

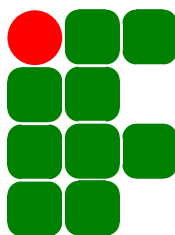
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

**PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

MARCELO PEREIRA DA SILVA

**Transformação geométrica de inversão circular: Proposta
pedagógica para o ensino básico**

São Paulo – SP
2025



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

**PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

MARCELO PEREIRA DA SILVA

**Transformação geométrica de inversão circular: Proposta
pedagógica para o ensino básico**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado.

São Paulo – SP
2025

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s586t Silva, Marcelo Pereira da
Transformação geométrica de inversão circular:
proposta pedagógica para o ensino básico /
Marcelo Pereira da Silva. São Paulo: [s.n.], 2025.
90 f.

Orientador: Rodrigo Carvalho Sponchiado

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2025.

1. Inversão Geométrica. 2. Geometrias Não
Euclidianas. 3. Inversor de Peaucellier. 4.
Metodologias Ativas. 5. Ensino de Geometria. I.
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

MARCELO PEREIRA DA SILVA

Transformação geométrica de inversão circular: Proposta pedagógica para o ensino básico.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado, São Paulo - SP, 28 de Março de 2025.

Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado

Instituto Federal de Educação, Ciências e
Tecnologia de São Paulo – IFSP
Orientador e Presidente da banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

Instituto Federal de Educação, Ciências e
Tecnologia de São Paulo – IFSP
Membro da banca

Prof^a. Dr^a. Roseli Alves de Moura

Universidade Federal Rural do
Rio de Janeiro - UFRRJ
Membro da banca

São Paulo – SP

2025

“Para o indivíduo parado, não existe espaço e nem geometria” - **Henri Bergson**

“Para ser feliz, é preciso desfazer-se dos preconceitos, ser virtuoso, gozar de boa saúde, ter gostos e paixões, ser suscetível de ilusões, pois devemos a maioria de nossos prazeres à ilusão, e infeliz de quem a perde.” - **Émilie du Châtelet**

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao criador por ter me oportunizado essa vida.

Agradeço aos meus pais Sr. João e Dona Maria Joana, em especial a minha mãe, que mesmo não entendendo o que eu escrevia, via em seu rosto a imensa alegria de mais uma conquista minha.

Agradeço às professoras Janete Ferreira Martin e Ana Paulo Rebouças, minhas colegas de trabalho, pelo reconhecimento de minha necessidade em ter um espaço de tempo maior para minhas pesquisas. E a todos que de alguma forma puderam contribuir com a realização deste projeto.

Agradeço ao IFSP campus São Paulo, por disponibilizar seus espaços para a realização deste curso.

Aos colegas de curso, em especial ao Victor por me incentivar e do suporte que me prestou com o Latex.

Meu agradecimento à CAPES, pela bolsa a mim concedida, auxiliando a aquisição de materiais que vieram a compor esta obra.

A todos os professores do programa Profmat, meu carinho a todos. Vocês são inspirações para um ensino de qualidade.

Meu agradecimento especial ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado, que pacientemente me acompanhou nessa trajetória disponibilizando de todas as formas seu tempo para as orientações e sempre disposto às mudanças neste trabalho. Muito obrigado professor.

RESUMO

Apresentaremos algumas propriedades importantes da transformação de inversão geométrica na circunferência com suas características peculiares na inversão de pontos, retas e círculos. Mostraremos que podemos estabelecer ligações entre alguns teoremas clássicos e essa transformação geométrica. Pela proposta de construção de duas atividades com alunos do ensino fundamental e médio, apresentaremos aplicações históricas dessa transformação geométrica que compuseram a corrida tecnológica nos períodos da revolução industrial, bem como usaremos a ludicidade de um quebra-cabeças para estimulá-los a conhecer propriedades dessa transformação.

Palavras-chave: Inversão geométrica; Geometrias não euclidianas; Inversor de Peaucellier; Metodologias ativas; Ensino de Geometria; Cultura Maker.

ABSTRACT

We will present in this essay some important properties related to the transformation of the geometric inversion in the circumference with its peculiar characteristics in the inversion of points, straight lines and circles. We will show that we can establish connections between some classical theorems and that geometrical transformation. Based on the development of two activities carried out with middle school and high school students, we will present historical applications concerning this geometric transformation that composed the technological race throughout the Industrial Revolution as well as will use the ludicity of a puzzle to stimulate the students to learn the properties of that transformation.

Key Words: Geometric inversion, non-Euclidian geometries, Peaucellier inversion, active methodologies. Geometry Teaching; Maker culture.

Lista de Figuras

1.1	P' é inverso o de P com respeito a \mathcal{I}	6
1.2	O inverso P' de P dentro do círculo \mathcal{I} é o <i>polo</i> da reta \overleftrightarrow{TU} , perpendicular a \overrightarrow{OP} por P	8
1.3	Inversão de um ponto P quando este está fora do círculo de inversão.	9
1.4	Potência do ponto P em relação ao círculo \mathcal{I}	10
1.5	\mathcal{E} passa por P e $W = I_{O,r}(P)$ se e somente se \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais	11
1.6	Toda reta que passa pelo centro de inversão é invertida nela mesma. Na figura está mostrada \mathcal{E} e \mathcal{R} , cujas inversas são $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ e $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$. Note que o ponto interno C é levado ao ponto externo C' e os pontos A e B , sobre \mathcal{I} , são levados neles mesmos $A = A'$ e $B = B'$	13
1.7	Inversão de reta que não passa pelo centro de inversão em círculo que passa pelo centro de inversão e vice-versa.	14
1.8	Inversão de círculo que não passa pelo centro de inversão.	15
1.9	Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta_2$	16
1.10	Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta_3$	17
1.11	Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta'_1 \equiv \Theta_2$	17
1.12	Ângulos são preservados: $\alpha_1 \equiv \alpha_2$	18
1.13	Ângulos são preservados: $\beta_1 \equiv \beta_2$	18
1.14	A transformação de inversão circular preserva ângulos.	19
1.15	O ângulo reto entre as retas, permite escrever um quadrilátero cíclico com os pontos de intersecção dessas retas com suas respectivas paralelas.	19
1.16	Em círculos que se cruzam formando ângulos retos, podemos também escrever um quadrilátero $PVP'U$ cíclico.	20
1.17	Calculando a distância entre A' e B'	20
1.18	Inversão de um triângulo qualquer	22
1.19	Inversão de um triângulo com um dos vértices em O	22
1.20	Figura do urso que será invertida	23
1.21	Urso invertido a partir do ponto O	24
1.22	Quebra-cabeças inversível: Peças que o compõe	24

1.23	Quebra-cabeças: Montagem de uma figura com os cards das propriedades usadas nessa figura	25
2.1	Quadrilátero inscritível. $\Phi + \Delta = \Sigma + \Theta$	27
2.2	Teorema de Ptolomeu por inversão circular	28
2.3	Cadeia de Pappus I	30
2.4	Cadeia de Pappus II.	31
2.5	Quadrilátero cíclico. A soma de dois ângulos internos opostos é igual a dois retos. O ângulo externo de um quadrilátero cíclico, é igual ao ângulo oposto ao seu suplementar	33
2.6	Quadrilátero cíclico com o ponto A fora do círculo	35
2.7	Quadrilátero cíclico com o ponto A dentro do círculo	35
2.8	Teorema dos 4 círculos	37
2.9	Inversão dos objetos da figura 2.8: “Teorema de Miquel invertido.”	37
2.10	Transformação por meio da inversão do semiplano superior ao disco de Poincaré	38
3.1	Mecanismos de James Watt - Fonte: Cundy	42
3.2	Inversor de Peaucellier: no qual $OA = OB$ e $QA = AR = RB = BQ$. Fonte: Cundy. 1961	43
3.3	O ponto R é inverso do ponto Q	44
3.4	Paralelogramo cruzado. P' é inverso de P , em relação à circunferência de centro O e raio κ	45
3.5	Inversor de Hart- Fonte: Cundy, 1961	46
3.6	Paralelogramos cruzado semelhantes	47
3.7	Mecanismos trisector com três paralelogramos cruzado unidos segundo a regra descrita - fonte: Cundy, 1961.	47
3.8	Palitos de estética de 14 cm	50
3.9	Parafusos, porcas e arruelas $\frac{1}{8}$	51
3.10	Para as barras maiores usaremos dois palitos cada, parafusando de modo invertido aos outros parafusos	51
3.11	Distâncias das posições P_1, P_2, P_3 ao ponto A	52
3.12	Painel completo	53
3.13	Comparação das inversões do ponto B.	53
3.14	Centros não são levados em centros pela inversão.	54
3.15	Construção do conjugado harmônico de C	55
3.16	Construção do conjugado harmônico com o ponto F como o <i>ponto ideal</i> . .	56
3.17	Ilustração de C e F dividindo harmonicamente NM	57
3.18	Centros de círculos não são levados em centros de círculos inversos	57

3.19	Atribuição de coordenadas à quádrupla harmônica N , C , M e F . A é ponto médio de NM	59
3.20	Inversão de ponto exterior somente com régua	60
3.21	Inversão de ponto exterior somente com régua	60
3.22	Inversão de ponto exterior somente com régua	61
3.23	Inversão de ponto exterior somente com régua	61
3.24	Inversão de ponto exterior somente com régua	62
3.25	Inversão de ponto interno somente com régua	62
3.26	Inversão de ponto interno somente com régua	63
3.27	Inversão de ponto interno somente com régua	64
I.1	Malha 2x2	71
I.2	Malha 3x3	71

Índice

INTRODUÇÃO	vi
1 INVERSÃO NO CÍRCULO	5
1.1 Definições e Propriedades Principais da Inversão no Círculo	5
1.2 Atividade a ser desenvolvida: Construindo o quebra-cabeças inversivo	21
1.2.1 Descrição da atividade	21
1.2.2 Recomendações ao professor	26
2 TEOREMAS CÉLEBRES E A INVERSÃO NO CÍRCULO	27
2.1 Teorema de Ptolomeu	27
2.1.1 Demonstração do Teorema de Ptolomeu por inversão circular	28
2.2 Cadeia de Pappus	30
2.3 Teorema dos quatro círculos	32
2.3.1 Quadrilátero cíclico	32
2.3.2 Teorema de Miquel	36
2.4 Semiplano superior de Poincaré e inversão	38
3 APLICAÇÕES NO INVERSOR DE PEAUCELLIER E DE HART	41
3.1 Mecanismo de Watt. Tentativa de criar uma linha reta a partir de um mecanismo livre de barras guiadas	41
3.2 Inversor de Peaucellier	42
3.3 Inversor de Hart	45
3.4 Paralelogramos cruzados semelhantes	46
3.5 Proposta de atividade com o inversor de Peaucellier	48
3.5.1 Por quê construir esse mecanismo?	48
3.5.2 Discussão das propriedades de inversão na atividade	51
3.6 Problematização	54
3.6.1 Relação equivalente entre quádrupla harmônica e inversão de ponto	54
3.6.2 Problemas	57
3.7 Duas construções usando apenas régua	59
3.7.1 Construção do inverso de um ponto exterior ao círculo	60

3.7.2	Construção do inverso de um ponto interior ao círculo	62
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
I	GABARITOS	71

INTRODUÇÃO

O ensino de geometria tem um papel importante no desenvolvimento cognitivo do aluno saber reconhecer os conceitos básicos da geometria euclidiana em diferentes espaços pode tornar o ensino da Geometria mais significativo e estimulante. A Geometria está inserida no meio em que vivemos, de modo que reconhecer os espaços onde moramos, nossa casa, nossa bairro e cidade, compreender esse universo é compreender a geometria que nos cerca partindo disso, compreender melhor as geometrias que descrevem os espaços no mundo físico. Estudar as múltiplas geometrias é compreendermos melhor a dinâmica do mundo real. Como apresenta a Base Comum Curricular(BNCC), entender a dinâmica do espaço onde vivemos pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (Brasil, 2017, p. 271)

A exploração dos diferentes espaços quer seja estudando geometria euclidiana na escola, ou na geografia local dos espaços onde se vive, ou num ambiente virtual , leva o aluno a fazer comparações, levantando hipóteses e concluindo sobre o objeto geométrico observado. Isso pode desenvolver um certa habilidade geométrica, assim o aluno poderá aplicar essa habilidade em resolver problemas, escolares ou de natureza extra-escolar, tais constatações validam o que preconiza o currículo da cidade.“ O pensamento geométrico possibilita a exploração do mundo físico e é importante para resolução de problemas tanto em contextos Matemáticos quanto em contextos reais” (Currículo da cidade, 2018, p.120).

Um aspecto importante do ensino das transformações geométricas que aprendemos no ciclo básico da educação, é que os ângulos numa transformação são preservados quando se quer manter a forma do objeto. Um exemplo disso, é quando se quer ampliar ou reduzir uma imagem, como na ampliação de uma foto, que não faria sentido se os ângulos se alterassem já que o interesse em questão, é apenas ter uma aplicação ou redução de um retrato.

Com a pandemia do covid-19, a secretaria municipal de educação SME, elaborou documentos que priorizem o currículo da cidade. Nesses documentos, as transformações geométricas de translação, rotação e reflexão foram mantidas, pois entende-se que se

trata de um aspecto importante no ensino da geometria. Tais transformações geométricas podem ser entendidas e reconhecidas pelas suas características, o reconhecimento dessas características em diferentes situações é uma habilidade que o currículo da cidade sinaliza. “Reconhecer a translação, reflexão e rotação de uma figura, identificando as características dessas transformações” (Currículo da cidade, 2018, p.112).

Ainda se referindo a BNCC podemos observar a validação que se dá ao estudo das transformações. E é mediante a apropriação deste conhecimento que o aluno pode comparar para depois compreender aspectos geométricos de produção humana relacionados com o de natureza empírica.

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza, e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (Brasil, 2017, p. 536)

Com base nisso, proporemos nesse trabalho uma introdução de formação em geometria inversiva ao professor com o intuito de dar condições de desenvolver um projeto de construção das atividades propostas, deixando á livre criação e adaptação das atividades a realidade de seus alunos. Este trabalho tem a intenção de mostrar que mesmo com as dificuldades enfrentadas no ensino de geometria na educação básica e com um currículo reduzido, é sempre possível incluir no processo de ensino e aprendizagem esse tópico de geometria.

Como as demonstrações aqui feitas utilizam de propriedades geométricas já estudadas no ensino básico, podemos dizer que estudar essa transformação geométrica é uma porta de entrada para estudar uma Matemática superior ou seja, conceitos mais sofisticados que serão aprendidos podem ser entendidos a partir de propriedades de semelhança de triângulos e propriedades relativas à circunferência.

A transformação de inversão geométrica na circunferência, é muito utilizada para resolver problemas de natureza geométrica, isso porque permite resolver um problema de natureza mais complexa transformando círculos em retas. Então soluções que se daria pelo uso do círculo, recairiam em soluções que apenas usariam a reta.

Assim, apresentaremos no capítulo 1, uma das definições de inversão circular (Mesquita, 2022; Greenberg, 1994; Audim, 2006; et al.), em que o ponto inverso de um ponto dado em relação a circunferência de inversão, é único na semirreta que se origina no centro de inversão e passa pelo ponto dado (Greenberg, 1994). Munido dessa definição, discorreremos pelas principais propriedades desta transformação geométrica com “ferramentas” ensinadas no ensino básico (Greenberg, 1994; Venema, 2012). Uma característica importante desta transformação é a ortogonalidade, círculos que passam por um ponto e pelo seu inverso, é sempre perpendicular ao círculo de inversão (Greenberg, 1994). Outra característica fundamental desta transformação que a diferencia de outras, é que esta

preserva ângulos; podemos dizer que é uma transformação conforme (Mesquita, 2022; Venema, 2012; Greenberg, 1994; Wolf, 1940). Ao final deste capítulo traremos a proposta de construir um quebra-cabeças inversivo, que objetiva exemplificar as propriedades da inversão circular de maneira lúdica e adaptável a cada ano do ensino básico.

No capítulo 2, mostraremos um teorema estudado nos anos do ensino fundamental e sua relação com a transformação de inversão na circunferência, usando propriedades desta transformação, podemos chegar ao mesmo resultado (Mesquita, 2022; Stankova, 2018; Pedoe, 1988). O problema estudado por Pappus já conhecido anteriormente, aqui discutimos uma solução deste problema com o uso da inversão (Mesquita, 2022; Ostermann, 2013; Pedoe, 1988). Junto com estes problemas históricos, apresentaremos o chamado teorema dos quatro círculos (Wells, 1991), este problema estudado por Miquel (1816 - 1851) onde as intersecções de quatro círculos dois à dois, podem estar sobre um círculo ou sobre uma reta (Stankova, 2018; Audim, 2006; Ostermann, 2012; Wells, 1991). As demonstrações aqui contidas, serão necessárias para mostrar as possibilidades de encadear problemas célebres com nosso objeto de estudo, porém foi mantida uma linguagem acessível ao professor do ensino básico.

Chegaremos ao capítulo 3 onde apresentaremos as aplicações práticas desta transformação geométrica (Mesquita, 2022; Wolf, 1940). Falaremos sobre dispositivos mecânicos construídos que resolveram problemas de engenharia (Wolf, 1940). Tais dispositivos usam o princípio de inversão circular no seu funcionamento (Mesquita, 2022). Discutiremos a conexão que esta transformação geométrica tem com quádruplas harmônicas (Mesquita, 2022; Pedoe, 1988; Greenberg, 1994) oportunizando trazer alguns conceitos de geometria projetiva (Greenberg, 1994). Traremos para à discussão a trisseção do ângulo, um problema da antiga Grécia que através do estudo de paralelogramos cruzados semelhantes (Mesquita, 2022; Cundy, 1961), mostraremos a relação que este problema tem com a inversão circular (Cundy, 1961). Neste capítulo proporemos uma atividade de construção geométrica de encontrar o inverso de um ponto em relação a um círculo usando apenas régua não graduada, e uma proposta de construção de um painel com imagens históricas de aplicação da inversão circular através do desenvolvimento de mecanismos de Peaucellier e Hart, exemplificando com isso algumas propriedades desta transformação geométrica.

Esperamos que este trabalho possa servir de motivação ao professor que queira resgatar o ensino de Geometria em suas aulas, abordando seus tópicos de forma significativa a formação escolar e de mundo do aluno.

Capítulo 1

INVERSÃO NO CÍRCULO

Nesse capítulo iremos abordar uma *transformação geométrica* que é denominada *inversão na circunferência*. *Transformações Geométricas* associam cada ponto de uma figura geométrica ou de um subconjunto do espaço geométrico a um único ponto do mesmo espaço. Exemplos importantes de transformações geométricas (rígidas) são as *translações*, *reflexões* e *rotações*. Apresentaremos nesse trabalho a transformação de inversão na circunferência, que é uma transformação conforme ou seja, ao inverter uma figura geométrica, certas propriedades dessa transformação são preservadas, como ângulos, a forma propriamente da figura e distâncias entre pontos não são.

1.1 Definições e Propriedades Principais da Inversão no Círculo

Quando nos referirmos ao comprimento de um segmento de extremidade A e B , utilizaremos a notação AB ao invés do tradicional \overline{AB} . Representaremos retas que contêm os pontos A e B por \overleftrightarrow{AB} e uma semirreta de origem em A e que passa por B por \overrightarrow{AB} . Representaremos a distância entre A e B por $|AB|$. A fim de evitar muitas repetições utilizaremos de forma indiferente o nome *circunferência* e *círculo*, embora o contexto permita não gerarmos ambiguidade.

Definição 1.1.1 (Inversão geométrica). Considere uma circunferência \mathcal{I} de centro O e raio r qualquer. Dado um ponto P do plano de \mathcal{I} , distinto de O , tomemos sobre a semirreta \overrightarrow{OP} um ponto P' tal que:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \quad (1.1)$$

Dizemos que P' é o inverso de P com respeito à circunferência \mathcal{I} , ou que P' é inverso de P com potência r^2 com respeito ao ponto O . (Mesquita, 2022)

Veja figura (1.1). A circunferência \mathcal{I} é chamada *circunferência de inversão*. Seu centro

O é denominado *centro de inversão*, seu raio r é o *raio de inversão* e a quantidade r^2 é a *potência de inversão*. Denotaremos essa inversão por

$$I_{O,r}(P) = P'.$$

A transformação de *inversão geométrica* $I_{O,r}$ não está definida no ponto O do círculo de inversão. Para que possamos inverter o centro de inversão O , precisaríamos modificar a definição de inversão e estender o plano do círculo de inversão adicionando a ele um elemento extra, o *ponto no infinito*, denominado P_∞ (Venema, 2012). Nesse plano, agora estendido, acrescentamos o ponto O no domínio da transformação, de tal forma que:

$$I_{O,r}(O) = P_\infty \quad \text{e} \quad (1.2)$$

$$I_{O,r}(P_\infty) = O. \quad (1.3)$$

Nesse trabalho não usaremos essa *extensão do plano*, salvo menção explícita.

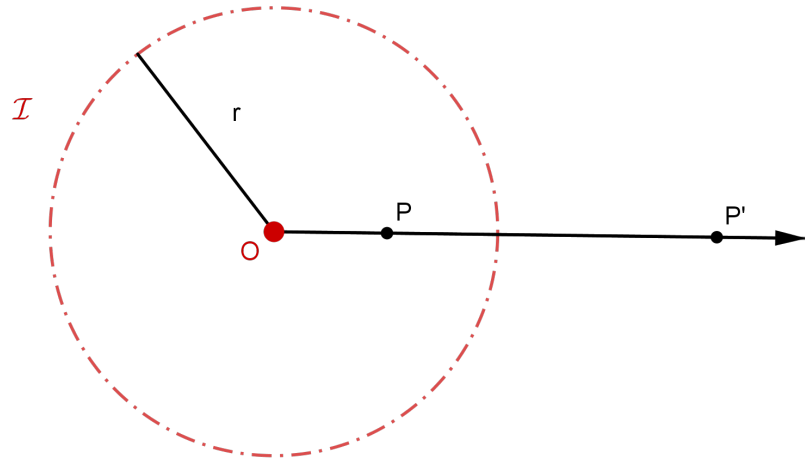


Figura 1.1: P' é inverso o de P com respeito a \mathcal{I}

A seguir apresentamos algumas propriedades fundamentais que decorrem diretamente da definição.

Proposição 1.1.1. *Uma inversão de centro O e potência r^2 satisfaz as seguintes propriedades*

- i) Todo ponto P distinto de O , admite um inverso.*
- ii) O inverso de um ponto $P \neq O$ é único.*
- iii) Toda transformação de inversão é uma involução. Involução é uma função que é a sua própria inversa, ela aplicada à imagem de um ponto de partida, resulta*

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO⁷

novamente no ponto de partida: se $P' = I_{O,r}(P)$, então $I_{O,r}(I_{O,r}(P)) = P$, para qualquer $P \neq O$ ¹

- iv) Se $P \neq O$ está no interior da circunferência de inversão, então seu inverso P' está no exterior dessa circunferência, e vice-versa. Pontos sobre a circunferência de inversão são invertidos em si mesmos.
- v) Quanto mais longe estiver um ponto do centro de inversão, mais perto deste está seu inverso e, analogamente, quanto mais perto estiver um ponto do centro de inversão, mais longe deste desse está seu inverso.

Demonstração.

