



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL



LAÉRCIO RODRIGO OLIVEIRA PINHEIRO

**ENSINO DE FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: EXPLORAÇÃO DA
USABILIDADE DO SIMULADOR PHET COMO FERRAMENTA DE
APRENDIZAGEM**

MANAUS, SETEMBRO

2024

LAÉRCIO RODRIGO OLIVEIRA PINHEIRO

**ENSINO DE FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: EXPLORAÇÃO DA
USABILIDADE DO SIMULADOR PHET COMO FERRAMENTA DE
APRENDIZAGEM**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Universidade do Estado do Amazonas como
parte dos requisitos necessários para obtenção
do título de mestre no programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional
- PROFMAT/UEA.

Orientador(a): Dr. João Batista Ponciano

Coorientador(a): Dra. Kelly Alves Marães de
Almeida

MANAUS, SETEMBRO

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

O48e Oliveira Pinheiro, Laércio Rodrigo
Ensino de Frações na Educação Básica: Exploração da Usabilidade do Simulador PHET como Ferramenta de Aprendizagem / Laércio Rodrigo Oliveira Pinheiro . Manaus : [s.n], 2024
73 f.: color.; 21,0 cm.

Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2024.
Orientador: Ponciano, J. B..
Coorientador: Marães, Kelly Alves.

1. Matemática Básica. 2. Ensino de Frações. 3. Metodologias Ativas. 4. Simulação. I. Ponciano, J. B. (Orient.) II . Marães, Kelly Alves (Coorient.) III. Universidade do Estado do Amazonas. IV. Título

CDU(1997)51(043.3)

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO
ESTADO DO AMAZONAS**

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, do aluno **LAÉRCIO RODRIGO OLIVEIRA PINHEIRO**, matrícula nº **2291940007**.

Em 13 de setembro de 2024, às 08h30, na Sala de Videoconferência da Escola Normal Superior no Município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Prof. Dr. João Batista Ponciano, Profa. Dra. Nadime Mustafa Moraes e Profa. Dra. Kelly Karina Santos (Participação Remota), o aluno **LAÉRCIO RODRIGO OLIVEIRA PINHEIRO** apresentou a defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEA, intitulada: "**Ensino de Frações na Educação Básica: Exploração da Usabilidade do Simulador PHET como Ferramenta de Aprendizagem**".

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado ao aluno e aos demais presentes.

Manaus, 13 de setembro de 2024.



Orientador



Membro Interno da Banca Avaliadora

Documento assinado digitalmente

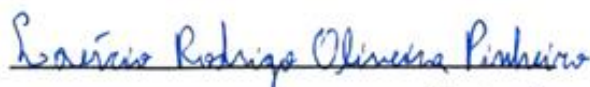
gov.br

KELLY KARINA SANTOS

Data: 13/09/2024 17:07:57-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Membro Externo da Banca Avaliadora



Mestrando

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a minha mãe Maria do Socorro Almeida Oliveira, que mesmo com dificuldades, fez de tudo para me proporcionar uma educação de qualidade, minha noiva Cristia Alice Carvalho de Souza, pelo seu companheirismo e palavras motivacionais, meu irmão Luiz Paulo Oliveira Pinheiro, que sempre me apoiou nessa jornada. O carinho e o amor de vocês foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram de alguma forma para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço a Deus, pois com ele nada é impossível, agradeço ao Professor Dr. João Batista Ponciano por suas orientações, paciência e apoio contínuo ao longo de todo o processo. Sua expertise e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também aos professores do PROFMAT, em especial, Professora Dra. Neide Ferreira Alves, Professora Dra. Nadime Mustafa Moraes, Professor Dr. Almir Cunha da Graça Neto e Professora Dra. Kelly Alves Marães, cujas aulas e orientações foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e profissional. Suas contribuições enriqueceram minha compreensão da Matemática e me inspiraram a continuar buscando conhecimento.

À Universidade do Estado do Amazonas, por me proporcionar a oportunidade de cursar o PROFMAT e o apoio financeiro recebido pela CAPES. Agradeço também aos colegas de trabalho, em especial, Vilmar Cordeiro Félix, que sempre me apoiou nessa jornada, aos amigos discentes, pelo companheirismo, pelos dias de estudos na casa do Anderson, pelos “Workchopps” na casa do Joilson, após cada conquista, e pelas discussões produtivas que tanto contribuíram para o amadurecimento das ideias apresentadas aqui.

À minha família, em especial, minha mãe Maria do Socorro Almeida Oliveira, minha noiva Cristia Alice Carvalho de Souza, meu irmão Luiz Paulo Oliveira Pinheiro, por seu amor, apoio e compreensão ao longo desta jornada. Suas palavras de encorajamento e seu suporte incondicional foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, agradeço a todos que, de maneira direta ou indireta, colaboraram para a concretização deste trabalho. A cada um de vocês, o meu muito obrigado.

RESUMO

O ensino de frações é um aspecto fundamental do currículo escolar e representa uma importante etapa no desenvolvimento matemático dos alunos. No contexto das escolas brasileiras, as frações são uma área de estudo essencial para a compreensão de conceitos como partilha, proporção e raciocínio quantitativo. No entanto, apesar da sua importância, o ensino de frações enfrenta muitos desafios pela ineficácia das abordagens pedagógicas utilizadas. O objetivo desse trabalho é diagnosticar deficiências no ensino de frações na Educação Básica através da análise do desempenho dos alunos nas avaliações PISA 2022, Saeb 2021, ENEM 2023 e sugerir uma abordagem através de simulações virtuais e jogos lúdicos, para o ensino de frações.

Palavras-chave: Matemática básica; Ensino de Frações; Metodologias ativas; Simulação.

ABSTRACT

The teaching of fractions is a fundamental aspect of the school curriculum that plays a crucial role in students' mathematical development. In the context of Brazilian schools, fractions are an essential area of study that allows students to understand fundamental concepts of sharing, proportion, and quantitative reasoning. However, despite its importance, the teaching of fractions often faces challenges regarding students' understanding due to the inefficacy of the pedagogical approaches used. The objective of this work is to diagnose deficiencies in the teaching of fractions encountered in basic education through the analysis of students' performance in the PISA 2022, Saeb 2021, and ENEM 2023 assessments and to suggest an approach using virtual simulations and educational games for teaching fractions.

Keywords: Basic Mathematics; Teaching of Fractions; Active Methodologies; Simulation.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados de Matemática para o 5º ano do Ensino Fundamental - SAEB 2021.	20
Tabela 2 - Resultados de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental - SAEB 2021.	21
Tabela 3 - Resultados de Matemática para as 3ª e 4ª série do Ensino Médio.	22
Tabela 4 - Denominação das frações com denominadores menores que dez.	30
Tabela 5 - Denominação das frações em que o denominador é múltiplo de 10.	31
Tabela 6 - Denominação das frações em que o denominador é maior que 10 e não é múltiplo de 10.	31

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Roleta A e Roleta B, Questão 1 Unidade 4 PISA 2022.	18
Figura 2 - Roleta com números de giros, Questão 2 Unidade 4 PISA 2022.	19
Figura 3 - Medição da corda 1.....	26
Figura 4 - Medição da corda 2.....	26
Figura 5 - Medição da corda 1 em relação a régua.	26
Figura 6 - Medição da corda 2 em relação a régua.	27
Figura 7 - Bolo representando o inteiro.....	28
Figura 8 - Bolo representando $\frac{1}{2}$	28
Figura 9 - Bolo representando $\frac{1}{3}$	28
Figura 10 - Representação de $\frac{1}{5}$	29
Figura 11 - Representação de $\frac{2}{5}$	29
Figura 12 - Representação de $\frac{3}{5}$	29
Figura 13 - Representação de $\frac{4}{5}$	30
Figura 14 - Representação de $\frac{5}{5}$	30
Figura 15 - Pizza $\frac{3}{8}$ doce e $\frac{5}{8}$ salgada.	31
Figura 16 - Preferências dos 8 convidados.	32
Figura 17 - Representação de $\frac{3}{5}$	33
Figura 18 - Representação de $\frac{7}{5}$	33
Figura 19 - Representação do número misto $1\frac{2}{5}$	34
Figura 20 - Transformação do número misto $3\frac{4}{7}$ na fração $\frac{25}{7}$	34
Figura 21 - Três exemplos de frações impróprias aparentes.	35
Figura 22 - Quadro com as representações desenhadas por André e Bernardo.	35
Figura 23 - Representações das frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{18}$	36
Figura 24 - Frações equivalentes a $\frac{2}{3}$	37
Figura 25 - Processo de simplificação da fração $\frac{12}{18}$	37
Figura 26 - Verificação de frações equivalentes.	37

Figura 27 - Frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{6}$	38
Figura 28 - Cálculo do MMC de 3, 4 e 6.....	39
Figura 29 - Multiplicações das frações $\frac{2}{3}$ por 4, $\frac{3}{4}$ por 3 e $\frac{4}{6}$ por 2.....	39
Figura 30 - Representações do copo de Gabriel e Pedro separados e depois juntos.	40
Figura 31 - Representação do copo de Gabriel antes e depois de Pedro beber.	40
Figura 32 - Soma de frações com denominadores diferentes.	41
Figura 33 - Cálculo de soma de frações com denominadores diferentes usando o MMC.	42
Figura 34 - Cálculo de subtração de frações com denominadores diferentes usando o MMC.....	42
Figura 35 - Representação da soma de três parcelas de $\frac{1}{4}$	42
Figura 36 - Representação da multiplicação de frações com denominadores diferentes.	43
Figura 37 - Representação da divisão das 16 castanhas entre os filhos.....	44
Figura 38 - Cálculo da divisão de frações com numeradores e denominadores não múltiplos.....	44
Figura 39 - Layout da tela inicial da simulação "Frações: Intro".....	47
Figura 40 - Layout da opção "Intro".....	47
Figura 41 - Layout da opção "Lab".....	48
Figura 42 - Menu da opção "Jogo".....	48
Figura 43 - "Modo montagem de representações".....	49
Figura 44 - "Modo montagem de frações".....	50
Figura 45 - Layout da tela inicial da simulação "Frações: Igualdade".....	50
Figura 46 - Layout da opção "Lab".....	51
Figura 47 - Tela de menu da opção "Jogo".....	51
Figura 48 - Layout da opção "Jogo".	52
Figura 49 - Tela inicial a simulação "Frações: Números Mistos".	53
Figura 50 - Layout da opção "Intro".....	53
Figura 51 - Menu da opção "Jogo".....	54
Figura 52 - "Modo montagem de representações".....	54
Figura 53 - "Modo montagem dos números mistos".	55
Figura 54 - Layout da opção "Lab".....	56
Figura 55 - Tela inicial da simulação "Construir um Fração".	56
Figura 56 - Menu da opção "Montar uma Fração".	57

Figura 57 - "Modo montagem de representações".....	58
Figura 58 - "Modo montagem de frações".....	58
Figura 59 - Menu da opção "Números Mistos".....	59
Figura 60 - "Modo montagem de representações".....	59
Figura 61 - "Modo montagem de números mistos".....	60
Figura 62 - Layout da opção "Lab".....	61
Figura 63 - Tela inicial da simulação "Associe frações".....	61
Figura 64 - Menu da opção "Frações".....	62
Figura 65 - Layout do jogo "Frações".....	62
Figura 66 - Menu da opção "Números Mistos".....	63
Figura 67 - Layout do jogo "Números Mistos".....	64

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1. Instrumentos de Avaliação Educacional.....	16
2.1.1. Programa Internacional de Avaliação de Estudantes 2022.....	17
2.1.2. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica 2021	20
2.1.3. Exame Nacional do Ensino Médio 2023	22
2.2. Frações e suas operações.....	25
2.2.1. Conceitos iniciais	26
2.2.2. Tipos de frações.....	33
2.2.3. Operações com frações.....	39
2.2.3.1. Adição e Subtração.....	40
2.2.3.2. Multiplicação e Divisão	42
3. PROPOSTA DE ENSINO COM SIMULADOR.....	46
3.1. PhET Colorado	46
3.1.1. Frações: Intro.....	46
3.1.2. Frações: Igualdade.....	50
3.1.3. Frações: Números Mistos.....	52
3.1.4. Construindo frações.....	56
3.1.5. Associe Frações	61
3.1.6. Sugestões de atividades utilizando o simulador PhET	64
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
REFERÊNCIAS	70

1. INTRODUÇÃO

As avaliações educacionais revelam que o Brasil ficou abaixo da média mundial no PISA 2022 na proficiência em Matemática. O teste de 2022 destacou a importância do conhecimento das frações, com alguns itens relacionados a esse tema. O fato de o Brasil ter ficado abaixo da média mundial, sugere que o desconhecimento de conceitos matemáticos elementares, é um ponto crítico na Educação Básica.

No Saeb de 2021, uma análise dos resultados mostra que 21,3% dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental não atingiram o nível 3, o que indica desconhecimento do conceito básico de frações. Apenas 1,4% dos estudantes alcançaram os níveis 9 ou 10, demonstrando um conhecimento profundo sobre frações. Para o 9º ano do Ensino Fundamental, 27,8% dos estudantes ficaram abaixo do nível 2, sinalizando desconhecimento sobre as frações. Ainda nessa etapa escolar, apenas 2,8% dos estudantes superaram o nível 6, onde foi exigida maior habilidade e conhecimento do tema para a resolução de problemas mais complexos. Isso indica que uma parcela significativa dos alunos está progredindo em sua escolaridade sem entender conceitos matemáticos fundamentais, o que pode impactar negativamente sua aprendizagem.

Na 3ª série do Ensino Médio, o cenário é ainda mais preocupante: 54,2% dos estudantes não conseguiram realizar cálculos de reajuste de valor com porcentagem, que requeriam um entendimento básico de frações, e apenas 15,6% desses estudantes conseguiram resolver problemas mais complexos de Probabilidade, o que demandava um conhecimento mais avançado sobre frações. Isso reflete uma deficiência generalizada no entendimento básico de frações, algo que deveria estar consolidado bem antes dessa etapa escolar.

Analisando a prova amarela do ENEM 2023, observa-se que, das 45 questões de Matemática, 10 requeriam conhecimento de frações. Na reaplicação, a análise da prova amarela indica que 26,66% das questões podiam ser resolvidas com o conhecimento de frações, abrangendo temas como relações entre grandezas, porcentagem, escalas e probabilidade. O aumento no número de questões sobre frações na reaplicação da prova sugere que esse conteúdo é considerado fundamental, mas a falta de preparação dos alunos para resolvê-las adequadamente pode estar impactando negativamente seus resultados.

Este trabalho é dividido em quatro itens, o primeiro é a “INTRODUÇÃO”, onde é feito uma contextualização do tema e uma breve apresentação do trabalho, trazendo um resumo do que será abordado nos itens seguintes.

O segundo item é a “FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA”, onde é apresentado uma análise dos resultados das avaliações PISA 2022, SAEB 2021 e ENEM 2023, também neste item é apresentado o conteúdo de frações.

O terceiro item é a “PROPOSTA DE ENSINO COM SIMULADOR”, que contém a apresentação de uma proposta para abordar o tema utilizando recursos digitais, através das simulações disponibilizadas para acesso livre no ambiente “Simulações Interativas para Ciência e Matemática”, criado e mantido pela Universidade do Colorado com a denominação de *PhET Interactive Simulations*. Na proposta, é feita uma breve descrição dos recursos e são sugeridas atividades de aplicação no ambiente escolar.

Por fim, no último item é apresentado as “CONSIDERAÇÕES FINAIS”, nele é refletido a importância do entendimento do conteúdo de Frações e é reforçada a importância da busca de novas propostas de ensino com o uso de materiais manipulativos como as simulações digitais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Instrumentos de Avaliação Educacional

A educação é um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento social e econômico de uma nação. Nesse contexto, as avaliações externas fornecem uma visão objetiva e abrangente sobre o desempenho das instituições de ensino, dos estudantes e do próprio sistema educacional de um país. Essas avaliações são ferramentas essenciais para o diagnóstico, planejamento e implementação de políticas públicas educacionais, pois permitem um diagnóstico preciso da qualidade do ensino oferecido nas Escolas. Por meio de testes padronizados, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) no Brasil, é possível avaliar o desempenho dos alunos em diferentes disciplinas e identificar possíveis áreas de melhoria. Esses dados são fundamentais para monitorar a evolução da aprendizagem ao longo do tempo e comparar o desempenho entre diferentes regiões e grupos socioeconômicos (SOMAVILLA; DE ANDRADE, 2020).

