Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus São Paulo
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Uma introdução à teoria das séries divergentes: conectando conceitos da graduação com tópicos do ensino médio para a formação de professores

Arilson Monteiro dos Santos

São Paulo - SP

2024

Arilson Monteiro dos Santos

Uma introdução à teoria das séries divergentes: conectando conceitos da graduação com tópicos do ensino médio para a formação de professores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus São Paulo

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta

São Paulo - SP

2024

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s237i Santos, Arilson Monteiro dos
Uma introdução à teoria das séries divergentes: conectando conceitos da graduação com tópicos do ensino médio para a formação de professores / Arilson Monteiro dos Santos. São Paulo: [s.n.], 2024.
134 f.

Orientadora: Valéria Ostete Jannis Luchetta

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2024.

1. Euler. 2. Séries Divergentes. 3. Somabilidade. 4. Método de Cesàro. 5. Método de Hölder. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Arilson Monteiro dos Santos

Uma introdução à teoria das séries divergentes: conectando conceitos da graduação com tópicos do ensino médio para a formação de professores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta
Orientadora

Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos
Membro interno

Prof. Dr. David Pires Dias
Membro externo

Prof. Dr. Marcio Vieira de Almeida
Membro externo

São Paulo - SP
2024

Dedico este trabalho a todos os professores que, conscientes da falsa neutralidade da educação, persistem contra o obscurantismo.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Zildete e Wilson, por sempre me incentivarem nos estudos e acreditarem em mim. Também agradeço à minha irmã, Amanda, e meu sobrinho, Rodrigo, pelos momentos juntos.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, especialmente à minha amiga Nayra, que sempre esteve comigo. Ainda agradeço à minha amiga Sara, que indiretamente me acompanhou durante o mestrado.

Agradeço aos professores da Licenciatura em Matemática do IFSP campus São Paulo, que me apresentaram as diversas faces da matemática e me inspiraram a conhecer cada vez mais a matemática e a educação matemática.

Agradeço aos professores do IFSP campus São Paulo que fazem parte do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pelas excelentes aulas e todo conhecimento compartilhado.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta, pela dedicação, paciência e ajuda. Expresso minha gratidão pelos ensinamentos e o apoio ao longo da jornada.

Agradeço à Luciana Rosa, bibliotecária-documentalista do IFSP campus São Paulo, que conseguiu uma cópia de um material que havia somente na biblioteca da Universidade de *Stanford*.

"As séries divergentes são a invenção do diabo, e é uma vergonha basear nelas qualquer demonstração que seja."

Niels Henrik Abel

Resumo

Contrariando a teoria tradicional de sequências e séries, afirmamos que as séries divergentes podem ser somadas. Por exemplo, $1-2+3-4+5-6+\ldots = \frac{1}{4}$. Mas como isso é possível? Neste trabalho apresentamos uma introdução à teoria das séries divergentes, mostrando como atribuir valores finitos a séries divergentes. Nossa pesquisa tem início com a paradoxal série de Grandi, $1-1+1-1+1-1+\ldots$, ainda no século XVIII. Então, perpassamos pelas obras de Leonhard Euler, que, à frente de seu tempo, definiu a soma de séries divergentes. Em seguida, comparamos as noções de convergência antigas com as definições após a era de Cauchy, e continuamos até o final do século XIX, com os métodos de somabilidade, dos quais exploramos os métodos de Cesàro e Hölder. Considerando também as contribuições para a formação de professores, destacamos as conexões entre séries divergentes e temas do ensino médio, como progressões aritméticas, geométricas, trigonometria e logaritmos. Finalizamos sinalizando que há séries divergentes que não são somáveis por nenhum método e que os materiais sobre as séries divergentes são escassos, principalmente em língua portuguesa.

Palavras-chaves: Euler. Séries Divergentes. Somabilidade. Método de Cesàro. Método de Hölder.

Abstract

Contrary to the traditional theory of sequences and series, we claim that divergent series can indeed be assigned sums. For instance, $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots = \frac{1}{4}$. However, how is this possible? In this work, we present an introduction to the theory of divergent series, illustrating how finite values can be attributed to them. Our exploration begins with the paradoxical Grandi's series, $1-1+1-1+1-1+\ldots$, dating back to the XVIII century. We then examine Leonhard Euler's work, who, ahead of his time, defined the sums of divergent series. Next, we compare the old notions of convergence with the definitions that emerged after the Cauchy era, continuing up to the late XIX century with summability methods. In particular, we delve into Cesàro and Hölder methods. Considering also contributing to the education of teachers, we look into the connections between divergent series and high school topics such as arithmetic progressions, geometric progressions, trigonometry and logarithms. We conclude by noting that there are non-summable series by no method and that the literature on divergent series is escarce, especially in portuguese.

Keywords: Euler. Divergent Series. Summability. Cesàro's Method. Hölder's Method.

Sumário

Introdução

Geralmente, a matemática é apontada como uma disciplina árdua, inflexível e exata, que não admite erros. E essa perspectiva também se reflete no ensino de matemática, afinal, tudo aquilo que está nos livros didáticos já foi demonstrado e, portanto, é verdadeiro. Mas, será que a matemática é mesmo imutável, seguindo um padrão idealístico platônico? Além disso, como essa percepção da matemática influencia a prática dos docentes e dos futuros profissionais?

De acordo com Fiorentini (2005), diz-se que o professor de matemática necessita de uma formação sólida. Contudo, o autor salienta que a adjetivação da formação matemática como sólida é inadequada, pois implica que a matemática é imóvel, sendo pronta e acabada, e, assim, livre de contradições e questões não respondidas. Então, para o autor:

> O professor precisa conhecer o processo de como se deu historicamente a produção e a negociação de significados em Matemática, bem como isso também acontece, guardadas as devidas proporções, em sala de aula. Além disso, precisa conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático; isso o ajudará a problematizá-lo e mobilizá-lo da forma que seja mais adequada, tendo em vista a realidade escolar onde atua e os objetivos pedagógicos relativos à formação dos estudantes tanto no que respeita ao desenvolvimento intelectual e à possibilidade [de] compreender e atuar melhor no mundo. (Fiorentini, 2005, p. 109).

Reforçando esse argumento, Lins, Lorenzato e Sousa (2019) explicam que o professor não deve apenas conhecer a resposta certa, mas também saber ensiná-la. Entretanto, para isso, é preciso que haja um desgarro hierárquico, para fazer com que os alunos e os docentes reflitam sobre a matemática, seus sentidos, seu entendimento e compreensão, uma vez que o aprendizado e o ensino devem ter significado.

Considerando tal objetivo, exige-se professores capazes de repensarem a matemática aprendida e ensinada, de modo que, compreendendo profundamente os conteúdos que ensina, o professor tem condições de problematizar conhecimentos já estabelecidos. Daí a importância de professores bem formados atuando na educação, conforme Fiorentini (2005):

> Por isso, para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático. (Fiorentini, 2005, p. 110).

Entretanto, essa realidade ainda se encontra distante. Lorenzato (1993, apud Lins, Lorenzato e Sousa, 2019) já tinha apresentado, no ano de 1993, em um estudo com mil e setecentos professores de matemática de países da América Latina, que os docentes eram mal formados[1]. Indo além, analisando estudos que trataram do assunto, juntamente com a própria pesquisa realizada, Lins, Lorenzato e Sousa (2019) observaram que esse é um problema que persiste atualmente. Então, os docentes acabam presos num impasse: ensinar mesmo não estando preparados ou evitar certos temas porque não se sentem seguros? Lins, Lorenzato e Sousa (2019) também afirmam que muitos dos conteúdos não são realmente compreendidos pelos professores, que apenas repetem algoritmos, e cujas explicações se baseiam em senso comum.

É importante ressaltar que os problemas na formação de professores de matemática já haviam sido indicados há mais de um século por Felix Christian Klein (1849 – 1925), que propôs o conceito de **dupla descontinuidade**. Conforme Klein (1908, apud Rodrigues et al., 2022), a matemática acadêmica aprendida nas universidades, nos cursos de professores de matemática, era incompatível com a matemática escolar.

Havia uma dupla descontinuidade na formação inicial dos professores: os conteúdos vistos na universidade se encerravam neles mesmos; durante sua atuação profissional, o docente não conseguia estabelecer relações entre a matemática escolar e aquela com a qual teve contato na universidade. E, de acordo com Rodrigues et al. (2022), esse problema da dupla descontinuidade ainda não foi superado.

É por isso que, para Fiorentini (2005) a formação matemática deve ser questionadora, porque a forma problematizadora de experimentar a matemática estimula uma apropriação compreensiva e auxilia na formação didática-pedagógica do professor. Daí a importância de o docente de se qualificar, pois, seguindo Fiorentini e Oliveira (2013), compreendendo a matemática por diversas perspectivas, ele é capaz de, autonomamente, repensar sobre a própria matemática que ensina.

Nesse contexto de problematizar a matemática aprendida e ensinada, propomos um estudo de sequências e séries que também englobe a teoria de séries divergentes[2]. Realizando uma pesquisa preliminar em Anton, Bivens e Davis (2007), Apostol (1979), Courant e John (1965), Flemming e Gonçalves (2012), Guidorizzi (1998), Leithold (2002), Piskunov (1977), Spivak (2008), Stewart (2009), e Thomas, Weir e Hass (2014), observamos que as séries convergentes são exploradas com profundidade, enquanto que as séries divergentes são abordadas superficialmente.

Embora os matemáticos do início do século XX tenham desenvolvido uma teoria de somabilidade para séries divergentes, esse tópico não é encontrado em livros de Cálculo: somente mencionam a divergência para indicar se uma série ou uma sequência converge

[1] De acordo com Lorenzato (1993), a formação matemática dos professores era muito rasa. O autor comenta que os professores do estudo também não compreendiam muito de história da matemática ou etimologia.

[2] Quando dizemos "teoria das séries divergentes", estamos nos referindo aos desenvolvimentos a partir da obra *Divergent Series*, de Hardy (1949).

ou diverge. Além disso, alguns livros de Análise Matemática como Lima (2004) e Lima (2007) também não trazem o assunto.

Breves comentários são encontrados em Avila (2006), Bartle (1983), Figueiredo (1996), Rudin (1976) e White (1993), geralmente como exercícios da aplicação do método de Cesàro de primeira ordem. Dessa maneira, identificamos que o estudo de sequências e séries tem foco na classificação de uma sequência ou de uma série. Mais ainda, tratando-se das séries, caso a série convirja, tentamos encontrar o valor para o qual ela converge, e quando a série diverge, dizemos que não assume um valor real. Então significa que as séries divergentes não podem ser somadas? Na verdade, elas podem ter somas, mas para isso é preciso definir uma soma diferente da usual.

De acordo com Knopp (1928), a teoria tradicional de sequências e séries se consolidou somente após a formalização dos números reais, porém, as séries infinitas já eram utilizadas séculos antes, os matemáticos eram capazes de gerar séries infinitas por meio das construções geométricas. Todavia, nessa época, a convergência de uma série, no sentido moderno, não existia. Entretanto, os matemáticos sabiam que as séries divergentes levavam a resultados estranhos, portanto as excluíam. Contudo, o processo de diferenciar as séries convergentes das séries divergentes era incerto, não estava claro por qual motivo exatamente admitiam o uso de algumas séries, mas não de outras.

De fato, conforme Knopp (1928) apresenta, os símbolos que utilizamos para sequências, séries e produtórios infinitos não possuem significado intrinsecamente. Efetivamente, é a comunidade matemática que designa, de modo arbitrário, um sentido para cada símbolo e suas relações.

No caso das sequências e das séries, a primeira escolha arbitrária foi a de trabalhar exclusivamente com sequências convergentes[3]. Isso significa que existe um limite igual a s, e associamos esse limite à sequência. Contudo, por mais intuitivo que possa ser, essa definição também é arbitrária, podendo, eventualmente, ser modificada ou até mesmo trocada por outra definição. Assim, o símbolo utilizado para uma sequência infinita não tem nada de especial, como afirma Knopp (1928):

> Temos, portanto, toda a razão em perguntar se as complicações que nossa teoria exibe não são devidas a nossa interpretação do símbolo (s_n) como o limite da sequência assumida convergente, sendo desfavorável, por mais óbvio que isso possa parecer. (Knopp, 1928, p. 459, tradução nossa).

Desse modo, podemos substituir a convenção usual de convergência por uma noção mais abrangente. Todavia, para isso, devemos apresentar um método que associe um valor s a uma sequência de alguma maneira. Entretanto, esse método não pode ser arbitrário, devemos proceder de maneira plausível. Conforme Knopp (1928), um método é plausível

[3] Escolha fortemente influenciada pelos matemáticos Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Niels Henrik Abel (1802 – 1829).

quando o número s pode ser obtido através de um procedimento estreitamente relacionado ao conceito de convergência usual. Além disso, a plausabilidade de um método indica que, se uma sequência possui um valor s associado à ela, toda vez que a sequência estiver envolvida em algum cálculo, ela deverá sempre, ou ao menos quase sempre, estar associada ao valor s. Expandindo a noção de convergência usual, podemos associar valores a séries divergentes. Isto é, em um novo sentido, séries divergentes podem "convergir".

Nesse contexto, Leonhard Euler $(1707 - 1783)$ foi o precursor no estudo das séries divergentes, dando sentido às somas atribuídas a elas. Mas destacamos que, no rigor da Análise Matemática atual, a argumentação de Euler seria inadequada. Contudo, devemos lembrar que os métodos e as justificativas de Euler eram aceitos na época, como expõe Luchetta (2017):

> Observe que a definição utilizada hoje para séries convergentes [...] é completamente diferente desta apresentada por Euler, envolve sequências numéricas, somas parciais e limites. Mas dizer que os matemáticos não trataram essa questão por não apresentarem os conceitos nas formas do rigor da matemática moderna, é lê-los pela falta, e isto não faremos no nosso trabalho, pois os objetos matemáticos que Euler estava constituindo não são os mesmos objetos matemáticos de hoje, este fato pode causar um certo estranhamento já que os objetos têm os mesmos nomes. (Luchetta, 2017, p. 89).

Ou seja, os métodos de Euler eram legitimados pela fundamentação na qual ele sustentava sua matemática. Dadas as explicações necessárias, as somas de séries divergentes não eram um problema para Euler. Foi dessa maneira que ele encontrou a soma de séries divergentes. Inclusive, o matemático corroborou com o resultado obtido por Luigi Guido Grandi $(1671 - 1742)$.

No início do século XVIII, Guido Grandi apresentou uma série que terminou se tornando um problema paradoxal, os matemáticos não conseguiam responder se o resultado obtido era verdadeiro ou falso. Utilizando a construção geométrica da curva conhecida atualmente como bruxa de Agnesi, Grandi mostrou que:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}.$$

Esse resultado contraintuitivo intrigou os matemáticos por muito tempo e, segundo o relato de Alabdulmohsin (2016), entre os anos de 1830 e 1880, quase nenhum esforço foi dedicado à teoria das séries divergentes. A volta do interesse por esse tema ocorreu apenas no final do século XIX, com destaque para a obra de Ernesto Cesàro $(1859 - 1906)$, que trouxe uma definição de série divergente em um sentido moderno. Alabdulmohsin (2016) também relata que o caminho da teoria de séries ainda foi trilhado por matemáticos tais como Ferdinand Georg Frobenius $(1849 - 1917)$, Félix Édouard Justin Émile Borel $(1871 - 1956)$, Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947), Srinivāsa Aiyangār Rāmānujan (1887 – 1920) e John Edensor Littlewood (1885 – 1977), para tratar da teoria da somabilidade.

Para expandir nosso entendimento da soma de uma série, na teoria da somabilidade, consideramos um método que associa um número real a uma série através de algum cálculo, e o resultado é o valor para o qual a série é somável. Também vale ressaltar que um método é relevante quando não contradiz os resultados já demonstrados pela teoria tradicional e ainda aumenta o domínio de validade da teoria existente.

Apesar dessa teoria já estar bem estabelecida, ela não é usualmente vista no estudo de sequências e séries, conforme pesquisa prévia. Uma circunstância que reforça tal situação é que há pouco material em língua portuguesa que trata do tema.

Mais ainda, evidenciamos a importância desse tema para os professores, uma vez que as séries infinitas são abordadas ainda no ensino médio, quando são tratadas as somas dos termos das progressões aritméticas, das geométricas e as frações geratrizes.

Entretanto, devemos nos atentar às peculiaridades dos objetos matemáticos com os quais estamos lidando. Usualmente acostumado com as operações da álgebra, um docente de matemática poderia operar com séries infinitas e obter resultados paradoxais ao tratar séries divergentes como se fossem convergentes.

Por exemplo, considerando $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = s$, é possível escrever:

$$\begin{aligned} & s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \\ & \implies s - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \\ & \implies s - 1 = 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) \\ & \implies s - 1 = 2s \\ & \implies s = -1. \end{aligned}$$

Desse modo, obteríamos que $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$, justamente por não ter o cuidado que essa teoria exige. Além disso, muitas vezes os algoritmos são utilizados, mas não são justificados. Para exemplificar, apenas admitimos o procedimento de obtenção da fração geratriz porque a série utilizada converge.

E, também, como veremos nos casos tratados no Capítulo 3, frequentemente temos que conceber fórmulas a partir do padrão de uma sequência para verificar a somabilidade de uma série divergente. Neste momento, temos a chance de conjecturar, de experimentar e de propor fórmulas para o n-ésimo termo de uma sequência, ocasião em que retornamos aos conteúdos do ensino médio, como as progressões aritméticas, as progressões geométricas e o triângulo aritmético, mostrando que a teoria das séries divergentes trata de tópicos avançados, mas sua base está em temas mais elementares. No Capítulo 3, também veremos que algumas séries divergentes envolvem o uso de trigonometria e logaritmos.

Além disso, conforme Zazkis e Leikin (2010), para que um professor de matemática consiga desenvolver a habilidade de ensinar matemática a seus estudantes, ele deve conhecer mais matemática. Pois, assim, o docente se sente mais preparado, consegue estabelecer relações entre as áreas da matemática e também se mostra mais seguro para responder às perguntas dos alunos.

Portanto, nossa proposta foi elaborar um material didático para complementar a formação de professores de matemática, introduzindo elementos da teoria das séries divergentes e apresentando dois métodos de somas generalizadas: o método de Cesàro e o método de Hölder.

Dessa maneira, adotamos a metodologia da pesquisa bibliográfica, conforme Lakatos e Marconi (2003). Assim, analisamos livros, artigos acadêmicos, teses e dissertações, com a intenção de sistematizar o conhecimento existente sobre a teoria das séries divergentes e fornecer base teórica para novas pesquisas.

Com isso, no Capítulo 1, iniciamos nossa discussão sobre as séries divergentes nos séculos XVII e XVIII, apresentando a famosa série de Grandi e suas consequências. Em seguida, investigamos o tratamento de Euler para as séries divergentes. No Capítulo 2, cobrimos elementos básicos da teoria tradicional de sequências e séries. Então, no Capítulo 3, trazemos uma abordagem introdutória da teoria das séries divergentes, nos aprofundando em dois métodos de somabilidade: Cesàro e Hölder. Nesse mesmo capítulo, ainda tratamos de teoremas importantes e comentamos da noção de diluição de uma série divergente. Por último, apresentamos nossas considerações finais.

1 Séries divergentes nos séculos XVII e XVIII

Neste capítulo, trazemos uma contextualização histórica das séries divergentes nos séculos XVII e XVIII. Para tal, introduziremos os problemas que levaram ao estudo dessas séries ainda no século XVII. Utilizamos como principais referências: Euler (1760), Euler (1755), Euler (1748), Ferraro (2008), Kline (1983) e Luchetta (2017).

1.1 Série de Grandi

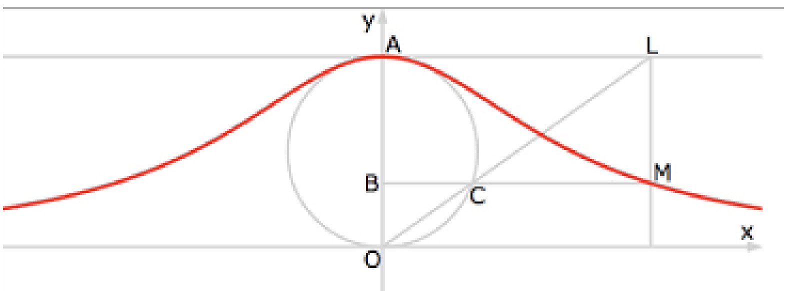
De acordo com Ferraro (2008), a manipulação algébrica das séries, inclusive divergentes, não era um obstáculo para os matemáticos dos séculos XVII e XVIII. Por exemplo, Isaac Newton ($1643-1727$) e Gottfried Wilhelm von Leibniz ($1646-1716$) fizeram muitas expansões em séries de potências e utilizaram seus desenvolvimentos para obter resultados importantes. Isso tudo sem considerar o raio de convergência das séries de potências, que foi desenvolvido posteriormente, e que veremos no Capítulo 2.

Desde que as regras algébricas fossem respeitadas, não havia problemas. No entanto, a soma das séries divergentes não tinha sido explorada. E os matemáticos possuíam diversas razões para isso. Contudo, Ferraro (2008) relata que a situação mudou quando Luigi Guido Grandi ($1671-1742$) demonstrou, em 1703[1], que:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Utilizando a construção geométrica da curva conhecida atualmente como a curva de Agnesi[2], ilustrada na Figura 1, Guido Grandi provou a validade de um resultado inesperado e intrigante.

Figura 1 – Curva de Agnesi



Fonte: https://www.bcamath.org/en/news-events/news/the-scientists-who-inspired-us-iii-maria-gaetana-agnesi. Acesso em: 07 abr. 2024.

[1] Em sua obra entitulada *Quadratura circula et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita, publicada em 1703*.

[2] A construção geométrica da curva de Agnesi pode ser consultada em Ferraro (2008).

Conforme aponta Ferraro (2008), a série de Grandi acabou explicitando um contraste entre os métodos algébricos e os geométricos, pois, por um lado, uma construção geométrica sempre levava a resultados verdadeiros, porém, por outro, a manipulação algébrica levou a um resultado claramente falso.

De modo analítico, a curva de Agnesi tem a seguinte expressão:

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \tag{1.1}$$

em que a é o raio da circunferência que gera a curva.

Expandindo (1.1) em série de potências, obtém-se que:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{a^{2k-1}}. \tag{1.2}$$

Então, tomando $x = 1$ e $a = 1$ em (1.1) e (1.2), segue-se que:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Segundo Ferraro (2008), o resultado da série de Grandi não foi bem aceito pelos matemáticos, como o autor descreve:

> Por exemplo, em 1 de Junho de 1712, Hermann escreveu para Leibniz, afirmando que a ideia de Grandi, que infinitos zeros poderiam ser somados para formar uma quantidade finita, era obviamente ridícula. (Ferraro, 2008, p. 122, tradução nossa).

O exótico resultado derivado da série de Grandi foi investigado com cautela por Leibniz. Conforme Ferraro (2008), o matemático tentou encontrar alguma falha na aplicação do conceito de continuidade[3], porém descartou essa possibilidade. Todavia, Leibniz não se contentaria até conseguir uma resposta satisfatória. Como não foi capaz de solucionar o mistério utilizando as técnicas puramente algébricas, Leibniz mudou sua perspectiva e justificou probabilisticamente, alegando que: "como 0 e 1 têm a mesma probabilidade quando o número de termos é finito, a média aritmética deles fornece a soma da série quando o número de termos é infinito." (Ferraro, 2008, p. 123, tradução nossa). É evidente que Leibniz se recusava a utilizar métodos algébricos para obter valores para séries divergentes.

Outra série divergente que levou os matemáticos a interessantes discussões foi a série alternada das potências de 2:

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots \tag{1.3}$$

[3] Conforme Sandifer (2006, p. 2 apud Luchetta, 2017, p. 95) esse princípio filosófico afirma que a natureza não dá saltos. Equivalentemente, Leibniz queria dizer que se as operações algébricas fossem válidas para o caso finito, elas também deveriam valer para o caso infinito.

Em uma carta escrita em 12 de junho 1712, como referencia Ferraro (2008), Christian Wolff (1679 – 1754) expõe para Leibniz que era possível escrever a equação:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \tag{1.4}$$

Em seguida, substituindo $x = 2$ na Equação 1.4, Wolff obteve:

$$\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + \dots \tag{1.5}$$

Isto é, a série divergente em (1.3) teria soma igual a $\frac{1}{3}$ pela Equação 1.5.

De acordo com Ferraro (2008), Leibniz respondeu em 13 de julho de 1712, ainda desconfiado do valor obtido por Wolff, levantando questionamentos sobre a soma de séries infinitas divergentes: Existe uma prova geométrica? A soma de um número finito de termos da série tem sentido, isto é, fornece algo que se relaciona ao problema, ou que pelo menos se aproxima continuamente? A demonstração é rigorosa[4] o suficiente?

Essas dúvidas de Leibniz explicitam as incertezas dos matemáticos diante das séries infinitas divergentes. E, de acordo com Kline (1983, p. 314, tradução nossa), o obstáculo enfrentado residia no fato de que o tratamento das "[...] séries como polinômios longos e, dessa forma, pertencentes ao domínio da álgebra, não servia como fundamentação rigorosa para a teoria das séries".

Na mesma época, Daniel Bernoulli (1700 – 1782) escreveu que a soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ era igual a -1, ao tratar a série como se ela fosse convergente.