- i) Basta tomarmos um ponto P' na semirreta \overrightarrow{OP} , para qualquer $P \neq O$, tal que $|OP'| = \frac{r^2}{|OP|}$, pois, pela definição, P' será inverso de P .
- ii) Devemos mostrar que, se P' e P^* são ambos inversos de um ponto $P \neq O$, então $P' = P^*$. Sejam P' e P^* ambos inversos de um ponto $P \neq O$. Assim, pela definição de inversão, $|OP| \cdot |OP'| = r^2 = |OP| \cdot |OP^*|$, o que nos dá $|OP'| = |OP^*|$. Além disso, podemos dizer que há um único ponto na semirreta \overrightarrow{OP} que realiza uma distância dada a partir da origem O , então $P' = P^*$.
- iii) Como P' é o inverso de P ocorre $|OP| \cdot |OP'| = r^2$, $P' \in \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$. Seja $P'' = I_{O,r}(P')$, o inverso de P' , então temos $|OP''| \cdot |OP'| = r^2$, $P'' \in \overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP'}$. Portanto temos $|OP| = |OP''|$ e $\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP}$. Logo, $P = P''$. Assim, se aplicarmos a transformação de inversão em $P' = I_{O,r}(P)$, retornaremos ao ponto P , mostrando assim que a transformação de inversão é uma involução (Mesquita,2022)
- iv) De $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ conclui-se, de imediato, que: **1.** se $|OP| < r$, então $|OP'| > r$. **2.** se $|OP| = r$ então $|OP'| = r$. **3.** se $|OP| > r$, então $|OP'| < r$.
- v) Dado um $L > 0$ qualquer, se P_1 é um ponto tal que $|OP_1| = L$ então, $|OP_1| \cdot |OP'_1| = r^2 \Rightarrow |OP'_1| = \frac{r^2}{L}$. Se P_2 é um ponto tal que $|OP_2| = L + \epsilon$, com $\epsilon > 0$, então $|OP_2| \cdot |OP'_2| = r^2 \Rightarrow |OP'_2| = \frac{r^2}{L + \epsilon} = \frac{r^2}{L} \cdot \frac{L}{L + \epsilon}$. Considerando essas expressões, pode-se obter $|OP_2| = |OP_1| + \epsilon \Rightarrow |OP_2| > |OP_1|$ e $|OP'_2| = |OP'_1| \frac{L}{L + \epsilon} \Rightarrow |OP'_2| < |OP'_1|$. Portanto, quanto mais longe estiver um ponto do centro de inversão, mais perto deste está seu inverso. A prova pode ser completada de forma análoga fazendo se $-L < \epsilon < 0$. \square

¹Se estivermos usando a ideia de *plano estendido*, podemos incluir a involução sobre os pontos O e P_∞ : $I_{O,r}(O) = P_\infty$ e $I_{O,r}(P_\infty) = O$.

Vamos relacionar a inversão geométrica com os conceitos geométricos de *ponto e reta polar* em relação ao círculo de inversão. Para isso colocaremos em duas proposições.

Proposição 1.1.2. *Seja P , um ponto dentro do círculo de inversão \mathcal{I} e TU a corda de \mathcal{I} perpendicular a \overrightarrow{OP} por P . Então o inverso P' de P é o polo² da reta \overleftrightarrow{TU} , isto é, o ponto de intersecção das tangentes a \mathcal{I} em T e U . Veja a Figura 1.2. (Greenberg, 1994)*

Demonstração. Seja \mathcal{I} o círculo de inversão com centro O e raio r . Assumimos que TU é a corda de \mathcal{I} perpendicular a \overrightarrow{OP} por P . Suponha que a tangente a \mathcal{I} em T corte \overrightarrow{OP} no ponto W , que queremos mostrar que é o inverso de P . O triângulo retângulo $\triangle OPT$ é semelhante ao triângulo retângulo $\triangle OTW$, pois eles têm o ângulo \widehat{TOP} em comum e ambos tem um ângulo reto. Assim, podemos escrever:.

$$\frac{|OT|}{|OW|} = \frac{|OP|}{|OT|} \Rightarrow |OP| \cdot |OW| = |OT|^2 \Rightarrow |OP| \cdot |OW| = r^2.$$

Isso mostra que W é inverso de P , $W = P' = I_{O,r}(P)$. Veja a figura 1.2. De modo análogo pode-se concluir que a tangente a \mathcal{I} em U corta a semirreta \overrightarrow{OP} no ponto P' , inverso de P estabelecendo a reta perpendicular a \overrightarrow{OP} por P como *polo* de P' , finalizando a prova.

□

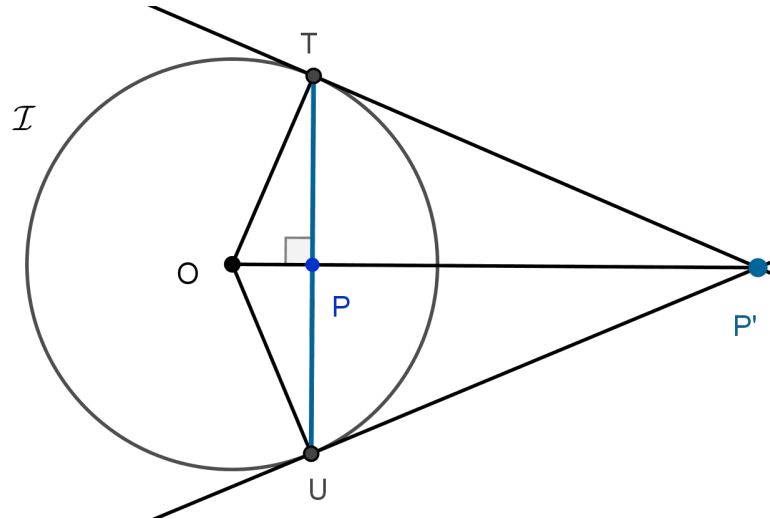


Figura 1.2: O inverso P' de P dentro do círculo \mathcal{I} é o *polo* da reta \overleftrightarrow{TU} , perpendicular a \overrightarrow{OP} por P

Proposição 1.1.3. *Se P estiver fora de \mathcal{I} e T e U são pontos de tangência em \mathcal{I} das retas que passam por P , então o inverso P' de P é a intersecção da corda TU e o segmento OP (Greenberg, 1994). Veja a Figura 1.3.*

²Polo e reta polar podem estar relacionados com respeito a circunferências, mas também a outras cônicas não degeneradas. Brianchon(1783-1864) e Poncelet(1788-1867) fizeram uso do conceito, mas ele remonta a Apolônio (Gray, 2011. Cap. 2).

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 9

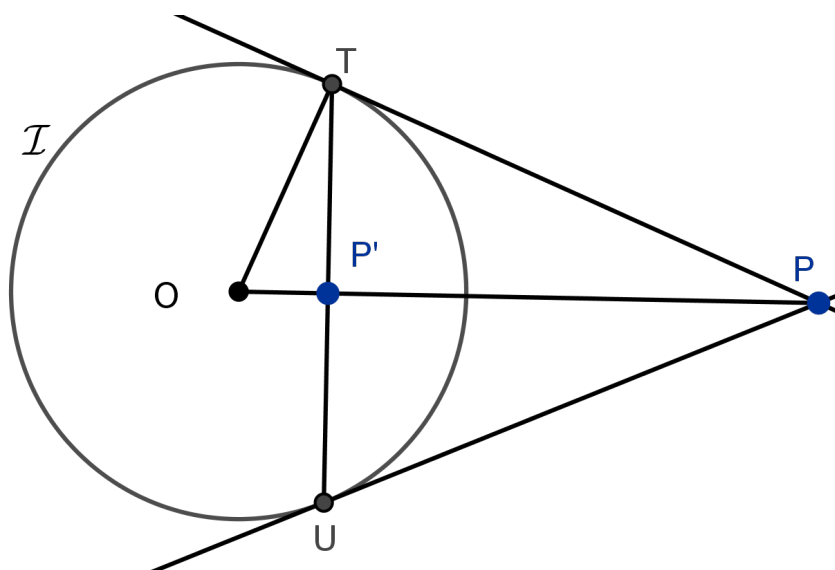


Figura 1.3: Inversão de um ponto P quando este está fora do círculo de inversão.

Demonstração. Seja \mathcal{I} o círculo de inversão com centro O e raio r . Liga-se O à P . Por P podemos traçar tangentes ao círculo de inversão determinando os pontos de tangência T e U . A corda TU é perpendicular a OP e corta esse segmento no ponto P' ³ Esse ponto é o inverso do ponto P em decorrência da semelhança entre os triângulos $\triangle P'OT$ e $\triangle TOP$, da qual,

$$\frac{|OT|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OT|} \Rightarrow |OP| \cdot |OP'| = r^2.$$

□

Um resultado importante quando estamos tratando dessa transformação, é que, se uma circunferência passa por um ponto P e seu inverso P' em relação ao círculo de inversão, então essa circunferência forma com o círculo de inversão um ângulo reto. Vejamos uma demonstração desse fato. Antes apresentaremos uma proposição importante sobre a potência de ponto. Tal propriedade pode ser encontrada no livro III, proposição 36 do livro os Elementos de Euclides.

Proposição 1.1.4 (Potência de ponto). *Suponha P um ponto exterior ao círculo \mathcal{I} , de raio r e centro O . Ponha $s = |PO|$ e, partindo de P , traça-se uma reta que vai cruzar \mathcal{I} em M e N . Então,*

$$|PM| \cdot |PN| = s^2 - r^2 \tag{1.4}$$

Demonstração. Suponha que o segmento que parte de P e que cruza \mathcal{I} não passe pelo seu centro. Tomemos o ponto médio Q do segmento MN . Considere $d = |QO|$.

³Não estamos oferecendo prova desse fato aqui, mas pode-se obtê-la a partir da congruência dos triângulos $\triangle OPT$ e $\triangle OPU$, seguida da congruência dos triângulos $\triangle OP'T$ e $\triangle OP'U$, onde utilizando-se de propriedades da secante, podemos mostrar que $TU \perp OP$ (Dolce, 2013. p. 41,46 e 147).

Veja a figura 1.4. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos $\triangle PQO$ e $\triangle NQO$, obtemos, respectivamente:

$$|PQ|^2 + d^2 = s^2 \quad (1.5)$$

$$|QN|^2 + d^2 = r^2. \quad (1.6)$$

Subtraindo (1.6) de (1.5), temos

$$|PQ|^2 - |QN|^2 = s^2 - r^2. \quad (1.7)$$

Abrindo o primeiro membro como uma diferença de quadrados:

$$(|PQ| - |QN|)(|PQ| + |QN|) = s^2 - r^2. \quad (1.8)$$

Pela construção $|PQ| - |QN| = |PM|$ e $|PQ| + |QN| = |PN|$, então segue o resultado (1.4). \square

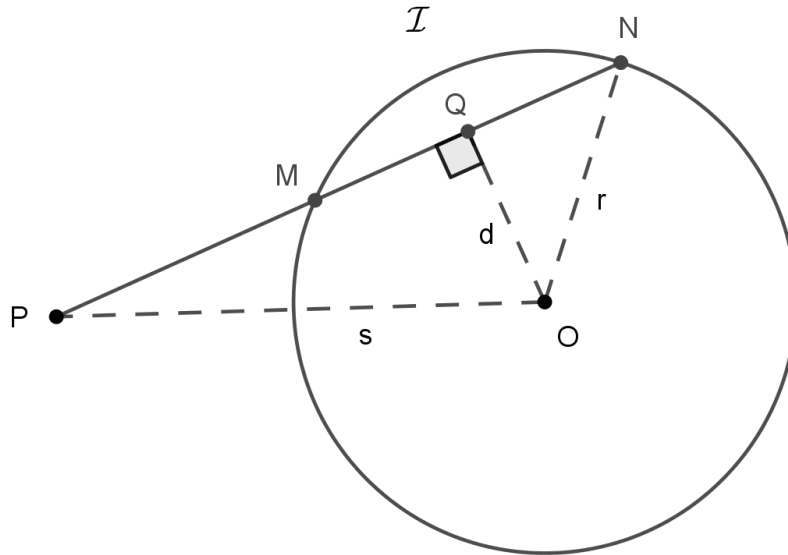


Figura 1.4: Potência do ponto P em relação ao círculo \mathcal{I}

Proposição 1.1.5 (Circunferência ortogonal ao círculo de inversão). *Seja \mathcal{E} uma circunferência que passa por um ponto P, que não coincide com o centro O de um círculo de inversão \mathcal{I} e não é um ponto de \mathcal{I} . Então \mathcal{E} contém o ponto inverso $P' = I_{O,r}(P)$ se e somente se \mathcal{E} é ortogonal a \mathcal{I} . Veja a Figura 1.5.*

Demonstração. Seja o círculo de inversão \mathcal{I} com centro em O e de raio r. Toma-se um ponto $P \neq O$ que não pertença a \mathcal{I} . Considere \mathcal{E} um círculo de centro V e raio k, que

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 11

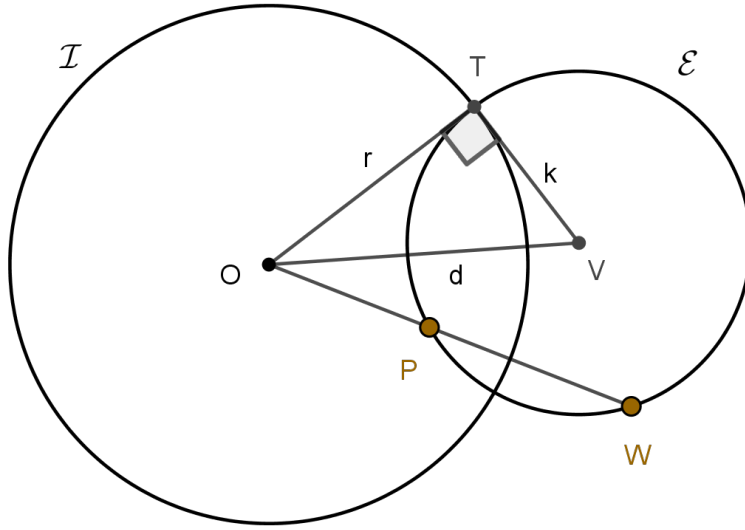


Figura 1.5: \mathcal{E} passa por P e $W = I_{O,r}(P)$ se e somente se \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais

passa por P .

Caso 1: Se \mathcal{E} não tiver intersecção com \mathcal{I} , \mathcal{E} não conterà o ponto W , uma vez que, pelo item *iv* da proposição 1.1.1, este estará na região do plano onde \mathcal{E} não tem ponto algum e também não haverá ortogonalidade com \mathcal{I} pela definição de ortogonalidade entre circunferências.

Caso 2: Seja T um dos pontos de intersecção entre \mathcal{I} e \mathcal{E} . Vamos definir $d = |OV|$. Devemos argumentar que \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais se e somente se \mathcal{E} passar por P' .

1. Partindo da premissa de que \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais, necessitamos provar que \mathcal{E} passa por W . A ortogonalidade $\mathcal{I} \perp \mathcal{E}$ implica o triângulo $\triangle OVT$ ser retângulo em T , e podemos escrever, usando o teorema de Pitágoras, que $r^2 = d^2 - k^2$. Essa quantidade é a potência do ponto O em relação a \mathcal{E} . Considere que a semirreta \overrightarrow{OP} intersepta \mathcal{E} em P e em W , mas $W \neq P$. Aplicando potência do ponto em O , temos que

$$|OP| \cdot |OW| = d^2 - k^2 = r^2. \quad (1.9)$$

Como W está na semirreta \overrightarrow{OP} por construção, (1.9) nos permite concluir que W é o inverso de P . Devemos ter $W = P'$, ou seja, \mathcal{E} passa por P' .

2. Partindo da premissa de que \mathcal{E} passa por P e seu inverso $P' = I_{O,r}(P)$, necessitamos provar que \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais. A definição de inversão geométrica nos permite escrever:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \quad (1.10)$$

Como estamos assumindo que P' está sobre \mathcal{E} , é válida a seguinte expressão da potência de ponto:

$$|OP| \cdot |OP'| = d^2 - k^2. \quad (1.11)$$

Comparando (1.10) com (1.11), temos que $r^2 = d^2 - k^2$. Segue, pelo Teorema de Pitágoras, que o triângulo $\triangle OVT$, cujos lados têm medidas d , k e r , é retângulo em T . Portanto \mathcal{E} é ortogonal a \mathcal{I} .

3. Partindo da premissa de que \mathcal{I} e \mathcal{E} são ortogonais, necessitamos provar que, se \mathcal{E} passa por P , também passa pelo seu inverso $P' = I_{O,r}(P)$. Considere W o outro ponto de intersecção entre \overrightarrow{OP} e \mathcal{E} , então é válida a seguinte expressão da potência de ponto:

$$|OP| \cdot |OW| = d^2 - k^2. \quad (1.12)$$

Como nesse item estamos assumindo a ortogonalidade de \mathcal{I} e \mathcal{E} , o Teorema de Pitágoras permite escrever a relação $r^2 = d^2 - k^2$ para as medidas dos lados do triângulo $\triangle OVT$, o que permite escrever a expressão 1.11 como

$$|OP| \cdot |OW| = r^2. \quad (1.13)$$

Assim, pela definição de inversão geométrica, W é o inverso de P , $W = I_{O,r}(P)$, como queríamos (Gray,2011). \square

Falaremos agora de algumas propriedades importantes da transformação de inversão, que pode levar reta em reta, reta em círculo, círculo em círculo, círculo em reta. Antes recordamos que *quaisquer pontos sobre o círculo de inversão são levados neles mesmos*.

Proposição 1.1.6. *Considere um círculo de inversão \mathcal{I} com raio r e centro O .*

- i) Qualquer reta \mathcal{E} que passe pelo centro da circunferência de inversão, é invertida nela mesma, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. Veja a figura 1.6*
- ii) Se \mathcal{E} é um círculo que passa pelo centro do círculo de inversão \mathcal{I} , então a imagem da inversão geométrica de \mathcal{E} (menos o centro de inversão O) é uma reta \mathcal{E}' que não passa pelo centro do círculo de inversão e é paralela à reta t , tangente a \mathcal{E} em O . Veja a figura 1.7*
- iii) Uma reta que não passe pelo centro do círculo de inversão \mathcal{I} é transformada em um círculo \mathcal{E} que passa pelo centro do círculo de inversão. Essa propriedade é a inversa da propriedade anterior. Veja a Figura 1.7*

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 13

iv) Se \mathcal{E} é um círculo que não passe pelo centro de inversão, seu inverso \mathcal{E}' é também um círculo que não passa pelo centro de inversão. Veja a figura 1.8

Demonstração.

i) Considere \mathcal{E} uma reta qualquer que passe por O . Decorre diretamente da definição de inversão geométrica em que, todos os pontos de \mathcal{E} , exceto O , serão invertidos em pontos sobre a mesma reta \mathcal{E} . Da mesma forma, todos os pontos de \mathcal{E} , exceto O , são imagem de algum ponto de \mathcal{E} . Em especial os pontos de \mathcal{E} que estão sobre a circunferência de inversão \mathcal{I} são invertidos neles mesmos $A = A'$ e $B = B'$, como já foi discutido no item *iv* da proposição 1.1.1. Conclui-se que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

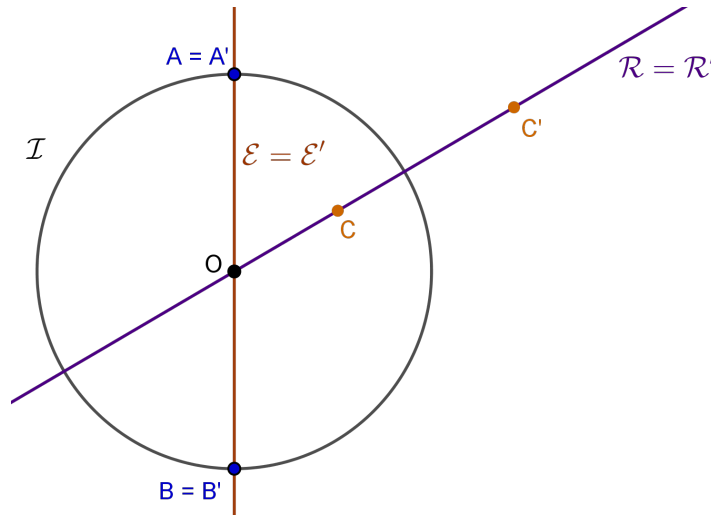


Figura 1.6: Toda reta que passa pelo centro de inversão é invertida nela mesma. Na figura está mostrada \mathcal{E} e \mathcal{R} , cujas inversas são $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ e $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$. Note que o ponto interno C é levado ao ponto externo C' e os pontos A e B , sobre \mathcal{I} , são levados neles mesmos $A = A'$ e $B = B'$.

ii) Seja \mathcal{E} um círculo com centro em C , que passe pelo centro de inversão O . Chamemos P o ponto diametralmente oposto a O e s a semirreta \overrightarrow{OP} , que irá cruzar com \mathcal{E} no ponto P . Queremos mostrar que esse círculo é invertido na reta \mathcal{E}' , perpendicular à \overrightarrow{OP} e paralela à tangente ao círculo \mathcal{E} no ponto O .

Construímos a tangente t ao círculo \mathcal{E} no ponto O . Essa tangente é perpendicular à reta s , já que a semi-reta s é diametral e contém o ponto de tangência O . Tomando um ponto $A \neq P$ e $A \neq O$ sobre \mathcal{E} , encontramos os inversos $P' = I_{O,r}(P)$ e $A' = I_{O,r}(A)$ (Pontos que formarão o lado $A'P'$ do $\triangle A'OP'$). Como A está sobre \mathcal{E} , o triângulo $\triangle OAP$ é retângulo em A ⁴. Da definição de inversão geométrica, o ponto P' está sobre \overrightarrow{OP} e A' está sobre \overrightarrow{OA} , de modo que os triângulos $\triangle OAP$ (retângulo em A) e $\triangle OA'P'$ possuem um ângulo em comum, $\widehat{POA} \equiv \widehat{P'OA'}$. Temos também $OP \cdot OP' = r^2$ e $OA \cdot OA' = r^2$, o que nos permite escrever:

⁴A demonstração desse fato pode ser consultada em Euclides III. 31.

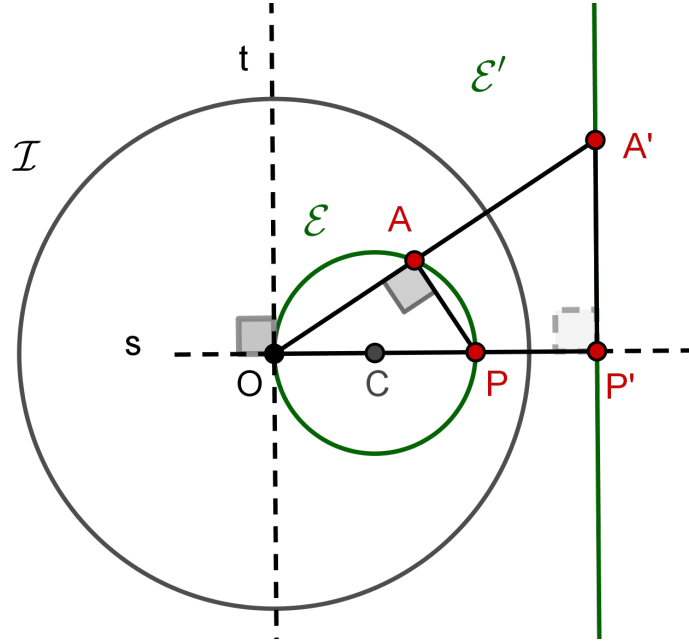


Figura 1.7: Inversão de reta que não passa pelo centro de inversão em círculo que passa pelo centro de inversão e vice-versa.

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}. \quad (1.14)$$

Podemos concluir que os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OA'P'$ são semelhantes com a congruência dos seguintes ângulos correspondentes: $\widehat{OP'A'} \equiv \widehat{OAP}$. Como $\triangle OAP$ é retângulo em A , podemos concluir que o triângulo $\triangle OP'A'$ é retângulo em P' .

Assim qualquer ponto tomado sobre \mathcal{E} diferente de A, P e O , sempre será possível provar de forma análoga ao apresentado anteriormente que seu inverso estará sobre a reta suporte ao lado $A'P'$, isso mostra que o inverso de qualquer ponto sobre \mathcal{E} , estará sobre essa tal reta que chamaremos de \mathcal{E}' perpendicular a s em P' e paralela a t .

- iii) Traçamos uma reta \mathcal{E}' que não passe pelo centro de inversão. Partindo do ponto O , tracemos uma semirreta perpendicular à \mathcal{E}' que irá encontrá-la no ponto P' . Tomemos sobre \mathcal{E}' outro ponto A' qualquer, diferente de P' . Aplicando a transformação de inversão geométrica sobre esses pontos encontramos os pontos $P = I_{O,r}(P')$ e $A = I_{O,r}(A')$. Da definição de inversão geométrica o ponto P está sobre $\overrightarrow{OP'}$ e A está sobre $\overrightarrow{OA'}$, de modo que os triângulos $\triangle OP'A'$ (retângulo em P') e $\triangle OAP$ possuem um ângulo em comum, $\widehat{P'OA'} \equiv \widehat{POA}$. Temos também $OP \cdot OP' = r^2$ e $OA \cdot OA' = r^2$, o que nos permite escrever:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}. \quad (1.15)$$

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 15

Podemos concluir que os triângulos $\triangle OP'A'$ e $\triangle OAP$ são semelhantes. Temos $\widehat{OP'A'} \equiv \widehat{OAP}$. Como $\triangle OP'A'$ é retângulo em P' , $\triangle OAP$ é retângulo em A , então A está sobre um círculo \mathcal{E} de diâmetro OP . Então, para todo ponto escolhido A' , sua imagem é um ponto sobre o círculo \mathcal{E} . E todo ponto sobre a reta \mathcal{E}' é imagem de algum ponto sobre \mathcal{E} . Assim, inverso da reta \mathcal{E}' é um círculo \mathcal{E} de diâmetro P e O , embora o centro de inversão O não seja imagem de nenhum ponto sobre \mathcal{E}' .

iv) Seja \mathcal{E} um círculo de centro E , exterior ao círculo de inversão \mathcal{I} . Traçamos a partir de O , uma reta que intersecte \mathcal{E} no ponto A . Tomam-se os pontos B e C na intersecção da reta \overrightarrow{OE} com \mathcal{E} e os inversos $A' = I_{O,r}(A)$, $B' = I_{O,r}(B)$ e $C' = I_{O,r}(C)$. O $\triangle BAC$ é retângulo em A , pois A está sobre um círculo \mathcal{E} de diâmetro BC . A definição de inversão geométrica nos permite escrever:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad \text{e} \quad (1.16)$$

$$OA \cdot OA' = OC \cdot OC' = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'} \quad (1.17)$$

Assim, os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OB'A'$ são semelhantes, bem como os triângulos $\triangle OAC$ e $\triangle OC'A'$. Como consequência, são congruentes os ângulos \widehat{OAB} e $\widehat{OB'A'}$, cujas medidas podemos chamar α . Os ângulo externo em C' , suplementar ao ângulo $\widehat{OC'A'}$, também é congruente ao ângulo externo em A , suplementar ao ângulo \widehat{OAC} , que podemos chamar β .

