



JUCIMARA HELENA DOS SANTOS

**NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA
PARA O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS**

LAVRAS – MG

2025

JUCIMARA HELENA DOS SANTOS

**NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA PARA O ENSINO DE
NÚMEROS IRRACIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Santos, Jucimara Helena dos

Números Construtíveis : uma proposta geométrica para o ensino de números irracionais / Jucimara Helena dos Santos.

– Lavras : UFLA, 2025.

79 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2025.

Orientador: Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament.

Bibliografia.

1.Fundamentos das construções geométricas.2.Definição e propriedades dos números construtíveis. 3. Desafios no ensino dos números irracionais. I. Ament, Daiane Alice Henrique.

JUCIMARA HELENA DOS SANTOS

**NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA PARA O ENSINO DE
NÚMEROS IRRACIONAIS
CONSTRUCTIBLE NUMBERS: A GEOMETRIC APPROACH TO THE TEACHING OF
IRRATIONAL NUMBERS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de Fevereiro de 2025.

Profa. Dra. Rita de Cassia Dornelas Sodre UFLA
Profa. Dra. Camila Mariana Ruiz UFU

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Às minhas filhas, Eloise e Cecília, que iluminam minha vida e me inspiram a ser sempre melhor. Que este trabalho seja um reflexo do amor pelo conhecimento e um lembrete de que, com dedicação e perseverança, somos capazes de alcançar nossos sonhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, minha eterna gratidão por me conceder força, sabedoria e perseverança para concluir esta jornada.

Ao meu esposo, Marcos, que não apenas me apoiou incondicionalmente, mas muitas vezes literalmente me carregou para as aulas, sendo meu motorista paciente e companheiro, esperando o dia todo para me levar de volta para casa.

Aos meus pais, que foram a base sobre a qual me apoiei, cuidando das minhas filhas com carinho e dedicação, permitindo que eu me ausentasse quando necessário e garantindo o silêncio que tanto precisei para estudar.

À minha orientadora, Daiane, por sua paciência, dedicação e orientação essencial ao longo desta caminhada. Seu conhecimento e apoio foram fundamentais para a construção deste trabalho.

Aos meus professores, pelo conhecimento compartilhado e pela orientação essencial ao longo dessa trajetória.

Aos meus colegas Wil e Kalita, pela parceria e pelas incontáveis horas de estudo e convivência. Aprendi muito com vocês e sou grata por cada momento que compartilhamos.

Ao meu amigo Diego, cuja influência foi fundamental para o início desta caminhada e cuja presença seguiu sendo parte importante dela.

À Tamires, que tornou as longas viagens mais leves com nossas conversas infinitas, transformando o percurso em uma experiência mais agradável.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade, meu mais sincero agradecimento.

*"A geometria é a arte de raciocinar corretamente sobre figuras desenhadas."
Henri Poincaré*

RESUMO

Estudos apontam que ensinar geometria exige linguagens e procedimentos apropriados para que seus conceitos e especificidades simbólicas sejam compreendidos. Tais preocupações permeiam a mente de educadores há tempos, dado que a maneira como a geometria é abordada reflete no desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização dos alunos. Neste contexto, o presente trabalho aborda como os números construtíveis podem ser inseridos no estudo do conjunto dos números reais no ensino fundamental anos finais. O propósito é incentivar o uso das construções geométricas, realizadas com régua e compasso, para ensinar números reais, ou seja, abordar simultaneamente os conceitos de geometria e álgebra. Uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujos comprimentos não são expressos por números racionais, mas sim por irracionais. Desse modo, o estudo do conjunto dos números irracionais torna-se menos abstrato e de mais fácil compreensão. Este trabalho, apresenta uma proposta didática com atividades referentes às construções geométricas, com uma abordagem prática para o estudo dos números irracionais. Ensinar geometria por meio de construções geométricas pode facilitar o aprendizado, pois torna os conceitos abstratos mais concretos, permitindo uma compreensão visual e intuitiva dos tópicos abordados.

Palavras-chave: ensino de geometria; construções com régua e compasso; proposta didática.

ABSTRACT

Studies show that teaching geometry requires appropriate languages and procedures for its concepts and symbolic specificities to be understood. These concerns have been on educators' minds for a long time, as the way Geometry is approached reflects on students' intellectual development, logical reasoning, and their ability to abstract and generalize. In this context, the present work explores how Constructible Numbers can be incorporated into the study of the Set of Real Numbers in Upper Elementary Education. The goal is to encourage the use of Geometric Constructions, performed with a ruler and compass, to teach Real Numbers, thereby simultaneously addressing both Geometry and Algebra concepts. Once a unit of length is established, there are line segments whose lengths are not expressed by rational numbers but by irrational ones. In this way, the study of the Set of Irrational Numbers becomes less abstract and more easily understood. This work presents a didactic proposal with activities related to Geometric Constructions, offering a practical approach to the study of real numbers. Teaching Geometry through Geometric Constructions can enhance learning by making abstract concepts more tangible, allowing a visual and intuitive understanding of the topics covered.

Keywords: geometry teaching; constructions with ruler and compass; didactic proposal.

INDICADORES DE IMPACTO

Esta dissertação traz uma proposta que pode contribuir bastante para o ensino dos números irracionais no ensino fundamental. A ideia de trabalhar com construções geométricas usando régua e compasso oferece um caminho mais visual e concreto para que os alunos entendam conceitos que muitas vezes parecem abstratos demais.

Ao mostrar os números irracionais através de construções, como a espiral de Teodoro, a proposta ajuda a desenvolver não só o raciocínio e a percepção geométrica dos estudantes, mas também a capacidade de pensar de forma mais abstrata. Além disso, a abordagem está em sintonia com as competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), principalmente em relação à resolução de problemas, ao uso de diferentes formas de representação e à argumentação matemática.

Outro ponto importante é que, ao usar instrumentos simples e acessíveis, como régua e compasso, essa proposta pode despertar mais interesse dos alunos pela matemática. Isso porque, além de facilitar a compreensão, valoriza a história da matemática, mostrando como esses métodos fazem parte da construção do conhecimento ao longo do tempo.

Claro que existem alguns desafios, como a necessidade dos professores estarem preparados para trabalhar com essas ferramentas e o pouco tempo disponível em sala para esse tipo de conteúdo. Mas, mesmo com essas limitações, acredito que essa proposta tem potencial para transformar a forma como os números irracionais são ensinados, tornando o aprendizado mais significativo e acessível para os alunos.

IMPACT INDICATORS

This dissertation presents a proposal that can significantly contribute to the teaching of irrational numbers in elementary education. The idea of working with geometric constructions using ruler and compass offers a more visual and concrete approach, helping students to understand concepts that are often perceived as too abstract.

By demonstrating irrational numbers through constructions, such as the spiral of Theodorus, the proposal helps to develop not only students' reasoning and geometric perception but also their capacity for more abstract thinking. Furthermore, the approach aligns with the skills and competencies outlined in the *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC), particularly concerning problem-solving, the use of different forms of representation, and mathematical argumentation.

Another important point is that, by using simple and accessible tools such as ruler and compass, this proposal can spark greater interest in mathematics among students. This is because, in addition to facilitating comprehension, it values the history of mathematics by showing how these methods have been part of the construction of knowledge over time.

Of course, there are some challenges, such as the need for teachers to be prepared to work with these tools and the limited time available in class for this type of content. However, even with these limitations, I believe this proposal has the potential to transform the way irrational numbers are taught, making learning more meaningful and accessible for students.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Circunferência de centro O e raio r	17
Figura 2.2 – Elementos da Circunferência.	17
Figura 2.3 – Polígono de 5 lados	18
Figura 2.4 – Região Poligonal.	18
Figura 2.5 – Três pontos não colineares.	19
Figura 2.6 – Representação do 1º caso de semelhança de triângulos.	22
Figura 2.7 – Representação do 2º caso de semelhança de triângulos.	22
Figura 2.8 – Representação do 3º caso de semelhança de triângulos.	23
Figura 2.9 – Retas paralelas cortadas por duas transversais.	24
Figura 2.10 – Divisões dos segmentos por p	24
Figura 2.11 – Razão $\frac{AB}{BC}$ irracional.	25
Figura 2.12 – Representação do Triângulo Retângulo.	26
Figura 2.13 – Paralelogramo $ABCD$, onde $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$	27
Figura 2.14 – Losango $ABCD$	29
Figura 2.15 – Representação de um ângulo central $\angle ACB$	29
Figura 2.16 – Representação de um ângulo inscrito $\angle AVB$	30
Figura 2.17 – Representação da relação entre um ângulo central e um ângulo inscrito.	30
Figura 2.18 – O Centro C está sobre um lado do $\angle AVB$	31
Figura 2.19 – O Centro C está no interior do ângulo inscrito $\angle AVB$	31
Figura 2.20 – Representação de $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$	32
Figura 2.21 – Representação de $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$	32
Figura 2.22 – O Centro C está no exterior do ângulo inscrito $\angle AVB$	33
Figura 2.23 – Transporte de segmentos.	35
Figura 2.24 – Representação do transporte de ângulo.	35
Figura 2.25 – Construção de retas paralelas.	36
Figura 2.26 – Construção da mediatriz.	37
Figura 2.27 – Construção de reta perpendicular - $P \notin r$	38
Figura 2.28 – Construção de reta perpendicular - $P \in r$	39
Figura 2.29 – Construção da bissetriz.	40
Figura 2.30 – Representação do ângulo inscrito $\angle AVB = \theta$	41
Figura 2.31 – Representação do arco capaz de 90°	41

