*

Podemos ilustrar a resposta a essa questão por meio do seguinte esboço de diagrama de árvore:



De acordo com a linguagem de conjuntos utilizada no PFC 2.4, podemos identificar alguns elementos importantes através desse esboço de diagrama:

- $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

- $B_{(1)} = \{2, 3, 4, 5\}$. Além disso, apesar de não estarem explícitos, podemos perceber que $B_{(2)} = \{1, 3, 4, 5\}, B_{(3)} = \{1, 2, 4, 5\}, B_{(4)} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B_{(5)} = \{1, 2, 3, 4\}$. Todos esses conjuntos possuem 4 elementos, ou seja, todo $B_{\boldsymbol{a_1}}$ com $\boldsymbol{a_1} \in C_1$ possui a mesma quantidade de elementos;

- $B_{(1,2)} = \{3, 4, 5\}, B_{(1,3)} = \{2, 4, 5\}$, $B_{(1,4)} = \{2, 3, 5\}$ e $B_{(1,5)} = \{2, 3, 4\}$, todos contendo 3 elementos, ou seja, todo $B_{\boldsymbol{a}}$ com $\boldsymbol{a} = (1, i) \in C_2$, onde $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, possui a mesma quantidade de elementos. Apesar de não termos feito os outros ramos da árvore de possibilidades, podemos perceber que todos os outros $B_{\boldsymbol{a_2}}$, com $\boldsymbol{a_2} \in C_2$, também possuem 3 elementos;

- $B_{(1,2,3)} = \{4, 5\}, B_{(1,2,4)} = \{3, 5\}$ e $B_{(1,2,5)} = \{3, 4\}$ contêm 2 elementos, ou seja, todo $B_{\boldsymbol{a}}$ com $\boldsymbol{a} = (1, 2, i) \in C_3$, onde $i \in \{3, 4, 5\}$, possui a mesma quantidade de elementos. Apesar de não estar explícito na árvore de possibilidades acima, podemos perceber que todo $B_{\boldsymbol{a_3}}$, com $\boldsymbol{a_3} \in C_3$, também possui 2 elementos.

Visto que para todo $\boldsymbol{a_j} \in C_j$ temos $B_{\boldsymbol{a_j}} = \{b \in A_{j+1} \mid (\boldsymbol{a_j}, b) \in C_{j+1}\}$ com y_{j+1} elementos, então podemos utilizar o PFC iterado, de modo que:

$$n(C) = y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Podemos ver que a linguagem de conjuntos como proposta se torna bastante elaborada e extensa na resolução de um exercício de Combinatória. Apesar de ela ser importante para o bom entendimento e representação exata de uma situação de contagem, a forma de resolução por meio da definição de decisões se torna mais prática e simples. Por isso, em geral, é através dessa linguagem que abordaremos a maior parte dos exercícios neste trabalho.

Tendo provado o PFC para mais de duas decisões consecutivas, agora podemos utilizá-lo para resolver o exemplo 2.5. Nele queremos encontrar o número de anagramas da palavra *SOMA*. A seguir, damos continuidade à resolução.

1) Definição de decisões sucessivas: quatro decisões sucessivas serão tomadas, as quais serão:

1ª decisão: escolher a 1ª letra do anagrama;
2ª decisão: escolher a 2ª letra do anagrama, excluindo a utilizada na decisão anterior;
3ª decisão: escolher a 3ª letra do anagrama, excluindo as utilizadas nas decisões anteriores;
4ª decisão: escolher a 4ª letra do anagrama, excluindo as utilizadas nas decisões anteriores.

2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: para a primeira decisão, temos 4 possibilidades: S, O, M ou A. Para a segunda, as possibilidades são as letras que ainda não foram utilizadas, o que dá 3 possibilidades, independentemente da escolha feita anteriormente.

Para a terceira decisão, temos 2 possibilidades, que são as duas letras que não foram utilizadas, portanto 2 escolhas possíveis, independentemente das escolhas anteriores.

Finalmente, para a quarta escolha, em qualquer caso, haverá apenas 1 possibilidade, que será a letra que restou.

Assim, o número de possibilidades de cada decisão independe das escolhas feitas nas decisões anteriores. Logo a segunda característica está presente no problema.

3) Contagem das configurações produzidas: queremos contar o número de anagramas da palavra *SOMA*. Podemos perceber que cada *4-upla* formada de acordo com as decisões definidas é uma ordenação das letras dadas, constituindo um único objeto de contagem desejado no problema. Além disso, cada objeto de contagem desejado está sendo representado por uma, e somente uma, *4-upla* formada. Portanto as configurações produzidas pelo PFC correspondem biunivocamente aos objetos que queremos contar.

Assim, vemos que o PFC iterado pode ser aplicado na situação dada, donde a resposta que procuramos é:

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

O diagrama de árvores é uma boa ferramenta para percebermos as *n-uplas* formadas e uma possível contagem excessiva ou reduzida de soluções. Em alguns casos ela se torna inviável, por isso é importante que ao menos seja feita a visualização de algumas *n-uplas* com o intuito de fazer essa análise.

Tomando a questão anterior como exemplo, duas *4-uplas* formadas serão (S,O,M,A), correspondente à palavra *SOMA*; e (S,M,O,A), correspondente à palavra *SMOA*, que é uma palavra distinta da anterior. Além disso, facilmente podemos perceber que nenhuma resposta estará fora das *4-uplas* formadas.

Consideremos outro problema.

Exemplo 2.7. *De quantas formas podemos pintar uma bandeira de 4 listras, sendo disponíveis 5 cores, de modo que as listras adjacentes não tenham a mesma cor?*

Considerando o conjunto das cores disponíveis por $C = \{a, b, c, d, e\}$, nessa situação, estamos querendo contar objetos da forma (x_1, x_2, x_3, x_4), em que $x_i \in C$, com $i = 1, 2, 3, 4$, de modo que coordenadas adjacentes sejam distintas.

Vamos tentar utilizar o PFC para resolver esse problema.

1) Definição de decisões sucessivas:

1ª decisão: escolher uma das 5 cores para a primeira listra, ou seja, escolher um elemento de $\{a, b, c, d, e\}$;
2ª decisão: escolher uma cor para a listra adjacente à primeira. Essa cor precisa ser diferente da anterior, logo haverá 4 possibilidades para essa decisão;
3ª decisão: escolher uma cor para a listra adjacente à segunda. Essa cor precisa ser diferente da anterior, logo haverá 4 possibilidades para essa decisão;
4ª decisão: escolher uma cor para a listra adjacente à terceira. Essa cor precisa ser diferente da anterior, logo haverá 4 possibilidades para essa decisão.

Estabelecendo essa ordem, produziremos *4-uplas* da forma que comentamos inicialmente, como desejado.

2) Constância na quantidade de possibilidades de cada decisão: como mencionado anteriormente, não importa quais sejam as escolhas feitas em cada decisão, a possibilidade de escolhas de cada uma será igual a 4, com exceção da primeira decisão, que possui 5 formas distintas de ser tomada.

3) Contagem das configurações produzidas: agora, basta utilizarmos a multiplicação para calcularmos a quantidade de *4-uplas* produzidas com base nas decisões definidas:

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320.$$

Cada configuração produzida associa-se a uma bandeira distinta, e qualquer bandeira a ser contada corresponde a alguma configuração produzida. Assim, a resposta desejada é 320 bandeiras distintas.

2.4 Orientações e sugestão de roteiro para o uso do PFC

Com base no que foi discutido até agora, queremos tecer alguns comentários e orientações a respeito do uso do PFC. Sabemos que há insegurança de muitas pessoas ao responder uma questão de Análise Combinatória, e queremos contribuir com a superação desse obstáculo por meio de um melhor entendimento de como utilizar esse princípio tão importante nessa área da Matemática. Após essas considerações, proporemos um roteiro para a resolução de questões que envolvem o uso do PFC.

A primeira orientação que devemos dar é sobre o bom entendimento do Princípio Fundamental da Contagem. É necessário que o estudante e o professor tenham claro o que esse princípio propõe. E, como já discutimos consideravelmente, ele trata da contagem de *n-uplas* formadas a partir de decisões definidas e tomadas numa determinada sequência. Isso é essencial para utilizar o PFC e atingir o objetivo desejado.

A segunda orientação a ser dada é que a pessoa que está enfrentando um problema de Análise Combinatória tenha de modo claro que tipo de objetos ele está querendo contar. Muitas vezes, esses objetos não podem ser representados por *n-uplas*, ou seja, por agrupamentos ordenadas de elementos, mas por agrupamentos não-ordenados, quando a simples aplicação do PFC não dará a resposta desejada de modo direto.

A terceira orientação é que as decisões a serem definidas tenham como base o tipo de objeto a ser contado. Assim, elas devem ser definidas, juntamente com a sua ordem, de modo a produzir ordenações nas quais cada elemento da *i-ésima* posição da ordenação esteja associado a um elemento da *i-ésima* decisão.

Por fim, a quarta orientação é estudar se é possível estabelecer uma bijeção entre os objetos a serem contados e as ordenações criadas, ou pelo menos uma relação proporcional, por exemplo: a cada duas ordenações corresponde um único objeto a ser contado.

Considerando essas orientações, apresentamos a seguir um roteiro que pode ser seguido por professores, ou alunos, a fim de que possam aplicar bem esse princípio na resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória.

Os passos seguem a linha do que temos feito na resolução dos problemas apresentados até então, porém de modo mais claro. A seguir enunciamos e descrevemos cada um:

1) Definição de decisões sucessivas

Esse é um passo crucial para a resolução do problema. É a partir das definições das decisões e da ordem estabelecida entre elas que o resto dos passos se basearão. O aluno definirá as decisões e a ordem entre elas, de modo que a quantidade de possibilidades da tomada de cada uma das decisões poderá ser determinada e analisada.

2) Verificação da constância na quantidade de possibilidades de cada decisão

É necessário, em seguida, analisar se cada decisão apresenta um número constante de possibilidades de ser tomada, independentemente das escolhas feitas nas decisões anteriores. Se isso não ocorrer, o PFC não poderá ser aplicado.

3) Contagem das configurações produzidas

O enunciado do PFC considera que as decisões serão tomadas consecutivamente. Isso faz com que as configurações produzidas e contadas sejam *n-uplas* da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, em que a_i é a escolha feita na i-ésima decisão. Portanto, após o segundo passo, deve-se fazer o cálculo proposto no princípio, a fim de contar a quantidade de configurações produzidas de acordo com as decisões consecutivas definidas. Com esse número em mãos, o aluno poderá passar para o próximo passo.

4) Análise da relação entre as configurações produzidas e as desejadas

Nesse ponto, é bom que o aluno faça o registro escrito de algumas *n-uplas* produzidas com o intuito de perceber se elas apresentam uma relação biunívoca com as configurações desejadas, ou se elas estão em maior ou menor quantidade do que estas.

Ele pode registrar algumas *n-uplas* específicas, por exemplo, duas distintas apenas na posição dos elementos que as compõem, e então fazer a análise.

Se for possível, dependendo da maturidade matemática do aluno, ele pode verificar, através de alguma técnica, se essa relação é injetiva e sobrejetiva, com o objetivo de tirar uma conclusão mais precisa.

5) Contagem dos objetos desejados

De acordo com a relação encontrada, o aluno deverá fazer os cálculos necessários para encontrar a resposta desejada, seja através de uma divisão, uma multiplicação ou outras operações com o número encontrado pelo uso do PFC. Por exemplo, se a relação encontrada foi de que para cada duas configurações calculadas pelo PFC há apenas uma desejada, então deve-se dividir o número total de configurações por 2, a fim de encontrar a quantidade total de objetos desejados.

Capítulo 3

Analisando algumas formas de enunciar o PFC

Entender bem uma definição matemática ou alguma proposição é essencial para o seu uso em contextos específicos de resolução de problemas.

Visto que o Princípio Fundamental da Contagem é um dos conhecimentos mais importantes no estudo da Análise Combinatória, e querendo analisar se esse princípio está sendo bem ensinado, fizemos uma pesquisa em sites e livros matemáticos para averiguarmos como eles enunciam, explicam e exemplificam esse princípio.

Essa análise consiste em verificar a adequação da linguagem informal utilizada no enunciado do PFC à linguagem matemática que ele significa. Veremos se elas estão em sintonia, no sentido de se é possível, a partir da linguagem informal, entender matematicamente o que é o PFC e como utilizá-lo corretamente.

De acordo com enunciado 2.1, proposto em nosso trabalho, e a partir das características que identificamos e discutimos na seção 2.2, podemos identificar três partes importantes no enunciado do PFC, a partir das quais queremos fazer a nossa discussão neste capítulo.

A primeira parte consiste em dizer que há decisões consecutivas a serem tomadas. Essa parte é importante para o leitor entender que é necessário definir decisões no momento de enfrentar uma questão, considerando, para isso, uma ordem específica entre elas. Isso contribui para que ele perceba corretamente a quantidade de possibilidades de ocorrência de cada decisão, pois essa contagem é feita considerando-se que as decisões anteriores já foram tomadas. A quantidade de possibilidades da decisão seguinte, em alguns casos, só pode ser observada corretamente após considerar que as anteriores foram tomadas, como é o caso das decisões dependentes.

A segunda parte que destacamos do enunciado fala sobre a quantidade de possibilidades de serem tomadas cada uma das decisões consideradas. Essa parte é importante para o leitor perceber que a quantidade de possibilidades de cada decisão deve independer das escolhas feitas nas decisões anteriores.

E a última parte consiste em dizer que o princípio calculará a quantidade de formas de se tomar essas decisões de modo consecutivo. Isso é equivalente a dizer que ele irá contar o número de pares ordenados em que a primeira coordenada é uma escolha tomada na primeira decisão e a segunda coordenada é uma escolha tomada na segunda decisão. Destacamos a importância de, nessa última parte, ser dito que as decisões serão tomadas consecutivamente, pois isso contribui para o entendimento de que o PFC conta pares ordenados (ou *n-uplas*, no caso do PFC iterado).

É a partir da percepção dessas diferentes partes do enunciado do PFC que iremos fazer nossa discussão neste capítulo. Discutiremos sobre o efeito da utilização de palavras e expressões distintas das mencionadas, bem como da ausência de alguma delas.

Antes da análise, queremos lembrar que, como vimos no primeiro capítulo deste trabalho, o PFC define decisões sucessivas, ou, em outras palavras, etapas, que compõem um experimento ou uma ação. Essas decisões, ou etapas, devem ser definidas de modo que cada uma delas possa ser representada por um conjunto, e cada escolha de uma decisão seja um elemento desse conjunto. A ordem das decisões deve ser escolhida, e esta é de extrema importância para a aplicação desse princípio. Por isso é essencial que o enunciado do PFC possibilite entender que as etapas definidas tenham uma ordem. Durante a explicação do PFC nomeamos essa característica como **definição de decisões sucessivas**.

Essas decisões sucessivas devem ser tais que os conjuntos associados às tomadas de decisões tenham um número constante de elementos, apesar de estes poderem variar de acordo com as escolhas feitas nas decisões anteriores. Por isso é importante o enunciado do princípio tornar clara essa informação. Nomeamos tal característica durante este trabalho de **constância na quantidade de possibilidades de cada decisão**.

Por fim, é essencial que o enunciado do PFC informe que ele fornecerá a contagem de elementos com configurações produzidas de acordo com as decisões definidas e a sua ordem escolhida. Abordamos esse item nomeando-o de **contagem das configurações produzidas**.

Levando em consideração esses três elementos essenciais para o enunciado do PFC, a seguir traremos a discussão a respeito dos enunciados encontrados durante a nossa pesquisa.