O triângulo $\triangle BAC$ é retângulo em A , logo os ângulos α e β com vértice em A somados dá um ângulo reto. α e β também são ângulos internos do triângulo $\triangle C'A'B'$ (veja figura 1.8). Então $\widehat{C'A'B'}$ é ângulo reto, o que permite concluir que o ponto A' está sobre uma circunferência, que chamaremos \mathcal{E}' , de diâmetro $C'B'$. \square

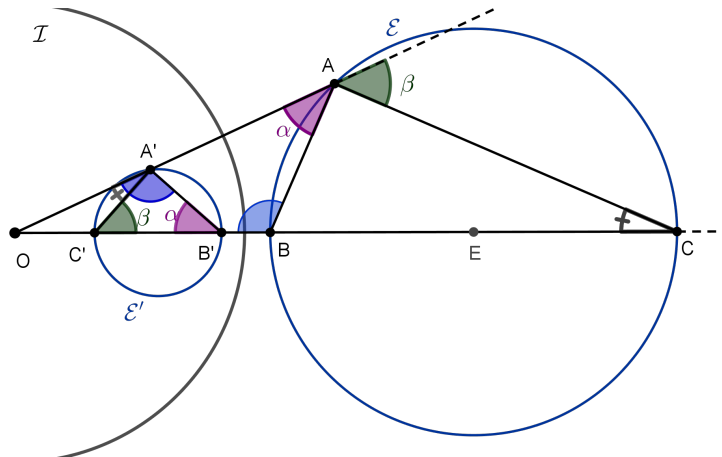


Figura 1.8: Inversão de círculo que não passa pelo centro de inversão.

Uma característica importante da inversão geométrica é que ela preserva ângulos, seja entre duas circunferências, duas retas ou em uma reta e uma circunferência. O ângulo formado pelas tangentes num ponto de intersecção das curvas é congruente ao ângulo formado pelas tangentes das mesmas curvas, quando estas são transformadas ao ponto inverso em relação ao ponto de intersecção. Abaixo mostraremos um caso particular de dois círculos que se interceptam no centro de inversão.

Proposição 1.1.7. *Duas curvas que se intersectam no ponto P , dentre as quais podem ser duas circunferências, uma circunferência e uma reta ou duas retas, apresentam o ângulo formado por elas em P congruente ao ângulo formado pelas imagens por inversão geométrica dessas curvas no ponto P' inverso de P (Linhares, 2022)*

Demonstração.

Seja o círculo de inversão \mathcal{I} . Aqui daremos uma demonstração para duas retas \mathcal{R} e \mathcal{S} que concorrem no ponto $P \neq O$, mas para os outros casos a prova poderá ser feita de forma análoga. Os inversos em relação a \mathcal{I} de \mathcal{R} , \mathcal{S} e P serão as circunferências \mathcal{R}' , \mathcal{S}' e o ponto P' , respectivamente. Denominamos Θ_1 o ângulo entre \mathcal{R} e \mathcal{S} ; Θ_2 o ângulo formado pelas retas t_1 e t_2 , tangentes a \mathcal{S}' e \mathcal{R}' , respectivamente, no centro O . (figura 1.9)

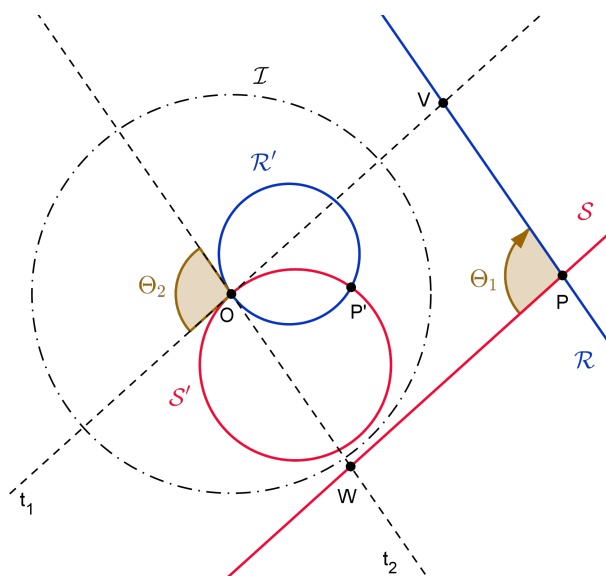


Figura 1.9: Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta_2$

Θ_3 é o ângulo formado pelas retas t_3 e t_4 , tangentes a \mathcal{S}' e \mathcal{R}' , respectivamente, no ponto P' (figura 1.10). Queremos mostrar que Θ_1 , Θ_2 e Θ_3 são congruentes. Sabemos que: $t_1 \parallel \mathcal{S}$ e $t_2 \parallel \mathcal{R}$ (veja a proposição 1.1.6, item *ii*).

A reta \mathcal{S} é uma transversal às paralelas \mathcal{R} e t_2 , logo o ângulo formado pelas retas \mathcal{R} e \mathcal{S} , $\widehat{\mathcal{R}\mathcal{S}} = \Theta_1$, e pelas retas t_2 e \mathcal{S} , $\widehat{t_2\mathcal{S}} = \Theta'_1$, são ângulos correspondentes, $\Theta_1 \equiv \Theta'_1$. Como t_2 é uma transversal às paralelas t_1 e \mathcal{S} , os ângulos Θ'_1 e Θ_2 são correspondentes, $\Theta'_1 \equiv \Theta_2$. (figura:1.11)

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 17

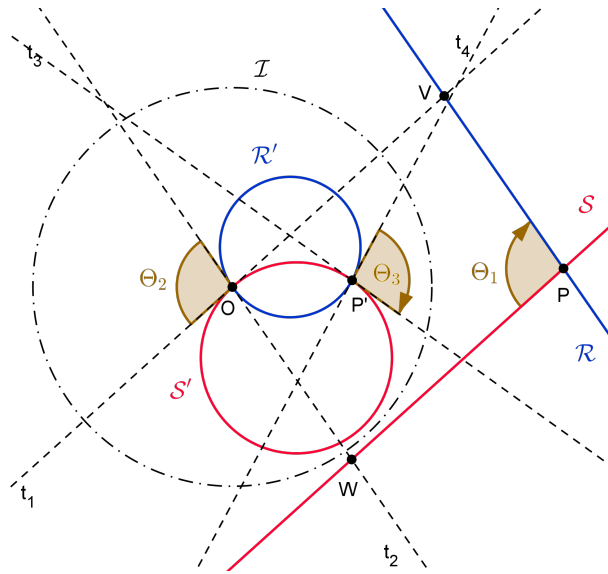


Figura 1.10: Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta_3$

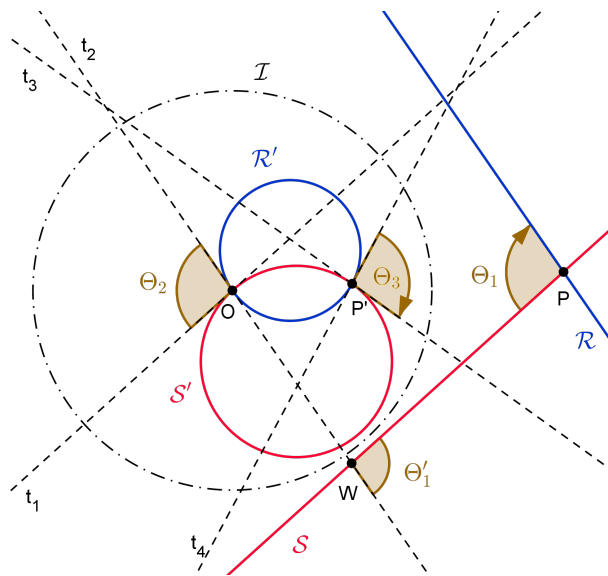


Figura 1.11: Ângulos são preservados: $\Theta_1 \equiv \Theta'_1 \equiv \Theta_2$

Agora, o triângulo $\triangle NOP'$ é isósceles, com os lados tangentes ao círculo S' , temos $NO = NP'$. Então $\widehat{NOP'} = \alpha_1 \equiv \alpha_2 = \widehat{NP'O}$. (figura:1.12)

Analogamente para o triângulo $\triangle QOP'$, isósceles, com lados tangentes ao círculo R' , temos $QO = QP'$. Então $\widehat{QOP'} = \beta_1 \equiv \beta_2 = \widehat{QP'O}$ (figura:1.13). Portanto $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2$. Além disso $\Theta_2 \equiv \alpha_1 + \beta_1$ e $\Theta_3 \equiv \alpha_2 + \beta_2$ são opostos pelos seus respectivos vértices. Podemos assim concluir que $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta_3$ (Figura: 1.14). Como queríamos. \square

Se o ângulo formado pelas retas \mathcal{R} e \mathcal{S} for reto, os pontos $PGOF$ indicados na figura 1.14 formam um quadrilátero cíclico (quadrilátero inscrito com a propriedade da soma dos ângulos opostos serem dois retos). Ainda sobre a **proposição 1.1.7**, para o caso de

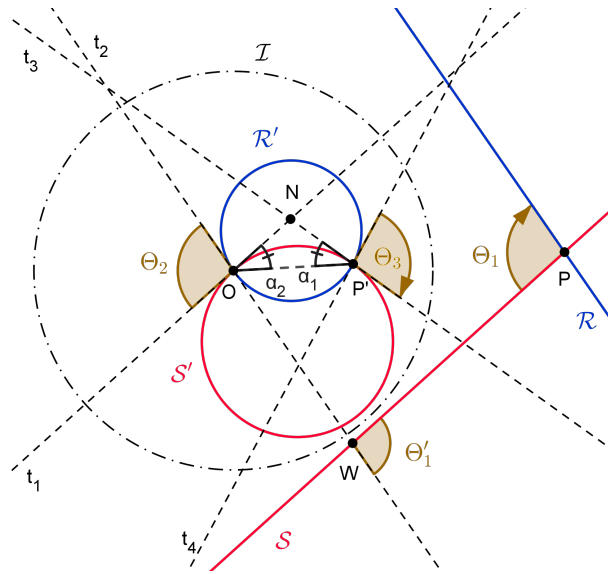


Figura 1.12: Ângulos são preservados: $\alpha_1 \equiv \alpha_2$

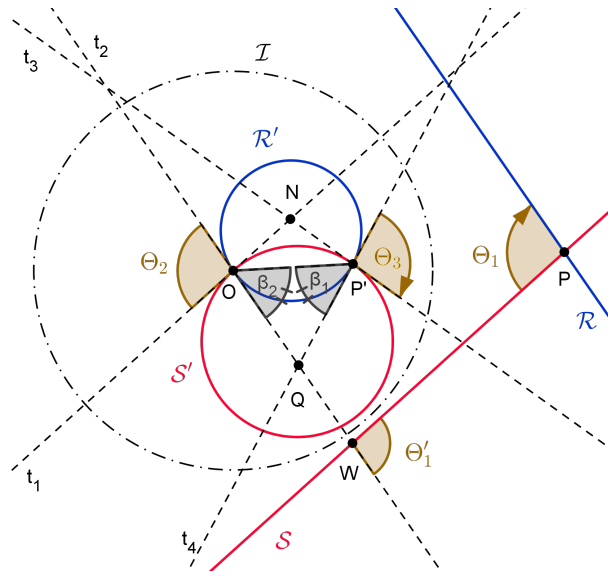


Figura 1.13: Ângulos são preservados: $\beta_1 \equiv \beta_2$

ângulos na intersecção de dois círculos, essa propriedade da inversão se mantém, ou seja, o ângulo formado pelas imagens de dois círculos que se interceptam em dois pontos, é congruente ao ângulo formado por esses círculos. Lembrando que, o ângulo entre dois círculos em um ponto de intersecção entre eles é definido pelas tangentes nesse ponto. Veja a figura 1.15.

Proposição 1.1.8 (Distância entre dois pontos inversos: Fórmula para distâncias). *Considere o círculo de inversão \mathcal{I} de centro O e raio r . Tomemos dois pontos A e B no interior desse círculo de modo que o ponto O esteja entre os pontos A e B , e os três pontos sejam colineares. Seja A' e B' os inversos de A e B com respeito a \mathcal{I} , e ambos sobre a mesma reta que passa por A e B . Então a distância entre A' e B' , pode ser calculada*

1.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES PRINCIPAIS DA INVERSÃO NO CÍRCULO 19

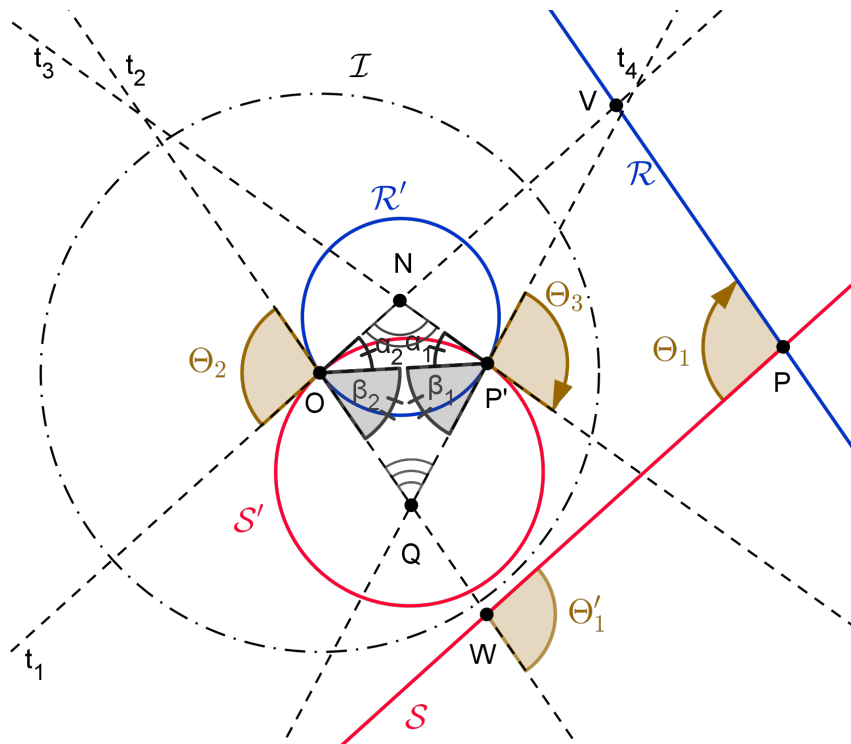


Figura 1.14: A transformação de inversão circular preserva ângulos.

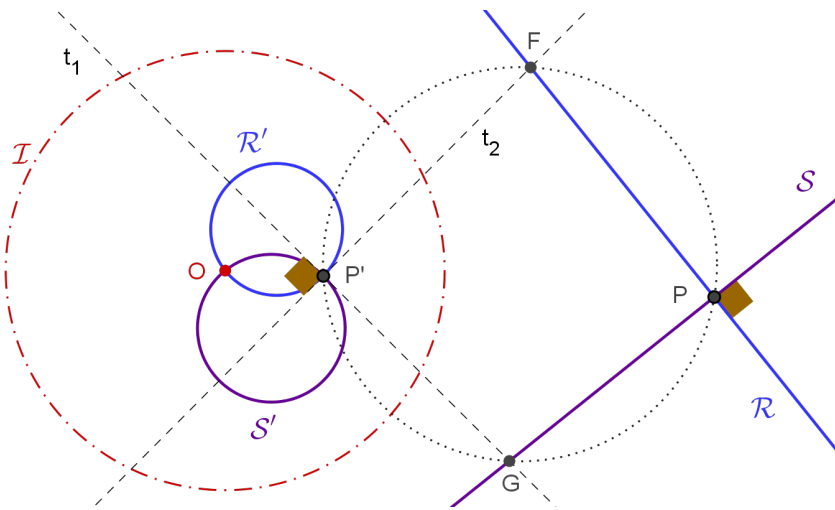


Figura 1.15: O ângulo reto entre as retas, permite escrever um quadrilátero cíclico com os pontos de intersecção dessas retas com suas respectivas paralelas.

usando, $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot r^2}{|OA| \cdot |OB|}$. Veja a figura 1.17.

Demonstração. Vamos dizer que a distância entre A e B é d , e entre A' e B' é D . Sabemos pela definição de ponto inverso que: $OA \cdot OA' = r^2$, e que: $OB \cdot OB' = r^2$. Pela configuração da figura 1.17, $d = OA + OB$ e que, $D = OA' + OB'$ (Mesquita, 2022). Então,

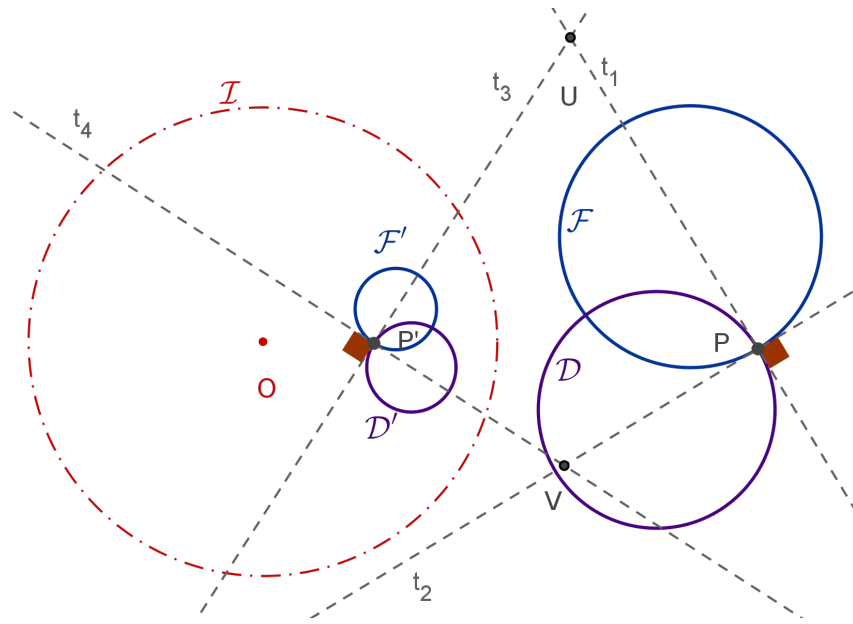


Figura 1.16: Em círculos que se cruzam formando ângulos retos, podemos também escrever um quadrilátero $PVP'U$ cíclico.

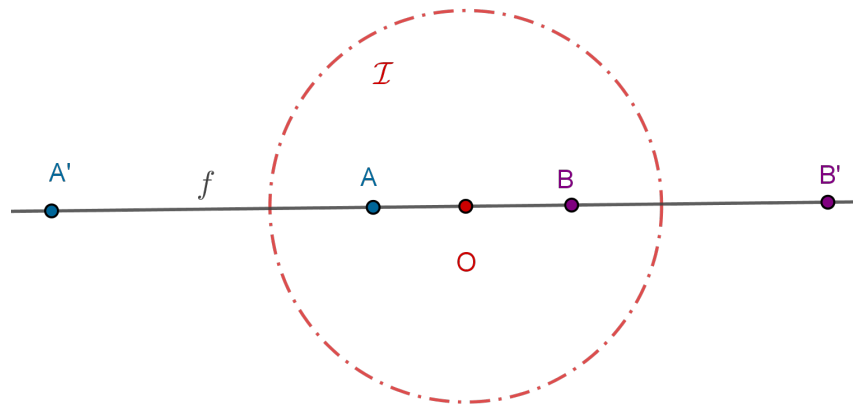


Figura 1.17: Calculando a distância entre A' e B'

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{r^2}{OA} + \frac{r^2}{OB} \\
 \Rightarrow D &= \frac{r^2(OB + OA)}{OA \cdot OB} \\
 \Rightarrow D &= \frac{r^2 \cdot d}{OA \cdot OB}. \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

Como as distâncias são números positivos, fica assim estabelecida uma relação que permite calcular a distância entre dois pontos transformados por inversão. Num caso mais geral em que os pontos A e B e seus transformados, não sejam todos colineares, vale a mesma relação acima, mas usaremos relações de semelhança em triângulos para

encontrá-la.

1.2 Atividade a ser desenvolvida: Construindo o quebra-cabeças inversivo

O **objetivo** dessa atividade é ensinar propriedades básicas da inversão no círculo, de forma lúdica, ou seja construindo para tanto, um disco onde será colocada uma figura no seu interior, depois recortaremos esse disco no formato dos quebra-cabeças convencionais, essa figura dentro do disco, é a imagem que será invertida usando o geogebra. A ideia é que, construindo, brincando e fazendo uma análise das propriedades de inversão que foram utilizadas na montagem do quebra-cabeças, o aluno possa aprender sobre como as curvas e retas se comportam nesse espaço geométrico. Ele poderá observar as propriedades que essa transformação geométrica proporciona. A partir das imagens inversas e em comparação com a imagens originais, e uma vez que tomou conhecimentos das propriedades dessa transformação geométrica, poderá verificá-las quando montar corretamente o quebra-cabeça. Por exemplo, ele poderá verificar que retas na imagem invertida poderá ser na verdade arcos na imagem original e vice-versa.

Para que se entenda o funcionamento desse quebra-cabeças, é necessário um prévio conhecimento, mesmo que sucinto, de inversão na circunferência. Então, sugerimos ser desenvolvido nas **turmas finais do ciclo autoral do ensino fundamental**.

Recomendamos que seja no **formato de um projeto**, que possa ser desenvolvido ao longo de um semestre. Isso vai depender da necessidade da turma e de seu desenvolvimento. Por isso não definimos tempo. O professor pode ajustar ao que lhe parecer melhor, ou dividir essa atividade em módulos de aprendizagem. Julgamos que cada módulo encerra em si habilidades e conhecimentos a desenvolver.

