Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Pablo Souza da Silva

Metodologias Ativas no Ensino de Matemática: Um Estudo no Contexto da Reforma do Ensino Médio

Orientadora:
Profa. Dra. Irene Castro Pereira

Belém - PA
Dezembro de 2024

Pablo Souza da Silva

Metodologias Ativas no Ensino de Matemática: Um Estudo no Contexto da Reforma do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irene Castro Pereira.

Belém - PA
Dezembro de 2024

Pablo Souza da Silva

Metodologias Ativas no Ensino de Matemática: Um Estudo no Contexto da Reforma do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irene Castro Pereira.

Dissertação aprovada em 12 de dezembro de 2025.

Comissão Examinadora

Documento assinado digitalmente
IRENE CASTRO PEREIRA
Data: 20/01/2025 09:12:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Irene Castro Pereira (UFPA - Orientadora)

Documento assinado digitalmente
FRANCISCO PAULO MARQUES LOPES
Data: 20/01/2025 10:28:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes (UFPA)

Documento assinado digitalmente
ZENILDA BOTTI FERNANDES
Data: 21/01/2025 23:39:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Zenilda Botti Fernandes (UFPA)

Às Marias da minha vida.

Agradecimentos

Expresso minha profunda gratidão a minha orientadora Profa. Dra. Irene, cujo apoio, paciência e orientação foram fundamentais para a realização deste trabalho. Agradeço também aos professores do programa de pós-graduação que contribuíram significativamente para minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de curso, pela troca de experiências, apoio mútuo e incentivo durante os momentos de desafio.

Aos meus irmãos Larissa e Matheus, pelo amor, compreensão e suporte incondicional, essenciais para que eu pudesse chegar até aqui. A minha amiga e esposa Moema, pelo seu terno afeto e incentivo.

Por fim, agradeço às instituições e profissionais que contribuíram com a coleta de dados e execução deste estudo, tornando possível a realização desta pesquisa. A todos, meu sincero muito obrigado.

Ansiedades trágicas, supremas,
Na formação das grandes nebulosas...
Transubstanciações misteriosas
Gerando os organismos dos sistemas.
Focos de potentíssima atração
As moléculas e átomos dispersos,
Nos elementos de elaboração
De grandiosos e lindos universos. - Lira
Imortal (Chico Xavier)

Resumo

A reforma do ensino médio brasileiro, regulamentada pela Lei nº 13.415/2017, introduziu mudanças estruturais, como a flexibilização curricular, mas gerou questionamentos sobre sua capacidade de atender às demandas educacionais de forma equitativa e eficaz. Neste contexto, a presente dissertação analisa a aplicação de metodologias ativas, em especial a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), no ensino de Matemática, visando promover uma formação que contemple tanto habilidades práticas quanto teóricas. A pesquisa desenvolveu um modelo pedagógico aplicado à matemática financeira, baseado no estudo de financiamento e capitalização. As intervenções ocorreram em uma escola pública da região sudeste do Pará, com supervisão militar, considerando as particularidades do contexto local. A implementação incluiu aulas expositivas, trabalho em grupo e uso de tecnologias digitais, buscando integrar competências propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os resultados indicaram pequenos progressos no desempenho dos estudantes, especialmente na turma que participou da intervenção, evidenciando o potencial das metodologias ativas em engajar os alunos e promover a aprendizagem significativa. Contudo, desafios como a falta de tempo para planejamento docente e limitações estruturais das escolas públicas impactaram a implementação plena das propostas. Conclui-se que a efetividade do ensino de Matemática requer equilíbrio entre abordagens inovadoras e tradicionais, valorização do protagonismo estudantil e melhores condições de trabalho para os docentes. A pesquisa reforça a necessidade de articulação entre currículo, metodologias e políticas educacionais para superar as desigualdades e ampliar a qualidade do ensino no Brasil.
Palavras-chave: Metodologias ativas, Sequências, Novo ensino médio, Ensino.

Abstract

The reform of Brazilian high school education, regulated by Law No. 13,415/2017, introduced structural changes, such as curriculum flexibility, but raised questions about its ability to meet educational demands equitably and effectively. In this context, the present dissertation analyzes the application of active methodologies, particularly Problem-Based Learning (PBL), in Mathematics teaching, aiming to promote a holistic education that encompasses both practical and theoretical skills. The research developed a pedagogical model applied to financial mathematics, focusing on the study of financing and capitalization. Interventions were conducted in a public school in southeastern Pará, operating under military supervision, and took into account the specificities of the local context. The implementation included lectures, group work, and the use of digital technologies, seeking to integrate competencies proposed by the National Common Curricular Base (BNCC). The results showed modest improvements in student performance, particularly in the group that participated in the intervention, highlighting the potential of active methodologies to engage students and foster meaningful learning. However, challenges such as limited time for lesson planning and structural constraints in public schools hindered the full implementation of the proposals. It is concluded that the effectiveness of Mathematics teaching requires a balance between innovative and traditional approaches, the promotion of student protagonism, and better working conditions for teachers. The research underscores the need for alignment between curriculum, methodologies, and educational policies to overcome inequalities and enhance the quality of education in Brazil.
Keywords: Active methodologies, Sequences, High school reform, Mathematics teaching.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

A reformulação do ensino médio brasileiro concretizada pela Lei nº 13.415/2017 [1], embora inovadora em sua essência, suscita um leque de preocupações críticas, particularmente no âmbito do ensino da Matemática. Esta reforma, caracterizada pela flexibilização curricular através da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e itinerários formativos, enfrenta obstáculos consideráveis que questionam sua eficácia na prática.

A complexidade da implementação desta reforma revela-se no desafio de capacitar adequadamente os docentes para uma nova realidade pedagógica. Segundo César(2018) [9], a formação de professores emerge como um dos maiores obstáculos à efetivação do Novo Ensino Médio, demandando investimentos substanciais em capacitação e desenvolvimento profissional. Esta situação evidencia uma lacuna significativa entre a teoria e a prática educacional, comprometendo a qualidade do ensino.

A proposta de personalização do ensino colide com a realidade das desigualdades educacionais no Brasil. A flexibilização curricular, embora promissora, corre o risco de aprofundar as disparidades educacionais em um país marcado por intensas desigualdades sociais e de infraestrutura escolar, conforte Furtado (2020)[6]. Este cenário sugere que a reforma pode inadvertidamente exacerbar o abismo educacional, contrariando princípios de equidade e inclusão.

A influência de organizações internacionais, como o Banco Mundial, nas políticas de educação básica que ocorrem em países em desenvolvimento tem sido objeto de análise e crítica dentro do campo da sociologia da educação. Essas entidades exercem um papel significativo na modelagem das reformas educacionais, promovendo práticas e políticas que refletem uma orientação neoliberal. As políticas educacionais são cada vez mais influenciadas por lógicas de mercado, impulsionadas por organizações financeiras globais, segundo Ball (2012) [26] as reformas educacionais são frequentemente enquadradas dentro de uma retórica de necessidade de competitividade global, eficiência e responsabilidade, subsumindo a educação a objetivos de mercado.

Khamsi (2014) [4] amplia essa análise ao examinar o fenômeno do “policy borrowing”, ou “empréstimo de políticas”, onde países adotam modelos educacionais promovidos por organizações internacionais, muitas vezes sem uma consideração cuidadosa das especificidades e necessidades locais. A transferência de políticas educacionais entre diferentes contextos é mediada por pressões econômicas e políticas externas, muitas vezes levando a reformas que são descoladas das realidades locais.

No contexto brasileiro, a reforma do ensino médio pode ser vista sob essa lente crítica. Embora não haja evidências diretas de que o banco mundial tenha desempenhado um papel ativo na formulação específica do novo ensino médio, as diretrizes e recomendações dessa e de outras organizações internacionais influenciam o ambiente global de políticas educacionais. As reformas promovidas tendem a enfatizar a preparação para o mercado de trabalho, flexibilização curricular, aspectos alinhados às recomendações do Banco Mundial para a educação.

A adoção de tais políticas no Brasil, portanto, não ocorre em um vácuo, mas dentro de um contexto globalizado de influências políticas e econômicas. Como tal, a reforma do ensino médio reflete, em parte, uma agenda global de reformas educacionais que privilegia valores neoliberais como afirma Decker(2019) [17]. Apesar das complexas necessidades educacionais locais, esse alinhamento levanta questões importantes sobre a autonomia nacional em políticas educacionais e sobre a adequação dessas reformas às realidades socioculturais e econômicas do Brasil.

Nesse cenário, como proposta de fazer intermédio entre as diretrizes não tão modernizadoras do novo ensino médio e os reais obstáculos e demandas trazidas pelos estudantes da escola pública, nesse trabalho seguiremos trazendo dois modelos que tratam de sequências, sobretudo de progressão geométrica. Na primeira parte do trabalho, faz-se necessário, a fundamentação formal da Matemática elementar, essa abordagem se dá de forma tradicional, contrapondo algumas tendências que sugerem que conteúdos devem ser propostos naturalmente a partir de problemas geradores conforme Oliveira (2019)[23].

Os modelos serão aplicados em uma escola com supervisão militar, sendo um projeto de parceria da prefeitura municipal de Marabá-PA, Policia Militar e Secretaria de Estado de Educação. Vale ressaltar que a escola não é cívico militar, tão pouco militar, apenas se enquadra em um projeto de supervisão. Onde atuam a equipe pedagógica, apoio, administrativos da Secretaria de Estado de Educação e supervisores da Polícia Militar. O projeto dispôs de algumas escolas para aplicação do projeto, mas poucas obtiveram indicadores elevados.

Esse trabalho não busca refutar novas tendências de ensino de matemática, mas sim enfatizar a possibilidade de co-existência de modelos de ensino. Formas mais tradicionais de ensino possuem resultados efetivos em avaliações em larga escala como enfatiza o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), onde ficam muito bem posicionados diversos colégios militares federais do Brasil segundo Castro(2018) [2] , que são as maiores referências de ensino tradicional brasileiro.

Evidentemente não podemos afirmar que os resultados exitosos dessas escolas federais são apenas em detrimento da disciplina e do ensino tradicional, mas também consequências de altos investimentos estruturais e de formação dos servidores, bem como o ensino integral. Esse conjunto de fatores faz que os projetos de escolas com supervisão militar no estado do Pará sejam atrativos, pois se confundem com os projetos de escolas militares federais.

As propostas de intervenção apresentadas nesse trabalho buscam através da aprendizagem baseada em problemas (PBL) e Aprendizagens Significativas imergir os alunos em definições, conceitos e teoremas que possam instigá-los, não só pela aplicação, mas também pela própria matemática em si, sendo ela instigadora e desafiadora tornando os alunos sujeitos centrais na resolução do problema, e o professor o mediador fundamental para o processo de aprendizagem.

Os modelos propostos fazem uso de definições e teoremas, é evidente que o professor que aplicar os modelos em sala de aula deve selecionar esses conteúdos conforme o nível de aprendizado da turma. Os dois modelos fazem duas frentes opostas. O primeiro é um modelo econômico de financiamento que busca apresentar aos alunos o conceito de financiamento, juros e capitalização, para tanto, os alunos devem ter conceitos bem definidos anteriormente. Dessa forma, o aluno conhecerá temas presentes no cotidiano da vida que vislumbram.

O segundo problema, não sendo ele moderno ou cotidiano, trata-se de uma progressão geométrica já muito conhecida em livros didáticos, mas pouco compreendida entre os próprios alunos, pois talvez careça de processos investigativos e até mesmo da disposição de ferramentas matemáticas pelos alunos necessárias para a boa compreensão dos conceitos envolvidos. E por fim, teremos como produto desse trabalho essas duas propostas de intervenção no ensino médio.

Os modelos expostos são resultados de anos de aplicações e de prática pedagógica na escola pública. Ao fim das elucidações, como forma de um pequeno memorial, expomos alguns resultados exitosos das proposições de ensino, uma vez que realizamos o levantamento de indicadores nacionais como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica(IDEB) e resultados satisfatórios em competições como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) da instituição que foi realizada a intervenção pedagógica.

Esvaziamento curricular no novo ensino médio

Ao priorizar a flexibilidade e escolhas dos alunos, há um risco significativo de fragmentação curricular. Ao separar as disciplinas fundamentais em áreas específicas e permitir que os alunos escolham itinerários baseados em preferências individuais ou interesses imediatos, o modelo pode comprometer a aquisição de um conhecimento amplo e integrado. Essa fragmentação prejudica a formação integral, essencial para o desenvolvimento crítico e lógico dos estudantes, que depende de uma base sólida em diversas áreas do conhecimento.

Além disso, a flexibilização proposta pelo novo modelo de ensino médio pode reforçar desigualdades educacionais, já que os itinerários formativos não garantem a oferta uniforme de conteúdos essenciais em todas as instituições. Escolas com menos recursos podem oferecer itinerários limitados, focando em áreas técnicas ou de menor custo, enquanto escolas em contextos socioeconômicos mais favorecidos têm a possibilidade de manter disciplinas básicas e itinerários mais diversificados e aprofundados. Esse cenário cria uma educação segmentada, em que o acesso a uma formação integral e de qualidade varia significativamente entre os estudantes.