3.1 Decisões sucessivas

Alguns enunciados do PFC trazem as expressões “decisões sucessivas” ou “etapas sucessivas”. Essas expressões são essenciais para o entendimento desse princípio, já que as decisões, ou etapas, definidas devem ser consideradas com uma ordem específica, como já discutimos anteriormente. É essa ordem que vai definir os tipos de elementos contados pelo PFC. Além disso, ela permitirá observar quantas possibilidades de escolha existem na tomada de cada uma das decisões.

Portanto essas expressões contribuem para a compreensão e aplicação do princípio. A palavra "etapas", por si só, traz a ideia de sucessão de acontecimentos, o que é conveniente para o entendimento do PFC. Apesar disso, a fim de tornar o enunciado mais claro possível, é bom que ela venha acompanhada da palavra "sucessivas".

Algumas vezes, essa expressão não aparece no enunciado do PFC, o que pode gerar dificuldade no entendimento do princípio, como veremos mais à frente na seção sobre as decisões serem tomadas simultaneamente.

3.2 Decisões dependentes e decisões independentes

Algumas palavras que aparecem frequentemente nos enunciados do Princípio Fundamental da Contagem são as palavras "dependentes" e "independentes" referindo-se às decisões. Sobre elas é necessário tecer alguns comentários.

A segunda decisão ser independente da primeira significa que as escolhas possíveis de serem feitas na segunda não mudam, não importa qual seja a escolha feita na primeira. Por exemplo, na escolha de um lanche composto por uma pizza e um refrigerante, temos esse tipo de situação. Podemos definir:

1ª etapa: escolher o sabor da pizza;
2ª etapa: escolher o sabor do refrigerante.

Nesse caso, a segunda etapa é independente da primeira, pois os sabores de refrigerante disponíveis são os mesmos, independentemente da escolha do sabor da pizza. Em situações assim o PFC pode ser utilizado.

Porém há situações em que as escolhas disponíveis na segunda decisão dependem da escolha feita na primeira, situação em que dizemos que a segunda decisão é dependente da primeira. Por exemplo, vamos pensar no seguinte problema: quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados utilizando-se os dígitos 1, 2, 3, 4 ou 5? Podemos definir as decisões como sendo:

1ª decisão: escolher o algarismo das dezenas;
2ª decisão: escolher o algarismo das unidades.

Nesse exemplo, a escolha da segunda decisão dependerá da escolha feita na primeira, no entanto isso não impede de utilizarmos o PFC, visto que o número de possibilidades de escolha para a segunda independe da escolha feita na primeira. Assim, a quantidade de números de acordo com as características desejadas é $5 \cdot 4 = 20$.

Portanto dizer que o PFC funciona apenas para situações em que as decisões são independentes é reduzir a sua possibilidade de aplicação. Na edição do PAPMEM de janeiro de 2014, o professor Paulo César Carvalho, falando a respeito da suposta necessidade de as decisões serem independentes para o PFC funcionar, diz que isso é algo extremamente restritivo, e que encontra isso em muitos livros didáticos [10, 25min53s].

Um exemplo de enunciado que utiliza essa limitação é o seguinte:

Enunciado 3.1. *"O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo, é utilizado para encontrar o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas. Para isso, as etapas devem ser sucessivas e independentes.*

Se a primeira etapa do evento possui x possibilidades e a segunda etapa é constituída de y possibilidades, então existem $x \cdot y$ possibilidades.

Portanto, o princípio fundamental da contagem é a multiplicação das opções dadas para determinar o total de possibilidades." [12]

O que é necessário, na verdade, é que a **quantidade de possibilidades** de tomada da segunda decisão seja o mesmo independentemente da escolha feita na primeira decisão.

De acordo com essa discussão, acreditamos que é melhor suprimir expressões como "decisões dependentes" e "decisões independentes" no enunciado do PFC, já que ele pode ser aplicado em ambos os contextos. Por outro lado, para que o enunciado transmita a ideia correta desse princípio é essencial que ele expresse a necessidade de que a quantidade de possibilidades da segunda decisão seja independente da escolha feita na decisão anterior.

3.3 Decisões tomadas simultaneamente

Uma expressão que apareceu na terceira parte de alguns enunciados pesquisados foi "decisões tomadas simultaneamente". Nesses casos, além disso, no início do enunciado não se falava sobre as decisões serem sucessivas. Um exemplo de enunciado em que encontramos isso foi o seguinte:

Enunciado 3.2. *"O princípio fundamental da contagem é uma técnica para calcularmos de quantas maneiras decisões podem combinar-se. Se uma decisão pode ser tomada de n maneiras e outra decisão pode ser tomada de m maneiras, o número de maneiras que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente é calculado pelo produto de $n \cdot m$." [3]*

Podemos explorar esse enunciado para duas situações distintas: uma quando as decisões são independentes, e outra quando uma delas é dependente da anterior. Vamos fazer essa distinção porque para um caso essa expressão pode ser utilizada adequadamente, porém, para o outro, pode não haver um entendimento correto de como utilizar o princípio.

Quando duas decisões são independentes, dizer que elas podem ser tomadas simultaneamente é algo possível e compreensível, pois de fato as possibilidades de tomada de decisão de cada uma não muda independentemente da escolha feita na outra, inclusive não existe a necessidade de dizer que uma é a primeira e a outra é a segunda. Dessa forma, o PFC do enunciado contará o número de grupos possíveis formados com um elemento de cada conjunto, sem uma ordem específica para os elementos desses grupos.

Por exemplo, vejamos a situação: de quantas formas distintas Manoela pode se vestir com uma blusa e uma calça se ela possui 7 opções de blusa e 4 opções de calça para usar? Podemos definir as decisões sem uma ordem (já que elas são independentes e serão tomadas simultaneamente) como sendo:

Decisão: a escolha de uma das 7 blusas;
Decisão: a escolha de uma das 4 calças.

Assim, tomar as duas decisões simultaneamente gerará pares do tipo blusa e calça, sem uma ordem. Por exemplo, blusa azul e calça preta, ou calça preta e blusa azul, representam o mesmo par, e o PFC contará ele como sendo um único, conforme desejado na questão.

Portanto, dizer que o PFC pode ser aplicado em situações onde as decisões serão tomadas simultaneamente serve adequadamente para casos em que as decisões são independentes.

Agora, vamos analisar as situações onde uma das decisões é dependente da outra. Quando isso acontece, necessariamente existe uma ordem entre elas, do contrário não faria sentido dizer que uma depende da outra. Apesar de o enunciado citado não falar sobre uma ordem entre as decisões, em casos assim ela ficará subentendida e de interpretação do leitor, que deverá considerá-la e torná-la clara no momento da definição das decisões a fim de aplicar o princípio corretamente.

Pensemos no seguinte problema: de quantas formas é possível escolher um par de lápis dentre dez opções de lápis de cores distintas?

Vamos considerar 3 formas de interpretar e resolver esse problema de acordo com o enunciado proposto.

Devido ao enunciado do PFC não ter falado sobre ordem das decisões, quem está enfrentando o problema com base nele poderia definir as decisões da seguinte forma:

Decisão: escolher um dos 10 lápis;
Decisão: escolher um dos 10 lápis.

Aplicando o PFC com essas decisões isso geraria a quantidade de $10 \cdot 10 = 100$ possibilidades de pares de lápis, que o leitor poderia entender como sendo os pares de lápis possíveis de serem escolhidos dentre os dez disponíveis. Porém isso não acontece, e essa não é a resposta correta.

O problema dessa interpretação é que ela está considerando as decisões como sendo independentes uma da outra. Mais do que isso, cada uma delas desconsidera a existência da outra. Por considerar que as decisões são tomadas simultaneamente, o aluno pode achar que elas também devam ser simultâneas, ou seja, que não há uma ordem entre elas, e que a contagem de cada uma deva desconsiderar a outra, gerando uma contagem errada da quantidade de possibilidades de cada decisão.

Além dessa possibilidade de interpretação, devido ao enunciado não ter falado sobre ordem das decisões, e ter dito que elas seriam tomadas simultaneamente, poderia-se definir as decisões de modo semelhante ao anterior, mas supondo que para cada uma delas só há 9 escolhas possíveis. Essa interpretação seria possível porque a pessoa poderia pensar que, como as decisões vão ser tomadas simultaneamente, para cada uma delas só restam 9 possibilidades de escolha, visto que uma das 10 opções já estaria sendo escolhida pela outra tomada de decisão. Assim, as decisões definidas seriam:

Decisão: escolher um dos 9 lápis;
Decisão: escolher um dos 9 lápis.

A aplicação do PFC, nesse caso, geraria $9 \cdot 9 = 81$ possibilidades de pares de lápis dentre as opções disponíveis. Esse é um dos problemas possíveis de interpretação por se dizer que elas serão tomadas simultaneamente.

Ambas as interpretações anteriores seriam possíveis pelos alunos a partir do enunciado do PFC que estamos analisando. Isso ocorre porque, ao dizer que as decisões serão tomadas simultaneamente, associado ao fato de que no início do enunciado não se fala sobre uma ordem entre elas, o aluno pode ficar influenciado a definir as decisões como se elas fossem simultâneas. Isso gera definições equivocadas, e um entendimento errado da relação entre as decisões, conforme as interpretações exemplificadas anteriormente.

Apesar disso, a terceira forma de interpretar e resolver essa questão, que apresentaremos a seguir, considera a definição correta das decisões de acordo com o contexto do problema, mostrando que o enunciado do PFC em questão possibilita uma interpretação capaz de auxiliar na resolução do problema de modo correto.

Na terceira forma de resolução, há a possibilidade de a pessoa atribuir uma ordem ao que é feito nas decisões, o que seria equivalente a atribuir uma ordem a elas, mesmo que não perceba. Assim, suas decisões poderiam ser definidas como:

Decisão: escolher um dos 10 lápis;
Decisão: escolher um dos 9 lápis restantes.

Essa pessoa poderia utilizar o PFC e chegar ao resultado de $10 \cdot 9 = 90$ pares de lápis possíveis de serem escolhidos, porém não saber bem o que fazer com essa informação, afinal, como, de acordo com o enunciado do PFC, as decisões são tomadas simultaneamente, o aluno pode não entender que está contando pares ordenados, donde aparentemente os pares considerados não estão repetidos. Mas sabemos que essa não é a resposta. Nesse caso, cada par está sendo contado duas vezes. Apesar disso, uma pessoa que compreendeu melhor esse enunciado perceberia que para chegar à resposta correta seria necessário tomar esse número e dividi-lo por 2, obtendo como resultado 45 pares distintos de lápis.

Com essa discussão, queremos destacar que a utilização da expressão "decisões tomadas simultaneamente", sem uma clareza de que as decisões são consecutivas, pode gerar mais de uma interpretação do enunciado, e, portanto, diferentes entendimentos de sua aplicação e dos objetos que estão sendo contados pelo PFC. Sabemos que tais objetos são *n-uplas*, daí aparece a importância de, em algum momento, isso ficar claro no enunciado. Segundo o nosso estudo, dizer que as decisões serão tomadas consecutivamente é a forma mais adequada de transmitir essa ideia.

Queremos destacar que o enunciado analisado nesta seção não está errado, incompleto, nem com limitação de aplicação, porém acreditamos que ele se torna mais claro, preciso e de melhor compreensão por parte do aluno caso declare que as decisões devem ser consideradas de modo consecutivo e tomadas, também, de modo consecutivo. Por isso entendemos que a expressão “decisões tomadas simultaneamente” deve ser substituída por “decisões tomadas sucessivamente” com o intuito de promover uma melhor compreensão do PFC, evitando interpretações e aplicações inadequadas.

3.4 Enunciados com incoerências internas ou dissociados dos exemplos apresentados

Alguns enunciados apresentam incoerência interna. Por exemplo, o enunciado 3.1 fala sobre um evento composto por n etapas, porém ao desenvolver o texto restringe o n a 2 sem nenhum motivo apresentado. Incoerências como essa podem gerar confusão no aluno, sendo preferível desde o início se referir a $n = 2$ e desenvolver o enunciado com essa referência, ou do início ao fim apresentar o enunciado para o caso geral n.

Outro tipo de situação encontrada, que acreditamos não ser a mais adequada, é a apresentação do enunciado do PFC para duas decisões, seguida da exposição de exemplos ou problemas que envolvem mais de duas decisões, sem nenhum comentário ou explicação sobre a extensão do princípio para esses casos.

Apresentamos um exemplo desse tipo a seguir, onde é proposto o seguinte enunciado:

Enunciado 3.3. *“Quando um evento é composto por etapas sucessivas e independentes, sendo as possibilidades da primeira etapa representadas pelo X e as da segunda por Y, o total de possibilidades será dado pelo produto entre X e Y.”[1]*

Porém, logo em seguida, é apresentado um exemplo com a resolução do problema:

“O kit de uma lanchonete é formado por suco, sanduíche e sobremesa. As opções de suco são laranja, morango ou uva; os sanduíches podem ser de frango ou boi e a sobremesa é chocolate ou bala. Quantos kits diferentes um cliente pode montar?”[1]

Note que, neste problema, necessitamos tomar três decisões sucessivas: escolher um sanduíche, um suco e uma sobremesa. Dessa forma, não é possível utilizar diretamente o PFC enunciado acima, porém se fosse acrescentada uma observação de que podemos iterar o princípio para mais de duas decisões, seria possível utilizá-lo para resolver o problema.

3.5 Exemplos de bons enunciados

Em nossa pesquisa, um enunciado que apresentou as três características destacadas em nosso trabalho de modo correto e com formulação adequada se encontra no Livro *Temas e Problemas Elementares*, de autoria do Prof. Elon Lages Lima e outros professores [6, p. 130]. Nesse livro, encontramos o seguinte enunciado para a proposição:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \cdot q$.

De acordo com o nosso estudo e análise, ele é um dos mais claros, corretos e completos sobre o assunto.

Outro enunciado bem formulado e com as três características destacadas foi encontrado no site *Saber Matemática*.

Enunciado 3.4. *"O Principio Fundamental da Contagem diz que quando uma ação é composta por duas etapas sucessivas, onde a primeira pode ser realizada de n maneiras distintas, e para cada uma dessas possibilidades, a segunda etapa pode ser realizada de m maneiras distintas, então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é calculado através do produto $m \cdot n$.*

O mesmo princípio vale para ações constituídas de 3 ou mais etapas sucessivas." [11]

3.6 Observação sobre a distinção entre a teoria do PFC e a situação onde ele é aplicado

É preciso destacar a distinção entre a teoria do PFC e a situação apresentada pelo problema onde ele é aplicado. É preciso ficar claro que ele é uma teoria e, como tal, pode ser aplicada ou não a algumas situações problema.

Há situações, por exemplo, que não se caracterizam por uma sucessão de acontecimentos e, mesmo assim, o PFC pode ser utilizado. Por exemplo, vamos considerar o seguinte problema: Fabrício vai lançar dois dados simultaneamente, um verde, numerado de 1 a 6, e um azul, numerado de 7 a 12. Quantos são os possíveis resultados desse lançamento?". Com o intuito de utilizar o PFC para resolvê-lo, vamos definir duas etapas sucessivas:

1ª etapa: registrar o número do dado verde;
2ª etapa: registrar o número do dado azul.

De acordo com essa definição, os resultados serão pares ordenados, que estarão em bijeção com as respostas para o nosso problema. Assim, aplicando o PFC, temos $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades para o resultado.

Vejamos que nesse experimento não existem duas etapas sucessivas já pré-definidas. Pelo contrário, o próprio enunciado fala sobre lançamento simultâneo de dois dados. Apesar disso, pudemos definir etapas sucessivas de modo que os pares ordenados servissem para a contagem que desejávamos.

É necessário que o estudante compreenda essa característica do PFC, perceba que a sua teoria trabalha com decisões sucessivas, mas que, na prática, ele pode ser utilizado em situações onde não há uma ordem específica para as decisões. Isso acontece desde que essa ordem seja criada com as decisões definidas de modo que os objetos a serem contados e as *n-uplas* produzidas pelo princípio tenham uma relação bijetiva entre si.