Governos e gestores educacionais podem utilizá-los para identificar as necessidades mais urgentes e direcionar recursos de forma mais eficiente. Por exemplo, se os resultados indicam uma baixa proficiência em Matemática em determinada região, podem ser implementados programas de formação continuada para professores, melhorias no currículo e investimentos em materiais didáticos específicos para essa disciplina (MACHADO, 2020).

A transparência é um dos pilares das avaliações externas. Ao divulgar os resultados de forma pública, as avaliações incentivam a prestação de contas por parte das escolas e dos sistemas educacionais. Pais, alunos e a sociedade em geral têm acesso às informações sobre o desempenho das Escolas, o que promove um ambiente de maior responsabilidade e comprometimento com a qualidade do ensino. Além disso, a transparência dos resultados permite que a comunidade escolar participe de maneira mais ativa na busca por melhorias (DA SILVA, 2023).

As avaliações externas também desempenham um papel motivador para as Escolas e os educadores. Ao serem confrontados com dados objetivos sobre o desempenho de seus alunos, os professores podem refletir sobre suas práticas pedagógicas e buscar novas estratégias de ensino. A competição saudável entre Escolas pode levar à adoção de inovações e melhorias contínuas no ambiente educacional. Os resultados das avaliações também podem contribuir

para a elaboração de programas de reconhecimento e incentivo para professores e Escolas com bom desempenho.

Embora as avaliações externas contribuam de forma significativa, elas não estão isentas de desafios e limitações. Uma das principais críticas é o direcionamento do ensino “para o teste”, onde professores e escolas focam exclusivamente no conteúdo que será avaliado, em detrimento de uma educação mais relevante. Além disso, as avaliações padronizadas podem não capturar todas as nuances e contextos específicos de cada Escola e aluno, levando a interpretações simplistas ou equivocadas dos resultados.

Nesse contexto, será realizada uma análise dos resultados das avaliações PISA 2022, SAEB 2021 e ENEM 2023, considerando o desempenho dos alunos em itens relacionados ao conteúdo de frações.

2.1.1. Programa Internacional de Avaliação de Estudantes 2022

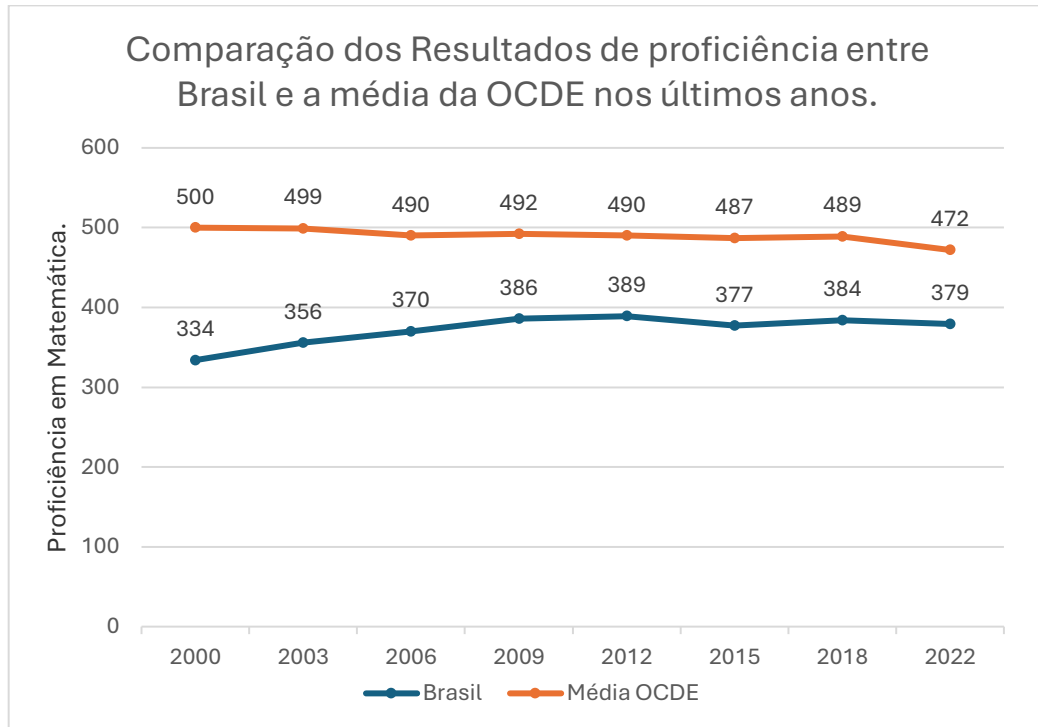
A cada três anos, a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) publica os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), que analisa a qualidade da educação em 79 países. O teste avalia competências em Leitura, Matemática e Ciências. Em cada edição, uma dessas áreas é escolhida como foco principal, e um novo domínio inovador é introduzido para avaliar a proficiência dos alunos. No Pisa 2022, a ênfase foi na Matemática, com o tema do pensamento criativo. O objetivo do exame não se limita a verificar o conhecimento dos jovens sobre os conteúdos aprendidos em sala de aula, mas também a observar sua capacidade de aplicar esse conhecimento em situações da vida real, em diversos ambientes e contextos sociais (JEDUCA, 2023).

O Brasil participou pela primeira vez do Pisa no ano 2000. Ao analisar os resultados globais, os responsáveis pela formulação de políticas e os educadores brasileiros puderam extrair lições das políticas e práticas de outros países.

No geral, os alunos brasileiros sempre tiveram pontuações abaixo da média da OCDE nas disciplinas avaliadas.

No período mais recente (2018 a 2022), houve uma redução na disparidade entre os estudantes com as maiores pontuações (10% com as maiores pontuações) e os estudantes com as menores pontuações (10% com as menores pontuações) em Matemática. Alunos com desempenho mais baixo melhoraram, enquanto os de alto desempenho mostraram um declínio. (BRASIL, 2023).

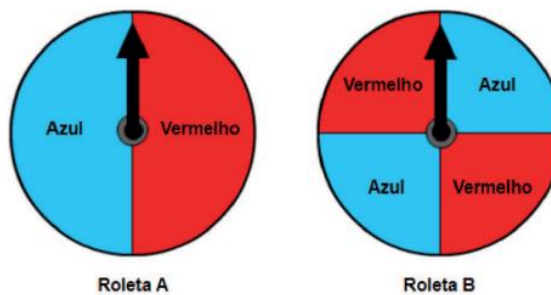
Gráfico 1 - HISTÓRICO DE DESEMPENHO DO BRASIL E A MÉDIA DA OCDE DOS ÚLTIMOS ANOS.



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).

A análise dos itens do PISA 2022 revela três questões centradas no tema de frações na Unidade 4. Na Questão 1, avaliada como nível 3 de dificuldade, aos alunos são apresentadas duas roletas: a primeira dividida em duas áreas iguais (uma azul e outra vermelha), e a segunda dividida em quatro áreas iguais (duas azuis e duas vermelhas).

Figura 1 - Roleta A e Roleta B, Questão 1 Unidade 4 PISA 2022.



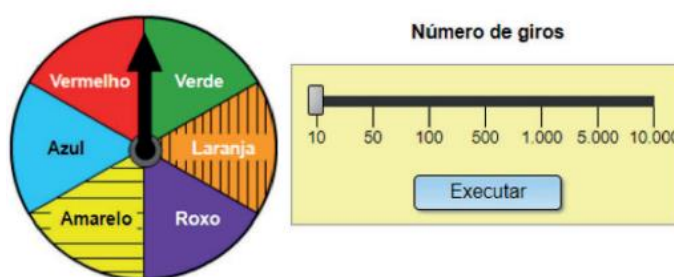
Fonte: PISA 2022 itens públicos de Matemática, INEP.

Para ganhar crédito total, os alunos devem avaliar a afirmação “Pedro acha que há uma maior probabilidade de que a seta pare no azul na Roleta A do que na Roleta B” e justificar sua

resposta. Uma justificativa aceitável seria reconhecer que as probabilidades são $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ para as duas roletas, respectivamente, demonstrando que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são frações equivalentes, indicando que as chances são as mesmas (INEP, 2022a).

Na Questão 2, que apresenta um nível estimado de dificuldade 5, os alunos interagem com um simulador de roleta dividido em seis setores iguais e coloridos. Eles podem realizar simulações de múltiplos giros (10, 50, 100, 500, 1000, 5000 ou 10000).

Figura 2 - Roleta com números de giros, Questão 2 Unidade 4 PISA 2022.



Fonte: PISA 2022 itens públicos de Matemática, INEP.

Os resultados são registrados em uma tabela mostrando a porcentagem de cada cor nos giros simulados. Os alunos são informados que a probabilidade teórica de cada cor na roleta é de $\frac{1}{6}$, e devem analisar uma afirmação, justificando sua resposta. Para obter crédito total, os alunos devem observar que conforme o número de giros aumenta, as porcentagens de cada cor se aproximam de 16,67%, que é aproximadamente $\frac{1}{6}$ em forma de porcentagem (INEP, 2022a).

No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Conseguem selecionar e aplicar estratégias simples de resolução de problemas. Os estudantes situados neste nível são capazes de interpretar e utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente a partir delas. Conseguem desenvolver comunicações curtas que relatam interpretações, resultados e raciocínio (INEP, 2013).

No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Os estudantes situados neste nível são capazes de trabalhar estrategicamente, utilizando habilidades de pensamento e raciocínio abrangentes e bem desenvolvidas, representações conectadas de maneira adequada,

caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. São capazes de refletir sobre suas ações e de formular e comunicar suas interpretações e seu raciocínio (INEP, 2013).

Desde 2012, o PISA tem empregado as mesmas áreas de conteúdo para abordar os fenômenos matemáticos subjacentes às principais categorias de problemas, a estrutura geral da Matemática e as principais dimensões dos currículos escolares. Estas áreas são: Mudanças e Relações, Espaço e Forma, Quantidade e Incerteza de dados (OCDE, 2022).

2.1.2. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica 2021

O Saeb é formado pela Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb), pela Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc), também chamada de Prova Brasil, e pela Avaliação Nacional de Alfabetização (Ana) e teve a primeira edição em 1990 realizada pelo Ministério da Educação (MEC). O objetivo principal de sua criação era recolher dados que oferecessem informações sobre a qualidade da Educação Básica ofertada. As informações deveriam “subsidiar a tomada de decisões destinadas, no primeiro momento, aos gestores do sistema educacional” (PESTANA, 1998, p. 67). A ideia principal era possibilitar e viabilizar, a partir do conhecimento da realidade da educação, ações nas áreas das políticas públicas educacionais (INEP, 2018).

A coleta de dados do Saeb 2021 utilizou dois tipos de instrumentos: testes e questionários. Estudantes do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental, bem como da 3ª e 4ª séries do Ensino Médio, responderam testes de desempenho em Língua Portuguesa e Matemática. Nos testes de Matemática, o foco esteve na resolução de problemas, considerando capacidades como observação, estabelecimento de relações, comunicação (em diferentes linguagens), argumentação e validação de processos. Essas habilidades estimulam formas de raciocínio como intuição, indução, dedução e estimativa (INEP, 2022b).

Os resultados dos dados relacionados a Matemática para o 5º ano do Ensino Fundamental, no ano de 2021 podem ser verificados na Tabela 1.

Tabela 1 - Resultados de Matemática para o 5º ano do Ensino Fundamental - SAEB 2021.

Nível alcançado	Percentual Obtido (%)	Habilidades relacionadas ao conhecimento de frações.
-----------------	-----------------------	--

3	17,5	Associar a fração $\frac{1}{4}$ a uma de suas representações gráficas.
4	18,8	Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, com o apoio de um conjunto de até cinco figuras.
5	16,7	Identificar uma fração como representação da relação parte-todo, com apoio de um polígono dividido em oito partes ou mais.
6	12,6	Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, sem apoio de figuras.
8	3,7	Associar a fração $\frac{1}{2}$ à sua representação na forma decimal. Relacionar 50% à sua representação na forma de fração.
9	1,4	Reconhecer frações equivalentes.

Fonte: INEP 2023.

Os resultados de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental no Saeb 2021 podem ser visualizados na Tabela 2.

Tabela 2 - Resultados de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental - SAEB 2021.

Nível alcançado	Percentual Obtido (%)	Habilidades relacionadas ao conhecimento de frações.
2	16,6	Reconhecer a fração que corresponde à relação parte todo entre uma figura e suas partes hachuradas.
3	18,2	Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete.
5	11,8	Associar uma fração com denominador dez à sua representação decimal.
6	5,3	Reconhecer frações equivalentes.

7	2	Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema. Indicar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes.
---	---	---

Fonte: INEP, 2023.

Os resultados de Matemática dos alunos da 3ª e 4ª séries do Ensino Médio no Saeb 2021 podem ser verificados na Tabela 3.

Tabela 3 - Resultados de Matemática para as 3ª e 4ª série do Ensino Médio.

Nível alcançado	Percentual Obtido (%)	Habilidades relacionadas ao conhecimento de frações.
3	17,4	Reconhecer um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste.
4	12,8	Reconhecer a probabilidade da ocorrência de um evento simples.
5	8	Determinar o percentual que representa um valor em relação a outro. Resolver problemas envolvendo divisão proporcional do lucro em relação a dois investimentos iniciais diferentes. Resolver problemas envolvendo probabilidade de união de eventos.
6	4,3	Resolver problemas de porcentagem envolvendo números racionais não inteiros.
7	2,1	Resolver problemas utilizando probabilidade, envolvendo eventos independentes.

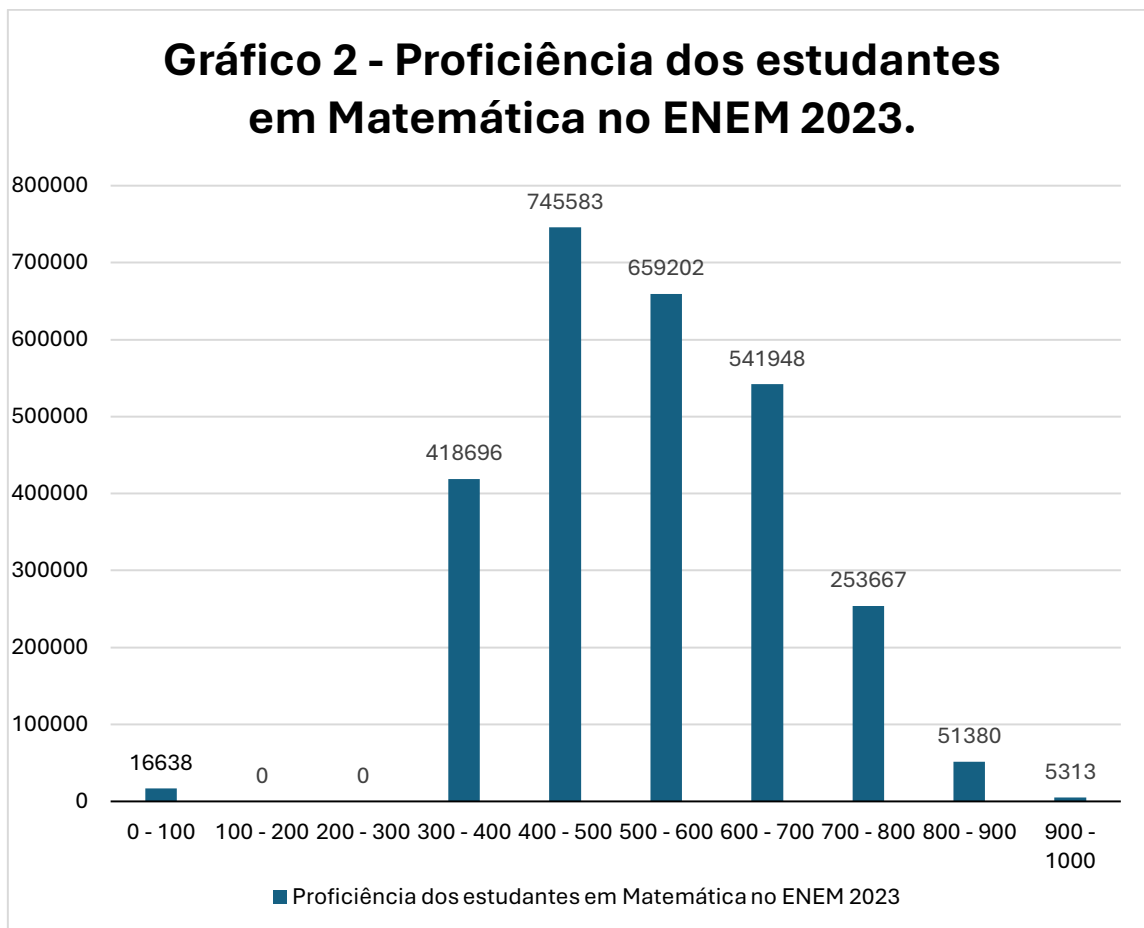
Fonte: INEP, 2023.