> "Quanto à questão sobre a escolha entre os itinerários pelos jovens, a única menção oficial é a constante do §12 do artigo 36, segundo o qual "as escolas deverão orientar os alunos no processo de escolha das áreas de conhecimento ou de atuação profissional previstas no caput". Esse artigo faz supor que a escolha de um ou mais itinerários é definida pelo aluno, mas deve-se considerar o pressuposto anterior, ou seja, o de que a definição dos arranjos curriculares a serem definidos por um dado ente federativo é prerrogativa desse, não do aluno, como apregoado pela propaganda oficial. Os alunos farão, no máximo, escolhas entre os itinerários formativos estipulados pelo sistema público de ensino do referido ente federativo."(FERRETTI, 2018)[27]

Por fim, a ênfase na escolha individual e na flexibilidade dos itinerários formativos, segundo Ferretti(2018) [27] o parágrafo 12 do artigo 36, tende a desconsiderar as necessidades reais do mercado de trabalho e da sociedade contemporânea, que exigem competências mais amplas e integradas. O modelo reformado, ao focar em uma especialização precoce, pode limitar as oportunidades futuras dos alunos, uma vez que eles não terão uma base sólida em conhecimentos fundamentais, como matemática, ciências e linguagens. A ausência de uma formação completa reduz a capacidade dos estudantes de se adaptarem a diferentes contextos profissionais e acadêmicos, prejudicando, assim, seu desenvolvimento integral.

O redirecionamento curricular para itinerários formativos específicos suscita preocupações sobre a solidez da formação em Matemática uma vez que a ênfase em itinerários formativos pode diluir o foco nas competências matemáticas fundamentais, essenciais para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico. Este aspecto da reforma pode, portanto, minar o objetivo de fornecer uma base sólida em Matemática, fundamental para o sucesso acadêmico e profissional dos estudantes.

A reformulação do ensino médio no Brasil, especialmente no que diz respeito ao ensino da Matemática, embora embasada em intenções modernizadoras, enfrenta críticas substanciais que questionam sua capacidade de atender às necessidades educacionais dos estudantes de maneira equitativa e eficaz.

Embora a intenção seja tornar a Matemática mais atrativa e aplicável ao contexto dos alunos, existe o risco de que tal abordagem afete negativamente o interesse e o desempenho nesta disciplina. A flexibilização e a precoce especialização curricular podem desviar o foco dos alunos das bases necessárias em Matemática, comprometendo seu desempenho futuro em áreas que requerem um entendimento profundo da disciplina.

Essa consequência potencial destaca uma contradição fundamental entre os objetivos e os resultados da reforma.

Para diminuir os impactos desse esvaziamento do rigor matemático, propomos a criação de alguns problemas que desafiem os alunos a aplicar conceitos matemáticos em cenários reais e complexos, mantendo o rigor matemático. Isso pode incluir problemas de modelagem matemática, estatística aplicada, ou cálculo em contextos da vida real, mas esse trabalho enfatizará apenas o estudo de sequências.

Mesmo com todas as limitações, metodológicas, estruturais e sociopolíticas, é necessária a permanente discussão acerca do currículo de sala de aula, das metodologias empregadas, entre outras práticas docentes, pois ainda existem diversos desafios a serem superados.

1 INTERVENÇÃO ATRAVÉS DE METODOLOGIAS ATIVAS

É muito complexo realizar um mapeamento para delimitar a origem dos problemas da educação pública. Além disso, diversos problemas permeiam tal situação, então é possível que haja uma série de fatores não pontuais. Alguns autores tentam fazer esse tipo de mapeamento, como Prioste (2020) [22] evidencia que os professores apontam que grande parte dos problemas são oriundos da própria estrutura familiar, no entanto, sempre haverá essa dinâmica de responsabilização, dessa forma há necessidade de intervir, considerando o cenário atual, de forma crítica, mas dentro das possibilidades existentes.

A Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é uma metodologia educativa que coloca os estudantes no centro do processo de aprendizagem, enfrentando problemas reais que estimulam a investigação e a aplicação prática de conhecimentos. Nesta abordagem, os alunos são encorajados a identificar suas próprias necessidades de aprendizagem dentro de um contexto que imita desafios do mundo real, promovendo a colaboração, o pensamento crítico e a solução criativa de problemas Santos(1994)[25]. O PBL não apenas facilita a aquisição de conhecimento, mas também desenvolve habilidades vitais, como comunicação e capacidade de tomada de decisões, preparando os alunos para atuar de maneira eficaz e consciente em suas futuras carreiras profissionais.

É fundamental romper com processo no qual o aluno é sujeito dependente exclusivamente do professor. Nos últimos anos, com o grande acesso a informação pelos alunos, é perceptível a autonomia dos estudantes na busca por saberes individuais, o professor tem papel de orientar e direcionar os alunos nessa busca, tendo em vista, o excesso de informações e desinformações que existem nas redes. Esse papel é fundamental para levar o sujeito ao centro do processo individual de aprendizado, que é um critério essencial para que exista a Aprendizagem Significativa.

1.1 Limites e possibilidades da aprendizagem significativa

Há algumas dezenas de anos, o ensino tem migrado para abordagens interdisciplinares, esse processo se deu naturalmente, mas foi impulsionado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que foram documentos elaborados pelo Ministério da Educação do Brasil na década de 1990 com o objetivo de orientar a educação básica (ensino fundamental e médio) em escolas públicas e privadas. Eles fornecem diretrizes para os conteúdos e metodologias a serem aplicados nas disciplinas, visando garantir uma educação de qualidade, coerente e interdisciplinar em todo o país.

Houve grande demora no processo de institucionalização de diretrizes e orientações educacionais no Brasil, uma vez que a construção da BNCC foi tardia, mesmo estando expressa na Constituição de 1988, a Base Nacional Comum Curricular só foi sancionada no ano de 2017. Frente a outros países, esse processo se mostra muito atrasado, o que evidencia muitas disputas na deliberação de um currículo mínimo nacional.

Muito embora a BNCC tenha sido recentemente implementada, bem antes já se tinham práticas pedagógicas escolares que partiam de hipótese do conhecimento ser interdisciplinar, portanto esse movimento de construir um ensino que conversa com diferentes áreas do conhecimento é anterior a BNCC [3], além disso, está intrínseco em uma teoria bem disseminada nas áreas de ensino, que é a aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa, conceito amplamente desenvolvido por David Ausubel, caracteriza-se pelo processo em que novas informações são assimiladas de maneira integrada ao conhecimento pré-existente do aprendiz. Diferente da aprendizagem mecânica, onde os dados são memorizados sem uma conexão efetiva com o que já se sabe, a aprendizagem significativa envolve uma reestruturação cognitiva, onde as novas informações encontram âncoras em conceitos previamente estabelecidos na mente do aprendiz.

Esse tipo de aprendizagem é considerado mais duradouro e profundo, pois o conteúdo adquirido não é simplesmente armazenado de maneira isolada, mas sim relacionado a um sistema já existente de conhecimento. Através desse processo, o conhecimento prévio atua como um ponto de referência que facilita a assimilação e a retenção das novas informações, promovendo uma compreensão mais robusta e a capacidade de aplicação prática em situações variadas.

Além disso, para que a aprendizagem significativa ocorra, para Moura (2022) [10] dois fatores são cruciais: a predisposição do aprendiz para integrar novos conhecimentos e a natureza lógica e estruturada do material a ser aprendido. Ausubel defende que a organização do conteúdo de ensino deve ser feita de forma hierárquica, onde conceitos mais gerais e inclusivos são apresentados antes dos mais específicos e detalhados. Dessa forma, o aprendiz pode construir uma estrutura cognitiva coerente, na qual os conceitos novos são incorporados e inter-relacionados de maneira significativa com o conhecimento prévio.

A aprendizagem significativa, portanto, não só enriquece o repertório cognitivo do indivíduo, mas também fortalece sua capacidade crítica e criativa, tornando-o mais apto a resolver problemas e a aplicar o conhecimento em contextos diversos. Este modelo de aprendizagem destaca-se especialmente em contextos educacionais onde a compreensão profunda e a aplicação prática do conhecimento são mais valorizadas do que a simples memorização de fatos .

> "Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XXI, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol)."(BNCC, 2017)

Conforme os expostos anteriores, os atuais rumos da educação são reduzidos a satisfazerem resultados e indicadores de bancos e órgãos mundiais para a boa manutenção do estado capitalista. Dessa forma, a aprendizagem significativa encontra limitações na própria lógica que impulsiona os parâmetros de avaliações mundiais. Uma vez que esses sistemas não priorizam o conhecimento sólido permeados de crítica e autonomia do sujeito. Um dos objetivos norteadores da aprendizagem significativa é o protagonismo do sujeito dentro do seu próprio aprendizado, mas para lógica do capital, basta personalidades com conhecimentos básicos e técnicos com intuito de criação de mão de obra para serviços menos complexos e que demandem menos formação científica.

Fica evidente ao analisarmos a BNCC em termos quantitativos "mundo do trabalho"se repete trinta e sete vezes, enquanto "conhecimento científico" se repete vinte de duas vezes. As instituições citadas acima norteiam e orientam grande parte das políticas internacionais educacionais, o que corrobora com o autor Khamsi (2014)[4].

1.2 Significância na aprendizagem matemática: entre contextualizações, aplicações e abstrações

Podemos inferir que a significância dos temas em matemática, não estão associadas ao grau de aplicação dos temas e conceitos, para Santarosa (2016)[5] a significância está mais relacionada aos elementos que associam o conhecimento matemático às experiencias e conhecimentos anteriores para assim realizarem correlações cognitivas ao aluno ter o contato com o conhecimento matemático.

O objetivo é engajar estudantes do Ensino Médio na análise comparativa entre o financiamento de uma moto e o investimento em uma poupança, contextualizando a matemática financeira em cenários reais e relevantes. Além disso, é necessário o desenvolvimento de habilidades estabelecidas pela BNCC, sendo algumas:

Tabela 1.1: Habilidades Matemáticas segundo a BNCC.

CÓDIGO	**HABILIDADE**
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Fonte: BNCC.

Os estudantes começam a aprender através de um problema que visa integrar conteúdo acadêmico com aspectos políticos, econômicos e sociais relevantes à sua área de interesse. Esses problemas são projetados para engajar os alunos, despertando interesse por meio de situações práticas e permitindo que eles tomem um papel ativo no processo educativo (Souza, 2019) [21]. Evidentemente, essa aplicabilidade não é indispensável, por vezes, é essencial a abordagem de temas abstratos, que não envolvam aplicações concretas, uma vez que o abstrato é um fundamento no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

No cenário contemporâneo tem sido muito abordado potenciais aplicabilidades da Matemática do ensino médio, embora esses potenciais tenham sido um grande avanço educativo, o objetivo central é o aluno compreender as habilidades e competências propostas na educação básica para o seu próprio desenvolvimento, as aplicações são apenas parte do processo de aprendizagem e não o eixo central.

> “a gênese da aprendizagem da demonstração matemática, ao enraizar-se na compreensão de que as asserções matemáticas têm sempre razões, na capacidade de produzir e avaliar justificações, no entendimento da necessidade destas justificações e na compreensão do que constitui, na aula de Matemática, um argumento aceitável e adequado, situa-se no ensino básico e, em particular, nos primeiros anos de escolaridade.”(Boavida, 2001)[28]

Consideramos os princípios conjecturais e construção de argumentos sólidos afim de demostrar ou provar matematicamente, parte essencial do processo de ensino e aprendizado, uma vez que, reduzir o ensino de matemática ao uso de fórmulas e aplicações, limita o aluno ao campo de suas possibilidades educacionais, partindo da premissa que esse, pode ou não, ansiar o aprofundamento em áreas mais científicas.

1.3 Procedimentos metodológicos

Este estudo implementou a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) com o objetivo de analisar criticamente a eficácia de abordagens pedagógicas ativas no ensino de Progressão Geométrica (PG). Para tanto, foi elaborada uma sequência didática centrada em um modelo de financiamento bancário de motocicletas, um tema intrinsecamente conectado às realidades socioeconômicas de estudantes da rede pública, particularmente nas regiões norte e nordeste do Brasil. Dados da Secretaria Nacional de Trânsito (Senatran, 2023) corroboram a pertinência do tema, destacando essas regiões como líderes nacionais em proporção de veículos de duas rodas.

A fundamentação teórica considerou essencial o estabelecimento de conhecimentos básicos pelos alunos acerca dos subtemas envolvidos nas problemáticas propostas. Embora essa etapa inclua elementos de abordagens pedagógicas tradicionais, foi considerada indispensável para assegurar a compreensão dos conceitos envolvidos. O ensino público brasileiro apresenta desafios estruturais significativos, incluindo a heterogeneidade dos níveis de aprendizado entre os alunos, o que inviabiliza a suposição de um ponto de partida homogêneo.

Para preparar os alunos, foram sugeridas atividades preliminares envolvendo problemas contextualizados e exercícios introdutórios. A sequência didática foi projetada para que o docente pudesse adaptar os problemas ao nível de compreensão dos estudantes, utilizando recursos como livros didáticos e o portal da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). O uso integrado de metodologias tradicionais e inovadoras, conforme preconizado por Oliveira (2021), permitiu que os conceitos matemáticos fossem apresentados formalmente em pequenos grupos, promovendo a socialização de experiências e conhecimentos individuais.

A introdução do conteúdo iniciou-se com a exploração de sequências, finitas e infinitas, em um contexto interativo. Mini-aulas introdutórias foram empregadas para estabelecer uma base conceitual robusta, habilitando os alunos a compreenderem os princípios fundamentais antes de aplicá-los em situações práticas.