Capítulo 4

Métodos de contagem derivados do PFC

Além do Princípio Fundamental da Contagem, o estudo da Análise Combinatória no Ensino Básico brasileiro privilegia outras técnicas de contagem: as permutações, os arranjos e as combinações. Segundo a referência [7, p. 2], isso se dá porque:

> "Em primeiro lugar, entre os vários tipos de 'números para contagem' da Análise Combinatória, eles são os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória."

Nesta seção, trataremos cada um desses métodos de contagem, com vistas a tornar claro o contexto com o qual cada um está relacionado, e assim ser possível aplicá-los corretamente. Além disso, vamos utilizar o PFC para desenvolver as fórmulas referentes a cada um deles.

É de extrema importância que o aluno entenda essas demonstrações, ou ao menos entendam por meio de um exemplo a equivalência entre o uso do PFC e a fórmula de cada método. Se isso não ocorrer, corre-se o risco de ele não ver sentido no que se está fazendo, e achar que a Matemática não possui explicação, é inacessível, e acabar se desmotivando com o estudo dessa área.

4.1 Permutação simples

Definição 4.1. *Uma ordenação de n objetos distintos é uma permutação simples.*

Por exemplo, uma fila em que estão Alberto, Bruna e Carla, nessa ordem, representada pela *3-upla* (Alberto, Bruna, Carla), é uma permutação simples. Outra permutação simples nesse contexto seria (Bruna, Alberto, Carla).

A quantidade de permutações simples de n objetos distintos é representada por P_n, e calculada conforme a proposição a seguir, na qual utiliza-se $n!$ como sendo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$.

Proposição 4.1 (Permutação Simples)**.** *O número de modos de ordenar n objetos distintos é:*

$$P_n = n!$$

Demonstração. Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ queremos calcular a quantidade total de permutações simples deles.

Veja que, para isso, temos n decisões a tomar:

<u>1ª decisão</u>: escolher o objeto que ficará na 1ª posição da ordenação;
<u>2ª decisão</u>: escolher o objeto que ficará na 2ª posição da ordenação, dado que o da 1ª posição já foi escolhido;
$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$
<u>nª decisão</u>: escolher o objeto que ficará na $n^{\underline{a}}$ posição da ordenação, dado que os das demais posições já foram escolhidas.

Como já discutimos anteriormente, o uso do PFC contará *n-uplas* do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. De fato, uma *n-upla* desse tipo é uma permutação simples. Mudando a ordem de um desses elementos, obtemos outra *n-upla*, como, por exemplo, $(a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, que certamente será outra permutação. Além disso, não há permutações simples que não estejam sendo contadas nesse processo. Portanto há uma bijeção entre as ordenações produzidas pelo PFC e as permutações desejadas.

Para a 1ª decisão há n possibilidades de escolha, visto que qualquer um dos n objetos pode ocupar o primeiro lugar. Para a 2ª decisão há $n-1$ possibilidades, pois são os objetos que ainda não foram escolhidos para fazer parte da permutação. E assim por diante, sempre diminuindo uma unidade de possibilidades para a próxima escolha, até que a última decisão seja escolher o último objeto da ordenação. Portanto, utilizando o PFC iterado, o número de ordenações desses n objetos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1.$$

Logo,

$$P_n = n!$$

□

A fórmula de contagem de permutações simples, portanto, será útil quando quisermos **contar ordenações de elementos distintos**. Professor e aluno poderão utilizá-la sempre que a situação problema quiser essa contagem. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de sua aplicação.

Exemplo 4.1. *Quantos são os anagramas da palavra ÔMEGA?*

Nesse exemplo, queremos contar anagramas de uma palavra que possui todas as suas letras distintas duas a duas, portanto queremos contar o número de permutações simples de 5 objetos distintos. De acordo com a proposição 4.1, essa quantidade é dada por:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Exemplo 4.2. *De quantos modos distintos Leonardo pode organizar suas 6 camisetas, 4 calças e 3 bermudas em ombreiras seguidas umas às outras de modo que as roupas de um mesmo tipo estejam lado a lado umas com as outras?*

Nessa questão podemos associar esses três tipos de roupas a 3 blocos distintos, que podemos organizar em ordens distintas. Portanto queremos a permutação simples de 3 objetos distintos, que é igual a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Porém para cada uma dessas ordens podemos permutar as camisas entre si, as calças entre si e as bermudas entre si. Recorrendo à proposição 4.1, temos que há $6! = 720$ formas de ordenar as camisetas, $4! = 24$ formas de ordenar as calças e $3! = 6$ formas de ordenar as bermudas.

Agora, podemos utilizar o PFC iterado para obter o resultado final da questão. Podemos definir as decisões da seguinte forma:

<u>1ª decisão</u>: escolher a ordem dos blocos de roupas;
<u>2ª decisão</u>: escolher a ordem das camisetas entre si;
<u>3ª decisão</u>: escolher a ordem das calças entre si;
<u>4ª decisão</u>: escolher a ordem das bermudas entre si.

Para as decisões definidas temos, respectivamente, 6 possibilidades, 720, 24 e 6. Portanto, o número de formas de organizar essas peças de roupas como desejado é igual a:

$$6 \cdot 720 \cdot 24 \cdot 6 = 622.080.$$

4.2 Arranjo simples

Definição 4.2 (Arranjo Simples)**.** *Um arranjo simples de n objetos distintos tomados p a p é uma ordenação de p desses n objetos.*

Por exemplo, se 10 competidores $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_9$ e c_{10} vão fazer uma corrida, podemos representar os 3 vencedores através de uma *3-upla*, em que o 1º colocado estará na 1ª coordenada, o 2º colocado na 2ª e o 3º colocado na 3ª. Cada *3-upla* desse tipo é um arranjo simples dos 10 competidores tomados 3 a 3. Assim, (c_2, c_3, c_4) é diferente de

(c_3, c_2, c_4), pois a primeira *3-upla* informa que o 1º colocado da corrida foi c_2, enquanto que a segunda informa que o 1º colocado foi c_4.

A quantidade de arranjos simples de n objetos tomados p a p será denotada por A_n^p, e calculada conforme a proposição seguinte.

Proposição 4.2 (Arranjo Simples)**.** *O número de arranjos simples de n objetos tomados p a p é:*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Demonstração. Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ queremos calcular a quantidade total de arranjos simples desses objetos tomados p a p.

Podemos resolver esse problema criando *p-uplas* com ajuda do PFC. Para isso, nossas decisões serão:

1ª decisão: escolher o objeto que ficará na 1ª posição da *p-upla*;
2ª decisão: escolher o objeto que ficará na 2ª posição da *p-upla*;
⋮ ⋮
nª decisão: escolher o objeto que ficará na $p^{\underline{a}}$ posição da *p-upla*.

Para a 1ª decisão há n possibilidades de escolha, uma vez que qualquer um dos n objetos pode ocupar o primeiro lugar. Para a 2ª decisão há $n-1$ possibilidades, pois são os objetos que ainda não foram escolhidos para fazer parte do arranjo. E assim por diante, sempre diminuindo uma unidade de possibilidades para a escolha seguinte, até que a p^{a} decisão seja escolher o último objeto da *p-upla*, havendo $n-p+1$ possibilidades. Portanto, utilizando o PFC iterado, o número de *p-uplas* desses n objetos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Logo,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

A fórmula de contagem de arranjos simples, portanto, será útil quando quisermos **contar ordenações de tamanho fixo de elementos distintos de um conjunto dado**. Em outras palavras, ela servirá para contar o número de *p-uplas* de coordenadas distintas de um conjunto de n elementos dado, onde $p < n$. Veremos alguns exemplos de sua aplicação a seguir.

Exemplo 4.3. *Em uma corrida, 8 participantes vão disputar o pódio. Quantos são os diferentes pódios possíveis de primeiro, segundo e terceiro lugar?*

Na situação dada, há 8 pessoas disputando o pódio. Observe que cada pódio pode ser representado através de uma *3-upla*, onde a primeira coordenada pode ser definida como o participante que obteve o primeiro lugar, a segunda coordenada como o participante que obteve o segundo lugar e a terceira coordenada como o participante que obteve o terceiro. Assim, estamos numa situação em que são dados 8 elementos distintos, que são os participantes da corrida, e queremos determinar o número de *3-uplas* de coordenadas distintas. Daí, essas configurações se caracterizam como arranjos simples, e podemos calcular a sua quantidade utilizando a proposição 4.2:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Logo há 336 pódios possíveis para essa corrida.

Exemplo 4.4. *O mapa de um país está dividido em 6 regiões. Se cada região deve ser pintada com uma cor distinta, dentre 9 possibilidades de cores, quantos mapas coloridos distintos podem ser criados?*

Definindo cada região desse país com uma ordem distinta, de 1 a 6, queremos contar o número de *6-uplas* nas quais a i-ésima coordenada corresponde à cor da i-ésima região. São dadas 9 opções de cores, e cada uma só pode aparecer, no máximo, uma vez num agrupamento. Portanto estamos numa situação em que queremos contar arranjos simples de 9 elementos tomados 6 a 6. A quantidade desses arranjos é:

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60.480.$$

Dessa forma, existem 60.480 possibilidades de pintura do mapa desse país conforme as condições dadas.

4.3 Combinação simples

Já vimos que o PFC nos ajuda a contar *n-uplas*, pois se baseia na tomada de decisões consecutivas. No entanto quando não queremos contar ordenações e sim agrupamentos com outras especificidades, qual tipo de técnica de contagem podemos utilizar para resolver nosso problema? O princípio multiplicativo ainda será útil nesses casos? É o que veremos a seguir.

Definição 4.3 (Combinação Simples)**.** *Uma combinação simples de n objetos distintos tomados p a p, é a escolha de p desses n objetos, sem repetir nenhuma escolha.*

Por exemplo, se tivermos de escolher 2 sobremesas entre sorvete, pudim, cheesecake, mousse e bolo, uma combinação simples dessas 5 sobremesas tomadas 2 a 2 seria cheesecake e pudim. Podemos representar essa combinação por {cheesecake, pudim} e não mais entre parênteses (cheesecake, pudim), como fizemos até agora, pois os parênteses indicam uma ordem entre esses elementos, enquanto que as chaves não. De fato, a escolha de cheesecake e pudim é a mesma de pudim e cheesecake.

Note que uma escolha {cheesecake, cheesecake} não é uma combinação simples, pois nela há repetição de escolha de um objeto.

A quantidade de combinações simples de n objetos tomados p a p será denotada por C_n^p, e calculada conforme a proposição seguinte.

Proposição 4.3 (Combinação Simples)**.** *O número de modos de escolher p objetos dentre n objetos distintos é:*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Demonstração. Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ queremos calcular a quantidade total de combinações simples desses objetos tomados p a p.

Podemos iniciar a resolução desse problema considerando arranjos simples desses n objetos tomados p a p. Dessa forma, temos o número de ordenações de p objetos distintos tomados dentre n objetos distintos.

Porém, ao dizermos que essa seria a resposta desejada, estaríamos contando repetidas vezes a mesma combinação simples. Por exemplo, a *p-upla* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{p-1}, a_p)$ é diferente de $(a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_{p-1}, a_p)$, porém elas representam uma única combinação simples. Ou seja, cada uma das combinações que desejamos está sendo contada mais vezes do que necessário. De modo mais exato, cada combinação simples está sendo contada um número igual ao número de permutações de seus elementos, dado por P_p. Portanto, temos que:

$$C_n^p \cdot P_p = A_n^p$$

Isolando C_n^p na equação acima, conseguimos a fórmula desejada:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \qquad \Rightarrow \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

□

A fórmula de contagem de combinações simples, portanto, será útil quando quisermos **escolher uma quantidade p de elementos distintos de um conjunto dado de n elementos distintos, com $p \leq n$.** Em outras palavras, ela contará o número de subconjuntos de tamanho p de um conjunto dado de tamanho n. Exibiremos alguns exemplos de sua aplicação a seguir.

Exemplo 4.5. *Dados 20 pontos no plano, três a três não colineares, quantos triângulos pode-se formar com vértices em três desses pontos?*

Estamos numa situação em que são dados 20 objetos distintos (os pontos) e queremos tomá-los 3 a 3, sem repetir nenhum deles. Cada escolha de 3 pontos corresponderá a um triângulo que queremos contar. Escolhas distintas geram triângulos distintos. E todos os triângulos podem ser representados por escolhas desses três pontos. Assim, a contagem que queremos é a da escolha de 3 objetos diferentes, dentre 20 objetos distintos, o que pode ser contado, segundo a proposição 4.3, por:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!\,3!} = \frac{20!}{17!\,3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1.140.$$

Exemplo 4.6. *Um campeonato é disputado por 14 clubes em rodadas de 7 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?*

Vamos resolver esse problema utilizando o PFC e a técnica de combinação simples. Primeiramente, vamos definir as decisões:

<u>1ª decisão</u>: escolher a dupla de times para o 1° jogo;
<u>2ª decisão</u>: escolher a dupla de times para o 2° jogo;
⋮ ⋮
<u>7ª decisão</u>: escolher a dupla de times para o 7° jogo.

Escolhidas essas decisões e ordens, o PFC contará *7-uplas* que representarão uma rodada em que os 14 times jogam com uma ordem específica para os jogos. Dessa forma, se aplicarmos o PFC ele contará todas as rodadas possíveis, porém, por contar configurações em que os mesmos times se enfrentam numa ordem distinta como configurações distintas, ele estará quantificando rodadas iguais como sendo diferentes, visto que a mudança de ordem das partidas, por si só, não geram novos tipos de rodadas. Por exemplo, a rodada representada por $(T_1 \times T_2, T_3 \times T_4, T_5 \times T_6, T_7 \times T_8, T_9 \times T_{10}, T_{11} \times T_{12}, T_{13} \times T_{14})$ será igual à que muda apenas a ordem das duas primeiras coordenadas: $(T_3 \times T_4, T_1 \times T_2, T_5 \times T_6, T_7 \times T_8, T_9 \times T_{10}, T_{11} \times T_{12}, T_{13} \times T_{14})$.

Portanto o PFC está contando as diversas rodadas além do necessário, especificamente de 7! modos repetidos, pois é o número de ordenações possíveis para os 7 jogos. Além disso, para a primeira decisão há C_{14}^2 modos de acontecê-la; para a segunda, C_{12}^2 modos, pois, já havendo escolhido 2 times para o primeiro jogo, sobram 12, dos quais queremos escolher mais uma dupla; e, assim por diante, até que para a sétima partida há C_2^2 modos. Assim, considerando S como o conjunto das rodadas distintas, temos a relação:

$$n(S) \cdot 7! = C_{14}^2 \cdot C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2,$$

E, portanto, o número desejado é:

$$n(S) = \frac{14!}{2!12!} \cdot \frac{12!}{2!10!} \cdot \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} \cdot \frac{1}{7!} = \frac{14!}{(2!)^7 \cdot 7!} = 135.135.$$

4.4 Permutação com repetição

Definição 4.4 (Permutação com repetição)**.** *Dada uma lista de n objetos, não todos distintos, uma permutação com repetição desses n objetos é uma ordenação deles.*

Por exemplo, dada a lista (N,A,T,A), as palavras formadas com essas quatro letras serão uma permutação com repetição, pois temos dois elementos iguais nessa lista, que é a vogal A. Suas permutações com repetição serão:

AANT	ANAT
AATN	ATAN
NAAT	ANTA
TAAN	ATNA
NTAA	NATA
TNAA	TANA

A quantidade de permutações com repetição de n objetos, dentre os quais um deles se repete m vezes, será denotada por P_n^m, e calculada conforme a proposição seguinte.