2.1.3. Exame Nacional do Ensino Médio 2023

O ENEM é uma prova aplicada anualmente pelo MEC e organizada pelo INEP. Criado em 1998, seu principal objetivo era avaliar o desempenho acadêmico dos alunos ao final da Educação Básica. No entanto, a partir de 2009, o INEP começou a utilizar o exame como uma ferramenta para a admissão dos estudantes no Ensino Superior (INEP, 2024a).

A nota do ENEM passou a ser utilizada por instituições públicas através do Sistema de Seleção Unificada (SISU), que seleciona candidatos para ingresso em cursos superiores. Posteriormente, surgiram outros programas, como o Programa Universidade para Todos (PROUNI) e o Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (FIES), que utilizam a nota do ENEM para oferecer bolsas de estudo e financiamento em instituições privadas de Ensino Superior, respectivamente (Miranda; Azevedo, 2020).

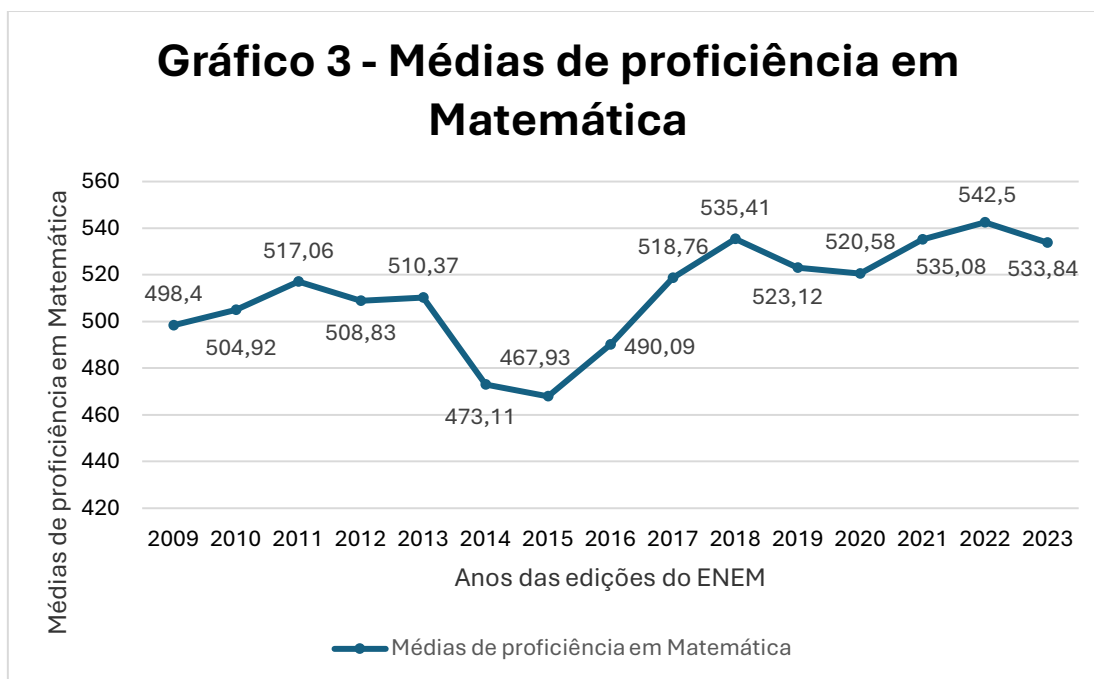
A avaliação do ENEM é composta por uma prova objetiva que é dividida em áreas de conhecimento, cada uma com 45 questões de múltipla escolha: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Além da prova objetiva, o ENEM inclui uma redação dissertativa-argumentativa sobre um tema de relevância social, que deve ser escrita conforme as normas da língua portuguesa e seguir a estrutura proposta. A pontuação do ENEM utiliza a Teoria de Resposta ao Item (TRI), que leva em consideração não apenas o número de acertos, mas também a coerência das respostas e o nível de dificuldade das questões (INEP, 2021).



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).

No ENEM de 2023, foram inscritos 3.933.955 estudantes, desses foram considerados 2.692.427 estudantes que concluíram a avaliação de Matemática. De acordo com o gráfico acima, do universo dos que realizaram a prova de Matemática cerca de 0,62% obtiveram proficiência entre 0 a 100 pontos, aproximadamente 15,55% conseguiram proficiência entre 300 a 400 pontos, um pouco menos de 27,7% alcançaram a proficiência entre 400 a 500 pontos, próximo de 24,48% estão entre 500 a 600 pontos de proficiência, cerca de 20,13% conseguiram proficiência entre 600 a 700 pontos, aproximadamente 9,42% alcançaram a proficiência entre 700 a 800 pontos, um pouco mais de 1,9% conquistaram uma proficiência entre 800 a 900 pontos e perto de 0,2% obtiveram proficiência entre 900 a 1000 pontos (INEP, 2024b).

A média de proficiência em Matemática do Brasil no ENEM de 2023 foi de 533,84 pontos. Fazendo uma análise por região, os dados mostram que, na região Norte a média de proficiência dos estudantes foi de 487,86 pontos e na região Nordeste a média alcançada pelos estudantes foi de 511,63 pontos. Na região Sudeste, os estudantes obtiveram uma média de 565,73 pontos, na região Sul, a média foi de 556,89 pontos e na região Centro-Oeste a média conseguida pelos estudantes foi de 534,16 pontos (INEP, 2024b).



Fonte: Resultados, INEP.

Analisando o Gráfico 3, o histórico das médias de proficiência em Matemática do Brasil das últimas edições do ENEM, podemos observar que a maior média foi obtida em 2022 com 542,5 pontos e a menor média obtida foi em 2015 com 467,93 pontos.

2.2. Frações e suas operações

Na obra “Conteúdo e Metodologia da Matemática Números e Operações”, Marília Centurión (1995, p. 210), a autora firma que:

Quando nos deparamos com perguntas do tipo “Quantos alunos há nesta classe?” obtemos uma resposta contando os alunos. Como cada aluno é um todo, não podemos contar uma “fração” de aluno. Para contar pessoas utilizamos os números naturais, e nossa resposta não poderia ser, por exemplo, “Há 35 alunos e meio”. Dizemos que a quantidade de pessoas é um todo descontínuo, ou discreto, pois pessoas são contadas uma a uma. Contamos, como já vimos, para responder à pergunta “Quantos?”. No entanto, há um outro tipo de pergunta, cuja resposta também é dada através de um número, mas que não é obtida através de contagens: Quanto pesa? Quanto mede? Quanto custa? Todas essas perguntas estão ligadas a ideia de medida.

Perguntas relacionadas a quantidade de algum objeto ou pessoas de um determinado local, estão sempre relacionadas a números naturais, pois estes são os mais básicos e intuitivos de todos os números, eles representam a quantidade de algo que está na sua forma total.

2.2.1. Conceitos iniciais

Entende-se que os números fracionários surgiram quando o homem teve a ideia de medida, ou seja, quando houve uma necessidade de comparar o tamanho de um objeto a outro. Por exemplo, ao comparar o tamanho de uma corda ao tamanho de uma régua de um metro.

Figura 3 - Medição da corda 1.



Fonte: Google Imagens.

Observe que, na Figura 3, para medir o comprimento da corda é necessário usar mais de uma régua.

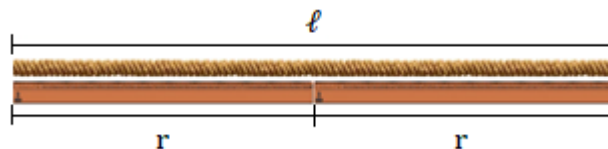
Figura 4 - Medição da corda 2.



Fonte: Google Imagens.

Já na Figura 4, a medida do tamanho da corda é menor que uma régua. Foi lidando com problemas semelhantes a esses que a humanidade desenvolveu o conceito de frações. Vamos utilizar a corda apresentada na Figura 3 para fazer algumas observações.

Figura 5 - Medição da corda 1 em relação a régua.



Fonte: Google Imagens.

l = comprimento da corda.

r = comprimento da régua.

m = medida da corda em relação a régua de 1 metro.

Ao Observar a

Figura 5, pode-se escrever as seguintes relações:

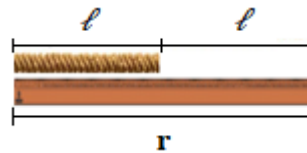
$$\ell \div r = m \quad \text{ou} \quad \frac{\ell}{r} = m$$

Neste caso, observa-se que, $\ell = 2r$, ao aplicar essa igualdade na divisão, tem-se:

$$\frac{\ell}{r} = \frac{2r}{r} = 2$$

Logo conclui-se que o tamanho da corda da Figura 5 é igual a 2 metros. Agora, usando a Figura 4 é possível fazer algumas considerações.

Figura 6 - Medição da corda 2 em relação a régua.



Fonte: Google Imagens.

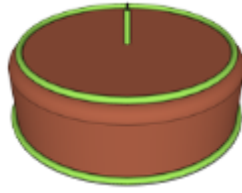
Nessa situação, nota-se intuitivamente que, $r = 2\ell$, ao substituir essa igualdade na divisão, tem-se:

$$\frac{\ell}{r} = \frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{2}$$

Conclui-se que o tamanho da corda na Figura 6 é de $\frac{1}{2}$ metro. A fração é um número que nos permite representar parte de um todo. Seguindo essa ideia, considere a seguinte situação envolvendo um bolo de chocolate de uma determinada festa de aniversário.

No início do aniversário, nenhum convidado tinha comido bolo, então ele ainda estava inteiro como é visto na Figura 7. Na Matemática, o inteiro é representado pelo número 1.

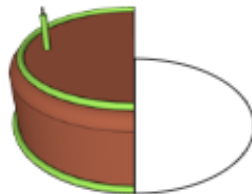
Figura 7 - Bolo representando o inteiro.



Fonte: PhET Colorado.

Após cantarem os parabéns, alguns convidados comeram bolo, restando somente a metade dele, como é observado na Figura 8. A parte que sobrou é $\frac{1}{2}$ do bolo.

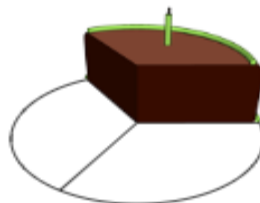
Figura 8 - Bolo representando $\frac{1}{2}$.



Fonte: PhET Colorado.

Após um momento, alguns convidados voltaram a comer novamente do bolo, restando apenas uma terça parte dele, como é notado na Figura 9. Assim pode-se dizer que a parte restante representa $\frac{1}{3}$ do bolo.

Figura 9 - Bolo representando $\frac{1}{3}$.



Fonte: PhET Colorado.

Foi apresentado uma situação no nosso cotidiano em que a ideia de frações é empregada. Ao dividir algo inteiro em partes iguais, cada uma das partes é considerada como unidade fracionária. Uma ou mais unidades fracionárias juntas constituem uma fração.

Aprofundando um pouco mais nesse conceito, considere a figura dividida em 5 partes iguais e cada uma das partes divididas como $\frac{1}{5}$ dela.

Figura 10 - Representação de $\frac{1}{5}$.



Fonte: PhET Colorado.

Na Figura 10, tem-se uma única parte da figura destacada, isso significa que ela representa $\frac{1}{5}$.

Figura 11 - Representação de $\frac{2}{5}$.



Fonte: PhET Colorado.

Na Figura 11, foram destacadas duas partes da figura. Logo, pode-se afirmar que ela representa $\frac{2}{5}$.

Figura 12 - Representação de $\frac{3}{5}$.



Fonte: PhET Colorado.

Note que na Figura 12 temos três partes pintadas, então significa que elas representam

$\frac{3}{5}$.

Figura 13 - Representação de $\frac{4}{5}$.

Fonte: PhET colorado.

Na Figura 13 podemos observar que foram 4 partes pintadas, então conclui-se que elas representam $\frac{4}{5}$.

Figura 14 - Representação de $\frac{5}{5}$.

Fonte: PhET Colorado.

Por fim, na Figura 14, todas as cinco partes estão coloridas, então elas representam $\frac{5}{5}$, ou o inteiro. Algebricamente frações são definidas como o quociente de dois números naturais respeitando as seguintes condições:

$$\frac{n}{d}, \text{ com } n, d \in \mathbb{N} \text{ e } d \neq 0$$

O número que fica abaixo do traço (**d**) é chamado de denominador, ele indica em quantas partes a unidade foi dividida na ilustração da fração e o número que fica acima do traço (**n**) é chamado de numerador, ele determina quantas partes estão sendo consideradas na representação da fração.

Observa-se no quadro a seguir, como fazer a denominação das frações em relação aos seus numeradores e denominadores menores que dez.

Tabela 4 - Denominação das frações com denominadores menores que dez.

Fração	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

Denominação	Um meio	Dois terços	Três quartos	Quatro quintos	Cinco sextos	Seis sétimos	Sete oitavos	Oito nonos
--------------------	------------	----------------	-----------------	-------------------	-----------------	-----------------	-----------------	---------------

Fonte: Autoria própria.

Quando os denominadores são múltiplos de 10, a fração recebe uma denominação diferente.

Tabela 5 - Denominação das frações em que o denominador é múltiplo de 10.

Fração	$\frac{7}{10}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{361}{1000}$
Denominação	Sete décimos.	Trinta e sete centésimos.	Trezentos e sessenta e um milésimos.

Fonte: Autoria própria.

No caso de denominador maior que 10 e não múltiplos de 10, a denominação é o nome do numerador depois o nome do denominador seguido da palavra avos.

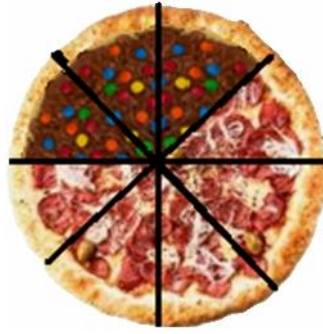
Tabela 6 - Denominação das frações em que o denominador é maior que 10 e não é múltiplo de 10.

Fração	$\frac{15}{17}$	$\frac{133}{257}$	$\frac{683}{1208}$
Denominação	Quinze, dezessete avos.	Cento e trinta e três, duzentos e cinquenta e sete avos.	Seiscentos e oitenta e três, mil duzentos e oito avos.

Fonte: Autoria própria.

Suponha a seguinte situação, José foi a pizzaria com sua mãe e seu irmão. Como ele queria comer pizza doce e salgada, ele fez o pedido de uma pizza grande de oito fatias, com três fatias doces e cinco salgadas, como mostra a Figura 15.

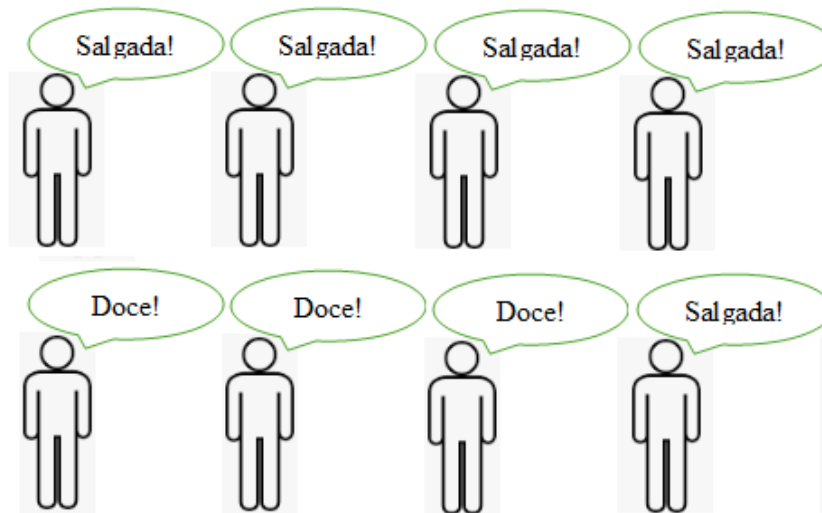
Figura 15 - Pizza $\frac{3}{8}$ doce e $\frac{5}{8}$ salgada.