A atividade prática não apenas consolidou o aprendizado teórico, mas também incentivou a colaboração e o desenvolvimento de habilidades comunicativas. Durante essas práticas, foi promovido o uso de ferramentas digitais, que facilitaram tanto a visualização quanto a compreensão dos conceitos trabalhados. As discussões subsequentes visaram estimular uma análise crítica dos resultados e promover reflexões aprofundadas sobre as decisões tomadas, em consonância com os princípios dialógicos centrais da PBL.

A avaliação da eficácia da metodologia envolveu a aplicação de testes pós-intervenção, cujos dados estão organizados nos anexos deste trabalho. O objetivo foi mensurar tanto o ganho conceitual quanto a capacidade de transferência dos conhecimentos adquiridos. Além disso, foram coletados feedbacks dos alunos, permitindo ajustes e refinamentos na abordagem pedagógica, contribuindo para a evolução do processo de ensino-aprendizagem. O ciclo avaliativo incluiu a aplicação de listas de exercícios em sala de aula, seguida de correção, devolutiva e realização de testes.

A intervenção foi implementada em uma turma de terceira série do ensino médio, denominada 3ªA (alfa). Para efeito comparativo, as mesmas listas de exercícios e testes avaliativos foram aplicados em outras turmas da mesma série (3ªB, 3ªC e 3ªD), todas sob responsabilidade do mesmo docente e com o mesmo tema curricular (Matemática Financeira). A distinção residiu no fato de que apenas a 3ªA participou da intervenção pedagógica. Posteriormente, os resultados das avaliações foram comparados para identificar diferenças significativas atribuíveis à metodologia aplicada.

A elaboração dos instrumentos avaliativos esteve alinhada aos temas do currículo regular das turmas, de modo a não interferir nas atividades escolares ordinárias. Adicionalmente, a duração da intervenção foi ajustada às demandas escolares, respeitando a prioridade do planejamento acadêmico institucional.

Concluindo, este estudo buscou validar o potencial transformador das metodologias ativas no ensino de matemática, com vistas a torná-lo mais significativo e envolvente para os alunos. Não se limitou a aplicações mecânicas de conceitos, mas priorizou a integração de conteúdos formais, dialógicos e tecnológicos, fomentando o desenvolvimento de competências matemáticas essenciais, alinhadas à lógica e ao raciocínio crítico, em conformidade com as demandas da BNCC.

2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Alguns teoremas apresentados nessa sessão são subsídios para o professor mediador ter em seu repertório docente acervos e definições necessárias para o domínio dos conteúdos abordados, mais teoremas e temas são tratados pelo autor Muniz(2022) [14] e pelo autor Lima (2014)[13]. O não conhecimento desses desses teoremas e definições não são impeditivos ao processo de ensino e aprendizagem, mas o contrário tente a oferecer grandes contribuições ao profissional docente.

Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real $a(n)$. O valor $a(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por a_n e denominado por n-ésimo termo da sequência. Escrevemos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n) para indicar a sequência x.

Uma sequência (a_n) será limitada superiormente se existir uma constante real b, tal que $a_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma análoga, a sequencia (a_n) será limitada inferiormente se houver $a \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabendo disso, dizemos que uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superiormente e inferiormente. Caso contrário, se uma sequência não for limitada, dizemos que ela é ilimitada.

Dizemos que uma sequência (a_n) é crescente quando $a_n < n_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ocorrer $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, dizemos que a sequência é não decrescente.

Da mesmo forma que podemos afirmar que a sequência (a_n) é decrescente, se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também existe o caso não-crescente quando $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes, e não-crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Exemplo 2.0.1. *[Sequencia crescente $a_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$]*

Para $n = 1$, temos $a_1 = 1^2 = 1$. Claramente, $a_1 < a_2$ pois $a_2 = 2^2 = 4$. Suponha que para um k natural, $a_k = k^2$ e $a_k < a_{k+1}$. Precisamos mostrar que $a_{k+1} < a_{k+2}$. Temos $a_{k+1} = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, então devemos somar à desigualdade $2k + 3 > 0$, ficando $k^2 + 2k + 3 < k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$, ou ainda $(k+1)^2 < k^2 + 2k + 3 < (k+2)^2$. Isso é verdadeiro para todos os k natural.

Exemplo 2.0.2. *[Sequencia decrescente $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$]*

Para $n = 1$, então $a_1 = \frac{1}{1} = 1$. Claramente, $a_1 > a_2$ pois $a_2 = \frac{1}{2}$. Suponha que para um k natural, $a_k = \frac{1}{k}$ e $a_k > a_{k+1}$. Precisamos mostrar que $a_{k+1} > a_{k+2}$. Basta perceber *que $k < k+1 < k+2$, portanto $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k+2}$, que é o mesmo que $a_k > a_{k+1} > a_{k+2}$, portanto a desigualdade é verdadeira para todos os k natural.*

2.1 Série geométrica

Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais é uma progressão geométrica (PG) se existir um número real q tal que a recorrência

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \tag{2.1}$$

seja satisfeita para todo inteiro $n \geq 1$.

Teorema 2.1.1. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PG de razão q, então $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n \geq 1$.*

Demonstração. Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 \cdot q^0$, de forma análoga $a_2 = a_1 \cdot q^1$. Suponha que para um k natural, a propriedade $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ é válida, ao multiplicar essa igualdade pela razão q, obtemos $a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$. Portanto pelo princípio da indução finita, a propriedade é válida para $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$ e logo é verdadeiro para todos os k natural. □

Teorema 2.1.2. *Se $q \neq 1$, então $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, multiplicando por q, obtemos $qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_n + qa_{n-1}$. Fazendo a subtração $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é $S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n$ e portanto

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right). \tag{2.2}$$

□

Teorema 2.1.3. *Dado $q \in \mathbb{R} - \{0\}$, a série geométrica $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}$ converge se, e só se, $0 < |q| < 1$. Se converge, sua soma é igual a $\dfrac{1}{1-q}$.*

Demonstração. Sendo $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}$, segue pelo teorema anterior que

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n}{q - 1} - \frac{1}{q - 1}$$

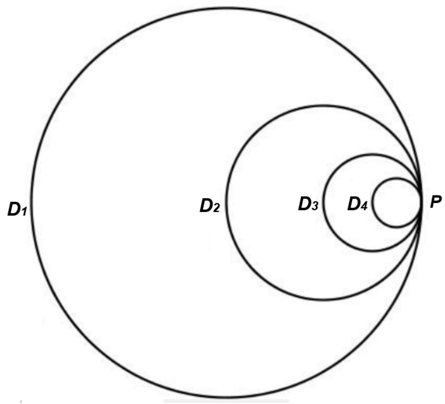
Agora, se $0 < |q| < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, portanto temos

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1}\right) = \frac{1}{1-q}$$

Por outro lado, se $|q| \geq 1$, então $\lim_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$, de forma que a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ não converge em $\mathbb{R}$. Portanto, nesse caso a série geométrica em questão é divergente. □

Exemplo 2.1.1. *Considere o padrão de construção representado pelo desenho abaixo, com as respectivas etapas escritas.*

Figura 2.1: Círculos tangentes



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/.

O disco D_1 tem raio medindo 1. O disco D_2 é tangente ao disco D_1 no ponto P e passa pelo centro do disco D_1. O disco D_3 é tangente ao disco D_2 no ponto P e e passa pelo centro do disco D_2. E assim por diante o disco D_n é tangente ao disco D_{n-1} no ponto P e passa pelo centro do disco D_{n-1}. O processo de construção dos discos é repetido infinitamente. Considerando a sucessão infinita de discos, qual a soma das áreas de todos os discos na sequência?

Solução 2.1.1 . Vejamos que o disco D_1 tem raio 1 e área $A_1 = \pi$, o disco D_2 tem raio $\frac{1}{2}$ e área $A_2 = \frac{\pi}{4}$, o disco D_3 tem raio $\frac{1}{4}$ e área $A_3 = \frac{\pi}{16}$, assim sucessivamente, o disco D_n tem raio $\frac{1}{2^{n-1}}$ e área $A_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}}$. O problema trata de saber o resultado da seguinte soma

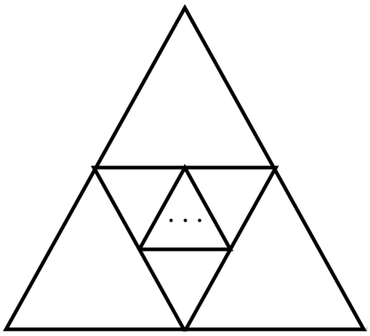
$$\pi\cdot(1)^2 + \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \pi\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cdots + \pi\cdot\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

Basta notar que a sequência se trata de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2^2}$, com $a_1 = 1$, pondo π em evidência aplicando a soma infinita dos termos de uma PG (2.1.3) temos,

$$S = \pi\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right) = \frac{4}{3}\pi \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1.2. *Os lados de um triângulo equilátero medem l. Unindo os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, obtém-se infinitos triângulos equiláteros. Calcule a soma das áreas de todos eles.*

Figura 2.2: Triângulos inscritos



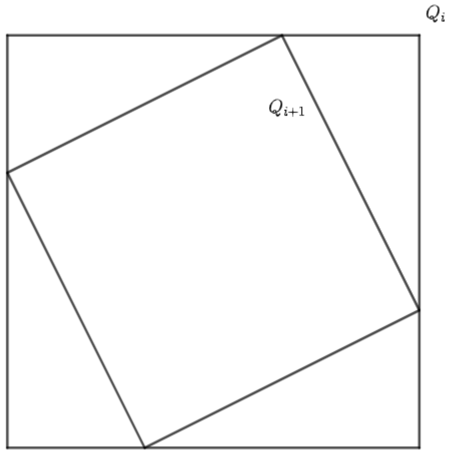
Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/.

Solução 2.1.2 . Observe que os lados do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos vértices do triângulo de lados iguais a l são iguais a $\frac{l}{2}$. Pelo mesmo motivo, os lados do terceiro triângulo são iguais a $\frac{l}{4}$, e assim por diante. Dessa forma, os lados do n-ésimo triângulo equilátero são dados por $\frac{l}{2^{n-1}}$. Agora, utilizando a fórmula para o cálculo da área de um triângulo equilátero de lado l, vemos que as áreas dos triângulos descritos acima formam uma PG tem razão $\frac{1}{4}$ e $a_1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, de sorte que realmente faz sentido calcularmos a soma de seus infinitos termos.

$$S = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{3} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.1.3. *Uma sequencia infinita de quadrados é construída da seguinte forma: dado um quadrado Q_i, constrói-se outro quadrado Q_{i+1}, cujos vértices estão sobre os lados de Q_i e de tal forma que a distância de qualquer vértice de Q_{i+1} ao vértice de Q_i mais próximo dele é igual a $\frac{1}{3}$ do lado Q_i. Além disso, o lado Q_1 é 3. Sobre essa sequência de quadrados:*

Figura 2.3: Quadrado interno a outro quadrado



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/.

i) Qual o valor do lado Q_2?

ii) Qual o valor de Q_3?

iii) Qual o valor de Q_4?

iv) Qual a sequência formada pelos termos Q_i?

v) Qual o valor de Q_n?

Solução 2.1.3 . i) A hipotenusa de um triângulo com catetos 1 e 2 é Q_2, portanto

$$Q_2 = 1^2 + 2^2$$

$$Q_2 = \sqrt{5}$$

ii) De forma análoga, Q_3 é a hipotenusa um triângulos com catetos $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$$Q_3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$Q_3 = \frac{5}{3}$$

iii) Seguindo o mesmo processo, Q_4 é a hipotenusa de tiângulo com catetos $\frac{5}{9}$ e $\frac{10}{9}$

$$Q_4 = \frac{5\sqrt{5}}{9}$$

iv) De modo geral, considerando a hipotenusa Q_i de catetos $\dfrac{l}{3}$ e $\dfrac{2l}{3}$, segue que

$$Q_i^2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 + \left(\frac{2l}{3}\right)^2$$

$$Q_i = \frac{l\sqrt{5}}{3}$$

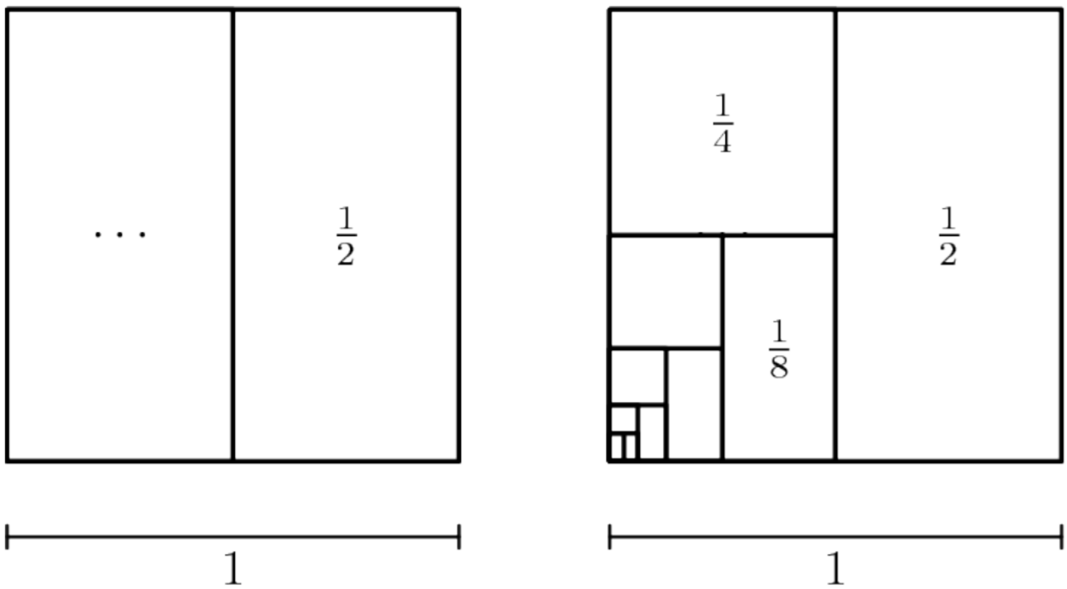
v) Considerando, a sequencia formada pelos Q_i é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Portanto segue que o termo geral Q_n é:

$$Q_n = a_1 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}$$

Essa demonstração com mais detalhamentos, pode ser encontrada em Morgado (2022) [11].