Figura 2.32 – Passo 1: Construção do Arco Capaz - Transporte do ângulo	42
Figura 2.33 – Passos 2 e 3: Construção do arco capaz - reta perpendicular e mediatriz . .	42
Figura 2.34 – Arco capaz de θ sobre o segmento AB	43
Figura 3.1 – Representação de $a + b$	47
Figura 3.2 – Representação de $a \cdot b$	47
Figura 3.3 – Representação de a^{-1}	48
Figura 3.4 – Representação de \sqrt{a}	49
Figura 3.5 – Representação de $a + b$	50
Figura 3.6 – Representação de $a - b$	51
Figura 3.7 – Representação da 4ª proporcional.	51
Figura 3.8 – Representação da 3ª proporcional.	52
Figura 3.9 – Representação de $\sqrt{a^2 + b^2}$	52
Figura 3.10 – Representação de $\sqrt{a^2 - b^2}$	53
Figura 3.11 – Representação de $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	53
Figura 3.12 – Representação de \sqrt{b}	54
Figura 3.13 – Justificativa de \sqrt{b}	54
Figura 3.14 – Representação de $a\sqrt{2}$	55
Figura 3.15 – Sequências de $a\sqrt{n}$	55
Figura 3.16 – Representação da média aritmética entre a e b	56
Figura 3.17 – Representação da média geométrica entre m e n	56
Figura 3.18 – Representação da média geométrica entre a e m	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: CONCEITOS FUNDAMENTAIS E ESTRUTURAS BÁSICAS	16
2.1	Fundamentos Teóricos	16
2.1.1	Circunferência	16
2.1.2	Polígonos	18
2.1.3	Triângulos	19
2.1.4	Congruência de Triângulos	20
2.1.5	Semelhança de Triângulos	21
2.1.6	Teorema de Tales	23
2.1.7	Relações Métricas no Triângulo Retângulo	26
2.1.8	Quadriláteros Notáveis	27
2.1.8.1	Paralelogramo	27
2.1.8.2	Losango	28
2.1.9	Ângulos	29
2.1.9.1	Ângulo Central e Ângulo Inscrito	29
2.2	Construções Elementares	34
2.2.1	Transporte de Segmentos	34
2.2.2	Transporte de Ângulos	35
2.2.3	Retas Paralelas	36
2.2.4	Mediatriz	37
2.2.5	Retas Perpendiculares	38
2.2.6	Bissetriz	39
2.2.7	Arco Capaz	40
3	NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS	44
3.1	Números Algébricos e Transcendentes	45
3.2	Propriedades dos Números Construtíveis	46
3.3	Construção de Expressões Algébricas	50
3.3.1	Dados os segmentos a e b, $a > b$, vamos obter graficamente o segmento $a + b$	50
3.3.2	Dados os segmentos a e b, $a > b$, vamos obter graficamente o segmento $a - b$	51

3.3.3	A 4ª Proporcional	51
3.3.4	A 3ª Proporcional	52
3.3.5	$(\sqrt{a^2 \pm b^2})$	52
3.3.6	\sqrt{b}	53
3.3.7	$a\sqrt{n}$	54
3.4	$\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{a \cdot b}$	55
4	GEOMETRIA E IRRACIONAIS: CONEXÕES E DESAFIOS NO ENSINO	58
4.1	Dificuldades no ensino e aprendizado dos números irracionais	58
4.1.1	Dificuldades dos alunos	59
4.1.2	Desafios dos professores no ensino dos números irracionais	59
4.2	Habilidades da BNCC relacionadas ao ensino dos números irracionais . .	61
4.3	Metodologias para o ensino dos números irracionais	62
5	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	65
	APENDICE A – Sequências Didáticas	67

1 INTRODUÇÃO

A compreensão dos números reais é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo uma base importante na formação dos alunos tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Dentro desse conjunto de números, destacam-se os números irracionais, que, ao contrário dos números racionais, não podem ser expressos como frações. Exemplos desses números, como π , $2\sqrt{2}$ e a constante e , possuem características especiais que frequentemente geram dificuldades tanto para os alunos quanto para os professores.

O ensino dos números irracionais é um desafio constante nas escolas, principalmente por seu caráter abstrato e a dificuldade de representar esses números de forma intuitiva para os alunos. Muitos estudantes encontram dificuldades em visualizar conceitos como a raiz quadrada de números não perfeitos ou a constante π , o que compromete sua compreensão do tema. Uma abordagem pedagógica inovadora, que envolva construções geométricas, pode oferecer aos alunos uma maneira mais concreta e acessível de entender esses números, ajudando a tornar esses conceitos mais fáceis de compreender.

O objetivo deste trabalho é investigar a utilização de construções geométricas no ensino dos números irracionais, buscando proporcionar aos alunos uma compreensão mais clara e significativa desses conceitos. A ideia é analisar como as construções geométricas podem facilitar a visualização dos números irracionais e contribuir para um ensino mais acessível e interativo. A questão central deste estudo é: como as construções geométricas podem ser aplicadas no ensino dos números irracionais para melhorar a compreensão dos alunos?

Este estudo será de natureza qualitativa e se baseará em uma análise bibliográfica sobre o ensino dos números irracionais e o uso de construções geométricas na educação matemática. Além disso, o trabalho apresentará exemplos práticos e atividades que podem ser aplicadas em sala de aula para ilustrar a utilização dessa metodologia.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

- a) no Capítulo 2, abordaremos os conceitos fundamentais e as construções geométricas essenciais para o ensino desses conceitos;
- b) no Capítulo 3, explicaremos o conceito e as propriedades dos números construtíveis, abordando a relação entre as construções geométricas e os números irracionais;
- c) no Capítulo 4, discutiremos o ensino dos números irracionais, explorando as dificuldades dos alunos e as estratégias pedagógicas para superá-las;
- d) a conclusão sintetizará os principais resultados e reflexões do estudo.

Por fim, no Apêndice, são apresentadas atividades envolvendo os números construtíveis e os números irracionais, que poderão ser utilizadas por outros professores em suas práticas pedagógicas.

2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: CONCEITOS FUNDAMENTAIS E ESTRUTURAS BÁSICAS

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos e construções geométricas que fundamentam este trabalho. O embasamento teórico deste capítulo foi fundamentado nas obras de Wagner (2007) e Rezende e Queiroz (2008). Essas referências forneceram os conceitos e princípios necessários para o desenvolvimento do conteúdo apresentado.

Entender as bases teóricas é fundamental para utilizá-las de maneira eficaz em diversas situações. Dividiremos esse capítulo em duas seções. Na primeira, foca-se no embasamento teórico, onde discute-se os conceitos e apresentam-se definições, teoremas e exemplos que ajudarão a elucidar as construções que utilizaremos no decorrer do estudo. Esses elementos servirão como alicerces para compreendermos melhor as aplicações que se seguirão. O objetivo dessa seção será apresentar apenas o que será utilizado na seção seguinte, sem abordar o conteúdo em sua totalidade.

Na segunda seção, aplicam-se os conceitos abordados na primeira seção para fundamentar as construções geométricas elementares que serão o foco deste capítulo.

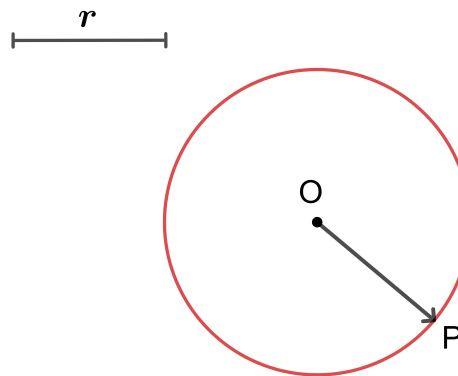
2.1 Fundamentos Teóricos

A seguir, abordaremos os conceitos geométricos essenciais que fornecerão o suporte teórico necessário para as construções que serão exploradas neste capítulo.

2.1.1 Circunferência

Definição 2.1 *Dado um ponto O e um número real $r > 0$, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do plano que estão a distância r de O , isto é, tais que $\overline{OP} = r$.*

Figura 2.1 – Circunferência de centro O e raio r.



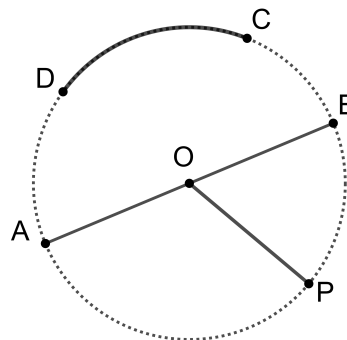
Fonte: Da autora (2025)

Dada uma circunferência, definimos:

- i) **Raio:** todo segmento que une o centro O a um dos pontos da circunferência.
- ii) **Corda:** um segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência.
- iii) **Diâmetro:** é uma corda que passa pelo centro da circunferência.
- iv) **Arco:** uma porção de uma circunferência delimitada por dois de seus pontos.

Na Figura 2.2 temos que AO, OB e OP são raios da circunferência.

Figura 2.2 – Elementos da Circunferência.



Fonte: Da autora (2025)

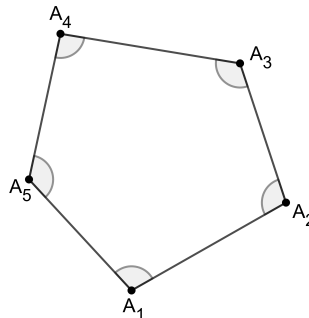
Nas notações da Figura 2.2 são cordas os segmentos AB e CD, sendo AB um diâmetro.

Ainda na Figura 2.2 note que dois pontos determinam dois arcos na circunferência, que podemos nos referir como arco maior e arco menor. Na figura está em destaque o arco menor \widehat{CD} , mas também podemos usar a notação \widehat{CPD} para indicarmos o arco maior.

2.1.2 Polígonos

Definição 2.2 *Sejam $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2\dots A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$, na reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_{n+1} = A_1$).*

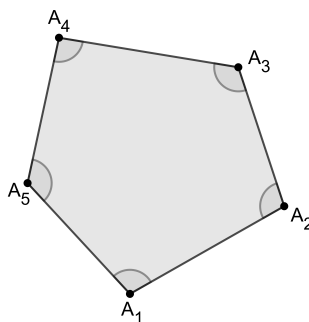
Figura 2.3 – Polígono de 5 lados



Fonte: Da autora (2025)

- i) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ são os vértices do polígono.
- ii) $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, são os lados do polígono.
- iii) A região poligonal correspondente ao polígono $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ é a região limitada do plano delimitada pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$.