Adotando a mesma estratégia, iremos "demonstrar" que a soma de todos os números naturais é igual a menos um doze avos. Considere a soma $1+2+3+4+5+6+\dots = s$, a igualdade $-3s = (1-4)s$ e a validade da soma da série de Grandi.

Primeiramente, observe que:

$$\begin{aligned}
-3s &= (1-4)s = s - 4s \\
&= (1+2+3+4+5+6+\dots) - 4(1+2+3+4+5+6+\dots) \\
&= (1+2+3+4+5+6+\dots) - 2(2+4+6+8+10+12+\dots) \\
&= \begin{aligned}(1+2+3+4+5+6+\dots) - (2+4+6+8+10+12+\dots) &+ \\ - (2+4+6+8+10+12+\dots)&\end{aligned} \\
&= (1+0+3+0+5+0+\dots) - (2+4+6+8+10+12+\dots) \\
&= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots
\end{aligned}$$

[4] De acordo com Santos e Carvalho (2023), o critério de validação de uma demonstração como rigorosa depende da comunidade matemática da época.

Após manipulação algébrica, chegamos na igualdade:

$$-3s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Prosseguindo com o desenvolvimento, temos:

$$\begin{aligned} & -3s = 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots) \\ \implies & -3s = 1 - \underbrace{(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots)}_{= -3s} - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)}_{= \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$-3s = 1 + 3s - \frac{1}{2} \implies -6s = \frac{1}{2} \implies s = -\frac{1}{12}.$$

Novamente temos um resultado um tanto paradoxal. Como é que a soma de infinitos números positivos pode resultar em $-\frac{1}{12}$? O problema não se deve às operações utilizadas, mas ao objeto matemático em destaque, como apontado por Kline (1983):

> Uma característica marcante da matemática desenvolvida no século XVIII é que os matemáticos confiavam muito mais nos símbolos do que na lógica. Como as séries infinitas possuíam o mesmo símbolo para todos os valores de x, a distinção entre os valores de x para os quais as séries convergiam e os valores de x para os quais as séries divergiam não pareceu digna de muita atenção. (Kline, 1983, p. 314, tradução nossa).

Além disso, a diferença primordial entre as somas finitas e as somas infinitas parece ter sido ignorada. Os matemáticos simplesmente criaram procedimentos formais estendendo procedimentos finitos para o caso infinito.

1.2 A contribuição de Euler

Segundo Hardy (1949) e Ferraro (2008), antes de Euler havia pouquíssimo material sobre as séries divergentes, salvo as cartas trocadas entre Leibniz, Wolff e os Bernoullis. E, de fato, Euler publicou, no ano 1760, o artigo *De seriebus divergentibus*, no qual explorou as séries divergentes com maestria, justificando todos seus resultados. Além disso, destacamos, conforme Luchetta (2017), que a teoria das séries infinitas foi um dos pilares da matemática do século XVIII. Portanto, encontramos textos sobre as séries divergentes em outras obras de Euler, como *Elements of Algebra* (1755) e *Foundations of Differential Calculus* (1748).

Também afirmamos que as contribuições de Euler foram frutíferas dados os desenvolvimentos de seus predecessores. Reforçando nossa argumentação, conforme Kline (1983), quando Euler se deparou com as séries infinitas, elas já eram utilizadas para representar funções[5] e até mesmo já tinham sido usadas para deduzirem expressões para π[6].

1.2.1 *Elements of Algebra* – 1755

No livro *Elements of Algebra*, Euler apresenta um capítulo denominado "Sobre a resolução de frações em séries infinitas", no qual o autor inicia sua exposição com a divisão do número 1 por $1 - a$:

> Euler: Quando o dividendo não é divisível pelo divisor, o quociente é expresso, como já tínhamos observado, por uma fração. Assim, se tivermos que dividir 1 por $1 - a$, obtemos a fração $\frac{1}{1-a}$. Isso, porém, não nos impede de tentar a divisão de acordo com as regras que foram dadas, nem de continuarmos tão longe quanto desejarmos; e não vamos falhar deste modo para encontrar o verdadeiro quociente, embora sob diferentes formas. (Luchetta, 2017, p. 84).

Utilizando o algoritmo da divisão longa, Euler divide[7] 1 por $1 - a$, obtendo:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a}.$$

Daí, dividindo a por $1 - a$, consegue a expressão:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + \frac{a^2}{1-a}.$$

Então, realizando a divisão de a^2 por $1 - a$, prossegue:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \frac{a^3}{1-a}.$$

Assim, efetuando sucessivas divisões, Euler (1755) chega na igualdade:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}.$$

Exemplo 1.2.1 *Utilizando o método de Euler, vamos dividir* 1 *por* $1 - (-2)$.

[5] É importante reforçar que a definição de função da época era outra. De acordo com Carvalho e Roque (2013), desde Newton e Leibniz, havia uma noção intuitiva de pensar uma função como uma expressão analítica, cuja forma mais geral é uma série de potências. Já no final do século XVIII, Johann Bernoulli empregava uma definição de função relacionando indiretamente quantidades formadas a partir de quantidades e constantes. Euler também apresentou uma definição de função, muito semelhante a de Johann Bernoulli, mas incluindo a expressão analítica.

[6] Segundo Carvalho e Roque (2013), Leibniz já tinha demonstrado que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

[7] De acordo com Luchetta (2017, p. 84), "neste parágrafo Euler nos apresenta qual será o seu modo de produzir significado para o quociente $\frac{1}{1-a}$, ou seja, ele utilizará o algoritmo usual da divisão continuadamente para encontrar o quociente". Pelo algoritmo da divisão, dados inteiros a e b, com $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = bq+r$, com $0 < r < |b|$. Então, $a = bq+r \implies \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{1-(-2)} = 1 + (-2) + \frac{(-2)^2}{1-(-2)};$$
$$\frac{1}{1-(-2)} = 1 + (-2) + (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{1-(-2)};$$
$$\frac{1}{1-(-2)} = 1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \frac{(-2)^4}{1-(-2)};$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1-(-2)} = 1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + \\ + (-2)^5 + (-2)^6 + (-2)^7 + \frac{(-2)^8}{1-(-2)}.$$

Para generalizar o método, Euler (1755, p. 90) explica que a fração pode ser tratada como uma série infinita, de modo que "há fundamentos suficientes para dizer que o valor dessa série é igual ao valor da fração". Isto é, podemos escrever:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + \dots \tag{1.6}$$

Nesse contexto, Luchetta (2017) evidencia que:

> Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para esta série infinita a partir da divisão elementar, em outras palavras, ele estava nos mostrando <u>o que é uma série infinita</u>, ou seja, <u>a série surge a partir da divisão continuada ad infinitum</u>. (Luchetta, 2017, p. 86).

Um aspecto relevante em relação às séries é que, para Euler, a **forma** era importante. Para o matemático, como toda série era formada a partir de uma divisão, a expressão que gerou a série deveria ser representada sempre do lado **esquerdo** da igualdade.

Baseando-se na Equação 1.6, Euler argumentou que 1 dividido por 0 é igual a mais infinito. Para isso, basta tomar $a = 1$, assim:

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1^6 + 1^7 + 1^8 + \dots \tag{1.7}$$

Portanto, devido à validade da Equação 1.7, concluímos que:

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Então, para não restar dúvidas, Euler se justifica:

> Euler: 293. O que dissemos pode parecer à primeira vista estranho, mas a consideração de alguns casos particulares tornará mais fácil o entendimento. Vamos supor, em primeiro lugar, que a = 1. Nossa série irá tornar-se 1+1+1+1+1+1+1+1 etc: e a fração $\frac{1}{1-a}$ que deve ser igual, torna-se $\frac{1}{1-1}$ ou $\frac{1}{0}$. Agora, temos que relembrar antes que $\frac{1}{0}$ é um número infinitamente grande. Portanto, aqui é confirmado de maneira satisfatória. (Luchetta, 2017, p. 90).

Esse método de divisão utilizado por Euler também pode ser usado para reafirmar o resultado da série de Grandi.

Tomando $a = -1$ em (1.6), vem que:

$$\frac{1}{1-(-1)} = 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \\ + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 + \dots$$

Ou seja, utilizando o método de Euler:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \tag{1.8}$$

Indo além, podemos tomar $a = -2$ na Equação 1.6, de onde vem que:

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - \dots$$

Diante disso, notamos que Euler apresentava seus resultados e buscava justificá-los de modo que ninguém fosse capaz de refutar suas ideias.

O livro *Elements of Algebra* foi publicado 41 anos após o primeiro[8] texto de Euler sobre as séries infinitas, de acordo com Luchetta (2017). Logo, trata-se de uma publicação fundamentada em constructos reforçados, com noções e conceitos revisados, analisados e compreendidos durante décadas.

1.2.2 *De seriebus divergentibus* — 1760

Dentre sua vasta obra, Leonhard Euler dedicou-se a escrever um artigo para tratar das séries divergentes. Na publicação entitulada *De seriebus divergentibus*, Euler descreve critérios para classificar uma série em convergente ou divergente. Além disso, Euler também elenca quatro tipos distintos de séries divergentes:

> Euler: §1. Se as séries convergentes são definidas como aquelas cujos termos decrescem continuamente e, finalmente, se a série continua até o infinito, desaparecem completamente; é fácil ver, que as séries cujos

[8] *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, publicado em 1738.

> termos infinitesimais não tornam-se nada, mas nem permanecem finito ou crescem até o infinito, são designadas, desde que não sejam convergentes, a classe de séries divergentes. Dependendo se os últimos termos da série, que se obtém na progressão continuada até o infinito, são de magnitude finita ou infinita, temos dois tipos de séries divergentes, que podem ser subdivididas em duas classes, dependendo se todos os termos possuem o mesmo sinal ou os sinais alternados + e - um com o outro. No geral, portanto, teremos quatro tipos de séries divergentes que, por motivo de maior clareza, eu gostaria de adicionar alguns exemplos. (Luchetta, 2017, p. 88).

Então, Euler mostra exemplos dos 4 tipos de séries divergentes:

1. Séries divergentes do Tipo 1

   a) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

   b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$

   Atualmente, são séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, com $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n$, e $a_n < M$, $M \in \mathbb{R}$

2. Séries divergentes do Tipo 2

   a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

   b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$

   No tempo presente, são séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$, com $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n$, e $a_n < M$, $M \in \mathbb{R}$

3. Séries divergentes do Tipo 3

   a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

   b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$

   Na contemporaneidade, são séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, com $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n$, $e\ a_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

4. Séries divergentes do Tipo 4

   a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$

   b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$

   Na época atual, são séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$, com $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n\ e\ a_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

Euler sabia que estava em um terreno um tanto frágil, como descreve:

> Euler: §2. Há muita discórdia entre os matemáticos em relação as séries divergentes, enquanto alguns negam, outros não, que elas podem ter uma soma bem definida. Em primeiro lugar é realmente claro, que as somas das séries, que eu me referi na primeira classe, são realmente infinitas, porque tomando termos suficientes dela, podemos chegar a uma soma maior do que qualquer número dado. Por isso, não há dúvida, que as somas das séries deste tipo podem ser exibidas pela expressão $\frac{a}{0}$. Assim, a grande controvérsia entre os geômetras é principalmente sobre os três tipos restantes; e os argumentos que são apresentados por ambos os lados para defenderem suas posições, incorporam tanta força persuasiva, que nenhuma parte sentiu-se obrigada a concordar com a outra. (Luchetta, 2017, p. 91).

É evidente que a soma infinita de números naturais deveria ser infinita. Portanto, obter resultados em que a soma infinita de números naturais é um valor negativo causou aversão às séries divergentes, como explicitado por Euler:

> Euler: §6. Mas aqueles, que se opõem às somas de séries divergentes, tem a opinião que o terceiro tipo lhes fornecem os melhores argumentos. Por isso, embora os termos destas séries aumentem continuamente, portanto, é possível ao adicionarmos mais termos, obtermos uma soma maior do que qualquer número atribuível, ou seja, por definição, infinita, os defensores de somas de tais série são forçados, no entanto, a admitir séries de tais tipos, cujas somas são finitas e até mesmo negativas, ou menor do que nada. Porque, a fração $\frac{1}{1-a}$ expandida em série, produz: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + etc$: devemos considerar as seguintes equações: $-1 = 1+2+4+8+16+etc$; $\frac{-1}{2} = 1+3+9+27+81+etc$; que parecem, compreensivelmente, muito suspeitas para os adversários, porque pela adição de apenas termos positivos nunca se pode obter uma soma negativa [...]. (Luchetta, 2017, p. 93).

Porém, Euler formulou uma explicação para a aparente irregularidade:

> Euler: §7. Por isso, os defensores das somas de séries divergentes, para resolver esse paradoxo notável, criaram uma distinção, bastante sutil, mas pouco precisa, entre quantidades negativas; enquanto que eles argumentam, por um lado, que existem algumas menores do que nada, por outro lado, outras são maiores do que o infinito, ou seja, maiores do que quantidades infinitas. Por outro lado, devemos admitir o valor de -1, sempre que pensamos que ele surgiu da subtração de um número maior $a+1$ de um menor a, e outro valor quando -1 é encontrado sendo igual à série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + etc.$, que surge da divisão do número $+1$ pelo número -1; no primeiro caso o número -1 é obviamente um número menor do que nada, mas no último, maior do que o infinito. Para maior corroboração, eles apresentam este exemplo [de uma sequência] de frações $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}$, etc, que pelos primeiros termos é visto aumentando, é também para ser considerada crescendo continuamente, donde eles concluem que $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ e $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$ e assim por diante; e portanto se $\frac{1}{-1}$ é expresso por -1 e $\frac{1}{0}$ por ∞, então $-1 > \infty$ e ainda mais $\frac{1}{-2} > \infty$; e desta forma, eles muito engenhosamente expulsam o aparente absurdo. (Luchetta, 2017, p. 95).

Com isso, podemos utilizar a Equação 1.6 para escrever que:

$$(a = 4) \ \ -\frac{1}{3} = 1 + 4 + 16 + 64 + \dots \tag{1.9}$$

$$(a = 5) \ \ -\frac{1}{4} = 1 + 5 + 125 + 625 + \dots \tag{1.10}$$

$$(a = 9) \ \ -\frac{1}{8} = 1 + 9 + 81 + 729 + \dots \tag{1.11}$$

$$(a = 13) \ \ -\frac{1}{12} = 1 + 13 + 169 + 2197 + \dots \tag{1.12}$$

Salientamos que o modo de produção de significado para Euler é diferente do modo de produção de significado para as séries atualmente, conforme Luchetta (2017). Então, para Euler seria natural, dadas as equações 1.9, 1.10, 1.11 e 1.12, que:

$$-\frac{1}{12} > -\frac{1}{8} > -\frac{1}{4} > -\frac{1}{3} > +\infty. \tag{1.13}$$

Ressaltamos que as desigualdades em (1.13) talvez causem estranheza aos leitores versados em matemática. Entretanto, devemos recordar que o conceito de reta real ainda não tinha sido formulado no século XVIII.

1.2.3 *Foundations of Differential Calculus* – 1748

Para Euler, as séries divergentes eram intrigantes e deveriam ser exploradas. Em sua obra *Foundations of Differential Calculus*, o matemático apresenta a seguinte expansão em série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \tag{1.14}$$

Tomando $x = 1$ em (1.14), desta vez obtemos:

$$\frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2(1) + 3(1)^2 + 4(1)^3 + 5(1)^4 + \dots \tag{1.15}$$

Portanto, com base em (1.15), afirmamos que:

$$\frac{1}{0} = +\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Ainda podemos obter mais resultados. Por exemplo, fazendo $x = 13$ em (1.14):

$$\frac{1}{144} = 1 + 26 + 507 + 8788 + 142805 + \dots$$

Em *Foundations of Differential Calculus*, Euler (1748) investiga a construção da série originada pela divisão de 1 por $1-x$, realizando a divisão usual:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+\frac{x}{1-x};\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\frac{x^2}{1-x};\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x};\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}.\end{aligned}$$

Então, Euler (1748) explica que podemos considerar $1+x+x^2+x^3$ como uma aproximação para $\dfrac{1}{1-x}$, cometendo um erro de $\dfrac{x^4}{1-x}$. Extrapolando seu raciocínio, Euler comenta que a soma da série $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{1000}$ é $\dfrac{1}{1-x}$, considerando o erro de $\dfrac{x^{1001}}{1-x}$.

O matemático nota que o erro crescia exponencialmente para valores de x maiores do que 1. E, feitas as considerações para o caso finito, o matemático parte então para o caso infinito:

> Euler: §107. [...] A partir disto vemos que alguém que diria que quando esta mesma série é continuada ao infinito, isto é, $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^\infty$, e que a soma é $\frac{1}{1-x}$, então seu erro seria de $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; se $x>1$ então o erro é de fato infinito. Ao mesmo tempo, porém, esse mesmo argumento mostra porque a série $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, continuada até o infinito, tem uma verdadeira soma de $\frac{1}{1-x}$, desde que x seja uma fração menor que 1. Neste caso, o erro $x^{\infty+1}$ é infinitamente pequeno e, portanto, igual a zero, de modo que pode ser abandonado com segurança. (Luchetta, 2017, p. 101).

Portanto, segundo Euler, podemos escrever que:

$$2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots\ , \tag{1.16}$$

uma vez que ao adicionarmos infinitos termos, cometemos um erro de $\dfrac{(\frac{1}{2})^{+\infty+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

Posteriormente, já em *Elements of Algebra*, Euler (1755) volta a investigar as somas parciais da série em (1.16). Para tal, o matemático compara a soma da série com as somas parciais dos seus termos: Tomando a soma do primeiro termo, temos 1, que difere por 1 do valor verdadeiro da soma; da soma do primeiro e do segundo termo, obtemos $\frac{3}{2}$, que difere por $\frac{1}{2}$ do valor verdadeiro da soma; para a soma do primeiro, do segundo e do terceiro termo, obtemos $\frac{7}{4}$, que difere por $\frac{1}{4}$ do valor verdadeiro da soma; com a soma do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto termo, obtemos $\frac{15}{8}$, que difere por $\frac{1}{8}$ do valor verdadeiro da soma, e assim por diante. Daí, adicionando uma quantidade infinita de termos, obteríamos um erro tão pequeno que ele seria desprezível.

De certa forma, identificamos que Euler compreende uma noção de convergência que se aproxima daquela no sentido de Cauchy, porque ele reconhece que as somas parciais de uma série convergente se aproximam cada vez mais de um determinado valor. Contudo, como ficavam as séries divergentes?

Em *Foundations of Differential Calculus*, Euler (1748) busca contornar a dificuldade de lidar com os resultados obtidos para as séries divergentes com o argumento de que esse problema decorria da natureza do infinito. Para exemplificar, a série $1-1+1-1+1-1+\ldots$ realmente teria soma igual a $\frac{1}{2}$. Entretanto, ao calcularmos suas somas parciais, sempre geramos um erro de aproximação do valor verdadeiro, erro que é acumulado no "último" termo da série. Mas, como em uma adição infinita de termos nunca alcançamos, de fato, o "último" elemento, poderíamos aproximar a série divergente de sua soma; bastaria omitir o erro "final".

Assim, utilizando a série em (1.17) e aplicando o mesmo raciocício de aproximação com omissão do erro "final",

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \ldots, \tag{1.17}$$

de forma razoável, Euler (1748) escreve:

1. Considere $x = 1$ em (1.17).

   a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \dfrac{1}{2}$.

2. Considere $x = 2$ em (1.17).

   b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots = \dfrac{1}{3}$.

3. Considere $x = 3$ em (1.17).

   c) $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \ldots = \dfrac{1}{4}$.

Diferentemente das séries convergentes, cuja diferença entre o verdadeiro valor da soma e suas somas parciais tendia para zero, algumas séries divergentes admitiam um erro "final" que crescia indefinidamente. Portanto, Euler se encontrou em um labirinto: se uma série é gerada pela expressão finita, como seria possível que a adição aritmética de mais elementos levasse para valores cada vez mais distantes da própria soma?

Esse estranhamento causado pelas expressões se devia ao tipo da série, de modo que, para Euler:

> Euler: §109. A partir disto, podemos concluir que as séries deste tipo, que são chamadas divergente, não têm somas fixas, uma vez que as somas parciais não se aproximam de qualquer limite que seria a soma da série infinita. Esta é certamente uma conclusão verdadeira, uma vez que mostramos o erro abandonado no resto final. No entanto, é possível, com justiça considerável, objetar que essas somas, mesmo que elas pareçam não ser verdadeiras, nunca levam ao erro. Na verdade, se as permitimos, então podemos descobrir muitos excelentes resultados que não teríamos se as rejeitássemos. Além disso, se essas somas fossem realmente falsas, elas não conduziriam consistentemente a resultados verdadeiros. Em vez disso, uma vez que elas diferem da verdadeira soma não apenas por uma pequena diferença, mas por infinito, elas deveriam nos enganar por uma quantidade infinita. Uma vez que isso não acontece, nós somos deixados com um nó mais difícil de desatar. (Luchetta, 2017, p. 111).

Nesse parágrafo, Euler começa a desvendar a grande questão das séries divergentes, expondo uma particularidade dessas séries e defendendo a aceitação delas na matemática. Ele nota que o problema está nas definições:

> Euler: §110. Digo que todas as dificuldades encontra-se no nome **soma**. Se, como é comumente o caso, tomamos a **soma** de uma série como sendo o cumulado de todos os seus termos, de fato, considerados juntos, então não há dúvida de que apenas as séries infinitas que convergem continuamente se aproximam de algum valor fixo, quanto mais termos de fato adicionarmos, pode ter soma. No entanto, séries divergentes, cujos termos não diminuem, se seus sinais $+$ e $-$ alternados ou não, realmente não têm somas fixas, supondo que usamos a palavra **soma** para o cumulado de todos os termos. Considere estes casos que lembramos, com somas erradas, por exemplo a expressão finita $\frac{1}{1-x}$ para a série infinita $1 + x^2 + x^3 + \ldots$. A verdade da questão é esta, não que a expressão é a soma da série, mas que a série é derivada da expressão. Nessa situação, o nome **soma** poderia ser completamente omitido. (Luchetta, 2017, p. 112).

Nesse trecho, o raciocínio de Euler coincide com a posição de Knopp (1928), porque, a soma de uma série tomada como a "soma aritmética" é uma convenção arbitrária e, dessa forma, pode ser alterada. Assim, de modo mais flexível, Euler expõe que:

> Euler §111. Esses inconvenientes e as aparentes contradições podem ser evitados se dermos à palavra **soma** um significado diferente do usual. Digamos que a **soma** de qualquer série infinita é uma expressão finita a partir da qual a série pode ser derivada. Nesse sentido, a soma verdadeira da série infinita $1 + x^2 + x^3 + \ldots$ é $\frac{1}{1-x}$, uma vez que esta série é derivada a partir da fração, não importa qual valor seja substituído para x. Com esta compreensão, se a série é convergente, a nova definição de soma concorda com a definição usual. Desde que as séries divergentes não têm uma soma, propriamente falando, não há nenhuma dificuldade real que surge desse novo significado. Finalmente, com o auxílio desta definição, podemos manter a utilidade das séries divergentes e preservar sua reputação. (Luchetta, 2017, p. 113).

Logo, segundo Euler, a soma de uma série era exatamente **a expressão finita que a gerou**. Portanto, séries divergentes podiam ser somadas. Isto é, pela primeira vez, as séries divergentes também possuíam somas atribuídas a elas. Todavia, as novas descobertas apresentavam inconsistências. Por exemplo, múltiplos valores foram encontrados para uma mesma soma infinita, como veremos logo a seguir.

No livro *Foundations of Differential Calculus*, Euler (1748) também apresenta a divisão:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \dots \tag{1.18}$$

Agora, colocando $x = 1$ em (1.18), temos que:

$$\frac{2}{3} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{1.19}$$

Note que o resultado obtido em (1.19) é diferente do valor em (1.8). Knopp (1928) explica que:

> O princípio de Euler é, portanto, inseguro em qualquer caso, e era apenas o instinto incomum de Euler para o que estava matematicamente correto que em geral o salvou de falsas conclusões apesar do numeroso uso que ele fez de séries divergentes desse tipo. Cauchy e Abel foram os primeiros a esclarecerem o conceito de convergência e a renunciar ao uso de qualquer série não convergente. [...]. (Knopp, 1928, p. 459, tradução nossa).

Desse modo, pudemos notar o empenho de Euler para tratar das séries divergentes. Mas, apesar do trabalho de Euler, as séries divergentes eram evitadas pelos matemáticos justamente pelos problemas apresentados aqui. Para finalizarmos o capítulo, realçamos que Euler foi capaz de superar esse obstáculo tomando uma nova concepção de soma de série. Com essa nova definição, ele operava tanto com as séries convergentes quanto com as séries divergentes.

2 Teoria Tradicional de Sequências e Séries

Anteriormente ao Cálculo Diferencial e Integral, as séries infinitas já eram reconhecidas em algumas construções geométricas, como observado por Arquimedes[1] na quadratura da parábola. E, de acordo com Ferraro (2008), havia uma noção intuitiva de convergência: uma série representava uma certa quantidade se, e somente se, houvesse uma construção geométrica da qual ela pudesse ser derivada.

Posteriormente aos avanços do Cálculo Diferencial e Integral, segundo Kline (1983), houve um intenso enfoque nas aplicações das séries infinitas, que eram utilizadas para resolver os mais variados problemas, mesmo que a distinção entre convergente e divergente ainda estivesse nebulosa. Portanto, a questão da convergência não era urgente. Todavia, os matemáticos tinham o entendimento de que os termos de uma série convergente tendiam para zero.