1.2.1 Descrição da atividade

1. Com o recurso do programa de geometria dinâmica Geogebra, propõe que os alunos verifiquem os principais casos de inversão explorados nesse trabalho, bem como suas propriedades. Sugerimos a verificação do comportamento de segmentos de reta e arcos de circunferência quando submetidos à inversão. Essa etapa é primordial, pois é nela em que os alunos percebem como distâncias, ângulos e o formato das figuras mantêm-se ou não após a inversão.
2. Ainda nessa fase do uso da ferramenta Geogebra, o aluno irá construir alguns polígonos estudados em geometria plana, tais como quadrado, losango, trapézio, etc. O intuito aqui é ele perceber como essas figuras ficam após invertê-las sob essa transformação. Também, o aluno poderá perceber como ficaria a imagem de

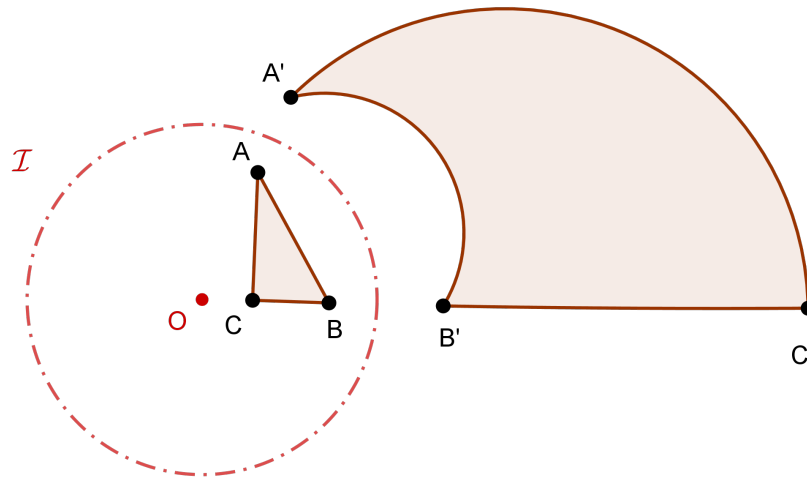


Figura 1.18: Inversão de um triângulo qualquer

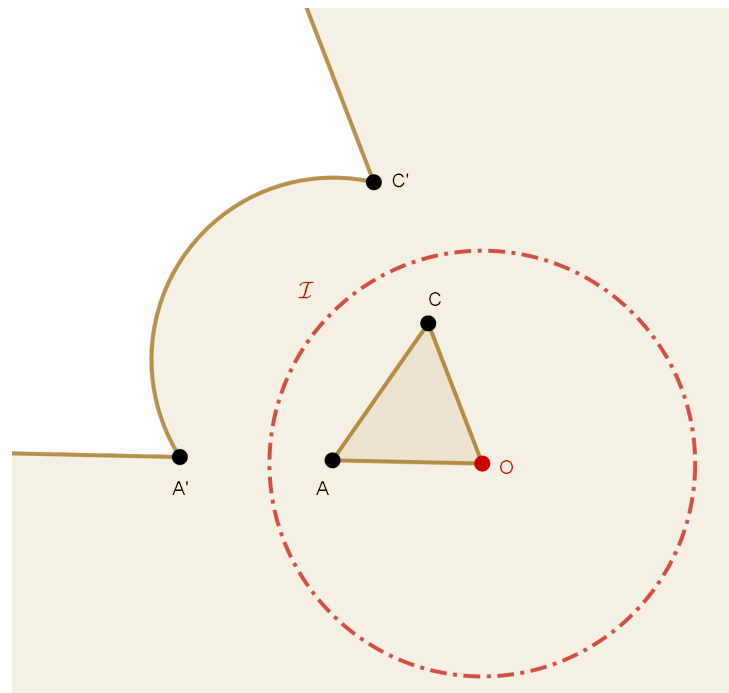


Figura 1.19: Inversão de um triângulo com um dos vértices em O

1.2. ATIVIDADE A SER DESENVOLVIDA: CONSTRUINDO O QUEBRA-CABEÇAS INVERSIVO23

uma figura invertida no círculo em que um de seus vértices está sobre o centro de inversão. Veja as figuras 1.18 e 1.19.

3. Nessa etapa, partiremos para construção física do quebra-cabeças. Antes é necessário que o aluno aprenda a desenhar figuras utilizando círculos como base para serem combinados e se formar figuras compostas. Essa técnica de construir imagens a partir de um círculo pode requerer um pouco de conhecimento no uso das ferramentas digitais. A construção dessas figuras é relativamente fácil no programa de geometria dinâmica Geogebra, no qual podemos traçar círculos, retas e arcos de círculos.

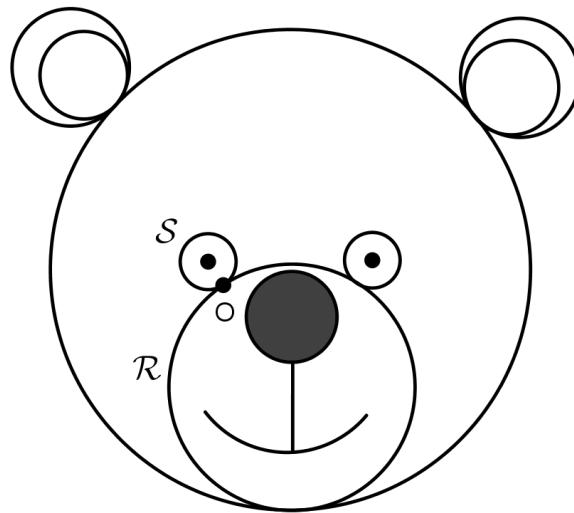


Figura 1.20: Figura do urso que será invertida

Um exemplo dessa figura é o que se vê nas figuras 1.20. Essa figura será utilizada para construir o quebra-cabeças, é ela que o aluno deverá montar. Com centro de inversão no ponto O , toda essa figura é invertida na figura 1.21, onde podemos observar uma propriedade da inversão geométrica. Vemos que as circunferências \mathcal{R} e \mathcal{S} da figura 1.20, são invertidas nas retas $\mathcal{R} \parallel \mathcal{S}$. Uma vez feita a figura no Geogebra. Utilizando o gabarito (anexo), iremos colar verso com verso a figura e o gabarito. Em seguida recortaremos formando assim as peças do quebra-cabeças. veja figuras 1.22 e 1.23.

4. Com todo quebra-cabeças montado, os alunos irão jogar (montando corretamente as peças), primeiramente observando as imagens invertidas das figuras. O desafio é a partir dessas figuras montarem a imagem “real”. Para os anos iniciais do ensino fundamental, terá a ajuda das cores, ou seja cada parte da figura invertida terá uma cor específica, assim montarão seguindo a ordem das cores. Nosso intuito é familiarizar o aluno com essa nova linguagem geométrica, e o propósito maior é ir

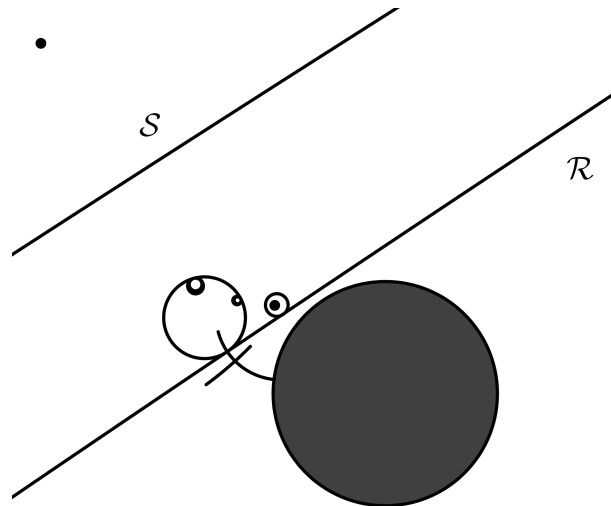


Figura 1.21: Urso invertido a partir do ponto O

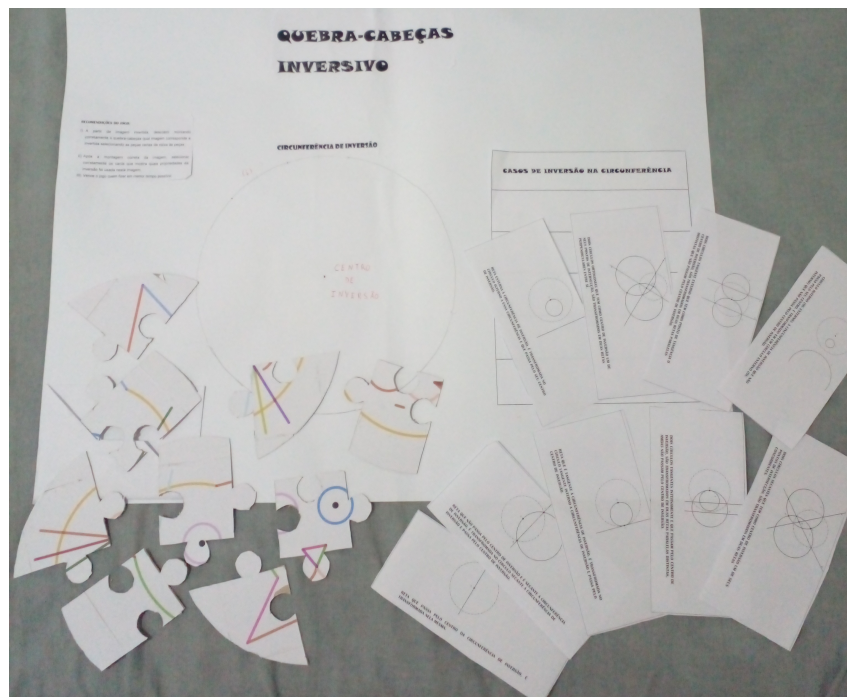


Figura 1.22: Quebra-cabeças inversível: Peças que o compõe

1.2. ATIVIDADE A SER DESENVOLVIDA: CONSTRUINDO OQUEBRA-CABEÇAS INVERSIVO25

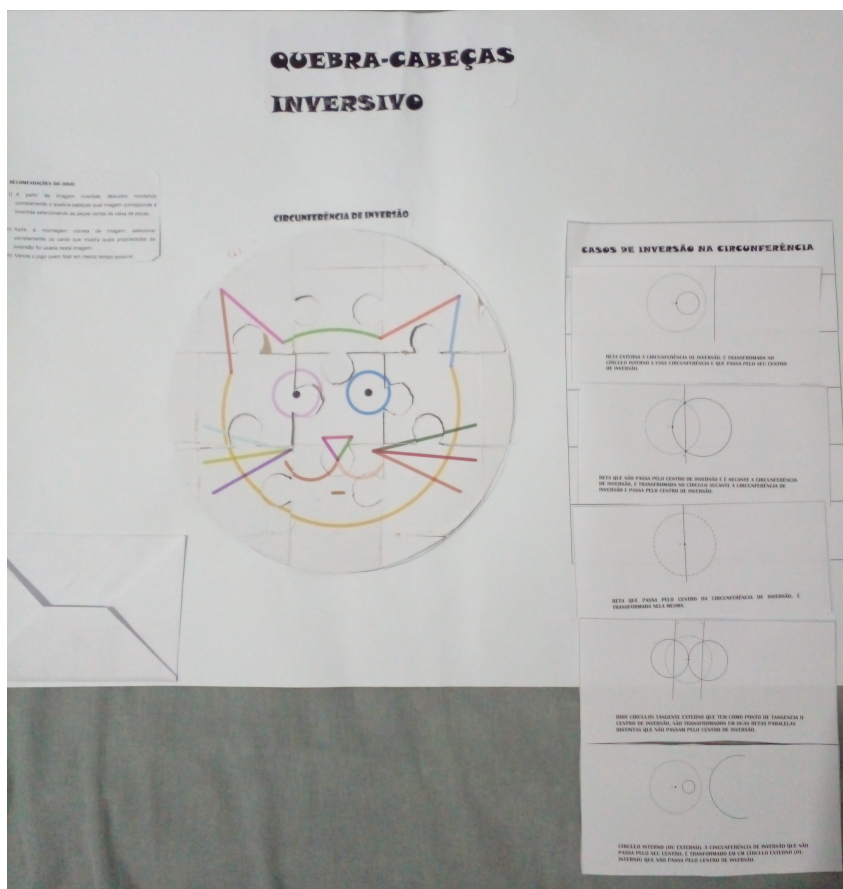


Figura 1.23: Quebra-cabeças: Montagem de uma figura com os cards das propriedades usadas nessa figura

inserindo de forma lúdica conceitos dessa transformação geométrica e conceitos gerais de geometria. O professor poderá usar esse quebra-cabeças como um facilitador ao início do desenvolvimento do pensamento geométrico no aluno.

1.2.2 Recomendações ao professor

Para os anos iniciais do ensino fundamental poderemos fazer algumas adaptações. Nessa etapa do ensino não será possível ensinar as propriedades desta transformação geométrica de maneira formalizada em teoremas e demonstrações como apresentadas neste trabalho, os conceitos sobre inversão circular serão inseridos de maneira mais lúdica propondo uma adaptação do quebra-cabeças para essas turmas. Para essa adaptação, o quebra-cabeças poderá ter para cada parte da imagem invertida uma cor correspondente a mesma parte da imagem a ser encaixada. Assim na montagem do quebra-cabeças inversivo, basta encaixar corretamente as peças correspondentes de mesma cor.

Esta atividade de construir e “jogar” com um quebra-cabeças inversivo adaptado a cada turma do ensino fundamental para exploração das propriedades desta transformação geométrica, não dispensa saber como montar qualquer quebra-cabeças convencional, pelo menos no fato de que para “montar” o jogo corretamente, ambos partem do princípio de que a escolha das peças corretas, se dá a partir da observação de uma imagem de referência. Diferente dos quebra-cabeças convencionais, em que a figura a ser montada é igual a imagem de referência, no quebra-cabeças inversivo a imagem de referência, não se parece em nada com a figura que será montada desse quebra-cabeças.

Capítulo 2

TEOREMAS CÉLEBRES E A INVERSÃO NO CÍRCULO

2.1 Teorema de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (90-168 D.C.) astrônomo que viveu em Alexandria, no Egito, autor do tratado de astronomia mais importante de sua época que ficou conhecido como Almagesto. Nessa obra Ptolomeu dá uma breve explicação do que vinha ser conhecido como o teorema de Ptolomeu (Eves,2011). Este teorema diz respeito ao produto das diagonais de um quadrilátero convexo inscrito, ou seja, aquele quadrilátero cujos vértices são pontos sobre a circunferência. Num quadrilátero inscrito, o produto de suas diagonais é igual à soma do produto dos lados opostos. (Figura 2.1).

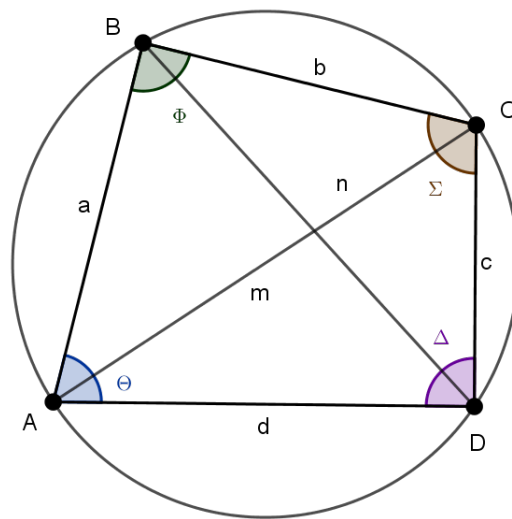


Figura 2.1: Quadrilátero inscrito. $\Phi + \Delta = \Sigma + \Theta$

Proposição 2.1.1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, com lados $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, diagonais $AC = m$ e $BD = n$. Se $ABCD$ for inscrito, então*

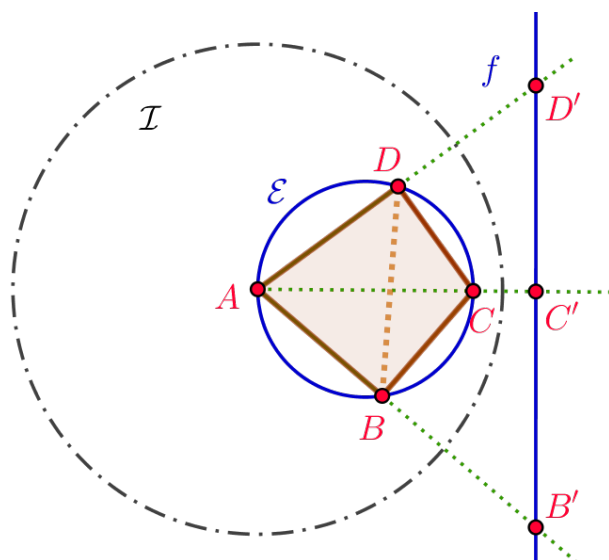


Figura 2.2: Teorema de Ptolomeu por inversão circular

tem-se a relação:

$$m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$$

A seguir apresentaremos uma demonstração usando a inversão geométrica e, em especial, a transformação da distância entre dois pontos por inversão circular. Chegaremos à mesma relação acima, enunciada nos livros didáticos como sendo o teorema de Ptolomeu.

2.1.1 Demonstração do Teorema de Ptolomeu por inversão circular

Queremos mostrar que, se o quadrilátero $ABCD$ é inscrito, então vale a relação: $|BD| \cdot |AC| = |CD| \cdot |AB| + |BC| \cdot |AD|$.

Para demonstrarmos o teorema de Ptolomeu usando inversão no círculo (Mesquita.2022), admitiremos que um dos seus vértices é o centro do círculo de inversão de raio arbitrário r , digamos o ponto A . Ao centrar um dos vértices do quadrilátero inscrito no centro do círculo de inversão, o círculo em que esse quadrilátero está inscrito é um círculo que passa pelo centro do círculo de inversão, isso quer dizer que será transformado em uma reta f que não passa pelo centro do círculo de inversão. Veja a figura 2.2.

Inicialmente prolonguemos os segmentos AB , AC e AD até encontrar a reta f nos pontos B' , C' e D' , inversos de B , C e D , respectivamente. A ideia de transformar esse pontos que estão sobre uma circunferência em pontos sobre uma reta torna o problema mais simples, pois trata-se de encontrar uma relação entre as distâncias desses pontos transformados na reta.

Usando a definição de inversão no círculo, temos que, $|AB| \cdot |AB'| = |AC| \cdot |AC'| = r^2$, isso implica dizer que:

$$\frac{|AB'|}{|AC|} = \frac{|AC'|}{|AB|}$$

Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AC'B'$ compartilham o mesmo ângulo ($\widehat{BAC} \equiv \widehat{C'AB'}$) e estabelecem a relação acima, $\triangle ABC$ e $\triangle AC'B'$ só podem ser semelhantes. Logo, podemos concluir que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AC'B'}$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AB'C'}$ e ainda:

$$\frac{|AB|}{|AC'|} = \frac{|AC|}{|AB'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|},$$

o que nos permite escrever,

$$|B'C'| = \frac{|AC'| \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{|BC| \cdot r^2}{|AB| \cdot |AC|}. \quad (2.1)$$

Analogamente, para os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle AC'D'$, e para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AD'B'$, temos

$$\begin{aligned} |C'D'| &= \frac{|CD| \cdot r^2}{|AD| \cdot |AC|}, \text{ e} \\ |B'D'| &= \frac{|BD| \cdot r^2}{|AD| \cdot |AB|}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como $|B'D'| = |C'D'| + |B'C'|$, fazendo as substituições e os devidos cancelamentos temos:

$$\frac{|BD| \cdot r^2}{|AD| \cdot |AB|} = \frac{|CD| \cdot r^2}{|AD| \cdot |AC|} + \frac{|BC| \cdot r^2}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Multiplicando toda a expressão acima por $(AB \cdot AC \cdot AD)$, resulta em:

$$|BD| \cdot |AC| = |CD| \cdot |AB| + |BC| \cdot |AD| \quad (2.3)$$

como queríamos. \square

Vale lembrar que a igualdade só é verdadeira se os transformados B' , C' e D' são colineares. Isso garante que o quadrilátero $ABCD$ seja inscrito.

O que nos chama bastante a atenção aqui é que, para mostrarmos que é possível provar o teorema de Ptolomeu por inversão, tivemos que nos valer de um conhecimento ensinado desde o ensino fundamental, que é a semelhança de triângulos. E para encontrar essa semelhança que a princípio parece pouco provável, só foi possível aplicando a definição de inversão no círculo e a semelhança de triângulos só foi estabelecida posteriormente.

2.2 Cadeia de Pappus

A cadeia de Pappus é um problema da época de Pappus de Alexandria (290 - 350 D.C), uma extensão do trabalho de Arquimedes sobre arbelos que consiste em, tomando três pontos A , B e C , com C entre A e B , traçar três semicircunferências \mathcal{R} , \mathcal{S} e C_0 de diâmetros AB , AC e CB , respectivamente (Figura 2.3). Entre as semicircunferências \mathcal{R} e \mathcal{S} , escreve-se uma cadeia de circunferências C_1, C_2, \dots , todas tangentes à \mathcal{R} e \mathcal{S} , e cada circunferência seguinte, tangente à anterior, começando em C_0 .

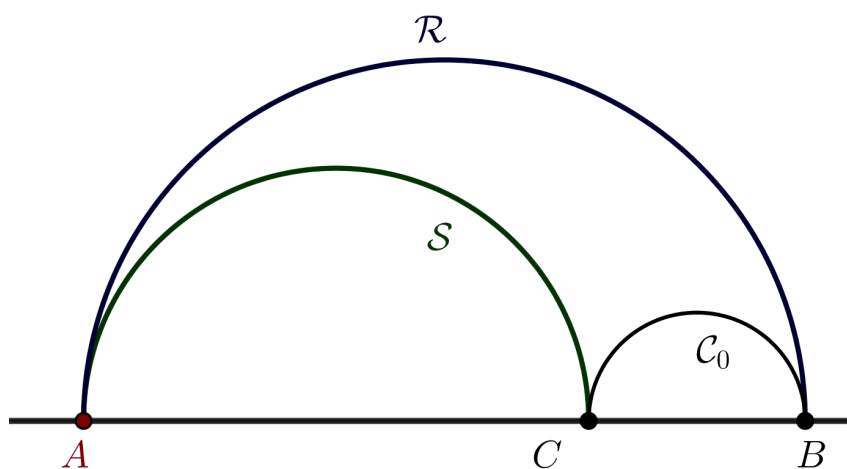


Figura 2.3: Cadeia de Pappus I

Tomando como centro de inversão o ponto A , o segmento AB é invertido nele mesmo. As semicircunferências \mathcal{R} e \mathcal{S} que passam pelo centro de inversão e são perpendiculares ao segmento AB , são invertidas nas retas \mathcal{R}' e \mathcal{S}' paralelas distintas e perpendiculares ao segmento AB . Escolhe-se a circunferência de inversão \mathcal{I} de tal forma que os pontos B e C são invertidos nos pontos B' e C' , respectivamente. Isto é $C = B'$ e $B = C'$. Dessa forma, as retas \mathcal{R}' e \mathcal{S}' (inversas de \mathcal{R} e \mathcal{S}) passam pelos pontos C e B , respectivamente. Já as circunferências C_0, C_1, C_2, \dots são transformadas nas circunferências C'_0, C'_1, C'_2, \dots , todas com raio de mesmo tamanho (Veja figura 2.4). Usando a transformação de inversão geométrica e semelhança de triângulos, podemos calcular a distância perpendicular do centro de qualquer um dos círculos C_0, C_1, C_2, \dots até o segmento AB , bem como o raio de qualquer um deles da cadeia de Pappus. Vale ressaltar que, para a solução do problema de Pappus, é imprescindível lembrarmos que a transformação de inversão preserva tangências, ou seja, os pontos de tangência se mantêm entre objetos geométricos após suas inversões.

O problema aqui consiste em mostrar que, usando o teorema de Pitágoras, semelhanças de triângulos e a definição de inversão, podemos calcular que a distância entre o centro de qualquer círculo ao segmento AB , é o dobro do raio desse círculo. Primeiramente tomando sobre uma reta três pontos A, B e C que serão extremos de diâmetros como mencionados anteriormente. Vamos dizer que a semicircunferência \mathcal{R} será invertida

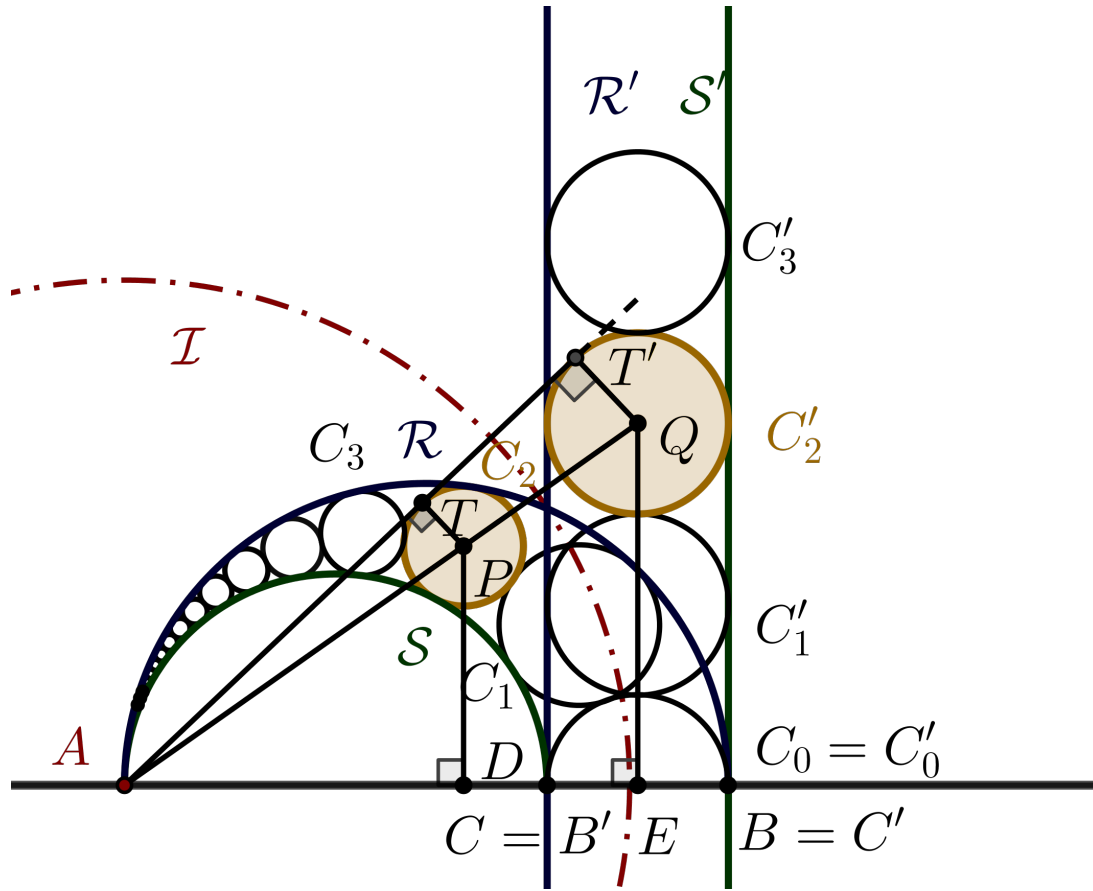


Figura 2.4: Cadeia de Pappus II.

na semirreta \mathcal{R}' perpendicular a AB por C , e a semicircunferência \mathcal{S} na semirreta \mathcal{S}' também perpendicular a AB por B . Essa escolha é bem apropriada pois assim o raio do círculo de inversão já fica determinado e podemos dizer que $B = I_{A,r}(C)$ e $C = I_{A,r}(B)$, como ilustrado na figura 2.4. Isso nos dará $C_0 = C'_0$. Estamos adotando o círculo C_2 para realizar os cálculos, mas poderá ser qualquer um dentro da cadeia de círculos C_n por exemplo. Aqui não mostraremos os exaustivos cálculos que se pode realizar para tal demonstração, mas indicaremos os passos que conduzem a isso.