Figura 2.4 – Região Poligonal.



Fonte: Da autora (2025)

- iv) Diagonal de um polígono é qualquer um dos segmentos A_iA_j que não seja um lado do mesmo. Por exemplo na Figura 2.4 o segmento A_1A_3 é uma das diagonais do polígono.

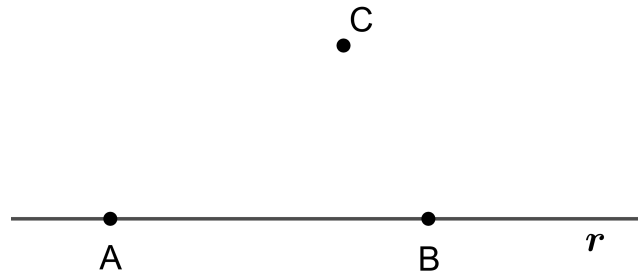
De maneira geral, um polígono $A_1A_2\dots A_n$ é denominado **n-ágono**, em referência à quantidade n de seus lados e vértices. No entanto, é comum o uso de nomenclaturas específicas

para alguns valores de n . Quando $n = 3$, o polígono recebe o nome de triângulo. Quando $n = 4$, o polígono é chamado de **quadrilátero**; para $n = 5$, recebe o nome de **pentágono**; quando $n = 6$, é denominado **hexágono**; para $n = 7$, é um **heptágono**; ao atingir $n = 8$, recebe o nome de **octógono**; quando $n = 9$, é chamado de **eneágono**; e quando $n = 10$, é chamado de **decágono**.

2.1.3 Triângulos

Suponha três pontos A, B e C no plano. Se C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} dizemos que os pontos A, B e C são colineares, caso contrário dizemos que os pontos não são colineares como na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Três pontos não colineares.



Fonte: Da autora (2025)

Definição 2.3 *Três pontos não colineares formam um triângulo.*

Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo. A região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos A, B e C, dois a dois. Dizemos que os segmentos, AB, BC e AC são os lados do triângulo e suas medidas $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$ são os comprimentos dos lados do triângulo.

Os triângulos podem ser classificados de duas formas:

a) de acordo com a medida de seus lados:

- equilátero: se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$;
- isósceles: se ao menos dois entre \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} forem iguais;
- escaleno: se $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$.

b) de acordo com os seus ângulos:

- acutângulo: possui os três ângulos internos menores que 90° ;
- retângulo: possui um ângulo interno reto, ou seja, igual a 90° ;

– obtusângulo: possui um ângulo interno obtuso, ou seja, maior que 90° .

Se o triângulo ABC for isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, o lado BC será chamado de base. Já no caso de um triângulo equilátero, qualquer um de seus lados pode ser considerado a base.

Quando o triângulo ABC for retângulo, os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos, enquanto o lado oposto a esse ângulo recebe o nome de hipotenusa, sendo sempre o maior lado do triângulo.

2.1.4 Congruência de Triângulos

Definição 2.4 *Dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; e dois ângulos são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Definição 2.5 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$A \longleftrightarrow E \quad B \longleftrightarrow F \quad C \longleftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então, valem simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{EF} & \hat{A} = \hat{E} \\ \overline{BC} = \overline{FG} & \hat{B} = \hat{F} \\ \overline{AC} = \overline{EG} & \hat{C} = \hat{G} \end{array}$$

Escrevemos $ABC = EFG$ para significar que os triângulos ABC e EFG são congruentes e que a congruência leva \hat{A} em \hat{E} , \hat{B} em \hat{F} e \hat{C} em \hat{G} .

Para determinar se dois triângulos são congruentes, é necessário verificar seis relações: a congruência dos três pares de lados e a congruência dos três pares de ângulos correspondentes. No entanto, existem três critérios que permitem verificar a congruência utilizando apenas três dessas relações.

Teorema 2.6 Primeiro Caso de Congruência de Triângulos: *Se dois triângulos ABC e EFG possuem dois lados congruentes ($\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$) e o ângulo formado por esses lados também for congruente ($\hat{A} = \hat{E}$), então os triângulos são congruentes, ou seja, $ABC = EFG$.*

Esse critério é conhecido como caso **LAL (Lado-Ângulo-Lado)**, pois dois lados e o ângulo entre eles são suficientes para garantir a congruência dos triângulos.

Além do primeiro caso, existem outros critérios que garantem a igualdade entre dois triângulos com base em seus elementos.

Teorema 2.7 Segundo Caso de Congruência de Triângulos: *Se dois triângulos ABC e EFG possuem um lado congruente ($\overline{AB} = \overline{EF}$) e os ângulos adjacentes a esse lado também são congruentes ($\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$), então os triângulos são congruentes, ou seja, $ABC = EFG$.*

Esse critério é conhecido como caso **ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)**, pois dois ângulos e o lado entre eles são suficientes para garantir a congruência dos triângulos.

O terceiro critério estabelece que, em certas condições, a comparação de apenas os lados dos triângulos já é suficiente para determinar sua congruência.

Teorema 2.8 Terceiro Caso de Congruência de Triângulos: *Se dois triângulos ABC e EFG possuem os três lados congruentes ($\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$), então os triângulos são congruentes, ou seja, $ABC = EFG$.*

Esse critério é conhecido como caso **LLL (Lado-Lado-Lado)**, pois a igualdade dos três lados dos triângulos garante que seus ângulos também sejam congruentes, tornando-os idênticos em forma e tamanho.

2.1.5 Semelhança de Triângulos

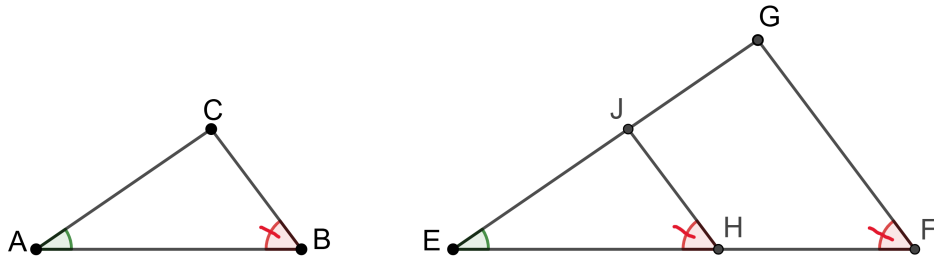
Barbosa (2012) apresenta a definição de semelhança de triângulos em sua obra.

Definição 2.9 *Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

O teorema a seguir traz o primeiro caso de semelhança de triângulos.

Teorema 2.10 *Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 2.6 – Representação do 1º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: Da autora (2025)

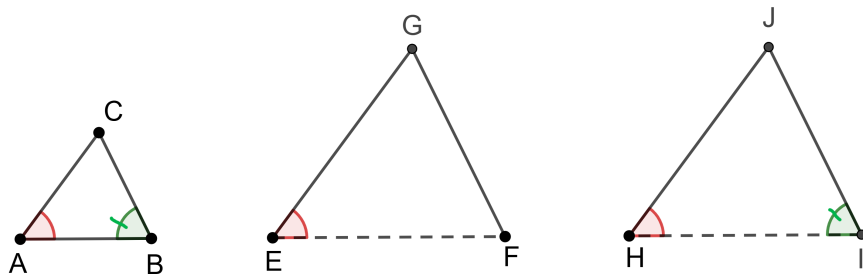
Demonstração 2.11 Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° , então a congruência dos ângulos \hat{A} e \hat{E} e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} acarreta na congruência dos ângulos \hat{C} e \hat{G} . Tomemos na semirreta S_{EF} o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo ponto H traçamos uma reta paralela a FG . Esta reta corta a semirreta S_{EG} num ponto J , formando um triângulo EJH que é congruente ao triângulo ABC , já que $\hat{A} = \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EH}$ e $\hat{B} = \hat{F} = \hat{E}HJ$. Devido ao paralelismo de \overleftrightarrow{JH} e \overleftrightarrow{GF} , temos que $\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}$. Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$, então, da igualdade acima obtém-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$. De maneira análoga, demonstramos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$. ■

O segundo caso de semelhança de triângulos é apresentado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.12 Se em dois triângulos ABC e EFG tem-se que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração 2.13 Constrói-se um triângulo HIJ que tenha $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.

Figura 2.7 – Representação do 2º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: Da autora (2025)

De acordo com o Teorema 2.10, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Por conseguinte: $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e a igualdade anterior implicam que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e a igualdade anterior implicam que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$.

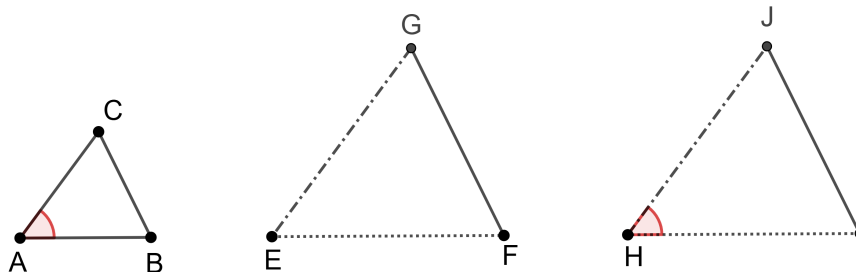
Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$, podemos concluir, pelo caso de congruência de triângulos lado - ângulo - lado, que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já sabe-se que ABC e HIJ são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são semelhantes.

■

O terceiro caso de semelhança de triângulos é apresentado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.14 Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$, então os dois triângulos são semelhantes.

Figura 2.8 – Representação do 3º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: Da autora (2025)

Demonstração 2.15 Constrói-se um triângulo HIJ que tenha $\hat{H} = \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Segue-se, então, da hipótese que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$.

Portanto, de acordo com o Teorema 2.12, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.

Além da igualdade acima, também ocorre $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$.