Fonte: Google Imagens.

Considerando que todas as fatias da pizza possuem o mesmo tamanho, podemos considerar que a fração $\frac{3}{8}$ que representa a parte doce da pizza. A fração que representa a parte salgada da pizza é $\frac{5}{8}$. Outro dia, na mesma pizzaria, José foi comemorar seu aniversário. Ao perguntar qual tipo de pizza os convidados preferiam, obteve os resultados mostrados na Figura 16.

Figura 16 - Preferências dos 8 convidados.



Fonte: Google Imagens.

Podemos ver que dos oito convidados, três preferem pizzas doces e cinco preferem pizzas salgadas, logo a fração que representa a quantidade de convidados que querem pizzas doces é de $\frac{3}{8}$, e a fração que representa a quantidade de convidados que preferem pizzas salgadas é de $\frac{5}{8}$.

Nas duas situações as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ são empregadas, porém na primeira situação as frações representam partes de um inteiro, nesse caso, podem ser feitas as representações de diversas frações, pois o inteiro pode ser dividido em várias partes de mesmo tamanho. Na segunda situação, as frações representam partes de uma quantidade, nesse exemplo, não podemos representar qualquer fração, pois o número 8 só é divisível por 1, 2, 4 e 8, logo não podemos representar por exemplo a fração $\frac{5}{6}$.

2.2.2. Tipos de frações

As frações podem ser classificadas em dois tipos, frações próprias e frações impróprias. Observe as representações abaixo.

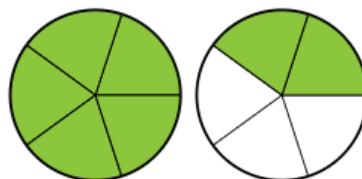
Figura 17 - Representação de $\frac{3}{5}$.



Fonte: PhET Colorado.

Na Figura 17, está sendo representada a fração $\frac{3}{5}$, pois são consideradas três partes de um inteiro que foi dividido em cinco partes, note que é usado somente um inteiro para a ilustração.

Figura 18 - Representação de $\frac{7}{5}$.



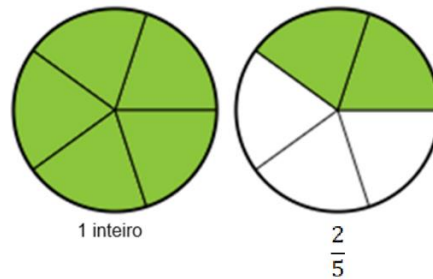
Fonte: PhET Colorado.

Na Figura 18, que representa a fração $\frac{7}{5}$, pois são consideradas sete partes de um inteiro que foi dividido em cinco partes, foi necessário usar mais de um inteiro para ilustrar a fração.

Neste caso, a fração $\frac{3}{5}$ é classificada como fração própria e a fração $\frac{7}{5}$ é classificada como imprópria.

Considerando a Figura 18, podemos escrever a fração imprópria em um número que possui uma parte inteira e outra fracionária, um número misto, como mostra a Figura 19.

Figura 19 - Representação do número misto $1\frac{2}{5}$.



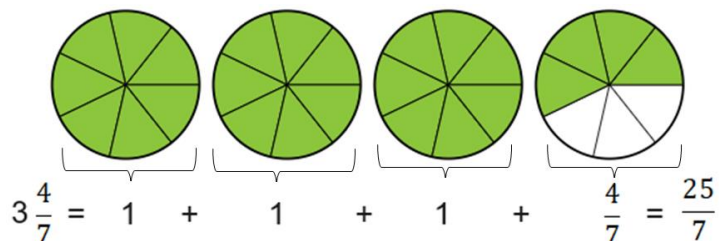
Fonte: PhET Colorado.

Logo, é possível escrever a seguinte igualdade,

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$$

Também podemos representar um número misto em uma fração imprópria. Observe, na Figura 20, como transformamos o número misto $3\frac{4}{7}$ em uma fração imprópria.

Figura 20 - Transformação do número misto $3\frac{4}{7}$ na fração $\frac{25}{7}$.



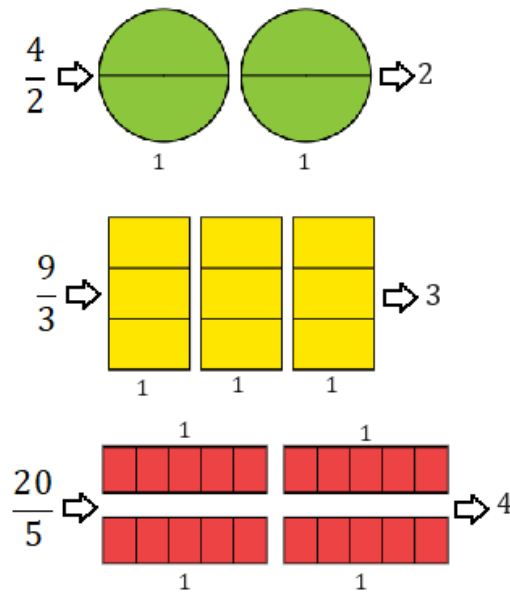
Fonte: PhET Colorado.

Sintetizando o que foi feito acima: conservamos o denominador da parte fracionária, e o numerador será o resultado da multiplicação da parte inteira pelo denominador (pois cada inteiro é igual a sete partes fracionárias), adicionado ao numerador.

$$3\frac{4}{7} = \frac{\text{parteinteira} \cdot \text{denominador} + \text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{21 + 4}{7} = \frac{25}{7}$$

Quando o numerador é múltiplo do denominador, a fração imprópria é denominada fração aparente, pois elas representam um número natural. Exemplos de frações aparentes podem ser visualizados na Figura 21.

Figura 21 - Três exemplos de frações impróprias aparentes.

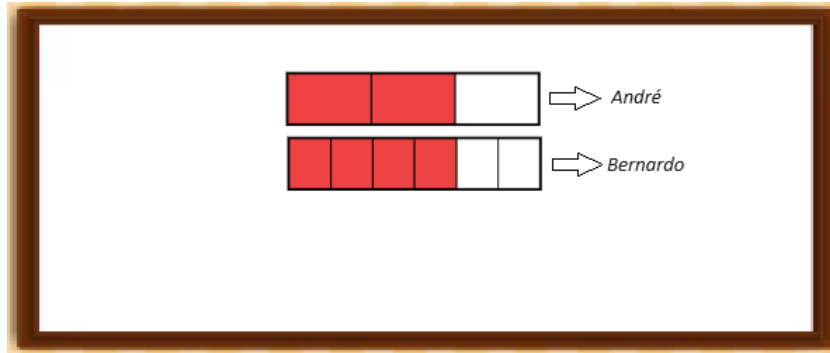


Fonte: PhET Colorado.

Observando as ilustrações das frações na Figura 21, concluímos que $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{9}{3} = 3$ e $\frac{20}{5} = 4$.

Agora, considere a situação envolvendo dois alunos de uma sala de aula: o professor de Matemática pediu para que André desenhasse a representação da fração $\frac{2}{3}$ e para que Bernardo desenhasse a representação da fração $\frac{4}{6}$. As representações obtidas são mostradas na **Figura 22**.

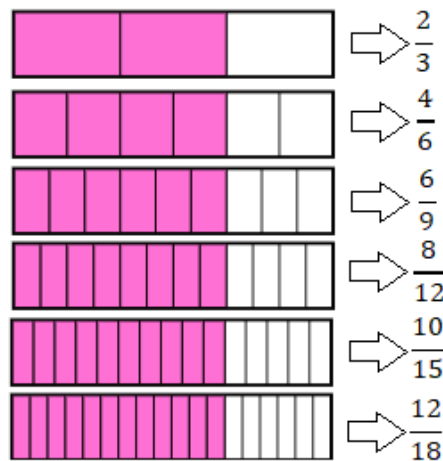
Figura 22 - Quadro com as representações desenhadas por André e Bernardo.



Fonte: Google Imagens e PhET Colorado.

Observe que a parte pintada de vermelho nas duas representações tem o mesmo tamanho em relação ao inteiro. Quando duas frações representam a mesma quantidade do inteiro, dizemos que essas frações são equivalentes. Observe na Figura 23, outras frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e suas representações.

Figura 23 - Representações das frações $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$ e $\frac{12}{18}$



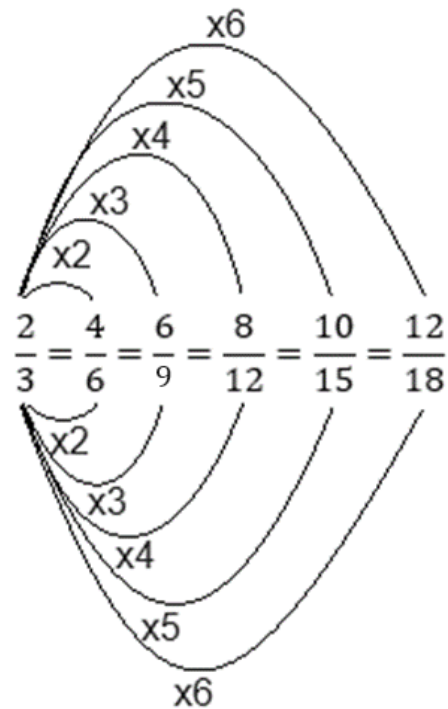
Fonte: PhET Colorado.

Então, podemos escrever as seguintes igualdades,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18}$$

Associamos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo número, como mostra a Figura 24.

Figura 24 - Frações equivalentes a $\frac{2}{3}$.



Fonte: Elaboração própria.

Simplificar frações também é uma maneira de encontrar frações equivalentes.

Figura 25 - Processo de simplificação da fração $\frac{12}{18}$.

$$\frac{12:2}{18:2} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Fonte: Autoria própria.

A **Figura 25** ilustra o processo de simplificação de uma fração, que consiste em dividir o numerador e o denominador por um mesmo número até que não seja mais possível efetuar a divisão por um mesmo número diferente de 1. O resultado é uma fração chamada irredutível.

Uma forma simples de verificar se duas frações são equivalentes é multiplicar o numerador de uma pelo denominador da outra e verificar se os resultados são iguais. A **Figura 26** mostra dois exemplos dessa verificação.

Figura 26 - Verificação de frações equivalentes.

Exemplo 1		Exemplo 2	
$\frac{4}{5}$	$\frac{64}{80}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{21}{45}$
$\Rightarrow 5 \cdot 64 = 320$	$\Rightarrow 4 \cdot 80 = 320$	$\Rightarrow 7 \cdot 21 = 147$	$\Rightarrow 3 \cdot 45 = 135$

Fonte: Autoria própria.

No Exemplo 1 os resultados são iguais, logo as duas frações são equivalentes, enquanto no Exemplo 2 os resultados são diferentes, logo as duas frações não são equivalentes.

Utilizando frações equivalentes, podemos resolver problemas de comparação de frações. Considere a seguinte situação: em um jogo de tiro ao alvo, Amanda, Bárbara e Cristia disputam quem acerta mais o alvo. As três têm a mesma quantidade de oportunidades no jogo, Amanda conseguiu acertar o alvo em $\frac{2}{3}$ das oportunidades, Bárbara atingiu o alvo em $\frac{3}{4}$ das oportunidades e Cristia acertou o alvo em $\frac{4}{6}$ das oportunidades. Quem acertou mais vezes o alvo?

Para responder esse tipo de problema, devemos descobrir qual das três frações representa a quantidade maior. Para isso devemos fazer a comparação entre as três, ou seja, devemos substituir essas frações por frações equivalentes com o mesmo denominador. Observe na Figura 27 algumas frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{6}$.

Figura 27 - Frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{6}$

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \\ \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} \\ \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{18}{24} = \frac{24}{30} \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

As frações equivalentes, circuladas em vermelho, possuem o mesmo denominador. Portanto, podemos substituir as frações anteriores por essas equivalentes a elas. Logo teremos,

$$\text{Amanda: } \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \quad \text{Bárbara: } \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \text{Cristia: } \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

Mostrando que Amanda aproveitou $\frac{8}{12}$ das chances, Bárbara acertou $\frac{9}{12}$ das oportunidades e Cristia conseguiu acertar $\frac{8}{12}$ das chances. Amanda e Cristia acertaram a mesma quantidade e o numerador da fração que representa a quantidade de acertos de Bárbara é maior que os numeradores das outras frações. Portanto, conclui-se que Bárbara acertou mais vezes.

Outra forma de resolver esse problema é calcular o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) dos denominadores, como mostrado na Figura 28.

Figura 28 - Cálculo do MMC de 3, 4 e 6.

$$\begin{array}{r|l}
 3, 4, 6 & 2 \\
 3, 2, 3 & 2 \\
 3, 1, 3 & 3 \\
 1, 1, 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

O MMC dos denominadores é 12, que se tornará o denominador comum das três frações equivalentes. Intuitivamente, podemos observar que, para transformar o denominador 3 em 12, a fração deve ser multiplicada por 4; para transformar o denominador 4 em 12, deve-se multiplicar por 3; e para converter o denominador 6 em 12, é necessário multiplicar a fração por 2. A Figura 29 apresenta as frações e os resultados dessas multiplicações.

Figura 29 - Multiplicações das frações $\frac{2}{3}$ por 4, $\frac{3}{4}$ por 3 e $\frac{4}{6}$ por 2.

$$\begin{array}{l}
 \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \\
 \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \\
 \frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{8}{12}
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

Agora que já descobrimos quais frações equivalentes têm o mesmo denominador, basta compará-las e observar que a maior é $\frac{9}{12}$. Por fim, concluímos que Bárbara foi quem conseguiu maior número de acertos. A segunda resolução exige que o aluno tenha conhecimento prévio de múltiplos e divisores.

2.2.3. Operações com frações

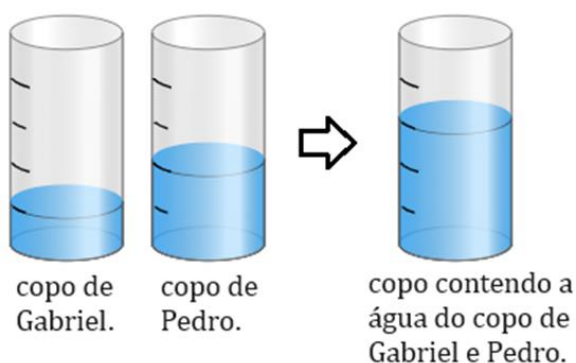
As quatro operações básicas da Matemática, assim como nos números naturais, também são aplicadas em situações cotidianas envolvendo frações. A seguir, são apresentadas algumas dessas situações.

2.2.3.1. Adição e Subtração

Gabriel e Pedro fizeram uma experiência envolvendo três copos com água. Gabriel encheu seu copo até $\frac{1}{5}$ de sua capacidade e Pedro encheu seu copo até $\frac{2}{5}$ de sua capacidade. Em seguida, os dois derramaram a água em um terceiro copo. A

Figura 30 ilustra a situação descrita.

Figura 30 - Representações do copo de Gabriel e Pedro separados e depois juntos.



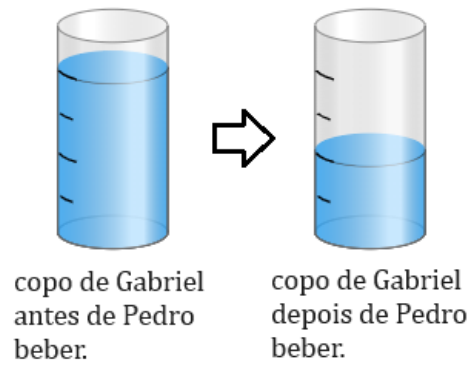
Fonte: PhET Colorado.

A fração no terceiro copo resulta da soma dos volumes de água dos dois copos anteriores. Portanto, é a soma das frações que representam esses volumes.

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$

Em outro momento, Gabriel encheu novamente seu copo até $\frac{4}{5}$ do seu volume e Pedro bebeu a parte correspondente a $\frac{2}{5}$ do volume total do copo de Gabriel. A Figura 31 mostra o copo de Gabriel antes e depois de Pedro beber a água.