Como, $B' = I_{\mathcal{L},r}(C)$ e $C' = I_{\mathcal{L},r}(B)$, e colocando $AC = 2R$, $CB = 2S$, o raio de inversão pode ser obtido:

$$\begin{aligned}
 C' = I_{\mathcal{L},r}(B) &\Rightarrow AC \cdot AB = r^2 \\
 &\Rightarrow 2R \cdot (2R + 2S) = r^2 \\
 &\Rightarrow r = 2 \cdot \sqrt{R^2 + RS}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Baixemos a perpendicular PD , sendo P o centro do círculo C_2 . Baixemos, também, a perpendicular QE sendo Q o centro de C'_2 . Note que o centro de C'_2 não é o inverso

do centro de C_2 . Tomamos uma tangente à C_2 e C'_2 que terá os pontos de tangência T e T' respectivamente. Assim temos os triângulos retângulos $\triangle APD$, $\triangle AQE$, $\triangle ATP$, $\triangle AT'Q$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle AQE$ podemos determinar o lado AQ . Aplicando novamente o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle AT'Q$, podemos encontrar AT' . E usando a definição de inversão para os pontos T e T' (já que são inversos um do outro), podemos encontrar AT , o que facilitará encontrar o raio TP do círculo C_2 por semelhança entre os triângulos $\triangle ATP$ e $\triangle AT'Q$.

Agora tendo AT e TP podemos novamente aplicar o teorema de Pitágoras e determinar AP . Finalmente, para encontrarmos a distância do centro de C_2 até o segmento AB , a semelhança entre os triângulos $\triangle APD$ e $\triangle AQE$ nos dará PD . Logo podemos verificar $PD = 2 \cdot TP$, como queríamos mostrar. Em geral, para um certo círculo C_n de centro P_n em que D_n é o pé da perpendicular P_nD_n a AB , podemos escrever $P_nD_n = 2nT_nP_n$, no qual T_n é o ponto de tangência em C_n de uma reta que passa por A .

2.3 Teorema dos quatro círculos

Uma das mais belas aplicações da transformação de inversão circular é o problema denominado por alguns autores por *problema dos quatro círculos*. Nele podemos observar como um problema de natureza complexa pode ser simplificado noutro de natureza mais simples em que o uso de semelhança de triângulos e o teorema do ângulo externo podem resolver o problema. O teorema dos quatro círculos, ou também chamado de *Teorema de Miquel* (1816-1851) (Wells P.151), é um problema envolvendo intersecção de quatro círculos dois a dois. Esse problema, já conhecido por Steiner (1796 - 1863), tinha como propósito mostrar que os pontos de intersecção desses círculos podiam ser tanto concíclicos como colineares. Esse problema pode ser demonstrado de varias maneiras, mas aqui discutiremos uma demonstração usando inversão circular (Stankova.2018). Como condições necessárias à demonstração (para essa) requer o uso do conceito de quadrilátero cíclico. Daremos aqui, de forma breve, as condições que estabelecem se quatro pontos são concíclicos ou não.

2.3.1 Quadrilátero cíclico

Um quadrilátero cíclico é aquele cujos vértices estão sobre uma circunferência. Seus vértices são ditos concíclicos.

Proposição 2.3.1. Ângulo internos no quadrilátero cíclico *Seja o quadrilátero convexo A, B, C, D , esse quadrilátero é dito cíclico se, e somente se, a soma de dois ângulos internos opostos é igual a dois retos.*

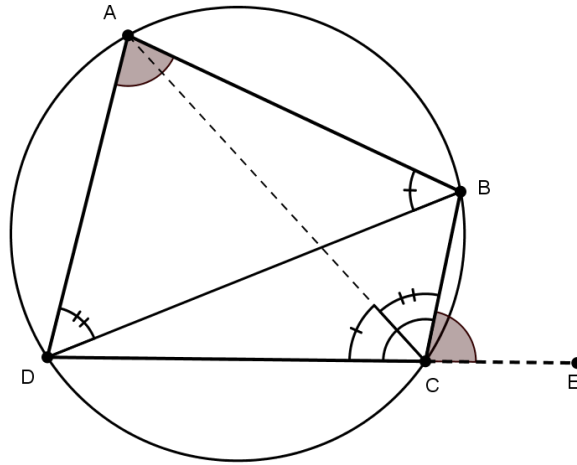


Figura 2.5: Quadrilátero cíclico. A soma de dois ângulos internos opostos é igual a dois retos. O ângulo externo de um quadrilátero cíclico, é igual ao ângulo oposto ao seu suplementar

Demonstração. Seja uma circunferência que passe por A, B, C, D , e um quadrilátero convexo que tenha esses pontos como seus vértices (veja figura 2.5). Na prova da implicação direta queremos mostrar que se esse quadrilátero é cíclico, então a soma de dois ângulos internos e opostos desse quadrilátero somam 180° . Inicialmente ligamos B à D . Assim, fica determinado o triângulo $\triangle ABD$ a respeito do qual podemos escrever:

$$\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{BAD} \quad (2.5)$$

O ângulo \widehat{BCA} descreve o mesmo arco AB que o ângulo \widehat{ADB} , logo $\widehat{BCA} = \widehat{ADB}$. Analogamente o ângulo \widehat{ACD} descreve o mesmo arco AD que o ângulo \widehat{ABD} , ou seja $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$. Substituindo em 2.5 podemos escrever:

$$\widehat{ACD} + \widehat{BCA} = 180^\circ - \widehat{BAD}. \quad (2.6)$$

Sabendo que $\widehat{BCD} = \widehat{ACD} + \widehat{BCA}$, 2.6 fica:

$$\begin{aligned} \widehat{BCD} &= 180^\circ - \widehat{BAD} \\ \Rightarrow \widehat{BCD} + \widehat{BAD} &= 180^\circ \end{aligned} \quad (2.7)$$

De forma análoga podemos mostrar a mesma propriedade a respeito do outro par de ângulos opostos:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \quad (2.8)$$

Na prova da implicação contrária queremos mostrar que se a soma de dois ângulos internos opostos é igual a dois retos esse quadrilátero é cíclico. Começamos por mostrar que, se $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, então o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. Faremos isso supondo, inicialmente, que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ e o quadrilátero $ABCD$ não é cíclico, isto é, o ponto A não é concíclico com B, C, D . Considere um círculo que contenha os pontos B, C e D . No caso em que A está fora desse círculo existe um ponto A' que resulta da intersecção do quadrilátero $ABCD$ com esse círculo, formando o quadrilátero cíclico $A'BCD$, como indica a figura (2.6). Se A é um ponto externo ao círculo $A'BCD$, consideremos que A' seja o ponto de intersecção do círculo $(A'BCD)$ com o segmento AB . Como o quadrilátero $A'BCD$ é cíclico, podemos escrever:

$$\widehat{BA'D} + \widehat{BCD} = 180^\circ. \quad (2.9)$$

Comparando com $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, podemos concluir que $\widehat{BA'D} = \widehat{BAD}$, o que é um absurdo, pois $\widehat{BA'D}$ é ângulo externo ao triângulo $\triangle AA'D$, pois, pelo teorema do ângulo externo, deveríamos ter $\widehat{BA'D} > \widehat{BAD}$. Logo, para em que o quadrilátero $ABCD$ seja cíclico, é necessário que o ponto A esteja sobre o círculo $ABCD$. Analogamente, podemos proceder da mesma maneira para o ponto A dentro do círculo $ABCD$, dessa maneira prolonga-se o lado AB até intersectar o círculo em A' (veja figura 2.7), daí segue de maneira semelhante ao que já foi feito (2.9) concluindo mais uma vez que $\widehat{BAD} > \widehat{BA'D}$. Assim, A não pode estar fora nem dentro do círculo $ABCD$, restando apenas a possibilidade de ele estar sobre esse círculo. Portanto, o quadrilátero formado pelos pontos A, B, C e D é um quadrilátero cíclico. \square

Proposição 2.3.2. Ângulo externo ao quadrilátero cíclico

Seja A, B, C, D um quadrilátero cíclico. Qualquer um de seus ângulos externos é igual ao oposto de seu suplementar (veja a figura 2.5 na qual mostra como exemplo que o ângulo externo \widehat{BCE} é igual ao oposto \widehat{BAD} de seu suplementar \widehat{BCD}).

Demonstração. Inicialmente vamos prolongar o lado DC até o ponto E . Como \widehat{BCD} é suplementar a \widehat{BCE} , e nos valendo da proposição 2.3.1, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \widehat{BCE} + \widehat{BCD} &= 180^\circ \text{ e,} \\ \widehat{BAD} + \widehat{BCD} &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Igualando os dois primeiros membros, tem-se:

$$\widehat{BCE} = \widehat{BAD}. \quad (2.10)$$

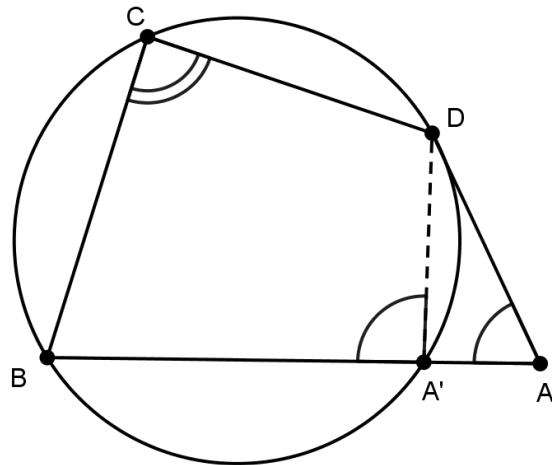


Figura 2.6: Quadrilátero cíclico com o ponto A fora do círculo

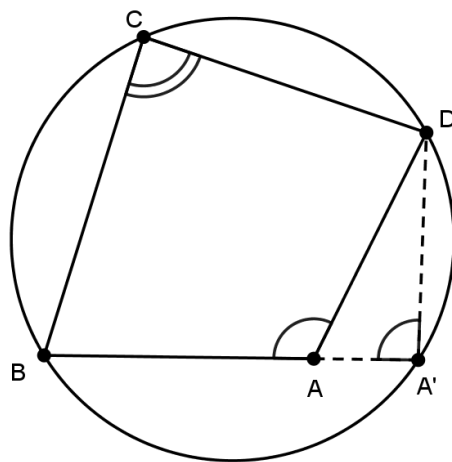


Figura 2.7: Quadrilátero cíclico com o ponto A dentro do círculo

2.3.2 Teorema de Miquel

Proposição 2.3.3. *Seja A, B, C e D pontos consecutivos sobre um círculo. Sobre cada par de pontos A, B ; B, C ; C, D e D, A passa um dos quatro círculos \mathcal{R} , \mathcal{S} , \mathcal{P} e \mathcal{Q} , respectivamente. Os quatro demais pontos de intersecção A_1, B_1, C_1 e D_1 , de modo que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{C; C_1\}$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{B; B_1\}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{A; A_1\}$ e $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \{D; D_1\}$ também estarão sobre um círculo (veja a figura 2.8).*

Demonstração. Tomemos um círculo de inversão com centro em A e raio qualquer. Invertamos os círculos \mathcal{R} , \mathcal{S} , \mathcal{P} e \mathcal{Q} . Os círculos \mathcal{P} e \mathcal{Q} contêm o centro de inversão A e são invertidos nas retas \mathcal{P}' e \mathcal{Q}' que se interceptam em A'_1 e contêm os pontos B' e D' , respectivamente (veja figura 2.9). Analogamente, o círculo que passa por A, B, C, D (veja o círculo tracejado na figura 2.8) é invertido na reta que passa por B', C', D' (veja linha tracejada na figura 2.9).

Queremos mostrar que, se os pontos A, B, C, D forem concíclicos, os pontos A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 são concíclicos, o que nos permitirá concluir que os pontos A_1, B_1, C_1, D_1 também serão concíclicos. Para mostrar isso, vamos usar a condição 2.10 nos círculos \mathcal{R}' , \mathcal{S}' e no quadrilátero que passa por A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 . Sabemos que os pontos D', C', C'_1, D'_1 são concíclicos, bem como os pontos B', C', B'_1, C'_1 . Além disso, os círculos \mathcal{R}' e \mathcal{S}' compartilham esses mesmos dois pontos C', C'_1 (veja a figura 2.9).

Como, $\widehat{B'C'C'_1} = \widehat{D'D'_1C'_1} = \widehat{A'_1B'_1C'_1}$, podemos afirmar que o quadrilátero formado pelos pontos A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 é cíclico, logo os pontos A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 são concíclicos. Aplicando a transformação de inversão $(I_{A,r})$, na circunferência que passa por A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 , nos trará de volta à circunferência que passa por A_1, B_1, C_1, D_1 , pois o círculo que não passa pelo centro de inversão é transformado noutro círculo que não passa pelo centro de inversão. \square

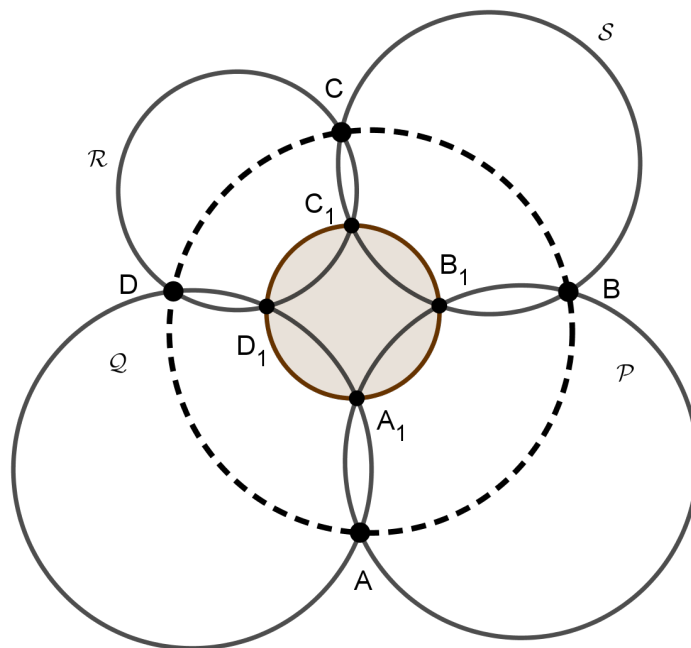


Figura 2.8: Teorema dos 4 círculos

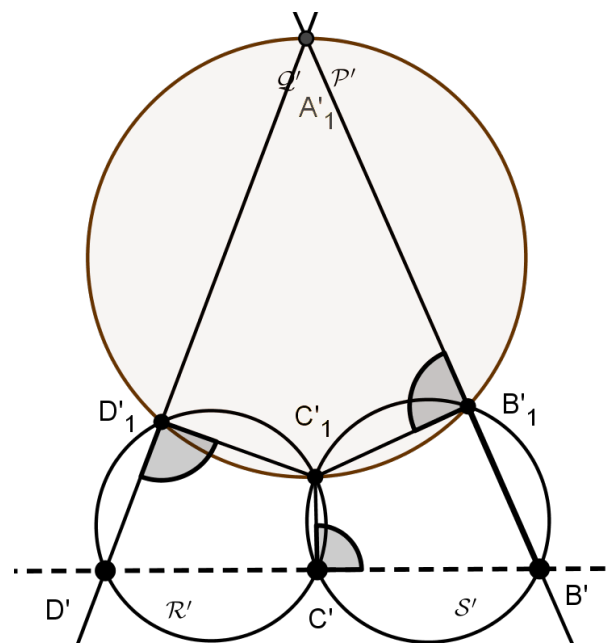


Figura 2.9: Inversão dos objetos da figura 2.8: “Teorema de Miquel invertido.”

2.4 Semiplano superior de Poincaré e inversão

O semiplano de Poincaré \mathbb{H} Veja a figura 2.10 é o conjunto de pontos (x, y) do plano \mathbb{R}^2 que está acima do eixo das abscissas, excluindo esse eixo:

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$

Esse é um dos modelos do plano hiperbólico descoberto pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 - 1912). A ideia de plano hiperbólico surgiu nos tempos de Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856) e János Bolyai (1802 - 1860), quando se questionava o quinto postulado de Euclides da geometria plana. Foi estabelecido esse novo sistema geométrico que ficou conhecido como geometria hiperbólica (Mesquita, 2022). Aqui discutiremos brevemente os dois modelos dessa geometria devidos a Poincaré. Vamos mostrar a passagem de um modelo à outro por meio da transformação de inversão na circunferência porque: “*Em dimensão dois, as inversões geométricas funcionam exatamente como movimentos rígidos no mundo euclidiano - dizemos que elas são isometrias do plano hiperbólico*” (Mesquita, 2022. P. 122).

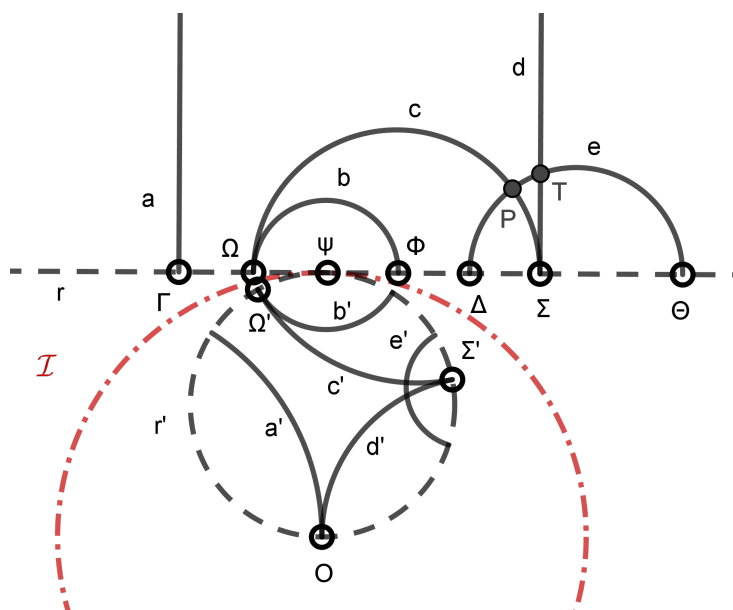


Figura 2.10: Transformação por meio da inversão do semiplano superior ao disco de Poincaré

As retas nesse modelo \mathbb{H} para o plano hiperbólico são representadas por: **a)** retas euclidianas perpendiculares ao eixo x (a reta r na figura 2.10); **b)** semicírculos perpendiculares a r . Os pontos $\Gamma, \Omega, \Psi, \Phi, \Delta, \Sigma, \Theta$ não pertencem a \mathbb{H} , pois estão sobre r (a linha foi colocada pontilhada para indicar não pertencente ao semiplano superior) e são chamados de pontos ideais (que é convencionalmente denominá-los pontos no infinito). Duas retas que têm como ponto de encontro um ponto ideal são ditas retas paralelas. Na figura 2.10 as retas b, c e c, d são paralelas. Os pontos P e T são ditos pontos ordinários, esses sim

pertencem ao semiplano superior.

Tomando uma circunferência \mathcal{I} de centro O e raio $O\Psi$, podemos transformar o semiplano superior no disco \mathbb{D} , um outro modelo para o plano hiperbólico, também devido à Poincaré. Esse processo pode ser feito por projeções, mas aqui mostraremos que é possível por meio da inversão no círculo. Como a reta r é tangente à \mathcal{I} , sua inversa r' em relação a \mathcal{I} é uma circunferência que passa pelo centro de \mathcal{I} e pelo ponto de tangência Ψ , também representada pontilhada na figura 2.10) para indicar o bordo do disco de Poincaré, mas cujos pontos não estão contidos em \mathbb{D} .

Como a transformação de inversão circular preserva ângulos, note que as retas e os semicírculos de \mathbb{H} ortogonais a r (as retas hiperbólicas), são transformados em retas ou arcos de círculos euclidianos ortogonais ao bordo do disco de \mathbb{D} (também retas hiperbólicas no modelo do disco \mathbb{D}). Outra característica é que, as retas b, c e c, d , que são paralelas no semiplano, quando transformadas, o paralelismo se mantém. Podemos dizer que as retas a' e d' são paralelas, pois tem o ponto O comum, sendo esse ponto um ponto que ao mesmo tempo pertence ao bordo do disco (portanto ponto ideal), como também é o centro de inversão (qualquer ponto nesse centro, é transformado em ponto no infinito). Mantida as mesmas condições após aplicarmos a transformação de inversão circular, o disco (excetuando seu bordo r') assim formado com suas retas, é um dos modelos para a geometria hiperbólica.

Capítulo 3

APLICAÇÕES NO INVERSOR DE PEAUCELLIER E DE HART

Nos séculos XVII, XVIII e XIX, houve um crescente interesse no aprimoramento e surgimento de novas máquinas que atendessem às demandas da sociedade. Era época de grandes transformações sociais, políticas, econômicas e científico-tecnológicas. Engenheiros e matemáticos estavam engajados numa espécie de corrida científica que levou não só ao desenvolvimento de artefatos mecânicos que iriam servir ao comércio, mas também certamente contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. O emprego da Geometria para solucionar problemas práticos de engenharia mostrou como era (e ainda é) importante essa conexão entre as diversas áreas do conhecimento (Cundy, 1961).

3.1 Mecanismo de Watt. Tentativa de criar uma linha reta a partir de um mecanismo livre de barras guiadas

Criar um mecanismo que descrevesse um movimento retilíneo a partir de um movimento circular era uma tarefa difícil, houve várias tentativas, mas todas elas criavam aproximações de um movimento em linha reta, que tornava o dispositivo limitante e, conseqüentemente, ineficiente (Cundy, 1961). Um bom exemplo disso foi um mecanismo criado em 1784 pelo engenheiro britânico James Watt (1784 - 1819), seus trabalhos contribuíram para o aprimoramento da máquina a vapor, que impulsionou a revolução industrial (Cundy, 1961). Este mecanismo que era composto de três varetas (Figura 3.1) em que duas eram de mesmo tamanho, $AC = DB$. P é o ponto médio de DC . Quando as barras AC e DB são alongadas, o ponto P tende a descrever uma reta. No entanto, ao final do curso do sistema, o ponto P começa a descrever uma curva. Se o conjunto criado por Watt for um paralelogramo cruzado (falaremos mais disso adiante),

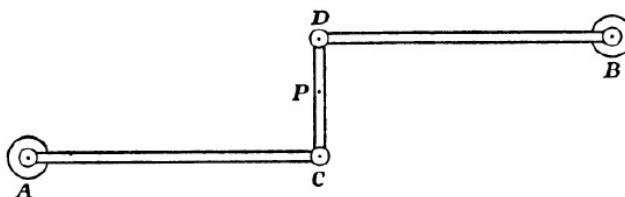


Figura 3.1: Mecanismos de James Watt - Fonte: Cundy

com $AB = DC = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}DB$, ou seja, quando for um paralelogramo cruzado, a barra maior for $\sqrt{2}$ vezes maior que as outras duas menores, o ponto P descreverá a Lemniscata de Bernoulli. (Cundy, 1961)

Muitos outros mecanismos foram criados com o intuito de descrever um movimento retilíneo, principalmente se esse mecanismo pudesse produzir um movimento em linha reta em todo seu curso de funcionamento. O fato é que já se percebia que para se criar uma linha reta a partir de ligações de barras, era preciso um mecanismo com pelo menos 4 barras (Cundy, 1961).