Proposição 4.4 (Permutação com repetição)**.** *O número de permutações com repetição de n objetos, dos quais um aparece m vezes é:*

$$P_n^m = \frac{n!}{m!}.$$

Demonstração. Consideremos que esses objetos são $a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_{n-m}$, onde os a_i são os objetos repetidos, $1 \leq i \leq m$. Para calcularmos a permutação desses n objetos, primeiramente, vamos considerar a permutação de todos eles como se fossem todos distintos. Sabemos que esse número é igual a P_n. Porém, para fazermos a contagem correta, precisamos perceber que uma permutação do tipo $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_{n-m})$ é igual a uma do tipo $(a_2, a_1, a_3, a_4, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_{n-m})$, ou seja, se trocarmos de lugar qualquer um desses elementos repetidos, obteremos a mesma permutação. Desse modo, P_n é uma contagem acima da desejada. Cada permutação está sendo contada um número de vezes igual ao número de permutações desses m objetos repetidos. Portanto temos:

$$P_n^m \cdot P_m = P_n \quad \Rightarrow \quad P_n^m = \frac{P_n}{P_m} = \frac{n!}{m!}$$

□

Para o exemplo anterior, calcularíamos a quantidade de permutações da palavra NATA por:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12.$$

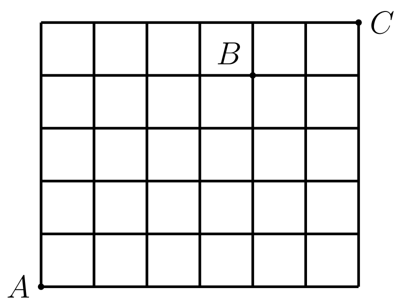
Quando, em uma lista de objetos, aparecem, não só um, mas dois ou mais objetos que se repetem, podemos aplicar o mesmo raciocínio para calcular as permutações desses objetos. Não vamos, porém, fazer essa demonstração aqui, por ser semelhante à anterior.

De todo modo, dada uma lista com n elementos, dos quais um aparece m_1 vezes, um segundo aparece m_2 vezes, e assim por diante, até um *p-ésimo* que aparece m_p vezes, uma permutação com repetição desses n objetos será denotada por $P_n^{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ e calculada por:

$$P_n^{m_1,m_2,\ldots,m_p} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ \ldots\ m_p!}.$$

Portanto a fórmula de contagem de permutações com repetição será útil quando quisermos **contar ordenações de elementos distintos dos quais um, ou mais, aparecem repetidamente**.

Exemplo 4.7. *A figura abaixo representa o mapa de uma cidade na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.*



a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto C?
b) Quantos desses trajetos passam por B?

Respostas:

a) Para ir do ponto A até o ponto C, utilizando o menor trajeto possível, por meio das avenidas dadas, só há possibilidade de seguir na direção leste (L) ou norte (N). Assim, alguém que se locomova de A a C terá de seguir 5 quarteirões no sentido N e 6 quarteirões no sentido L. Desse modo, um trajeto possível seria seguir sequencialmente LLLLLLNNNNN. Percebamos que podemos associar de modo biunívoco os outros trajetos aos anagramas desse trajeto dado.

Assim, queremos as permutações com repetição de 11 objetos nos quais 6 são iguais entre si e outros 5 são diferentes dos primeiros, mas iguais entre si. Utilizando a Proposição 4.4, essa contagem é dada por:

$$P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!5!} = 462.$$

b) Desses caminhos, queremos saber quantos passam por B. Podemos resolver esse problema definindo duas deciões:

1ª decisão: escolher um caminho de A até B;
2ª decisão: escolher um caminho de B a C.

Para cada caminho de A até B, existe o mesmo número de caminhos de B até C. Além disso, cada par ordenado assim definido é uma resposta para o nosso problema, pois a movimentação realizada segue exatamente essa ordem: um caminho de A até B, e então um de B até C.

O número de possibilidades para a primeira decisão é igual ao número de anagramas da palavra NNNNLLLL, conforme pensamento análogo ao item (a). Tal valor é:

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

E o número de possibilidades para a segunda decisão é igual ao número de anagramas da palavra NLL, que é igual a:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Por fim, aplicando o PFC, temos que o número de caminhos de comprimento mínimo de A até C que passam por B é $70 \cdot 3 = 210$.

Exemplo 4.8. *Quantos são os anagramas da palavra REMETENTE que não possuem duas letras E juntas?*

Vamos dispor das letras diferentes de E como no esquema abaixo:

$$\_R\_M\_T\_N\_T\_$$

Veja que existem 5 posições onde podemos colocar uma letra E, sem que duas delas fiquem juntas. Cada uma das configurações formadas seria uma palavra que queremos contar. E nenhuma outra palavra em que as letras restantes aparecem na sequência $RMTNT$ que queremos contar foge à forma de configuração que estamos criando.

Portanto, para criar os anagramas desejados, podemos utilizar o PFC definindo:

1ª decisão: escolher uma sequência para as letras $RMTNT$;
2ª decisão: escolher em quais das 6 posições colocaremos as 4 letras E.

Para a primeira decisão estamos querendo contar o número de permutações com repetição da palavra $RMTNT$. Esse número é igual a $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

Para a segunda decisão, queremos escolher 4 dentre 6 posições, o que podemos calcular por $C_{6,4} = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$.

Os pares ordenados criados (sequência das letras $RMTNT$, posições das letras E) determinarão uma contagem desejada. Não há dois pares ordenados gerando uma mesma configuração. E toda contagem desejada está sendo representada por algum dos pares ordenados. Por conseguinte podemos aplicar o PFC para obter nossa resposta:

$$60 \cdot 15 = 900.$$

Capítulo 5

A importância do uso de um modelo que simplifique a situação e possibilite o uso dos métodos já estudados

Ainda que uma pessoa conheça bem os métodos de contagem mais comuns, como o PFC, fórmulas de permutações com ou sem repetição, arranjos, combinações etc, nem sempre um problema de Análise Combinatória se apresenta de um modo simples de ser resolvido.

Às vezes, é necessário criar um modelo que possibilite associar a situação problema a uma forma de contagem conhecida, possibilitando, assim, a sua resolução. A respeito disso, veremos um problema logo a seguir e, depois, apresentaremos o método de contagem conhecido como combinação com repetição. Nesse sentido, podemos encontrar outros exemplos de métodos de contagem na referência [7], tais como os Lemas de Kaplansky e o Princípio da Reflexão, desenvolvidos a partir do uso do PFC.

Exemplo 5.1. *Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?*

Modelaremos a situação apresentada da seguinte forma: um dado pode ser associado a uma *6-upla* $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, onde a 1ª coordenada será o número que ficará na face superior do nosso dado; a 2ª coordenada será o número que vai ficar na face inferior; e as 3ª, 4ª, 5ª e 6ª coordenadas serão os números que ficarão na lateral do nosso dado, de modo que essa ordem representa a disposição no sentido anti-horário deles, e a 3ª coordenada é a face que se encontra voltada para frente, única visível entre as 4 laterais.

Imaginemos que temos a configuração $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Vamos investigar quais dados são iguais a esse. Vamos pensar no número 1 como referência. Se ele estiver na face 1, podemos girar o dado lateralmente, no sentido de 3 para 4. Podemos fazer até 3 giros, de modo que o dado apresente 4 configurações distintas, porém sendo um único dado.

Podemos girar esse mesmo dado de modo que o número 1 fique na face 2 e fazer novamente giros laterais de modo que vamos obter mais 4 configurações distintas, mas ainda sendo o mesmo dado.

Esse comportamento se repetirá para o número 1 em qualquer uma das 6 faces do dado, de modo que este apresente 4 configurações distintas com o número 1 em cada uma das seis faces, apesar de ser o mesmo dado. Desse modo, sendo 4 configurações para cada uma das 6 posições do número 1, temos 24 configurações distintas para o mesmo dado, e de nenhuma outra forma esse dado apresenta outra configuração, pois já foram feitos todos os giros possíveis.

Assim, cada dado distinto apresenta uma variação de 24 posições, o que faz com que uma configuração do tipo $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ se repita outras 23 vezes.

Temos que o total de configurações é de $6! = 720$, pois é a permutação de 6 elementos distintos. Como vimos, cada um dos dados aparece 24 vezes nessa contagem. Portanto, dividindo 720 por 24 encontramos o número total de dados distintos, que é 30.

Esse exemplo mostra a importância de sabermos modelar um problema de modo a conseguir representar configurações possíveis de serem contadas com as ferramentas já estudadas. A seguir, apresentaremos um método de contagem criado a partir de modelagens particularmente interessantes, a fim de percebermos como essa habilidade criativa é importante na área da Análise Combinatória.

5.1 Combinação com repetição (Combinação completa)

5.1.1 Problema e discussão Inicial

Exemplo 5.2. *De quantas formas Leonardo pode escolher 3 pizzas em um estabelecimento que as oferece em 5 sabores distintos?*

Nesta situação, queremos escolher 3 elementos de um conjunto que possui 5 elementos. Porém devemos notar que não estamos lidando com um caso de combinação simples, pois Leonardo poderia escolher 3 pizzas do mesmo sabor. Então, como responder a essa questão?

Consideremos:

$$x_i := \text{número de pizzas escolhidas do sabor } i, \text{ com } 1 \leq i \leq 5, \text{ onde } i, x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Assim, cada x_i pode variar de 0 a 3, porém a soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ deve ser igual a 3. Temos, então:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

de modo que cada solução inteira não negativa dessa equação representa uma solução para o nosso problema.

Fizemos uma modelagem matemática para a situação, mas agora a nossa pergunta se transformou em:

Qual é o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 3$*?*

Para respondê-la, vamos lançar mão de uma representação composta por bolas e traços, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 \\ \bullet & | & \bullet & | & & | & & | & \bullet \end{array}$$

Na representação acima, cada bola representa uma pizza, e os traços estão separando os tipos de pizzas escolhidas. Antes do primeiro traço estão as pizzas do primeiro sabor; entre o primeiro e o segundo traço estão as pizzas do segundo sabor; e, assim sucessivamente, até que após o último traço estão as pizzas do último sabor. Desse modo, a representação acima significa que Leonardo escolheu uma pizza do sabor 1, uma pizza do sabor 2, e uma pizza do sabor 5.

Cada representação desse tipo está associada a uma solução para a equação criada, não há duas representações que estejam associadas a uma mesma solução, e não existe uma solução que não seja representável dessa forma. Assim, podemos responder qual é o número de soluções inteiras não negativas da equação acima calculando o número de permutações das bolas e traços que estamos utilizando. Essa é, portanto, uma nova modelagem para o problema inicial. Calculando esse número de permutações teremos a solução desejada.

Para representar as possíveis soluções do problema estamos utilizando 4 traços e 3 bolas, logo o número de permutação desses elementos é:

$$P_{3+4}^{3,4} = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Portanto há 35 formas distintas de Leonardo escolher 3 pizzas dentre as 5 opções disponibilizadas.

Vejamos que utilizamos 2 modelagens para este problema, de modo que podemos perceber a importância desse artifício para tornar um problema capaz de ser resolvido por meio de ferramentas já conhecidas.

5.1.2 Definição e generalização

De modo geral, uma combinação com repetição é o número de modos de escolher p objetos, de um mesmo tipo ou não, dentre n tipos de objetos dados. Essa combinação é dita *combinação completa de classe* p *de* n *objetos*, e é representada por CR_n^p.

Podemos generalizar a forma de calcular uma combinação com repetição utilizando os mesmos tipos de modelagens utilizadas na discussão anterior. A situação geral pode ser escrita através da equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = p.$$

Essa equação pode ser vista como uma configuração de $n-1$ traços e p bolas, de modo que cada permutação desses elementos é uma solução para a equação. Portanto o número de combinações completas de classe p de n objetos é calculada por:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!}.$$

Podemos notar que $CR_n^p = C_{n-1+p}^p$.

Vejamos mais um exemplo de situação em que podemos utilizar a combinação com repetição.

Exemplo 5.3. *Dona Letícia levou a sua neta Carol ao shopping para escolher seu presente de aniversário. Ao chegar na loja, havia uma promoção na qual podia-se escolher 3 brinquedos dentre 4 opções: bonecos, ursinhos, bolas e blocos; podendo, inclusive, duas ou três escolhas serem de brinquedos do mesmo tipo. Sabendo que Carol decidiu por brinquedos dessa promoção, diga de quantas formas distintas ela poderá fazer a sua escolha.*

São dados 4 tipos de brinquedos e Carol precisa escolher 3 brinquedos, de um mesmo tipo ou não. Já que ela pode escolher brinquedos do mesmo tipo, estamos lidando com um caso de combinação com repetição. Por isso podemos utilizar a fórmula de resolução mencionada anteriormente. Nesse caso, temos uma combinação com repetição de classe 3 de 4 objetos. Assim, basta calcularmos:

$$CR_4^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Logo Carol pode fazer a sua escolha de 20 maneiras distintas.

5.1.3 Problemas resolvidos

A seguir, abordaremos a resolução de alguns tipos de problemas sobre o assunto de combinação com repetição.

Exemplo 5.4. *Quantas são as soluções inteiras não negativas da inequação* $x+y+z \leq 5$*?*

Já sabemos calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 5$, porém a este resultado precisamos somar a quantidade de soluções inteiras não negativas das equações $x + y + z$ igual a 4, igual a 3, a 2, a 1 e a 0. Poderíamos calcular cada um desses valores e depois somá-los, de modo que o nosso resultado seria:

$$CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0. \tag{5.1}$$

Mas vamos raciocinar um pouco diferente. Vamos mostrar que há uma correspondência biunívoca entre as soluções da inequação $a : x+y+z \leq 5$ e as da equação $b : x+y+z+w = 5$. A saber, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ é solução de a se, e somente se, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, 5 - \tilde{x} - \tilde{y} - \tilde{z})$ é solução de b.

De fato, as soluções de b em que $w = 0$ correspondem às de a em que a soma de $x + y + z$ é igual a 5, num total de CR_3^5, como já sabemos. As soluções de b em que $w = 1$ correspondem às soluções de a em que $x + y + z$ é igual a 4, num total de CR_3^4. E, assim por diante, até que a solução $(0, 0, 0, 5)$, em que $w = 5$, corresponde a $(0, 0, 0)$, em que $x + y + z$ é igual a 0, com quantidade CR_3^0. Assim, por um lado, o número de soluções de $x + y + z \leq 5$ é igual à soma (5.1) e, por outro lado, corresponde ao número de soluções da equação $x + y + z + w = 5$, que é igual a $CR_4^5 = C_8^5 = 56$.

Em particular, vale a relação:

$$CR_4^5 = CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0.$$

Exemplo 5.5. *Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 10$ para $x \geq 2, y \geq 1, z \geq 3$?*

Para resolver esse problema, podemos criar as equações $x = a+2$; $y = b+1$; e $z = c+3$; onde a, b e c são números naturais maiores do que ou iguais a zero.

Assim, a equação inicial se transforma em:

$$a + 2 + b + 1 + c + 3 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad a + b + c = 4,$$

onde $0 \leq a, b, c \leq 4$.

Assim, cada solução desta equação corresponde a uma única solução da equação inicial, e vice-versa, de modo que o número de soluções delas coincide. Portanto a resposta para este problema é:

$$CR_3^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Exemplo 5.6. *Quantas são as peças de um dominó cujos números variam de 0 a 9?*

Cada peça do dominó possui dois números, e cada número aparece tanto consigo mesmo, como com os outros números, uma única vez com cada um. No dominó em questão, diferente do usual, os números que aparecem variam de 0 a 9. Assim, podemos criar a seguinte equação para modelar a situação:

$$c : x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_9 = 2,$$

onde x_i é o número de vezes que o número i aparece em uma peça. Por exemplo, a peça $(2,7)$ corresponde à solução $(0,0,1,0,0,0,0,1,0,0)$ de c em que $x_2 = x_7 = 1$ e as demais são nulas.