Figura 31 - Representação do copo de Gabriel antes e depois de Pedro beber.



Fonte: PhET Colorado.

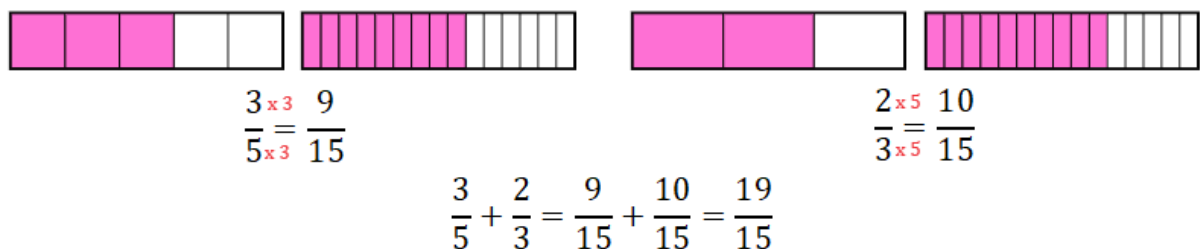
Note que, quando Pedro bebe parte da água do Copo de Gabriel, ele está retirando uma parte correspondente a $\frac{2}{5}$ de seu volume. Ou seja, ele está subtraindo $\frac{2}{5}$ da fração que representa o volume de água que estava no copo de Gabriel. Desta forma, obtém-se a seguinte igualdade,

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4 - 2}{5} = \frac{2}{5}$$

Em ambas as operações, os denominadores das frações são iguais e permanecem inalterados no resultado. Portanto, na adição ou subtração de frações com denominadores iguais, o denominador é mantido, e os numeradores são operacionados.

Quando os denominadores das frações são diferentes, pode-se substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. A Figura 32 ilustra a soma de duas frações com denominadores diferentes.

Figura 32 - Soma de frações com denominadores diferentes.



Fonte: PhET Colorado.

Uma maneira simples de encontrar frações equivalentes é utilizando o MMC dos denominadores, conforme mostra a Figura 33.

Figura 33 - Cálculo de soma de frações com denominadores diferentes usando o MMC.

$$\begin{array}{r}
 3, 5 \mid 3 \\
 1, 5 \mid 5 \\
 1, 1 \mid 3 \cdot 5 = 15
 \end{array}
 \quad
 \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{15} + \frac{2 \cdot 5}{15} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9 + 10}{15} = \frac{19}{15}$$

Fonte: Autoria própria.

A subtração segue a mesma lógica. A Figura 34 mostra a resolução de uma subtração de frações com denominadores diferentes.

Figura 34 - Cálculo de subtração de frações com denominadores diferentes usando o MMC.

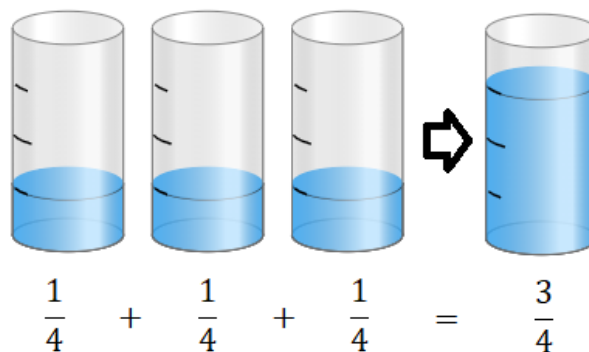
$$\begin{array}{r}
 5, 10 \mid 2 \\
 5, 5 \mid 5 \\
 1, 1 \mid 2 \cdot 5 = 10
 \end{array}
 \quad
 \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{10} - \frac{1 \cdot 5}{10} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6 - 5}{10} = \frac{1}{10}$$

Fonte: Autoria própria.

2.2.3.2. Multiplicação e Divisão

Em um dia chuvoso, Francisco decidiu colocar três copos no seu quintal para observar a quantidade de água que seria capturada pelos copos. Ao final da chuva ele observou que em cada copo havia água ocupando $\frac{1}{4}$ do volume total do copo. Então ele decidiu juntar a água contida nos três copos em um único copo. A Figura 35 ilustra a situação descrita.

Figura 35 - Representação da soma de três parcelas de $\frac{1}{4}$.



Fonte: PhET Colorado.

Essa soma de três parcelas iguais pode ser escrita de outra forma.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo, percebe-se que na multiplicação de uma fração por um número natural, somente o numerador é multiplicado. Como $3 = \frac{3}{1}$, tem-se que

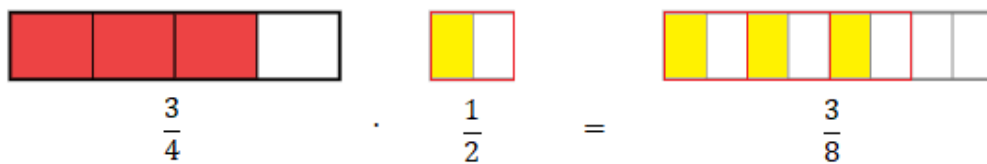
$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Na multiplicação de duas frações, multiplica-se os numeradores e em seguida faz-se o produto dos denominadores.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

A Figura 36 ilustra a multiplicação acima.

Figura 36 - Representação da multiplicação de frações com denominadores diferentes.



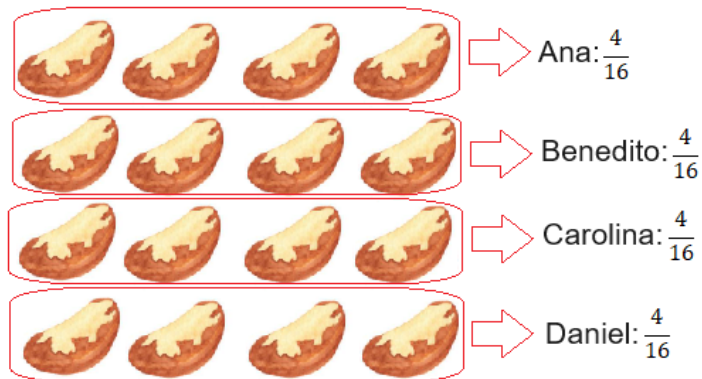
Fonte: PhET Colorado.

A ideia usada para representar a multiplicação dessas duas frações foi substituir a parte em vermelho da primeira fração pela representação da segunda fração.

Para apresentar a divisão de frações vamos imaginar a seguinte situação: Roberto trabalha coletando ouriços (frutos de castanheiras), certo dia ele resolveu levar para seus filhos, Ana, Benedito, Carolina e Daniel, um ouriço com 16 sementes. Roberto dividiu igualmente as sementes entre seus 4 filhos. Que fração representa a quantidade de sementes que cada filho ficou em relação ao total de sementes?

Para responder essa pergunta é feita a divisão de uma fração por um número natural, conforme ilustra a Figura 37.

Figura 37 - Representação da divisão das 16 castanhas entre os filhos.



Fonte: Google Imagens.

Essa divisão é expressa da seguinte forma,

$$\frac{16}{16} : 4 = \frac{16:4}{16} = \frac{4}{16}$$

A divisão acima obedece a mesma regra da multiplicação, ou seja, na divisão de uma fração por um número natural, somente o numerador é dividido. Seguindo a ideia de divisão de uma fração por um número natural, para a divisão de uma fração por outra, tem-se o seguinte cálculo,

$$\frac{9}{16} : \frac{3}{8} = \frac{9:3}{16:8} = \frac{3}{2}$$

Observe que os numeradores e os denominadores são múltiplos, porém é possível que haja situações mais gerais. Nesse caso, é substituída a fração que está sendo dividida por uma equivalente em que os numeradores e os denominadores sejam múltiplos. Para isso é necessário obter o MMC do numerador e denominador da fração que está dividindo. A **Figura 38** mostra como proceder nesse tipo de situação.

Figura 38 - Cálculo da divisão de frações com numeradores e denominadores não múltiplos.

$$\begin{array}{l|l} 3, 4 & 2 \\ 3, 2 & 2 \\ 3, 1 & 3 \\ 1, 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \end{array} \quad \frac{16}{25} : \frac{3}{4} = \frac{16 \cdot 12}{25 \cdot 12} : \frac{3}{4} = \frac{192}{300} : \frac{3}{4} = \frac{192 : 3}{300 : 4} = \frac{64}{75}$$

Fonte: Autoria própria.

Uma maneira de simplificar essa conta é conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração,

$$\frac{16}{25} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16}{25} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16 \cdot 4}{25 \cdot 3} = \frac{64}{75}$$

Vale lembrar que para inverter uma fração basta trocar o numerador pelo denominador.

3. PROPOSTA DE ENSINO COM SIMULADOR

A educação Matemática tem enfrentado desafios significativos nas últimas décadas sendo necessário inovar nas abordagens pedagógicas para tornar o ensino mais eficaz. Nesse contexto, novas propostas de ensino têm surgido utilizando ferramentas como simulações em ambientes digitais. Essas abordagens não apenas estimulam a curiosidade dos alunos, mas também promovem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Segundo pesquisa, os professores consideram as simulações como recursos que “poderiam aumentar a motivação para estudar Matemática, tornar as aulas mais dinâmicas e relacionar teoria e prática” (TENÓRIO; RODRIGUES; TENÓRIO, 2015). As simulações são uma ferramenta poderosa no ensino da Matemática, proporcionando um ambiente de aprendizado interativo e envolvente. Quando usadas de forma eficaz, elas podem melhorar significativamente a compreensão dos alunos e tornar a Matemática mais interessante e acessível.

3.1. PhET Colorado

Fundado em 2002 pelo vencedor do Prêmio Nobel Carl Wieman, o projeto PhET da Universidade do Colorado em Boulder (Estados Unidos) cria simulações interativas de Matemática e Ciências, baseadas em pesquisa educacional. Elas envolvem os alunos em um ambiente intuitivo e lúdico, promovendo a aprendizagem por exploração e descoberta (PHET, 2024).

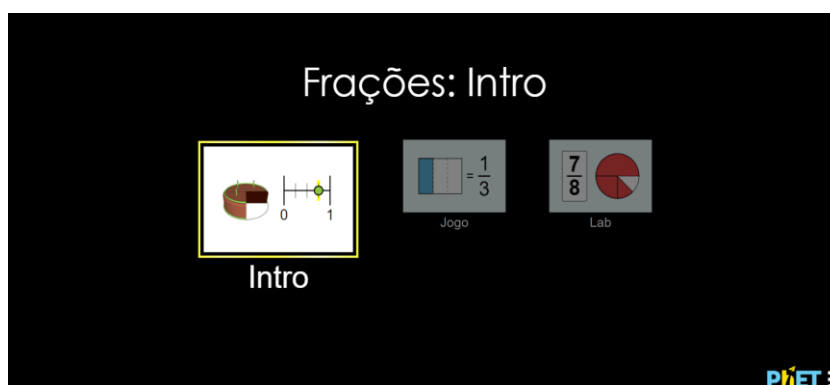
Cada simulação é testada com alunos e observada em salas de aula para garantir sua eficácia educacional. Desenvolvidas em HTML5 (com algumas antigas em Java ou Flash), podem ser usadas online ou baixadas para uso local e são de código aberto (*open source*). Com o apoio de diversos patrocinadores, esses recursos são disponibilizados gratuitamente para estudantes e professores (PHET, 2024).

Nos itens a seguir serão apresentadas as simulações do PhET Colorado relacionadas ao conteúdo de frações e em seguida será sugerida uma atividade em que professores e alunos poderão realizar em sala.

3.1.1. Frações: Intro

Essa simulação apresenta 3 opções de interações: “Intro”, “Jogo” e “Lab”. A Figura 39 mostra o layout do menu dessa simulação.

Figura 39 - Layout da tela inicial da simulação "Frações: Intro".



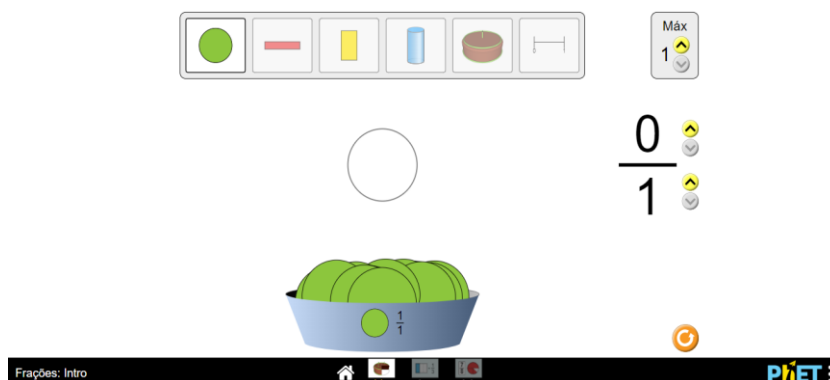
Fonte: PhET Colorado.

A simulação “Frações: Intro” pode ser acessada pelo link:

https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-intro/latest/fractions-intro_all.html?locale=pt_BR


Na opção “Intro” é apresentado diversos tipos de representações de frações: setores circulares, retângulos horizontais, retângulos verticais, cilindros com líquidos, fatias de bolos e reta numérica. Nessa interação é possível diferenciar uma fração própria de uma fração imprópria através de ilustrações. A Figura 40 apresenta o Layout da simulação.

Figura 40 - Layout da opção "Intro".

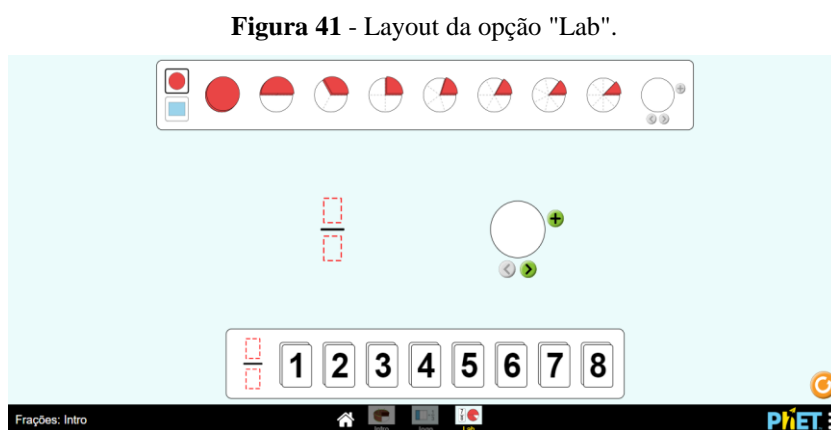


Fonte: PhET Colorado.



O quadro na parte superior da imagem mostra as opções de figuras que representarão a fração montada. É possível montar as representações arrastando as partes da figura no recipiente na parte inferior. À direita tem-se o espaço onde será montada a fração que será

representada. Clicando nas setas  do numerador ou denominador aumenta-se uma unidade, e o quadrinho na parte superior à direita indica a quantidade de inteiros que serão usados para representar a fração.

A opção “Lab” traz dois quadros: um com números para inserir no espaço que forma frações e outro com figuras para representá-las. Nessa opção pode-se montar frações ou montar figuras que as representam. A Figura 41 mostra o layout dessa simulação.



Fonte: PhET Colorado.


O quadro na parte superior mostra as opções de figuras e suas partes correspondentes a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ e $\frac{1}{8}$. O quadro na parte inferior apresenta os números que podem ser usados para montar a fração. Esses números são arrastados até o espaço de numerador ou denominador, e no centro da imagem têm-se o espaço para montar a fração e o espaço para montar a representação. Ao clicar em  é adicionado um novo espaço em branco para montar uma outra figura em caso de frações impróprias. Ao clicar em  divide-se a figura em até 8 partes.

A opção “Jogo” apresenta duas alternativas: montar as representações das frações solicitadas, ou montar as frações que estão sendo representadas pelas figuras. Nessa opção pode-se escolher o nível de dificuldade do jogo de 1 até 10. De acordo com o desempenho, o participante pode ser premiado com uma, duas ou três estrelas. A Figura 42 mostra o layout do menu do jogo.

Figura 42 - Menu da opção "Jogo".