3.2 Inversor de Peaucellier

Em 1864 um matemático e engenheiro francês de nome Charles-Nicolas Peaucellier(1832-1919), pela primeira vez, apresentou um mecanismo capaz de transformar movimentos circulares em movimentos retilíneos e vice-versa (Cundy, 1961). Foi uma solução prática para o problema da época, e essa solução foi encontrada baseando-se no estudo das transformações geométricas especialmente da transformação de inversão de dois pontos em relação a um círculo.

Algumas fontes apontam que esse mecanismo tenha sido idealizado por Peaucellier,¹ é um mecanismo composto por 7 barras, as barras OA e OB são barras maiores e tem o mesmo tamanho, quatro barras menores QA , AR , RB e BQ possuem o mesmo tamanho, e uma sétima barra podendo ter qualquer tamanho (Figura 3.2). Se fixarmos o ponto O e o ponto C , a medida que o ponto Q descreve um movimento circular, seu inverso R descreverá um movimento retilíneo. Peaucellier parece ter encontrado a solução do problema recorrente da época. Porém, sua solução não recebeu a devida atenção quando foi apresentada. Mais tarde Yom Tov Lipman Lipkin(1846-1875), redescobriu o mecanismo levando os créditos pela sua descoberta e publicando a solução em 1873 (Wolfe,1940). No inversor de Peaucellier o ponto R que descreve uma reta é inverso do ponto Q que descreve um círculo, podemos ver um caso prático de aplicação de uma propriedade dessa

¹Optamos por usar o nome “Inversor de Peaucellier”, ao invés de “Inversor de Peaucellier-Lipkin”, pois algumas referências consultadas nesse trabalho não citam o nome Lipkin, como é mencionado em outros textos.

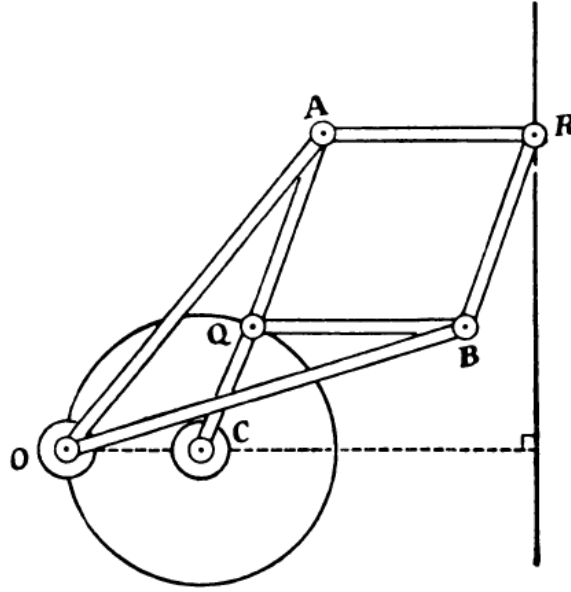


Figura 3.2: Inversor de Peaucellier: no qual $OA = OB$ e $QA = AR = RB = BQ$. Fonte: Cundy. 1961

transformação geométrica. Mostraremos o fato desse pontos serem inversos um do outro.

Seja, $OA = OB = n$ e $QA = AR = RB = BQ = m$. Com n e m números reais tais que $n > m$ (veja a figura 3.3). Seja $h = AD$, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos OAD e QAD temos,

$$QD = \sqrt{m^2 - h^2} \quad e$$

$$OD = \sqrt{n^2 - h^2}. \quad (3.1)$$

Como queremos OQ então,

$$OQ = \sqrt{n^2 - h^2} - \sqrt{m^2 - h^2}. \quad (3.2)$$

Como $QD = DR = \sqrt{m^2 - h^2}$, pois $QARB$ é um losango, isso implica:

$$OR = \sqrt{n^2 - h^2} + \sqrt{m^2 - h^2}. \quad (3.3)$$

Multiplicando os resultados (3.2) e (3.3), conclui-se que a definição de inversão é satisfeita para m e n constantes:

$$OQ \cdot OR = n^2 - m^2. \quad (3.4)$$

Assim, podemos dizer que a circunferência descrita pelo ponto Q , é transformada na reta descrita pelo ponto R . Depois do inversor de Peaucellier, muitos outros inversores foram

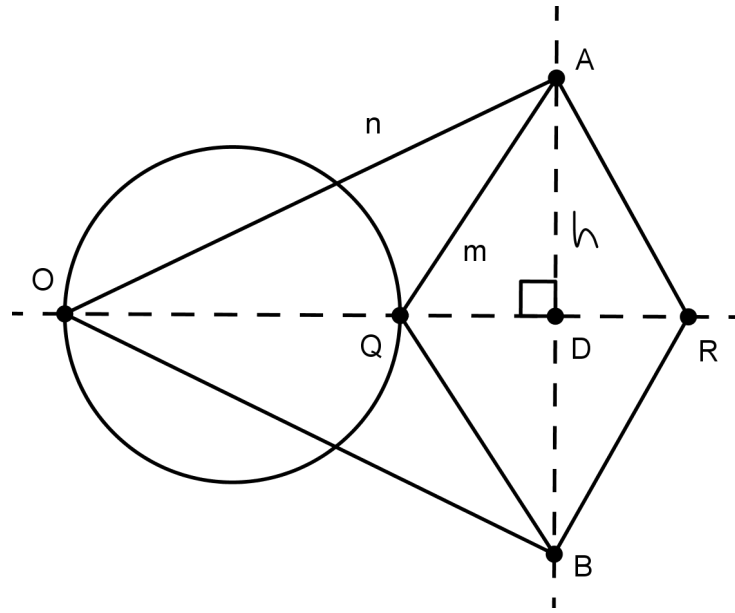


Figura 3.3: O ponto R é inverso do ponto Q

criados ate mesmo com um número menor de barras.

Outro dispositivo mecânico que transforma movimento circular em movimento linear é o inversor de Hart(1848-1920). Porém, antes de falar desse inversor, precisamos falar o que é um paralelogramo cruzado, também conhecido como antiparalelogramo (podemos entender como se um paralelogramo sofresse uma torção em seus lados maiores). No paralelogramo cruzado, podemos observar que, tomando um ponto sobre um de seus lados maiores, seu transformado estará sobre o outro lado maior, isso em relação à um círculo com centro em um dos lados menores e com um determinado raio, desde que o centro de inversão o ponto e seu transformado estejam alinhados. Sendo P' o inverso de P , qualquer curva descrita por P' será inversão da curva descrita por P quando todo o mecanismo entrar em operação.

Seja o paralelogramo cruzado $ABCD$ da figura 3.4, $AB = CD = m$ e $AD = BC = n$. As diagonais desse paralelogramo são paralelas $AC \parallel BD$ (Mesquita, 2022). Tomando e fixando um ponto O sobre o lado AB de modo que $OA = a$, esse ponto irá servir de centro de inversão, e por O passa-se uma reta paralela a BD . A intersecção da reta que passa por O com o lado BC nos dá o ponto P . Usando semelhança de triângulos não é difícil mostrar que P' sobre AD é inverso de P , então podemos escrever,

$$AC = \sqrt{n^2 - h^2} - \sqrt{m^2 - h^2}, \quad (3.5)$$

sendo $CF = AE$ então,

$$BD = \sqrt{n^2 - h^2} + \sqrt{m^2 - h^2}. \quad (3.6)$$

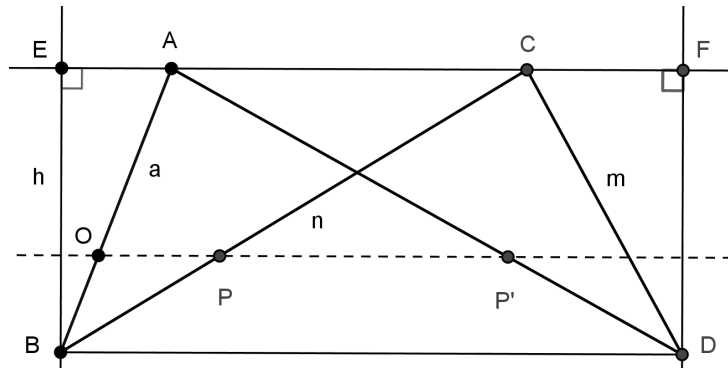


Figura 3.4: Paralelogramo cruzado. P' é inverso de P , em relação à circunferência de centro O e raio κ .

Por outro lado, como o triângulo OBP é semelhante ao triângulo ABC , tem-se:

$$\frac{OP}{AC} = \frac{OB}{AB} \Rightarrow OP = \frac{OB}{AB} \cdot AC \quad (3.7)$$

Analogamente, o triângulo $OP'A$ é semelhante ao triângulo BDA :

$$\frac{OP'}{BD} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow OP' = \frac{AO}{AB} \cdot BD.$$

Então, usando a definição de inversão para os pontos P e P' , $OP \cdot OP' = \kappa^2$, pode-se determinar a partir dos resultados anteriores o raio κ :

$$OP \cdot OP' = \frac{a(m-a)(n^2-m^2)}{m^2} = \kappa^2. \quad (3.8)$$

Uma característica importante desse paralelogramo é que, não importa o quanto o ponto B se afaste ou se aproxime do ponto D , sempre teremos em cada estágio um paralelogramo cruzado (desde que $B \neq D$, e que ambos se movimentem sobre a reta que passe por BD . O mesmo vale para AC), então os pontos O , P e P' , que são pontos fixos nas hastes, sempre estarão alinhados e a razão de inversão será mantida.

3.3 Inversor de Hart

Esse mecanismo, idealizado em 1874 por Herry Hart(1848-1920) , funcionava como um inversor transformando movimento circular em movimento linear. Hart se baseou no princípio de funcionamento de um paralelogramo cruzado, só que utilizava uma barra a mais (barra GP na figura 3.5). Veja a figura 3.5. Se fixarmos os pontos O e G no plano, enquanto P descreve um círculo, Q descreve uma reta. Os pontos O , P e Q são pontos

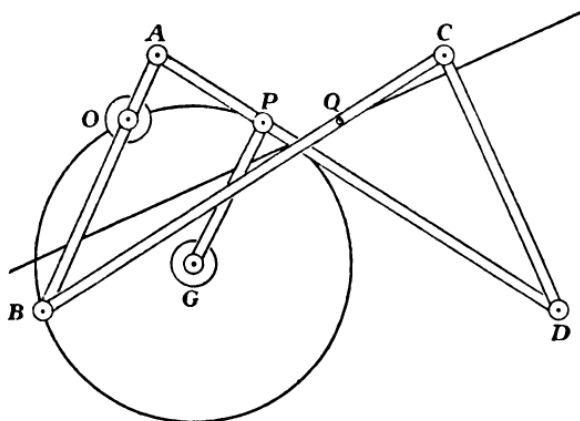


Figura 3.5: Inversor de Hart- Fonte: Cundy, 1961

fixos nas barras AB , AD e BC , respectivamente, como no paralelogramo cruzado, usando semelhança de triângulos, não é difícil mostrar que o ponto Q é inverso ao ponto P em relação à circunferência de centro O e raio κ (veja equação 3.8).

Muitas outras máquinas que produziram movimento linear foram construídas após a invenção de Peaucellier. Há indícios de que Hart tenha sido o primeiro a descobrir que podia ser usado um número menor de barras para conversão da natureza de um movimento em outra. Na verdade, cinco barras é o número mínimo para tal dispositivo (Cundy, 1961).

A “descoberta” do uso do paralelogramo cruzado na criação de mecanismos que usam a inversão no círculo foi um ganho para essa área do conhecimento. Possibilitou não só a criação e aprimoramento de mecanismos, mas estabeleceu conexões com problemas antigos, que se julgava impossíveis de resolver. Um problema clássico dos gregos é a trisseção de um ângulo, que na época era considerado insolúvel; mesmo hoje não pode ser resolvido apenas com régua e compasso. Porém, pode-se solucioná-lo usando “ferramentas” mais complexas. Em (Cundy, 1961) mostrou-se que se pode criar um mecanismo que resolve o problema: o mecanismo se baseia na junção de paralelogramos cruzados inspirado no princípio dos mecanismos do Matemático britânico Alfred Bray Kempe (1849 - 1922), sobre o problema de encontrar ligações que pudessem descrever movimentos retilíneos exatos. A seguir descreveremos de maneira simples um mecanismo constituído por dois paralelogramos cruzados.

3.4 Paralelogramos cruzados semelhantes

Na figura 3.6, $ADEF$ e $ABCD$ são dois paralelogramos cruzados, de modo que $AB = DC$, $EF = DA$ e $FA = DE$. Se os ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}F$ forem congruentes, teremos $DE \cdot DC = DA^2$, isto é, C é o inverso de E em relação ao círculo no qual DA é o raio e D o centro. Pode-se iniciar a construção tomando o ponto E arbitrário, mas interno ao círculo. Ligando DE e DA , podemos completar o paralelogramo cruzado $ADEF$,

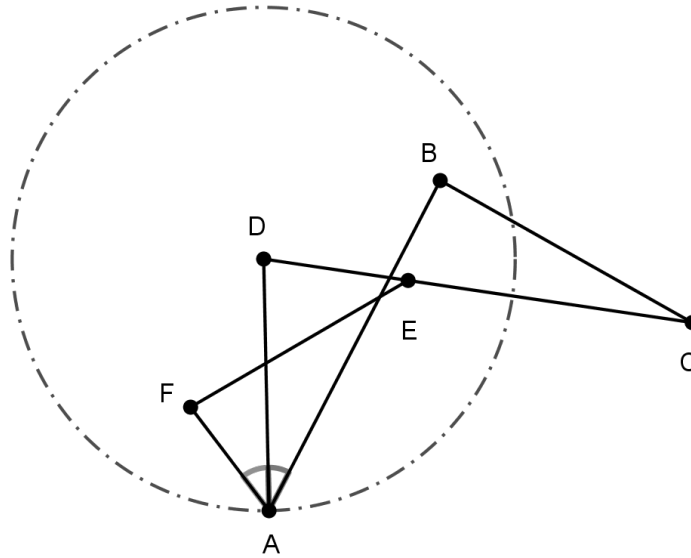


Figura 3.6: Paralelogramos cruzado semelhantes

traçando EF de modo que $EF = DA$ e $FA = DE$. O ponto B será tomado de modo que o ângulo $\hat{B}AD = \hat{D}AF$. Completando o paralelogramo cruzado $ABCD$, de modo que $AB = DC$ e $BC = DA$, construímos dois paralelogramos cruzados semelhantes, com a propriedade desejada entre E e C .

Com essa junção de paralelogramos cruzados, é possível construir um mecanismo capaz de dividir um ângulo em quantas partes (iguais) se queira. No caso do problema da trisseção do ângulo, com três desses paralelogramos é possível resolver o problema. Tal mecanismo podemos ver na figura 3.7.

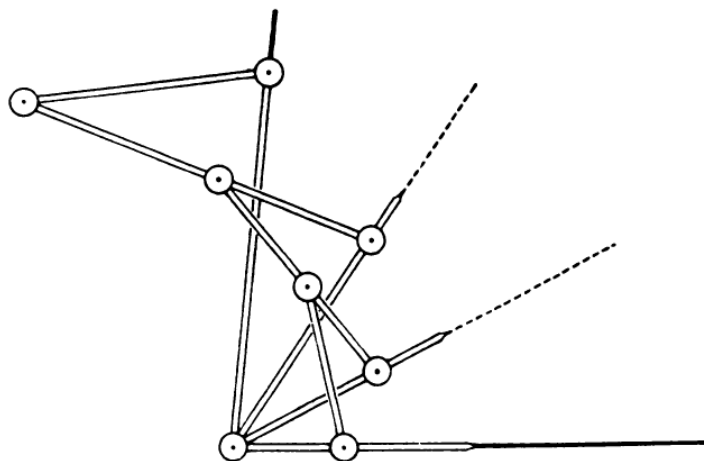


Figura 3.7: Mecanismos trisector com três paralelogramos cruzado unidos segundo a regra descrita - fonte: Cundy, 1961.

3.5 Proposta de atividade com o inversor de Peaucellier

Nessa seção será apresentada uma proposta de atividade de elaboração de um painel histórico sobre o inversor de Peaucellier contendo o mecanismo articulado. Serão também analisadas algumas propriedades da inversão no círculo ilustradas no painel.

3.5.1 Por quê construir esse mecanismo?

No cenário atual escolar, podemos notar um certo distanciamento entre teoria e prática dos saberes ali aprendidos. Quer seja pela falta de preparo do docente em lidar com novas tecnologias, ou pela falta de recursos adequados nessas unidades escolares. Essa desarmonia entre os conhecimentos aprendidos na teoria e as possíveis aplicações práticas têm levado os alunos cada vez mais ao desinteresse pelos assuntos de Matemática ali aprendidos. É preciso, sempre que possível, dar significado ao que está sendo oferecido na escola. Sabemos que essa ruptura entre teoria e prática, já está consolidada a muito tempo, o desafio enfrentado pela educação atualmente, começa por encontrar barreiras desde o planejamento anual do professor até a articulação de projetos dentro da unidade escolar. Mediante essa defasagem acumulada (por numerosos motivos) do aprendizado desde as séries iniciais até as séries finais do ensino básico, obriga o professor a escolher objetos do conhecimento dentro de um *documento de priorização curricular*² que afasta cada vez mais a teoria da prática. Alinhar a teoria com a prática não é nada fácil, pois a forma como os conteúdos foram organizados não nos subsidia tanto para tal. Entretanto, reconhecemos que ter uma educação que promova o desenvolvimento intelectual integral dos alunos perpassa primeiro pela necessidade de formação de docentes, para que estes sejam capacitados a lidar com o ensino/aprendizagem dos chamados nativos digitais. Sabemos hoje que o papel do professor incorpora mais de mediação do que meramente transmissão de conhecimento. Segundo (Antonio, 2022), o professor do século XXI deve “[...] substanciar movimentos que estimulem o aluno a trocar experiências e interagir com colegas, e, assim, despertar suas potencialidades cognitivas”.

Aqui proporemos uma atividade que visa mostrar os contextos em que aplicações de conhecimentos de geometria inversiva foram decisivos para se resolver um problema prático de engenharia atendendo às demandas tecnológicas da época. Nosso intuito é mostrar as aplicações práticas em diferentes tecnologias em que o inversor de Peaucellier pode contribuir. Propor atividades que visem ilustrar o emprego e os obstáculos científicos percorridos pelos matemáticos da época não é uma ideia tão nova assim. Reconhecer que o aluno é protagonista do seu aprendizado e que, nesse processo, atividades que o conduzam a aprender fazendo, já era uma ideia defendidas por um educador do século XVII: “Tudo

²Priorização curricular: Currículo da cidade. São Paulo.2021.

que deve ser feito, deve ser aprendido fazendo-o. [...] Assim, os alunos também deveriam aprender na escola a escrever escrevendo, a falar falando, a contar contando, etc. Depois as escolas são oficinas repletas de som de trabalho” (Comenius apud Mozo,2017).

Certamente, aprender pelo fazer na prática tem seus “ganhos pedagógicos,” isso conduz a investigar propriedades já estudadas de geometria básica, o que em certa medida traz uma proximidade entre cientista, inventor e alunos. Ressaltamos que esse processo de reconstruir um dispositivo que ilustre uma propriedade geométrica induz os alunos a perceberem as dificuldades enfrentadas em conciliar a teoria e a prática. Entender todo o processo de construção de tal mecanismo leva os alunos a mergulharem em investigações que, conseqüentemente, aumentarão seus conhecimentos. Nessa perspectiva, podemos observar o aluno como protagonista de seu processo de ensino/aprendizagem. Apresentar uma atividade em que os alunos podem reconstruir um dispositivo baseado em propriedades da inversão no círculo mostra uma “imagem” da matemática bem diferente do que estão acostumados em sala de aula, mostra uma Matemática que se envolve em questões do cotidiano das pessoas. Além disso, propor a construção e análise de seu funcionamento, pelo exercício de explicar por que o mecanismo funciona daquela maneira e suas condições de funcionamento, desenvolverá nos alunos habilidades visuais, bem como o de fazer conjecturas e prová-las (Mozo,2017).

Descrição da atividade

Para construir o painel ilustrativo com o inversor de Peaucellier, utilizaremos duas folhas de papel paraná de espessura média, nove palitos (que podem ser de sorvete ou utilizados em salão de beleza), parafusos, arruelas e porcas para fixação, além de canetinha, impressão em papel e todo recurso de pintura e escrita para montá-lo. Veja a figura 3.9.

1. O mecanismo terá sete hastes, $AD = AE$, $CD = DF = FE = EC$ e BC . As hastes AD e AE serão formadas por dois palitos cada uma. Com o ponto A comum às duas. Veja a figura 3.8.

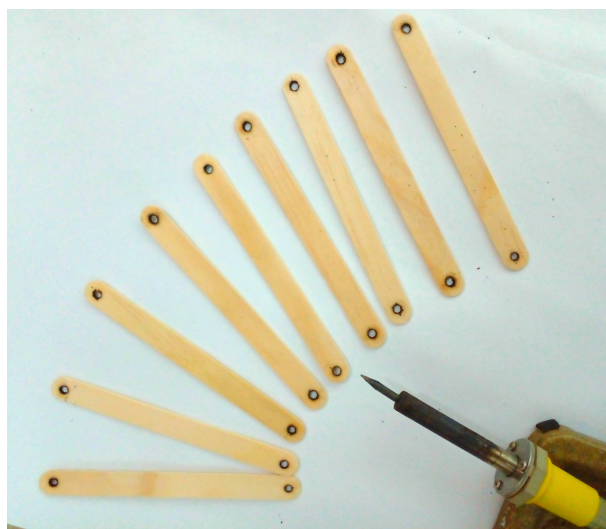


Figura 3.8: Palitos de estética de 14 cm

2. Para realizar os furos nos palitos onde iremos fixar parafusos de modo que essa junção fique articulada, utilizaremos um ferro de solda para a perfuração (poderá ser utilizada uma broca 3/32 e furadeira). Vimos que a utilização do ferro de solda é uma solução mais viável. Não daremos medidas exatas da distância do furo à borda do palito, nem do diâmetro do furo, mas a sugestão é fazer uma furação próxima à borda do palito de modo a aproveitar o máximo do seu tamanho, cuidando para que o furo não fique próximo demais da borda comprometendo a estrutura do palito. Veja a figura 3.8.
3. Montamos o inversor, unindo dois palitos para as duas hastes maiores e um palito para cada haste menor. A haste que liga o ponto C ao ponto B deverá ter comprimento de 17,5 cm. Veja a figura 3.10.
4. Na haste BC , serão feitas três furos onde o ponto B assumirá três posições diferentes, a que chamaremos posição 1 (a 10 cm do ponto A), posição 2 (a 2,5 cm do ponto A) e posição 3 (a 13 cm do ponto A). Esses furos serão centro de três círculos tangentes internos à circunferência de inversão, que serão transformados em dois arcos e uma



Figura 3.9: Parafusos, porcas e arruelas $\frac{1}{8}$

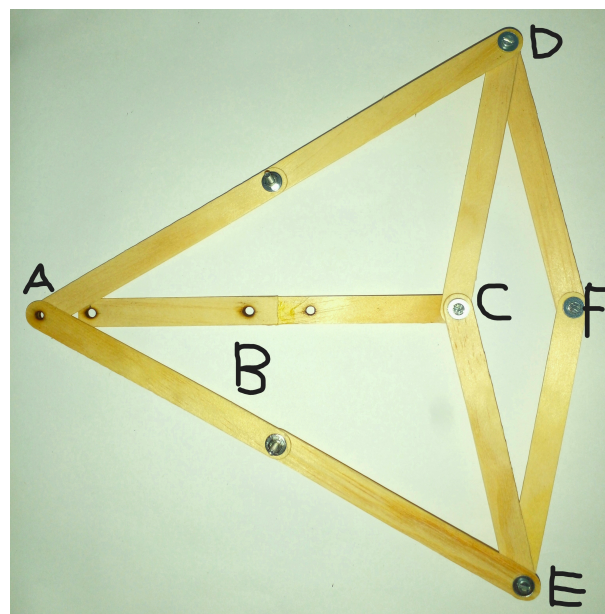


Figura 3.10: Para as barras maiores usaremos dois palitos cada, parafusando de modo invertido aos outros parafusos

reta tangentes em um mesmo ponto F . O círculo vermelho R , de centro P_1 e raio P_1C , passa pelo centro da circunferência de inversão, será transformado na reta vermelha R' . O círculo azul S , de centro P_2 e raio P_2C , será transformado no arco côncavo S' (de um observador em A), já o círculo verde T , de centro P_3 e raio P_3C , será transformado no arco convexo verde T' . Veja a figura 3.11.