Observamos que uma solução inteira não negativa dessa equação corresponde a uma peça do dominó, e que qualquer peça do dominó possui uma única solução correspondente nessa equação para expressá-la. Assim, o número de soluções inteiras não negativas dessa equação corresponde ao número de peças possíveis do dominó, que é:

$$CR_{10}^2 = \frac{11!}{2!9!} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55.$$

Exemplo 5.7. *Uma fábrica produz 7 tipos de confeitos que são vendidos em tiras com 5 em cada (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas tiras distintas podem ser formadas?*

Podem ser escolhidos quaisquer um dos 7 confeitos para compor a tira, e eles podem aparecer repetidamente. Estamos numa situação em que temos 7 objetos distintos e queremos escolher 5 dentre eles, distintos ou não, portanto estamos num caso típico de combinação com repetição de classe 5 de 7 objetos. Então a resposta para esse problema é:

$$CR_7^5 = \frac{11!}{5!6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 462.$$

5.1.4 Equivalência entre o número de soluções inteiras não negativas de uma equação e de uma inequação

Com base no exemplo 5.4, visto anteriormente, podemos propor que a inequação

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{n-2} + x_{n-1} \leq p \tag{5.1}$$

possui CR_n^p soluções inteiras não negativas, e:

$$CR_n^p = CR_{n-1}^p + CR_{n-1}^{p-1} + CR_{n-1}^{p-2} + \cdots + CR_{n-1}^1 + CR_{n-1}^0.$$

Vamos provar o que foi proposto. Por definição, o número de soluções inteiras não negativas dessa inequação é igual à soma das quantidades de soluções inteiras não negativas das equações:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots x_{n-2} + x_{n-1} &= p \\
x_1 + x_2 + \cdots x_{n-2} + x_{n-1} &= p-1 \\
&\vdots \\
x_1 + x_2 + \cdots x_{n-2} + x_{n-1} &= 1 \\
x_1 + x_2 + \cdots x_{n-2} + x_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que o número de soluções inteiras não negativas dessas equações são, respectivamente, CR_{n-1}^{p}, CR_{n-1}^{p-1}, ..., CR_{n-1}^{1}, CR_{n-1}^{0}. Logo a soma dessas quantidades é:

$$CR_{n-1}^{p} + CR_{n-1}^{p-1} + \cdots + CR_{n-1}^{1} + CR_{n-1}^{0}. \tag{5.2}$$

Agora, consideremos a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = p. \tag{5.3}$$

Vejamos que das soluções possíveis para essa equação o valor de x_n será igual a 0, 1, 2, ..., $p-1$ ou p. E, nesses casos, tem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= p \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= p-1 \\
&\vdots \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= 1 \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Daí, o número de soluções não negativas da equação 5.3 quando $x_n = 0$ é CR_{n-1}^{p}; quando $x_n = 1$ é CR_{n-1}^{p-1}; e, assim por diante, até que quando $x_n = p$ essa quantidade é igual a CR_{n-1}^{0}. Logo a soma desses valores coincide com a soma 5.2, donde concluímos que a quantidade de soluções não negativas da inequação 5.1 é igual à quantidade de soluções não negativas da equação 5.3. Esta, como sabemos, é igual a CR_{n}^{p}, assim:

$$CR_{n}^{p} = CR_{n-1}^{p} + CR_{n-1}^{p-1} + \cdots + CR_{n-1}^{1} + CR_{n-1}^{0},$$

como queríamos demonstrar.

Outra forma de demonstrar que as quantidades de soluções da inequação 5.1 e da equação 5.3 são as mesmas é a apresentada a seguir.

Sejam:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} \leq p\}, \\
B &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{N}^{n} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = p\}, \text{ e} \\
&f : A \to B, \text{tal que } f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que f é bijetiva, chegando à conclusão de que A e B possuem as mesmas quantidades de elementos.

De fato, f é injetiva, pois se $f(y) = f(z)$, com $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1})$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}) \in A$, temos

$$\begin{aligned}
(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, p - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})) &= (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, p - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1})) \\
\Rightarrow \quad (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}) &= (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}) \\
\Rightarrow \quad y &= z.
\end{aligned}$$

E f é sobrejetiva, pois dado $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n) \in B$, temos

$$\begin{aligned}
& w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} + w_n = p \\
\Rightarrow \quad & p - (w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1}) = w_n \quad \text{e} \quad w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} = p - w_n \leq p,
\end{aligned}$$

donde $x = (w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, w_{n-1}) \in A$ é tal que $f(x) = w$.

5.2 Outras formas de Contagem

Até agora, estudamos alguns problemas e técnicas comuns na área da Análise Combinatória do Ensino Básico, além de outras geralmente trabalhadas no ensino superior. No entanto existem outros tipos de problemas que são resolvidos por outras técnicas de contagem, tais como o Princípio da Inclusão-exclusão, as Permutações caóticas e o Princípio de Dirichlet. Sobre essas técnicas, recomendamos consultar [7].

Em especial, nesta seção queremos destacar um tipo de contagem que não utiliza o PFC e nem o tem como base. A seguir, resolveremos um problema de contagem por meio da recorrência. Para um maior aprofundamento deste assunto, recomendamos [8, p. 75].

5.2.1 Contagem por meio de recorrência

Exemplo 5.8. *Quantas são as 10-uplas de zeros e uns, tais que três coordenadas consecutivas não possuam números iguais?*

Observe que algumas listas contadas são $(0,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ e $(1,1,0,0,1,1,0,0,1,0)$. Mas não queremos incluir as listas $(0,0,0,1,1,0,0,1,1,0)$ e $(1,1,1,1,1,0,1,0,1,0)$ na contagem, pois possuem 3 ou mais coordenadas consecutivas com o mesmo número.

Trataremos esse problema de modo geral, definindo x_n como sendo o número de *n-uplas* de zeros e uns, tais que três coordenadas consecutivas não possuam números iguais.

Vejamos que as listas de tamanho $n+2$ que começam com números iguais são da forma $(0,0,\_,\_,...)$ ou $(1,1,\_,\_,...)$. Perceba que, no primeiro tipo citado, as coordenadas que faltam são *n-uplas* iniciando com o número 1, que possuem as características exigidas no problema. Assim, as listas de tamanho $n+2$ que começam com dois zeros estão em bijeção com as *n-uplas* que começam com o número 1. E, no segundo tipo citado, as coordenadas que faltam são *n-uplas* iniciando com o número 0, que também possuem as características exigidas no problema. Desse modo, as listas de tamanho $n+2$ que começam com dois uns estão em bijeção com as *n-uplas* que iniciam com o número 0. Portanto, concluímos que o total de listas de tamanho $n+2$ que começam com números iguais estão em bijeção com o total de *n-uplas* que possuem as características exigidas.

Além disso, as listas de tamanho $n+2$ que começam com números distintos são da forma $(0,1,\_,\_,...)$ ou $(1,0,\_,\_,...)$. Perceba que, no primeiro tipo citado, considerando as sequências de números a partir da 2ª coordenada, temos as listas de tamanho $n+1$ que iniciam com o número 1. Assim, as listas de tamanho $n+2$ que começam com $(0,1)$ estão em bijeção com as listas de tamanho $n+1$ que começam com o número 1. E no segundo tipo citado, considerando as sequências de números a partir da 2ª coordenada, temos as listas de tamanho $n+1$ que iniciam com o número 0. Assim, as listas de tamanho $n+2$ que começam com $(1,0)$ estão em bijeção com as listas de tamanho $n+1$ que começam com o número 0. Portanto, concluímos que o total de listas de tamanho $n+2$ que começam com números distintos estão em bijeção com o total de listas de tamanho $n+1$ que possuem as características desejadas no problema.

Ora, as listas de tamanho $n+2$ que possuem as características exigidas no problema iniciam com números iguais ou com números diferentes, e como as que iniciam com números iguais estão em bijeção com as *n-uplas* e as que iniciam com números distintos estão em bijeção com as listas de tamanho $n+1$, temos que o número de sequências de tamanho $n+2$ coincide com o número de sequências de tamanho n mais o número de sequências de tamanho $n+1$, de modo que:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

que é uma recorrência de segunda ordem, em que $x_1 = 2$, visto que só há duas sequências com 1 termo: (0) ou (1); e $x_2 = 4$, pois só há 4 sequências com a característica desejada: (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1).

Encontrada essa relação, podemos calcular quanto é x_{10}:

- $x_3 = x_2 + x_1 = 4 + 2 = 6$
- $x_4 = x_3 + x_2 = 6 + 4 = 10$
- $x_5 = x_4 + x_3 = 10 + 6 = 16$
- $x_6 = x_5 + x_4 = 16 + 10 = 26$
- $x_7 = x_6 + x_5 = 26 + 16 = 42$
- $x_8 = x_7 + x_6 = 42 + 26 = 68$
- $x_9 = x_8 + x_7 = 68 + 42 = 110$
- $x_{10} = x_9 + x_8 = 110 + 68 = 178$

Consequentemente, o número de *10-uplas* compostas por zeros e uns, tais que três coordenadas consecutivas não possuem números iguais é 178.

Apresentamos esse problema para mostrar que a Análise Combinatória não se resume ao PFC ou às técnicas dele derivadas, mas envolve outras formas de contagem.

Capítulo 6

Formas de analisar e atacar um problema de Combinatória

Já discutimos sobre os métodos de contagem e em quais situações cada um pode ser utilizado. Agora, queremos fornecer caminhos que podem auxiliar no enfrentamento de questões de Combinatória no sentido de interpretação, modelagem e métodos utilizados.

Nem todos os caminhos que exploraremos precisam ser utilizados nas questões, mas somente aquele, ou aqueles, que forem mais adequados à situação dada.

Sobre essas formas de resolução, recomendamos consultar os vídeos sobre Análise Combinatória das edições do PAPMEM, disponíveis no canal do YouTube do IMPA [5]. Nesses vídeos, é possível aprender diversas formas de enfrentar problemas de contagem utilizando as quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), como fala o Prof. Paulo César Carvalho em [10, 16min15s].

6.1 Fazendo esquemas gráficos

É bastante conveniente criarmos esquemas gráficos para resolvermos situações problemas de Análise Combinatória, pois, como já vimos, o PFC produz e conta *n-uplas*, as quais apresentam uma ideia de ordem. Assim, fazer esquemas gráficos em que cada elemento ocupa uma posição produz uma ideia adequada de que um lugar distinto do esquema representa uma coordenada distinta da *n-upla*.

Desse modo, é comum vermos representações gráficas como traços horizontais em sequência representando as decisões que serão tomadas. Acima deles, ficam representadas as escolhas possíveis, e abaixo a quantidade correspondente. A quantidade de *n-uplas* formadas com esse tipo de configuração é dado pela multiplicação das quantidades registradas. Vamos utilizar esse tipo de representação no exemplo a seguir.

Exemplo 6.1. *As placas de carro no Brasil recebem um código da seguinte forma: 3 letras, seguidas de um algarismo, uma letra e mais dois algarismos, totalizando 4 letras* *e 3 algarismos numa única placa. Por exemplo, o código ABC7D12 corresponde a uma placa possível. Quantas placas distintas podem existir considerando essa codificação com algarismos de 0 a 9 e letras de A a Z do alfabeto oficial da língua portuguesa?*

Uma representação gráfica para o problema é:

{A,...,Z}		{A,...,Z}		{A,...,Z}		{0,...,9}		{A,...,Z}		{0,...,9}		{0,...,9}
26	·	26	·	26	·	10	·	26	·	10	·	10

Fazendo a multiplicação indicada, a resposta para esse problema é $26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$.

6.2 Ordem das decisões: enfrentando dificuldades

Uma das recomendações do Prof. Augusto César Morgado na edição do PAPMEM de 2001 [9] é enfrentar o quanto antes as dificuldades encontradas em um problema de combinatória. Isso significa que quando temos algumas decisões a tomar, é recomendado escolher aquela que apresenta uma menor quantidade de possibilidades como sendo a primeira a ser tomada, e as outras como sendo as seguintes.

Vamos analisar os exemplos as seguir para entendermos melhor como essa forma de enfrentar um problema de combinatória pode ser muito últil.

Exemplo 6.2. *Quantos números pares de dois dígitos podem ser formados com os algarismos de 1 a 9 sem repetição?*

Temos duas decisões a tomar: escolher o algarismo das dezenas, e escolher o algarismos das unidades. Vamos resolver essa questão de duas maneiras diferentes para entendermos bem a importância de enfrentar as dificuldades o quanto antes.

Primeiramente, vamos escolher as decisões da seguinte forma:

1ª decisão: escolher um algarismo de 1 a 9 para as dezenas $= \{1, 2, ..., 9\}$;
2ª decisão: dentre os algarismos dados, escolher um que seja par para compor as unidades $= \{2, 4, 6, 8\}$.

Veja que não podemos aplicar o PFC diretamente, pois dependendo da escolha tomada na primeira decisão, haverá uma quantidade distinta de possibilidades para a segunda.

Se a primeira decisão for a escolha de algum dos algarismos 1,3,5,7 ou 9 (5 possibilidades), teremos os algarismos 2, 4, 6, ou 8 (4 possibilidades) para a segunda decisão, totalizando $5 \cdot 4 = 20$ números possíveis. Mas se a primeira decisão for um dos algarismos pares 2, 4, 6 ou 8 (4 possibilidades), teremos eles mesmos para a escolha da segunda decisão, com exceção do escolhido na primeira, fornecendo apenas 3 possibilidades de escolha, totalizando $4 \cdot 3 = 12$ números possíveis. A solução que buscamos é então a soma desses dois resultados $20 + 12 = 32$.

Veja que esse resultado poderia ter sido encontrado mais rapidamente considerando as decisões na seguinte ordem:

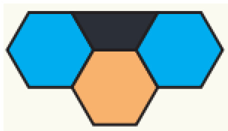
1ª decisão: dentre os algarismos dados, escolher um que seja par para compor as unidades $= \{2, 4, 6, 8\}$;
2ª decisão: escolher um algarismo de 1 a 9 para as dezenas, com exceção do algarismo x escolhido na 1ª decisão $= \{1, 2, ..., 9\} \backslash \{x\}$.

Aplicando o PFC, temos o resultado desejado $4 \cdot 8 = 32$. Portanto enfrentar logo as dificuldades encontradas pode ser um bom recurso para tornar a resolução de um exercício de contagem mais simples e rápida.

6.3 Dividindo em casos

Às vezes, antes de aplicar o PFC em uma questão, é necessário fazer uma divisão em casos, pois para uma determinada quantidade de elementos de uma decisão A há um número x de escolhas possíveis para a próxima decisão B, e para uma outra quantidade de elementos da decisão A há uma quantidade y de escolhas possíveis para a decisão B. Quando isso acontece, a quantidade total de possibilidades da tomada consecutiva das duas decisões é a soma dos resultados obtidos com a aplicação do PFC em cada caso. Vejamos isso nos exemplos a seguir:

Exemplo 6.3. *(Obmep 2021 - Nível 1) Maria pinta, em seu caderno, figuras formadas por trapézios e hexágonos. Cada hexágono pode ser pintado de azul, bege ou cinza, e cada trapézio, de azul ou preto. Polígonos com um lado em comum não podem ter a mesma cor. A figura ao lado é um exemplo de uma pintura feita por Maria. De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?*



Vamos chamar o trapézio que está abaixo-esquerda do hexágono de trapézio 1; o trapézio acima do hexágono de trapézio 2; e o outro de trapézio 3. Agora, consideremos nossas decisões como sendo:

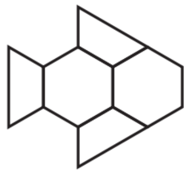
1ª decisão: escolher a cor do hexágono, ou seja, $A = \{$azul, beje, cinza$\}$;
2ª decisão: escolher a cor do trapézio 1, ou seja, $B = \{$azul, preto$\}$;
3ª decisão: escolher a cor do trapézio 2, ou seja, $C = \{$azul, preto$\}$;
4ª decisão: escolher a cor do trapézio 3, ou seja, $D = \{$azul, preto$\}$.