Exemplo 2.1.4. *A soma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ *pode ser ilustrada como a figura abaixo, representando a área do quadrado unitário.*

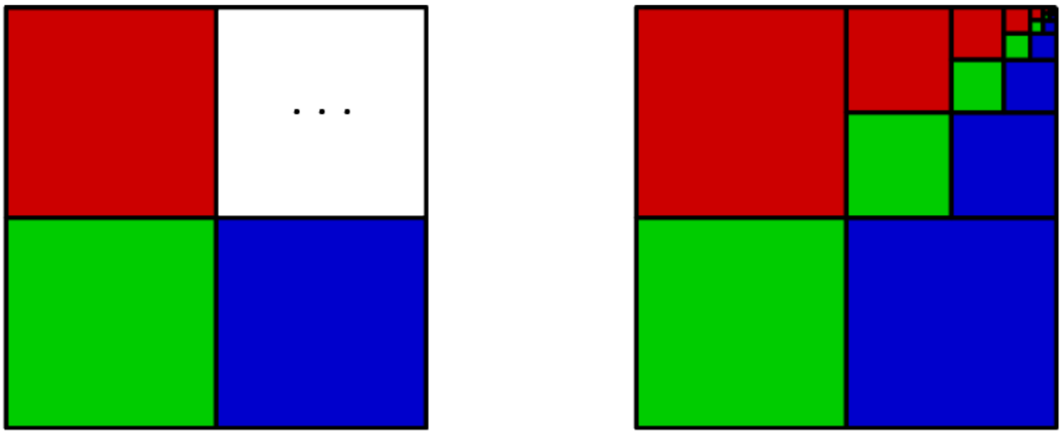
Figura 2.4: Quadrado unitário



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/.

Sendo assim, escreva uma formula que represente a soma das áreas dos quadrados vermelhos da figura abaixo à direita, cujos lados construídos ligando perpendicularmente os ponto médio dos quadrados maiores.

Figura 2.5: Partições quadrado colorido



Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/.

Solução 2.1.4 . Perceba que cada novo quadrado possui área em alguma potência de $\left(\frac{1}{2}\right)$, sendo assim, a soma pedida fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2.1.5. *Encontre a soma dos n termos da sequência $X = 7+77+777+7777+77777+\cdots+\underbrace{777777\cdots}_{n \text{ algarismos}}$*

Solução 2.1.5 . Pondo o 7 em evidência

$$X = 7(1+11+111+1111+11111+\cdots+111111\cdots)$$

Dividindo e multiplicando a expressão por 9,

$$X = \frac{7}{9}(9+99+999+9999+99999+\cdots+999999\cdots)$$

$$X = \frac{7}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+(10000-1)+\cdots+(1000000\cdots-1)]$$

Tendo dessa forma n temos -1 e reorganizando a soma, devemos ter

$$X = \frac{7}{9}(10+100+1000+10000+100000+\cdots+10000000...-n)$$

Percebe-se que a soma no parenteses é uma progressão geométrica em que $a_1 = 10$ e razão 10, e portanto a soma dos n termos da PG deve ser

$$X = \frac{7}{9}\left(10 \times \frac{10^n-1}{9} - n\right)$$

Exemplo 2.1.6. *Sendo x positivo, a sequência definida recursivamente como* $a_1 = \sqrt{x}, \quad a_{n+1} = \sqrt{x \cdot a_n}, \quad$ *para* $n \geq 1$.

Solução 2.1.6 . Podemos reescrever a expressão da seguinte forma

$$A = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{8}} \times x^{\frac{1}{16}} \times \cdots$$

$$A = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}$$

A soma nos expoentes é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{1}{2}$ por (2.1.3).

$$A = x^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}.$$

$$A = x^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = x^1$$

Portanto,

$$x = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}} = A$$

2.2 Expressões decimais

Podemos expressar qualquer numero racional ou irracional por uma expressão decimal utilizando a base 10 do sistema numéricos. De forma que representamos em duas partes, uma a parte inteira e outra a parte decimal.

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3a_4...a_n... \tag{2.6}$$

Isto é, tal que o algarismo $a_n \neq 0$ para infinitos valores de n é uma abreviação para a soma infinita, onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero, chamado por parte inteira e $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, ...$ são dígitos, chamados por parte decimal, insto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. O autor Lima (2012) [12] faz uma abordagem minuciosa sobre expressões decimais em seu livro.

$$\alpha = \frac{a_0}{10^0} + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \tag{2.7}$$

Vejamos que a expressão (2.7) é uma soma infinita, uma vez que a_0 é o maior natural que pertence a α, de forma que podemos verificar que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$, e também $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha$, de forma análoga $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \leq \alpha$, assim de forma sucessiva, temos

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots \tag{2.8}$$

vejamos que quanto mais n cresce a soma (2.7) se aproxima mais de α.

Exemplo 2.2.1. *A exemplo temos o número* $21, 35100... = 21 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{13428}{1000}$.

Exemplo 2.2.2. *Um clássico problema é verificar se* $0,99999... = 1$

Solução 2.2.1 . Vejamos que podemos observar esse número racional da seguinte forma $\alpha = 0,999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots$, evidentemente essa soma é uma progressão geométrica, com primeiro termo $b_1 = \frac{9}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$. A soma dos termos dessa progressão infinita deve ser dado por (2.1.3)

$$\alpha = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1. \tag{2.9}$$

Perceba que as aproximação de α são $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,01$, $\alpha_3 = 0,001$,..., $\alpha_n = 10^{-n}$, por outro lado temos as diferenças $1 - \alpha_1 = 0,1$, $1 - \alpha_2 = 0,01$, $1 - \alpha_3 = 0,001$, $1 - \alpha_4 = 0,0001$, ..., $1 - \alpha_n = 10^{-n}$, portando é possível notar que quanto maior o valor de n, menor é a diferença $1 - a_n$, em outros termos, se $\lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 1$.

Ainda utilizando a expressão α do problema anterior e dividi-la por 9, temos

$$\frac{\alpha}{9} = 0,1111\cdots = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} \tag{2.10}$$

De forma geral, toda dízima pode ser representada da seguinte forma

$$\frac{\beta}{9} = 0,\beta\beta\beta\beta\cdots = \frac{\beta}{10^1} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\beta}{10^3} + \cdots + \frac{\beta}{10^n} \tag{2.11}$$

2.3 Juros compostos

Uma importante aplicação da progressão geométrica é na matemática financeira, em diversos tipos de transações, principalmente em empréstimos e financiamentos. Tendo um capital C, chamado por principal, emprestado a um terceiro por um determinado período de tempo, e após o término desse período, esse principal é retornado de volta acrescido de um valor J pelo empréstimo, esse valor é chamado por juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M e a razão $i = \dfrac{J}{C}$ é a taxa de crescimento do capital.

Teorema 2.3.1. *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$.*

Demonstração. Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i, e portanto, formam uma progressão geométrica de razão $1 + i$. □

Teorema 2.3.2. *Se i é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T, e I é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se*

$T = nt$, então $1 + i = (1 + I)^n$.

Demonstração. Seja P o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $P(1+i)^1$. Como o período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $P(1+I)^n$.Logo,

$$P(1+i)^1 = P(1+I)^n$$

$$1 + i = (1+I)^n \tag{2.12}$$

□

Tomando os conceitos expostos nos capítulos anteriores como subsídios para fundamentar a matemática abordada pelo professor, seguimos apresentando o modelo de capitalização futura. É um conceito bastante abordado nas ciências contábeis, pois está imerso nos processos de financiamento e empréstimos. Parte desse trabalho é propor uma relação entre temas abstratos da matemática e algumas aplicações, concretas ou não. Sem que uma sobressaia a outra.

Essa abordagem apresenta um conceito contábil aplicando puramente os princípios de progressão geométrica, e implicitamente conceito abordados nas sessões anteriores desse trabalho. Parte da aprendizagem significativa é a interdisciplinarização do conhecimento, tornando a matemática possível de assimilação através de problemas instigadores não necessariamente concreto.

3 MODELO DE CAPITALIZAÇÃO FUTURA

Consideremos uma anuidade onde fazemos depósitos regulares de P ao final de cada período por n períodos a uma taxa de juros i por período. O valor futuro S da anuidade é a soma do valor futuro de cada depósito individual. Cada depósito P cresce para $P(1+i)^k$ ao final de n períodos, onde k é o número de períodos que cada depósito cresce. O primeiro depósito cresce por $n-1$ períodos, o segundo por $n-2$ períodos, até o último depósito que não cresce pois é feito ao final do último período. Portanto, o valor futuro S é a soma:

$$S = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \cdots + P(1+i) + P \tag{3.1}$$

podemos fatorar P para obter:

$$S = P[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1] \tag{3.2}$$

Esta é uma soma de uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1 = 1$, a razão $q = 1+i$, e n termos. A soma S_n de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \tag{3.3}$$

substituindo $a = 1$, $r = 1+i$, e ajustando para nossa fórmula, temos:

$$S = P \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \tag{3.4}$$

Assim, demonstramos que o valor futuro S de uma série de depósitos regulares P em uma conta que rende uma taxa de juros r por período ao longo de n períodos.

3.1 Poupança para a compra da moto

Considerando o objetivo de Pedro (nome fictício) de poupar para a compra de uma moto no valor de R$ 17.000,00, ajustamos o período de poupança para 48 meses, com uma taxa de juros de 5% ao ano, capitalizada mensalmente. O objetivo é determinar o valor que Pedro deve poupar mensalmente para alcançar sua meta ao final deste período. Utilizamos a seguinte fórmula do valor futuro de uma anuidade, considerando a capitalização mensal dos juros:

$$S = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.5}$$

onde:

i) $S = 17000$ é o valor futuro desejado,

ii) P é o valor do depósito mensal,

iii) $I = 5\%$ é a taxa de juros anual,

iv) $n = 4$ é o número total de anos,

v) $n \times 12 = 48$ é o número total de meses.

É necessário fazer a equivalência da taxa de 5% ao ano para taxa mensal utilizando (2.12).

$$1 + i = (1 + I)^n$$
$$1 + i = (1 + 0,05)^{\frac{1}{12}}$$
$$1 + i = 1,004074$$
$$i = 0,004074$$

rearranjamos a fórmula para encontrar P, o valor do depósito mensal necessário:

$$P = \frac{S \times i}{(1+i)^n - 1} \tag{3.6}$$

Substituindo os valores conhecidos na fórmula, encontramos que o depósito mensal necessário para que Pedro alcance seu objetivo de R$ 17.000,00 em 48 meses é aproximadamente:

$$P \approx R\$321,40 \tag{3.7}$$

Portanto, para comprar a moto desejada de $R\$17.000,00$ em 4 anos, Pedro deve fazer depósitos mensais de cerca de $R\$321,40$ em uma conta de investimento que rende 5% ao ano, com juros capitalizados mensalmente. Este exercício demonstra a importância do planejamento financeiro e a eficácia dos juros compostos em alcançar metas de longo prazo. A tabela abaixo mostra, para cada mês, o depósito fixo mensal realizado por Pedro e o saldo acumulado correspondente, considerando uma taxa de juros de 5% ao ano, com capitalização mensal, ao longo de 48 meses.

Tabela 3.1: Aplicação dos primeiros 24 meses (Capitalização Mês a Mês).

Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)	Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)
1	321,38	321,38	13	321,38	4281,61
2	321,38	644,07	14	321,38	4620,43
3	321,38	968,07	15	321,38	4960,63
4	321,38	1293,40	16	321,38	5302,22
5	321,38	1620,05	17	321,38	5645,20
6	321,38	1948,03	18	321,38	5989,58
7	321,38	2277,34	19	321,38	6335,36
8	321,38	2608,00	20	321,38	6682,55
9	321,38	2940,01	21	321,38	7031,16
10	321,38	3273,36	22	321,38	7381,18
11	321,38	3608,08	23	321,38	7732,64
12	321,38	3944,16	24	321,38	8085,52

Fonte: Autoria própria.

Tabela 3.2: Aplicação dos últimos 24 meses (Capitalização Mês a Mês.)

Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)	Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)
25	321,38	8439,84	37	321,38	12805,98
26	321,38	8795,60	38	321,38	13179,53
27	321,38	9152,82	39	321,38	13554,60
28	321,38	9511,48	40	321,38	13931,20
29	321,38	9871,61	41	321,38	14309,34
30	321,38	10233,21	42	321,38	14689,01
31	321,38	10596,28	43	321,38	15070,24
32	321,38	10960,83	44	321,38	15453,01
33	321,38	11326,87	45	321,38	15837,35
34	321,38	11694,39	46	321,38	16223,25
35	321,38	12063,41	47	321,38	16610,72
36	321,38	12433,94	48	321,38	16999,78

Fonte: Autoria própria.

3.2 Simulação de financiamento

Alguns bancos viabilizam a simulação orçamentária online para compra de automóveis, apenas com alguns dados é possível realizar essa experimentação. É necessário fazer algumas observações, alguns bancos exigem um valor de entrada para a compra do automóvel.

Além disso, há alguns tributos embutidos na compra de um automóvel financiado, como por exemplo o custo efetivo total (CET) é uma medida financeira que inclui todos os custos e despesas associados a um empréstimo ou financiamento, além da taxa de juros. Ele leva em consideração não apenas a taxa de juros nominal, mas também outros encargos como taxas administrativas, seguros, tarifas e impostos.

Realizamos três simulações em bancos, uma no banco S, outra no banco B e uma no banco M para que os alunos pudessem ter o contato com o processo e comparar a simulação entre os três bancos. Após as três simulações, é realizada uma discussão com os alunos.

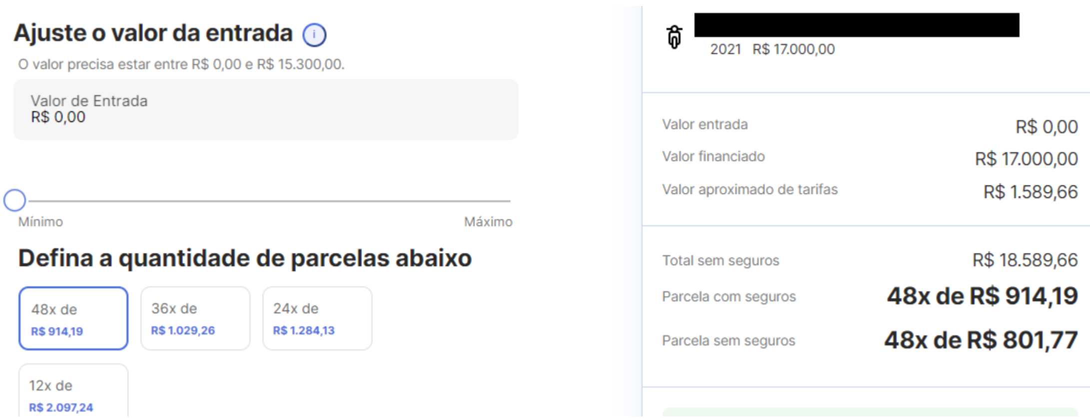
3.2.1 Simulação banco M

Figura 3.1: Simulação de financiamento M.

Fonte: Arquivo pessoal.

3.2.2 Simulação banco C

Figura 3.2: Simulação de financiamento C.



Fonte: Arquivo pessoal.

3.2.3 Simulação banco S

Figura 3.3: Simulação de financiamento S.

Fonte: Arquivo pessoal.

4 IMPACTOS DE AÇÕES PERMANENTES NA ESCOLA

Realizamos uma breve aplicação de alguns procedimentos propostos em uma escola pública de ensino médio da região sudeste do Pará. Se trata de uma escola com supervisão militar, não é um modelo de escola cívico, mas apenas uma parceria da secretaria de educação com a secretaria de segurança pública, portanto os alunos seguem todas as diretrizes curriculares do estado do Pará, bem como regimento, sistema de avaliação, etc.

Nessa região do estado do Pará, assim como nos demais municípios seguem a seguinte estruturação, os municípios são responsáveis pelos núcleos de educação infantil e pelo ensino fundamental anos iniciais e ensino fundamental anos finais, e o Estado é responsável pelo ensino médio, existem algumas exceções encontradas na capital, mas não representam grande quantitativo de escolas.

O que difere essa escola das outras escolas da rede são os uniformes sistematizados e uma série de regras que os alunos devem seguir referentes a disciplina e conduta, bem como a preservação e conservação do patrimônio. Os alunos contam com um sistema de méritos e os que têm maior desempenho ganham a possibilidade de serem "xerifes da turma"ou comandantes da escola. Geralmente, esses alunos ganham destaque nos desfiles escolares, menções honrosas, e algumas responsabilidades referentes a organização dos próprios colegas de turma e de escola. Vale ressaltar que o ingresso nesta escola não se dá por qualquer meio de processo seletivo.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) é uma ferramenta essencial utilizada pelo Ministério da Educação do Brasil para avaliar o desempenho dos alunos com relação ao aprendizado oferecido nas escolas públicas e privadas do país. Implementado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o SAEB é composto por uma série de avaliações aplicadas aos estudantes do ensino fundamental e médio.

As avaliações do SAEB abrangem disciplinas como Língua Portuguesa e Matemática, sendo aplicadas a alunos de 5º e 9º ano do ensino fundamental e do 3ª série do ensino médio. Os resultados fornecem dados detalhados sobre o desempenho acadêmico dos estudantes e são utilizados para calcular indicadores importantes, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

Além de medir o desempenho dos alunos, o SAEB também coleta informações contextuais sobre as escolas e os alunos, como infraestrutura, perfil socioeconômico e práticas pedagógicas. Essas informações são cruciais para identificar desigualdades educacionais e orientar políticas públicas voltadas para a melhoria da educação no Brasil.

Em resumo, o SAEB desempenha um papel vital no monitoramento e aprimoramento da qualidade da educação básica no Brasil, fornecendo dados valiosos que ajudam a direcionar esforços para a melhoria contínua do sistema educacional.

O projeto de parceria da Secretaria de Educação com a Secretaria de Segurança Pública e o município da escola se deu em um contexto de altos índices de criminalidade na região que fica nas proximidades do Rio Tocantins. A escola se localiza nas margens da cidade, uma vez que nessas regiões existe pouca visibilidade de órgãos públicos, assim evidenciando problemas de saneamento, mobilidade e, sobretudo, de segurança. O prédio da escola é do estado do Pará, mas as dependências da instituição é dividida entre a rede municipal com o ensino fundamental e a rede estadual com o ensino médio.

A tabela a seguir evidencia o resultado no ano de 2019, o nítido aumento no aprendizado dos alunos já no primeiro SAEB após a transição da escola, mais acentuada ainda foi a variação do fluxo de 2017 para 2019, efetivamente um aumento de 11%. Isso se deu em decorrência aos vários investimentos na escola, com uma equipe mais bem estruturadas, foi possível melhorar o acompanhamento dos alunos, assim evitando a grande evasão na escola pública.

Tabela 4.1: Resultados IDEB 2017 - 2023

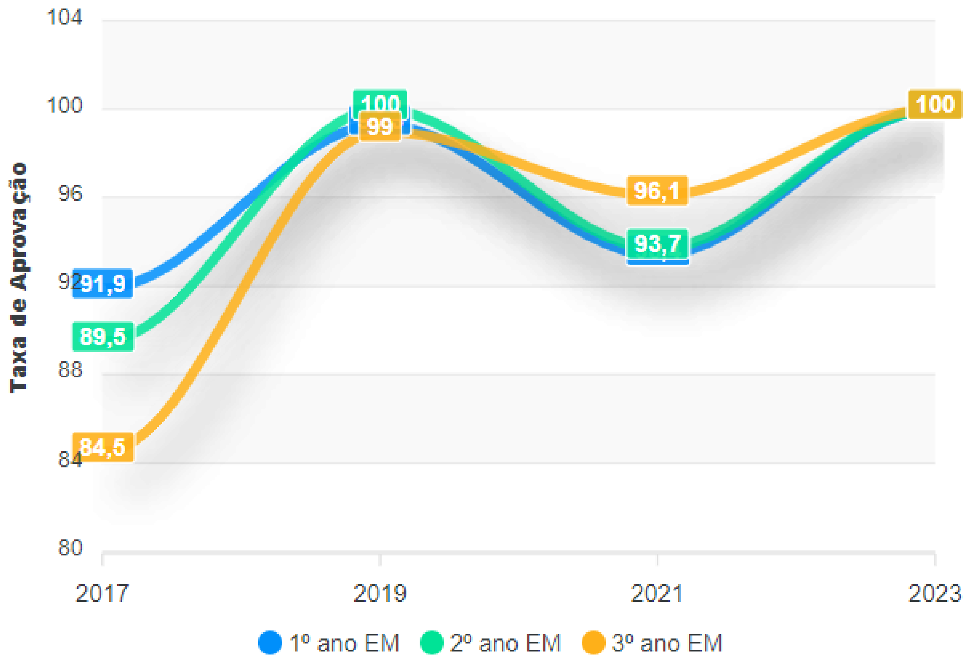
Ano	Aprendizado	Fluxo	IDEB
2023	281,19	1,00	5,0
2021	263,24	0,94	4,2
2019	262,68	0,99	4,5
2017	235,20	0,89	3,2

Fonte: https://www.gov.br/inep/pt-br.

O projeto foi iniciado em abril de 2018, e já contou com grande mobilização política e pedagógica, já nesse ano a escola mobilizou muitas ações para melhoras nos indicadores, pois já no ano de 2019 haveria a avaliação em larga escala, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), aulões, atividades dirigidas e simulados foram propostos afim de avaliar a melhora do desempenho dos alunos.

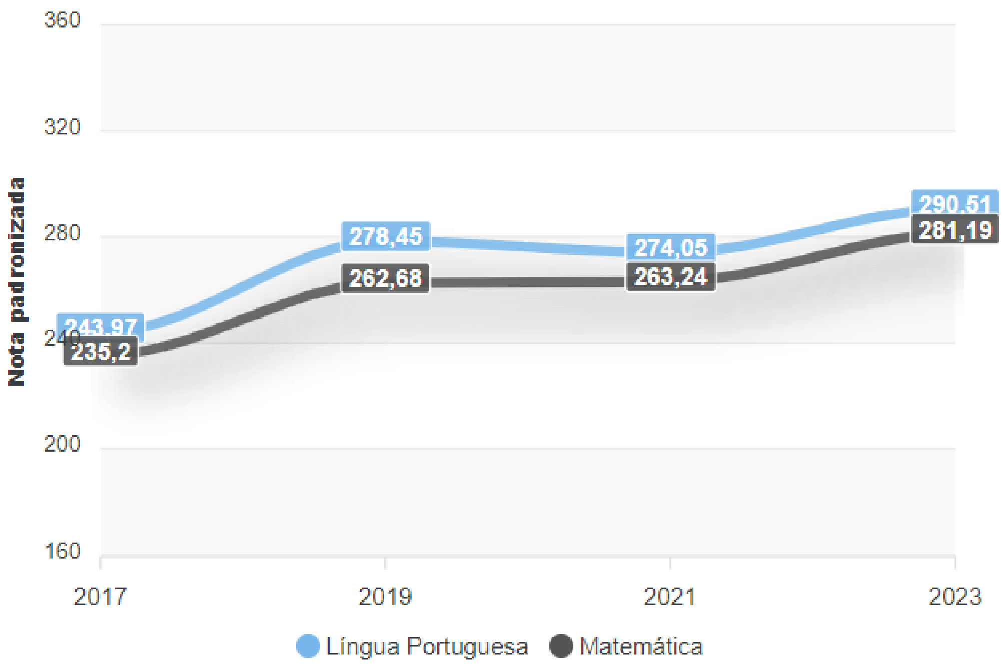
Em 2021 houve a segunda avaliação na qual a escola participou, o ano no entanto, contou com um grande evento trágico por todo o cenário mundial, a Covid-19. A pandemia gerou fortes impactos na educação, sobretudo referente ao fluxo nas escolas, muitos alunos abandonaram a escola para trabalhar ou mesmo ajudar em casa. Esse impacto evidencia no fluxo de 2021, mesmo com esse dado impactado ainda foi possível preservar o aprendizado.

Figura 4.1: Fluxo no IDEB



Fonte: https://qedu.org.br/.

Figura 4.2: Aprendizado no IDEB



Fonte: https://qedu.org.br/.

É fundamental pontuar que desde a adesão ao projeto, notou-se um crescimento no indicador da escola, evidentemente o ideal seria uma investigação sobre essas alterações, mas como não temos esse tipo de embasamento, nos limitaremos a conjecturar sobre o processo a partir da perspectiva de um professor que vivenciou a escola antes, e depois do processo de adesão. A escola surgiu como projeto piloto, inclusive como escola propaganda de um projeto de governo municipal, mesmo que a iniciativa não tenha sido do município.

Para tanto, o governo municipal mobilizou muitas alterações no entorno da escola, asfaltamento, esgoto, calçamento, pintura e climatização. A prefeitura realizou contratos para uma equipe de apoio, e até criou clubes de robótica, matemática, música, português e esportes. Os clubes de matemática e português são restritos aos alunos do ensino fundamental, pois os professores contratados (lotados) para o clube são servidores do município.