Complementando, Ferraro (2008) menciona que o uso das séries nos séculos XVII e XVIII era essencialmente procedimental, os matemáticos ainda não estavam tão preocupados com o "rigor". Porém, essa fase da matemática chegou ao fim com a influência das obras *Cours d' Analyse* (1821) e *Résumé Des Leçons Données À l'École Royale Polytechnique Sur Le Calcul Infinitésimal* (1823), de Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).

Na era de Cauchy, a definição de convergência foi construída matematicamente, de maneira mais concisa, seguindo os paradigmas da época. Assim, os matemáticos puderam, de certa maneira, diferenciar séries divergentes de séries convergentes. Com isso, foi possível criar critérios de convergência e métodos de aceleração de convergência[2].

Neste capítulo, apresentamos a teoria elementar de sequências e séries[3], utilizando os autores Cerqueira (2013), Guidorizzi (1998), Lima (2007) e Stewart (2009) como principais referências. Iniciamos nosso capítulo com as sequências e, em seguida, tratamos das séries, abordando alguns critérios de convergência. Por fim, comentamos brevemente das séries de potências. Veremos que algumas séries citadas no Capítulo 1, que já eram ditas divergentes, continuaram divergentes pela nova teoria, como é o caso da série de Grandi.

[1] Para saber mais a respeito da quadratura da parábola e sua relação com as séries, indicamos a leitura do segundo capítulo de Montanha (2020).

[2] Dada uma série convergente, sua aceleração de convergência se trata de reescrever a série original de forma que a sequência das somas parciais dessa "nova" série convirja mais rapidamente. Para saber mais, consultar https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/series_acceleration.pdf. Acesso em: 04 abr. 2024.

[3] É importante destacar que a teoria da qual tratamos tem origem com a teoria de sequências e séries de Cauchy, mas é relativamente diferente, uma vez que, como Knopp (1928) aponta, a teoria de sequências e séries somente se estabeleceu como um campo da matemática após a formalização completa dos números reais, ocorrendo apenas no final do século XIX, segundo Carvalho e Roque (2013). Portanto, apesar das semelhanças, a teoria de sequências e séries atual passou por diversas transformações e ajustes, conforme as definições e o rigor foram se modificando para acompanhar a contemporaneidade.

2.1 Sequências

Definição 2.1.1 (Sequência) *Uma sequência de números reais é uma função* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, que associa a cada número natural* $n \geq 0$ *um número real* a_n*, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Denotaremos uma sequência por $(a_0, a_1, a_2, \ \ldots, a_n, \ \ldots)$ ou por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. E usaremos a_n para escrevermos o valor de $f(n)$. Algumas sequências podem ser definidas por fórmulas para o n-ésimo termo.

Exemplo 2.1.1 *A sequência cujo n-ésimo termo é dado por* $a_n = n$*, é escrita explicitamente como* $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

Exemplo 2.1.2 *A sequência cujo n-ésimo termo é dado por* $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$*, é escrita explicitamente como* $(0, +1, -2, +3, -4, \ldots)$.

Exemplo 2.1.3 *A sequência cujo n-ésimo termo é dado por* $a_n = \dfrac{1}{3^n}$*, é escrita explicitamente como* $\left(\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots\right)$.

Também podemos definir uma sequência a partir de termos anteriores (recursivamente).

Exemplo 2.1.4 *A sequência de Fibonnaci,* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$*, é definida recursivamente. Dados* $a_0 = 1, \ a_1 = 1$*, então* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$*, para* $n > 1$.

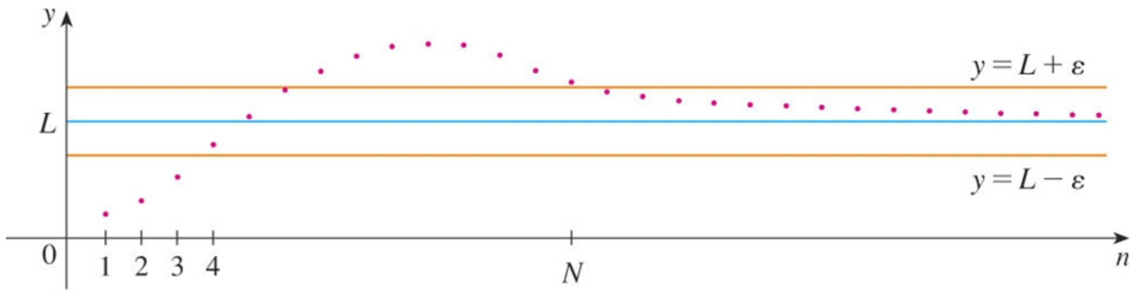
Exemplo 2.1.5 *A sequência* $(3, \ 0, -27, -162, -729, -2916, \ldots)$ *definida recursivamente como* $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$*, com* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 0$*, tem termo geral* $a_n = (3 - 3n) \cdot 3^n$.

Ainda há sequências que não possuem uma lei de formação, por exemplo, a sequência dos números primos positivos, $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$. Segundo Iezzi e Hazzan (2019), não há uma fórmula para expressar o n-ésimo número primo apenas pelo índice n.

No estudo de uma sequência, ainda podemos plotar o gráfico da função e observar se os pontos plotados estão dentro de uma região delimitada por duas retas paralelas, também paralelas ao eixo x, quando n ultrapassa um N específico do domínio. Intuitivamente, esta é a noção de limite de uma sequência, ilustrado pela Figura 2.

Definição 2.1.2 (Limite de uma sequência) *Diz-se que o número real* L *é o limite da sequência* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *quando, para um número real* $\varepsilon > 0$*, escolhido arbitrariamente, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $n > N$*, temos* $|a_n - L| < \varepsilon$*. Neste caso escrevemos* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$.

Figura 2 – Ilustração da convergência de uma sequência



Fonte: Stewart (2009).

Se esse limite existir, dizemos que a sequência **converge**. Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge**. Sendo L um número real, uma sequência diverge em três situações: o limite não existe, o limite é mais infinito[4] ou o limite é menos infinito. Além disso, uma sequência convergente não pode convergir para dois valores diferentes, fato garantido pelo Teorema 2.1.2.

Exemplo 2.1.6 *A sequência* $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$*, definida por* $a_n = \frac{1}{3^n}$*, converge para* 0.

Devemos mostrar que, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}; n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$.

De fato, para $\varepsilon > 0$, basta tomar $n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$, pois:

$$n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon} \implies 3^n > \frac{1}{\varepsilon} \implies 0 < \frac{1}{3^n} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{3^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Então, por definição, segue-se que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

Exemplo 2.1.7 *A sequência* $\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$*, definida como* $a_n = \frac{n+2}{n+1}$*, converge para 1.*

Devemos mostrar que, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}; n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$.

De fato, para $\varepsilon > 0$, basta tomar $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, pois:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \implies 0 < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

[4] $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ significa que para cada número real positivo M existe um natural N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.

$$\Longrightarrow\ 0 < \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} < \varepsilon \ \Longrightarrow\ \left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Então, por definição, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Ocasionalmente, será mais conveniente indexar uma sequência começando por $n = 0$ ou $n = n_0$, para algum $n_0 \neq 0$. Dados naturais positivos $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, podemos construir uma nova sequência, definida por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $a_0 = a_{n_0}$, $a_1 = a_{n_1}$, $a_2 = a_{n_2}$, $\ldots$, $a_k = a_{n_k}$, $\ldots$. Note que essa pequena mudança não causa nenhum problema, pois o que é essencial, nesse contexto, é que uma sequência é uma lista infinita de números reais. O que acontece com os termos iniciais da sequência não é tão significativo.

Exemplo 2.1.8 *A sequência* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_n = n - \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}$*, com* $a,\ b \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq max\{a, b\}$ *converge.*

Calculando o limite, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n - \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left[n - \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}\right]\cdot\left[\frac{n + \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}{n + \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 - (n^2 - na - nb + ab)}{n + \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{na + nb - ab}{n + \sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}$$

Multiplicando e dividindo a fração por $\dfrac{1}{n}$, segue-se que:

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{na}{n} + \dfrac{nb}{n} - \dfrac{ab}{n}}{\dfrac{n}{n} + \dfrac{\sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{a + b - \dfrac{ab}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{n-a}\cdot\sqrt{n-b}}{n}}$$

Substituindo n por $\sqrt{n^2}$ no denominador, obtemos:

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a + b - \dfrac{ab}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{n-a} \cdot \sqrt{n-b}}{\sqrt{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a + b - \dfrac{ab}{n}}{1 + \sqrt{\dfrac{n-a}{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{n-b}{n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a + b - \dfrac{ab}{n}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{a}{n}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{b}{n}}}$$

$$= \frac{a+b}{2}.$$

Para finalizar o Exemplo 2.1.9, iremos enunciar o Teorema de Stolz-Cesàro, que é um equivalente a regra de L'Hôpital para o cálculo do limite de funções. Indicamos a leitura de Barbosa (2023) para uma compreensão detalhada do teorema e de suas consequências.

Teorema 2.1.1 (Stolz-Cesàro) *Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais estritamente crescente, com $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$, e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais arbitrária. Se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

então $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L.$

Demonstração: Consultar Barbosa (2023, p. 39). □

Exemplo 2.1.9 *A sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $v_n = \dfrac{p^n - q^n}{p^n + q^n}$, com $p, q \in \mathbb{R}_+$ converge.*

Primeiramente, note que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p^n - q^n}{p^n + q^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{p^n}{p^n} - \dfrac{q^n}{p^n}}{\dfrac{p^n}{p^n} + \dfrac{q^n}{p^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{p}\right)^n - \left(\dfrac{q}{p}\right)^n}{\left(\dfrac{p}{p}\right)^n + \left(\dfrac{q}{p}\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{q}{p}\right)^n}$$

Agora temos 3 casos a considerar: $p = q$, $p < q$ e $p > q$.

(i) $p = q$

Neste caso, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{1}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{2} = 0.$$

(ii) $p > q$

Se p for maior do que q, então:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = 0.$$

Desse modo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

(iii) $p < q$

Se p for menor do que q, então:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n + 1}. \tag{2.1}$$

Devemos nos atentar ao fato de que, ao tratar do limite de sequências, não podemos aplicar a usual regra de L'Hôpital. Então, recorremos a outro resultado. Considere as sequências dadas por:

$$a_n = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1\right] \text{ e } b_n = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^n + 1\right].$$

A sequência de termos b_n é estritamente crescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Mais ainda, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1\right] - \left[\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1\right]}{\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} + 1\right] - \left[\left(\frac{q}{p}\right)^n + 1\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - \left(\frac{q}{p}\right)^n} = 1.$$

Com isso, pelo Teorema 2.1.1, podemos avaliar o limite em (2.1):

$$-\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n + 1} = -1.$$

Portanto, fixados $p, q \in \mathbb{R}_+$, a sequência converge para um dos valores do conjunto $\{0, 1, -1\}$.

Exemplo 2.1.10 *A sequência dos números naturais* $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ *é divergente. Como* $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$*, a sequência diverge.*

Teorema 2.1.2 (da unicidade do limite) *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Consultar Lima (2007, p. 25). $\square$

Definição 2.1.3 (Subsequência) *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais, e seja* $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *uma sequência crescente de números naturais. Então, a sequência*

$$(a_{n_0},\ a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots)$$

é chamada de subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e é denotada por* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, onde* $k \in \mathbb{N}$ *indexa a subsequência.*

Exemplo 2.1.11 *Seja a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \ldots\right)$.

Desse modo, temos:

$$(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \ldots\right) \text{ e } (c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \ldots\right)$$

como exemplos de subsequências de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 2.1.3 *Subsequências de uma sequência convergente convergem para o mesmo limite da sequência original.*

Demonstração: Por hipótese, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, portanto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$. Considere $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n > N$. Como $n_k > k$, para todo k, o mesmo N será suficiente para a subsequência, isto é, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ sempre que $k > N$. $\square$

Exemplo 2.1.12 (Critério da Divergência) *O Teorema 2.1.3 é útil para verificarmos, de modo conciso, a divergência de uma sequência.*

Vamos mostrar que a sequência dada por:

$$\left(+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots\right) \tag{2.2}$$

não é convergente.

Primeiramente, observe que:

$$\left(+\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, \dots\right)$$

é uma subsequência de (2.2) que converge para $+\dfrac{1}{5}$.

Mas, também temos que:

$$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots\right)$$

é uma subsequência de (2.2), diferente da sequência original, que converge para $-\dfrac{1}{5}$.

Portanto, temos duas subsequências convergindo para dois valores distintos. Logo, concluímos que a sequência original diverge.

Teorema 2.1.4 *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = a$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = a$*, então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*, onde* $a \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = a$, existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_p \implies |x_{2n} - a| < \varepsilon$. Analogamente, como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = a$, existe $n_q \in \mathbb{N}$ de modo que $n > n_q \implies |x_{2n-1} - a| < \varepsilon$. Tomemos $n_0 = max\{2n_p,\ 2n_q - 1\}$. Então, para $n \geq n_0$, temos:

- Se $n = 2k$, temos que:

  Então $2k = n \geq n_0 > 2n_p$. Assim, $k > n_p$ e $|x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon$.

- Se $n = 2k - 1$, temos que:

  Então $2k - 1 = n \geq n_0 > 2n_q - 1$. Assim, $k > n_q$ e $|x_n - a| = |x_{2k-1} - a| < \varepsilon$.

Logo, em ambos os casos, quando $n > n_0$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. □

Quando analisamos os termos de uma sequência a partir da paridade dos respectivos índices, de fato estamos gerando duas subsequências: os termos de índices pares formam uma subsequência, e os termos de índices ímpares formam outra subsequência. E, assim, pelo Teorema 2.1.4, se ambas as subsequências convergem para o mesmo valor, a sequência original também converge para o referido valor real. Extrapolando esse raciocínio, podemos tomar partições dos naturais, ou seja, criar diversas subsequências.

Teorema 2.1.5 *Se* $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{N}_k$ *e* $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}_1} x_n = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_2} x_n = \ldots = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_k} x_n = a$*, então* $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$*, onde* $a \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots, \mathbb{N}_k$ tais que, se $n \in \mathbb{N}_i$, com $n > n_i$, então $|x_n - a| < \varepsilon$. Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, se $n \geq n_0$, então $n > n_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Desta forma, $|x_n - a| < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. $\square$

O Teorema 2.1.5 é útil nos casos em que particionamos o domínio da sequência em subconjuntos disjuntos. Daqui em diante, indicaremos esses casos por:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} L_1, \text{ se } n \in \mathbb{N}_1. \\ L_2, \text{ se } n \in \mathbb{N}_2. \\ L_3, \text{ se } n \in \mathbb{N}_3. \\ \quad \vdots \\ L_k, \text{ se } n \in \mathbb{N}_k. \end{cases}$$

Particularmente, iremos denotar:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} L_1, \text{ se } n \text{ for par.} \\ L_2, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 2.1.13 *A sequência* $(+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$ *diverge.*

Note que a sequência tem o n-ésimo termo definido por $a_n = \begin{cases} +1, & \text{se } n \text{ for par.} \\ -1, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

Portanto, ao calcularmos o limite, segue-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} +1, & \text{se } n \text{ for par.} \\ -1, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

No entanto, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge, pois cada uma das subsequências converge para um valor distinto.

Teorema 2.1.6 (do confronto) *Considere que exista um natural* N *tal que, para todo* $n \geq N$*,* $a_n \leq b_n \leq c_n$*. Se* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$*, então* $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = L$*.*

Demonstração: Ver Guidorizzi (1998, p. 3). $\square$

Destacamos que o Teorema 2.1.6 é útil para determinar a convergência de sequências cujos limites são mais complexos. Além disso, o teorema também possui uma versão análoga para o cálculo de limites de funções.

Exemplo 2.1.14 *A sequência definida por* $b_n = \dfrac{cos(n)}{n}$, *com* $n > 0$, *converge para* 0.

Primeiramente, como $-1 \leq cos(n) \leq 1$ e $n > 0$, temos:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Então, tomando sequências $a_n = -\dfrac{1}{n}$ e $c_n = \dfrac{1}{n}$, iremos calcular os limites. Note que:

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

Por outro lado:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Assim, como os limites dos extremos são iguais a zero, pelo Teorema 2.1.6 vem que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{cos(n)}{n} = 0.$$

Teorema 2.1.7 (Propriedades de sequências convergentes) *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências convergentes,* p *um natural e* c *uma constante real, então:*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = c \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(iv) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

(v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$, *se* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

(vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} [a_n]^p = \left[\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right]^p$.

Demonstração: Consultar em Cerqueira (2013, p. 26). □

Exemplo 2.1.15 *Considere* $a_n = \dfrac{1}{3^n}$ *e* $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$. *Pelos exemplos 2.1.6 e 2.1.7, temos que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$. *Mais ainda, suponha* $n > 0$.

(i) A sequência $\left(+\frac{3}{1}, +\frac{11}{6}, +\frac{13}{9}, +\frac{139}{108}, \ldots\right)$, definida por $p_n = \left(\frac{1}{3^n} + \frac{n+2}{n+1}\right)$, converge para 1.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 0 + 1 = 1.$$

(ii) A sequência $\left(-\frac{1}{1}, -\frac{7}{6}, -\frac{11}{9}, -\frac{131}{108}, \ldots\right)$, definida por $q_n = \left(\frac{1}{3^n} - \frac{n+2}{n+1}\right)$, converge para -1.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 0 - 1 = -1.$$

(iii) A sequência $\left(\frac{14}{1}, \frac{21}{2}, \frac{28}{3}, \frac{35}{4}, \ldots\right)$, definida por $r_n = \frac{7n+14}{n+1}$, converge para 7.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n+14}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 7 \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 7 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 7 \cdot 1 = 7.$$

(iv) A sequência $\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{6}, \frac{4}{27}, \frac{5}{108}, \ldots\right)$, definida por $t_n = \frac{n+2}{(n+1)\cdot 3^n}$, converge para 0.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)\cdot 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

(v) A sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{36}, \frac{4}{135}, \ldots\right)$, definida por $u_n = \frac{n+1}{(n+2)\cdot 3^n}$, converge para 0.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(n+2)\cdot 3^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(vi) A sequência $\left(\frac{4}{1}, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \ldots\right)$, definida por $v_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$, converge para 1.

De fato, pelo Teorema 2.1.7,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 = \left[\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^2 = 1^2 = 1.$$

Note que as propriedades valem apenas para sequências convergentes. Como veremos no Exemplo 2.1.16, quando as sequências são divergentes, não temos garantia alguma de que a adição, a multiplicação, a subtração e a divisão entre os termos de duas sequências divergentes resulte em uma sequência divergente. Daí o destaque e interesse no estudo das sequências convergentes, pois elas são "bem comportadas".

Exemplo 2.1.16 *Considere as sequências* $(1, 4, 9, 16, \ldots)$ *e* $(1, 8, 27, 64, \ldots)$*, descritas respectivamente por* $a_n = (n+1)^2$ *e* $b_n = (n+1)^3$*.*

É imediato que ambas as sequências divergem, uma vez que:

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^3.$$

No entanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Além da classificação de uma sequência em convergente ou divergente, é interessante a tentativa de adicionar n consecutivos termos de uma sequência e investigar se essa soma tende a se estabilizar para um certo número real. Quando generalizamos a adição para os infinitos termos, temos as séries.

2.2 Séries Numéricas

Definição 2.2.1 (Série) *Dada uma sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, a expressão formal associada à sequência:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

é a sua série.

Destacamos que a série é um somatório com infinitos termos e, portanto, nem sempre resultará em um valor real e finito. Desse modo, com o intuito de estabelecermos um valor específico para a adição dos infinitos termos, vamos considerar uma nova sequência.

Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, tomaremos uma outra sequência, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0;\\ s_1 &= a_0 + a_1;\\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2;\\ &\vdots\\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Chamamos $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de a sequência das **somas parciais** ou reduzidas da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.2.2 (Soma da série) *Considere a série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, *e* s_n *sua n-ésima soma parcial, isto é,* $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Se a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente e, mais ainda, se* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ *existir como um número real, então a série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é dita convergente e escrevemos* $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s$.

Se esse limite existir, diremos que a série é **convergente** e que s é a **soma** da série. Caso contrário, diremos que a série é **tradicionalmente divergente**. Sendo s um número real, uma série diverge em três situações: o limite não existe, o limite é mais infinito ou o limite é menos infinito.

Exemplo 2.2.1 *A série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$$

é convergente se $|r| < 1$, *e sua soma é:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

De fato, considere a série finita:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n. \tag{2.3}$$

Então, multiplicando a Equação 2.3 por r, com $r \neq 1$, temos:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^{k+1} = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots + ar^{n+1}. \tag{2.4}$$

Em seguida, subtraindo a Equação 2.4 da Equação 2.3, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - \sum_{k=0}^{n} ar^{k+1} = a - ar^{n+1}. \tag{2.5}$$

Colocando r em evidência, na Equação 2.5, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = (1-r)\sum_{k=0}^{n} ar^k = a - ar^{n+1}. \tag{2.6}$$

Multiplicando a Equação 2.6 pelo inverso de $1-r$, vem que:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}. \tag{2.7}$$

Então, na Equação 2.7, colocando o termo a em evidência, segue-se que:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r}. \tag{2.8}$$

Para a série infinita, basta tomarmos o limite na Equação 2.8:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} ar^k = \sum_{k=0}^{+\infty} ar^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r}. \tag{2.9}$$

Avaliando o limite em (2.9), notamos que se $|r| > 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1} = \pm\infty$; e se $|r| < 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$. Portanto, se $|r| < 1$, a série converge e:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Exemplo 2.2.2 *Na série geométrica, tomando $a = 1$, obtemos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots,$$

que é convergente se $|r| < 1$, e sua soma é dada por:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Exemplo 2.2.3 *A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$ diverge tradicionalmente.*

De fato, $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

Teorema 2.2.1 *Se a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 38). □

Exemplo 2.2.4 *Como* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ *é convergente, então* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$.

Note que a recíproca do Teorema 2.2.1 não é verdadeira.

Exemplo 2.2.5 *A série harmônica,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, *é tradicionalmente divergente, como veremos nos exemplos 2.2.9 e 2.2.10. Porém,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Teorema 2.2.2 (Critério da Divergência) *Seja a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *não existir ou se* $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é tradicionalmente divergente.*

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 38). □

Exemplo 2.2.6 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots$ *é tradicionalmente divergente.*

Pelo Exemplo 2.1.7, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, então o Teorema 2.2.2 garante que essa série diverge tradicionalmente.

Exemplo 2.2.7 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots$ *é tradicionalmente divergente.*

Inicialmente, consideraremos a sequência das somas parciais:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1;\\
s_1 &= 1 - 1 = 0;\\
s_2 &= 1 - 1 + 1 = 1;\\
&\vdots\\
s_n &= \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for par.}\\ 0, & \text{se } n \text{ for ímpar.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Com isso, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$ para n par e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ para n ímpar. Então, como a sequência das somas parciais admite duas subsequências convergindo para valores diferentes, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge. Logo, a série diverge tradicionalmente.

Teorema 2.2.3 (Propriedades de séries convergentes) *Se* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *forem convergentes, então também o serão as séries* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ca_n$*, com* c *constante,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$ *e*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n.$

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 17). □

Exemplo 2.2.8 *As séries* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$ *e* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}}$ *convergem. Então, a série da soma dessas séries é convergente.*

De fato, como são séries geométricas de razão menor do que 1, ambas convergem:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

E também:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Pelo Teorema 2.2.3, segue-se que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Uma série pode convergir ou divergir e, durante o século XIX, conforme Ferraro (2008), Cauchy e Abel formularam critérios de convergência. Para algumas séries, apenas conseguiremos dizer se converge ou diverge. Pode ser que não sejamos capazes de encontrar uma fórmula fechada para as n-ésimas somas parciais delas.

Mas nem por isso os matemáticos que viveram antes desse período se mostraram incapazes de descobrir se uma série era divergente ou não. De acordo com Luchetta (2017), Nicole Oresme (1323 – 1382) foi capaz de demonstrar que a série harmônica divergia no sentido tradicional.

Exemplo 2.2.9 *Com base em Oresme, vamos mostrar que a série harmônica diverge no sentido tradicional.*

Considere a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$.

A n-ésima soma parcial da série harmônica é dada por:

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1},$$

cuja análise descuidada poderia sugerir que ela é limitada. Entretanto, notamos que 2 não é um limitante superior, pois:

$$s_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2.$$

Analogamente, podemos mostrar que $s_8 > \dfrac{5}{2}$. De modo generalizado, temos:

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{\text{k vezes}} \\
&= 1 + k \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Com isso, quando temos infinitos termos, ou seja, $k \to +\infty$, decorre que:

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = +\infty.$$

Dessa maneira, a série harmônica é divergente no sentido tradicional. Alternativamente, podemos utilizar o critério da integral para mostrar a divergência da série, como veremos no Exemplo 2.2.10.

Teorema 2.2.4 (Critério da Integral) *Consideremos a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e suponhamos que exista um número natural* p *e uma função* $f : [p, +\infty[\to \mathbb{R}$ *contínua, positiva e decrescente em* $[p, +\infty[$, *com* $n \geq p$ *e seja* $a_n = f(n)$. *Então, a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se, e somente se, a integral imprópria* $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 40). □

Exemplo 2.2.10 *Vamos provar que a série harmônica,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, *é tradicionalmente divergente.*

Primeiramente, os termos da série harmônica são positivos e decrescentes, uma vez que $n+2 > n+1 \implies \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$. E, a função $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x+1}$, é contínua. Diante disso, podemos utilizar o critério da integral com $p = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x+1} dx = \lim_{b\to+\infty} \ln(x+1)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln(b+1) - \ln(2)) = +\infty.$$

Como a integral diverge tradicionalmente, então a série harmônica também diverge tradicionalmente.