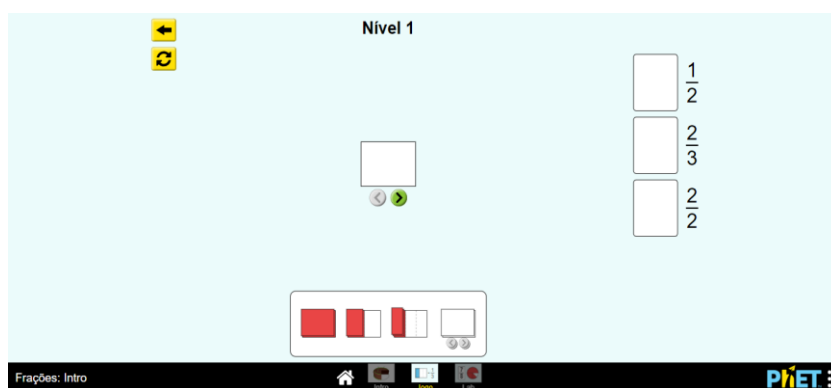


Fonte: PhET Colorado.


Ao clicar no ícone  a tela apresenta as opções com os níveis 6, 7, 8, 9 e 10 de dificuldade. Nesse momento, identifica-se as opções de jogo nos quadros superiores como “modo montagem de representações” e nos quadros inferiores como “modo montagem de frações”.

A Figura 43 apresenta o jogo no “modo montagem de representações”.

Figura 43 - "Modo montagem de representações".

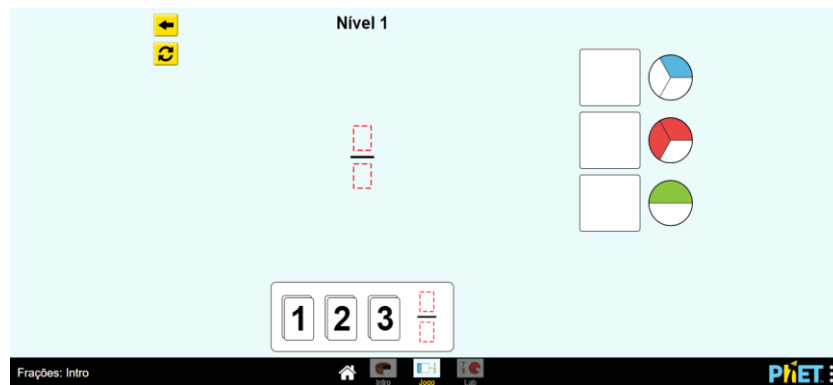


Fonte: PhET Colorado.

O usuário pode montar as representações arrastando as partes da figura disponíveis no quadro inferior no quadrado no centro da imagem. Clicando na seta  o quadrado é dividido em até oito partes. Após o participante finalizar a montagem da figura que representa uma das frações dadas pelo jogo, ele deve arrastar a figura até o retângulo ao lado da fração correspondente. Terminando de montar as representações das frações, o jogo é finalizado e o participante deverá escolher entre mudar de nível ou jogar novamente.

A Figura 44 apresenta o jogo no “modo montagem de frações”.

Figura 44 - "Modo montagem de frações".



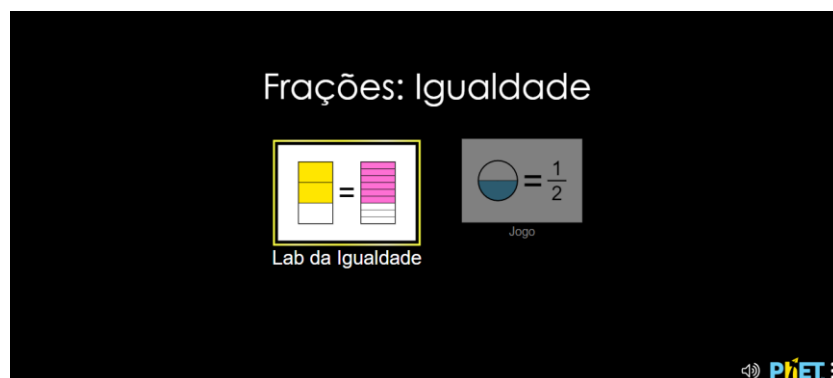
Fonte: PhET Colorado.

O participante pode montar as frações arrastando os números disponíveis no quadro inferior da imagem até o espaço do numerador ou denominador da fração. Ao término da montagem de uma fração ele deve arrastá-la até o retângulo ao lado da representação correspondente. Ao concluir a montagem de todas as frações, o jogo é finalizado e o participante deverá escolher entre trocar de nível ou jogar novamente.

3.1.2. Frações: Igualdade

Nessa simulação são apresentadas duas opções de interação: “Lab da Igualdade” e “Jogo”. A Figura 45 apresenta o layout do início dessa simulação.

Figura 45 - Layout da tela inicial da simulação "Frações: Igualdade".



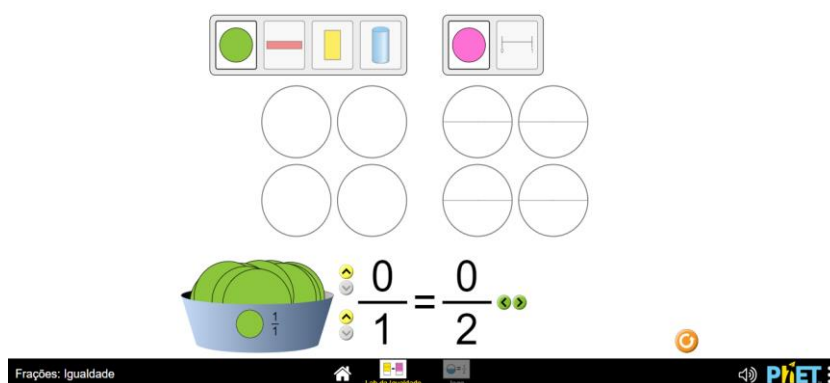
Fonte: PhET Colorado.

A simulação “Frações: Igualdade” pode ser acessada pelo link:




https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-equality/latest/fractions-equality_all.html?locale=pt_BR

Na opção “Lab” pode-se explorar o conteúdo de frações equivalentes, pois ao montar a representação ou a fração desejada, a simulação traz uma fração equivalente a ela e a sua representação, podendo escolher até três frações equivalentes. A Figura 46 mostra o layout da simulação.

Figura 46 - Layout da opção "Lab".



Fonte: PhET Colorado.

A parte superior da imagem traz dois quadros: à esquerda é a opção do tipo de representação e à direita é a opção do tipo de representação da fração equivalente. No centro são apresentadas as ilustrações das frações, estando à esquerda a representação da fração desejada e à direita a representação da fração equivalente. Por fim, na parte inferior tem-se um recipiente trazendo as partes da figura escolhida e duas frações manipuláveis, em que na primeira é possível montar a fração almejada clicando nas setinhas  para aumentar uma unidade no numerador ou no denominador, e a segunda é a fração equivalente. É possível obter até três frações equivalentes clicando nas setas  ou .

Na opção “Jogo” o participante é desafiado a acertar quais frações são equivalentes, quais figuras representam duas frações equivalentes ou qual figura representa uma fração equivalente a outra. Nessa opção é possível escolher o nível de dificuldade de 1 a 8, também é possível cronometrar o jogo. Na simulação o jogador é recompensado com uma, duas ou três estrelas, de acordo com seu desempenho. A Figura 47 mostra a tela inicial do jogo.

Figura 47 - Tela de menu da opção "Jogo".



Fonte: PhET Colorado.


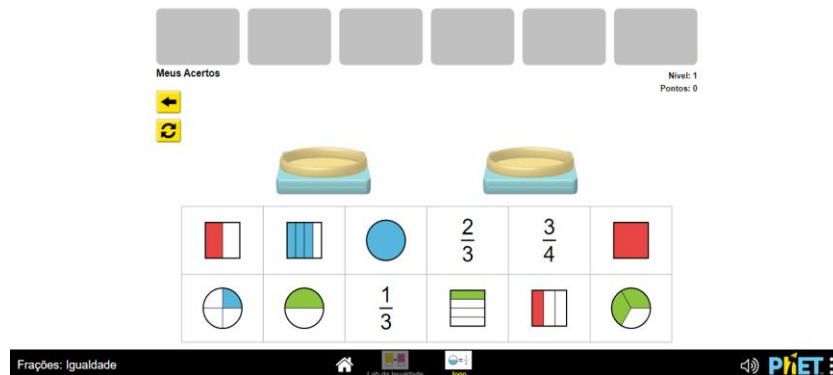
Clicando em  é ativado o modo de jogo cronometrado. A Figura 48 apresenta o layout do jogo.

Figura 48 - Layout da opção "Jogo".



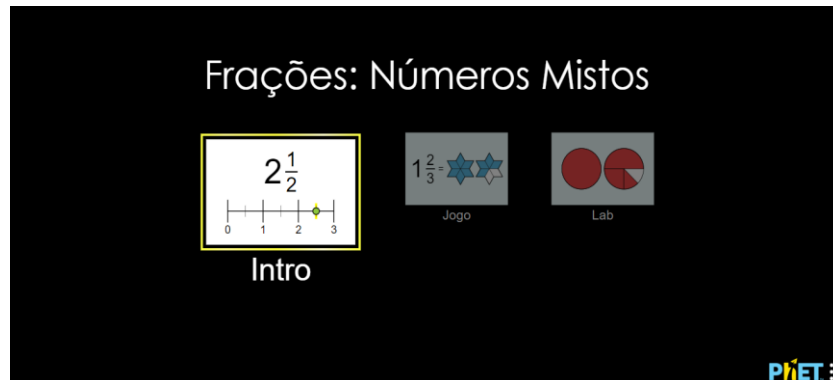
Fonte: PhET Colorado.

Na parte superior da imagem são apresentados alguns quadros onde ficarão os futuros acertos do jogador, no centro é mostrado duas balanças onde o participante pode inserir frações ou representações equivalentes, e no quadro inferior tem-se as opções de frações e representações. O jogador deve arrastar a fração ou a representação desejada no quadro até uma das balanças; depois deve arrastar outra fração ou representação equivalente à primeira até a outra balança. Após acertar todas as equivalências, o jogo é finalizado e o jogador deverá escolher entre mudar de nível ou jogar novamente.

3.1.3. Frações: Números Mistos

Esta simulação possui três tipos de interações: “Intro”, “Jogo” e “Lab”. A Figura 49 apresenta a tela inicial da simulação.

Figura 49 - Tela inicial a simulação "Frações: Números Mistos".



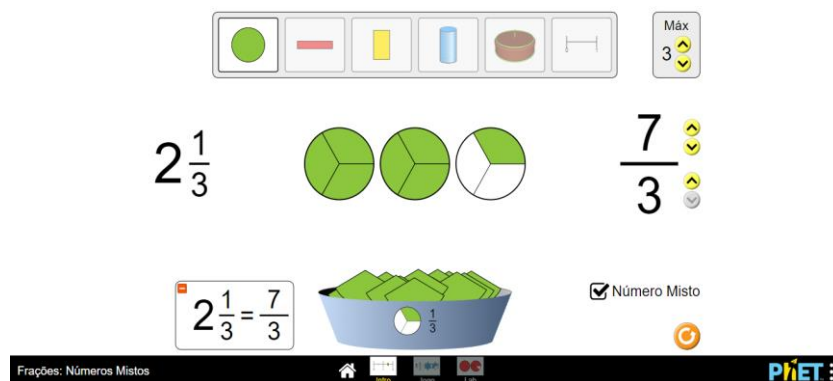
Fonte: PhET Colorado.

A simulação “Frações: Números Mistos” pode ser acessada pelo link:





https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-mixed-numbers/latest/fractions-mixed-numbers_all.html?locale=pt_BR

A opção “Intro” mostra vários tipos de representação de frações: setores circulares, retângulos horizontais, retângulos verticais, recipientes com líquidos, fatias de bolo e a reta numérica. Porém, o diferencial dessa simulação é a possibilidade de transformar as frações impróprias em números mistos. Nessa interação o professor pode trabalhar com os alunos as transformações de frações impróprias em números mistos. A Figura 50 mostra o layout da interação.

Figura 50 - Layout da opção "Intro".



Fonte: PhET Colorado.


Na parte superior da imagem, há um quadro com as opções de representação da fração e um pequeno quadro indicando a quantidade de inteiros usados. É possível aumentar ou diminuir essa quantidade clicando nas setas  ou . No centro, aparece um número na forma mista, junto com a representação da fração e a fração desejada. O numerador e o denominador podem ser ajustados clicando nas setas  ou  para aumentar ou diminuir uma unidade. Na parte inferior, há um quadro mostrando a igualdade entre o número misto e a fração, além de um recipiente onde é possível montar a fração arrastando as partes da representação. No canto inferior direito, há a opção Número Misto que transforma a fração em número misto e mostra a igualdade entre o número misto e a fração.

Na opção “Jogo” o participante pode escolher um dos dois tipos de interações: uma em que o jogo traz os números mistos e o jogador é desafiado a montar as figuras que sejam as representações desses números, e a outra em que o jogo traz as representações e o participante deve montar os números mistos representados. Nessa simulação o jogador é recompensado com uma ou até três estrelas, e o jogo pode ser escolhido entre os níveis 1 e 10 de dificuldade. A Figura 51 apresenta o início da simulação.

Figura 51 - Menu da opção "Jogo".

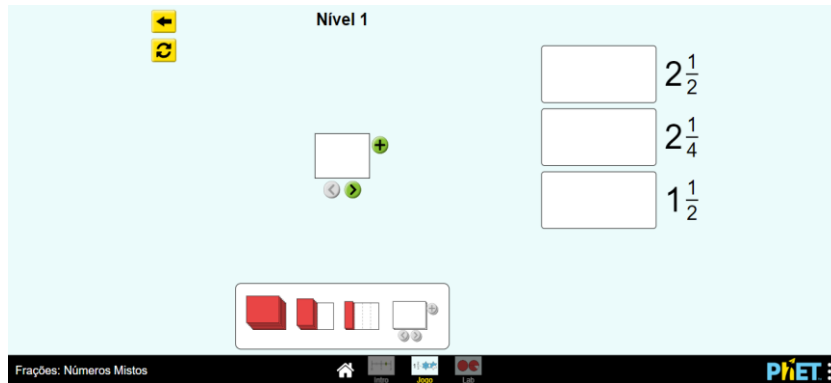


Fonte: PhET Colorado.



Ao clicar no botão  a tela apresenta as opções com os níveis 6, 7, 8, 9 e 10 de dificuldade. Nesse momento, identificam-se as opções de jogo nos quadros superiores como “modo montagem de representações” e as opções de jogo nos quadros inferiores como “modo montagem dos números mistos”.

A Figura 52 mostra o jogo no “modo montagem de representações”.

Figura 52 - "Modo montagem de representações".

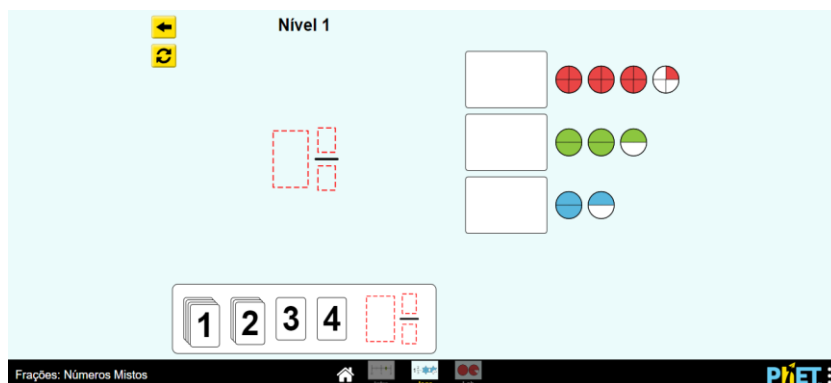


Fonte: PhET Colorado.

Na parte inferior da imagem, há um quadro com partes das representações. No centro, um pequeno retângulo serve para o jogador arrastar essas partes e montar as representações. Clicando em  é adicionado um novo espaço para montar uma nova figura e clicando na seta  o espaço é dividido em até 8 partes. À direita, são mostradas as frações que devem ser montadas as suas representações. Ao concluir a montagem de uma representação, o participante deve arrastá-la até o retângulo ao lado do número misto correspondente. Quando todas as representações forem finalizadas, o jogo termina, e o jogador pode escolher outro nível de dificuldade ou jogar novamente.

A Figura 53 ilustra o jogo no “modo montagem dos números mistos”.

Figura 53 - "Modo montagem dos números mistos".