4.1 Resultados da OBMEP na escola

Desde outubro de 2020 demos início nessa escola ao uso do banco de questões oferecido pela OBMEP no portal https://portaldaobmep.impa.br/, essa inserção não foi de forma acelerada, foi processual, iniciei incluindo algumas questões bônus em exercícios e nas avaliações. Sempre foi fundamental a correção das questões com os alunos em sala de aula, além disso, fazemos uso também de questões de provas de concursos militares (ESA, EEAR, ESPCEX).

Esse trabalho sempre demandou muito tempo e disposição docente, muito além da jornada prevista e remunerada. Também para o banco de questões, o professor adquiriu uma plataforma educacional paga afim de possibilitar a busca de problemas relevantes associados aos temas estudados em sala de aula. Essa ação não deve ser tema de romantização entre o sistema educacional, o professor/servidor, deve ser munido de suporte tecnológico e condições para que o trabalho seja bem efetuado.

As aulas contam com pouca teoria, apenas os temas e teoremas fundamentais para a consolidação de conceitos. Ás vezes, os teoremas são apresentados ao final das resoluções de problemas. Não consideramos fundamental a linearidades dos temas, mas a compreensão e a fundamentação sólida de conceitos e construção de habilidades essenciais da BNCC.

Validamos a possibilidade de abordar temas abstratos da matemática, para além das aplicabilidades exigidas pelo novo enino médio. E também temas aplicados, não há necessidade da dissociação de ambos os trabalhos. Na educação básica é indispensável perceber que existe um público amplo, enquanto alguns buscam apenas uma matemática usual, outros buscam vestibulares e olimpíadas. É possível atender parcialmente ambas as demandas, mas para isso o docente requer tempo para estudo e planejamento.

É válido enfatizar que essa é uma iniciativa isolada, e não representa alguma política de governo, apenas foi estabelecida em acordos entre diretora e professor. Esse é um dos grandes obstáculos da educação básica no estado do Pará. Qualquer iniciativa extracurricular, mesmo que para benefício do sistema escolar, não oferece retorno ao professor, nem financeiramente, tão pouco em carga horária.

Dessa forma, o docente vive um grande conflito entre trabalhar apenas com o básico oferecido pela rede, o currículo convencional, carga-horária extremamente alta e oferecer uma diversidade curricular e materiais alternativos. O professor da rede estadual ministra em média entre 30 a 40 aulas semanais, pois essa é a quantidade de aulas para que o professor receba a jornada máxima salarial. Portanto, fica evidente que dadas as péssimas condições de trabalho, falta tempo e condições para planejamento, organização e até mesmo estudo e formação do professor.

Com todas as más condições, demos continuidade aos trabalhos com o banco de questões, assim obtemos resultados satisfatórios ao longo dos anos na OBMEP, a tabela a seguir evidencia esses avanços. A ausência do ano de 2020 na tabela se deu em decorrência da pandemia de Covid-19. Ressaltamos ainda, que no ano de 2023 ainda houveram mais quatro (04) medalhas, mas foram a nível regional. É uma nova modalidade criada pela OBMEP afim de propor novas categorias de premiação.

Tabela 4.2: Resultados OBMEP entre 2018 a 2023.

Ano	Medalhas	Menções Honrosas	Premiação professor	Premiação escola
2023	1	12	S	S
2022	1	5	S	N
2021	0	9	S	S
2019	0	2	N	N
2018	0	0	N	N

Fonte: http://www.obmep.org.br/premiados.htm.

4.2 Apontamentos sobre a intervenção

Diante desse contexto de muito investimento em mão de obra e reestruturação, não é possível afirmar que o aumento dos índices deram-se em decorrência da supervisão militar, pois o fator investimento na escola e no seu entorno são elementos fundamentais a serem considerados. Outras escolas sem supervisão militar com menores investimentos alcançam indicadores muito próximos e até mais elevados. Seria ideal conjecturar que o aumento do indicador se deu pelo simples investimento na escola? Talvez, mas seria necessário, como dito, um levantamento minucioso acerca do problema. A comunidade acredita que a melhora se deu pela participação da polícia militar, mas poucos sabem que a polícia não intervém pedagogicamente.

Para a consecução da intervenção, realizamos algumas adequações que fogem da proposta inicial. Para um melhor aproveitamento dos temas trabalhados no currículo, é ideal que os temas de intervenção apresentados nesse trabalho sejam inseridos em consonância aos temas curriculares da escola, para que não haja misturas conceituais realizadas pelos alunos.

A exemplo, o problema da aplicação financeira tem melhor aproveitamento ao ser apresentado a uma turma que esteja estudando progressão geométrica ou matemática financeira. Em minha intervenção cometi um equivoco ao realizar a atividade proposta em uma turma de terceira série do ensino médio que havia estudado progressão geométrica na segunda série no ano anterior, durante o período dessa intervenção nenhuma turma estava estudando progressão geométrica e portanto fiz um ajuste e adequei a intervenção em matemática financeira na terceira série do ensino médio.

Essa disposição de organização do tema apresentado, gerou algumas dificuldades, pois as aulas do terceiro ano do ensino médio são mais densas de temas e conteúdos curriculares visando vestibulares e concursos, e por isso a intervenção não poderia requerer muitas aulas, pois os alunos estariam "perdendo tempo"e para a execução dessa proposta demandamos um total de cinco (05) aulas seguidas que não foram suficientes para toda ação pedagógica.

O calendário escolar é um grande limitador do trabalho pedagógico, a escola deve atender demandas estaduais e nacionais, e essas demandas muitas vezes ignoram as dificuldades e as realidades locais de cada escola. É compreensível a necessidade de calendários e prazos, mas diversas vezes o atropelamento de prazos e datas prejudicam o trabalho docente e pedagógico.

O primeiro momento com a turma foi para apresentar temas relativos a aumentos e descontos percentuais, para isso, fizemos uso do volume 2 da coleção A Matemática do Ensino Médio (Lima, 2013) [12] , apresentamos conceitos e definições de progressão geométrica, bem como demonstrações essenciais. Fizemos alguns exemplos de capitalizações e resolução de problemas envolvendo soma dos termos de uma progressão geométrica.

A primeira dificuldade encontrada, foi no momento de apresentar o conceito de taxas equivalentes, foi possível notar que essa equivalência não foi bem estabelecida entre os temas apresentados. É válido enfatizar que esse tema foi exposto sem uso de recursos computacionais, fizemos uso apenas de aula expositiva no quadro branco.

Devido a exigência de grande urgência no decorrer das atividades, não foi possível se estender de forma demasiada em algumas dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer das aulas. Dessa forma prosseguimos, utilizando a taxa de juros de aplicação no tesouro direto anual de um banco digital muito popular e realizamos a equivalência da taxa para quarenta e oito meses (48).

Outro procedimento que houve necessidade de adequação, foi no valor de aplicação, pois optamos em definir o valor de aplicação que já havia realizado o cálculo previamente. Portando os alunos tinham em mãos, o valor de aplicação, a taxa de juros ao mês e o tempo de aplicação.

Separei os alunos em pequenos grupos de cinco (05) a seis (06) alunos, entreguei a eles papel "cartolina", os alunos construíram uma tabela com as aplicações de todos os quarenta e oito meses. Nesse momento, com o uso da calculadora, eles mostraram total domínio dos conceitos matemáticos, eles mesmos se corrigiam e comparavam suas tabelas.

Ficavam intrigados quando havia alguma variação centesimal ou decimal de uma tabela para a outra, mas os mesmo percebiam que algumas variações se davam por conta do arredondamento de alguns valores.

Infelizmente a construção da tabela foi interrompida pelo término da aula, mas continuamos na aula seguinte fazendo um comparativo das tabelas, todas ficaram muito parecidas e nessa aula pedi que os alunos fizessem a soma dos valores de todas as aplicações mensais. Em um encontro seguinte reforcei que cada aplicação com juros é um termo de uma progressão geométrica, nesse momento recordei alguns conceitos rápidos de progressão geométrica, bem como a soma dos termos de uma PG.

Os alunos me auxiliaram a calcular soma dos termos da PG com o uso da calculadora e verificaram que o valor final corroborou com o resultado da soma anterior que haviam realizado. Orientei aos alunos que eles entrassem em alguns sites de bancos com intuito de realizarem algumas simulações para a compra de uma moto no valor proposto pelo problema de dezessete mil reais. Em um último encontro os alunos trouxeram algumas pesquisas, alguns não lembraram de realizar a atividade, outros não conseguiram utilizar o simulador do banco e alguns poucos conseguiram realizar a pesquisa em seus celulares.

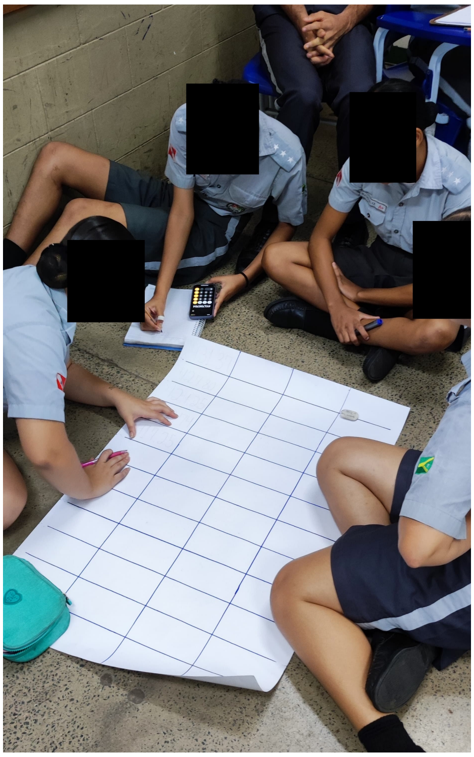
Com uso de projetor e notebook, para finalizar a exposição entrei no simulador do banco e realizei com os alunos algumas simulações de financiamento e comparamos com os resultados das aplicações realizadas em sala. Muitos alunos se surpreenderam com as diferenças dos valores, expliquei que ao realizar o financiamento existem alguns custos adicionais que o banco costuma embutir no pagamento, mas mesmo dentro dessa justificativa, os juros ainda assim são extremamente abusivos.

Vale ressaltar que os alunos acharam interessante, e trataram de forma cômica a aula, fizeram várias simulações de financiamento de imóveis, e carros. Isso não estava previsto pela intervenção, mas foi possível notar o interesse dos alunos em conhecer o processo e dominar a matemática e suas tecnologias afim de realizarem uma simulação de financiamento.

Figura 4.3: Alunos em intervenção - 1

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 4.4: Alunos em intervenção - 2



Fonte: Arquivo pessoal.

As ações realizadas corroboram Moura (2022) [10], pois os aluns puderam construir a partir de suas próprias interpretações lógicas, pensamentos e raciocínios coerentes e hierárquicos, partindo de seus conhecimentos já anteriores e também a partir das aulas expositivas propostas pelo professor.

Realizamos a organização dos temas de progressão geométrica de forma coesa e gradualmente. As demonstrações e definições foram discutidas e debatidas para que pudéssemos utilizar conhecimentos prévios na elaboração de argumentos e proposições. Os alunos ficam confortáveis para argumentar e mostrar suas dúvidas. A escolha do problema da capitalização está associada a significância para os reais contextos que vivem os estudantes, condição essencial para que a aprendizagem seja significativa, conforme Moreira (1982) [24].

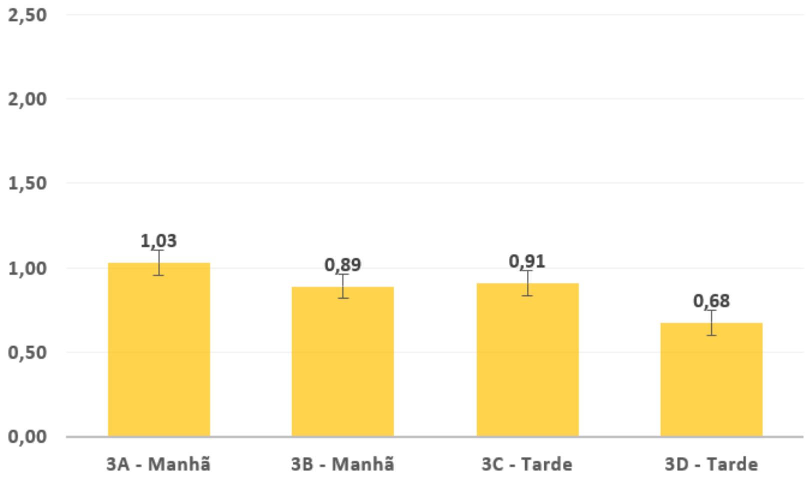
As intervenções tiveram impactos diretos nas aulas docente, após as ações planejadas propomos a realização de uma lista de exercício, para resolução e discussão em sala de aula. Vale ressaltar a importância do trabalho docente na correção dos problemas propostos.

Após o fim desse processo, realizamos um teste avaliativo com cinco questões de concurso, cada uma com valor de $0,5$ pontos, assim totalizando 2,5, para serem respondidas de forma discursiva, afim de avaliar os resultados das aulas expositivas, bem como o desempenho dos alunos. A avaliação também consta nos anexos (7) desse trabalho.

Observando a lista de exercícios e o teste avaliativo, é possível perceber que os problemas não tratam precisamente dos expostos na intervenção, pois havia necessidade de consolidação do bimestre e do "fechamento de notas", portanto para adequar a intervenção ao calendário escolar, abordei nas atividades e na avaliação principalmente temas relativos a juros, aumentos e descontos. Não enxergamos a necessidade de seguir fielmente os temas expostos na intervenção pedagógica, uma vez que ao tratar de aplicações e de progressão geométrica, implicitamente abordamos aumentos e descontos percentuais.