Segue que $\overline{IJ} = \overline{FG}$. Como já tinha-se que $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$, então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, HIJ e EFG são congruentes. Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são também semelhantes. ■

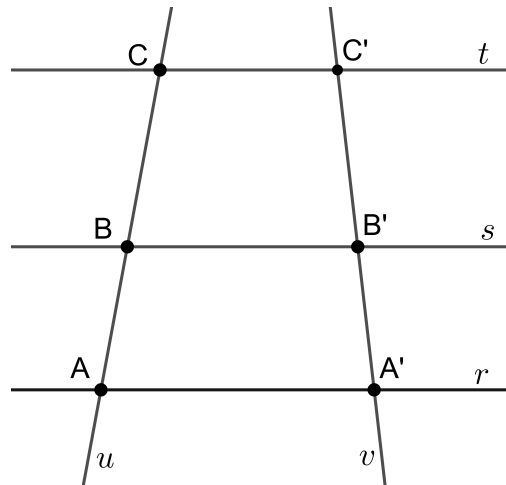
2.1.6 Teorema de Tales

Entre os fundamentos essenciais para a compreensão das construções geométricas e das relações de proporcionalidade, destaca-se o Teorema de Tales. Sua importância no ensino de matemática reside tanto no valor conceitual quanto no potencial didático, especialmente por permitir a visualização de proporções em figuras geométricas formadas por retas paralelas cortadas por transversais (IEZZI et al., 2010).

Teorema 2.16 *Sejam $r, s, e t$ retas paralelas. Tem-se pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B e C e A', B' e C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$*

Demonstração 2.17 *Sejam r, s e t retas paralelas e u e v retas transversais às paralelas. Tem-se pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B e C e A', B' e C' sejam dois ternos de pontos colineares.*

Figura 2.9 – Retas paralelas cortadas por duas transversais.

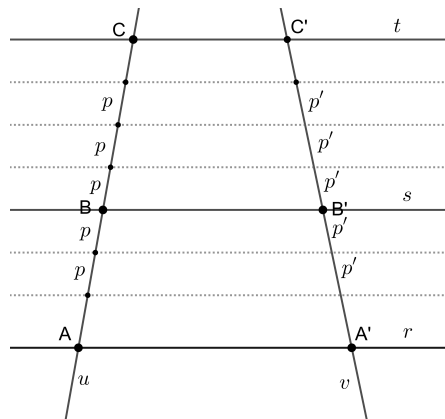


Fonte: Da autora (2025)

Suponha que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja racional. Assim, para a reta u , temos $p \in \mathbb{Z}$, tal que p seja submúltiplo de \overline{AB} e \overline{BC} , então $\overline{AB} = mp$ e $\overline{BC} = np$, daí $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$.

Traçamos paralelas a r, s e t passando pelas interseções de p com a reta u . Desce-se, dos pontos de interseções de v , paralelas a u formando quadriláteros.

Figura 2.10 – Divisões dos segmentos por p .

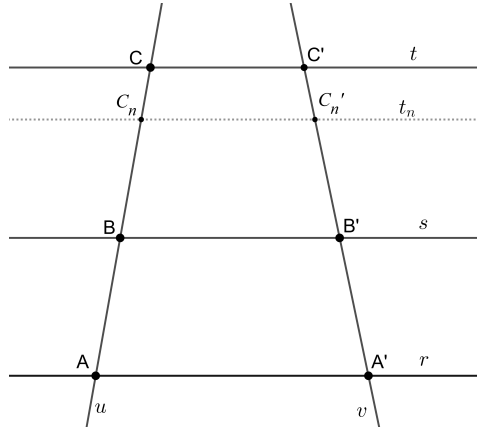


Fonte: Da autora (2025)

Assim, existe um p' tal que $\overline{A'B'} = mp'$ e $\overline{B'C'} = np'$ $\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$. Logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Caso tenhamos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com $x \in \mathbb{I}$. Escolhendo uma sequência $a_n \in \mathbb{Q}_+$ tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Marque C_n um ponto pertencente a reta u de modo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$. Seja t_n a reta paralela as retas r, s e t que possui C_n e C'_n como interseções com as retas u e v respectivamente.

Figura 2.11 – Razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional.



Fonte: Da autora (2025)

Como $a_n \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n$.

De outro modo obtivemos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}.$$

De $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$ conseguimos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}.$$

Notemos que na segunda desigualdade se $n \rightarrow \infty$ temos que $C_n \rightarrow C$ e $C'_n \rightarrow C'$, ou seja,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ vemos que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Segue da unicidade de (LIMA, 2016) que uma sequência de reais quando é convergente não pode aproximar-se de dois reais distintos quando $n \rightarrow \infty$. Portanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

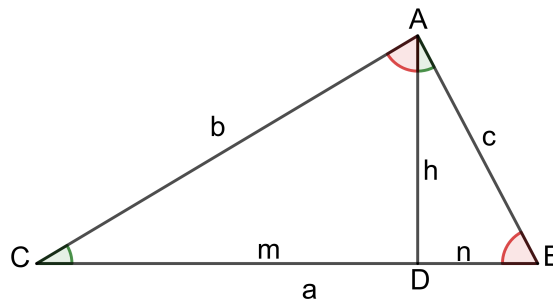


O Teorema de Tales será utilizado como base teórica para justificar determinadas construções geométricas que envolvem proporcionalidade entre segmentos. Sua aplicação permite compreender e validar, por meio da geometria, as relações de razão entre comprimentos.

2.1.7 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A . Trace a altura AD do vértice A ao lado BC . No que se segue, vamos fazer uso da seguinte notação $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$.

Figura 2.12 – Representação do Triângulo Retângulo.



Fonte: Da autora (2025)

Como AD é perpendicular a BC , então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ e $\hat{B} + \angle BAD = 90^\circ$, então $\angle BAD = \hat{C}$.

Como também ADB e CDA são ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças, podemos deduzir várias relações entre as medidas a , b , c , h , m e n acima mencionadas.

Proposição 2.18 *Em todo triângulo retângulo, a altura do vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração 2.19 *A semelhança entre ADB e CDA na Figura 2.12 é a que leva A em C , B em A e D em D . Como consequência dessa semelhança, tem-se $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$.*

Da igualdade $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$, deduz-se que $h^2 = mn$.



O teorema seguinte é um dos mais importantes da geometria Euclidiana plana, conhecido como Teorema de Pitágoras.

Teorema 2.20 *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração 2.21 *Da semelhança de ABD e CBA ($A \rightarrow C$, $B \rightarrow B$, $D \rightarrow A$), conclui-se que $\frac{n}{c} = \frac{c}{a}$.*

Da semelhança de CDA e CAB, conclui-se que $\frac{m}{b} = \frac{b}{a}$.

Logo $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto, $am + an = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m + n) = b^2 + c^2$. Como $m + n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$. ■

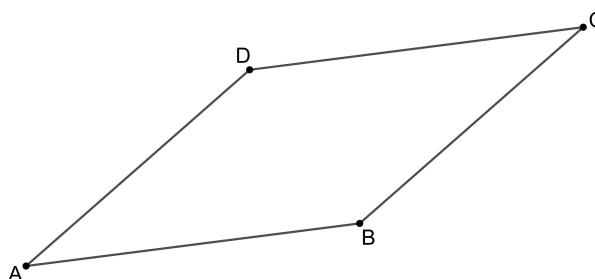
2.1.8 Quadriláteros Notáveis

Quando nos referimos a quadriláteros, estamos falando de figuras geométricas com quatro lados, que podem ter diferentes propriedades dependendo das relações entre seus lados e ângulos. Entre essas propriedades, a ideia de lados paralelos é fundamental para entender diversas categorias de quadriláteros. Um tipo específico de quadrilátero, chamado paralelogramo, possui a característica de ter seus lados opostos paralelos. A seguir, apresentamos a definição formal de paralelogramo, que é baseada exatamente nessa característica.

2.1.8.1 Paralelogramo

Definição 2.22 *Um quadrilátero é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.*

Figura 2.13 – Paralelogramo ABCD, onde $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.



Fonte: Da autora (2025)

As proposições a seguir apresentam condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero convexo seja classificado como paralelogramo ou losango, abordando propriedades fundamentais dessas figuras geométricas.

Proposição 2.23 *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.*

Proposição 2.24 *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

Proposição 2.25 *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.*

Proposição 2.26 *Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.*

As demonstrações dessas proposições estão detalhadas em Barbosa (2012), mas não são relevantes para o objetivo deste trabalho. No momento, nos interessa apenas as características apresentadas, pois elas serão utilizadas para justificar algumas construções geométricas ao longo do estudo.

2.1.8.2 Losango

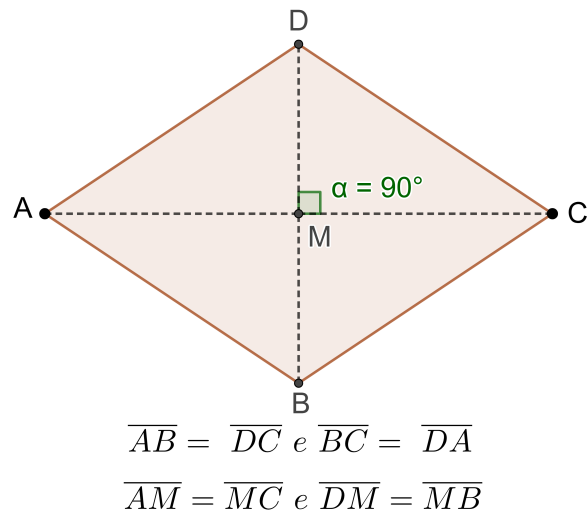
Definição 2.27 *Um losango é um quadrilátero convexo cujos quatro lados são congruentes. Seja $ABCD$ um quadrilátero no plano euclidiano. Dizemos que $ABCD$ é um losango se:*

$$AB = BC = CD = DA.$$

Como consequência dessa definição, o losango é um caso particular de paralelogramo e satisfaz as seguintes propriedades:

- a) os lados opostos são paralelos;
- b) os ângulos opostos são congruentes;
- c) as diagonais são perpendiculares entre si;
- d) as diagonais se interceptam em seus pontos médios (isto é, bissectam-se mutuamente);
- e) cada diagonal é bissetriz dos ângulos internos cujos vértices ela conecta.