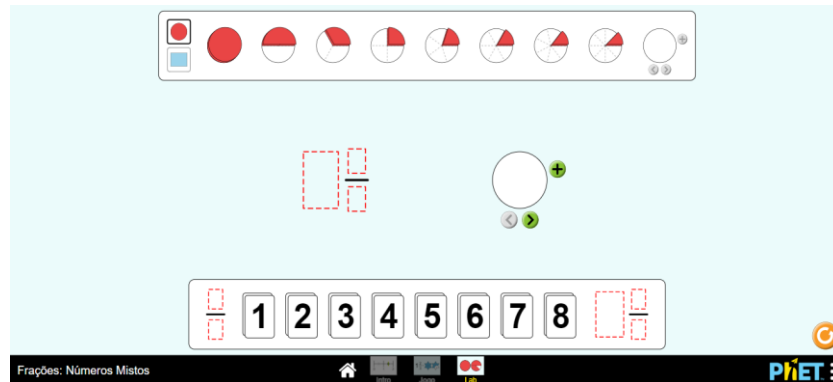
Fonte: PhET Colorado.

Na parte inferior da imagem, há um quadro com números que o jogador pode arrastar para os espaços correspondentes ao número inteiro, numerador ou denominador de um número misto. À direita, são apresentadas as representações dos números mistos que devem ser montados. Após montar um número misto, o jogador deve arrastá-lo até o retângulo ao lado da



representação correspondente. Ao finalizar todos os números mistos, o jogo será concluído e o jogador deverá escolher entre mudar de nível ou jogar novamente.

A opção “Lab” disponibiliza um laboratório virtual que apresenta dois quadros: um com números e outro com figuras. Nessa opção é possível montar um número misto ou a figura que representa algum número misto. A Figura 54 mostra o layout da interação.

Figura 54 - Layout da opção "Lab".



Fonte: PhET Colorado.

Na parte superior da imagem, há um quadro com opções de representação e partes correspondentes a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ e $\frac{1}{8}$ dessa representação. No centro, há um espaço para a construção de um número misto e outro para montar sua representação. Ao clicar em , um novo espaço é adicionado para construir outra representação, e ao clicar em , o espaço é dividido em até 8 partes. Na parte inferior, há um quadro com números que podem ser arrastados para a área correspondente ao número inteiro, numerador ou denominador do número misto.

3.1.4. Construindo frações

A simulação “Construir uma Fração” permite três formas de interagir: Montar uma fração, Números Mistos e Lab. A Figura 55 mostra a tela inicial da simulação.

Figura 55 - Tela inicial da simulação "Construir um Fração".



Fonte: PhET Colorado.

A simulação “Construir uma fração” pode ser acessada pelo link:


https://phet.colorado.edu/sims/html/build-a-fraction/latest/build-a-fraction_all.html?locale=pt_BR

A opção “Montar uma Fração” permite a escolha de dois tipos de jogos. Em um deles são exibidas frações e o jogador deve montar as figuras que estão relacionadas a elas. No outro, são apresentadas figuras e o usuário deve construir frações relacionadas a elas. Nessa simulação o participante pode escolher o nível de dificuldade entre 1 e 10, e pode ser recompensado com uma, duas ou três estrelas. A Figura 56 mostra a tela inicial do jogo.

Figura 56 - Menu da opção "Montar uma Fração".

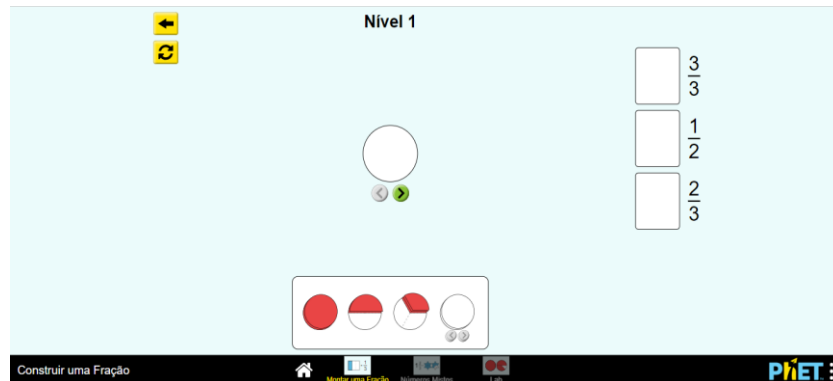


Fonte: PhET Colorado.


Ao clicar no botão  a tela apresenta as opções com os níveis 6, 7, 8, 9 e 10 de dificuldade. Nesse momento, identificamos as opções de jogo nos quadros superiores como “modo montagem de representações” e as opções de jogo nos quadros inferiores como “modo montagem de frações”.

A Figura 57 mostra o jogo no “modo montagem de representações”.

Figura 57 - "Modo montagem de representações".

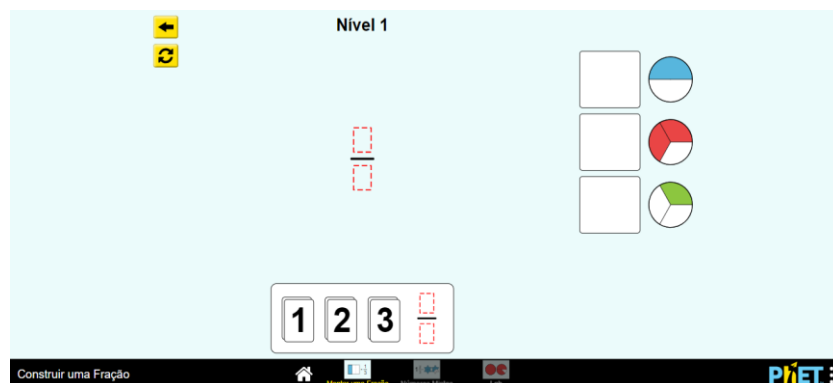


Fonte: PhET Colorado.

Na parte inferior da imagem há um quadro trazendo partes de uma representação; no centro há um espaço para montar representações. Clicando no botão , o espaço é dividido em até 8 partes. À direita ficam as frações que deverão ser montadas as suas representações. O jogador pode montar representações arrastando as partes do quadro inferior até o espaço central da tela. Ao terminar de montar uma representação o participante deverá arrastá-la até o retângulo ao lado da fração correspondente. Quando todas as representações forem concluídas o jogo será finalizado e o jogador poderá escolher entre alterar o nível de dificuldade ou jogar novamente.

A Figura 58 apresenta o jogo no “modo montagem de frações”.

Figura 58 - "Modo montagem de frações".



Fonte: PhET Colorado.

Na parte inferior da tela é apresentado um quadro com números que serão usados para montar frações. No centro da imagem há um espaço onde serão montadas as frações e à direita ficam as representações em que deverão ser montadas as frações correspondentes. Para montar


as frações o jogador deve arrastar os números até o centro no espaço do numerador ou denominador, e ao terminar de montar uma fração o participante deverá arrastá-la até o retângulo ao lado da representação correspondente. Concluídas todas as montagens das frações o jogo será finalizado e o participante pode escolher entre mudar o nível de dificuldade ou jogar novamente.

Escolhendo a opção “Números Mistos” são disponibilizadas duas opções de jogo: montar as figuras que representam os números mistos apresentados, ou construir os números mistos que estão representados nas figuras. Nesse jogo, é possível escolher o nível de dificuldade entre 1 e 10, e o jogador é agraciado com uma, duas ou três estrelas dependendo do seu desempenho. A Figura 59 mostra a tela inicial do jogo.

Figura 59 - Menu da opção "Números Mistos".

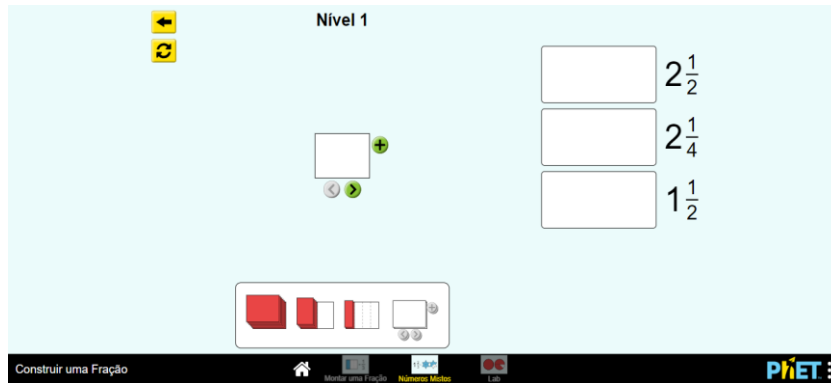


Fonte: PhET Colorado.



Ao clicar no botão  a tela apresenta as opções com os níveis 6, 7, 8, 9 e 10 de dificuldade. Nesse momento, identificam-se as opções de jogo nos quadros superiores como “modo montagem de representações” e as opções de jogo nos quadros inferiores como “modo montagem dos números mistos”.

A Figura 60 ilustra o jogo no “modo montagem de representações”.

Figura 60 - "Modo montagem de representações".

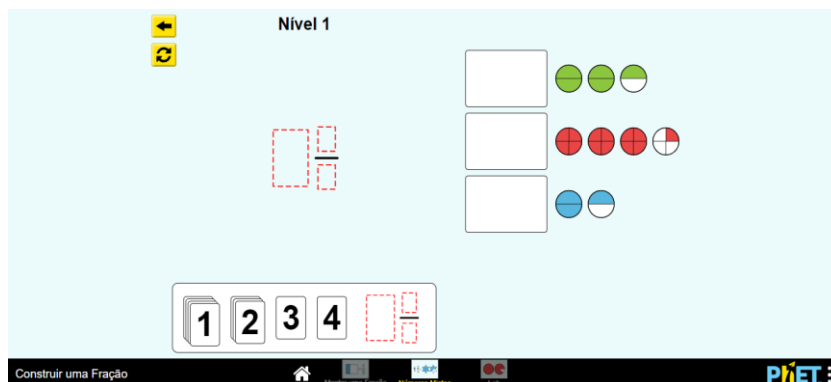


Fonte: PhET Colorado.

Na parte inferior da imagem, há um quadro com partes das representações. No centro, um pequeno retângulo permite que o jogador arraste essas partes para montar as representações. Ao clicar em , um novo espaço é adicionado para criar outra figura, e ao clicar na seta  o espaço é dividido em até 8 partes. À direita, são mostradas as frações cujas representações devem ser montadas. Após concluir uma representação, o jogador deve arrastá-la para o retângulo ao lado do número misto correspondente. Quando todas as representações forem concluídas, o jogo termina, e o jogador pode escolher outro nível de dificuldade ou jogar novamente.

A Figura 61 apresenta o jogo no “modo montagem dos números mistos”.

Figura 61 - "Modo montagem de números mistos".

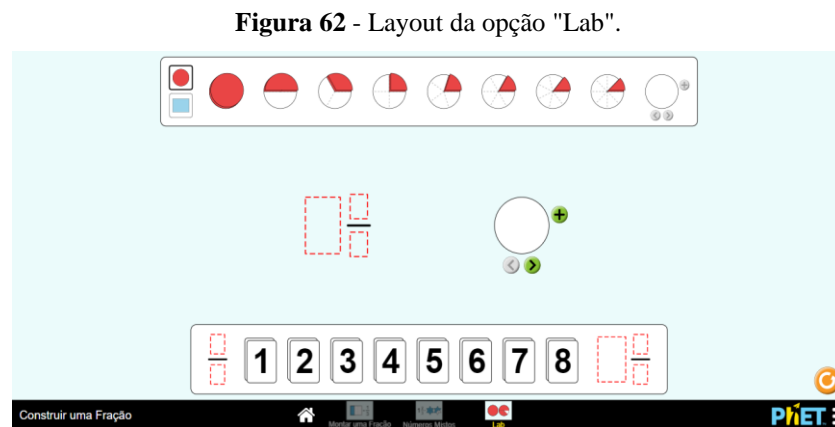


Fonte: PhET Colorado.



Na parte inferior da imagem, há um quadro com números que o jogador pode arrastar para os espaços correspondentes ao número inteiro, numerador ou denominador de um número misto. À direita, são apresentadas as representações dos números mistos que devem ser montados. Após montar um número misto, o jogador deve arrastá-lo até o retângulo ao lado da

representação correspondente. Ao concluir todos os números mistos, o jogo termina, e o jogador pode escolher entre mudar de nível ou jogar novamente.

A opção “Lab” disponibiliza um laboratório virtual que apresenta dois quadros. Um dos quadros mostra partes de uma figura, e o outro números. Nessa simulação é possível montar um número misto e construir uma figura que o represente. A Figura 62 mostra o layout do laboratório.



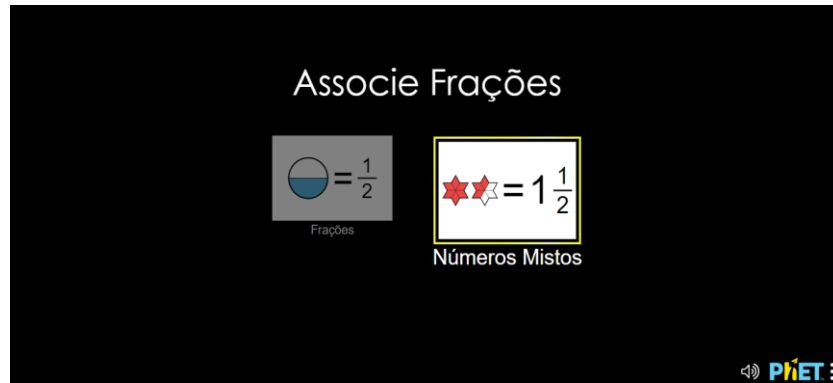
Fonte: PhET Colorado.

Na parte superior da imagem, há um quadro com opções de representação e partes correspondentes a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ e $\frac{1}{8}$ dessa representação. No centro, há um espaço para a construção de um número misto e outro para montar sua representação. Ao clicar em , um novo espaço é adicionado para construir outra representação, e ao clicar em , o espaço é dividido em até 8 partes. Na parte inferior, há um quadro com números que podem ser arrastados para a área correspondente ao número inteiro, numerador ou denominador do número misto.

3.1.5. Associe Frações

Essa simulação apresenta duas formas de interações: “Frações” e “Números Mistos”. A Figura 63 apresenta a tela inicial da simulação.

Figura 63 - Tela inicial da simulação "Associe frações".



Fonte: PhET Colorado.

A simulação “Associe Frações” pode ser acessada pelo link:

https://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_all.html?locale=pt_BR


Na opção “Frações” é apresentado um jogo em que o participante deve associar representações de frações com representações de frações equivalentes ou representações de frações com frações equivalentes. O usuário pode escolher o nível de dificuldade entre 1 a 8, poderá ser recompensado com uma, duas ou três estrelas e o jogo permite ser cronometrado clicando no botão . A Figura 64 apresenta o menu de escolha de nível de dificuldade.

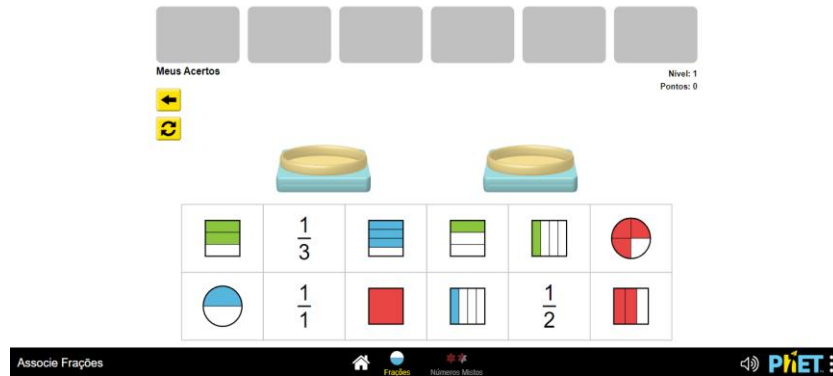
Figura 64 - Menu da opção "Frações".



Fonte: PhET Colorado.

A Figura 65 apresenta o layout do jogo.

Figura 65 - Layout do jogo “Frações”.



Fonte: PhET Colorado.

Na parte superior da tela há vários espaços onde ficarão os acertos do jogador, no centro há dois pratos de balança onde ficarão as frações ou as representações e na parte inferior da tela são mostradas as frações e as representações. O usuário deverá arrastar uma fração ou representação até um dos pratos e no outro ele deverá arrastar a fração ou representação equivalente. Após concluir todas as associações o jogo é finalizado, e o participante deverá escolher entre mudar de nível ou jogar novamente.