Então apliquei o mesmo teste avaliativo (7) em quatro turmas da terceira série do ensino médio, o teste foi entregue com uma folha de rascunho para as respostas discursivas e com o tempo de 90 minutos para resolução entrega do mesmo. A aplicação nas turmas foi em dias distintos e turnos distintos, pois são duas turmas do turno da manhã, sendo elas a 3ªA, 3ªB, e do turno da tarde 3ªC e 3ªD.

Figura 4.5: Média por turma no teste avaliativo



Fonte: Próprio autor.

A intervenção foi realizada apenas na turma 3ªA, o resultado da avaliação na turma obteve um pequeno desempenho maior que nas outras três turmas, mas a diferença percentual não é expressiva. Não é suficiente para afirmar se o melhor desempenho se deu pela intervenção ou pelo desempenho natural da turma em avaliações ser maior que as demais turmas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para além dos currículos e propostas governamentais, o trabalho docente segue uma premissa básica, viabilizar o aprendizado dos alunos, não sendo única, mas essencial. Os modelos econômicos vigentes são transitórios, mas a premissa permanece, daí emerge a necessidade da consolidação do essencial.

Muitas tendências no ensino da Matemática trazem propostas inovadoras, mas é possível notar que existem resultados positivos quantitativos e qualitativos em diversos meios educacionais. É possível citar várias escolas que é vigente um ensino tradicional e conquistam resultados satisfatórios, mas também é possível encontrar várias escolas com metodologias inovadoras e também resguardam indicadores elevados em sistemas de avaliações em rede.

Partindo desse pressuposto, é preciso destacar que o método empregado nessa dissertação não se consolida como única viabilidade para obter resultados satisfatórios com relação ao aprendizado, mas enfatiza a necessidade da participação do aluno como protagonista no processo de aprendizado. Não apenas como um mero agente do mercado de trabalho, na ótica do novo ensino médio. Mas como um sujeito com potenciais a serem instigados tanto para o mercado, como para a vida acadêmica, ou até mesmo para atividades cotidianas.

Nesse trabalho, enfatizamos a necessidade do trabalho com temas interdisciplinares, sendo um pressuposto para a aprendizagem significativa, mas também, é fundamental o trabalho com temas abstratos, bem como demonstrações e provas, uma tendência fortemente defendida pela Sociedade Brasileira de Matemática e em sua publicações.

Além disso, urge a necessidade de fortalecer o que já é bem estabelecido, e aperfeiçoar elementos que demandam investimento e atenção pedagógica. Muitos professores pelo Brasil já trabalham com resolução de problemas, portanto há necessidade de fortalecer essa cultura profissional. Para isso, os professores demandam tempo e valorização para planejamento e busca de temas e problemas que possam instigar a atenção e participação dos alunos.

Valorização profissional e a boa manutenção da estrutura escolar é essencial para a boa execução da ação do professor e fundamental para que o estudante esteja em um ambiente receptivo e satisfatório, pois no atual cenário nacional, muitas escolas ainda contam com ambientes insalubres tanto para os profissionais quanto para os alunos. Esse conjunto de elementos perniciosos prejudicam o processo de ensino e aprendizagem.

A escola coletivamente tem necessidade de estar em consonância com as propostas que possam incorporar positivamente aos resultados educacionais dos alunos. Não apenas genericamente, mas como agenda escolar prioritária. A exemplo, a OBMEP deve ser um evento a ser divulgado e reforçado frequentemente aos alunos, bem como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Há necessidade de um trabalho contínuo coletivamente, desde as primeiras séries do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. **Ministério de Educação e Cultura.** LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996.

[2] CASTRO, Rodrigo Teixeira Monteiro de; GOMES, Celso Augusto dos Santos; GUIMARÃES JÚNIOR, Ernani Souza. **O DESEMPENHO DOS COLÉGIOS MILITARES NO SISTEMA PÚBLICO DE ENSINO**. Revista Estudo e Debate, [S. l.], v. 25, n. 1, 2018. DOI: 10.22410/issn.1983-036X.v25i1a2018.1664. Disponível em: https://www.univates.br/revistas/index.php/estudoedebate/article/view/1664. Acesso em: 21/09/2024.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

[4] Steiner-Khamsi, G. **Cross-national policy borrowing: understanding reception and translation.** Asia Pacific Journal of Education, 34(2), p. 153–167. 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1080/02188791.2013.875649. Acesso em: 21/09/2024

[5] SANTAROSA, M. C. P. **Ensaio sobre a aprendizagem significativa no ensino de matemática.** Aprendizagem Significativa em Revista, v.6, n.3 (2016). Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID92/v6_n3_a2016.pdf. Acesso em: 30/09/2024.

[6] FURTADO, Renan Santos; SILVA, Vergas Vitória Andrade da. **A REFORMA EM CURSO NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO E A NATURALIZAÇÃO DAS DESIGUALDADES ESCOLARES E SOCIAIS.** e-Curriculum, São Paulo , v. 18, n. 1, p. 158-179, jan. 2020 . Disponível em: https://doi.org/10.23925/1809-3876.2020v18i1p158-179. Acessos em: 12/09/2024.

[7] Vieira Oliveira, Z., Alvim, M. H. **Dimensões da abordagem histórica no Ensino de Ciências e de Matemática.** Caderno Brasileiro De Ensino De Física, 38(1), 742–774, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.5007/2175-7941.e74838. Acesso em: 19/09/2024.

[8] Zuchi Siple, I., Bar de Figueiredo, E., & Sabatke Herbst, J.. **Ideias fundamentais do cálculo no Ensino Médio: uma abordagem da PG à luz da resolução de problemas.** Com a Palavra, O Professor, v.7, n.18, 89–116. Disponível em: http://www.revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/810. Acesso em: 06/11/2023.

[9] JUNGES, F. C.; KETZER, C. M.; OLIVEIRA, V. M. A. de. **Formação continuada de professores: Saberes ressignificados e práticas docentes transformadas.** Educ. Form., [S. l.], v. 3, n. 9, p. 88–101, 2018. DOI: 10.25053/redufor.v3i9.858. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/redufor/article/view/858. Acesso em: 12/09/2024.

[10] MOURA, Luis Carlos; ALVES, Deive Barbosa. **Modelagem Matemática para a Aprendizagem Significativa Crítica.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1–24, 2022. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/3929. Acesso em: 10/10/2024.

[11] MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

[12] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[13] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v.1, 14.ed. 2014.

[14] MUNIZ, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

[15] MUNIZ, Antonio Caminha. **Geometria.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] NETO, Alyrio A.. **Cálculo integral para o Ensino Médio.** Revista do Professor de Matemática Online, Garanhuns, Pernambuco, v.7, n.1, 2019, p. 133-156, 06/2019. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710. Acesso em: 23/10/2023.

[17] DECKER, Aline; EVANGELISTA, Olinda. **Educação na lógica do Banco Mundial: formação para a Sociabilidade Capitalista.** Roteiro, Joaçaba , v. 44, n. 3, jan. 2019 . Disponível em: https://doi.org/10.18593/r.v44i3.23206. Acesso em: 06/11/2023.

[18] VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de problemas em Educação Matemática e o desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior.** REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS,

v. 7, n. especial, p. e4001, 2021. Disponível em: http://dx.doi.org/10.35819/remat2021v7iespecialid5485. Acesso em: 23/10/2023.

[19] HONÓRIO, Hugo Luiz Gonzaga; SCORTEGAGNA, Liamara. **Invertendo a sala de aula: processo para a implementação da metodologia sala de aula invertida com elementos de colaboração no ensino de matemática.** Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 7, n. 2, 2017. Disponível em: https://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/4414. Acesso em: 13/05/2024.

[20] ORFALI, Fabio. **A conciliação das ideias do cálculo com o currículo da educação básica: o raciocínio covariacional**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.11606/T.48.2018.tde-05112018-161520. Acesso em: 23/10/2023.

[21] SOUZA, Debora Vieira de. **O uso de problemas matemáticos no Ensino Superior sob o viés da Aprendizagem Baseada em Problemas.** Revista de Educação Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 16, n. 22, p. 270–283, 2019. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/222. Acesso em: 13/04/2024.

[22] PRIOSTE, Claudia Dias. **Hipóteses docentes sobre o fracasso escolar nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Educação E Pesquisa, 46, e220336. 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1678-4634202046220336. Acesso em: 19/05/2024.

[23] OLIVEIRA, Marcelo de Sousa. **Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco**. Revista BOEM, Florianópolis, v. 7, n. 14, p. 79–93, 2019. DOI: 10.5965/2357724X07142019079. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/16816. Acesso em: 20/04/2024.

[24] MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1982.

[25] SANTOS, Silvia Reis dos. **O aprendizado baseado em problemas - PBL.** Revista Brasileira De Educação Médica, 18(3),1994, 121–124. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1981-5271v18.3-005. Acesso em: 19/05/2024.

[26] BALL, Stephen J. **Global Education Inc. New Policy Networks and the Neoliberal Imaginary.** Londres: Routledge, 2012.

[27] FERRETTI, C. J.. **A reforma do Ensino Médio e sua questionável concepção de qualidade da educação.** Estudos Avançados, 32(93), 25–42. 2018. Disponí-

vel em: https://www.scielo.br/j/ea/a/RKF694QXnBFGgJ78s8Pmp5x/#. Acesso em: 08/10/2024.

[28] BOAVIDA, A. M. **Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática.** Lisboa: Revista Educação e Matemática, 2001, n. 63, p. 11-15. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1006. Acesso em: 12/10/2024.

5 Plano de aula A

PLANO DE AULA

Instituição: xxxxxxxxxxxxx
Professor: Pablo Souza da Silva
Data:
Duração: 5 aulas de 45minutos
Turma: 3ª série do ensino médio
Disciplina: Matemática

1. Conteúdo: Sequências e padrões numéricos ou geométricos. Progressões geométricas e suas relações com a função exponencial.

2. Competência específica: CE5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3. Habilidades:

(EM1MAT512) Identificar padrões em uma sequência de números ou de figuras e fazer sua generalização.

(EM1MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

4. Desenvolvimento do Conteúdo:

Introdução:

Problema: Pedro está se formando no ensino médio e, após realizar algumas pesquisas, pretende comprar uma moto no valor de $R\$17.000,00$. Mas Pedro ainda têm dúvidas sobre o método da compra, pois não sabe se financia a moto através de um banco ou realiza uma aplicação na poupança para comprar a moto. Qual a forma mais vantajosa para Pedro?

Desenvolvimento:

Consideremos uma anuidade onde fazemos depósitos regulares de P ao final de cada período por n períodos a uma taxa de juros i por período. O valor futuro S da anuidade é a soma do valor futuro de cada depósito individual. Cada depósito P cresce para $P(1 + i)^k$ ao final de n períodos, onde k é o número de períodos que cada depósito cresce. O primeiro depósito cresce por $n - 1$ períodos, o segundo por $n - 2$ períodos, até o último depósito que não cresce pois é feito ao final do último período. Portanto, o valor futuro S é a soma:

$$S = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \cdots + P(1+i) + P$$

podemos fatorar P para obter:

$$S = P[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1]$$

Esta é uma soma de uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1 = 1$, a razão $q = 1 + i$, e n termos. A soma S_n de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

substituindo $a = 1, r = 1 + i$, e ajustando para nossa fórmula, temos:

Figura 5.1: Descrição da Imagem

$$S = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Assim, demonstramos que o valor futuro S de uma série de depósitos regulares P em uma conta que rende uma taxa de juros r por período ao longo de n períodos.

Considerando o objetivo de Pedro (nome fictício) de poupar para a compra de uma moto no valor de R$ 17.000,00, ajustamos o período de poupança para 48 meses, com uma taxa de juros de 5% ao ano, capitalizada mensalmente. O objetivo é determinar o valor que Pedro deve poupar mensalmente para alcançar sua meta ao final deste período. Utilizamos a seguinte fórmula do valor futuro de uma anuidade, considerando a capitalização mensal dos juros:

$$S = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

onde:

- $S = 17000$ é o valor futuro desejado,
- P é o valor do depósito mensal,
- $I = 5\%$ é a taxa de juros anual,
- $n = 4$ é o número total de anos,
- $n \times 12 = 48$ é o número total de meses.

É necessário fazer a equivalência da taxa de 5% ao ano para taxa mensal utilizando a formula de equivalência dada por

$$1 + i = (1 + I)^n$$

$$1 + i = (1 + 0{,}05)^{\frac{1}{12}}$$

$$1 + i = 1{,}004074$$

$$i = 0{,}004074$$

Rearranjamos a fórmula para encontrar P. Substituindo os valores conhecidos na fórmula, encontramos que o depósito mensal necessário para que Pedro alcance seu objetivo de $R\$\ 17.000{,}00$ em 48 meses é aproximadamente

$$P = \frac{S \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P \approx R\$\ 321{,}38$$

Portanto, para comprar a moto desejada de $R\$\ 17.000{,}00$ em 4 anos, Pedro deve fazer depósitos mensais de cerca de $R\$\ 320{,}66$ em uma conta de investimento que rende 5% ao ano, com juros capitalizados mensalmente. Este exercício demonstra a importância do planejamento financeiro e a eficácia dos juros compostos em alcançar metas de longo prazo. A tabela abaixo mostra, para cada mês, o depósito fixo mensal realizado por Pedro e o saldo acumulado correspondente, considerando uma taxa de juros de 5% ao ano, com capitalização mensal, ao longo de 48 meses.