Exemplo 2.2.11 *Vamos provar que a série dos recíprocos dos números ímpares,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$, *é divergente.*

Primeiramente, os termos da série são positivos e decrescentes, porque $2n+3 > 2n+1 \implies \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+3}$. E, a função $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, é contínua. Diante disso, podemos utilizar o critério da integral com $p = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x+1} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln(2b+1)}{2} - \frac{\ln(3)}{2} \right) = +\infty.$$

Como a integral diverge tradicionalmente, então a série dos recíprocos dos ímpares também diverge tradicionalmente.

Exemplo 2.2.12 *A série dos recíprocos dos quadrados dos naturais maiores do que zero,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$, *é convergente.*

Primeiramente, os termos da série dos recíprocos dos quadrados dos naturais são positivos e decrescentes, uma vez que $(n+2)^2 > (n+1)^2 \implies \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)^2}$.

Mais ainda, a função $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, é contínua. Diante disso, podemos utilizar o critério da integral com $p = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Como a integral converge, então a série também converge. É importante ressaltar que a soma dessa série foi dada por Euler, que demonstrou[5] que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teorema 2.2.5 (Critério da Comparação) *Suponha que* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *sejam séries de termos positivos. Além disso, admita que exista um natural* p *tal que para todo* $n \geq p$, $a_n \leq b_n$. *Nestas condições:*

(i) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *for convergente, então* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *também será convergente.*

(ii) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *for tradicionalmente divergente, então* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *também será tradicionalmente divergente.*

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 44). □

Exemplo 2.2.13 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n - 2}{9^n}$ *é convergente.*

Analisando os termos da série, observamos que: $\frac{0}{1} < \frac{2}{1}, \frac{4}{9} < \frac{6}{9}, \frac{16}{81} < \frac{18}{81}, \frac{52}{729} < \frac{54}{729}, \frac{160}{6561} < \frac{162}{6561}, \ldots, \frac{2 \cdot 3^n - 2}{9^n} < \frac{2 \cdot 3^n}{9^n}, \ldots$

Particularmente, temos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{9^n}$ é uma série geométrica convergente. Logo, pelo critério da comparação, a série original também converge.

Exemplo 2.2.14 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ *é tradicionalmente divergente.*

Primeiramente, note que $0 \leq \sqrt{n+1} \leq n+1$, para $n \geq 0$. Então, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, ou seja, os termos dessa série são maiores ou iguais, em ordem, que os termos da série harmônica, que diverge tradicionalmente. Portanto, essa série é tradicionalmente divergente.

Definição 2.2.3 (Série Alternada) *Uma série é dita alternada quando seus termos são alternadamente positivos e negativos.*

[5] A demonstração original de Euler pode ser consultada em Lopes (2021), que traduziu o artigo *De summis serierum reciprocarum* para o português. Também destacamos que há diferentes demonstrações de que o resultado é válido, uma delas envolve a identidade de Parseval, utilizando as séries de Fourier.

Exemplo 2.2.15 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ *é uma série alternada.*

Note que a série do Exemplo 2.2.15 é alternada e já mostramos, no Exemplo 2.2.7, que essa série diverge. Contudo, ser alternada não é condição necessária nem suficiente para que uma série seja divergente. Há séries alternadas que convergem e séries divergentes que não são alternadas. O Teorema 2.2.6 é útil para determinar quando uma série alternada converge.

Teorema 2.2.6 (Critério da Série Alternada) *Seja a série alternada* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$*. Se a sequência* a_n *for decrescente e se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, a série alternada* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *converge.*

Demonstração: Consultar em Guidorizzi (1998, p. 35). □

Exemplo 2.2.16 *A série alternada* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \ldots$ *converge.*

Note que os termos da sequência $a_n = \frac{1}{(n+1)^3}$ são decrescentes e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0$. Logo, pelo critério da série alternada, essa série converge.

Definição 2.2.4 (Absolutamente convergente) *Uma série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é dita absolutamente convergente se a série dos valores absolutos,* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$*, for convergente.*

Definição 2.2.5 (Condicionalmente convergente) *Uma série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é dita condicionalmente convergente se ela for convergente, mas divergir absolutamente.*

Exemplo 2.2.17 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ *é condicionalmente convergente.*

Tomando os valores absolutos dessa série, obtemos a série harmônica, que é tradicionalmente divergente.

Teorema 2.2.7 (Critério da Razão) *Dada a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, com* $a_n \neq 0$ *para todo natural* n*, suponha que* $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ *exista, finito ou infinito. Nestas condições:*

(i) Se $L < 1$, então a série é convergente.

(ii) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então a série é tradicionalmente divergente.

(iii) Se $L = 1$, então o critério é inconclusivo.

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 80). □

Exemplo 2.2.18 *Vamos provar que a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ *é convergente.*

Pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3\cdot 3^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{3^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Exemplo 2.2.19 *Embora a série* $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1) = 1+2+3+4+5+\ldots$ *seja reconhecidamente divergente no sentido tradicional, o teste da razão é inconclusivo.*

Basta observar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| = 1.$$

Teorema 2.2.8 (Critério da Raiz) *Dada uma série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, com* $a_n > 0$ *para todo* $n \geq p$*, em que* p *é um natural fixo, suponha que* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ *exista, finito ou infinito. Então:*

(i) Se $L < 1$, então a série é convergente.

(ii) Se $L > 1$, então a série é tradicionalmente divergente.

(iii) Se $L = 1$, então o critério é inconclusivo.

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 67). □

Exemplo 2.2.20 *Vamos mostrar que a série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{[\log(n)]^n}$ *é convergente.*

Utilizando o teste da raiz, temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\log\,(n)]^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0.$$

Até então, estudamos séries específicas quanto à convergência ou à divergência. Como apenas as séries convergentes admitem uma soma[6], é interessante uma generalização que nos permita formular séries convergentes, nesse momento as séries de potências recebem destaque.

2.3 Séries de Potências

Definição 2.3.1 *Uma série de potências é uma expressão formal*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

em que x é a variável e cada termo c_n é um valor constante, denominado coeficiente.

Fixado um certo x, a série resultante pode ser convergente ou divergente. Contudo, daremos destaque aos valores de x para os quais a série converge e possui uma soma bem definida. É importante destacar que a escolha do x é essencial, uma vez que pode acontecer da série convergir para x e divergir para $x + \varepsilon$, sendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$.

Definição 2.3.2 (Série de potências centrada em a) *De modo geral, definimos uma série de potências em $x - a$ ou centrada no número real a, como:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

Assim, estabelecida uma série de potências, podemos utilizar algum dos testes de convergência para determinar os valores de x que tornam a série convergente.

Exemplo 2.3.1 *Vamos determinar os valores de x que tornam a série geométrica, $\sum_{n=0}^{+\infty} ax^n$, convergente.*

Utilizando o teste da razão para verificar quando essa série converge, obtemos:

[6] Note que essa soma é parecida com a aritmética. Entretanto, podemos definir a soma de outra maneira, como vimos no Capítulo 1. Retomaremos a concepção de soma posteriormente, ampliando o seu sentido, assim como o fez Euler.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{ax^{n+1}}{ax^n}\right| < 1 \implies \lim_{n\to+\infty}|x| < 1 \implies |x| < 1.$$

Ou seja, mais uma vez afirmamos que a série geométrica de razão x converge quando $-1 < x < 1$.

Teorema 2.3.1 *Para uma dada série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$*, tem-se somente três possibilidades:*

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série é convergente para todo x.

(iii) Existe um número real positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge tradicionalmente se $|x-a| > R$.

Demonstração: Consultar Guidorizzi (1998, p. 131). □

Exemplo 2.3.2 *Vamos investigar a convergência da série* $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n)! \cdot \left(\frac{x}{9}\right)^{n+1}$.

Considerando $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2(n+1))! \cdot \left(\frac{x}{9}\right)^{n+2}}{(2n)! \cdot \left(\frac{x}{9}\right)^{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+2)! \cdot x^{n+2} \cdot 9^{n+1}}{(2n)! \cdot x^{n+1} \cdot 9^{n+2}}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left|(2n+2)(2n+1) \cdot \frac{x}{9}\right|.\end{aligned}$$

Como $(2n+2)(2n+1) \to +\infty$, para que esse limite seja menor do que 1, necessariamente $x = 0$. Então, a série converge apenas quando $x = 0$.

Exemplo 2.3.3 *Investigaremos a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^n}$*, com* $x \in \mathbb{R}$*,* $x > 0$.

Aplicando o critério da raiz, vem que:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} < 1 \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n} < 1 \implies 0 < x < +\infty.$$

Ou seja, a série converge para $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$.

Exemplo 2.3.4 *Vamos investigar a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^{n+1}, \text{ sendo } \alpha \text{ um natural.}$$

Primeiramente, iremos reescrever a série como:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot (\alpha-n)!}.$$

Agora, aplicando o critério da razão, supondo $x \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{\alpha! \cdot x^{n+2}}{(n+1)! \cdot (\alpha-n-1)!}}{\dfrac{\alpha! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot (\alpha-n)!}} \right| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha! \cdot x^{n+2} \cdot (n)! \cdot (\alpha-n)!}{(n+1)! \cdot (\alpha-n-1)! \cdot \alpha! \cdot x^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x(\alpha-n)}{n+1} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(\alpha-n)}{n+1} \right| \\
&= |x|.
\end{aligned}$$

Portanto, para que a série seja convergente, basta impormos $|x| < 1$. Isto significa que existe $R = 1$ de modo que, se $|x-a| < R$, onde $a = 0$, a série converge.

Definição 2.3.3 (Raio de convergência) *Dada uma série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$, *o número positivo* R *é dito o raio de convergência da série se ela converge para* $|x-a| < R$ *e diverge tradicionalmente para* $|x-a| > R$.

Definição 2.3.4 (Intervalo de convergência) *Considere* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ *uma série de potências com raio de convergência* R. *O intervalo de convergência é o intervalo real para o qual a série converge. Temos quatro possibilidades para o intervalo:*

(i) $]a-R, a+R[$;

(ii) $[a-R, a+R]$;

(iii) $[a-R, a+R[$;

(iv) $]a-R, a+R]$.

As quatro possibilidades para o intervalo de convergência decorrem da própria definição de raio de convergência. É importante ressaltar que nada é dito sobre a convergência nos extremos dos intervalos. Por isso, além do raio de convergência, também temos que verificar a divergência ou a convergência da série nos extremos.

Exemplo 2.3.5 *Considere a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-5)^{n+1}}{n+1}$.

Inicialmente, vejamos para quais valores de x essa série converge. Supondo $x \neq 5$, aplicamos o critério da razão:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(x-5)^{n+2}}{n+2}}{\dfrac{(x-5)^{n+1}}{n+1}} \right| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+2}\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(x-5)^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x-5)\cdot(n+1)}{(n+2)} \right| = |x-5| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| \\
&= |x-5|.
\end{aligned}$$

Impondo a condição $|x-5| < 1$, obtemos $4 < x < 6$. Agora, iremos testar os valores nos extremos do intervalo $]4,\ 6[$:

- Em $x = 6$:
  Neste caso, obtemos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$, que é a série harmônica. Pelo Exemplo 2.2.10, sabemos que ela diverge no sentido tradicional.
- Em $x = 4$:
  Neste caso, obtemos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Pelo Exemplo 2.2.17, sabemos que ela converge.

Como a série diverge tradicionalmente no extremo $x = 6$, concluímos que o intervalo de convergência dessa série é $[4, 6[$.

Observe que o Teorema 2.3.1 exige um formato específico para as séries de potências de modo que uma das três possibilidades ocorra. Se a série de potências tiver um formato diferente do requisitado, então o teorema não é válido, podendo resultar num intervalo de convergência dado pela união de intervalos reais.

Exemplo 2.3.6 *Considere a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2-5)^{n+1}}{n+1}$.

Inicialmente, vejamos para quais valores de x essa série converge. Primeiramente, iremos aplicar o critério da razão com $x \neq \pm\sqrt{5}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(x^2-5)^{n+2}}{n+2}}{\dfrac{(x^2-5)^{n+1}}{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x^2-5)^{n+2}\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(x^2-5)^{n+1}} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x^2-5)\cdot(n+1)}{(n+2)} \right| = |x^2-5| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| \\
&= |x^2-5|.
\end{aligned}
$$

Agora, impondo $|x^2-5| < 1$, obtemos $x \in \left]-\sqrt{6}, -2\right[\cup \left]2, \sqrt{6}\right[$. Realizando o teste nos extremos, o intervalo de convergência da série é $\left]-\sqrt{6}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right[$.

Observamos, ao longo do capítulo, o triunfo das sequências e das séries convergentes. Notamos que a convergência oferece propriedades que a divergência não garante. Portanto, está justificada a visibilidade das séries convergentes perante as séries divergentes. Porém, em contrapartida, a exclusão das séries divergentes da teoria tradicional deixou lacunas que foram preenchidas somente no final do século XIX, como foi o caso da soma das séries divergentes.

Por fim, gostaríamos de trazer uma questão que talvez tenha passado despercebida: a soma das séries convergentes não é a soma aritmética usual. Há algo que essencialmente as diferencia: o infinito. A soma das séries convergentes é convencionada a partir de um limite. Assim, seguindo a argumentação de Knopp (1928), é arbitrária.

Então, qual seria a implicação de considerar outra definição para a soma das séries? Foi isso que os matemáticos fizeram e acabaram desenvolvendo a teoria da somabilidade, na qual, utilizando métodos específicos, séries divergentes podem assumir valores finitos.

3 Teoria das séries divergentes

De acordo com Alabdulmohsin (2016), entre os anos de 1830 e 1880, pouco empenho foi empregado no estudo das séries divergentes. Foi apenas no final do século XIX que elas receberam um destaque maior, quando os métodos de soma, no sentido generalizado, foram propostos. Ferraro (2008) apresenta que as circunstâncias históricas que possibilitaram a formulação desses métodos estão intimamente relacionadas ao método axiomático da virada do século. Mais ainda, segundo Ferraro (2008), foram as obras de Cesàro e Borel que deram ascensão ao tema.

Como já vimos no Capítulo 1, Euler foi o primeiro matemático a definir a soma das séries divergentes. Mas foi Cesàro quem forneceu a primeira definição moderna. Entretanto, é importante relatar que, de acordo com Ferraro (1999), tais desenvolvimentos envolveram diversos resultados demonstrados durante uma década.

Neste capítulo, apresentamos uma introdução à teoria das séries divergentes. Inicialmente, abordamos as definições clássicas e, em seguida, exploramos dois métodos de soma no sentido generalizado. Utilizamos como principais referências Hardy (1949), Knopp (1928) e Markusson (2022).

Com a finalidade de diferenciarmos a teoria tradicional da nova teoria, nos métodos de somabilidade iremos escrever as somas parciais como A_n no lugar de s_n. Mais ainda, utilizaremos a notação somável*, limitável* e divergente* quando estivermos nos referindo à teoria da somabilidade.

Definição 3.0.1 (Somável e Limitável) *Consideraremos $\mathcal{V}$ um método que associe o número real s a uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neste caso, dizemos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **limitável*** pelo método $\mathcal{V}$, e a respectiva série, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, é **somável*** pelo método $\mathcal{V}$. Denominaremos de **s** o valor da sequência e a soma da série no sentido generalizado.*

Eventualmente, teremos variados métodos de soma, por exemplo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \ldots, \mathcal{V}, \ldots$ e escreveremos de maneira genérica $\mathcal{V}$-*método*. Supondo que uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitável* por $\mathcal{V}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ seja somável* por $\mathcal{V}$ para o valor real s, indicaremos pela notação do método aplicado entre parênteses:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s\ (\mathcal{V}). \tag{3.1}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V}). \tag{3.2}$$

Também podemos resumir as equações 3.1 e 3.2 com:

$$\mathcal{V}(s_n) \to s.$$

Neste caso, dizemos que a nova sequência gerada pelo método aplicado é somável* para s pelo método $\mathcal{V}$.

Um método de soma, ou a somabilidade, de séries divergentes pode admitir iterações ou ser aplicado sucessivamente. Sendo k o índice da iteração do método $\mathcal{V}$, indicaremos por $\mathcal{V}_k$*-método*.

Definição 3.0.2 (Conservatividade) *Um $\mathcal{V}$-método de somabilidade é dito conservativo se toda série convergente no sentido tradicional também for $\mathcal{V}$-somável*. Isto é:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = t\ (\mathcal{V})$$

para $s, t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.0.3 (Regularidade) *Um $\mathcal{V}$-método de somabilidade é dito regular se toda série convergente no sentido tradicional também for $\mathcal{V}$-somável* para o mesmo valor:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V})$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Definição 3.0.4 (Linearidade) *Um $\mathcal{V}$-método de somabilidade é dito linear se:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V})\ e\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = t\ (\mathcal{V}) \implies \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = (s+t)\ (\mathcal{V})$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c a_n = cs\ (\mathcal{V})$$

para $s,\ t,\ c \in \mathbb{R}$.

Definição 3.0.5 (Estabilidade) *Um $\mathcal{V}$-método de somabilidade é dito estável se:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V}) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = (s - a_0)\ (\mathcal{V})$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.0.1 *Todo método de somabilidade linear e estável soma a série de Grandi para o valor $\frac{1}{2}$ $(\mathcal{V})$.*

Primeiramente, suponha que a série seja somável:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = s\ (\mathcal{V}).$$

Em seguida, considerando que o método é estável, podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = s - 1\ (\mathcal{V}) \\ \implies 1 + &\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = s\ (\mathcal{V}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agora, sendo linear, segue-se que:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1) \cdot (-1)^{n-1}\ (\mathcal{V}) \\ &= 1 + (-1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ (\mathcal{V}) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ (\mathcal{V}) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n}\ (\mathcal{V}) \\ &= 1 - s\ (\mathcal{V}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Daí, pelas equações (3.3) e (3.4), obtemos:

$$s = 1 - s\ (\mathcal{V}) \implies 2s = 1\ (\mathcal{V}) \implies s = \frac{1}{2}\ (\mathcal{V}).$$

Definição 3.0.6 (Consistência) *Dois métodos de soma, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, são ditos consistentes se toda série é somável* por ambos os métodos para o mesmo valor, isto é:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V})\ e\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = t\ (\mathcal{W}) \implies s = t$$

para $s,\ t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.0.7 (Robustez ou Força) *Um $\mathcal{V}$-método de somabilidade é mais robusto ou forte que um $\mathcal{W}$-método se toda série $\mathcal{W}$-somável* também for $\mathcal{V}$-somável*, mas não vale a recíproca. Além disso, se toda série $\mathcal{W}$-somável* for $\mathcal{V}$-somável e vice-versa, os métodos são ditos igualmente robustos ou equipotentes.*

Definição 3.0.8 (Inclusão ou Equivalência) *Um método de soma, $\mathcal{V}$, inclui outro método, $\mathcal{W}$, se a $\mathcal{W}$-somabilidade de uma série implica a $\mathcal{V}$-somabilidade para o mesmo valor s. Ou seja:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{W}) \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V}).$$

Se $\mathcal{W}$ também inclui $\mathcal{V}$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{W}) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (\mathcal{V}),$$

os métodos são equivalentes.

Evidentemente, há diversos métodos de somas no sentido generalizado. Entretanto, a formulação de um novo método deve levar em conta alguns requisitos, uma vez que ele deve ser capaz de contemplar a teoria tradicional das séries convergentes e expandir seu domínio. Então, seguindo Knopp (1928), um $\mathcal{V}$-método deve satisfazer dois princípios básicos:

1. **Permanência:** O método de somabilidade precisa ser consistente, regular, linear e estável.
2. **Extensão:** Ao menos uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que diverge na teoria tradicional obrigatoriamente é limitável pelo novo método.

Isto significa que um método de soma no sentido generalizado não pode contradizer os resultados já estabelecidos pela teoria tradicional (permanência) e deve ser capaz de aumentar o domínio de validade da teoria até então existente (extensão).

Desse modo, consideraremos apenas métodos que seguem aos princípios de permanência e extensão. Logo a seguir, trataremos de dois métodos de somabilidade: Cesàro e Hölder.

3.1 Método de Cesàro

Em 1890, o matemático italiano Ernesto Cesàro publica o artigo *Sur la multiplication des séries* na revista *Bulletin des sciences mathématiques*, estabelecendo a primeira definição moderna de soma de séries divergentes num sentido generalizado. Isto é, a nova definição foi construída a partir de sequências de números reais, somas parciais e limites. Nesta seção veremos como aplicar esse método. Ainda salientamos que o método de Cesàro muitas vezes envolve somas parciais que dependem de fórmulas para expressar o n-ésimo termo da sequência, em razão disso, sempre que for preciso, mostraremos previamente como obter essas fórmulas.

Definição 3.1.1 (Somável $(C, 1)$) *Sejam $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ as n-ésimas somas parciais de uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos:*

$$C_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1}.$$

Se $C_n^1 \to s \in \mathbb{R}$, quando $n \to +\infty$, então dizemos que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é Cesàro-somável de ordem 1 ou somável $(C, 1)$ para o valor s.

Exemplo 3.1.1 *Buscaremos o termo geral da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (+1,\ 0,\ +1,\ 0,\ +1,\ 0,\ \ldots)$ e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Começaremos nosso índice por 0, e explicitaremos alguns termos da sequência:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1;\\ a_1 &= 0;\\ a_2 &= 1;\\ a_3 &= 0;\\ a_4 &= 1;\\ a_5 &= 0;\\ &\vdots \end{aligned}$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ for par.} \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos indicar a sequência por uma única expressão:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

Agora, vamos construir a sequência das somas parciais de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1 + 0 = 1;\\
&A_2 = 1 + 0 + 1 = 2;\\
&A_3 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2;\\
&A_4 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3;\\
&A_5 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3;\\
&A_6 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 4;\\
&A_7 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4;\\
&A_8 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 5;\\
&A_9 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão que não é alternante. Ademais, constatamos a seguinte regularidade: $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 3$, $f(6) = 4$, $f(8) = 5$, $\ldots$, ou seja, os índices n que são pares levam a sequência para os respectivos valores $\frac{n}{2} + 1$.

Por outro lado, $f(1) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(9) = 5$, $\ldots$. Assim, para os índices n que são ímpares, a sequência assume os valores $\frac{n+1}{2}$.

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Temos que $A_n = \frac{n+2}{2}$ ou $A_n = \frac{n+1}{2}$ a depender da paridade do índice. Constatamos que a diferença entre os valores da expressão é de uma unidade no numerador. Na tentativa de escrevermos a sentença por meio de somente uma lei de formação, podemos usar um elemento especial:

$$\delta_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Observe que δ_n assume apenas os valores 0 ou 1. Quando n for par, o termo δ_n será igual a um. Desse modo, podemos utilizar esse elemento para transformar $\frac{n+1}{2}$ em $\frac{n+2}{2}$ da seguinte forma:

$$\frac{n+2}{2} = \frac{n+1+\frac{1+(-1)^n}{2}}{2} = \frac{n+1+\delta_n}{2}.$$

Quando n for ímpar, o termo δ_n será igual a zero, portanto:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{n+1+\frac{1+(-1)^n}{2}}{2} = \frac{n+1+\delta_n}{2}.$$

Assim, podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$A_n = \frac{n+1+\frac{1+(-1)^n}{2}}{2} = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

Nos exemplos subsequentes, utilizaremos de estratégias semelhantes para descrever as sequências por meio de apenas uma expressão. Para isso, adotaremos elementos especiais como δ_n, apenas ajustando índices quando necessário ou adaptando para o nosso contexto.

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões e conjecturas podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.1.2 *A série de Grandi é Cesàro-somável de ordem 1.*

De fato, sendo $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ a série de Grandi, segue-se que:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= 1-1=0; \\ A_2 &= 1-1+1=1; \\ A_3 &= 1-1+1-1=0; \\ &\vdots \\ A_n &= \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ for par.} \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1,\ 0, +1,\ 0, +1,\ 0, +1,\ 0, \ldots). \tag{3.6}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.6), temos:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= 1+0=1; \end{aligned}$$

$$A_2 = 1 + 0 + 1 = 2;$$
$$A_3 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2;$$
$$A_4 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3;$$
$$A_5 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3;$$
$$A_6 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 4;$$
$$A_7 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4;$$
$$A_8 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 5;$$
$$A_9 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5;$$
$$\vdots$$

Segue do Exemplo 3.1.1 que $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é par, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

- Quando n é ímpar, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Então, segue do Teorema 2.1.4 que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, a série de Grandi é somável* pelo método de Cesàro de ordem 1 para o valor $\frac{1}{2}$.

Exemplo 3.1.3 *A série* $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - - + + \ldots$ *é somável (C,1).*

Vamos analisar as somas parciais:

$$A_0 = 1;$$
$$A_1 = 1 - 1 = 0;$$

$$
\begin{aligned}
&A_2 = 1 - 1 - 1 = -1;\\
&A_3 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0;\\
&A_4 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = 1;\\
&A_5 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 0;\\
&A_6 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = -1;\\
&A_7 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0;\\
&A_8 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = 1;\\
&\quad \vdots\\
&A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.}\\ 1, \text{ se } n \in \{0,\ 4,\ 8,\ 12, \ldots\}.\\ -1, \text{ se } n \in \{2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots\}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Note que a sequência das somas parciais é da forma:

$$(+1,\ 0, -1,\ 0, +1,\ 0, -1,\ 0, +1,\ 0, -1,\ 0,\ \ldots). \tag{3.7}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.7), temos:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_0 + A_1 = 1 + 0 = 1;\\
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 + 0 - 1 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 + 0 - 1 + 0 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 = 1;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 1;\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dessa maneira, $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \in \{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11, \ldots\}.\\ 1, \text{ se } n \in \{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9, \ldots\}.\end{cases}$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando $n \in \{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11, \ldots\}$, vem que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n+1} = 0.$$

- Quando $n \in \{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9, \ldots\}$, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Então, segue do Teorema 2.1.5 que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = 0.$$

Portanto, a série é somável* $(C,1)$ para o valor 0.