Observe que se a 1ª decisão for "azul", as próximas decisões não poderão ser "azul", sobrando apenas a opção de "preto"; enquanto que se a 1ª decisão for "beje" ou "cinza", a segunda decisão poderá ser "azul" ou "preto". Portanto, vamos dividir a situação em dois casos, aplicando o PFC em cada um.

1° caso (caso A_1): a cor do hexágono é azul;
2° caso (caso A_2): a cor do hexágono é beje ou cinza.

Para o primeiro caso, o número de formas de pintar a figura é $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. E, para o segundo, o número de formas de pintar a figura é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Somando as possibilidades em cada caso, o total é de $1 + 16 = 17$ maneiras de pintar a figura.

Exemplo 6.4. *De quantas maneiras Maria pode pintar a figura ao lado?*



Vamos chamar o hexágono do centro da figura de hexágono 1, e o hexágono à sua direita de hexágono 2. Chamaremos o trapézio à esquerda do hexágono 1 de trapézio 1, o de cima de trapézio 2, e o de baixo de trapézio 3. Agora, consideremos nossas decisões como sendo:

1ª decisão: escolher a cor do hexágono 1, ou seja, $A = \{$azul, beje, cinza$\}$;
2ª decisão: escolher a cor do hexágono 2, ou seja, $B = \{$azul, beje, cinza$\}$;
3ª decisão: escolher a cor do trapézio 1, ou seja, $C = \{$azul, preto$\}$;
4ª decisão: escolher a cor do trapézio 2, ou seja, $D = \{$azul, preto$\}$;
5ª decisão: escolher a cor do trapézio 3, ou seja, $E = \{$azul, preto$\}$.

Vamos dividir a decisão A em dois casos: o caso $A_1 = \{$azul$\}$ e o caso $A_2 = \{$beje, cinza$\}$.

Para o caso A_1, a 2ª decisão poderá ser $\{$beje, cinza$\}$, e as 3ª, 4ª e 5ª decisões só poderão ser $\{$preto$\}$. Logo, para este caso, a figura pode ser pintada de $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ formas.

Já para o caso A_2, podemos dividir a decisão B em dois casos: $B_1 = \{$azul$\}$ e $B_2 = \{$beje,cinza$\} \backslash \{$cor utilizada na decisão anterior$\}$.

Para o caso B_1, a 3ª decisão poderá ser $\{$azul, preto$\}$, mas a 4ª e a 5ª só poderão ser $\{$preto$\}$. Assim, nessas condições, haverá $n(A_2) \cdot n(B_1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ formas de pintar a figura.

E para o caso B_2, as 3ª, 4ª e 5ª decisões poderão ser $\{$azul, preto$\}$. Desse modo, haverá $n(A_2) \cdot n(B_2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ formas de pintar a figura.

Somando as possibilidades nos três casos considerados, temos um total de $2 + 4 + 16 = 22$ maneiras de pintar a figura.

6.4 Pensando de trás para frente

Exemplo 6.5. *No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra PERDÃO partindo de um P e indo sempre para a direita ou para baixo?*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & P \\
 & & & & P & E \\
 & & & P & E & R \\
 & & P & E & R & D \\
 & P & E & R & D & \tilde{A} \\
P & E & R & D & \tilde{A} & O
\end{array}$$

Vejamos que o número de modos de formar a palavra PERDÃO partindo de um P é igual ao número de modos de se chegar à letra O partindo de um P. Mas para se chegar à letra O, antes é preciso chegar à letra Ã. Para chegar a esta é necessário chegar, antes, à letra D. E assim sucessivamente até a letra P.

Portanto podemos responder a esta questão considerando as seguintes decisões:

1ª decisão: escolher a letra Ã à esquerda ou acima da letra O;
2ª decisão: escolher a letra D à esquerda ou acima da letra Ã;
3ª decisão: escolher a letra R à esquerda ou acima da letra D;
4ª decisão: escolher a letra E à esquerda ou acima da letra R;
5ª decisão:escolher a letra P à esquerda ou acima da letra E.

Para cada decisão há 2 possibilidades de escolha, logo, utilizando o PFC, o número de possibilidades de formar a palavra PERDÃO conforme as condições dadas é $2^5 = 32$.

6.5 Usando a criatividade de acordo com o contexto do problema

Exemplo 6.6. *Sucessivamente, n automóveis devem entrar numa rua que dá mão para um único lado e estacionar em n vagas existentes, uma em frente à outra. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado. Podendo o primeiro carro ocupar qualquer das vagas, quantas filas distintas podem ser formadas?*

Observemos que o número de modos de arrumar os n automóveis nas n vagas, nas condições do problema, é igual ao número de modos de arrumá-los fora das vagas e, a seguir, "encaixá-los" nas mesmas. Assim, tomando como referência o primeiro carro, temos para cada um dos próximos duas escolhas a serem tomadas, que serão estacionar à frente dos carros já estacionados ou atrás deles. Por isso, podemos definir nossas decisões como sendo:

1ª decisão: estacionar à frente ou atrás do 1º carro;
2ª decisão: estacionar à frente ou atrás do 2º carro;
⋮
(n-1)ª decisão: estacionar à frente ou atrás do (n-1)º carro.

Como são $n-1$ decisões, e para cada uma delas 2 escolhas possíveis, utilizando o PFC temos 2^{n-1} possibilidades de estacionar esses carros como desejado. Portanto 2^{n-1} filas distintas podem ser formadas por eles.

Uma forma de perceber a correspondência biunívoca entre a configuração final dos carros e as *(n-1)-uplas* que representam os estacionamentos dos carros que chegam após o primeiro é pensar nelas como sendo sequências de T ou F, significando trás ou frente, referente à escolha de estacionamento de cada um dos carros após o primeiro.

Caso pensássemos na 1ª decisão como sendo uma das vagas para o 1° carro, haveria n possibilidades de escolha, mas para as próximas decisões, as quantidades de possibilidades iriam variar de acordo com as escolhas tomadas anteriormente.

Vemos, assim, que utilizar um pensamento mais adequado ao contexto da situação e à possibilidade de aplicação do PFC de forma criativa é muito importante. Uma única ideia pode tornar um exercício aparentemente complicado em um mais simples de ser resolvido.

Capítulo 7

Como resolver e ter segurança na resposta dada a uma questão de Análise Combinatória

Tendo estudado os principais métodos de contagem da Análise Combinatória abordados no Ensino Básico brasileiro, sobretudo o Princípio Fundamental da Contagem e os métodos mais conhecidos dele derivados, e após termos discutido diversos exemplos e suas resoluções, podemos entender melhor o que fazer para resolver problemas dessa área, além de garantir uma maior segurança sobre a resposta encontrada. Por isso, neste capítulo, vamos tecer alguns comentários sobre as condições necessárias para esse enfrentamento e propor alguns passos para a resolução de um problema de Análise Combinatória do Ensino Básico com maior segurança por parte do aluno e do professor.

Seguir esses passos não significa que uma pessoa conseguirá resolver um problema de contagem, mas que ela terá mais segurança em saber se sua resposta é coerente ou não com o que é solicitado. Isso acontece porque outros elementos também são muito importantes na resolução de uma questão de Análise Combinatória, como por exemplo uma correta interpretação do problema e uma boa capacidade de modelar adequadamente a situação apresentada a uma linguagem matemática que possibilite sua resolução por meio das ferramentas de domínio próprias de quem está enfrentando-o. Outro motivo é que nem todos os problemas de contagem são resolvidos utilizando-se o PFC e as técnicas dele derivadas, enquanto que nossas orientações vão se limitar a tipos de problemas resolvidos por meio desses conhecimentos.

Antes de tudo, queremos destacar a importância de o estudante ter o conhecimento claro e correto dos métodos de contagem que estão sendo trabalhados em seu nível escolar para que consiga resolver um problema de Análise Combinatória com segurança. Caso isso não aconteça, será mais difícil enfrentar um problema e dar-lhe uma solução correta, bem como o aluno ficará inseguro quanto à sua resposta, pois não saberá bem o que está fazendo.

No geral, e segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, no Ensino Fundamental o único método de contagem trabalhado é o PFC. Porém no Ensino Médio são estudadas as permutações simples, os arranjos simples, as combinações e as permutações com repetição. Nesse sentido, o aluno deve saber que cada método serve para uma aplicação específica, e pode ser usado em situações bem definidas. Trataremos tais aplicações a seguir:

- **PFC:** conta *n-uplas* nas quais a *i-ésima* coordenada aloca a escolha tomada em uma *i-ésima* decisão, destacando-se o fato de que cada decisão possui um número fixo de escolhas possíveis a serem tomadas independentemente das escolhas feitas nas decisões anteriores.

- **Permutação Simples:** dado um conjunto com n elementos distintos, ele conta o número de permutações desses elementos, ou seja, o número de agrupamentos ordenados desses n elementos.

- **Permutação com repetição:** dado um conjunto com n elementos não todos distintos, ele conta o número de permutações desses n elementos, ou seja, o número de agrupamentos ordenados desses n elementos.

- **Arranjo Simples:** dado um conjunto com n elementos distintos, ele conta o número de arranjos de p elementos, isto é, o número de agrupamentos ordenados de p elementos distintos.

- **Combinação Simples:** dado um conjunto A com n elementos distintos, ele conta o número de subconjuntos de A que possuem p elementos.

Uma pessoa que veja essa lista, pode achar que a Análise Combinatória é uma área na qual é necessário decorar fórmulas e situações onde elas sejam aplicáveis e ser tentado a acreditar que não conseguirá compreender os conhecimentos nela trabalhados. Porém isso não é verdade. O caminho ideal a ser seguido pelo estudante é o do aprendizado e do conhecimento prático, e isso só se dá por meio do estudo e da prática na resolução de exercícios. O entendimento das técnicas de contagem e das situações onde são aplicadas é obtido com o tempo no trilhar desse caminho de estudos. Destacamos, porém, que, ainda que o aluno não tenha conhecimento de todas as técnicas e situações em que são aplicadas, existe o conhecimento mais importante dentre todos eles, que é o do Princípio Fundamental da Contagem. Se o estudante dominá-lo será capaz de resolver muitos exercícios, senão todos, que necessitem apenas do PFC ou das técnicas dele derivadas, mesmo que demore mais tempo do que uma pessoa que domine as outras técnicas.

Em posse desses conhecimentos, ao se deparar com uma questão de contagem, o aluno, ou o professor, pode seguir os passos abaixo:

- **Interpretação e identificação dos objetos a contar**

  Na primeira etapa do enfrentamento da questão, é feita a leitura do problema. Nela é preciso que o aluno compreenda corretamente o que a questão está pedindo. Nesse momento, é essencial que ele identifique que tipos de objetos se está querendo contar, e que tipos de configurações matemáticas podem representar esses objetos, como, por exemplo, *n-uplas* geradas por produto cartesiano de conjuntos, *n-uplas* com restrições específicas, agrupamentos não-ordenados, entre outros.

- **Análise de bijeção entre os tipos de configurações definidos e os objetos de contagem**

  Após o passo anterior, é importante que o aluno escreva algumas configurações e perceba se elas podem ser contadas além ou aquém do necessário de acordo com os métodos que ela conhece. Fazer árvores de possibilidades, tabelas e escrever *n-uplas* ou outros agrupamentos são formas de ajudar nessa análise. Para uma pessoa com maior experiência matemática, é recomendável até que ela faça testes para verificação da existência de bijeção entre as configurações identificadas e os objetos a serem contados, procurando ver se: uma configuração sempre corresponde a um objeto de contagem; duas configurações distintas representam contagens distintas; e, para cada objeto da contagem, existe uma configuração correspondente sendo considerada.

- **Utilização dos métodos de contagem para a quantificação das configurações**

  Finalmente, é necessário que o aluno analise se os métodos de contagem que ele conhece podem quantificar os tipos de configurações que precisam ser contadas. Possivelmente, haverá mais de um tipo de configuração a ser contada, além disso, é possível que mais de um método de contagem seja necessário para quantificar cada uma delas. Após essa análise, ele deve prosseguir com os cálculos.

Por fim, como dito neste capítulo, acreditamos que a insegurança ao resolver uma questão de Análise Combinatória pode ser superada por meio do correto conhecimento das técnicas básicas de contagem, da capacidade de analisar a sua própria resposta por meio da visualização e correspondência entre as configurações contadas e os objetos desejados nas questões e da prática de estudo e resolução de exercícios nessa área da Matemática.

Capítulo 8

Recurso Educacional: Proposta de atividades para o Ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental e Médio

Diante do que foi discutido em nosso trabalho, e acreditando que o Princípio Fundamental da Contagem precisa ser melhor compreendido por professores e estudantes, desenvolvemos as atividades presentes neste capítulo, o qual pode ser utilizado como um recurso educacional para o ensino da Análise Combinatória. Por meio dele, queremos fornecer situações de aprendizagem que contribuam para tornar claro o que o PFC produz e em quais situações pode ser utilizado. Os professores podem utilizar, reformular e, até mesmo, criar outras atividades que julgue necessárias para o bom entendimento do assunto, porém acreditamos que os principais pontos a serem explorados para um bom entendimento desse princípio estão contemplados nas atividades aqui presentes.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4, p. 279], documento que determina o que deve ser ensinado no Ensino Fundamental e Médio do Brasil, encontramos o assunto da contagem a partir do 1° ano. Neste nível, ele é visto de modo introdutório, como podemos ver nas especificações do documento:

Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidade
Números	Contagem de rotina; Contagem ascendente e descendente; e reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.

Porém é apenas no 4º ano que o assunto de contagem aborda a enumeração de combinações de elementos de dois conjuntos. Além deste ano escolar, a BNCC estabelece o estudo mais direto da Análise Combinatória no 5º e 8º ano do Ensino Fundamental, e no Ensino Médio.

A seguir, apresentaremos as atividades a serem aplicadas em sala de aula. Esperamos que elas contribuam para uma melhor compreensão da Análise Combinatória, fazendo vencer o medo que ainda paira sobre ela, e, ao contrário, estimulem os professores e alunos a conhecerem e se debruçarem sobre os diversos tipos de problemas presentes nessa área, muitas vezes bastante interessantes, compreensíveis e capazes de serem resolvidos.

8.1 Contagem para o 4º ano do Ensino Fundamental

No 4º ano do Ensino Fundamental, segundo a BNCC, o assunto de contagem a ser abordado é a enumeração de associações de elementos de dois conjuntos, como podemos ver no documento:

Nível	Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
4° ano	Números	Problemas de contagem	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

O documento orienta que os agrupamentos estudados sejam formados a partir da associação de cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção. Além disso, é interessante notar a indicação do uso de imagem e/ou material manipulável para tratar do assunto, o que é muito importante, sobretudo para os alunos da faixa etária em questão. Esses materiais ajudam os alunos a formarem os agrupamentos de modo visual, auxiliando na contagem e na percepção de todos as associações possíveis. A indicação do documento é que o registro por parte do aluno seja feito de modo pessoal.

Por isso queremos propor uma atividade em que os estudantes possam utilizar desenhos criados por eles mesmos para montar os agrupamentos desejados. Esse recurso os ajudará a visualizarem os agrupamentos, perceberem todos possíveis, e contá-los adequadamente.