Figura 2.14 – Losango ABCD.



Fonte: Da autora (2025)

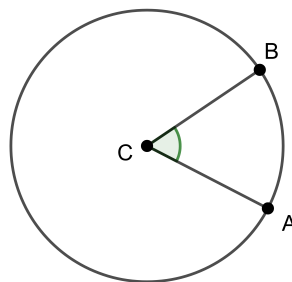
2.1.9 Ângulos

Definição 2.28 Um ângulo é a figura geométrica determinada por duas semirretas que partem de um mesmo ponto, chamado de vértice. Essas semirretas, conhecidas como lados do ângulo, definem uma abertura entre si, independentemente de seu comprimento.

2.1.9.1 Ângulo Central e Ângulo Inscrito

Vamos analisar a relação existente entre ângulo central e ângulo inscrito em uma mesma circunferência.

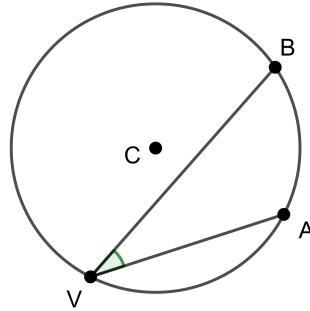
Definição 2.29 Ângulo central de uma circunferência é qualquer ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Figura 2.15 – Representação de um ângulo central $\angle ACB$.

Fonte: Da autora (2025)

Definição 2.30 *Ângulo inscrito em uma circunferência é qualquer ângulo cujo vértice pertença a essa circunferência e seus lados sejam secantes a ela.*

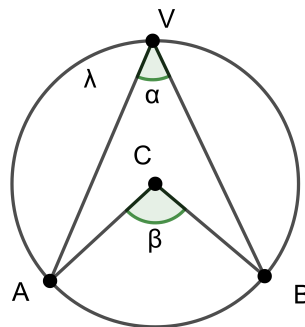
Figura 2.16 – Representação de um ângulo inscrito $\angle AVB$.



Fonte: Da autora (2025)

Teorema 2.31 *Se VA e VB são cordas de uma circunferência λ de centro em C, então a medida do ângulo inscrito $\angle AVB$ é a metade da medida do ângulo central correspondente $\angle ACB$.*

Figura 2.17 – Representação da relação entre um ângulo central e um ângulo inscrito.



$$\beta = 2\alpha$$

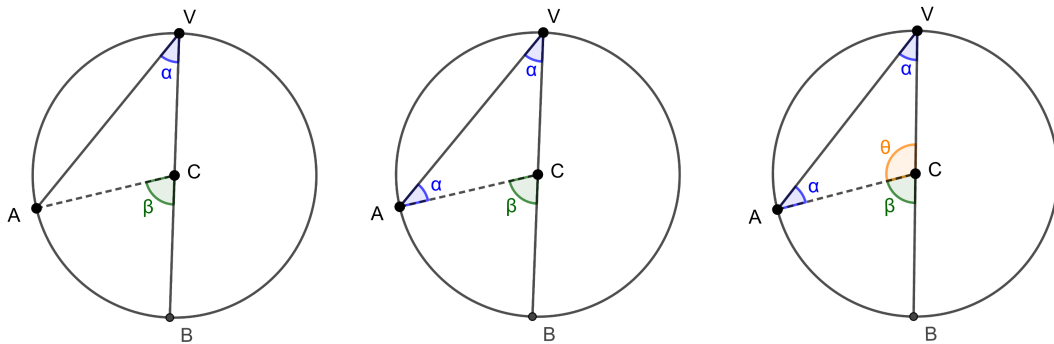
Fonte: Da autora (2025)

Demonstração 2.32 *Sejam A, B e V pontos distintos de uma circunferência λ de centro C. Vamos analisar três casos separadamente.*

Caso 1 - *O centro C está sobre um lado do ângulo inscrito $\angle AVB$.*

Sejam α e β as medidas dos ângulos $\angle AVB$ e $\angle ACB$, respectivamente, e suponha que C seja ponto de VB. A sequência apresentada na Figura 2.18 ilustra que, como CA e CV são raios da circunferência, então o triângulo CVA é isósceles e, portanto, os ângulos $\angle CAV$ e $\angle CVA$ têm a mesma medida. Como os ângulos $\angle CVA$ e $\angle BVA$ são iguais, então os ângulos $\angle CAV$ e $\angle CVA$ têm medida α .

Figura 2.18 – O Centro C está sobre um lado do $\angle AVB$.



Fonte: Da autora (2025)

A última representação na Figura 2.18 ilustra dois fatos que nos permitirão concluir essa primeira parte da demonstração:

a) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a medida do ângulo $\angle ACV$ é $\theta = 180^\circ - 2\alpha$.

b) Por outro lado, os pontos V , C e B são colineares, logo $\theta + \beta = 180^\circ$, ou seja, $\theta = 180^\circ - \beta$.

Assim, $180^\circ - 2\alpha = \beta$, donde $2\alpha = \beta$, ou ainda $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

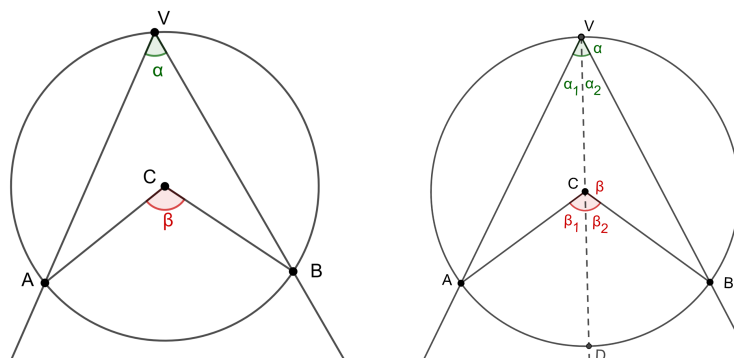
Caso 2 - O centro C está no interior do ângulo inscrito $\angle AVB$.

Sejam α e β as medidas dos ângulos $\angle AVB$ e $\angle ACB$, respectivamente, e suponha que C seja ponto interior de $\angle AVB$. Seja, também, a semirreta \overrightarrow{VC} cuja interseção com a circunferência λ denominaremos D . Observe que a semirreta \overrightarrow{VC} divide cada um dos ângulos $\angle AVB$ e $\angle ACB$ em dois outros, assim temos:

a) $\angle AVD$ e $\angle DVB$ com medidas, respectivamente, α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. (i)

b) $\angle ACD$ e $\angle DCB$ com medidas, respectivamente, β_1 e β_2 tais que $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. (ii)

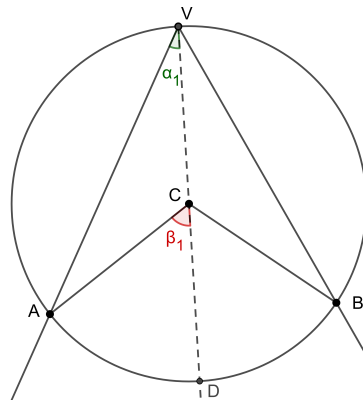
Figura 2.19 – O Centro C está no interior do ângulo inscrito $\angle AVB$.



Fonte: Da autora (2025)

Observe que o ângulo inscrito $\angle AVD$ e o respectivo ângulo central $\angle ACD$ estão nas condições do Caso 1: o centro C está sobre um lado do ângulo inscrito. Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$. (iii)

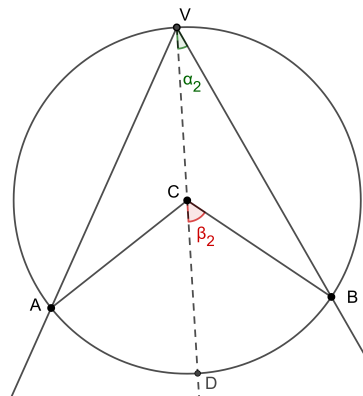
Figura 2.20 – Representação de $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$.



Fonte: Da autora (2025)

Observe, agora, que o ângulo inscrito $\angle DVB$ e o respectivo ângulo central $\angle DCB$ também estão nas condições do Caso 1: o centro C está sobre um lado do ângulo inscrito. Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. (iv)

Figura 2.21 – Representação de $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$.



Fonte: Da autora (2025)

Dessa forma por (i), (ii), (iii) e (iv) segue que:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{\beta}{2}$$

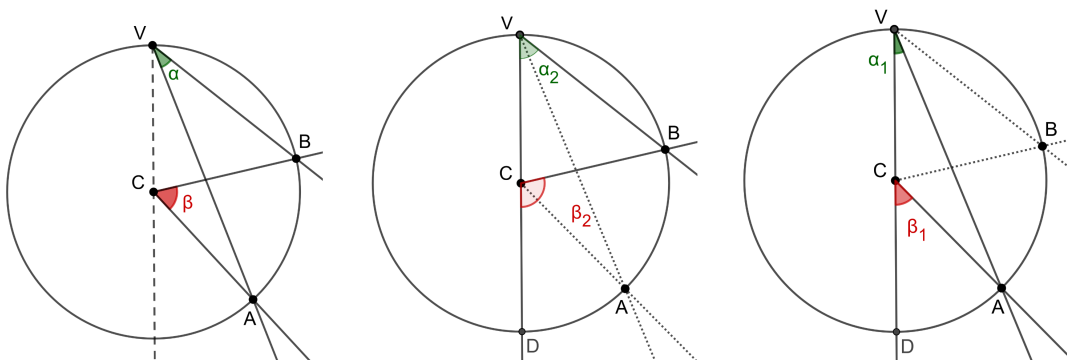
e portanto, $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Caso 3 - O centro C está no exterior do ângulo inscrito $\angle AVB$.