Na opção "Números Mistos", é oferecido um jogo no qual o participante precisa relacionar representações de frações com representações equivalentes, ou associar representações de frações com números mistos equivalentes. O usuário pode selecionar o nível de dificuldade entre 1 e 8, podendo ganhar de uma a três estrelas como recompensa. Além disso, o jogo permite o uso de um cronômetro clicando no botão . A Figura 66 ilustra o menu para a escolha do nível.

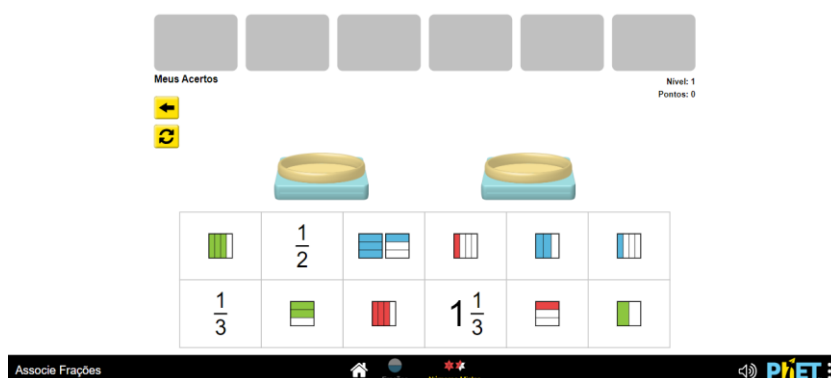
Figura 66 - Menu da opção "Números Mistos".



Fonte: PhET Colorado.

A Figura 67 apresenta o layout do jogo.

Figura 67 - Layout do jogo "Números Mistos".



Fonte: PhET Colorado.

Na parte superior da tela, há diversos espaços reservados para os acertos do jogador. No centro, encontram-se dois pratos de balança, onde será colocado frações ou representações. Na parte inferior da tela, são exibidas frações e representações. O usuário deve arrastar uma fração ou representação para um dos pratos e, no outro, posicionar a fração ou representação equivalente. Após a conclusão de todas as associações, o jogo é encerrado, e o participante pode optar por mudar de nível ou jogar novamente.

3.1.6. Sugestões de atividades utilizando o simulador PhET

Ao fazer uma atividade sobre frações usando as simulações do PhET Colorado, a aula se torna mais atrativa e os conceitos de frações podem ser trabalhados com mais facilidade e maior eficácia. A seguir serão apresentadas sugestões de atividades que o professor poderá fazer em uma sala com computadores ou tablets e internet, com seus alunos. O tempo estimado para a conclusão das atividades é de 90 minutos.

Introdução: O professor deverá iniciar a aula com uma breve revisão sobre o conceito de fração, utilizando exemplos do cotidiano (pizza dividida em partes iguais ou chocolate dividido entre amigos) e apresentar as simulações do PhET como ferramentas divertidas e interativas para aprender sobre frações. Estima-se que o tempo necessário para a introdução é de 10 minutos.

Atividade 1: O professor poderá dividir a turma em pequenos grupos, orientar os alunos para que acessem a simulação “Frações: Intro”, pedir para que os alunos cliquem na Opção “Intro” e solicitar que cada grupo construa as seguintes frações usando diferentes representações:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{4}{1}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{4}$

Após a construção das frações, o professor pode pedir para que cada grupo classifique as frações em frações próprias ou impróprias. Ao terminar as classificações os alunos devem mostrar suas conclusões para os colegas dos outros grupos. Estima-se o tempo de duração de 10 minutos para essa atividade e o professor pode seguir para a “Atividade 2”.

Atividade 2: Nesta atividade o professor pode solicitar que cada grupo use a simulação para montar duas frações diferentes. Em seguida compará-las visualmente, e depois usando os números, e registre quais frações são maiores, menores ou iguais usando $<$, $>$ ou $=$.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{8}{4}$ $\frac{2}{1}$	$\frac{2}{8}$ $\frac{2}{7}$	$\frac{7}{3}$ $\frac{3}{7}$
$\frac{4}{3}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{6}{5}$ $\frac{5}{6}$	$\frac{2}{8}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$ $\frac{6}{5}$
$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{8}{3}$	$\frac{7}{5}$ $\frac{5}{7}$	$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$
$\frac{7}{4}$ $\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{8}{6}$	$\frac{7}{5}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$	$\frac{7}{6}$ $\frac{4}{6}$
$\frac{3}{2}$ $\frac{7}{3}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{2}$	$\frac{4}{7}$ $\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$ $\frac{7}{2}$
$\frac{6}{2}$ $\frac{6}{3}$	$\frac{7}{2}$ $\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$	$\frac{4}{8}$ $\frac{2}{6}$	$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

Ao finalizar as comparações, os alunos devem mostrar suas conclusões para os colegas dos outros grupos. Estima-se que o tempo de duração dessa atividade seja de 10 minutos e o professor poderá seguir para a “Atividade 3”.

Atividade 3: O professor deve orientar os alunos para que acessem a opção “Lab” e pedir para que cada grupo monte as frações e as representações das seguintes frações:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{6}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{6}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{8}$

Após todos os grupos montarem as frações e suas representações na opção “Lab”, o professor pode destinar alguns minutos para os alunos explorarem a opção “Jogo”. Essa atividade tem o tempo estimado de 10 minutos de duração e o professor poderá seguir para a “Atividade 4”.

Atividade 4: O professor deverá orientar seus alunos para acessarem a simulação “Frações: Igualdade”, escolher a opção “Lab da Igualdade” e pedir para escreverem frações equivalentes às seguintes frações:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$\frac{3}{2} =$	$\frac{1}{3} =$	$\frac{8}{4} =$	$\frac{2}{6} =$	$\frac{3}{6} =$
$\frac{3}{4} =$	$\frac{2}{4} =$	$\frac{5}{6} =$	$\frac{1}{4} =$	$\frac{6}{5} =$
$\frac{4}{6} =$	$\frac{1}{2} =$	$\frac{8}{3} =$	$\frac{7}{4} =$	$\frac{2}{5} =$
$\frac{5}{4} =$	$\frac{4}{3} =$	$\frac{7}{5} =$	$\frac{5}{3} =$	$\frac{7}{6} =$

$\frac{7}{3} =$	$\frac{4}{2} =$	$\frac{4}{5} =$	$\frac{5}{2} =$	$\frac{6}{2} =$
$\frac{6}{3} =$	$\frac{7}{2} =$	$\frac{2}{3} =$	$\frac{6}{4} =$	$\frac{3}{5} =$

Após os alunos terminarem de escrever as frações equivalentes, eles devem mostrar para os outros estudantes dos outros grupos. O professor pode destinar um tempo para que os alunos explorem a opção “Jogo”. O tempo estimado para essa atividade é de 10 minutos e o professor poderá seguir para a “Atividade 5”.

Atividade 5: O professor deverá orientar seus alunos para que acessem a simulação “Frações: Números Mistos”, escolham a opção “Intro” e montem as frações indicadas no quadro abaixo. Em seguida, deverá ser selecionada a opção Número Misto para a conversão das frações em números mistos.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$\frac{3}{2} =$	$\frac{4}{3} =$	$\frac{7}{2} =$	$\frac{5}{4} =$	$\frac{7}{6} =$
$\frac{6}{4} =$	$\frac{8}{4} =$	$\frac{7}{3} =$	$\frac{6}{5} =$	$\frac{6}{2} =$
$\frac{8}{6} =$	$\frac{5}{2} =$	$\frac{8}{3} =$	$\frac{7}{2} =$	$\frac{8}{5} =$

Após os alunos terminarem de transformar as frações em números mistos, devem mostrar suas conclusões para os estudantes dos outros grupos. O tempo estimado para a conclusão dessa atividade é de 10 minutos e o professor pode seguir para a “Atividade 6”.

Atividade 6: O professor deverá orientar seus alunos a acessarem a opção “Lab” e solicitar que eles montem os seguintes números mistos e suas representações:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
$5\frac{5}{2}$	$5\frac{5}{3}$	$8\frac{8}{2}$	$5\frac{5}{4}$	$8\frac{8}{6}$
$7\frac{7}{4}$	$6\frac{6}{4}$	$8\frac{8}{3}$	$8\frac{8}{5}$	$7\frac{7}{2}$
$7\frac{7}{6}$	$6\frac{6}{2}$	$7\frac{7}{3}$	$3\frac{3}{2}$	$7\frac{7}{5}$

Após a finalização da atividade o professor pode destinar uns minutos para que os alunos explorem a opção “Jogo”. Estima-se que essa atividade necessita de 10 minutos e o professor pode seguir para a “Atividade 7”.

Atividade 7: Essa é uma atividade apenas exploratória: o professor deve apresentar aos alunos as simulações “Construir uma Fração” e “Associe Frações”. Em seguida, solicitar que os alunos explorem os jogos disponíveis nas simulações. Recomenda-se que o tempo disponível para a atividade seja de 20 minutos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho abordou a importância do ensino de frações no contexto da Educação Matemática, evidenciando as deficiências nos processos de ensino-aprendizagem, e o impacto significativo que essas lacunas têm no desempenho dos alunos, e a partir dessas evidências, apresentou uma proposta metodológica no processo de ensino e aprendizagem desse conceito matemático fundamental. A análise dos resultados das avaliações PISA 2022, Saeb 2021 e ENEM 2023 revelou que uma parcela considerável dos estudantes não alcança os níveis de proficiência esperados, o que indica uma compreensão insuficiente dos conceitos fundamentais relacionados a frações.

Os dados apresentados demonstram que a falta de interação presencial e a diminuição das atividades práticas durante a pandemia agravaram ainda mais as dificuldades enfrentadas pelos alunos. A Matemática, sendo uma disciplina que se beneficia do trabalho colaborativo e da resolução conjunta de problemas, requer abordagens que promovam a participação ativa dos estudantes. Nesse sentido, a utilização de materiais manipulativos e metodologias ativas se mostra essencial para facilitar a aprendizagem e a abstração dos conceitos matemáticos.

Além disso, a formação contínua e adequada dos professores é crucial para que possam implementar estratégias de ensino mais eficazes e contextualizadas, que atendam às necessidades dos alunos. A proposta de novas abordagens para o ensino de frações, aliada a uma reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas atuais, pode contribuir significativamente para a construção de uma base sólida em Matemática.

Novas propostas e abordagens relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos na Educação Básica, resultarão no desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais que serão fundamentais para a formação integral dos alunos. A melhoria dos resultados em avaliações será apenas uma consequência. A Educação Matemática deve ser um processo dinâmico e interativo, capaz de engajar os estudantes e prepará-los para os desafios do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Notas sobre o Brasil no Pisa 2022. Brasília, DF: Inep, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/pisa_2022_brazil_prt.pdf. Acesso em: 8 jul. 2024.

CENTURIÓN, Marília. Conteúdo e metodologia da Matemática números e operações. São Paulo: Editora Scipione Ltda 1994.

DA SILVA, Elisângela Fernandes. Saeb 2017-2019: uma análise sobre a transparência na divulgação dos resultados. 2023. Tese de Doutorado. [sn]. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=560689>. Acesso em: 06 ago. 2024.

GUARDA, Graziela; DOS SANTOS GONÇALVES, Caroline; CUNHA, Lidia Raquel Rocha. Jogo Corrida das Frações-Ludicidade e Pensamento Computacional. In: Anais do XXV Workshop de Informática na Escola. SBC, 2019. p. 19-28. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wie/article/viewFile/8488/6061>. Acesso em: 27 ago. 2024.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): Apresentação. 2024a. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/enem>. Acesso em: 4 jun. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Microdados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2023. Brasília, 2024b. Disponível em: http://download.inep.gov.br/microdados/microdados_enem_2023.zip. Acesso em: 15 jun. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Relatório de resultados do SAEB 2021, Volume 1. Brasília: INEP, 2023.

Disponível em:

<https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2024.

INEP. PISA 2022: Itens Públicos de Matemática. Brasília: INEP, 2022a. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2022/PISA2022_Itens_publicos_de_matematica.pdf. Acesso em: 8 jul. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO

TEIXEIRA (INEP). Apresentação SAEB 2021. Brasília: INEP, 2022b. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/apresentacao_saeb_2021.pdf Acesso em: 9 jul. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO

TEIXEIRA (INEP). Entenda a sua nota no Enem: guia do participante. Brasília, DF: INEP, 2021. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/entenda_a_sua_nota_no_enem_guiado_participante.pdf. Acesso em: 4 jun. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO

TEIXEIRA (INEP). SAEB: documentos de referência, versão 1.0. Brasília: INEP, 2018.

Disponível em:

https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/saeb_documentos_de_referencia-versao_1.0.pdf. Acesso em: 9 jul. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO

TEIXEIRA (INEP). *Matriz de avaliação de Matemática: PISA 2012*. Brasília, DF: Inep, 2013. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_aval_iacao_matematica.pdf. Acesso em: 06 ago. 2024.

JEDUCA. OCDE divulga PISA 2022 dia 5 de dezembro; confira as dicas de cobertura.

Jeduca, 28 de novembro de 2023. Disponível em: <https://jeduca.org.br/noticia/ocde-divulga-pisa-2022-dia-5-de-dezembro-confira-as-dicas-de-cobertura>. Acesso em: 06 ago. 2024.

MACHADO, Cristiane. Políticas estaduais de avaliação externa: tendências e implicações. *Quaestio - Revista de Estudos em Educação*, Sorocaba, SP, v. 22, n. 1, p. 205–223, 2020. DOI: 10.22483/2177-5796.2020v22n1p205-223. Disponível em: <https://uniso.emnuvens.com.br/quaestio/article/view/3358>. Acesso em: 6 ago. 2024.

MEDRAN RANGEL, E.; MEDRAN RANGEL, A. O lúdico no ensino de Matemática: uma revisão sobre o uso de jogos didáticos no processo de ensino-aprendizagem: The use of didactic games as a complementary method of the teaching-learning process. *Journal of Education Science and Health*, [S. l.], v. 3, n. 1, p. 01–09, 2023. DOI: 10.52832/jesh.v3i1.187. Disponível em: <https://bio10publicacao.com.br/jesh/article/view/187>. Acesso em: 4 ago. 2024.

MIRANDA, P. R.; AZEVEDO, M. L. N. de. Fies e Prouni na expansão da educação superior brasileira: políticas de democratização do acesso e/ou de promoção do setor privado-mercantil?. *Educ. Form.*, [S. l.], v. 5, n. 3, p. e1421, 2020. DOI: 10.25053/redufor.v5i15set/dez.1421. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/redufor/article/view/1421>. Acesso em: 4 jun. 2024.

ORGANIZAÇÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO (OCDE). PISA 2022 - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Disponível em: <https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html#Content-Knowledge>. Acesso em: 8 jul. 2024.

PESTANA, Maria Inês. O sistema de avaliação brasileiro. *Revista brasileira de estudos pedagógicos*, v. 79, n. 191, 1998. Disponível em: <https://rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/rbep/article/view/1225/964>. Acesso em: 8 jul. 2024

PHET INTERACTIVE SIMULATIONS. University of Colorado Boulder. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Acesso em: 04 ago. 2024.

SILVA, Aléxya Gabriella da. Inteligência artificial na educação básica: possíveis contribuições para a Matemática. 2021. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Chapecó. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/bitstream/prefix/5784/1/SILVA.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2024.

SOMAVILLA, Adriana Stefanello; DE ANDRADE, Susimeire Vivien Rosotti. Os indicadores da avaliação externa em Matemática no Brasil. DILEMAS CONTEMPORÂNEOS VOLUME IV, p. 30, 2020. Disponível em: <https://www.editorapantanal.com.br/ebooks/2020/educacao-dilemas-contemporaneos-volume-iv/ebook.pdf#page=31>. Acesso em: 06 ago. 2024.

TENÓRIO, André; DA SILVA RODRIGUES, Fabiana Oliveira; TENÓRIO, Thaís. Jogos e simulações digitais na prática de ensino de professores de Matemática. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 5, n. 3, 2015. Disponível em: <https://scholar.archive.org/work/kke3kmp7d5hnjoenjcusuzg6jq/access/wayback/http://publicacoes.unigranrio.com.br/index.php/recm/article/download/2992/1489>. Acesso em: 28 ago. 2024.