É importante o professor auxiliar o aluno no momento de montar os agrupamentos e perceber as associações possíveis. Seu auxílio será necessário sobretudo para que o estudante aprenda a fazer as associações de modo organizado, associando um elemento de uma coleção com todos os elementos da outra coleção, e só depois passar para o próximo elemento do primeiro conjunto a fim de fazer novas associações. Essa organização é fundamental para que o aluno aprenda a fazer contagens claras e sistemáticas, contribuindo para a sua habilidade de contagem. Nesse sentido, a própria atividade proposta contribui para a organização, pois cada item solicita a associação de apenas um elemento de um conjunto com todos os outros elementos do outro conjunto.

A seguir, consta a atividade proposta para este ano escolar. Outras atividades semelhantes podem ser propostas pelo professor, caso ele ache necessário, podendo incluir a manipulação de materiais concretos, figuras, entre outros, como propõe a BNCC.

8.1.1 Plano de aula

Público-alvo

Alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados formados pela associação entre todos os elementos de duas coleções.

Habilidade

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Objetivos

- Criar agrupamentos ordenados a partir da associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro conjunto e contabilizar o total de agrupamentos;

- Desenvolver a capacidade de fazer associações de elementos de dois conjuntos de modo organizado e sistemático;

- Elaborar registros escritos próprios de associações de elementos de dois conjuntos.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;

- Quadro e pincel;

- Lápis grafite, borracha, lápis de cor, folha de ofício ou de caderno, tesoura e caderno escolar.

Metodologia

Primeiramente, o professor deve entregar a atividade proposta e apresentá-la. Ele precisará explicar a respeito dos desenhos, das associações entre eles e dos registros textuais, dando exemplos de como fazê-los.

Em seguida, ele poderá auxiliar os alunos na criação dos desenhos e das associações dos agrupamentos.

Por fim, ele deve encerrar o tempo de confecção e respostas, fazendo uma discussão com os alunos sobre quais foram os agrupamentos obtidos e a sua quantidade total. Ele ainda pode apresentar alguns exemplos de associações a partir dos desenhos feitos pelos alunos.

Avaliação

A avaliação será realizada por meio da atividade proposta a seguir. A expectativa é que os alunos consigam fazer as associações necessárias entre o conjunto de blusas e o de calças e fazer a contagem correta das associações possíveis, que é igual a 12.

Além disso, será avaliada a sua capacidade de registro pessoal das combinações por meio de textos, ou, porventura, diagramas ou tabelas.

8.1.2 Atividade para o 4º ano

Claudinha possui 4 blusas: uma amarela, uma branca, uma rosa e uma preta. E ela possui 3 calças: uma azul, uma caramelo e uma preta. Claudinha vai usar uma dessas calças e uma dessas blusas para se vestir.

a) Desenhe e pinte as calças e as blusas de Claudinha. Depois recorte cada peça de roupa.

b) Para a sua festa de aniversário Claudinha decidiu usar a calça azul. Monte as possíveis combinações de roupas de Claudinha, sabendo que ela pode usar qualquer uma das blusas, e escreva quais foram essas combinações.

c) Se Claudinha escolheu vestir a calça preta para a festa de aniversário de sua prima Rafaela, quais são as combinações de roupa que ela pode usar?

d) Sabendo que Claudinha escolheu a calça caramelo para passear no shopping, diga quantas são as combinações de roupa que ela pode montar com essa peça.

e) Quantas são todas as combinações de roupa que Claudinha pode utilizar com as peças que ela possui?

8.2 Princípio Fundamental da Contagem para o 5º ano do Ensino Fundamental

É no 5º ano que o Princípio Fundamental da Contagem é apresentado ao aluno. Assim como no ano anterior, os agrupamentos contados são formados a partir da associação de cada elemento de um conjunto a todos os elementos de outro. Tais conjuntos geralmente são disjuntos. Outro conhecimento acrescentado nessa etapa é o registro dos agrupamentos por meio de tabelas e diagramas de árvore, como podemos ver na BNCC:

Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
Números	Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

No 5º ano, o aluno entrará em contato com o Princípio Fundamental da Contagem. É importante que o professor o apresente com exemplos simples, capazes de tornar claro o porquê de ele utilizar uma multiplicação para as situações problemas. Para isso, ele pode utilizar tabelas e diagramas de árvore.

Com o intuito de que o aluno desenvolva essa percepção através de exercícios e utilize o PFC de modo consciente, desenvolvemos duas atividades. Elas possibilitam uma boa discussão a respeito desse princípio por meio das perguntas que são feitas, ajudando os alunos a serem capazes de identificar uma situação em que o princípio pode ser utilizado, aplicá-lo corretamente e elaborarem sua resposta de modo descritivo e organizado, em tabela ou árvore de possibilidades.

8.2.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas)

Público-alvo

Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados por meio de tabela e do Princípio Fundamental da Contagem.

Habilidade

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Objetivos

- Identificar situações de contagem onde possam ser definidas duas decisões;
- Definir duas decisões e uma ordem para elas numa situação de contagem;
- Relacionar as escolhas possíveis nas decisões definidas através de uma tabela;
- Fazer a contagem de agrupamentos formados pela associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro por meio de tabela e do PFC;
- Relacionar a contagem feita utilizando a tabela elaborada com a contagem realizada por meio do PFC.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

1ª aula

Na primeira aula, o professor deverá fazer uma explicação do assunto.

Primeiramente, por meio de um exemplo, o professor deve apresentar uma situação em que é necessário contar associações entre objetos de conjuntos distintos, como a escolha de uma vestimenta composta por calça e camiseta, de um lanche composto pela escolha de um sanduíche e de uma bebida, entre outros. O professor deverá apresentar essa associação por meio de uma tabela, e mostrar que a contagem pode ser feita enumerando as combinações ou por meio de uma multiplicação da quantidade de linhas pela quantidade de colunas da tabela.

Em seguida, o professor deve apresentar o Princípio Fundamental da Contagem por meio do exemplo tratado anteriormente. Ele deve associar a situação à tomada de duas decisões sucessivas e aplicar o PFC na resolução da questão. Devido à utilização de variáveis no enunciado, acreditamos que não é adequado apresentá-lo de modo formal, mas apenas por meio da situação problema.

É importante escrever os pares ordenados que estão sendo contados de acordo com a ordem definida das decisões, enfatizando essa relação. Depois disso, o professor deve apresentar mais um exemplo de aplicação do PFC sem ser necessário fazer a tabela.

2ª aula

Na segunda aula o professor deve executar a atividade com os alunos, e corrigi-la após um tempo determinado.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação, esforço e respostas. O professor deve estar atento se o estudante compreendeu e atingiu os objetivos propostos na aula sobre a compreensão dos fundamentos do PFC e da capacidade de elaboração de uma tabela com as características solicitadas.

8.2.2 Primeira atividade para o 5º ano

Luís vai fazer um lanche escolhendo uma tapioca recheada e um suco. Ele deve escolher apenas um dos quatro recheios disponíveis: queijo, frango, carne ou calabresa. E o suco *deverá ser de: acerola, cajá, goiaba, maracujá ou uva.*

a) Para fazer o seu lanche, Luís terá que tomar quantas decisões? Quais serão elas?

b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? E a segunda?

c) Faça uma tabela em que a primeira coluna contenha as escolhas possíveis da primeira decisão e a primeira linha contenha as escolhas possíveis da segunda. Em seguida, anote cada combinação possível de lanche no encontro das linhas com as colunas.

d) De acordo com a tabela formada, quantos lanches distintos Luís pode montar?

e) Qual conta podemos fazer para encontrar a resposta da questão anterior sem precisar enumerar um a um?

f) Calcule a quantidade de possibilidades de lanches utilizando o PFC e compare-a com o resultado obtido anteriormente.

8.2.3 Plano de aula da segunda atividade (2 aulas)

Público-alvo

Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados por meio de diagrama de árvore e do PFC.

Habilidade

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Objetivos

- Identificar situações de contagem onde possam ser definidas duas decisões e uma ordem para elas;
- Relacionar as escolhas possíveis nas decisões definidas através de um diagrama de árvores;
- Constatar que o número de escolhas para a segunda decisão definida independe da escolha feita na primeira decisão;
- Fazer a contagem de agrupamentos formados pela associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro por meio de uma árvore de possibilidades e do PFC;

- Relacionar a contagem feita utilizando a árvore de possibilidades elaborada com a contagem realizada por meio do PFC.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

1ª aula

Nesta aula, o professor deverá apresentar uma situação de contagem de agrupamentos ordenados formados pela associação dos elementos de um conjunto com todos os elementos de outro. A diferença entre essa aula e a primeira aula teórica é que ele ensinará a fazer um diagrama de árvore, ou seja, uma árvore de possibilidades, e relacionará esse diagrama com os agrupamentos formados a partir das decisões definidas.

O professor deve reiterar a importância da definição das duas decisões para a aplicação do PFC, da relação que essa ordem possui com a ordem dos elementos no agrupamento formado, e da constância do número de escolhas possíveis para a segunda decisão independentemente da escolha feita na primeira.

2ª aula

Esta aula consistirá na aplicação da atividade em anexo. O professor deve explicar a atividade, oferecer um tempo para que os estudantes respondam as questões e, posteriormente, corrigi-la. É importante que o professor pergunte a eles qual foi a ordem das decisões escolhida por cada um e desenvolver as duas respostas possíveis, de acordo com a ordem escolhida. Isso ajudará a perceber a relação entre a ordem das decisões e a ordem dos elementos no agrupamento formado.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação, esforço e respostas. O professor deve estar atento se o estudante compreendeu e atingiu os objetivos propostos na aula sobre a compreensão dos fundamentos do PFC e da capacidade de elaboração de um diagrama de árvore com as características solicitadas.

8.2.4 Segunda atividade para o 5º ano

Em um jogo eletrônico baseado na história de Mário Bros, o jogador deve escolher um tipo de Yoshi, dentre o verde, o amarelo, o vermelho e o azul, e um personagem para montá-lo, dentre Mário, Luigi, Princesa e Cogumelo.

a) Para escolher a dupla, o jogador terá que tomar quantas decisões? Quais serão elas?

b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? Após essa escolha, de quantas formas distintas a segunda decisão pode ser tomada?

c) O número de escolhas possíveis para a segunda decisão depende da escolha feita na primeira?

d) Utilizando o PFC responda quantas duplas podem ser formadas com os personagens indicados no enunciado.

e) Faça uma árvore de possibilidades para registrar todas as duplas possíveis do jogo. Esse número foi igual ao obtido no item (d)? Por quê?

8.3 Princípio Fundamental da Contagem para o 8º ano do Ensino Fundamental

O documento da BNCC determina que o assunto da contagem seja visto uma última vez no Ensino Fundamental no 8º ano. Nessa etapa, deve-se trabalhar novamente o PFC aplicado em situações problemas, utilizando-o também de modo específico para a construção e enumeração de agrupamentos de um espaço amostral associado a uma situação em que se quer calcular a probabilidade de um evento.

Unidade Temática	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
Números	O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Probabilidade e estatística	Princípio multiplicativo da contagem e soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Nessa etapa escolar, a BNCC não restringe a utilização do PFC a situações de associações de cada elemento de uma coleção a todos os elementos da outra. Por isso, nela é possível abordar situações em que nem todos os elementos da segunda coleção são associados com cada um dos elementos da primeira. É o caso de questões como "Encontre a quantidade de pódios (1° e 2° colocados) possíveis entre 8 corredores.", ou "Com 6 cores disponíveis, de quantas formas pode-se pintar uma bandeira formada por 2 listras, sem que elas possuam a mesma cor?". Problemas como esses são muito importantes para a expansão do entendimento do PFC, pois através deles os alunos podem observar que para utilizar esse princípio não é necessário que os elementos do primeiro conjunto sejam associados com todos os elementos do segundo conjunto, mas apenas que as quantidades de associações de cada um deles com os elementos do segundo sejam iguais. Para entender bem situações como essas vale à pena utilizar registros em tabelas, árvores de possibilidades ou *n-uplas*.

A BNCC também não restringe o uso do PFC a situações de associação de elementos de apenas dois conjuntos. Por isso, neste etapa, pode-se trabalhar, por exemplo, com problemas que envolvem permutações simples, ou arranjos, envolvendo mais de dois elementos, como em questões sobre filas, anagramas, pintura de bandeiras listradas, etc.

Portanto, neste ano escolar, o PFC é utilizado para calcular a quantidade de agrupamentos ordenados formados pela associação dos elementos de dois ou mais conjuntos consecutivos, de modo que um seja o primeiro e outro seja o último, e que todos os elementos de qualquer conjunto estejam associados, numa mesma quantidade, com os elementos do conjunto seguinte, o que pode variar de 1 até o número total de elementos deste. As restrições das associações de cada elemento de um conjunto com os elementos do conjunto seguinte são dadas em cada situação problema, e deve ser interpretada de modo adequado para uma utilização do PFC de modo correto para o resultado esperado.

Assim, nesta etapa dos estudos, é importante trabalhar situações onde o PFC será utilizado para fazer a contagem de agrupamentos ordenados contendo dois ou mais elementos. Por isso inserimos atividades que trabalham a associação entre dois ou mais conjuntos, ou, equivalentemente, em que sejam necessárias as tomadas de duas ou mais decisões consecutivas, diferentemente dos anos anteriores, nos quais as questões propunham apenas situações da tomada de duas decisões.

Além disso, as atividades buscam provocar no estudante o entendimento de que para o PFC ser utilizado é necessário que as quantidades de escolhas possíveis de uma decisão sejam independentes das escolhas feitas nas decisões anteriores, ao invés da exigência de que as decisões sejam independentes entre si. O professor deve discutir bem esse ponto, podendo, inclusive, apresentar exemplos em que essa propriedade não aconteça e o PFC não possa ser utilizado.

8.3.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas)

Público-alvo

Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados através de diagrama de árvore e do Princípio Fundamental da Contagem.

Habilidade

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Objetivos

- Conseguir definir duas decisões e uma ordem para elas numa situação de contagem;
- Entender que para o PFC ser utilizado numa situação de contagem é necessário que, na tomada de cada decisão, o número de escolhas possíveis seja independente das escolhas feitas nas decisões anteriores;
- Ententer que duas ou mais decisões serem dependentes numa situação de contagem não é critério para impedir a aplicação do PFC;

- Formar e contar agrupamentos relacionados com a tomada de duas decisões consecutivas numa situação de contagem através do PFC e de um diagrama de árvore;

- Relacionar a contagem dos agrupamentos feita através da árvore de possibilidades com a contagem feita por meio do PFC.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;

- Quadro e pincel;

- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

1ª aula

A primeira aula será teórica com o intuito de apresentar o Princípio Fundamental da Contagem como ferramenta capaz de auxiliar na contagem de agrupamentos ordenados criados a partir de uma associação específica de elementos de determinados conjuntos. É interessante que o professor aborde todos os pontos fundamentais nessa explicação: a necessidade de definir decisões sucessivas, o tipo de objeto que o PFC contará a partir dessa definição, a necessidade de o número de escolhas possíveis de cada decisão ser independente das escolhas feitas anteriormente e o cálculo a ser seguido.

Recomendamos que o enunciado utilizado seja o encontrado no Livro *Temas e Problemas Elementares*, de autoria do Prof. Elon Lages Lima e outros professores [6, p. 130], que consta a seguir:

"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \cdot q$."

Utilizando esse enunciado, o professor deve mostrar a sua aplicação em diferentes exemplos. Como dissemos, é importante ele explicar que o número de escolhas possíveis de cada decisão deve ser independente das escolhas feitas nas decisões anteriores, porém também é necessário ele destacar que as decisões não precisam ser independentes, ou seja, as possibilidades disponíveis em cada decisão podem variar de acordo com as escolhas consideradas nas decisões anteriores.

2ª aula

Após esse momento teórico, o professor aplicará as atividades propostas, discutindo-as como sugerido.

É interessante permititr e incentivar que os alunos trabalhem em duplas ou grupos maiores, a fim de promover a colaboração mútua e a capacidade de resolução de problemas por meio da argumentação e troca de ideias.