Exemplo 3.1.4 *A série* $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + + - \dots$ *é somável (C,1).*

Vamos analisar as somas parciais:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2};\\
A_1 &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};\\
A_2 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0;\\
A_3 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\\
A_4 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};\\
A_5 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0;\\
A_6 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\\
A_7 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};\\
A_8 &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0;\\
&\vdots\\
A_n &= \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } n \in \{0,\ 3,\ 6,\ 9, \dots\}.\\ -\frac{1}{2}, \text{ se } n \in \{1,\ 4,\ 7,\ 10, \dots\}.\\ 0, \text{ se } n \in \{2,\ 5,\ 8,\ 11, \dots\}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Note que a sequência das somas parciais é da forma:

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\ 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\ 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\ 0,\ \dots\right). \tag{3.8}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.8), temos:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2};\\
A_0 + A_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;
\end{aligned}$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0;$$
$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$
$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$
$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0;$$
$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$
$$\vdots$$

Consequentemente, $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } n \in \{0,\ 3,\ 6,\ 9, \ldots\}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um múltiplo de 3:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0.$$

- Quando n não é um múltiplo de 3:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n+1} = 0.$$

Então, segue do Teorema 2.1.5 que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = 0.$$

Ou seja, a série é somável* $(C, 1)$ e tem soma igual a 0.

Exemplo 3.1.5 *Seja x um número real, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que:*

$$cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x) = \frac{sen([2n+2]x)}{2sen(x)}.$$

Como resultado preliminar, precisamos da seguinte fórmula de prostaférese:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \tag{3.9}$$

Então, primeiramente considere a igualdade:

$$2sen(x) \cdot [cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x)]$$

$$= 2sen(x)cos(x) + 2sen(x)cos(3x) + 2sen(x)cos(5x) + \\ + \ldots + 2sen(x)cos([2n+1]x). \quad (3.10)$$

Escrevendo cada produto de (3.10) com a fórmula em (3.9), obtemos:

$$sen(2x) + sen(4x) + sen(-2x) + sen(6x) + sen(-4x) + \ldots + sen(2nx) + \\ + sen(-(2nx - 2x)) + sen(2nx + 2x) + sen(-2nx). \quad (3.11)$$

Como $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, a expressão em (3.11) se torna:

$$sen(2x) + sen(4x) - sen(2x) + sen(6x) - sen(4x) + \ldots + sen(2nx) + \\ - sen(2nx - 2x) + sen(2nx + 2x) - sen(2nx). \quad (3.12)$$

Então, de (3.12) resta somente $sen(2nx + 2x)$. Portanto, temos que:

$$2sen(x) \cdot [cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x)] = sen(2nx + 2x).$$

Assim, decorre que:

$$cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x) = \frac{sen([2n+2]x)}{2sen(x)}.$$

Destacamos que esse exemplo é interessante para a educação básica, porque permite explorar propriedades das funções trigonométricas.

Exemplo 3.1.6 *Sendo x um número real, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vamos mostrar que:*

$$sen(2x) + sen(4x) + sen(6x) + \ldots + sen([2n+2]x) = \frac{sen(nx + x)sen(nx + 2x)}{sen(x)}.$$

Como resultado preliminar, precisamos da seguinte fórmula de prostaférese:

$$cos(q) - cos(p) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) sen\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (3.13)$$

Então, primeiramente considere a igualdade:

$$2sen(x) \cdot [sen(2x) + sen(4x) + sen(6x) + \ldots + sen(2nx + 2x)] \\ = 2sen(x)sen(2x) + 2sen(x)sen(4x) + 2sen(x)sen(6x) + \\ + \ldots + 2sen(x)sen(2nx + 2x). \quad (3.14)$$

Escrevendo cada produto de (3.14) com a fórmula em (3.13), obtemos:

$$cos(-x) - cos(3x) + cos(-3x) - cos(5x) + cos(-5x) - cos(7x) + \ldots +$$
$$+ cos(-2nx + x) - cos(2nx + x) + cos(-2nx - x) - cos(2nx + 3x). \quad (3.15)$$

Como $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, a expressão em (3.15) se torna:

$$cos(x) - cos(3x) + cos(3x) - cos(5x) + cos(5x) - cos(7x) + \ldots +$$
$$+ cos(-2nx + x) - cos(2nx + x) + cos(2nx + x) - cos(2nx + 3x). \quad (3.16)$$

Como os termos se cancelam aos pares, da Expressão 3.16 resta somente $cos(x) - cos(2nx + 3x)$. Portanto, temos que:

$$2sen(x) \cdot [sen(2x) + sen(4x) + sen(6x) + \ldots +$$
$$+ sen(2nx + 2x)] = cos(x) - cos(2nx + 3x). \quad (3.17)$$

Por outro lado, temos que:

$$2sen(nx + x)sen(nx + 2x) = cos(x) - cos(2nx + 3x). \quad (3.18)$$

Assim decorre da igualdade das equações 3.17 e 3.18 que:

$$sen(2x) + sen(4x) + sen(6x) + \ldots + sen([2n + 2]x) = \frac{sen(nx + x)sen(nx + 2x)}{sen(x)}.$$

Nesse caso, utilizamos propriedades das funções trigonométricas e as fórmulas de prostaférese, temas do ensino médio, para demonstrar a validade da afirmação.

Exemplo 3.1.7 *A série $cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n + 1]x) + \ldots$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, é somável* (C,1).*

Primeiramente, utilizaremos a identidade do Exemplo 3.1.5:

$$cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n + 1]x) = \frac{sen([2n + 2]x)}{2sen(x)}.$$

Então, as somas parciais são:

$$A_0 = cos(x) = \frac{sen(2x)}{2sen(x)};$$
$$A_1 = cos(x) + cos(3x) = \frac{sen(4x)}{2sen(x)};$$
$$A_2 = cos(x) + cos(3x) + cos(5x) = \frac{sen(6x)}{2sen(x)};$$

$$A_3 = cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + cos(7x) = \frac{sen(8x)}{2sen(x)};$$

$$\vdots$$

$$A_n = cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x) = \frac{sen([2n+2]x)}{2sen(x)}.$$

Dessa maneira, temos que $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ é igual a:

$$\frac{sen(2x) + sen(4x) + sen(6x) + sen(8x) + \ldots + sen([2n+2]x)}{2sen(x)}. \tag{3.19}$$

Utilizando a identidade demonstrada no Exemplo 3.1.6, podemos escrever:

$$sen(2x) + sen(4x) + \ldots + sen([2n+2]x) = \frac{sen(nx+x) \cdot sen(nx+2x)}{sen(x)}. \tag{3.20}$$

Portanto, substituindo a Equação 3.20 em (3.19), obtemos:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{sen(nx+x) \cdot sen(nx+2x)}{2 \cdot sen^2(x)}. \tag{3.21}$$

Desse modo, finalmente conseguimos representar C_n^1 compactamente:

$$C_n^1 = \frac{sen(nx+x) \cdot sen(nx+2x)}{2 \cdot (n+1) \cdot sen^2(x)}.$$

Observe que, como $sen(nx+x)$, $sen(nx+2x)$ e $sen^2(x)$ são, em módulo, menores ou iguais a 1, então:

$$-\frac{1}{2n+2} \leq \frac{sen(nx+x) \cdot sen(nx+2x)}{2 \cdot (n+1) \cdot sen^2(x)} \leq \frac{1}{2n+2}.$$

Então, tomando sequências $a_n = -\frac{1}{2n+2}$ e $c_n = \frac{1}{2n+2}$, iremos calcular os limites. Primeiramente, temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2n+2} = 0.$$

Por outro lado:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0.$$

Como os limites dos extremos são iguais a zero, pelo Teorema 2.1.6, segue-se que:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{sen(nx+x) \cdot sen(nx+2x)}{2 \cdot (n+1) \cdot sen^2(x)} = 0.$$

Portanto, $cos(x) + cos(3x) + cos(5x) + \ldots + cos([2n+1]x) + \ldots$ é somável* $(C, 1)$ para o valor 0.

Exemplo 3.1.8 *A série* $1+2+3+4+5+6+\ldots$ *não é somável** $(C,1)$*.*

Para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, vem que:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1;\\
A_1 &= 1+2 = 3;\\
A_2 &= 1+2+3 = 6;\\
A_3 &= 1+2+3+4 = 10;\\
&\vdots\\
A_n &= 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Desse modo,

$$A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n = 1+3+6+10+\ldots+\frac{(n+2)(n+1)}{2}. \tag{3.22}$$

De forma análoga ao que faremos no Exemplo 3.1.9, segue-se que:

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}. \tag{3.23}$$

Assim, tomando o limite, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n+6}{6} = +\infty.$$

Portanto, a série não é somável* $(C,1)$.

Como vimos no Exemplo 3.1.8, há séries divergentes que não são somáveis* pelo método de Cesàro de primeira ordem. Identificamos que o método utilizado consiste em tomar a média linear das somas parciais de uma série dada e verificar se o limite tende para um número real quando a quantidade de elementos é suficientemente grande. Porém, como o método funcionou satisfatoriamente para outras séries, nada nos impede de tomarmos a média linear das médias lineares. Esta segunda tentativa será a aplicação do método de Cesàro de segunda ordem, considerando novamente um limite de quando temos infinitos termos. Caso esse limite não exista ou seja igual a $\pm\infty$, podemos prosseguir de maneira análoga para o método de Cesàro de terceira ordem, e assim por diante. Daí, baseando-se nisso, podemos propor a generalização do método de Cesàro. Observaremos que o triângulo aritmético ou de Pascal surge naturalmente da definição do método. Assim, previamente iremos recordar alguns pontos sobre o tópico.

O triângulo aritmético ou de Pascal é famoso por suas propriedades e sua estrutura aritmética. Além disso, ele pode ser representado na forma binomial, sendo l a linha e c a coluna. Note que começamos indicando os termos binomiais pela linha zero e pela coluna zero, sempre com a linha na parte de cima e a coluna na parte de baixo, $\binom{l}{c}$, de forma que:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
l = 0\text{:} & \binom{0}{0} & & & & & & \\
l = 1\text{:} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
l = 2\text{:} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
l = 3\text{:} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
l = 4\text{:} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l = n\text{:} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Daremos atenção a duas propriedades importantes: a relação de Stifel e o teorema das colunas.

Proposição 3.1.1 (Relação de Stifel) *Sejam n e p naturais tais que $n > p$ e $p > 0$, então:*

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Demonstração: De fato, temos que:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!(p)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} \cdot \frac{p}{p} + \frac{n!}{(n-p)!(p)!} \cdot \frac{(n-p+1)}{(n-p+1)} \\
&= \frac{(n+1-p+p)n!}{(n+1-p)!(p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p)!} \\
&= \binom{n+1}{p}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.1.1 (das colunas) *Sejam n e k naturais. Então:*

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}.$$

Demonstração: Fixado k, faremos a demonstração por indução sobre n.

A afirmação vale para $n=0$: $\binom{k}{k}=1$ e $\binom{k+1}{k+1}=1$.

Então, suponha que a afirmação seja verdadeira para n:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}.$$

Vamos mostrar que vale para $n+1$. Temos que:

$$\begin{aligned}\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}+\binom{k+n+1}{k} &\overset{\text{H.I}}{=} \binom{n+k+1}{k+1}+\binom{n+k+1}{k}\\ &\overset{\text{Stifel}}{=} \binom{n+k+2}{k+1}\\ &= \binom{(n+1)+k+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n+1$ e pelo Princípio de Indução Finita vale para todo $n \geq 0$. □

O teorema das colunas afirma que a soma dos termos de uma coluna, a partir de uma determinada linha até uma certa linha, é igual ao número binomial da próxima linha e da próxima coluna em relação ao termo dessa certa linha.

Exemplo 3.1.9 *Uma aplicação do teorema das colunas.*

Com o auxílio do teorema das colunas podemos encontrar uma fórmula fechada para a soma dos n primeiros números triangulares. Observe que:

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{(n+1)(n)}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}.$$

Daí, como consequência do teorema:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{6}.$$

Portanto, temos o resultado:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n+1)(n)}{2} = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{6}. \tag{3.24}$$

Definição 3.1.2 (Somável (C,k)) *Dada uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iremos definir:*

$$A_n^0 = A_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \tag{3.25}$$

Consideraremos as somas parciais:

$$\begin{aligned}
A_0^0 &= A_0 = a_0;\\
A_1^0 &= A_1 = a_0 + a_1;\\
A_2^0 &= A_2 = a_0 + a_1 + a_2;\\
A_3^0 &= A_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3;\\
&\vdots\\
A_n^0 &= A_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.
\end{aligned}$$

Tomando a média linear dos $n+1$ termos A_0, A_1, A_2, A_3, …, A_n, obtemos:

$$C_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{n+1}. \tag{3.26}$$

De maneira análoga, podemos considerar as somas parciais dos termos A_0, A_1, A_2, …, A_n, denotando-as por A_i^1, com $0 \leq i \leq n$, para não haver ambiguidades.

$$\begin{aligned}
A_0^1 &= A_0;\\
A_1^1 &= A_0 + A_1;\\
A_2^1 &= A_0 + A_1 + A_2;\\
A_3^1 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3;\\
&\vdots\\
A_n^1 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.
\end{aligned}$$

Observe que a soma $A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + \ldots + A_n^1$ é formada pelos elementos $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n$, com suas respectivas quantidades descritas na Tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de cada termo $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ na soma A_n^2

Termo	Quantidade
A_0	$n+1 = \binom{n+1}{1}$
A_1	$n+0 = \binom{n-0}{1}$
A_2	$n-1 = \binom{n-1}{1}$
A_3	$n-2 = \binom{n-2}{1}$
$\vdots$	$\vdots$
A_n	$1 = \binom{1}{1}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Com isso, ao tomarmos a média linear desses termos, estamos contando um total de

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

elementos. Portanto, a média linear dos termos é dada por:

$$C_n^2 = \frac{A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + \ldots + A_n^1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}. \tag{3.27}$$

Do mesmo modo, podemos considerar as somas parciais dos termos A_0^1, A_1^1, A_2^1, ..., A_n^1, denotando-as por A_i^2, com $0 \leq i \leq n$, para não haver ambiguidades.

$$A_0^2 = A_0^1 = A_0;$$

$$A_1^2 = A_0^1 + A_1^1 = A_0 + A_0 + A_1;$$

$$A_2^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 = A_0 + A_0 + A_0 + A_1 + A_1 + A_2;$$

$$A_3^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 = A_0 + A_0 + A_0 + A_0 + A_1 + A_1 + A_1 + A_2 + A_2 + A_3;$$

$$\vdots$$

$$A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + \ldots + A_n^1 = (n+1) \cdot A_0 + n \cdot A_1 + (n-1) \cdot A_2 + \ldots + A_n.$$

Observe que a soma $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2$ é formada pelos elementos $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n$, com suas respectivas quantidades descritas na Tabela 2.

Tabela 2 – Quantidade de cada termo $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ na soma A_n^3

Termo	Quantidade
A_0	$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = \dbinom{n+2}{2}$
A_1	$\dfrac{(n+1)(n+0)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$
A_2	$\dfrac{(n+0)(n-1)}{2} = \dbinom{n+0}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
A_{n-2}	$6 = \dbinom{4}{2}$
A_{n-1}	$3 = \dbinom{3}{2}$
A_n	$1 = \dbinom{2}{2}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Com isso, conforme o Teorema 3.1.1, ao tomarmos a média linear desses termos, estamos contando um total de:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

elementos. Portanto, a média linear dos termos é dada por:

$$C_n^3 = \frac{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2}{\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}}. \tag{3.28}$$

Destacamos a similaridade da quantidadade dos termos dos somatórios $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$, $A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + \ldots + A_n^1$ e $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2$, em relação às somas parciais $A_0,\ A_1,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_n$, com as colunas do triângulo de Pascal. Para generalizarmos a k-ésima média linear dos termos A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, iremos definir:

$$A_n^k = A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + A_2^{k-1} + \ldots + A_n^{k-1}, \text{ para } k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Proposição 3.1.2 *A soma parcial recursiva A_n^k tem um total de* $\dbinom{n+k}{k} = \dfrac{(n+k)!}{((n+k)-k)! \cdot k!}$ *elementos do conjunto* $\{A_0,\ A_1,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_n\}$.

Demonstração: Dado $n \geq 0$, faremos a demonstração por indução sobre k.

i) A afirmação é verdadeira para $k = 1$.

De fato, A_n^1 tem $n+1$ elementos. Por outro lado, $\binom{n+1}{1} = n+1$.

ii) Suponha que a afirmação seja válida para um certo k, com $n \geq 0$.

Isto é, A_n^k tem $\binom{n+k}{k}$ termos do conjunto $\{A_0,\ A_1,\ A_2\ ,\ \dots\ ,\ A_n\}$.

iii) Vamos mostrar que a afirmação vale para $k+1$.

Por definição,

$$A_n^{k+1} = A_0^k + A_1^k + A_2^k + A_3^k + \ldots + A_n^k.$$

Então, pela hipótese de indução, há:

- $\binom{k}{k}$ elementos em A_0^k;
- $\binom{1+k}{k}$ elementos em A_1^k;

$\vdots$

- $\binom{n+k}{k}$ elementos em A_n^k;

Portanto, A_n^{k+1} tem exatamente uma quantidade de

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{k+n}{k}$$

elementos.

Daí, pelo teorema das colunas do triângulo de Pascal, segue-se que:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{k+n}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

Ou seja, a afirmação vale para $k+1$. Assim, pelo Princípio de Indução Finita, ela é verdadeira para todo $k \geq 1$. $\square$

Além disso, para simplificarmos as notações, consideraremos um novo elemento:

$$E_n^k = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{(n)! \cdot (k)!}$$

$$= \frac{(n+k)\ldots(n+2)(n+1)(n)!}{(n)!\cdot(k)!}$$

$$= \frac{(n+k)\ldots(n+2)(n+1)}{k!}.$$

Assim, podemos condensar as expressões 3.26, 3.27 e 3.28 em:

$$C_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \frac{A_n^1}{E_n^1};$$
$$C_n^2 = \frac{A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{A_n^2}{E_n^2};$$
$$C_n^3 = \frac{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2}{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}} = \frac{A_n^3}{E_n^3};$$

Daí, finalmente estamos aptos a apresentar a média linear de ordem k das n-ésimas somas parciais:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{E_n^k}.$$

Se $C_n^k \to s \in \mathbb{R}$, quando $n \to +\infty$, então dizemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é Cesàro-somável de ordem k ou somável* (C, k) e escrevemos:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s\ (C, k). \tag{3.29}$$

Exemplo 3.1.10 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Começaremos nosso índice por 0, e explicitaremos alguns termos da sequência:

$$b_0 = +1;$$
$$b_1 = -2;$$
$$b_2 = +3;$$
$$b_3 = -4;$$
$$b_4 = +5;$$
$$b_5 = -6;$$
$$\vdots$$

Averiguamos que os termos da sequência são alternadamente positivos e negativos, nessa ordem. Além disso, cada elemento, em módulo, é sempre uma unidade maior do que o respectivo índice. Logo, segue-se que:

$$b_n = (-1)^n \cdot (n+1).$$

Agora, vamos construir a sequência das somas parciais de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1;\\
&B_1 = 1 - 2 = -1;\\
&B_2 = 1 - 2 + 3 = 2;\\
&B_3 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2;\\
&B_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3;\\
&B_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3;\\
&B_6 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 4;\\
&B_7 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 = -4;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, notamos a semelhança com o Exemplo 3.1.1. Com isso, a sequência fica determinada por:

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

E ainda podemos indicar a sequência por uma única expressão:

$$B_n = (-1)^n \cdot \frac{2n + 3 + (-1)^n}{4}.$$

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões e conjecturas podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.1.11 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Começaremos nosso índice por 0, e explicitaremos alguns termos da sequência:

$$c_0 = +1;$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -1; \\ c_2 &= +2; \\ c_3 &= -2; \\ c_4 &= +3; \\ c_5 &= -3; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, pelo Exemplo 3.1.10, temos:

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos indicar a sequência por uma única expressão:

$$c_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

Agora, vamos construir a sequência das somas parciais de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1; \\ C_1 &= 1-1 = 0; \\ C_2 &= 1-1+2 = 2; \\ C_3 &= 1-1+2-2 = 0; \\ C_4 &= 1-1+2-2+3 = 3; \\ C_5 &= -1+2-2+3-3 = 0; \\ C_6 &= -1+2-2+3-3+4 = 4; \\ C_7 &= -1+2-2+3-3+4-4 = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão não oscilante. Para a situação dos índices ímpares, a soma parcial é nula. Já quando o índice n é par, basta verificar a regularidade: $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 3$, $f(6) = 4$, $f(8) = 5$, $\ldots$, ou seja, os índices n que são pares levam a sequência para os respectivos valores $\frac{n}{2} + 1$. Então, explicitamos que:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$C_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n+2}{2}.$$

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões, as conjecturas e a verificação de paridade são temas abordados no ensino médio.

Exemplo 3.1.12 *A série* $1-3+5-7+9-11+\ldots$ *não é somável** $(C,1)$*, mas é somável** $(C,2)$.

Construindo a sequência de somas parciais, temos que:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1-3 = -2;\\
&A_2 = 1-3+5 = 3;\\
&A_3 = 1-3+5-7 = -4;\\
&A_4 = 1-3+5-7+9 = 5;\\
&A_5 = 1-3+5-7+9-11 = -6;\\
&\quad\vdots\\
&A_n = 1-3+5-7+\ldots+(-1)^n\cdot(2n+1) = (-1)^n\cdot(n+1).
\end{aligned}
$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1,-2,+3,-4,+5,-6,\ldots). \tag{3.30}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.30), temos:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_0+A_1 = 1-2 = -1;\\
&A_0+A_1+A_2 = 1-2+3 = 2;\\
&A_0+A_1+A_2+A_3 = 1-2+3-4 = -2;\\
&A_0+A_1+A_2+A_3+A_4 = 1-2+3-4+5 = +3;\\
&A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5 = 1-2+3-4+5-6 = -3;\\
&A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6 = 1-2+3-4+5-6`+7 = +4;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Desse modo, segue pelo Exemplo 3.1.10 que:

$$A_n^1 = A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n = (-1)^n\cdot\frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

Vamos analisar as duas subsequências formadas a partir da paridade dos índices de A_n^1. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um número par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \dfrac{2n+3+(-1)^n}{4}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = +\frac{1}{2}.$$

- Quando n é um número ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \dfrac{2n+3+(-1)^n}{4}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)}{2(n+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Entretanto, como os limites das subsequências são diferentes, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge. Logo a série não é somável* $(C, 1)$.

Vamos tentar verificar a somabilidade pelo método de Cesàro de ordem 2.

$$\begin{aligned}
&A_0^1 = A_0 = 1;\\
&A_1^1 = A_0 + A_1 = 1 - 2 = -1;\\
&A_2^1 = A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 2 + 3 = 2;\\
&A_3^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2;\\
&A_4^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3;\\
&A_5^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3;\\
&\quad\vdots\\
&A_n^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots + A_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.
\end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ \ldots). \tag{3.31}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.31), temos:

$$\begin{aligned}
&A_0^1 = 1;\\
&A_0^1 + A_1^1 = 1 - 1 = 0;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 = 1 - 1 + 2 = 2;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 = 1 - 1 + 2 - 2 + 3 = 3;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 + A_5 = 1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 = 0;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Logo, decorre pelo Exemplo 3.1.11 que:

$$A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 + A_5^1 + \ldots + A_n^1 = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n+2}{2}.$$

Desse modo, calculamos diretamente $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^2$:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1+(-1)^n}{2} \cdot \dfrac{n+2}{2}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+(-1)^n)(n+2)}{2(n+2)(n+1)} = 0.$$

Portanto, a série alternada dos números ímpares é somável* $(C, 2)$ para 0.

Exemplo 3.1.13 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Pelo Exemplo 3.1.11, a sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada pela expressão:

$$d_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n+2}{2}.$$

Prosseguindo para a sequência das somas parciais de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos:

$$\begin{aligned}
D_0 &= 1;\\
D_1 &= 1+0 = 1;\\
D_2 &= 1+0+2 = 3;\\
D_3 &= 1+0+2+0 = 3;\\
D_4 &= 1+0+2+0+3 = 6;\\
D_5 &= 1+0+2+0+3+0 = 6;\\
D_6 &= 1+0+2+0+3+0+4 = 10;\\
D_7 &= 1+0+2+0+3+0+4+0 = 10;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão que não é alternante. Começaremos pelas somas parciais de índices pares. Observe que para cada D_n com n par temos a soma dos $\dfrac{n+2}{2}$ números naturais maiores do que 0. Portanto, neste caso:

$$D_n = 1 + 2 + \ldots + \frac{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Note que para n ímpar é análogo ao caso de n par, uma vez que D_n com n ímpar é igual a D_n com n par, mas deslocado de um índice para trás. Ou seja, D_n com n ímpar é dado por:

$$D_n = 1 + 2 + \ldots + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{8}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos representar a sequência por uma única expressão:

$$D_n = \frac{n^2 + 4n + 3 + (2n+5) \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}}{8}.$$

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões, a soma das progressões aritméticas e o deslocamento de índices de uma expressão podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.1.14 *A série* $1-2+3-4+5-6+\ldots$ *não é somável** $(C,1)$*, mas é somável** $(C,2)$.