- Serão impressas imagens importantes do uso do inversor de Peaucellier em mecanismos de conversão de movimentos em inventos históricos. Veja a figura 3.12.

3.5.2 Discussão das propriedades de inversão na atividade

Consideramos os pontos A , B , C e F sobre uma mesma reta horizontal. O ponto A será o centro de inversão, onde serão fixadas as duas hastes maiores do inversor. O ponto B

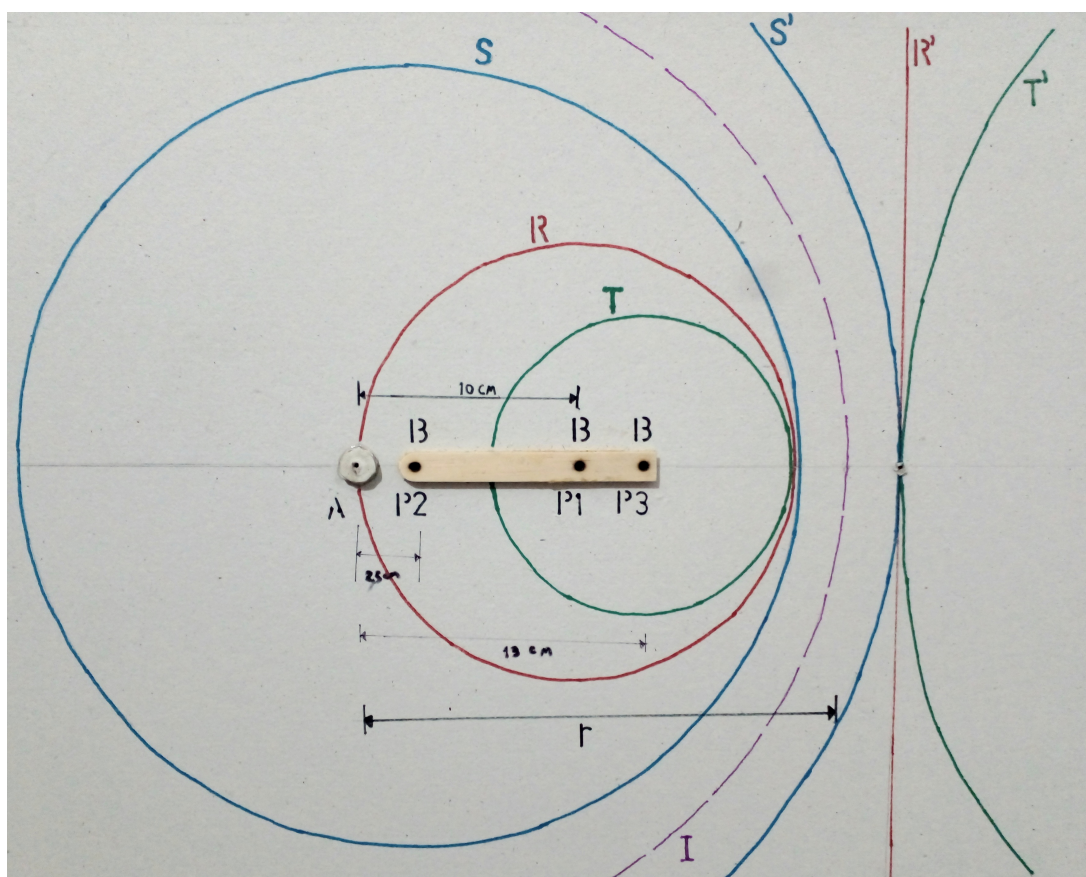


Figura 3.11: Distâncias das posições P_1, P_2, P_3 ao ponto A

será o outro ponto fixo, porém essa fixação poderá estar em três posições diferentes: P_1 , P_2 e P_3 na figura 3.11. A posição 1 ($AB = BC = 10$ cm) será o centro de um círculo (de centro $B = P_1$ e raio BC) que passa pelo centro de inversão e, conforme as propriedades da inversão, esse círculo descrito pelo ponto C será transformado em uma reta descrita pelo ponto F (inverso de C em relação ao círculo \mathcal{I} de centro A e de raio arbitrário r). Tomaremos essa posição como referência para as demais posições em relação ao ponto A , que poderá ser menor, maior ou igual a 10 cm. Na posição 2 ($BC > 10$ cm), o ponto $B = P_2$ estará a 2,5 cm do ponto A e, nesse ponto, o mecanismo levará um círculo que o ponto C descreve, não passando pelo centro de inversão, em outro círculo descrito por F . Já na posição 3 ($BC < 10$ cm) o ponto $B = P_3$ estará a 13 cm do ponto A e o mecanismo transformará um círculo descrito pelo ponto C em outro descrito pelo ponto F . Veja a figura 3.11.

Assim, pelas propriedades de inversão circular, que mapeia círculo em reta, círculo em círculo, podemos concluir que o ponto F é inverso do ponto C com respeito ao círculo \mathcal{I} . O importante nessa atividade é mostrar através de um mecanismo, as propriedades da inversão circular. Estamos interessados no que essa transformação pode fazer.

As imagens que estão no painel (figura 3.12), são de invenções mecânicas que usam o princípio do inversor de Peaucellier em diferentes problemas de engenharia em diver-

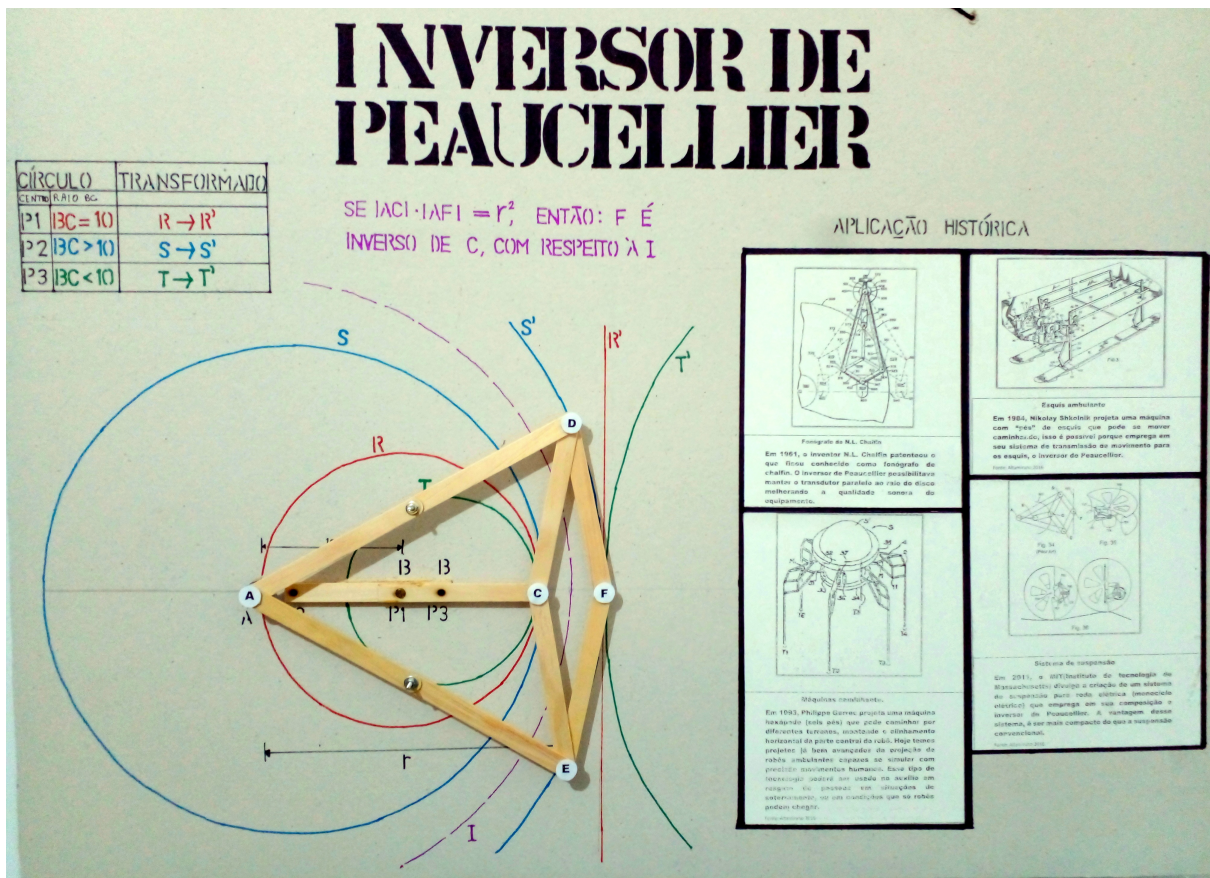


Figura 3.12: Painel completo

nas épocas, essas imagens tem o intuito de mostrar soluções práticas de engenharia em importantes projetos.

Na transformação de inversão, pontos que estão mais longe do centro de inversão são transformados em pontos mais próximos do centro de inversão. Já pontos próximos do centro de inversão são levados mais longe, e se tendermos um ponto ao centro de inversão, seu transformado irá tender ao infinito. Como vemos na figura 3.13, embora B_2 esteja mais próximo de A do que B_3 , o transformado B'_2 está bem mais longe de A do que o transformado B'_3 .

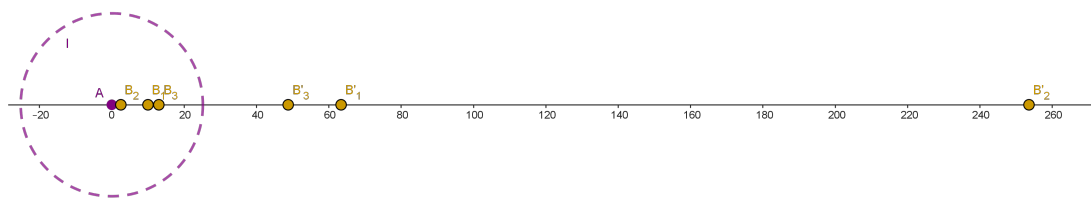


Figura 3.13: Comparação das inversões do ponto B.

Outro fato importante das transformações dos pontos B_1, B_2, B_3 , que são centros dos círculos R, S, T , respectivamente, é que seus transformados não são centros dos círculos inversos por \mathcal{I} . Por exemplo, na figura 3.14, o círculo \mathcal{C} , de centro O e diâmetro EF , não

passa pelo centro de inversão A (centro do círculo de inversão de raio r) e é transformado no círculo \mathcal{C}' de centro H e diâmetro $E'F'$. O ponto O é ponto médio de EF , logo tem-se $AO = \frac{AE + AF}{2}$. A definição do inverso de O exige que $AO' = \frac{2r^2}{AE + AF}$. Por outro lado, H é o ponto médio de $F'E'$, pois é centro do círculo invertido \mathcal{C}' , logo tem-se $AH = \frac{AF' + AE'}{2}$. Usando nessa expressão a definição de inversão de F' e E' , obtém-se $AH = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\frac{r^2}{AE} + \frac{r^2}{AF}} \right)$. Esse resultado para AH é diferente de AO' obtido acima. Logo H não é inverso de O , pois não cumpre a definição de inversão para O . É um ponto do segmento $E'F'$ mas não é o centro de \mathcal{C}' .

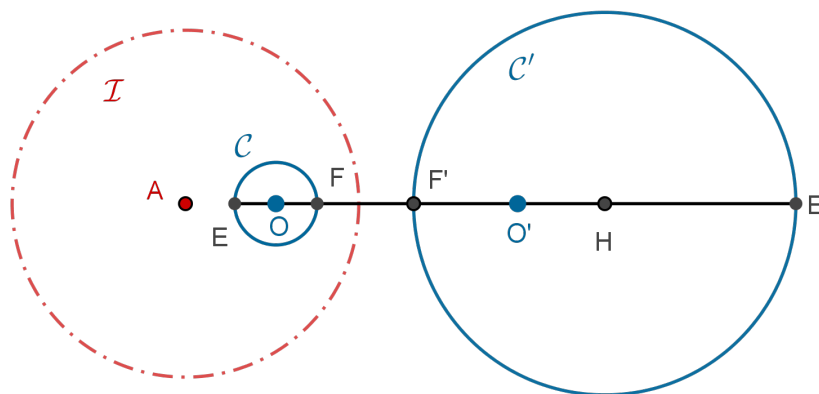


Figura 3.14: Centros não são levados em centros pela inversão.

3.6 Problematização

Nesta seção apresentamos perguntas e respostas acerca da inversão geométrica que podem despertar reflexões adicionais através do uso do painel da atividade proposta, aonde discutiremos propriedades da transformação de inversão circular. Aqui utilizaremos técnicas de construções geométricas e conceitos de geometria plana estudados no ensino básico. Esta problematização fica destinada à reflexão do professor, que poderá julgar fazer as adaptações necessárias para aplicar a seus alunos.

3.6.1 Relação equivalente entre quádrupla harmônica e inversão de ponto

Existe uma relação importante entre a transformação de inversão e um conceito que apresentaremos brevemente em seguida, que é o de quatro pontos colineares formando uma *quádrupla harmônica*. Veja figura 3.19.

O conceito de razão harmônica entre pontos

Dois pontos N e M *dividem harmonicamente* o segmento CF (ou se diz que C , F , N e M formam uma quádrupla harmônica) quando a *razão cruzada* entre esses pontos for 1, isto é:

$$\frac{\left(\frac{CM}{FM}\right)}{\left(\frac{CN}{FN}\right)} = 1.$$

De forma equivalente pode-se dizer que N é conjugado harmônico de M em relação a CF na razão κ se um dos pontos, digamos o ponto M , divide internamente o segmento CF , e um ponto fora dele, N , divide externamente CF na mesma razão:

$$\kappa = \frac{|CM|}{|FM|} = \frac{|CN|}{|FN|}.$$

Pela simetria da razão cruzada, se M e N dividem harmonicamente CF , então, C e F dividem harmonicamente NM .

Mostraremos como podemos construir usando apenas régua o conjugado harmônico

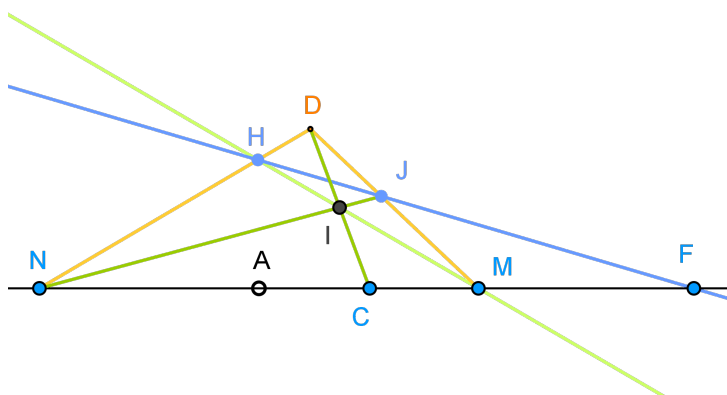


Figura 3.15: Construção do conjugado harmônico de C

Começamos fixando o segmento NM com C dividindo esse segmento internamente, mas distinto do seu ponto médio A . Toma-se o ponto D e o ponto I , ambos externos à reta \overleftrightarrow{NM} , porém colineares com C . Liga-se N à D e M à D . Une-se NI , prolongando até cortar MD em J . Une-se MI , prolongando-o até cortar ND em H . Finalmente, a reta que liga os pontos H e J corta a reta que passa por \overleftrightarrow{NM} em F . Esse ponto é o conjugado harmônico de C em relação à NM . Veja a figura 3.15.

Agora, se C é o ponto médio de NM , procedendo da mesma forma com as construções geométricas feitas anteriormente, a reta que passa por \overleftrightarrow{HJ} é paralela ao segmento NM . Nesse caso, ou dizemos que não existe o conjugado F no *plano euclidiano*, ou que F é o *ponto ideal* no qual se cruzam as retas \overleftrightarrow{HJ} e \overleftrightarrow{NM} .³ Veja a figura 3.16.

³Ponto ideal (ou Ponto no infinito) corresponde a um constructo da *geometria projetiva* na qual se

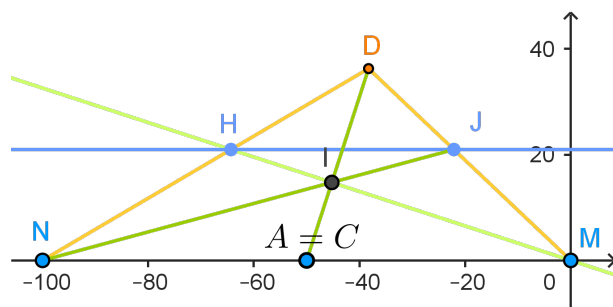


Figura 3.16: Construção do conjugado harmônico com o ponto F como o *ponto ideal*

Vamos expressar a ocorrência de quádruplas harmônicas com respeito à inversão na circunferência na forma do teorema a seguir.

Proposição 3.6.1. *Os pontos C e F são um o inverso do outro com respeito a uma circunferência com pontos diametraes N e M colineares com C e F se e somente se C e F dividem harmonicamente NM .*

Demonstração. Começaremos fixando um segmento NM , com seu ponto médio A (veja a figura 3.17). Vamos inicialmente assumir que dois pontos C e F dividem harmonicamente NM e mostraremos que C e F também satisfazem a definição de inversão em um círculo de centro A e pontos diametraes N e M , colineares com C e F :

$$\frac{NC}{MC} = \frac{NF}{MF} = \kappa.$$

Sem perda de generalidade, se fizermos $\kappa > 1$, podemos usar uma configuração de ordem dos pontos como a da figura 3.17, necessária para escrever o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{NC}{MC} = \frac{NF}{MF} &\Rightarrow \frac{NA + AC}{AM - AC} = \frac{NA + AF}{AF - AM} \\ &\Rightarrow (NA + AC)(AF - AM) = (NA + AF)(AM - AC). \end{aligned}$$

Como $NA = AM$, temos que:

$$\begin{aligned} (NA + AC)(AF - NA) &= (NA + AF)(NA - AC) \\ \Rightarrow NA \cdot AF - AC \cdot NA + AC \cdot AF - NA^2 &= NA^2 - AC \cdot NA + NA \cdot AF - AC \cdot AF \\ &\Rightarrow 2 \cdot NA^2 = 2 \cdot AC \cdot AF \\ &\Rightarrow NA^2 = AC \cdot AF \end{aligned}$$

estende o plano euclidiano acrescentando, por definição, um ponto para cada feixe de retas paralelas, as quais se diz que se encontram no *Ponto ideal* (Eves, 1965).

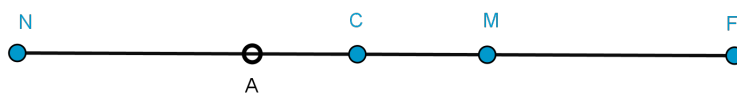


Figura 3.17: Ilustração de C e F dividindo harmonicamente NM

Esse resultado significa que C e F satisfazem a definição de inversão em uma circunferência de centro A e pontos diametraes N e M , colineares com C e F . A implicação contrária da demonstração pode ser obtida de forma análoga retomando na sequência oposta a sequência algébrica apresentada. \square

Vale aqui ressaltar que, um ponto e seu inverso podem formar com outros dois pontos (devidamente posicionados) uma quádrupla harmônica, mas o recíproco não é verdadeiro. Podemos ter a formação de quádruplas harmônicas sem que dois de seus pontos conjugados sejam inversos um do outro, para que esses pontos sejam inversos devem com um determinado centro, satisfazer a definição de inversão circular.

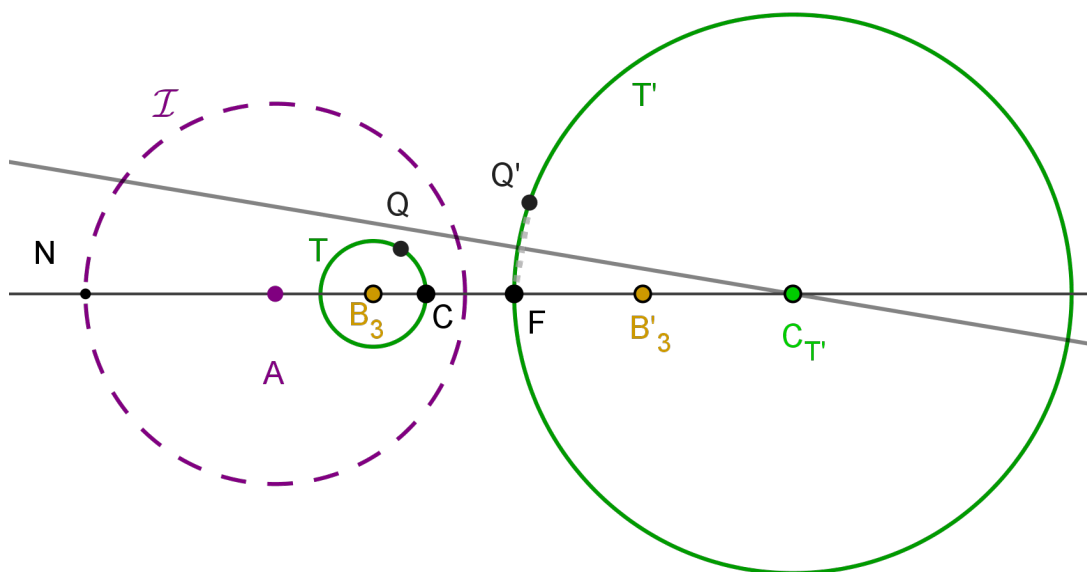


Figura 3.18: Centros de círculos não são levados em centros de círculos inversos

3.6.2 Problemas

1. Sabendo que a transformação de inversão circular não leva centro em centro, ou seja, o centro do círculo invertido não é o ponto de inversão do centro do círculo original. Considerando já feitos através do mecanismo o traçado dos círculos invertidos S' e T' , Usando régua e compasso, encontre os centros de S' e T' , que chamaremos de $C_{S'}$ e $C_{T'}$, respectivamente.

2. Sabendo que M e N são extremos do diâmetro do círculo de inversão, e que esses pontos dividem harmonicamente o segmento CF , tem-se: $\frac{|CM|}{|FM|} = \frac{|CN|}{|FN|} = \kappa$. Com uso de uma régua, encontre as medidas utilizadas no painel para poder determinar o valor de κ .
3. Se $|AC| \cdot |AF| = r^2$, é possível que F seja inverso de C em relação à circunferência de inversão \mathcal{I} de raio r qualquer, para $\kappa = 1$?
4. Podemos ter um mecanismo inversor se o valor de κ for 1?

Soluções

1. Encontraremos o centro $C_{T'}$, para o caso $C_{S'}$ é análogo. Na figura 3.18, o círculo T é invertido por \mathcal{I} no círculo T' . Como queremos encontrar o centro de T' , tomemos dois pontos F e Q' em T' . Encontrando a mediatriz do segmento FQ' que irá interceptar a reta que passa pelo segmento CF , isso nos dará o centro de T' , como B'_3 é o ponto inverso de B_3 (centro de T), podemos ver que o inverso do centro de T não é o ponto $C_{T'}$, como já foi enfatizado na seção anterior.
2. Para determinarmos o valor de κ no mecanismo da figura 3.12, tomamos as medidas $|FM| = 2,64$ cm e $|CM| = 2,36$ cm no painel. Sabendo que: $\frac{|CM|}{|FM|} = \kappa$, então $\kappa = 0,89$. $0 < \kappa < 1$.
3. Se F é inverso de C , então M e seu conjugado harmônico N em relação a CF satisfazem a relação: $\frac{|CM|}{|FM|} = \frac{|CN|}{|FN|} = \kappa$. Pode ocorrer $\kappa = 1$ em dois casos limite:
 - i*) com N tendendo ao infinito (à esquerda) mantendo-se C e M fixos.
 - ii*) fazendo C tender para M , mantendo N e M fixos.