Figura 5.2: Descrição da Imagem

Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)	Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)
1	321,38	321,38	13	321,38	4281,61
2	321,38	644,07	14	321,38	4620,43
3	321,38	968,07	15	321,38	4960,63
4	321,38	1293,40	16	321,38	5302,22
5	321,38	1620,05	17	321,38	5645,20
6	321,38	1948,03	18	321,38	5989,58
7	321,38	2277,34	19	321,38	6335,36
8	321,38	2608,00	20	321,38	6682,55
9	321,38	2940,01	21	321,38	7031,16
10	321,38	3273,36	22	321,38	7381,18
11	321,38	3608,08	23	321,38	7732,64
12	321,38	3944,16	24	321,38	8085,52

Tabela 7.1: Aplicação dos primeiros 24 meses (Capitalização Mês a Mês)

Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)	Mês	Depósito (R$)	Acumulado (R$)
25	321,38	8439,84	37	321,38	12805,98
26	321,38	8795,60	38	321,38	13179,53
27	321,38	9152,82	39	321,38	13554,60
28	321,38	9511,48	40	321,38	13931,20
29	321,38	9871,61	41	321,38	14309,34
30	321,38	10233,21	42	321,38	14689,01
31	321,38	10596,28	43	321,38	15070,24
32	321,38	10960,83	44	321,38	15453,01
33	321,38	11326,87	45	321,38	15837,35
34	321,38	11694,39	46	321,38	16223,25
35	321,38	12063,41	47	321,38	16610,72
36	321,38	12433,94	48	321,38	16999,78

Tabela 7.2: Aplicação dos últimos 24 meses (Capitalização Mês a Mês)

Simulação de financiamento:

Alguns bancos viabilizam a simulação orçamentária online para compra de automóveis, apenas com alguns dados é possível realizar essa experimentação. E necessário fazer algumas observações, alguns bancos exigem um valor de entrada para a compra do automóvel.

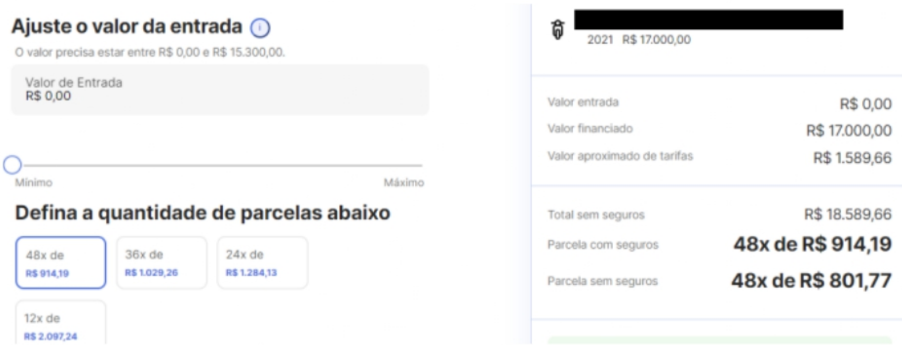
Além disso, há alguns tributos embutidos na compra de um automóvel financiado, como por exemplo o custo efetivo total (CET) é uma medida financeira que inclui todos os custos e despesas associados a um empréstimo ou financiamento, além da taxa de juros. Ele leva em consideração não apenas a taxa de juros nominal, mas também outros encargos como taxas administrativas, seguros, tarifas e impostos. Realizamos duas simulações em bancos, uma no banco S, e outra no banco B.

Figura 5.3: Descrição da Imagem

Figura 7.2: Simulação de financiamento M.

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 7.3: Simulação de financiamento C.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 7.4: Simulação de financiamento S.

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 5.4: Descrição da Imagem

5. Métodos e Técnicas de Ensino:

Aulas expositivas e interativas com resolução de problema.

6. Recursos Didáticos:

- Quadro Magnético;
- Pincel para quadro branco;
- Pincel permanente (diversas cores);
- Data show projetor;
- Notebook;
- Calculadora científica (pode ser substituída por celular);

7. Avaliação:

Prova discursiva com questões de concursos e vestibulares.

8. Referências Bibliográficas:

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação do Pará. Documento Curricular do Estado do Pará – Etapa Ensino Médio: Volume II. Belém: SEDUC-PA, 2021. P.522

MORGADO, Augusto César. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MUNIZ, Antonio Caminha. Fundamentos de Cálculo. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

MUNIZ, Antonio Caminha. Geometria. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Figura 5.5: Descrição da Imagem

6 Lista de Exercícios

[redacted]

DISCIPLINA: Matemática [redacted]
ALUNO (a):_______________________________________
DATA:____/____/____ TURMA:___________

ESTATÍSTICA 1 – PROCENTAGEM

1. O preço de um par de sapatos era R$ 68,00. Em uma liquidação, ele foi vendido com 15% de desconto. Quanto passou a custar?

2. Se uma loja aumentar em 12% o preço de todos os seus produtos, quanto passará a custar um artigo cujo preço era:
a) R$ 40,00?

3. O preço de um produto aumentou de R$ 320,00 para R$ 360,00.
a) Qual é a taxa percentual de aumento?

4. Pesquisando em um site de reserva de hotéis, Jurandir encontrou uma promoção na diária de um hotel na praia, de R$ 250,00 por R$ 210,00. Qual é o percentual de desconto oferecido?

5. usando uma calculadora simples, responda às perguntas seguintes:
a) o preço do quilograma do tomate em um sacolão é R$ 1,28 e sofrerá uma redução de 7,8%. Qual será o novo preço?
b) o aluguel de uma sala comercial é R$ 1 480,00 ao mês. Foi autorizado um aumento de 11,3% no aluguel de imóveis comerciais. Qual será o novo valor?

6. três produtos, A, B e C, sofreram reajustes em um supermercado, como mostrado a seguir.

PRODUTO	PREÇO ANTERIOR (R$)	PREÇO ATUAL(R$)
A	0,40	0,50
B	1,50	1,80
C	0,60	0,75

Compare os aumentos percentuais dos preços dos três produtos.

7. Após um aumento de 24%, o salário bruto de Raul passou a ser de R$ 4 340,00.
a) Qual era o salário bruto de Raul?
b) Supondo que sobre o salário bruto incidam impostos de 16%, determine quanto Raul passará a pagar a mais de impostos por mês.

8. uma companhia aérea promoveu uma redução de R$ 150,00 no preço de uma passagem, o que corresponde a 12% de desconto. Determine o preço da passagem:
a) sem a redução;
b) com a redução.

9 Por meio de uma campanha de redução do consumo de água, um edifício residencial, em um certo mês, reduziu o consumo em 14%, passando a gastar 1075 m³ de água.
a) Qual foi o consumo de água do condomínio no mês anterior?
b) Para o mês seguinte, os moradores comprometeram-se a reduzir o consumo para 1000 m3 de água. Para atingir essa meta, qual deverá ser a nova redução percentual no consumo de água?

10 Seja p o preço de um produto. Determine, em função de p, o novo valor desse produto se ele tiver:
a) aumento de 38%;
b) aumento de 10,5%;
c) desconto de 3%;
d) desconto de 12,4%;
e) dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, respectivamente;
f) dois descontos sucessivos de 20% e 15%, respectivamente;
g) um aumento de 30% seguido de um desconto de 20%;
h) três aumentos sucessivos de 10% cada um.

11. (EsPCEx) No ano de 2010, uma cidade tinha 100.000 habitantes. Nessa cidade, a população cresce a uma taxa de 20% ao ano. De posse dessas informações, a população dessa cidade em 2014 será de
a) 207.360 habitantes.
b) 100.160 habitantes.
c) 180.000 habitantes.
d) 172.800 habitantes.
e) 156.630 habitantes.

12. O preço de um produto é R$ 50,00, e um comerciante decide aumentá-lo em 20%. Diante da insistência de um cliente, o comerciante concede, então, um desconto de 20% sobre o novo preço do produto.
a) ao final dessas "transações", haveria alteração no preço original do produto? Quem "levaria vantagem": o comerciante ou o cliente?
b) Que taxa de desconto deveria ser aplicada diretamente sobre o preço original do produto para que fosse obtido o mesmo valor que seria pago pelo cliente, em caso de compra?

Figura 6.1: Lista de exercícios - 1

13. Atualmente, o pagamento da prestação do apartamento consome 30% do salário bruto de Cláudio. Se a prestação aumentar 10%, que porcentagem do salário de Cláudio ela passará a representar, caso:
a) não haja aumento de salário;
b) o salário aumente 5%;

14. o dono de um restaurante "por quilo" costuma, semanalmente, encomendar de um fornecedor 12 kg de arroz, 8 kg de feijão e 15 kg de batata.
a) Sabendo que os preços do quilograma do arroz, do feijão e da batata, em certa semana, são de R$ 4,00, R$ 3,40 e R$ 2,00, respectivamente, determine o gasto correspondente a esse pedido.
b) Na semana seguinte, os preços do quilograma do arroz, do feijão e da batata sofreram as seguintes variações, respectivamente: 13%, 25%, 16%. Qual foi a variação percentual do gasto do mesmo pedido?

15. Cecília comprou um apartamento por R$ 120 000,00 e o revendeu, dez anos depois, por R$ 450 000,00. Qual o percentual de valorização desse imóvel no período?

16. Expresse na forma percentual:
a) um aumento de R$ 15,00 sobre uma mercadoria que custava R$ 60,00.
b) um desconto de R$ 28,00 em uma mercadoria que custava R$ 168,00.
c) um desconto de R$ 0,27 em um produto que custava R$ 0,90.
d) um aumento de R$ 208,00 em um produto que custava R$ 200,00.

17. (ENEM 2020) Um curso é oferecido aos fins de semana em três cidades de um mesmo estado. Alunos matriculados nesse curso são moradores de cidades diferentes. Eles se deslocam para uma das três cidades onde o curso é oferecido ao sábado pela manhã, pernoitam nessa cidade para participar das atividades no domingo e retornam às suas casas no domingo à noite. As despesas com alimentação e hospedagem são custeadas pela coordenação do curso. A tabela mostra essas despesas, por fim de semana, registradas no ano passado. Para planejar as despesas para o próximo ano, a coordenação precisa levar em conta um aumento de:

Cidade	Alimentação (R$)	Hospedagem (R$)
A	1 400	1 800
B	800	2 000
C	1 500	3 500

• 15% com hospedagem na cidade A;
• 20% com alimentação na cidade B;
• 5% com alimentação na cidade C.

O aumento no orçamento das despesas com alimentação e hospedagem por fim de semana do curso para este ano, em porcentagem, em relação às do ano anterior, é melhor aproximado por
a) 4,6 b) 13,3 c) 31,8
d) 23,9 e) 38,6

18. (ENEM 2021) Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro. A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

a) 10% menor b) 1% menor c) igual
d) 1% maior e) 11% maior

Figura 6.2: Lista de exercícios - 2

7 Teste avaliativo

TESTE AVALIATIVO 04/05/2024

QUESTÃO 1 EAM

Em uma loja de eletroeletrônicos, um aparelho de R$ 1450,00, na virada do mês, passou a custar R$ 1740,00.

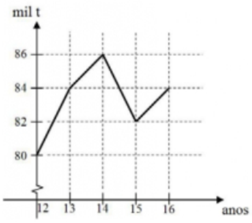
O preço desse aparelho teve um aumento de:

- A 20%
- B 25%
- C 30%
- D 35%
- E 40%

QUESTÃO 2 EEAR

O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção no Estado de São Paulo de um determinado produto agrícola, entre os anos de 2012 e 2016.

Analisando o gráfico, observa-se que a produção



- A aumentou em 10% de 2012 para 2013.
- B de 2016 foi 5% maior que a de 2012.
- C de 2015 foi 10% menor que a de 2014.
- D de 2014 foi 10% maior que a de 2012.

QUESTÃO 3 EAM

Para vender seus produtos, um comerciante reduziu os preços dos brinquedos em 10%. Depois que houve uma recuperação nas vendas, decidiu restaurar o valor antigo.

Sendo assim, o novo preço deve ser aumentado aproximadamente em:

- A 9%
- B 11%
- C 13%
- D 15%
- E 17%

QUESTÃO 4 EAM

Uma padaria produz 800 pães e, para essa produção, necessita de 12 litros de leite.

Se a necessidade de leite é proporcional à produção, se o dono quer aumentar a produção de pães em 25% e se o litro de leite custa R$ 2,50, quanto o dono deverá gastar a mais com a compra de leite para atingir sua meta?

- A R$ 5,00
- B R$ 7,50
- C R$ 20,00
- D R$ 30,00
- E R$37,50

QUESTÃO 5 ESA

Comprei um eletrodoméstico e ganhei do vendedor 5% de desconto sobre o preço da mercadoria. Após falar com o gerente da loja, ele deu um desconto de 10% sobre o novo valor que eu pagaria. Paguei, então, R$ 1.710,00.

Qual era o preço inicial da mercadoria?

- A R$ 1.900,00
- B R$ 1.950,00
- C R$ 2.000,00
- D R$ 2.100,00
- E R$ 2.200,00

Figura 7.1: Avaliação alunos