Sejam α e β as medidas dos ângulos $\angle AVB$ e $\angle ACB$, respectivamente, e suponha que C seja um ponto exterior de $\angle AVB$. Considere, também, a semirreta \overrightarrow{VC} cuja interseção com a circunferência denominaremos D . Perceba que a semirreta \overrightarrow{VC} define quatro novos ângulos, $\angle DVA$, $\angle DVB$, $\angle DCA$ e $\angle DCB$, e com isso obtemos:

- $\angle DVA$ e $\angle DVB$ com medidas, respectivamente, α_1 e α_2 tais que $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$. (i)
- $\angle DCA$ e $\angle DCB$ com medidas, respectivamente, β_1 e β_2 tais que $\beta_2 - \beta_1 = \beta$. (ii)

Figura 2.22 – O Centro C está no exterior do ângulo inscrito $\angle AVB$.



Fonte: Da autora (2025)

Observe que o ângulo inscrito $\angle DVA$ e o ângulo central $\angle DCA$ se enquadram nas condições do Caso 1: o centro C está sobre um lado do ângulo inscrito. Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$. (iii)

Note que o ângulo inscrito $\angle DVB$ e o ângulo central $\angle DCB$ também estão nas condições do Caso 1: o centro C está sobre um lado do ângulo inscrito. Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. (iv)

Finalmente, por (i), (ii), (iii) e (iv), segue que:

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_1}{2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\beta}{2}$$

e, portanto, $\alpha = \frac{\beta}{2}$. ■

Ao aplicarmos este teorema devemos ter a certeza que os ângulos envolvidos, o central e o inscrito, correspondam ao mesmo arco e que este não contenha o vértice do ângulo inscrito.

2.2 Construções Elementares

Concluída a apresentação dos conceitos fundamentais, passamos agora à aplicação desses princípios na realização de construções geométricas básicas, que ilustram de forma prática os conceitos discutidos.

Em todas as construções elementares a seguir serão utilizados somente régua e compasso. Com a régua podemos traçar uma reta quando dois de seus pontos são conhecidos e o compasso serve para traçar círculos de centros e raios dados.

2.2.1 Transporte de Segmentos

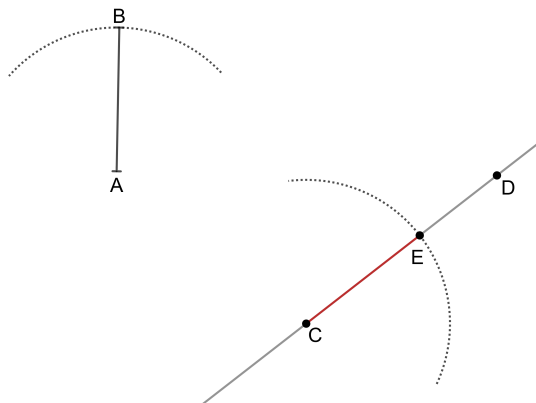
Apesar de não se tratar em si de uma construção, o transporte de segmentos é indispensável em diversas construções. Na situação apresentada abaixo vamos transportar um segmento dado para uma reta também conhecida. Com o uso de um compasso, transportar o segmento AB dado para a reta \overleftrightarrow{CD} também conhecida.

Para realizar o transporte de um segmento de reta utilizando régua e compasso, considere inicialmente um segmento \overline{AB} previamente construído no plano. Em seguida, traça-se uma reta auxiliar r em outra região do plano, distante do segmento original, sobre a qual será realizada a cópia da medida. Escolhe-se um ponto C sobre a reta r , que servirá como origem para o transporte do segmento.

Com o auxílio do compasso, posiciona-se a ponta seca sobre o ponto A e ajusta-se a abertura até que a ponta gráfica alcance o ponto B , obtendo assim a medida exata do segmento \overline{AB} . Sem alterar essa abertura, posiciona-se agora a ponta seca sobre o ponto C , traçando-se um arco que intersecta a reta r . Denomina-se esse ponto de interseção como E .

Dessa forma, o segmento \overline{CE} , construído sobre a reta r , é congruente ao segmento original \overline{AB} , completando o processo de transporte da medida com precisão.

Figura 2.23 – Transporte de segmentos.



Fonte: Da autora (2025)

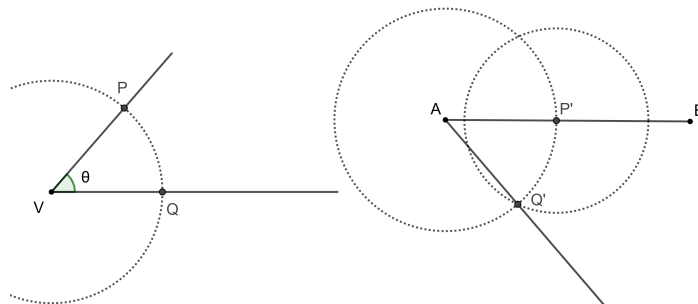
2.2.2 Transporte de Ângulos

Também será necessário para algumas de nossas construções o transporte de ângulos para determinado segmento.

No exemplo a seguir, encontramos a situação em que precisamos transportar um ângulo dado para um segmento também dado.

Sejam dados um ângulo θ de vértice V e um segmento AB . Desejamos construir um ângulo $\angle BAX = \theta$. Para isso, traçamos um círculo qualquer com centro em V , determinando P e Q nos lados do ângulo e outro círculo de mesmo raio com centro em A determinando P' em AB . Em seguida, com o raio \overline{PQ} , traçamos um círculo de centro P' para determinar Q' sobre o primeiro círculo. Desta construção teremos $\angle P'AQ' = \angle PVQ = \theta$.

Figura 2.24 – Representação do transporte de ângulo.



Fonte: Da autora (2025)

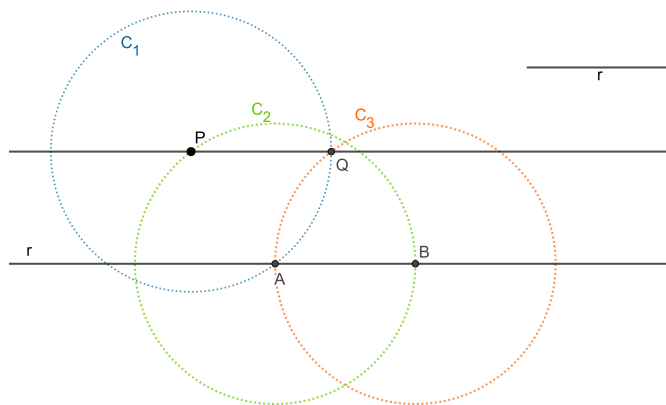
2.2.3 Retas Paralelas

Postulado 2.33 *Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s , paralela a r e passando por A .*

Exemplo 2.34 *Sejam dados a reta r e um ponto P externo a ela e desejamos construir uma reta s paralela a r , que denotamos por $s \parallel r$, passando por P .*

Resolução 2.35 *Para traçarmos por P uma reta paralela a reta r podemos proceder da seguinte forma: traçamos três círculos de mesmo raio. O primeiro com centro em P , determinando A na reta r ; o segundo com centro em A , determinando o ponto B na mesma reta e o terceiro com centro em B , determinando um ponto Q sobre o primeiro círculo. A reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ é paralela a reta r .*

Figura 2.25 – Construção de retas paralelas.



Fonte: Da autora (2025)

Justificativa da construção: Observa-se que, ao traçar três círculos com o mesmo raio, construímos quatro segmentos de igual comprimento: \overline{PA} , \overline{AB} , \overline{BQ} e \overline{PQ} . Como todos esses segmentos são congruentes e formam um quadrilátero $PABQ$, podemos concluir que esse quadrilátero é um losango.

Por definição, um losango é um quadrilátero com os quatro lados congruentes. Uma de suas propriedades fundamentais é que os lados opostos são paralelos. Sendo assim, os lados \overline{PQ} e \overline{AB} são paralelos. Como \overline{AB} está contido na reta r e \overline{PQ} está contido na reta s , concluímos que $s \parallel r$, ou seja, $s \parallel r$.

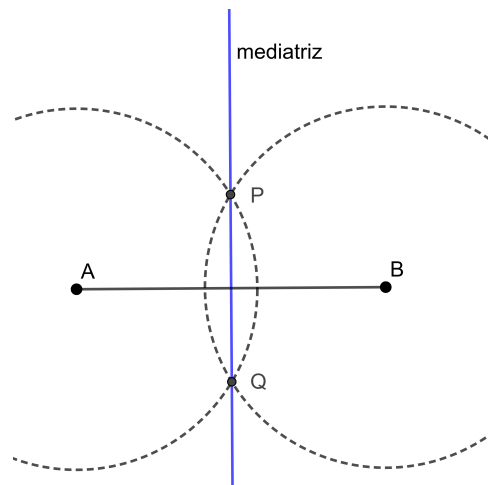
2.2.4 Mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém seu ponto médio.

Exemplo 2.36 Dado um segmento AB , construir a sua mediatriz.

Resolução 2.37 Para construirmos a mediatriz do segmento AB traçamos dois círculos de mesmo raio com centros em A e B . Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos. A reta \overleftrightarrow{PQ} é a mediatriz do segmento AB .

Figura 2.26 – Construção da mediatriz.



Fonte: Da autora (2025)

Justificativa da construção: Ao construir a mediatriz do segmento \overline{AB} , traçamos dois círculos com o mesmo raio, centrados em A e B , que se intersectam nos pontos P e Q . O quadrilátero $APBQ$ é, então, um losango, pois, por construção, os quatro lados \overline{AP} , \overline{PB} , \overline{BQ} e \overline{QA} são congruentes.

Uma das propriedades fundamentais do losango é que suas diagonais são perpendiculares entre si e se cortam ao meio. No caso de $APBQ$, as diagonais são os segmentos \overline{AB} e \overline{PQ} . Como P e Q são os pontos de interseção dos círculos de mesmo raio traçados com centros em A e B , o segmento \overline{PQ} é perpendicular a \overline{AB} e os dois se intersectam exatamente no ponto médio de \overline{AB} .