Para analisar esses casos, vamos adotar um eixo x passando pelos pontos de interesse, nos permitindo atribuir as seguintes coordenadas u , a , c , w e f para os pontos N , A , C , M e F , respectivamente (veja a figura 3.19). Sendo assim, κ pode ser escrito em termos dessas coordenadas: $\frac{|CN|}{|FN|} = \frac{c-u}{f-u} = \kappa$. A definição de inversão $|AC| \cdot |AF| = NA^2$ fica $(c-a) \cdot (f-a) = (a-u)^2$. Substituindo $a = (u+w)/2$ por ser ponto médio de NM e isolando f em termos das demais coordenadas, tem-se: $f = \frac{2cu}{4c-2u}$ (Mesquita, 2022). Assim, os casos (*i*) e (*ii*) correspondem aos seguintes limites:

- i*) fazendo $u \rightarrow -\infty$, mantendo-se c e w fixos, obtém-se $f = -c$ e $\kappa = 1$. A circunferência de inversão se reduz a uma reta passando pelo ponto M . E esse ponto M passa a ser o ponto médio do segmento CF . O conjugado harmônico

de M não existe no contexto euclidiano (N tende ao infinito) a menos que extendamos o *plano euclidiano* acrescentando “pontos no infinito” formando o *plano projetivo*⁴. Nesse caso o ponto N é um ponto no infinito definido nesse contexto (Greenberg, 1994. P. 264).

ii) fazendo $c \rightarrow w$, mantendo u e w fixos, obtém-se $f = w$ e $\kappa = 1$.

4. Como visto no item anterior, quando $\kappa = 1$ no caso (i), a circunferência de inversão é uma reta passando por um dos extremos de seu diâmetro. AD ficaria paralelo à AE no inverso da figura 3.12, mas essa configuração não é possível para o inversor, pois as hastes maiores dele teriam que ter comprimento infinito. Quando $\kappa = 1$ no caso (ii), F e C estão sobre o ponto M no círculo de inversão, o que corresponde a uma configuração em que o inversor deve ter dimensões tais que $m^2 = n^2 + AM^2$ na figura 3.3.

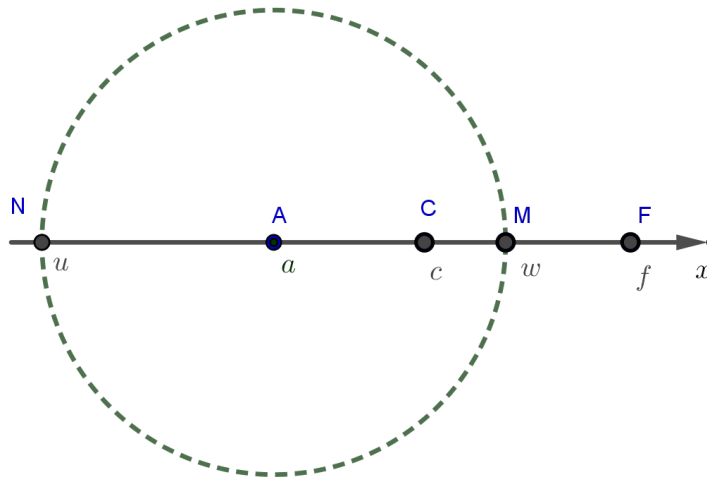


Figura 3.19: Atribuição de coordenadas à quádrupla harmônica N , C , M e F . A é ponto médio de NM .

3.7 Duas construções usando apenas régua

Vamos aqui mostrar duas construções da inversão de um ponto em relação a um círculo usando apenas régua não graduada. Nos limitaremos aqui apenas a mostrar o passo a passo dessas duas construções. Embora não daríamos detalhes das justificativas dessas construções, elas estão relacionadas com a propriedade de pontos harmonicamente conjugados, discutidos anteriormente.

Primeiro mostraremos como encontrar o ponto inverso de um ponto exterior ao círculo.

⁴Para detalhes dessa discussão, poderá ser consultado em Greenberg, 1994. P.263-266; também poderá consultar Mesquita, 2022. P. 33-37, e uma boa discussão sobre o infinito capítulo 2

3.7.1 Construção do inverso de um ponto exterior ao círculo

- Passo 1: (Figura 3.20)

Tomado um ponto P exterior ao círculo \mathcal{I} , por esse ponto traçam-se duas retas secantes a \mathcal{I} determinando os pontos L, M, N, O .

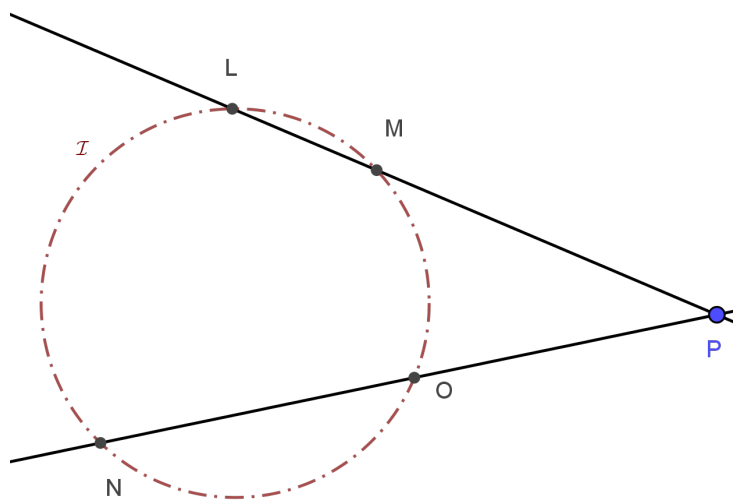


Figura 3.20: Inversão de ponto exterior somente com régua

- Passo 2: (Figura 3.21)

Unem-se os pontos L, M e N, O , formando o quadrilátero L, M, N, O . Prolongam-se as arestas LN e MO , de modo que se encontrem em S .

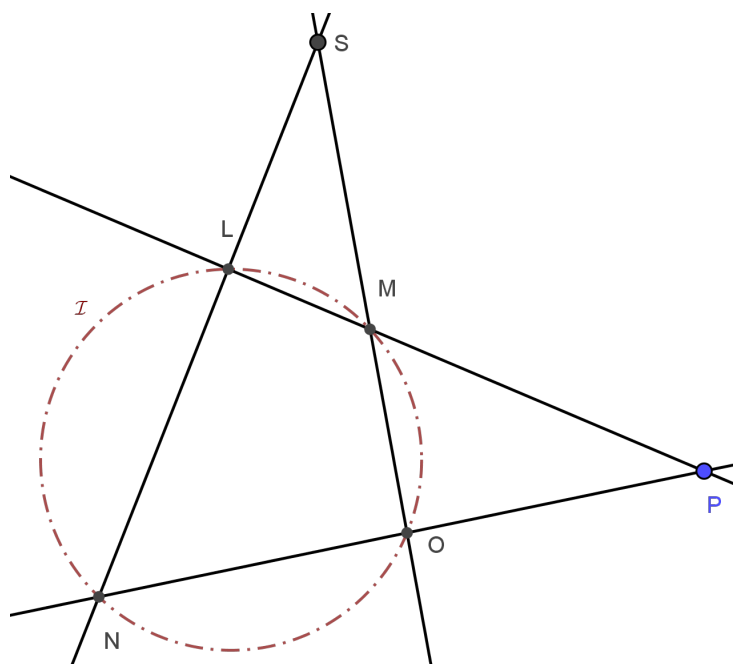


Figura 3.21: Inversão de ponto exterior somente com régua

- Passo 3: (Figura 3.22)
Une-se L à O e M à N , cruzando no ponto Q .

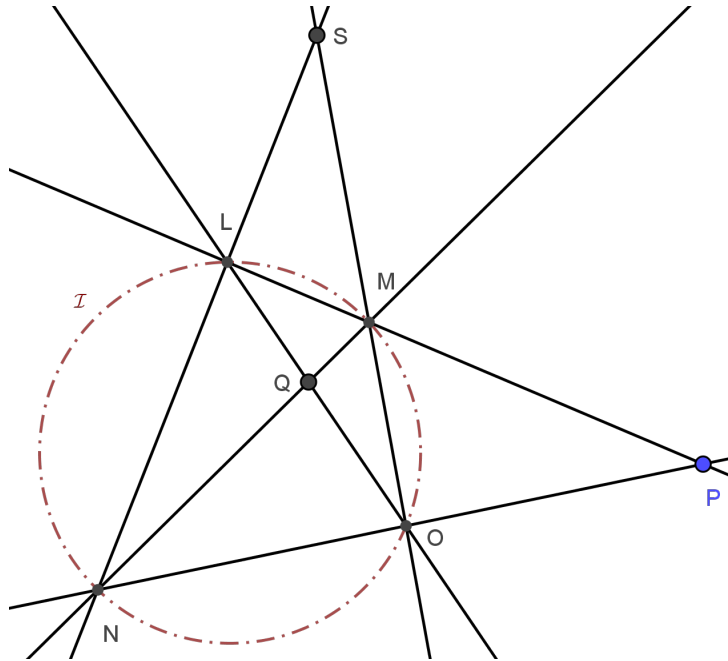


Figura 3.22: Inversão de ponto exterior somente com régua

- Passo 4: (Figura 3.23)
Constroi-se uma reta n que passe por S e Q .

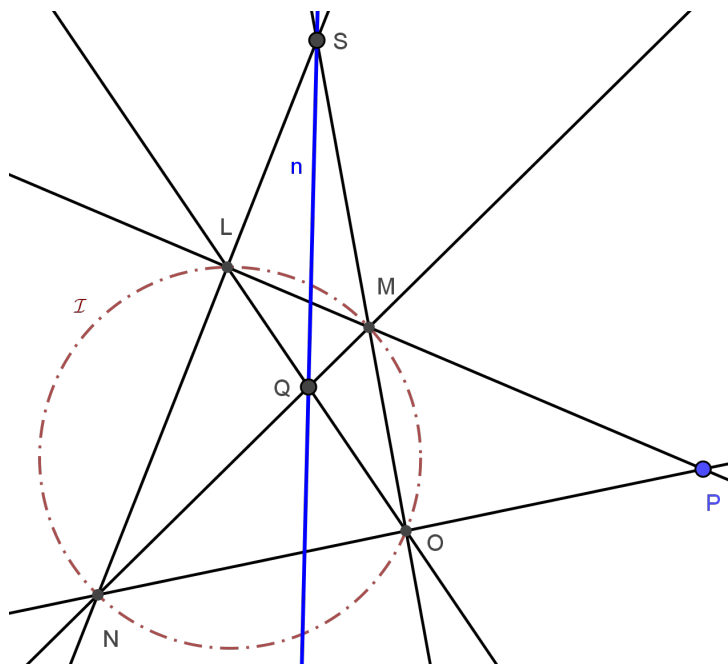


Figura 3.23: Inversão de ponto exterior somente com régua

- Passo 5: (Figura 3.24)
Essa reta n cruza a diametral FP perpendicularmente em P' , sendo esse ponto o

inverso de P .

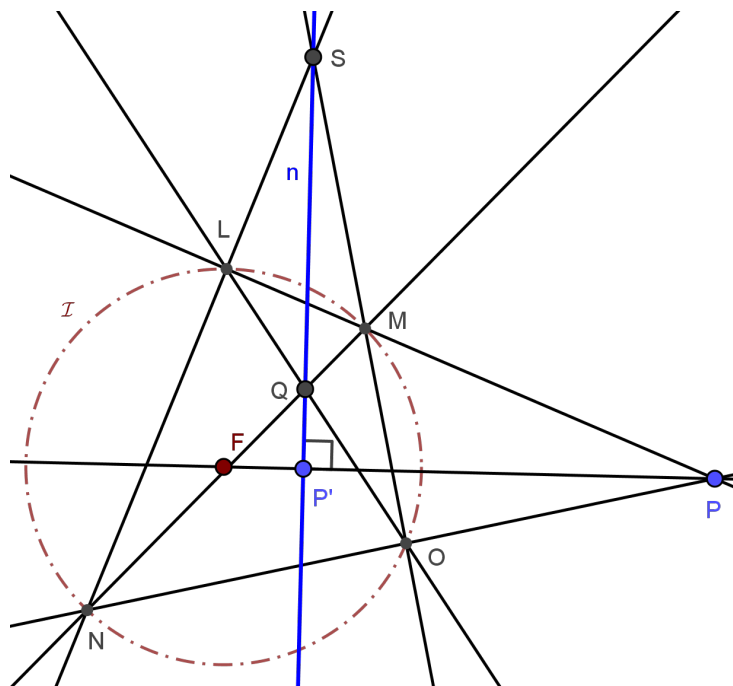


Figura 3.24: Inversão de ponto exterior somente com régua

3.7.2 Construção do inverso de um ponto interior ao círculo

- Passo 1: (Figura 3.25)

Seja C um ponto interior ao círculo \mathcal{I} , mas não o seu centro. Traçam-se duas retas quaisquer passando por C de modo que cruzem \mathcal{I} nos pontos D, E, F, H .

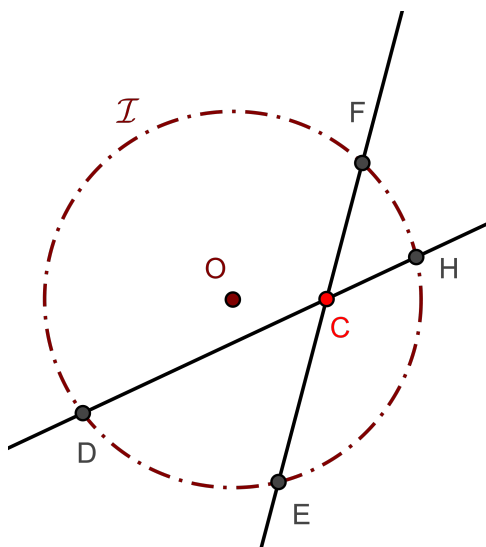


Figura 3.25: Inversão de ponto interno somente com régua

- Passo 2: (Figura 3.26)

Constroem-se duas retas, uma passando por DF , e outra passando por EH , que

irão cruzar-se no ponto A . Constroem-se mais duas retas, uma passando por FH e a outra por DE , que se encontrarão em B .

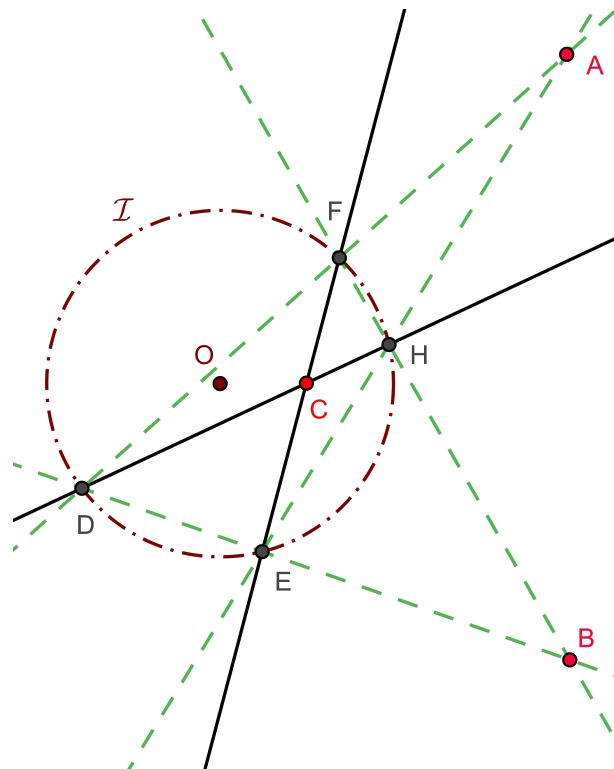


Figura 3.26: Inversão de ponto interno somente com régua

- Passo 3: (Figura 3.27)
Une-se A e B com um segmento perpendicular à reta diametral OC em C' . Este por sua vez é o inverso de C .

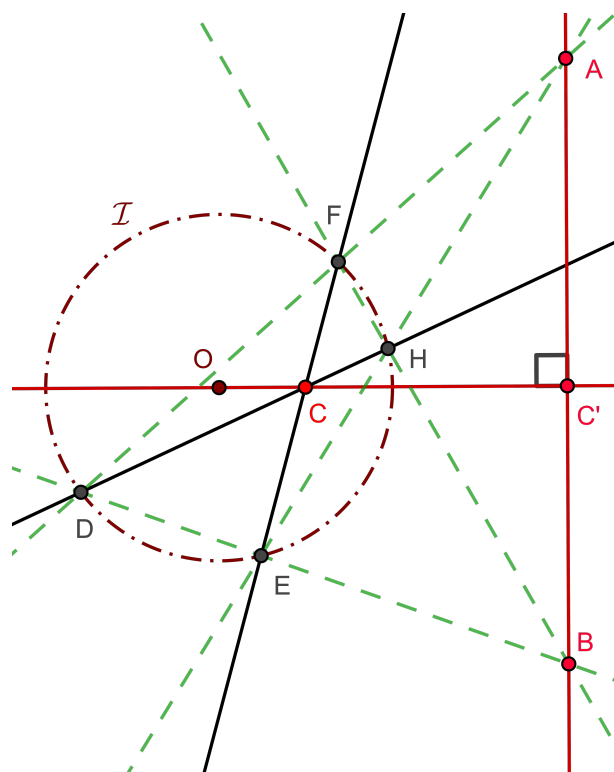


Figura 3.27: Inversão de ponto interno somente com régua

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho as propriedades fundamentais da inversão na circunferência, bem como a aplicações dessa transformação geométrica ao longo da história, seja na Matemática, na Engenharia ou na Tecnologia. As aplicações desta transformação geométrica não se limita somente a essas áreas do conhecimento, mas também à robótica, que vem resgatando no estudo de seus protótipos de máquinas ambulantes, maneiras aprimoradas de utilização desta transformação geométrica através da incorporação do inversor de Peaucellier na geometria dinâmica do movimento robótico.

Como o desafio escolar é também o de integralizar o currículo, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo ao aluno, trouxemos aqui propostas que mostram essa interligação a várias áreas do conhecimento, nas quais mostramos a importância dessa área da Matemática no dia a dia do aluno. Por isso acreditamos e valorizamos o resgate do ensino da Geometria no planejamento das aulas do ensino básico, estando esse no escopo de prioridades do ensino. Nesse esforço, mostramos que o “ganho” em aprender Geometria inversiva vai desde reconhecer novos espaços geométricos até aplicações em outras áreas do conhecimento. Estamos aqui falando que esse processo envolve aprender e manipular muitos elementos das múltiplas linguagens, que permite ampliação da percepção-cognição espacial, da proficiência do raciocínio lógico, do letramento digital, por exemplo, por meio do uso do software de geometria dinâmica como o Geogebra, tornando o ensino mais dinâmico, mais analítico, mais compreensível, conseqüentemente, mais significativo.

Este trabalho teve o objetivo de apresentar alguns recursos ao professor que pretende ampliar as possibilidades de ensino usando a Geometria Inversiva. As informações e as propostas de atividades aqui contidas não estão fechadas ou seja, deixaremos a criatividade do professor adaptá-las à sua turma, muito embora procuramos dar sugestões compatíveis à prática de sala de aula, e certamente não tenha sido possível aqui esgotar todo o assunto sobre Geometria Inversiva, uma vez que essa dissertação propôs ser um recurso didático à formação do professor do ensino básico e também por ser um assunto amplo que se conecta com diversas áreas do conhecimento.

Referências Bibliográficas

ADAMS, Robert A.; ESSEX, Christopher. **Calculus: A complete course**. 7 ed. Toronto: Pearson, 1940.

ALTAMIRANO, Diego Alfredo Núñez. **Desenrrolo de una unidad de propulsión basada en un mecanismo de línea recta exacta aplicada en vehículos múltipodos**. 2016. 204 p. (Tesis, programa del doctorado en ciencias en ingeniería mecánica) - Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia: 2016. Disponível em <https://www.docsity.com/es/unidad-de-propulsion-basado-en-mecanismo-de-linea-recta/7608582>. Acesso em 27 abr.2024.

AUDIN, Michèle. **Géométrie**. Collection enseignement sup. Strasbourg: EDP Sciences, 2006.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BANKS, Frank; BARLEX, David. **Teaching STEM in the secondary school: Helping teachers meet the challenge**. 2 ed. New York: Routledge, 2021.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. A área de Matemática, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 05 jan. 2024.

BRYANT, John; Cris Sangwin. **How round is your circle? Where engineering and mathematics meet**. New Jersey: Princeton University Press. 2008.

BUSSI, M. G. B. **Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics**. Documenta Mathematica, v. extra, n. 3, p.735-746, Bielefeld, 1998. Disponível em: <http://eudml.org/doc/231260>. Acesso em: 10 dez. 2024.

CASTRO, Luciano G. M. **Introdução a geometria projetiva**. Revista Eureka - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, n. 8, p. 16 - 27, mai. 2000.

CUNDY, H. Martyn; ROLLETT, A.P. **Mathematical models**. 2 ed. Oxford: Oxford University press, 1961.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar 9: Geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

- DIJKSMAN, E. A. **A way to generalize Peaucellier's invensor**. Bucharest, v. 1, n.10, p. 73 - 81, jan. 1993. Disponível em: <https://research.tue.nl/en/publications/a-way-to-generalize-peaucelliers-invensor>. Acesso em: 14 out. 2023.
- EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: editora Unicamp, 2011.
- EVES, Howard. **A Survey of Geometry**. V.2, Boston: Allyn and Bacon, inc, 1965.
- GREENBERG, Marvin J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history**. 3 ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.
- GRAY, Jeremy. . **Worlds Out of Nothing: a Course in the History of Geometry in the 19th Century**. Springer Undergraduate Mathematics Series. London: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-060-1.
- LINARES, Juan López. **Transformação de inversão: Teoria, exercícios de construção geométrica, problemas olímpicos e aplicações**. Pirassununga: Faculdade de zootecnia da USP, 2022. ISBN: 978-65-87023-25-0. DOI: 10.11606/9786587023250.
- MESQUITA, Raul Rabello. **Geometria Inversiva**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2022.
- MOISE, Edwin E. **Elementary geometry from an advanced standpoint**. 3 ed. New York: Addison-wesley publishing company, 1990.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II: Métrica plana**. Rio de Janeiro, FC e Z livros, 2002.
- MOZO, Javier Manzano; GARCÍA, Melchor Gómez; FERNÁNDEZ, Jorge Mozo. **Mecanismos articulados: Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM**. Innoeduca International Journal of Technology and Educational Innovation.v.3 n.1 p.15-27, jun. 2017. DOI: 10.24310/innoeduca.2017.v3i1.1973.
- OSTERMANN, Alexander. Wanner, Gerhard. **Geometry by its History. Undergraduate Texts in Mathematics, readings in Mathematics**. Innsbruck: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-29163-0.
- PEDOE, Dan. **Geometry: A comprehensive course**. New York: Dover publications, inc, 1988.
- ROSENFELD, B. A.; SERGEEVA, N. D. **Stereographic Projection**. Moscow: Mir Publishers, 1977.
- STANKOVA, Zvezdelina; RIKE, Tom. **Uma década do círculo matemático de Berkeley: a experiência americana**. Tradução de Tertuliano Franco, 1 ed. Rio de

Janeiro: Impa, 2018.

VENEMA, Gerard A. **Foundations of geometry**. 2 ed. Boston: Pearson, 2012.

WELLS, David. **The penguin dictionary of curious and interesting geometry**. 1 ed. London: Penguin books group, 1991.

WOLFE, Harold E. **Introduction to non-Euclidean geometry**. New York: The Dryden Press, 1940.

Anexo I

GABARITOS

1

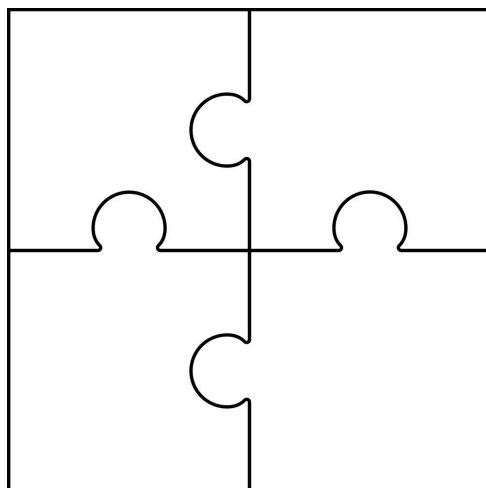


Figura I.1: Malha 2x2

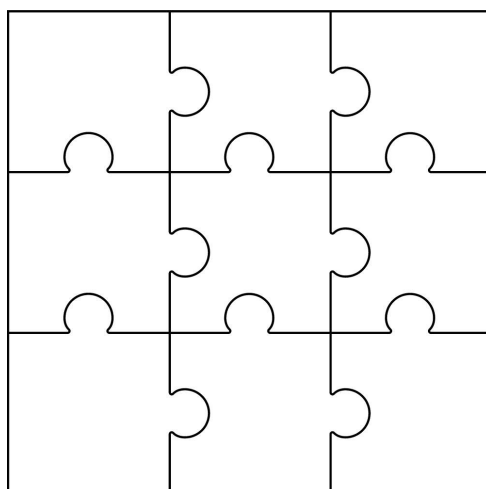


Figura I.2: Malha 3x3

¹Fonte: <https://www.artesanatopassoapassoja.com.br/molde-para-quebra-cabeca-para-imprimir/>