Analisando as somas parciais, observamos que:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= 1 - 2 = -1; \\ A_2 &= 1 - 2 + 3 = 2; \\ A_3 &= 1 - 2 + 3 - 4 = -2; \\ A_4 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3; \\ A_5 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3; \\ &\vdots \\ A_n &= \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots). \tag{3.32}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.32), temos:

$$A_0 = 1;$$

$$
\begin{aligned}
&A_0 + A_1 = 1 - 1 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 1 + 2 = 2;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 1 + 2 - 2 + 3 = 3;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = -1 + 2 - 2 + 3 - 3 = 0;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Conforme desenvolvido no Exemplo 3.1.11:

$$A_n^1 = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \quad 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um número par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

- Quando n é um número ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n+1} = 0.$$

Entretanto, quando os limites de duas subsequências de uma sequência vão para valores distintos, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge. Logo, não existe $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$. Assim, a série não é somável* pelo método de Cesàro de primeira ordem. Contudo, podemos utilizar o método de Cesàro de segunda ordem.

Para o cálculo de C_n^2, precisamos relembrar que:

$$A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1$$

e

$$
\begin{aligned}
A_0^1 &= A_0;\\
A_1^1 &= A_0 + A_1;\\
A_2^1 &= A_0 + A_1 + A_2;\\
&\ \ \vdots\\
A_n^1 &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n.
\end{aligned}
$$

Neste caso, as somas parciais A^1_0, A^1_2, A^1_3, ... , A^1_n admitem os valores:

$$\begin{aligned}
&A^1_0 = 1;\\
&A^1_1 = A_0 + A_1 = 0;\\
&A^1_2 = A_0 + A_1 + A_2 = 2;\\
&A^1_3 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0;\\
&A^1_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3;\\
&A^1_5 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0;\\
&\quad\vdots\\
&A^1_n = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \qquad 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que a nova sequência de somas parciais é:

$$(1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0, \ldots). \tag{3.33}$$

Calculando as somas parciais da nova sequência em (3.33), temos:

$$\begin{aligned}
&A^1_0 = 1;\\
&A^1_0 + A^1_1 = 1 + 0 = 1;\\
&A^1_0 + A^1_1 + A^1_2 = 1 + 0 + 2 = 3;\\
&A^1_0 + A^1_1 + A^1_2 + A^1_3 = 1 + 0 + 2 + 0 = 3;\\
&A^1_0 + A^1_1 + A^1_2 + A^1_3 + A^1_4 = 1 + 0 + 2 + 0 + 3 = 6;\\
&A^1_0 + A^1_1 + A^1_2 + A^1_3 + A^1_4 + A^1_5 = 1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 0 = 6;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Consequentemente, pelo resultado do Exemplo 3.1.13, temos:

$$A^2_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{8}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, por definição:

$$C^2_n = \frac{A^2_n}{E^2_n} \text{ e } E^2_n = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Desse modo, para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C^2_n$, precisamos considerar as duas subsequências de A^2_n:

- Quando n é um índice par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+2)(n+4)}{8}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n+1} = \frac{1}{4}.$$

- Quando n é um índice ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{4}.$$

Então, decorre do Teorema 2.1.4 que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^2 = \frac{1}{4}.$$

Logo, a série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ é Cesàro-somável de ordem 2, isto é, tem soma generalizada igual a $\frac{1}{4}$ $(C, 2)$.

Exemplo 3.1.15 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\ -2,\ 4,\ -6,\ 9,\ -12,\ 16,\ -20,\ \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Começaremos nosso índice por 0 e explicitaremos alguns termos da sequência:

$$\begin{aligned}
e_0 &= +1;\\
e_1 &= -2;\\
e_2 &= +4;\\
e_3 &= -6;\\
e_4 &= +9;\\
e_5 &= -12;\\
e_6 &= +16;\\
e_7 &= -20;\\
e_8 &= +25;\\
e_9 &= -30;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez nos deparamos com o seguinte cenário: Se n for par, a sequência assume o valor $\left(\frac{n+2}{2}\right)^2$. Quando n é ímpar, observamos que os termos da sequência são negativos e, em módulo, são iguais ao valor do elemento anterior mais a sua raiz quadrada. Então, para o caso de n ímpar, teríamos:

$$e_n = -\left[\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{n+2}{2}\right].$$

Porém, essa fórmula é válida para n par, então iremos retroceder um índice, trocando n por $n-1$, obtendo:

$$e_n = -\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{n+1}{2}\right] = -\left[\frac{n^2+2n+1}{4} + \frac{n+1}{2}\right] = -\frac{n^2+4n+3}{4}.$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$e_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+4n+4}{4}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n^2+4n+3}{4}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$e_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2+4n+3+\frac{1+(-1)^n}{2}}{4}.$$

Agora, vamos construir a sequência das somas parciais de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
&E_0 = 1;\\
&E_1 = 1-2 = -1;\\
&E_2 = 1-2+4 = 3;\\
&E_3 = 1-2+4-6 = -3;\\
&E_4 = 1-2+4-6+9 = 6;\\
&E_5 = 1-2+4-6+9-12 = -6;\\
&E_6 = 1-2+4-6+9-12+16 = 10;\\
&E_7 = 1-2+4-6+9-12+16-20 = -10;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão que é oscilante: os termos se repetem dois a dois com os sinais trocados. Consideramos, primeiro, as somas parciais de índices pares. Note que E_0 é o resultado da soma do primeiro número natural maior do que zero, E_2 é o resultado da soma dos dois primeiros números naturais maiores do que zero, E_4 é o resultado da soma dos três primeiros números naturais maiores do que zero, e assim por diante. Portanto, para n par:

$$E_n = 1+2+3+\ldots+\frac{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Para o caso em que n é ímpar, basta retrocedermos um índice e multiplicar por -1. Assim, teremos:

$$E_n = (-1) \cdot \left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{n+1}{2}\right) = -\frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

Então, deduzimos que:

$$E_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$E_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2 + 4n + 3 + (2n+5) \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}}{8}.$$

Ressaltamos o potencial desse exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões, soma das progressões aritméticas e deslocamento de índices de uma expressão podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.1.16 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 3, -3, 6, -6, 10, -10, \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Como deduzimos no Exemplo 3.1.15, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada pela expressão:

$$f_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2 + 4n + 3 + (2n+5) \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}}{8}.$$

Prosseguindo para a sequência das somas parciais de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 1; \\
F_1 &= 1 - 1 = 0; \\
F_2 &= 1 - 1 + 3 = 3; \\
F_3 &= 1 - 1 + 3 - 3 = 0; \\
F_4 &= 1 - 1 + 3 - 3 + 6 = 6; \\
F_5 &= 1 - 1 + 3 - 3 + 6 - 6 = 0; \\
F_6 &= 1 - 1 + 3 - 3 + 6 - 6 + 10 = 10; \\
F_7 &= 1 - 1 + 3 - 3 + 6 - 6 + 10 - 10 = 0; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão não oscilante de somas parciais. Aqui destacamos que a sequência das somas parciais se torna nula para índice ímpar. Com isso, podemos escrever que, para n ímpar:

$$F_n = 0.$$

Para o caso de n par, realçamos que F_0 é o resultado da soma do primeiro número natural maior do que zero, F_2 é o resultado da soma dos dois primeiros números naturais maiores do que zero, F_4 é o resultado da soma dos três primeiros números naturais maiores do que zero e assim por diante. Portanto, para n par:

$$F_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$F_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Esse exemplo pode ser proposto a estudantes do ensino médio, uma vez que aborda a soma de progressões aritméticas e o deslocamento dos índices de uma expressão.

Exemplo 3.1.17 *Determinaremos o termo geral da sequência* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 3, 0, 6, 0, 10, 0, \ldots)$ *e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

De acordo com as explicações do Exemplo 3.1.16, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada pela expressão:

$$g_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Prosseguindo para a sequência das somas parciais de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos:

$$\begin{aligned}
&G_0 = 1;\\
&G_1 = 1 + 0 = 1;\\
&G_2 = 1 + 0 + 3 = 4;\\
&G_3 = 1 + 0 + 3 + 0 = 4;\\
&G_4 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 = 10;\\
&G_5 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 + 0 = 10;\\
&G_6 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 + 0 + 10 = 20;\\
&G_7 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 + 0 + 10 + 0 = 20;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_8 &= 1+0+3+0+6+0+10+0+15 = 35;\\
G_9 &= 1+0+3+0+6+0+10+0+15+0 = 35;\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Mais uma vez iremos dividir as somas parciais em dois grupos: índice par e índice ímpar. Porém, nossa escolha é arbitrária. Começar pelos índices ímpares ou pelos pares não influencia no resultado, apenas temos que ajustar os índices posteriormente.

As somas parciais de índices pares são dadas pela soma dos $\dfrac{n+2}{2}$ primeiros números triangulares. Assim, segue-se que as somas parciais de índice par são:

$$G_n = 1+3+6+10+15+\ldots+\frac{(n+2)(n+4)}{8}.$$

Esclarecemos que essa soma é mais difícil do que as outras calculadas anteriormente, porque não se trata da soma de uma progressão aritmética usual[1]. Todavia, essa soma é rapidamente calculada com o auxílio do Teorema 3.1.1.

De modo geral, a soma dos n primeiros números triangulares é igual a:

$$\frac{(n)(n+1)(n+2)}{6}. \tag{3.34}$$

Assim, para calcularmos a soma dos $\frac{n+2}{2}$ primeiros números triangulares, basta substituir n por $\frac{n+2}{2}$ em (3.34), que resulta em:

$$G_n = \frac{(n+2)(n+4)(n+6)}{48}. \tag{3.35}$$

Para as somas parciais de índices ímpares é análogo. Basta deslocarmos um índice. Adaptamos isso simplesmente trocando n por $n-1$ na Equação 3.35. Assim, caso n seja ímpar:

$$G_n = \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{48}.$$

Finalmente, deduzimos que a expressão que representa a sequência é:

$$G_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)(n+6)}{48}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{(n+1)(n+3)(n+5)}{48}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

[1] Na verdade, em ordem, os termos da série formam uma PA de ordem superior. Com essa informação e os teoremas adequados, poderíamos obter a soma de outra maneira. Porém, é um assunto que foge do escopo do texto. Para conhecer mais, indicamos a leitura de Morgado e Carvalho (2013).

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$G_n = \frac{n^3 + 9n^2 + 23n + 15 + (3n^2 + 21n + 33) \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}}{48}.$$

Nesse exemplo, temos a oportunidade de explorar o reconhecimento de padrões, a soma de progressões aritméticas, o triângulo aritmético e o deslocamento dos índices de uma expressão, temas que podem ser abordados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.1.18 *A série* $1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 - 36 + 45 - \ldots$ *é somável** $(C, 3)$ *para o valor* $\dfrac{1}{8}$.

Analisando as somas parciais, notamos que:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1 - 3 = -2;\\
&A_2 = 1 - 3 + 6 = 4;\\
&A_3 = 1 - 3 + 6 - 10 = -6;\\
&A_4 = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 = 9;\\
&A_5 = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 = -12;\\
&A_6 = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 = 16;\\
&A_7 = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 - 36 = -20;\\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Segue pelo Exemplo 3.1.15 que:

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 4n + 4}{4}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n^2 + 4n + 3}{4}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1, -2, +4, -6, +9, -12, +16, -20, \ldots). \tag{3.36}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.36), temos:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_0 + A_1 = 1 - 2 = -1;\\
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 2 + 4 = 3;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 2 + 4 - 6 = -3;
\end{aligned}$$

$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 = 6;$

$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 - 12 = -6;$

$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 - 12 + 16 = 10;$

$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 - 12 + 16 - 20 = -10;$

$\vdots$

Conforme visto no Exemplo 3.1.15:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um índice par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+2)(n+4)}{8}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{8(n+1)} = +\infty.$$

- Quando n é um índice ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{(n+3)}{8} = -\infty.$$

Quando duas subsequências de uma sequência convergem para valores diferentes, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge. Isto é, a série não é somável* $(C, 1)$.

Prosseguindo para a segunda iteração, $C_2 - \textit{método}$, temos que aplicar o método de Cesàro utilizando a sequência das somas parciais, uma vez que $A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1$.

Com isso,

$A_0^1 = A_0 = 1;$

$A_1^1 = A_0 + A_1 = 1 - 2 = -1;$

$A_2^1 = A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 2 + 4 = 3;$

$A_3^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 2 + 4 - 6 = -3;$

$A_4^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 = 6;$

$A_5^1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 - 2 + 4 - 6 + 9 - 12 = -6;$

$$\vdots$$

$$A_n^1 = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, a nova sequência das somas parciais é dada por:

$$(+1, -1, +3, -3, +6, -6, \ldots). \tag{3.37}$$

Desse modo, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.37), temos:

$$\begin{aligned}
&A_0^2 = A_0^1 = 1; \\
&A_1^2 = A_0^1 + A_1^1 = 1 - 1 = 0; \\
&A_2^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 = 1 - 1 + 3 = 3; \\
&A_3^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 = 1 - 1 + 3 - 3 = 0; \\
&A_4^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 = 1 - 1 + 3 - 3 + 6 = 6; \\
&A_5^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 + A_5^1 = 1 - 1 + 3 - 3 + 6 - 6 = 0; \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Exemplo 3.1.16 temos:

$$A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1 = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Mais ainda, por definição,

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{E_n^2} \text{ e } E_n^2 = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Logo, para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^2$, precisamos considerar duas subsequências de A_n^2:

- Quando n é um índice par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+2)(n+4)}{8}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n+1} = \frac{1}{4}.$$

- Quando n é um índice ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{(n+2)(n+1)} = 0.$$

Como os limites das subsequências são diferentes, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge no sentido tradicional, isto é, não há soma $(C, 2)$ para essa série.

Prosseguindo para a terceira iteração, $C_3 - método$, temos que aplicar o método de Cesàro utilizando a sequência das somas parciais, uma vez que $A_n^3 = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
&A_0^2 = A_0^1 = 1;\\
&A_1^2 = A_0^1 + A_1^1 = 0;\\
&A_2^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 = 3;\\
&A_3^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 = 0;\\
&A_4^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 = 6;\\
&A_5^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + A_4^1 + A_5^1 = 0;\\
&\quad\vdots\\
&A_n^2 = A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1 = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \qquad\qquad 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 6,\ 0,\ \ldots). \tag{3.38}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.38), temos:

$$\begin{aligned}
&A_0^2 = 1;\\
&A_0^2 + A_1^2 = 1 + 0 = 1;\\
&A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 = 1 + 0 + 3 = 4;\\
&A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1 + 0 + 3 + 0 = 4;\\
&A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 = 10;\\
&A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 = 1 + 0 + 3 + 0 + 6 + 0 = 10;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Desse modo, com base no Exemplo 3.1.17, vem que::

$$A_n^3 = A_0^2 + A_1^2 + \ldots + A_n^2 = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n+4)(n+6)}{48}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{(n+1)(n+3)(n+5)}{48}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, por definição:

$$C_n^3 = \frac{A_n^3}{E_n^3} \text{ e } E_n^3 = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}.$$

Como a soma depende do índice, para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^3$, precisamos considerar as duas subsequências de A_n^3:

- Quando n é um índice par:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+2)(n+4)(n+6)}{48}}{\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+4)(n+6)}{(n+3)(n+1)} = \frac{1}{8}.$$

- Quando n é um índice ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)(n+3)(n+5)}{48}}{\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{n+2} = \frac{1}{8}.$$

Assim, segue do Teorema 2.1.4 que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a série é somável* $(C,3)$ e sua soma vale $\dfrac{1}{8}$.

Até aqui, mostramos algumas séries que são somáveis* pelo método (C,k); porém, há séries que não são somáveis* pelo método de Cesàro. E para contornar esse problema, os matemáticos formularam diversos métodos de somabilidade. A seguir veremos o método de Hölder.

3.2 Método de Hölder

Em 1882, o matemático alemão Otto Ludwig Hölder $(1859-1937)$ desenvolveu um método aritmético de somas no sentido generalizado na obra *Grenzwerte von Reihen an* *der Convergenzgrenze*, publicada no periódico *Mathematische Annalen*. Porém, apesar de sua antecipação de somas em relação a Cesàro, de acordo com Ferraro (1999), Hölder não definiu a soma para séries divergentes, limitando-se a definição usual de soma. O fato é que Hölder estava interessado em obter novos resultados para a teoria de séries convergentes, mas seus feitos acabaram sendo úteis para a teoria da somabilidade.

Definição 3.2.1 (Somável (H,1)) *Sejam A_0, A_1, $\ldots$, A_n as n-ésimas somas parciais de uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos:*

$$H_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{n+1}. \tag{3.39}$$

Se $H_n^1 \to s \in \mathbb{R}$, quando $n \to +\infty$, então dizemos que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é Hölder-somável de ordem 1 ou somável* $(H, 1)$ para o valor s.

Evidenciamos que ser somável $(C, 1)$ é equivalente a ser somável $(H, 1)$, pois as definições coincidem.

Exemplo 3.2.1 *A série de Grandi é Hölder-somável de ordem 1.*

Como as definições de $(C, 1)$ e $(H, 1)$ são as mesmas, podemos concluir que a série também é somável* para o mesmo valor por ambos os métodos. Isto é:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}\ (H, 1).$$

Assim como no método de Cesàro de primeira ordem, teremos séries não somáveis por $(H, 1)$.

Exemplo 3.2.2 *A série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ não é somável* $(H, 1)$.*

Analisando as somas parciais, observamos que:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1 - 2 = -1;\\
&A_2 = 1 - 2 + 3 = 2;\\
&A_3 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2;\\
&A_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3;\\
&A_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3;\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Assim, pelo Exemplo 3.1.14:

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ -\dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots). \tag{3.40}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.40), temos:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_0 + A_1 = 1 - 1 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 1 + 2 = 2;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 1 + 2 - 2 + 3 = 3;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = -1 + 2 - 2 + 3 - 3 = 0;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Daí, segue pelo Exemplo 3.1.11 que:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim_{n\to+\infty} H_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um número par:

$$\lim_{n\to+\infty} H_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

- Quando n é um número ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} H_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n+1} = 0.$$

Desse modo, pelo fato de duas subsequências convergirem para valores distintos, pelo Teorema 2.1.3, a sequência original diverge tradicionalmente. Desse modo, a série não é somável* $(H, 1)$.

Como vimos no Exemplo 3.2.2, há séries divergentes que não são somáveis* pelo método de Hölder de primeira ordem. Identificamos que o método utilizado consiste em tomar a média linear das médias das somas parciais de uma série dada e verificar se o limite tende para um número real quando a quantidade de elementos é suficientemente grande. Porém, como o método funcionou satisfatoriamente para outras séries, nada nos impede de tomarmos a média linear das médias parciais já calculadas. Esta segunda tentativa será a aplicação do método de Hölder de segunda ordem, considerando novamente um limite de quando temos infinitos termos. Caso esse limite não exista ou seja igual a $\pm\infty$, podemos prosseguir de maneira análoga para o método de Hölder de terceira ordem, e assim por diante. Baseando-se nisso, propomos a generalização do método de Hölder.

Definição 3.2.2 (Somável (H,k)) *Dada uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iremos definir:*

$$H_n^0 = A_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \tag{3.41}$$

Portanto, segue-se que:

$$\begin{aligned}
H_0^0 &= A_0 = a_0;\\
H_1^0 &= A_1 = a_0 + a_1;\\
H_2^0 &= A_2 = a_0 + a_1 + a_2;\\
H_3^0 &= A_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3;\\
&\vdots\\
H_n^0 &= A_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.
\end{aligned}$$

Tomando a média linear dos $n+1$ termos $H_0^0,\ H_1^0,\ H_2^0,\ H_3^0,\ \ldots,\ H_n^0$, obtemos:

$$H_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{n+1}. \tag{3.42}$$

De maneira análoga, podemos considerar as médias parciais dos termos H_0^0, H_1^0, H_2^0, H_3^0, …, H_n^0. Denotaremos as médias parciais por H_i^1, com $0 \leq i \leq n$, para não haver ambiguidades. Então, temos:

$$\begin{aligned}
H_0^1 &= H_0^0;\\
H_1^1 &= \frac{H_0^0 + H_1^0}{2};\\
H_2^1 &= \frac{H_0^0 + H_1^0 + H_2^0}{3};
\end{aligned}$$

$$H_3^1 = \frac{H_0^0 + H_1^0 + H_2^0 + H_3^0}{4};$$
$$\vdots$$
$$H_n^1 = \frac{H_0^0 + H_1^0 + H_2^0 + H_3^0 + \ldots + H_n^0}{n+1}.$$

Agora, tomaremos a média linear dos termos H_0^1, H_1^1, H_2^1, H_3^1, …, H_n^1, que é dada por:

$$H_n^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \ldots + H_n^1}{n+1}. \tag{3.43}$$

De maneira análoga, podemos considerar as médias parciais dos termos H_0^1, H_1^1, H_2^1, H_3^1, …, H_n^1. Denotaremos as médias parciais por H_i^2, com $0 \leq i \leq n$, para não haver ambiguidades. Então, temos:

$$H_0^2 = H_0^1;$$
$$H_1^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1}{2};$$
$$H_2^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1}{3};$$
$$H_3^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1 + H_3^1}{4};$$
$$\vdots$$
$$H_n^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \ldots + H_n^1}{n+1}.$$

Agora, tomaremos a média linear dos termos H_1^2, H_0^2, H_2^2, H_3^2, …, H_n^2, que é dada por:

$$H_n^3 = \frac{H_0^2 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \ldots + H_n^2}{n+1}. \tag{3.44}$$

De modo a generalizar a k-ésima média linear das médias parciais anteriores, para um inteiro $k \geq 1$, consideraremos:

$$H_n^k = \frac{H_0^{k-1} + H_1^{k-1} + H_2^{k-1} + H_3^{k-1} + \ldots + H_n^{k-1}}{n+1}. \tag{3.45}$$

Se $H_n^k \to s \in \mathbb{R}$ quando $n \to +\infty$, então dizemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é somável* pelo método (H, k) e escrevemos:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s \ (H, k). \tag{3.46}$$

Por definição, a somabilidade H_n^0 significa convergência no sentido usual.

Conforme vimos no Exemplo 3.1.14, a série $1-2+3-4+5-6+\dots$ é somável* pelo método de Cesàro de segunda ordem. Mostraremos que essa série também é somável* pelo método de Hölder de segunda ordem. No entanto, primeiramente iremos enunciar e demonstrar uma proposição importante.

Proposição 3.2.1 *Seja $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, então é válida a desigualdade:*

$$\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2}\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Demonstração: Inicialmente, note que:

$$\frac{1}{2}\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(2n+1) - \ln(2n-1)\right] = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right).$$

Além disso, utilizando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) &= -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n-1+1-1}{2n+1}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n+1-2}{2n+1}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Neste ponto, é fundamental recordarmos da expansão em série de Maclaurin da função real de variável real definida por $f(x) = \ln(1-x)$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots,\ \text{ para } |x| < 1.$$

Em nosso caso, $\frac{2}{2n+1}$ é sempre menor ou igual a $\frac{2}{3}$. Daí, podemos utilizar a expansão em série de Maclaurin para obtermos a igualdade:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right) &= -\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^3 - \dots\right]\\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^3 + \dots
\end{aligned}$$

Ou seja, para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{1}{x}\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{4}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^2+\frac{1}{6}\left[\frac{2}{2n+1}\right]^3+\ldots \end{aligned} \tag{3.47}$$

Verificamos que as parcelas do lado direito da última linha da Equação 3.47 são sempre positivas e maiores do que zero, portanto concluímos que:

$$\frac{1}{2}\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{1}{x}\,dx \geq \frac{1}{2n+1}.$$

□

Exemplo 3.2.3 *O método* $(H, 1)$ *não fornece uma soma para a série* $1-2+3-4+5-6+\ldots$, *mas o método* $(H, 2)$ *fornece.*

Analisando as somas parciais, observamos que:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1;\\ A_1 &= 1-2=-1;\\ A_2 &= 1-2+3=2;\\ A_3 &= 1-2+3-4=-2;\\ A_4 &= 1-2+3-4+5=3;\\ A_5 &= 1-2+3-4+5-6=-3;\\ &\vdots\\ A_n &= \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.}\\ -\dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.}\end{cases}\end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é dada por:

$$(+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots). \tag{3.48}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.48), temos:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1;\\ A_0 + A_1 &= 1-1=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 - 1 + 2 = 2;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 - 1 + 2 - 2 + 3 = 3;\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = -1 + 2 - 2 + 3 - 3 = 0;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Consequentemente, $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \\ \quad 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n^1$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um número par:

$$\lim_{n\to+\infty} H_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

- Quando n é um número ímpar:

$$\lim_{n\to+\infty} H_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n+1} = 0.$$

Portanto, mais uma vez recaímos no caso de duas subsequências convergindo para valores diferentes. Então, decorre pelo Teorema 2.1.3, que a sequência original diverge no sentido tradicional. Desse modo, a série não é somável $(H, 1)$. No entanto, podemos aplicar o método $(H, 2)$ para tentarmos obter um valor para a soma dessa série divergente.