Portanto, a reta \overleftrightarrow{PQ} , que passa pelos pontos de interseção dos círculos, é perpendicular ao segmento \overline{AB} , e a interseção entre \overline{PQ} e \overline{AB} é o ponto médio de ambos, caracterizando \overleftrightarrow{PQ} como a mediatriz de \overline{AB} .

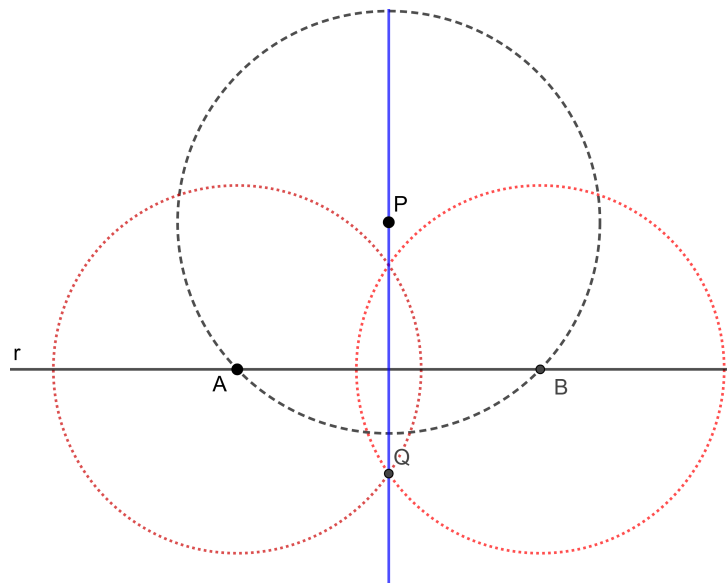
2.2.5 Retas Perpendiculares

Duas retas concorrentes são perpendiculares quando se encontram formando quatro ângulos iguais; cada um deles é chamado de ângulo reto.

Exemplo 2.38 *Sejam dados a reta r e um ponto P externo a ela e desejamos construir uma reta s perpendicular a r , que denotamos por $s \perp r$ passando por P .*

Resolução 2.39 *Para traçarmos uma reta perpendicular a reta r que contenha o ponto P , procedemos da seguinte forma: traçamos um círculo de centro P cortando a reta r em dois pontos A e B . Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio com centros em A e B obtendo na interseção entre eles o ponto Q . A reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a reta r .*

Figura 2.27 – Construção de reta perpendicular - $P \notin r$.



Fonte: Da autora (2025)

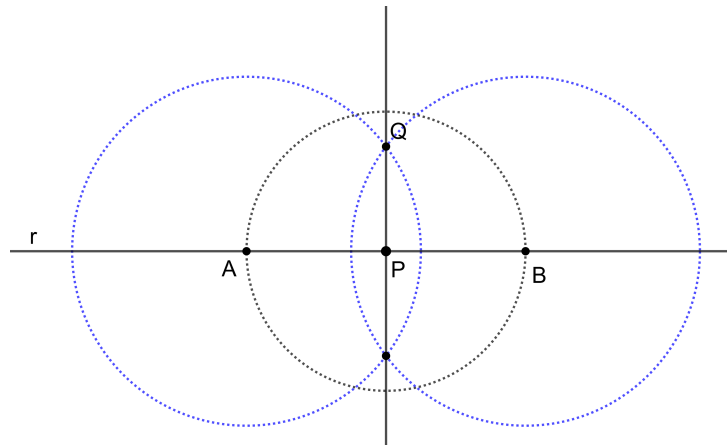
Justificativa da construção: como $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{QA} = \overline{QB}$, a reta \overleftrightarrow{PQ} é mediatriz de AB e, portanto, perpendicular a AB .

Exemplo 2.40 *Seja dada a reta r e um ponto P pertencente a ela. Desejamos construir uma reta s perpendicular a r , passando por P , ou seja, $s \perp r$ e $P \in s$.*

Resolução 2.41 *Para construir uma reta perpendicular à reta r , passando por um ponto P pertencente a ela, traçamos um círculo com centro em P , de modo que ele intercepte a reta r em dois pontos distintos, A e B , com A à esquerda de P e B à direita. Em seguida, traçamos*

dois círculos com o mesmo raio, maior que a metade do segmento \overline{AB} , com centros em A e B . Esses dois círculos se interceptam em dois pontos simétricos em relação à reta r ; denotamos um deles por Q . A reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$, determinada por P e Q , é perpendicular à reta r . Isso ocorre porque, por construção, Q é equidistante de A e B , e portanto \overline{PQ} é perpendicular ao segmento \overline{AB} , que está contido em r . Assim, $s \perp r$, como desejado.

Figura 2.28 – Construção de reta perpendicular - $P \in r$.



Fonte: Da autora (2025)

Justificativa da construção: como $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{QA} = \overline{QB}$, a reta \overleftrightarrow{PQ} é mediatriz de AB e, portanto, perpendicular a AB .

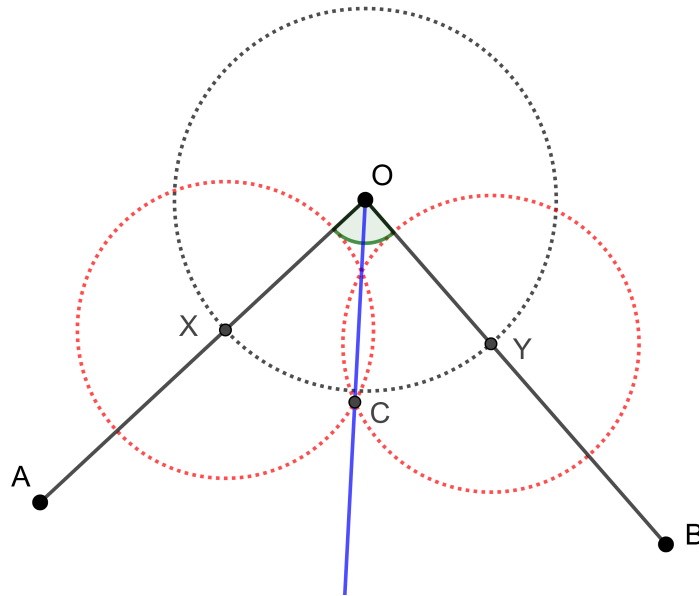
2.2.6 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo $\angle AOB$ é a semirreta \overrightarrow{OC} tal que $\angle AOC = \angle COB$. É comum dizermos que a bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais.

Exemplo 2.42 Seja dado o ângulo $A\hat{O}B$ e desejamos traçar sua bissetriz.

Resolução 2.43 Para construirmos a bissetriz de um ângulo $\angle AOB$ dado traçamos um círculo de centro em O , com raio qualquer, determinando X e Y nos lados do ângulo, $X \in \overrightarrow{OA}$ e $Y \in \overrightarrow{OB}$. Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção. A semirreta \overrightarrow{OC} é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

Figura 2.29 – Construção da bissetriz.



Fonte: Da autora (2025)

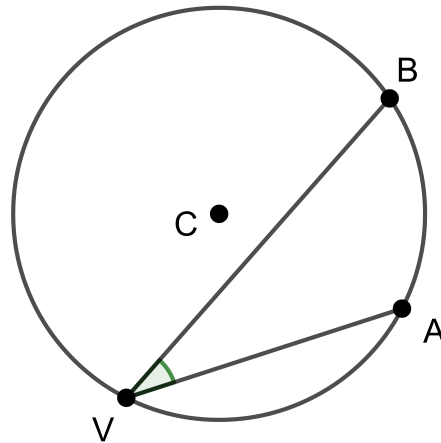
Justificativa da construção: pela construção feita, os triângulos OXC e OYC são congruentes pelo caso lado-lado-lado e, portanto, $\angle XOC = \angle YOC$.

Propriedade 2.44 *A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.*

2.2.7 Arco Capaz

Considere dois pontos A e B sobre um círculo. Para todo ponto V sobre um dos arcos, o ângulo $\angle AVB = \theta$ é constante. Este arco chama-se arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB .

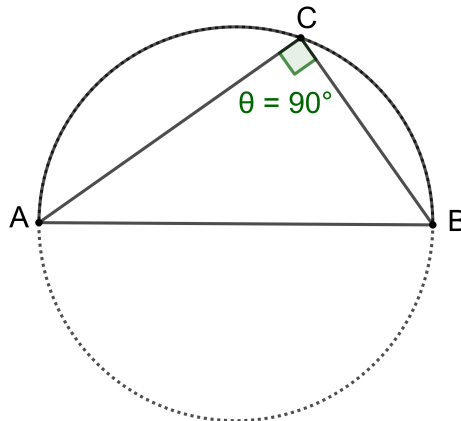
Figura 2.30 – Representação do ângulo inscrito $\angle AVB = \theta$.



Fonte: Da autora (2025)

Se V é qualquer ponto do círculo de diâmetro AB , o ângulo $\angle AVB$ é reto, portanto, cada semicírculo é chamado de arco capaz de 90° sobre AB .

Figura 2.31 – Representação do arco capaz de 90° .

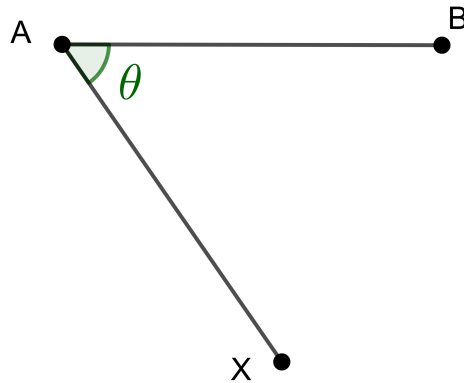


Fonte: Da autora (2025)

Exemplo 2.45 Dados o ângulo θ e o segmento AB , construir o arco capaz de θ sobre AB .