Após a realização da atividade, o professor deve corrigi-las no quadro, solicitando que os grupos apresentem as suas respostas e fazendo as observações necessárias para o entendimento de todos os pontos teóricos destacados anteriormente.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

8.3.2 Primeira atividade para o 8º ano

A bandeira de um time de futebol será criada para representá-lo. Ela será formada por duas listras verticais com cores distintas. Os torcedores estão decidindo quais cores terão cada listra, mas querem que elas sejam escolhidas entre as cores: azul, branco, cinza, laranja, verde e marrom.

a) Se a primeira listra for da cor azul, quais serão as cores possíveis para a segunda listra?

b) E se a primeira listra for da cor branca, quais serão as cores possíveis para a segunda listra?

c) As cores possíveis para a segunda listra dependem da utilizada na listra anterior? E a quantidade de cores possíveis para a segunda listra depende da escolha feita na listra anterior?

d) Faça uma árvore de possibilidades para representar as possíveis cores da bandeira de acordo com a situação apresentada.

e) Quantas são as bandeiras possíveis de serem confeccionadas de acordo com a preferência dos torcedores? Qual conta pode ser feita para encontrar esse resultado?

f) O PFC pode ser utilizado nessa situação? Por quê?

8.3.3 Plano de aula da segunda atividade

Público-alvo

Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados com mais de dois elementos por meio do Princípio Fundamental da Contagem.

Habilidade

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Objetivos

- Definir três decisões sucessivas para a aplicação do PFC numa situação de contagem;
- Representar e contar agrupamentos ordenados relacionados com a tomada de mais de duas decisões consecutivas numa situação de contagem através de *3-uplas* e do PFC;
- Compreender que, numa situação possível de aplicação do PFC, as escolhas possíveis para uma determinada decisão podem variar de acordo com as escolhas feitas nas decisões anteriores;
- Entender que para o PFC ser utilizado numa situação de contagem é necessário que, na tomada de cada decisão, o número de escolhas possíveis seja independente das escolhas feitas nas decisões anteriores.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

Após a aplicação e correção da atividade anterior, o professor deve aplicar a atividade a seguir. Ela é semelhante à anterior quanto aos seus objetivos, a forma de aplicação e os pontos a serem explorados, porém ela também permite a discussão sobre a possibilidade de o PFC ser aplicado em situações onde podem ser definidas 3 decisões. Além disso, o professor pode explorar o registro dos agrupamentos por meio de *3-uplas*.

Portanto, o professor pode seguir a metodologia da atividade anterior, propondo um momento de respostas e discussão em grupo e, posteriormente, uma apresentação, debate sobre as respostas e possíveis correções e observações importantes por parte do professor.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

8.3.4 Segunda atividade para o 8º ano

Amélia, Bruna, Camilo, Denilson e Eduardo trabalham no mesmo setor de uma empresa de carros. Um deles será escolhido para ser o responsável pelo atendimento via telefone ou redes sociais, outro para ser o vendedor presencial e outro para ser o caixa.

a) Para montar esse trio, quantas decisões deverão ser tomadas? Quais serão elas?

b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? Após realizada essa escolha, de quantas formas distintas a segunda decisão pode ser tomada? E, depois dessas escolhas feitas, de quantos modos a terceira decisão poderá ser tomada?

c) O número de escolhas possíveis para a segunda decisão depende da escolha feita na primeira? E o número de escolhas possíveis para a terceira, depende daquelas feitas anteriormente?

d) Utilizando o PFC responda quantos trios (atendente, vendedor, caixa) podem ser formados com as pessoas indicadas no enunciado.

e) Quantos desses trios possuem uma mulher como atendente? Responda utilizando o PFC e depois escreva quais são esses trios.

8.4 Princípio Fundamental da Contagem para o Ensino Médio

Até o Ensino Fundamental, o PFC é utilizado para contar agrupamentos ordenados, que são as *n-uplas*, sobretudo pares ordenados no 4º e 5º ano. Contudo a BNCC decreta que no Ensino Médio a contagem seja trabalhada também com agrupamentos não ordenáveis, como podemos ver:

Competência específica	Habilidades
3	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
	(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Assim, os assuntos da Análise Combinatória para o Ensino Médio são os mesmos dos anos anteriores, com a diferença de que neste nível escolar a contagem de agrupamentos não ordenados é incluída. Portanto é nesse nível escolar que se deve estudar o assunto de combinação simples. Contudo antes de abordar esse assunto, é extremamente importante que o professor proponha atividades que trabalhem os conteúdos anteriores, revisando, sobretudo, o PFC.

A competência específica 3 para o Ensino Médio que aparece é: utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. A própria Análise Combinatório é uma área em que essas competências podem ser trabalhadas ricamente, caso seja conduzida adequadamente, com o entendimento e exploração devida, como temos orientado até agora nas atividades propostas.

Assim, a primeira atividade a ser utilizada pelo professor com seus alunos pode ser uma que revise o PFC e o registro de agrupamentos ordenáveis por meio de uma tabela. A segunda pode ser uma que revise o PFC iterado e o registro de agrupamentos ordenáveis por meio de uma árvore de possibilidades. Além dessas, propomos a aplicação de mais duas atividades com o intuito de preparar o aluno para entender o método de contagem das combinações simples.

É importante que o professor explore bem as atividades, ajudando o aluno a perceber como utilizar o PFC nos casos ordenados e a sua dupla aplicação nos casos de agrupamentos não ordenados. Após a realização delas, o aluno estará mais preparado para entender a técnica de combinações simples, momento em que o professor poderá mostrar a relação entre a fórmula associada a esta técnica com a forma de resolução utilizando o PFC.

As duas primeiras atividades podem ser semelhantes àquelas propostas anteriormente, elaboradas para o 8º ano. Por isso vamos apresentar apenas mais duas focadas na contagem de agrupamentos não ordenados por meio do PFC associado à análise das *n-uplas* formadas na definição das decisões sucessivas e contadas por esse princípio. Após a realização destas, o professor pode direcionar o seu trabalho e criar outras atividades no sentido de ensinar e aplicar a técnica de combinações simples para a obtenção de respostas de modo direto em situações problemas específicas.

8.4.1 Plano de aula da terceira atividade

Público-alvo

Alunos do Ensino Médio.

Assunto

Contagem de agrupamentos não ordenados utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

Habilidade

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Objetivos

- Analisar uma situação problema de contagem e procurar identificar qual tipo de objeto a ser contado fornece uma resposta adequada;
- Entender que o PFC calcula a quantidade de agrupamentos ordenados cujos elementos pertencem a conjuntos relacionados com as decisões sucessivas definidas, e que, caso queira-se calcular a quantidade de agrupamentos não ordenados numa determinada situação, ele não fornece a resposta de modo direto;
- Utilizar o PFC e análise de *n-uplas* para calcular agrupamentos não ordenados na resolução de um problema de contagem.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

Antes da aplicação da atividade, nas aulas anteriores, o professor já deve ter explorado de modo detalhado o Princípio Fundamental da Contagem, de modo que o aluno saiba que tipo de objetos ele conta. Portanto esta atividade será muito importante para ele verificar e aprimorar esse conhecimento nos alunos.

A atividade deve ser aplicada em sala, e, mais uma vez, sugerimos a realização dela em grupos, para que os alunos possam discuti-la entre si, compartilhando ideias e resoluções uns com os outros.

Após a aplicação, o professor deve corrigi-la no quadro, buscando ajudar os estudantes a atingirem os objetivos traçados no plano de aula. É fundamental que o professor verifique, durante as discussões em grupo e no momento da correção, se eles compreenderam corretamente o tipo de objeto que o PFC conta. Eles devem entender que esse objeto depende das definições dadas às decisões e à ordem escolhida entre elas.

Outro ponto importante que o professor deve explorar é sobre a possibilidade de, antes de resolver um problema de combinatória, analisar que tipo de objetos devem ser contados para resolvê-lo, se grupos ordenados ou não ordenados, buscando até mesmo escrever alguns deles em forma de *n-uplas* para uma melhor percepção. Com essa análise, o aluno poderá perceber se a aplicação do PFC pode resolver ou não o problema de modo direto. No caso do item (b), o PFC não resolve diretamente o problema. O momento da correção será essencial para o professor ensinar de modo detalhado como fazer essa análise.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

8.4.2 Terceira atividade para o Ensino Médio

Joana possui 5 livros que ela gosta muito. Em suas férias ela vai ler dois deles, um na sua primeira semana de férias e outro na última semana.

a) De quantas formas distintas Joana pode fazer isso?

b) Sabendo que Joana vai viajar e levará apenas os dois livros que ela quiser ler, diga de quantas formas distintas ela pode fazer a escolha desses livros.

8.4.3 Plano de aula da quarta atividade

Público-alvo

Alunos do Ensino Médio.

Assunto

Contagem de agrupamentos não ordenados utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

Objetivos

- Analisar uma situação problema de contagem e procurar identificar qual tipo de objeto a ser contado fornece uma resposta adequada;
- Entender que o PFC calcula a quantidade de agrupamentos ordenados cujos elementos pertencem a conjuntos relacionados com as decisões sucessivas definidas, e que, caso queira-se calcular a quantidade de agrupamentos não ordenados numa determinada situação, ele não fornece a resposta de modo direto;
- Utilizar o PFC e análise de *n-uplas* para calcular agrupamentos não ordenados na resolução de um problema de contagem;
- Realizar e relacionar diferentes formas de contagem, como árvore de possibilidades, PFC e contagem de *n-uplas*, na resolução de um problema de contagem;
- Entender que cada maneira de escolha das decisões definidas num probelma de contagem dá origem a um objeto contado pelo PFC, mas que nem sempre os objetos que se quer contar num problema corresponde a uma única maneira de fazer a escolha nas decisões definidas.

Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

Metodologia

Essa atividade pode ser aplicada como a anterior. Seus objetivos são semelhantes, porém ela trata de uma situação de contagem em que são definidas três decisões consecutivas, proporcionando uma ampliação da aplicação do PFC e da percepção dos objetos formados e contados por ele. Nesse momento, o conceito de *n-upla* será trabalhado novamente, buscando contribuir com os abjetivos almejados.

Assim, após a aplicação da atividade em grupo, o professor deve proceder com a sua correção e discussão. Um ponto a ser destacado, que contribui para uma maior segurança do aluno ao resolver uma questão de Análise Combinatória, além do conhecimento adequado sobre a aplicação do PFC, é a análise e reflexão sobre a correspondência entre os objetos definidos através das decisões e os desejados pelo problema. Por isso enfatizamos a importância de o professor comentar e fazer uma boa análise com os alunos sobre as *n-uplas* formadas e os objetos desejados, pois é necessário que cada maneira de escolha das decisões definidas dê origem a um objeto contado pelo PFC, e que cada objeto que se quer contar corresponda a uma única maneira de fazer a escolha nas decisões definidas. Se isso não ocorrer, é necessário fazer uma correção da contagem produzida pelo PFC. Esse aspectro deve ficar claro após a correção da atividade.

Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

8.4.4 Quarta atividade para o Ensino Médio

Na feira de ciências da escola de Marieta, haverá uma premiação para a equipe que apresentar o melhor trabalho. A comissão que escolherá a vencedora será formada por 3 professores, a partir de um sorteio. Sabendo que na escola há 10 professores, responda às questões abaixo:

a) Supondo que o primeiro professor sorteado tenha um peso maior na escolha da vencedora, o segundo tenha um peso mediano, e o terceiro tenha o menor peso, diga quantas comissões distintas podem ser formadas.

b) Ainda no contexto do item (a), diga quantas comissões distintas podem ser formadas com os professores Alessandra, Bruno e Carla. Responda utilizando o PFC, uma árvore de possibilidades e 3-uplas.

c) Agora, supondo que os professores sorteados possuem o mesmo poder de escolha da equipe vencedora, diga quantas comissões podem ser formadas.

d) Ainda no contexto do item (c), diga quantas comissões distintas podem ser formadas com os professores Alessandra, Bruno e Carla.

Considerações finais

Este trabalho não esgota o estudo sobre o bom entendimento e aplicações do Princípio Fundamental da Contagem e as técnicas dele derivadas, pelo contrário, inicia e expande possibilidades de pesquisas e trabalhos futuros, que podem se dedicar mais profundamente a alguns pontos abordados aqui, como, por exemplo, alguns que busquem responder às perguntas:

- Existem outras formas de formalizar o PFC? Quais?
- Como verificar se existe uma relação bijetiva entre os objetos que devem ser contados num problema de contagem e as configurações produzidas pelos métodos escolhidos para resolvê-lo? Como isso poderia ser tratado no Ensino Básico a fim de contribuir com uma maior segurança na resolução dos problemas dessa área?
- O ensino da Análise Combinatória, sobretudo no que tange ao Princípio Fundamental da Contagem, precisa ser revisto e tratado com mais cuidado no Ensino Básico brasileiro, inclusive nos livros didáticos?
- Quais outros aspectos são importantes no entendimento do PFC e dos outros métodos de contagem?
- Quais tipos de atividades são importantes para um melhor aprendizado da Análise Combinatória no Ensino Básico? Atividades tratando sobre *n-uplas*, árvores de possibilidades, quadros etc, seriam úteis para um melhor aprendizado e segurança na resolução de problemas?

Enfim, essas são apenas algumas sugestões.

Por fim, após a realização deste trabalho, acreditamos na importância de um melhor ensino e aprendizado a respeito do Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Básico brasileiro. Seu enunciado precisa ser apresentado de maneira correta e clara aos estudantes, e deve ser explorado com os detalhes que ele merece, destacando suas partes mais importantes e seus significados. Isso servirá não só para entendê-lo e utilizá-lo de maneira correta, como também poderá ajudar no entendimento dos outros métodos de contagem dele derivados, contribuindo assim para diminuir a insegurança que tantos alunos e professores possuem nessa área tão bela da Matemática que é a Análise Combinatória.

Referências Bibliográficas

[1] BEDUKA. *O que é Princípio Fundamental da Contagem? Entenda essa importante ferramenta da Análise Combinatória + o que é fatorial!*. Disponível em: <https://beduka.com/blog/materias/matematica/principio-fundamental-da-contagem/>. Acesso em: 07 maio 2023.

[2] BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] BRASIL ESCOLA. *Princípio fundamental da contagem*. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm>. Acesso em: 07 maio 2023.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2024.

[5] Canal do YouTube do IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. YouTube, 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/@impabr>. Acesso em: 21 abr. 2024.

[6] LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *Temas e Problemas Elementares: Coleção do Professor de Matemática*. - 12. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] MORGADO, A.; CARVALHO, J.; CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. - 9. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[8] MORGADO, A.; CARVALHO, P. *Matemática Discreta*. - 3. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2022.

[9] PAPMEM - Janeiro de 2001 - Combinatória I. Professor: Augusto César Morgado. YouTube, 4 de maio de 2018. 50min18s. Publicado pelo canal do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qynbe_0PoCM&list=PLo4jXE-LdDTSSw6vQCprrrBBmFNaiY_hG&index=8>. Acesso em: 21 abr. 2024.

[10] PAPMEM - Janeiro de 2014 - Combinatória I. Professor: Paulo César Pinto Carvalho. YouTube, 20 de fevereiro de 2015. 1h11min14s. Publicado pelo canal do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RNp6O-MOQRs&list=PL7xBWOZkuzkk-bHqJL0rpaCj0rp0K7ULs&index=2>. Acesso em: 21 abr. 2024.

[11] SABER MATEMÁTICA. *Princípio Fundamental da Contagem*. Disponível em: <https://sabermatematica.com.br/principio-fundamental-da-contagem-pfc.html>. Acesso em: 07 maio 2023.

[12] TODA MATÉRIA. *Princípio fundamental da contagem*. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/principio-fundamental-da-contagem/>. Acesso em: 07 maio 2023.