Relembramos que:

$$H_n^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \ldots + H_n^1}{n+1}$$

e

$$\begin{aligned}
H_0^1 &= \frac{A_0}{1};\\
H_1^1 &= \frac{A_0 + A_1}{2};\\
H_2^1 &= \frac{A_0 + A_1 + A_2}{3};\\
&\vdots\\
H_n^1 &= \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Aplicando para o nosso caso:

$$
\begin{aligned}
H_0^1 &= \frac{1}{1};\\
H_1^1 &= \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2};\\
H_2^1 &= \frac{1-1+2}{3} = \frac{2}{3};\\
H_3^1 &= \frac{1-1+2-2}{4} = \frac{0}{4};\\
H_4^1 &= \frac{1-1+2-2+3}{5} = \frac{3}{5};\\
H_5^1 &= \frac{1-1+2-2+3-3}{6} = \frac{0}{6};\\
H_6^1 &= \frac{1-1+2-2+3-3+4}{7} = \frac{4}{7};\\
&\vdots\\
H_n^1 &= \begin{cases} \dfrac{n+2}{2(n+1)}, \text{ se } n \text{ for par.}\\[2ex] \qquad 0, \text{ se } n \text{ for ímpar.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Como H_n^1 depende do índice, no cálculo de H_n^2 temos que considerar dois casos. Faremos apenas para n par, sendo o outro caso análogo.

Para n par, temos que:

$$
\begin{aligned}
H_n^2 &= \frac{H_0^1 + H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + H_4^1 + H_5^1 + H_6^1 \ldots + H_n^1}{n+1}\\
&= \frac{1 + 0 + \frac{2}{3} + 0 + \frac{3}{5} + 0 + \frac{4}{7} + 0 + \ldots + 0 + \frac{n+2}{2n+2}}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Então, vamos decompor cada termo não nulo do numerador em frações parciais da forma:

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2n+2}.$$

Isto é, buscamos constantes A e B de maneira que:

$$\frac{n+2}{2n+2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2n+2}.$$

Ou seja, queremos igualar as frações de forma que:

$$\frac{n+2}{2n+2} = \frac{nA + A}{2n+2} + \frac{B}{2n+2} = \frac{nA + A + B}{2n+2}.$$

Isso implica em $nA = n$ e $A + B = 2$, de onde temos que $A = 1$ e $B = 1$. Com isso, podemos escrever cada termo como:

$$\frac{n+2}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2}.$$

Assim, H_n^2 admite a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
H_n^2 &= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(2n+2)}\right)}{n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\right)}{n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)}{n+1} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Como n é par, $n = 2k$ para algum k natural. Então, equivalentemente:

$$H_{2k}^2 = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)}{2k+1}.$$

Para evitar confusão com a própria definição do método, iremos trocar k por n novamente:

$$H_{2n}^2 = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}.$$

O prosseguimento do cálculo de H_{2n}^2 depende da soma dos recíprocos dos números ímpares. Mas, aplicando o teste da integral tal como fizemos no Exemplo 2.2.11, descobrimos que a série é tradicionalmente divergente, portanto não conseguimos uma fórmula fechada para expressar a n-ésima soma parcial. Desse modo, utilizaremos uma estratégia inspirada em Weidlich (1950) para contornar esse problema.

De posse da Proposição 3.2.1, transcorre que:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1} \leq$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_5^7 \frac{1}{x}\,dx+\ldots+\frac{1}{2}\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx\right)}{2n+1}.$$

Pela continuidade da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ em relação ao intervalo de integração:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}\leq\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\int_1^{2n+1}\frac{1}{x}\,dx\right)}{2n+1}.$$

Assim, temos a desigualdade:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}\leq\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\ln(2n+1)}{2}-\frac{\ln(1)}{2}\right)}{2n+1}.$$

Portanto, finalmente obtemos:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}\leq\frac{2+\ln(2n+1)}{4(2n+1)}.$$

Além disso, como estamos lidando somente com termos positivos, vem que:

$$0\leq\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}\leq\frac{2+\ln(2n+1)}{4(2n+1)}.$$

Então, vamos considerar duas novas sequências, dadas por:

$$\begin{cases} f_n=0.\\ g_n=\dfrac{2+\ln(2n+1)}{4(2n+1)}.\end{cases}$$

Em seguida, calcularemos o limite de cada uma das sequências para $n\to+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 0=0.\\ \lim\limits_{n\to+\infty} g_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\ln(2n+1)}{4(2n+1)}.\end{cases}$$

Veja que o limite de g_n não pode ser calculado diretamente, pois tanto o numerador quando o denominador tendem para mais infinito. E também não podemos utilizar a regra de L'Hôpital para o cálculo do limite de funções, logo iremos aplicar outro resultado.

Considere as sequências $a_n=[2+\ln(2n+1)]$ e $b_n=4(2n+1)$. Note que $b_n=4(2n+1)$ é estritamente crescente e todos os seus termos são positivos. Mais ainda:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{[2+\ln(2n+3)]-[2+\ln(2n+1)]}{[4(2n+3)]-[4(2n+1)]} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\ln(2n+3)-2-\ln(2n+1)}{8n+12-8n-4} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+3)-\ln(2n+1)}{8} \\
&= \frac{1}{8} \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{8} \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{2n+1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Então, pelo Teorema 2.1.1, concluímos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\ln(2n+1)}{4(2n+1)} = 0.$$

Como os limites dos extremos são iguais a zero, pelo Teorema 2.1.6, vem que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1} = 0.$$

Com base nos resultados que desenvolvemos, somos capazes de mostrar a somabilidade por Hölder de ordem 2:

$$\lim_{n\to+\infty} H_{2n}^2 = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)}{2n+1}\right] = \frac{1}{4}.$$

Para o caso de n ímpar, é análogo. Observe que as somas parciais recursivas H_0^1, H_1^1, H_2^1, ..., H_n^1 de índices ímpares são nulas. Dessa maneira, a soma H_n^2 para n ímpar é igual à soma H_n^2 com n par, acrescida de zero. Portanto, $1-2+3-4+5-6+\ldots = \frac{1}{4}\ (H,2)$.

Constatamos que a obtenção dessa soma pelo método de Cesàro de segunda ordem foi menos trabalhosa do que pelo método de Hölder de segunda ordem.

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões, conjecturas, médias parciais e decomposição em frações parciais podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

3.3 Teoremas de somabilidade

Nesta subseção apresentamos alguns teoremas importantes a respeito dos métodos de Cesàro e Hölder, exibindo propriedades relevantes e relações existentes entre os dois métodos.

Antes de apresentarmos o Teorema 3.3.1, iremos deduzir uma identidade bastante útil para escrever A_n^k em função A_0, A_1, A_2, ..., A_n e também utilizaremos o símbolo $\sim$ para indicar uma aproximação assintótica.[2]

Lema 1 *Considere a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, suas respectivas somas parciais* $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *e a aplicação do método de Cesàro de ordem* k*, então:*

(i) $A_n^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k-1}{k-1} A_j.$

(ii) $A_n^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{k-1} A_{n-j}.$

(iii) $A_n^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k}{k} a_j.$

Demonstração: *(i)* Por definição, temos que:

$$
\begin{aligned}
A_n^k &= A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + A_2^{k-1} + \ldots + A_n^{k-1} \\
&= A_0^{k-2} + A_0^{k-2} + A_1^{k-2} + A_0^{k-2} + A_1^{k-2} + A_2^{k-2} + \ldots + A_n^{k-2} \\
&= \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n+1} A_0^{k-2} + \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n} A_1^{k-2} + \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n-1} A_2^{k-2} + \ldots + A_n^{k-2} \\
&= \binom{n+1}{1} A_0^{k-2} + \binom{n+0}{1} A_1^{k-2} + \binom{n-1}{1} A_2^{k-2} + \ldots + \binom{1}{1} A_n^{k-2} \\
&= \begin{array}{l} ((n+1)+n+\ldots+1)A_0^{k-3} + (n+(n-1)+\ldots+1)A_1^{k-2} + \\ \qquad + ((n-1)+(n-2)+\ldots+1)A_2^{k-3} + \ldots + A_n^{k-3} \end{array} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} A_0^{k-3} + \frac{(n+1)(n)}{2} A_1^{k-3} + \frac{(n)(n-1)}{2} A_2^{k-3} + \ldots + A_n^{k-3} \\
&= \binom{n+2}{2} A_0^{k-3} + \binom{n+1}{2} A_1^{k-3} + \binom{n+0}{2} A_2^{k-3} + \ldots + \binom{2}{2} A_n^{k-3} \\
&= \begin{array}{l} \binom{n+2}{2} A_0^{k-4} + \binom{n+1}{2} \left[A_0^{k-4} + A_1^{k-4}\right] + \\ \qquad + \binom{n+0}{2} \left[A_0^{k-4} + A_1^{k-4} + A_2^{k-4}\right] + \ldots + \binom{2}{2} A_n^{k-4} \end{array}
\end{aligned}
$$

[2] Para saber mais a respeito, indicamos a leitura da obra *Orders of Infinity*, de Hardy (1924, p. 2).

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\right]A_0^{k-4}+\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n+0}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\right]A_1^{k-4}+\\
& +\left[\binom{n+0}{2}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\right]A_2^{k-4}+\\
& +\ldots+\binom{2}{2}A_n^{k-4}\\
= \quad & \binom{n+3}{3}A_0^{k-4}+\binom{n+2}{3}A_1^{k-4}+\binom{n+1}{3}A_2^{k-4}+\ldots+\binom{3}{3}A_n^{k-4}\\
= \quad & \binom{n+3}{3}A_0^{k-5}+\binom{n+2}{3}\left[A_0^{k-5}+A_1^{k-5}\right]+\\
& +\binom{n+1}{3}\left[A_0^{k-5}+A_1^{k-5}+A_2^{k-5}\right]+\ldots+\binom{3}{3}A_n^{k-5}\\
= \quad & \left[\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}+\ldots+\binom{3}{3}\right]A_0^{k-5}+\left[\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{3}{3}\right]A_1^{k-5}+\\
& +\left[\binom{n+1}{3}+\binom{n+0}{3}+\ldots+\binom{3}{3}\right]A_2^{k-5}+\\
& +\ldots+\binom{3}{3}A_n^{k-5}\\
= \quad & \binom{n+4}{4}A_0^{k-5}+\binom{n+3}{4}A_1^{k-5}+\binom{n+2}{4}A_2^{k-5}+\ldots+\binom{4}{4}A_n^{k-5}\\
\vdots &
\end{aligned}
$$

Pelo mesmo raciocínio da dedução do método de Cesàro generalizado, utilizando o Teorema 3.1.1, nas respectivas iterações $(k-1)$ e k, teremos:

$$
\begin{aligned}
= \quad & \binom{n+(k-2)}{k-2}A_0^{k-(k-1)}+\binom{n+(k-3)}{k-2}A_1^{k-(k-1)}+\binom{n+(k-4)}{k-2}A_2^{k-(k-1)}+\\
& +\ldots+\binom{k-2}{k-2}A_n^{k-(k-1)}\\
= \quad & \binom{n+(k-1)}{k-1}A_0^{k-k}+\binom{n+(k-2)}{k-1}A_1^{k-k}+\binom{n+(k-3)}{k-1}A_2^{k-k}+\ldots+\binom{k-1}{k-1}A_n^{k-k}.
\end{aligned}
$$

$$A_n^k=\frac{(n+k-1)!}{(n-0)!(k-1)!}A_0+\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!}A_1+\frac{(n+k-3)!}{(n-2)!(k-1)!}A_2+\ldots+A_n.$$

Com isso, segue-se a identidade:

$$A_n^k=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k-j-1}{k-1}A_j.$$

(ii) Mais ainda, podemos inverter a ordem de escrita dos termos para começarmos por A_n e terminarmos em A_0:

$$A_n^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{k-1} A_{n-j}.$$

O item (iii) segue diretamente da substituição de k por $k+1$ no item (i), uma vez que os termos A_0, A_1, A_2, ..., A_n são formados a partir de a_0, a_1, a_2, ..., a_n. $\square$

Definição 3.3.1 (Funções assintóticas) *Dadas as funções f, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dizemos que f e g são aproximadamente iguais ou assintóticas se:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Isto é, no cálculo de um limite no infinito podemos substituir f por g de forma que a mudança não altera o resultado do limite. Além disso, orientamos que daqui em diante usaremos a notação de aproximação assintótica sem expressar formalmente as funções f e g, indicando apenas o modelo das respectivas leis de formação.

Lema 2 *O termo E_n^k pode ser aproximado assintoticamente $(\sim)$, de modo que:*

$$E_n^k \sim \frac{n^k}{k!}.$$

Demonstração: Por definição, segue-se que:

$$\begin{aligned} E_n^k &= \binom{n+k}{k} \\ &= \frac{(n+k)!}{(n)! \cdot (k)!} \\ &= \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)(n)!}{(n)! \cdot (k)!} \\ &= \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!}. \end{aligned}$$

Agora, basta verificarmos o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n^k}{k!}}{\dfrac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)} = 1.$$

Logo, decorre pela definição de aproximação assintótica que:

$$\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

□

Desse modo, pelo Lema 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k!}{n^k} \cdot A_n^k. \tag{3.49}$$

Então, se uma série divergente for somável para s (C,k), é porque:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k!}{n^k} \cdot A_n^k = s, \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{3.50}$$

Lema 3 *Suponha que j e k sejam números naturais fixos. Então:*

$$\binom{n-j+k+1}{k+1} = \binom{n-j+k}{k} \cdot \frac{n-j+k+1}{k+1}.$$

Demonstração: Por definição, temos que:

$$\begin{aligned}\binom{n-j+k+1}{k+1} = \frac{(n-j+k+1)!}{(n-j)!\cdot(k+1)!} &= \frac{(n-j+k)!}{(n-j)!\cdot(k)!} \cdot \frac{(n-j+k+1)}{k+1} \\ &= \binom{n-j+k}{k} \cdot \frac{(n-j+k+1)}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Lema 4 *Suponha que j e k sejam números naturais fixos. Então:*

$$n \sim \;\; n-j+k+1.$$

Demonstração: Para mostrarmos que $n \sim \;\; n-j+k+1$, basta usar a definição de aproximação assintótica. Temos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-j+k+1}{n} = 1.$$

Portanto, como o limite é igual a 1, os termos são assintoticamente iguais. □

Teorema 3.3.1 *Seja $k \in \mathbb{N}$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ (C,k) então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ $(C,k+1)$.*

Demonstração:

Como a série é somável* (C,k) para s, pelos lemas 1 item *(iii)* e 2, vem que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n^k}{E_n^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{k!}{n^k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j=s.$$

Por outro lado, a somabilidade $(C,k+1)$ depende de $\lim\limits_{n\to+\infty}C_n^{k+1}$. Então, utilizando os lemas 1 e 2, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n^{k+1}}{E_n^{k+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)!}{n^{k+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k+1}{k+1}a_j$$

Decorre pela igualdade provada no Lema 3 que:

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)!}{n^{k+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}\left[\frac{n-j+k+1}{k+1}\right]a_j$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)!}{n^{k+1}}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}[n-j+k+1]a_j$$

Agora, pelo Lema 4, dada a aproximação assintótica, temos que:

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)!}{n^{k+1}}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}na_j$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)!}{n^{k+1}}\frac{n}{k+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{k!}{n^k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j$$

$$=s.$$

□

Em outras palavras, o Teorema 3.3.1 diz que se uma série for Cesàro-somável por uma ordem k, então ela também será somável* para toda ordem $j>k$ para o mesmo valor.

Exemplo 3.3.1 *Determinaremos o termo geral da sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \ldots)$ e de sua respectiva sequência de somas parciais.*

Pelo Exemplo 3.1.1, a sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada pela expressão:

$$h_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

Prosseguindo para a sequência das somas parciais de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1;\\
H_1 &= 1+1 = 2;\\
H_2 &= 1+1+2 = 4;\\
H_3 &= 1+1+2+2 = 6;\\
H_4 &= 1+1+2+2+3 = 9;\\
H_5 &= 1+1+2+2+3+3 = 12;\\
H_6 &= 1+1+2+2+3+3+4 = 16;\\
H_7 &= 1+1+2+2+3+3+4+4 = 20;\\
H_8 &= 1+1+2+2+3+3+4+4+5 = 25;\\
H_9 &= 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5 = 30;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta vez temos um padrão que não é alternante. Ademais, constatamos a seguinte regularidade: $f(1) = 2$, $f(3) = 6$, $f(5) = 12$, $f(7) = 20$, $f(9) = 30$, $\ldots$. Explorando as somas parciais H_n, notamos que para n ímpar, estamos sempre somando duas vezes $1+2+\ldots+\frac{n+1}{2}$. Então, reconhecendo que $1+2+\ldots+\frac{n+1}{2}$ é a soma de uma progressão aritmética, podemos escrever que:

$$1+2+\ldots+\frac{n+1}{2} = \frac{\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{2} = \frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

Dessa forma, se n for ímpar,

$$H_n = 2\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{8} = \frac{(n+1)(n+3)}{4}.$$

Para o caso de n par, é análogo. Examinando as somas parciais H_n, percebemos que se o índice for par, basta tomar a próxima soma parcial de índice ímpar e subtrair o último valor $\frac{n+1}{2}$ adicionado, isto é, quando n for par:

$$H_n = \frac{(n+1)(n+3)}{4} - \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+2n+1}{4}.$$

No entanto, aqui estaríamos lidando com o índice errado, pois essa fórmula é válida para n ímpar. Dessa maneira, devemos deslocar um índice trocando n por $n+1$. Assim, finalmente podemos expressar que, para n par:

$$H_n = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) + 1}{4} = \frac{n^2 + 4n + 4}{4}.$$

Examinando o padrão que descreve a sequência, concluímos que:

$$H_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+4n+3}{4}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \\ \dfrac{n^2+4n+4}{4}, \text{ se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Ainda podemos descrever a sequência por uma única expressão:

$$H_n = \frac{n^2 + 4n + 3 + \frac{1+(-1)^n}{2}}{4}.$$

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: reconhecimento de padrões e conjecturas podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.3.2 *A série de Grandi tem soma* $\frac{1}{2}$ $(C, 1)$ *e* $\frac{1}{2}$ $(C, 2)$*.*

Pelo Exemplo 3.1.2, já sabemos que $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$ $(C, 1)$. Mais ainda, a sequência das somas parciais dessa série é: $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$.

Então, vamos contruir a sequência de somas parciais dessa nova sequência.

$$\begin{aligned}
&A_0^1 = 1;\\
&A_1^1 = 1 + 0 = 1;\\
&A_2^1 = 1 + 0 + 1 = 2;\\
&A_3^1 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2;\\
&A_4^1 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3;\\
&A_5^1 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3;\\
&\ \vdots\\
&A_n^1 = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Desse modo, temos a sequência das somas parciais:

$$(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \ldots). \tag{3.51}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.51), temos:

$$A_0^1 = 1;$$

$$\begin{aligned}
&A_0^1 + A_1^1 = 1 + 1 = 2;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 = 1 + 1 + 2 = 4;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 = 1 + 1 + 2 + 2 = 6;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 A_4^1 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9;\\
&A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 A_4^1 + A_5^1 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12;\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Pelo Exemplo 3.3.1, vem que:

$$A_0^1 + A_1^1 + A_2^1 + A_3^1 + \ldots + A_n^1 = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 4n + 4}{4}, \text{ se } n \text{ for par.} \\ \dfrac{n^2 + 4n + 3}{4}, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Novamente reforçamos que:

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{E_n^2} \text{ e } E_n^2 = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Vamos analisar as duas subsequências acima. Para calcularmos $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^2$, precisamos considerar dois casos:

- Quando n é um índice par:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{n^2 + 4n + 4}{4}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

- Quando n é um índice ímpar:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{n^2 + 4n + 3}{4}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{2}.$$

Então, segue do Teorema 2.1.4 que:

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^2 = \frac{1}{2}.$$

Daí, a série é somável* $(C, 2)$ para o mesmo valor, o que é garantido pelo Teorema 3.3.1. Consequentemente, a aplicação dos métodos $(C, 3)$, $(C, 4)$, $\ldots$, (C, k), também resultará na somabilidade para $\dfrac{1}{2}$. Mas é importante ressaltar que a recíproca do teorema não é válida, há séries somáveis* por $(C, 3)$ que não são somáveis* $(C, 1)$, como vimos no Exemplo 3.1.18.

Teorema 3.3.2 *Os métodos (C, k) e (H, k) são equivalentes.*

Demonstração: Consultar Hardy (1949, p. 103) para verificação rápida e ler Fort (1927) para uma demonstração detalhada. $\square$

Ressaltamos que o Teorema 3.3.2 exige elementos que fogem do escopo do nosso trabalho. Hardy (1949, p. 103, tradução nossa) afirma que "o próximo teorema é distintamente mais difícil", reconhecendo a dificuldade da demonstração do teorema. Por isso, optamos por apenas enunciá-lo.

Teorema 3.3.3 *$(C, 1)$ e $(H, 1)$ são métodos regulares de soma.*

Demonstração:

Seja $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j$ uma série convergente no sentido tradicional, $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j = \lim_{j\to+\infty} s_j = s \in \mathbb{R}$. Em seguida, considere t_n como a n-ésima média aritmética das somas parciais. Com isso, temos:

$$|t_n - s| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j - s\right| = \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} s_j - (n+1)s\right)\right|. \tag{3.52}$$

Agora, vamos considerar apenas o termo entre parentes da Equação 3.52, que pode ser expandido e reagrupado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} s_j - (n+1)s &= s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n - \underbrace{(s + s + s + \ldots + s)}_{n+1 \text{ vezes}} \\ &= (s_0 - s) + (s_1 - s) + (s_2 - s) + \ldots + (s_n - s) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(s_j - s).\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} s_j - (n+1)s\right)\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(s_j - s)\right|.$$

Então, pela desigualdade triangular:

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(s_j - s)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|s_j - s|.$$

Daí, como a série converge, $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um natural N_1 tal que $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n > N_1$. Então, considerando $n > N_1$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=N_1}^{n}|s_j - s| < \frac{1}{n+1}\sum_{j=N_1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{n+1-N_1}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\sum_{j=0}^{N_1-1}|s_j - s|$ é uma soma finita que independe de n, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{N_1-1}|s_j - s| = 0.$$

Isto significa que para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um natural N_2 de forma que $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{N_1-1}|s_j - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ se $n > N_2$. Agora, basta tomar $N = max\{N_1,\ N_2\}$. Daí, quando $n > N$, teremos:

$$\begin{aligned}|t_n - s| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|s_j - s| &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{N_1-1}|s_j - s| + \frac{1}{n+1}\sum_{j=N_1}^{n}|s_j - s| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε foi tomado arbitrariamente, $\lim_{n\to+\infty}|t_n - s| = 0$. Ou seja, $\lim_{n\to+\infty} t_n = s$. $\square$

Exemplo 3.3.3 *A série geométrica de razão* $\frac{1}{2}$ *dada por* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ *converge para* 2 *e também é somável** $(C,1)$ *para* 2.

Construindo a sequência de somas parciais, temos que:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\\
&A_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4};\\
&A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8};\\
&A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16};\\
&\quad\vdots\\
&A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Com isso, a sequência das somas parciais da série é da forma:

$$\left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{31}{16},\ \frac{63}{32},\ \ldots\right). \tag{3.53}$$

Então, calculando as somas parciais da nova sequência em (3.53), temos:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_0 + A_1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2};\\
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{17}{4};\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} = \frac{49}{8};\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \frac{31}{16} = \frac{129}{16};\\
&A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \frac{31}{16} + \frac{63}{32} = \frac{321}{32};\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Portanto, segue-se que:

$$
A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \ldots + \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k}.
$$

Aplicando as propriedades do Teorema 2.2.3, vem que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\\
&= 2(n+1) - 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\\
&= 2n + 2 - \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right]\\
&= 2n + 2 - 2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]\\
&= 2n + \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Dessa maneira, podemos aplicar a definição e calcular o limite:

$$
\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n + \dfrac{1}{2^n}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{n2^n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.
$$

Com esse resultado ilustramos o caso de uma série que converge no sentido tradicional para um valor sendo somável para o mesmo valor. Este resultado é consequência da **regularidade** do método de Cesàro de ordem 1.

Teorema 3.3.4 *(C, k) e (H, k) são métodos regulares de soma.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.3, os métodos $(H, 1)$ e $(C, 1)$ são regulares, isto é, toda série convergente no sentido tradicional é somável* para o mesmo número para o qual ela converge por ambos os métodos. Em decorrência do Teorema 3.3.1, a somabilidade de uma série pelo método de Cesàro de primeira ordem implica na somabilidade de Cesàro para toda ordem maior do que 1 para o mesmo valor. Então, o método (C, k) é regular. A regularidade do método (H, k) é consequência da equivalência entre os métodos, que é garantida pelo Teorema 3.3.2. □

Teorema 3.3.5 *(C, k) e (H, k) são métodos lineares.*

Demonstração: Como os métodos (H, k) e (C, k) são equivalentes, aqui será suficiente mostrar que a propriedade vale para o método de Cesàro.

Suponha que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\ (C, k)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = t\ (C, k)$. Além disso, considere $c \in \mathbb{R}$, A_n^k e B_n^k, as respectivas somas parciais recursivas do método de Cesàro de ordem k para as séries de termos a_n e b_n. Como as séries são somáveis*, decorre que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k}{k} a_j}{E_n^k} = s.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k}{k} b_j}{E_n^k} = t.$$

Agora, seja $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n$ uma série definida de maneira que $d_n = a_n + b_n$. Aplicando o método de Cesàro de ordem k, obtemos a soma parcial recursiva D_n^k. E, então, verificando a somabilidade, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n^k}{E_n^k} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k}{k} d_j}{E_n^k} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k}{k} (a_j + b_j)}{E_n^k}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j}{E_n^k}+\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}b_j}{E_n^k}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j}{E_n^k}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}b_j}{E_n^k}$$

$$= s+t.$$

Agora, considere $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série definida de maneira que $f_n = ca_n$. Aplicando o método de Cesàro de ordem k, obtemos a soma parcial recursiva F_n^k. Assim, analisando a somabilidade, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}f_j}{E_n^k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}ca_j}{E_n^k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{c\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j}{E_n^k}$$

$$= c\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j}{E_n^k}$$

$$= cs.$$

Logo, o método (C,k) é linear. □

Exemplo 3.3.4 *Para ilustrarmos a linearidade do método* $(C,1)$*, temos:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1-\ldots = \frac{1}{2}\ (C,1).$$

Agora, considerando a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ e a linearidade do método:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\cdot(-1)^n \ (C,1)\\ &= (-1)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \ (C,1)\\ &= -\frac{1}{2}\ (C,1).\end{aligned}$$

Portanto, decorre da linearidade que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} = -1+1-1+1-1+1-1+\ldots = -\frac{1}{2}\ (C,1).$$

Além disso, pela propriedade da soma conseguimos afirmar que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ (C,1)\\ &= \frac{1}{2}\ (C,1)-\frac{1}{2}\ (C,1)\\ &= 0\ (C,1).\end{aligned}$$

Teorema 3.3.6 *(C,k) e (H,k) são métodos estáveis.*

Demonstração:

Suponha que $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j = s\ (C,k)$ e considere $b_j = a_{j+1}$, portanto $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+1} = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j$. Pela definição de estabilidade, queremos mostrar que:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j = s\ (C,k) \iff \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = s-a_0\ (C,k).$$

Utilizando o Lema 1, temos a equivalência:

$$A_n^k = \sum_{j=0}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j = \binom{n+k}{k}a_0+\sum_{j=1}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j. \tag{3.54}$$

Note que o segundo termo de (3.54) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-j+k}{k}a_j &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-(j+1)+k}{k}a_{j+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{(n-1)-j+k}{k}b_j. \end{aligned}\tag{3.55}$$

Mais ainda, aplicando o Lema 1 na série de termos b_j, vem que:

$$B_{n-1}^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1)-j+k}{k} b_j. \tag{3.56}$$

Reunindo as equações 3.54, 3.55 e 3.56, obtemos:

$$A_n^k = \binom{n+k}{k} a_0 + B_{n-1}^k.$$

Daí, por definição, prossegumios com:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \lim_{n\to+\infty} \left(a_0 + \frac{B_{n-1}^k}{E_n^k} \right).$$

Mas, então, ocorre que:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k = s \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{E_n^k} = s - a_0. \tag{3.57}$$

Pela definição de E_n^k, verifica-se que:

$$E_n^k = \binom{n+k}{k} = \frac{n+k}{n} \binom{n-1+k}{k} = \frac{n+k}{n} E_{n-1}^k.$$

Desse modo, conseguimos expressar o limite em (3.57) como:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{\frac{n+k}{n} E_{n-1}^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+k} \cdot \frac{B_{n-1}^k}{E_{n-1}^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{E_{n-1}^k}.$$

Ou seja, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{E_n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n-1}^k}{E_{n-1}^k} = s - a_0.$$

Então, isto significa que:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_j = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots = (s - a_0)\ (C, k). \tag{3.58}$$

Mas pelo fato de $b_j = a_{j+1}$, podemos reescrever a Equação 3.58 como:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = (s - a_0)\ (C, k).$$

Portanto, concluímos que o método (C, k) é estável. Além disso, pela equivalência, o método (H, k) também é estável.

$\square$

Exemplo 3.3.5 *Ilustraremos a estabilidade do método de Cesàro com a série de Grandi.*

Já determinamos que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}\ (C,1).$$

Então, pela estabilidade do método:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n = \frac{1}{2} - 1\ (C,1).$$

Ou equivalentemente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n = -\frac{1}{2}\ (C,1).$$

Como verificamos pelos exemplos do capítulo, o processo de calcular as sucessivas somas parciais e encontrar expressões gerais para os n-ésimos termos de uma soma são tarefas um tanto árduas. Por isso, apresentamos um teorema muito útil para somar séries divergentes que tenham uma sequência de somas parciais periódica.

Definição 3.3.2 (Sequência periódica) *Uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é periódica caso exista um inteiro positivo p tal que $s_{n+p} = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.3.6 *Vejamos um exemplo de sequência periódica.*

$$(\underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3,}_{\text{período} = 4}\ \underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3,}_{\text{período} = 4}\ \underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3}_{\text{período} = 4},\ \ldots).$$

Teorema 3.3.7 *Se uma série possui uma sequência de somas parciais periódica de período p, então a série é somável* por Cesàro e Hölder, de todas as ordens, para o número real $s = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} A_n$.*

Demonstração:

Como os métodos de Cesàro e Hölder de ordem k são regulares e equivalentes, é suficiente mostrarmos que vale para $(C,1)$.

Seja $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_j$ e considere que tal série tenha uma sequência de somas parciais periódica com período p. Agora, pelo algoritmo da divisão, podemos escrever $n = mp + r$, em que $0 \leq r < p$. Então, pela definição de somabilidade:

$$C_n^1 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} A_j = \frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{mp-1} A_j + \frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=mp}^{mp+r} A_j. \tag{3.59}$$

Pela periodicidade da sequência das somas parciais, a segunda parcela do segundo termo de (3.59) se torna:

$$\frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=mp}^{mp+r} A_j = \frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{r} A_j. \tag{3.60}$$

Observe que a série em (3.60) não depende de m, então essa parcela irá desaparecer quando m tende ao infinito.

Adicionalmente, destacamos que a primeira parcela da soma da Equação 3.59 pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{mp-1} A_j = & \\
& (A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1}) + \\
& (A_p + A_{p+1} + A_{p+2} + \ldots + A_{2p-1}) + \\
& (A_{2p} + A_{2p+1} + A_{2p+2} + \ldots + A_{3p-1}) + \\
& (A_{3p} + A_{3p+1} + A_{3p+2} + \ldots + A_{4p-1}) + \\
& \vdots \\
& + (A_{(m-1)p} + A_{(m-1)p+1} + A_{(m-1)p+2} + \ldots + A_{mp-1}).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Daí, pela periodicidade p, cada parcela entre parênteses na Equação 3.61 é igual a $(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1})$. E observamos que há m parcelas, pois o primeiro termo da primeira parcela é A_{0p} e o primeiro termo da última parcela é $A_{(m-1)p}$. Dessa maneira, podemos escrever o primeiro termo de (3.59) como:

$$\frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{mp-1} A_j = \frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{p-1} mA_j = \frac{m}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{p-1} A_j. \tag{3.62}$$

Substituindo as equações 3.60 e 3.62 em (3.59), vem que:

$$C_n^1 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} A_j = \frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{r} A_j + \frac{m}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{p-1} A_j. \tag{3.63}$$

Agora, é suficiente considerar o limite conforme n e m tendem a infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{m\to+\infty} C_{mp+r}^1$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left[\frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{r}A_j + \frac{m}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{p-1}A_j\right]$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{r}A_j + \lim_{m\to+\infty}\frac{m}{mp+r+1}\sum_{j=0}^{p-1}A_j$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}A_j.$$

□

Exemplo 3.3.7 *Considere o elemento especial* δ_n[3]*, da Equação 3.5, e a série definida por:*

$$\log(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\frac{n+\delta_{n+1}}{2}} \cdot \log\left(2+\delta_{n+1}\right).$$

Como estamos iniciando nossos índices por 0, tomaremos $A_0 = \log\,(2)$. Vejamos a somabilidade dessa série.

Construindo a sequência de somas parciais, temos que:

$$\begin{aligned}
&A_0 = \log(2);\\
&A_1 = \log(2) - \log(3) = \log\left(\frac{2}{3}\right);\\
&A_2 = \log(2) - \log(3) - \log(2) = \log\left(\frac{1}{3}\right);\\
&A_3 = \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) = 0;\\
&A_4 = \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) + \log(2) = \log(2);\\
&A_5 = \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) + \log(2) - \log(3) = \log\left(\frac{2}{3}\right);\\
&A_6 = \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) + \log(2) - \log(3) - \log(2) = \log\left(\frac{1}{3}\right);\\
&A_7 = \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) + \log(2) - \log(3) - \log(2) + \log(3) = 0;\\
&\quad\vdots\\
&A_n = \begin{cases}
\log\,(+2), \text{ se } n \in \{0,\ 4,\ 8,\ 12, \ldots\}.\\[4pt]
\log\left(\frac{2}{3}\right), \text{ se } n \in \{1,\ 5,\ 9,\ 13, \ldots\}.\\[4pt]
\log\left(\frac{1}{3}\right), \text{ se } n \in \{2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots\}.\\[4pt]
\qquad 0, \text{ se } n \in \{3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots\}.
\end{cases}
\end{aligned}$$

[3] Relembramos que $\delta_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Aqui encontraremos dificuldade para escrever o termo geral da soma dos elementos A_n. Porém, observamos que a sequência das somas parciais é periódica e assim podemos utilizar o Teorema 3.3.7 para calcular o valor para o qual a série é somável*.

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p = 4$, para o valor s:

$$s = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} A_n = \frac{1}{4} \cdot (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = \frac{1}{4} \cdot \log\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{2}{3}\right).$$

Também evidenciamos a potencialidade deste exemplo para o ensino de matemática: propriedades de logaritmos e sequências periódicas podem ser trabalhados com estudantes do ensino médio.

Exemplo 3.3.8 *Dada a série* $1+0+0+0-1+1+0+0+0-1+1+0+0+0-1+1+\ldots$, *temos:*

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1;\\
A_1 &= 1;\\
A_2 &= 1;\\
A_3 &= 1;\\
A_4 &= 0;\\
A_5 &= 1;\\
A_6 &= 1;\\
A_7 &= 1;\\
A_8 &= 1;\\
A_9 &= 0;\\
&\vdots\\
A_n &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \in \{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \ldots\}. \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ou seja, a sequência das somas parciais é da forma:

$$(\underbrace{+1,\ +1,\ +1,\ +1,\ 0}_{\text{período}\,=\,5},\underbrace{+1,\ +1,\ +1,\ +1,\ 0}_{\text{período}\,=\,5},\underbrace{+1,\ +1,\ +1,\ +1,\ 0}_{\text{período}\,=\,5},\ldots)$$

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p = 5$, para o valor s:

$$s = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} A_n = \frac{1}{5} \cdot (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \frac{4}{5}.$$

Note que, de posse do teorema, teríamos facilmente calculado as somas nos exemplos 3.1.3 e 3.1.4.

Exemplo 3.3.9 *Mostraremos mais rapidamente, sem a necessidade de calcular um limite, que a série* $1-1-1+1+1-1-1+1+1--++\dots$ *é somável para* 0 $(C,1)$.

Como já vimos no Exemplo 3.1.3, essa série tem a seguinte sequência de somas parciais:

$$(\underbrace{+1,\ 0,\ -1,\ 0,}_{\text{período}\,=\,4}\underbrace{+1,\ 0,\ -1,\ 0,}_{\text{período}\,=\,4}\underbrace{+1,\ 0,\ -1,\ 0,}_{\text{período}\,=\,4}\dots).$$

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p=4$, para o valor s:

$$s=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}A_n=\frac{1}{4}\cdot(A_0+A_1+A_2+A_3)=\frac{0}{4}=0.$$

Exemplo 3.3.10 *Mostraremos mais rapidamente, sem a necessidade de calcular um limite, que a série* $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1++\dots$ *é somável para* 0 $(C,1)$.

Como já vimos no Exemplo 3.1.4, essa série tem a seguinte sequência de somas parciais:

$$(\underbrace{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 0,}_{\text{período}\,=\,3}\underbrace{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 0,}_{\text{período}\,=\,3}\underbrace{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 0,}_{\text{período}\,=\,3}\dots).$$

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p=3$, para o valor s:

$$s=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2}A_n=\frac{1}{3}\cdot(A_0+A_1+A_2)=\frac{0}{3}=0.$$

3.4 Diluição de uma série

Definição 3.4.1 (Diluição de uma série) *A inclusão de infinitos zeros entre os termos de uma série divergente é denominada a diluição da série.*

De acordo com Hardy (1949), a inclusão de zeros entre os termos de uma série não altera a convergência ou a divergência no sentido tradicional. Entretanto, a diluição de uma série divergente pode alterar a soma da série no sentido generalizado e até mesmo destruir a somabilidade.

Exemplo 3.4.1 *Vamos diluir a série de Grandi incluindo zeros entre* 1 *e* -1. *Assim, a nova série é dada por:* $1+0-1+1+0-1+1+0-1+-+\dots$

Vamos analisar as somas parciais:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1;\\
&A_1 = 1 + 0 = 1;\\
&A_2 = 1 + 0 - 1 = 0;\\
&A_3 = 1 + 0 - 1 + 1 = 1;\\
&A_4 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 = 1;\\
&A_5 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 = 0;\\
&A_6 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 = 1;\\
&A_7 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 = 1;\\
&A_8 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 = 0;\\
&\quad\vdots\\
&A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \in \{2,\ 5,\ 8, 11,\ \ldots\}. \\ 1, \text{ caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ou seja, a sequência das somas parciais é da forma:

$$(\underbrace{1,\ 1,\ 0,}_{\text{período} = 3}\ \underbrace{1,\ 1,\ 0,}_{\text{período} = 3}\ \underbrace{1,\ 1,\ 0}_{\text{período} = 3},\ \ldots).$$

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p = 3$, para o valor s:

$$s = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} A_n = \frac{1}{3}\cdot(A_0 + A_1 + A_2) = \frac{2}{3}.$$

Portanto a série é somável $(H, 1)$ e $(C, 1)$ para $\frac{2}{3}$. Entretanto, esse valor é diferente da soma da série de Grandi não diluída.

Destacamos que a diluição de uma série também depende da **posição** em que os zeros são adicionados.

Exemplo 3.4.2 *Vamos mostrar que:* $0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{3}\ (C, 1).$

Analisando as somas parciais, temos que:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 0;\\
&A_1 = 0 + 1 = 1;\\
&A_2 = 0 + 1 - 1 = 0;\\
&A_3 = 0 + 1 - 1 + 0 = 0;\\
&A_4 = 0 + 1 - 1 + 0 + 1 = 1;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_5 &= 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 = 0;\\
A_6 &= 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 = 0;\\
A_7 &= 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 = 1;\\
A_8 &= 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 = 0;\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ou seja, a sequência das somas parciais é da forma:

$$(\underbrace{0,\ 1,\ 0,}_{\text{período}\,=\,3}\ \underbrace{0,\ 1,\ 0,}_{\text{período}\,=\,3}\ \underbrace{0,\ 1,\ 0}_{\text{período}\,=\,3},\ \ldots).$$

Então, pelo Teorema 3.3.7, tal série é somável* por Cesàro e Hölder, com $p = 3$, para o valor s:

$$s = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} A_n = \frac{1}{3}\cdot(A_0 + A_1 + A_2) = \frac{1}{3}.$$

Até então, utilizamos os métodos para somar algumas séries divergentes. Mas note que essas são muito específicas quanto à forma. Por exemplo, conforme Hardy (1949), os métodos de Cesàro e de Hölder falham quando os termos da série crescem indefinidamente e são todos positivos. Para lidar com essa questão, podemos lançar mão de métodos de somabilidade que englobam uma gama ainda maior de séries divergentes, como é o caso do método de Abel, que pode ser consultado em Knopp (1928). De nossas definições, dizemos que o método de Abel é mais **robusto** que os métodos de Cesáro e Hölder: há séries que não são somáveis* por ambos os métodos, mas que são somáveis* por Abel.

Por fim, gostaríamos de destacar que a série harmônica diverge muito lentamente, no sentido tradicional, conforme ilustrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Somas parciais dos termos da série harmônica

Termos	Soma
1	1,000000
10	2,928968
100	5,187377
1.000	7,485470
10.000	9,787606
100.000	12,090146
1.000.000	14,392726
10.000.000	16,695311
100.000.000	18,997896

Fonte: Pereira (2018).

De acordo com Hardy (1949), qualquer método de somabilidade irá falhar para séries que divergem muito rapidamente e também para séries que divergem muito lentamente. Logo, a série harmônica não é somável no sentido generalizado, pelo menos até o momento.

4 Considerações finais

Defendendo a perspectiva de que os professores de matemática devem estar bem preparados para ensinarem os conteúdos, conhecendo seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica e a relação da matemática com a realidade, propomos uma quebra de paradigma em relação à teoria tradicional de sequências e séries: Por que séries divergentes não podem ter somas?

Na realidade, o entrave que impede as séries divergentes de terem soma é a definição de soma de uma série. Nesse contexto, Euler foi o primeiro matemático a flexibilizar a concepção de soma de série, para que ela também incluísse as séries divergentes.

Porém, apesar dos estudos de Euler, as séries divergentes continuaram a ser excluídas propositalmente, porque elas facilmente geravam problemas e resultados paradoxais que os matemáticos eram incapazes de explicar. E a rejeição das séries divergentes ganhou ainda mais força na era de Cauchy, pois a definição apresentada pelo matemático foi construída justamente para evitar séries divergentes.

Como consequência disso, a teoria das séries divergentes ficou abandonada pelos matemáticos até o final do século XIX, quando Ernesto Cesàro resgatou o tema e apresentou a primeira definição de soma de série divergente com limites, sequências e somas parciais. A partir daí, surgiram vários métodos de somabilidade e muitos desenvolvimentos produtivos, dentre os quais destacamos os métodos de Cesàro e Hölder.

Mas, por se tratar de um tópico incomum, a literatura da teoria das séries divergentes é relativamente escassa, encontramos exclusivamente um documento em língua portuguesa, a obra *Somas de séries no sentido generalizado: Factores de convergência*, de Costa (1931), tornando o assunto ainda mais inacessível. Além disso, também gostaríamos de relatar que os livros e as referências sobre o tema são confusos e omitem muitas passagens cruciais para o entendimento da teoria. Em virtude disso, empenhamo-nos em apresentar todas as definições de forma clara, deduzindo as equações e mostrando de onde surgem certos termos.

Conforme visto no Capítulo 3, muitas vezes necessitamos deduzir expressões que indicam o n-ésimo termo de uma sequência para verificarmos a somabilidade de alguma série dada. Portanto, são essenciais as tarefas de reconhecimento de padrões e generalização, que podem ser feitas por estudantes do ensino médio.

É nesse momento que acontece o encontro entre a matemática do ensino superior, da teoria de séries divergentes, e a matemática do ensino médio. Como observamos nos exemplos, há espaço para se explorar progressões aritméticas, progressões geométricas, trigonometria, logaritmos, análise de padrões e também a conjectura de fórmulas.

Desse modo, ressaltamos que as séries divergentes também podem ser utilizadas em outros contextos da matemática, gerando uma conexão de assuntos elementares com tópicos mais avançados. Novamente reforçamos que o conhecimento da teoria das séries divergentes é importante para o docente, uma vez que complementa sua formação, preenchendo uma lacuna potencialmente conflitante. É por isso que buscamos contribuir na formação dos professores, apresentando a negociação de significados e a produção de novas matemáticas que foram criadas.

Contudo, sendo uma pesquisa introdutória, muitos desdobramentos da teoria não foram vistos: o método de Abel, o método de Borel, os teoremas tauberianos e abelianos, a somabilidade para integrais divergentes, a aplicação dessa teoria nas séries de Fourier, os métodos matriciais, etc, temas que indicamos como pesquisas futuras.

Por fim, esperamos que a dissertação sirva como uma introdução compreensiva à teoria das séries divergentes, atuando como um instrumento de divulgação e inspirando outros a se aprofundarem neste tema tão negligenciado na matemática.

Referências

ALABDULMOHSIN, I. M. A new summability method for divergent series. [Preprint]. arXiv, DOI https://doi.org/10.48550/arXiv.1209.5739. 2016.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 2.

APOSTOL, T. *Cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.

AVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARBOSA, F. F. *O teorema de Stolz-Cesàro e algumas de suas aplicações*. 2023. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, IFPB. Disponível em: https://repositorio.ifpb.edu.br/jspui/handle/177683/3424. Acesso em: 29 jun. 2024.

BARTLE, R. G. *Elementos de Análise Real*. 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1983.

CARVALHO, J. P. B.; ROQUE, T. *Tópicos de história da matemática (Coleção PROFMAT)*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

CERQUEIRA, A. C. S. *Um estudo sobre sequências e séries*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP.

COSTA, F. C. da. *Somas de séries no sentido generalizado: Factores de convergência*. 1931. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

COURANT, R.; JOHN, F. *Introduction to Calculus and Analysis*. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1965.

EULER, L. *Foundations of Differential Calculus*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1748. Traduzido por John D. Blanton da Parte I de Institutiones calculi differentialis, em 2000.

EULER, L. *Elements of Algebra*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1755. Traduzido e editado por J. Hewlett, em 1984.

EULER, L. De seriebus divergentibus. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, v. 5, p. 205–237, 1760. Reimpresso em Opera Omnia: Series 1, v. 14, p. 585-617. Tradução de Alexander Aycock. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org. Acesso em: 11 jun. 2024.

FERRARO, G. The first modern definition of the sum of a divergent series: An aspect of the rise of 20th century mathematics. *Arch. Hist. Exact Sci*, v. 54, n. 2, p. 101–135, 1999. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/41134077. Acesso em: 02 out. 2023.

FERRARO, G. *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*. 1. ed. New York: Springer Science Business Media, 2008.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise 1*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996. v. 1.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação PUC—Campinas*, Campinas, São Paulo, s, n. 18, p. 107–115, 2005. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/266. Acesso em: 21 nov. 2023.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, São Paulo, v. 27, n. 47, p. 917–938, 2013. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8286. Acesso em: 23 nov. 2023.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 1.

FORT, T. An elementary proof by mathematical induction of the equivalence of the Cesàro and Hölder sum formulas. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 33, n. 3, p. 301 – 304, 1927.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v. 4.

HARDY, G. H. *Orders of infinity*. 2. ed. Cambridge: University Press, 1924.

HARDY, G. H. *Divergent series*. 1. ed. London: Oxford University Press, 1949.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 4: Sequências, matrizes, determiantes e sistema*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2019.

KLINE, M. Euler and infinite series. *Mathematics Magazine*, v. 56, n. 5, p. 307–314, 1983.

KNOPP, K. *Theory and Application of Infinite Series*. 1. ed. Glasgow: Blackie, 1928.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002. v. 2.

LIMA, E. L. *Análise Real*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v. 1. (Coleção Matemática Universitária, v. 1).

LIMA, E. L. *Análise Real: funções de uma variável real*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

LINS, A. F.; LORENZATO, S.; SOUSA, D. B. de. Que por quês e quais porquês matemáticos de alunos do ensino superior. *Anais VI CONEDU...*, Campina Grande, Paraíba, 2019. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/62345. Acesso em: 2 jan. 2024.

LOPES, F. J. A. "sobre as somas das séries de recíprocos", de l. euler. *Revista Brasileira de História da Matemática*, S.L., v. 21, n. 42, p. 206–228, 2021. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/361. Acesso em: 16 jan. 2024.

LORENZATO, S. Os porquês dos alunos e as respostas dos professores. *Revista Pro-Posições*, FE, UNICAMP, v. 4, n. 1, p. 73–77, 1993.

LUCHETTA, V. O. J. *Uma possível produção de significados para as séries no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler*. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP.

MARKUSSON, S. *Divergent Series and Summation Methods*. 2022. Monografia (Bacharelado em Matemática) — Uppsala University.

MONTANHA, M. A. S. *Séries geométricas: a quadratura da Parábola de Arquimedes e os livros didáticos do Ensino Básico*. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PEREIRA, J. R. V. *Sequências e Séries Numéricas: Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT, Universidade Estadual do Mato Grosso, UNEMAT.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. 1. ed. São Paulo: Editora Mir, 1977. v. 1.

RODRIGUES, M. R. et al. Dupla descontinuidade contínua na formação inicial de professores de matemática: compreensões dos professores de matemática em serviço nas escolas da educação básica. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, S.L., v. 5, n. 3, p. 189–224, 2022. DOI: 10.30612/tangram.v5i3.12532. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12532. Acesso em: 25 jun. 2024.

RUDIN, W. *Principles of Mathematical analysis*. 3. ed. London: McGraw-Hill, 1976.

SANTOS, A. M. dos; CARVALHO, H. M. de. A face extralógica do Último teorema de fermat: um ensaio sobre a filosofia da prática matemática. *Revista de Educação Matemática*, S.L., v. 20, p. e023078, 2023. DOI: 10.37001/remat25269062v20id777. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/22. Acesso em: 16 jan. 2024.

SPIVAK, M. *Calculus*. 4. ed. S.L.: Publish or Perish, 2008.

STEWART, J. *Cálculo*. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

THOMAS, G.; WEIR, M.; HASS, J. *Cálculo*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2014. v. 1.

WEIDLICH, J. E. *Summability methods for divergent series*. 1950. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Stanford University.

WHITE, A. J. *Análise real: uma introdução*. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1993. (Traduzido por Elza Gomide).

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical thinking and learning*, S.L., v. 12, n. 4, p. 263–281, 2010.