Resolução 2.46 Para construirmos o arco capaz solicitado transportamos θ para o segmento AB formando o ângulo $\angle BAX = \theta$

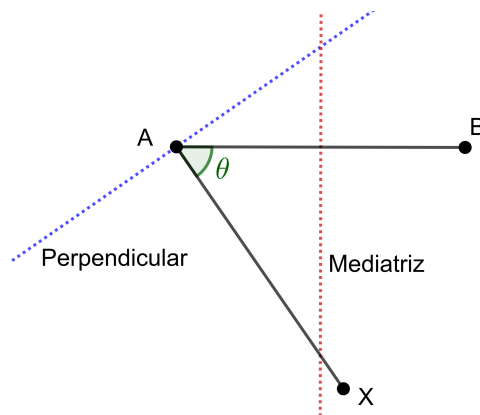
Figura 2.32 – Passo 1: Construção do Arco Capaz - Transporte do ângulo



Fonte: Da autora (2025)

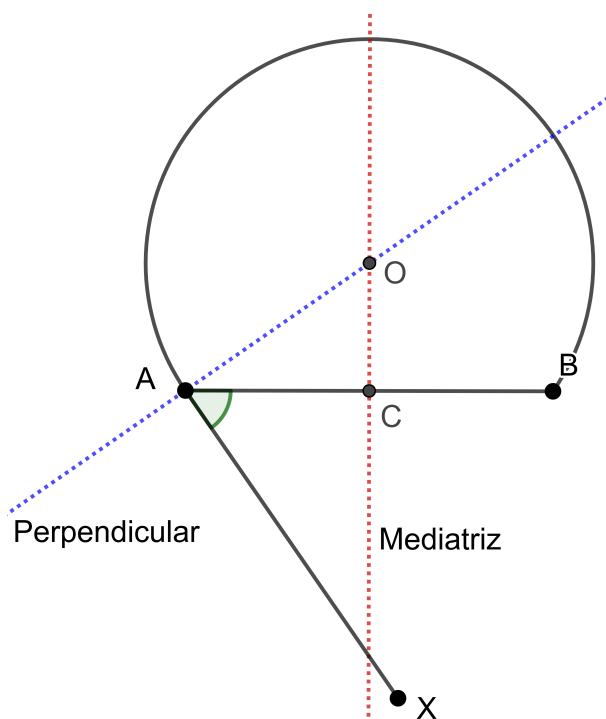
Em seguida, traçamos a reta perpendicular à AX em A e construímos a mediatriz de AB .

Figura 2.33 – Passos 2 e 3: Construção do arco capaz - reta perpendicular e mediatriz



Fonte: Da autora (2025)

A interseção entre a reta perpendicular à A e a mediatriz de AB determina o ponto O , centro do arco capaz. O arco de centro O e extremidades A e B situado no semiplano oposto a \overrightarrow{AX} é o arco capaz do ângulo θ sobre AB .

Figura 2.34 – Arco capaz de θ sobre o segmento AB .

Fonte: Da autora (2025)

Justificativa da construção: denotando por C o ponto médio de AB , como $\angle BAX = \theta$, teremos $\angle CAO = 90^\circ - \theta$, $\angle AOC = \theta$ e $\angle AOB = 2\theta$, portanto, como a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central correspondente teremos que para qualquer ponto M do arco construído $\angle AMB = \theta$.

Concluimos este capítulo com uma apresentação detalhada das construções geométricas elementares, destacando os princípios básicos que regem o uso da régua e do compasso. Essas técnicas formam a base para diversos estudos em geometria e nos preparam para explorar conceitos mais abstratos e desafiadores.

No próximo capítulo, avançaremos para o estudo dos segmentos e números construtíveis. A partir dos fundamentos apresentados aqui, investigaremos as condições que permitem a construção de segmentos específicos e a relação entre esses segmentos e os números construtíveis, estabelecendo uma conexão entre a geometria e a álgebra. Esse aprofundamento será essencial para compreendermos as possibilidades e limitações das construções geométricas clássicas.

3 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

A geometria construtiva, conforme apresentada na tradição iniciada pelos antigos gregos, de acordo com Boyer (1974) está intimamente ligada ao uso de régua e compasso para resolver problemas geométricos. Este capítulo aborda esses conceitos fundamentais, conectando aspectos geométricos e algébricos para explorar as possibilidades e limitações das construções geométricas.

Inicialmente, será apresentada a noção de segmentos construtíveis, que são os fundamentos geométricos das construções realizadas com régua e compasso. Em seguida, serão explorados os números construtíveis, que emergem como uma extensão algébrica do conceito de segmentos construtíveis.

Em Rezende e Queiroz (2008) encontramos que segmentos construtíveis podem ser definidos como aqueles que podem ser determinados a partir de segmentos previamente dados, utilizando exclusivamente construções realizadas com régua e compasso. Nem todo segmento é construtível, com régua e compasso, a partir de determinadas condições dadas, segundo Rezende e Queiroz (2008, p. 153):

"Fixado um segmento considerado unitário, só poderá ser construído com régua e compasso um segmento cuja medida se exprima mediante um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, estas operações sendo efetuadas a partir de números inteiros positivos, ou seja, só poderá ser construído um segmento cuja medida seja um número construtível."

A construção de segmentos está diretamente ligada à construção de números, ou seja, apenas segmentos cujas medidas correspondam a números construtíveis podem ser representados geometricamente. Na primeira seção deste capítulo, discute-se em detalhes os números construtíveis.

Adotam-se notações e símbolos para facilitar a descrição e formalização dos conceitos abordados. Um segmento de reta com extremidades A e B será representado por AB . Em algumas situações, o segmento AB poderá ser indicado pela letra minúscula a , escrevendo $AB = a$.

A régua considerada para as construções geométricas será idealizada, ou seja, desprovida de quaisquer marcações ou escalas graduadas, sendo utilizada apenas para traçar retas entre dois pontos dados.

Utiliza-se também um segmento auxiliar u , que poderá ser denotado simplesmente como 1, representando o segmento unitário. Quando a medida de um segmento a for menor que a

de um segmento b , denota-se $a < b$ ou $b > a$. Caso os segmentos a e b sejam congruentes, emprega-se a notação $a = b$.

De acordo com Costa (2013), se denota por δ o conjunto composto pelos números reais que podem ser obtidos por construções realizadas com régua e compasso, a partir do segmento unitário, para que um número real pertença a esse conjunto, ele deve atender a características específicas. Tais características mostraremos a seguir.

Definição 3.1 Dizemos que um número real x é construtível, ou seja, $x \in \delta$, se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento de comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado como a unidade.

Antes de prosseguirmos com a discussão sobre os números construtíveis, é importante compreendermos os conceitos de números algébricos e transcendentos.

3.1 Números Algébricos e Transcendentos

Uma maneira alternativa de organizar os conjuntos numéricos seria a seguinte:

$$\text{Naturais} \subset \text{Inteiros} \subset \text{Construtíveis} \subset \text{Algébricos}$$

De acordo com Silva (2013), um número é considerado algébrico sobre \mathbb{Q} quando é uma solução de uma equação do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, onde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ e todos os coeficientes a_k , com $k = 1, 2, 3, \dots, n$ são números inteiros. Neste caso, dizemos que o número algébrico tem grau n . Números que não são algébricos são chamados de transcendentos.

Todo número inteiro n é sempre uma solução da equação $x - n = 0$ e todo número racional $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, resolve a equação $qx - p = 0$, sendo, portanto, números algébricos. Quanto aos números irracionais, aqueles que podem ser expressos na forma \sqrt{n} são números algébricos, pois são solução da equação $x^2 - n = 0$. Existem outros exemplos de números irracionais que são algébricos, um exemplo interessante é o número de ouro, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que é a solução positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, este número aparece em diversas áreas, não apenas na matemática, mas também nas artes, na arquitetura e na natureza.

Todo número construtível é algébrico, mas nem todo número algébrico pode ser construído. Existem números algébricos que não são construtíveis, como exemplificado por (STEWART,

2013) e outros estudiosos modernos. Um exemplo clássico é a solução da equação cúbica $x^3 - 2 = 0$, cuja raiz $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construída com régua e compasso. Em (WAGNER, 2007), são apresentados alguns exemplos de números algébricos que não são construtíveis, evidenciando as limitações das construções geométricas com régua e compasso.

Teorema 3.2 *Um número real α é construtível, se e somente se, α é algébrico sobre \mathbb{Q} e o seu grau é uma potência de 2.*

A prova desse teorema está relacionada à existência de certas extensões de corpos, mas como essas extensões não fazem parte do foco do nosso estudo, não as discutiremos aqui. A demonstração completa pode ser encontrada em livros de álgebra avançada ou em textos especializados em teoria dos corpos e construções geométricas, por exemplo, em (FRALEIGH, 2002).

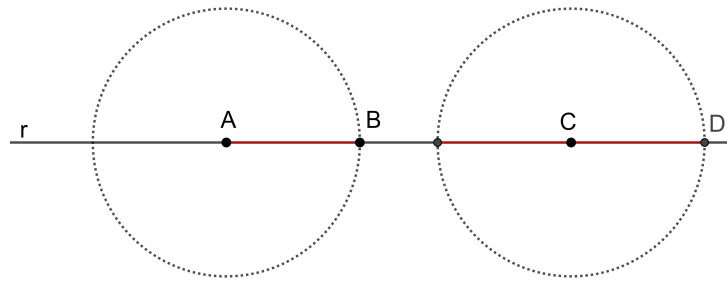
3.2 Propriedades dos Números Construtíveis

No Capítulo 1, vimos e justificamos as construções elementares que conseguimos construir com régua e compasso, a partir deste ponto, quando for necessária uma destas construções não será mais detalhada e somente citada. Por exemplo, construir uma reta paralela ou uma perpendicular.

Proposição 3.3 *Sejam a e b dois números reais construtíveis, com $b \neq 0$. Então $a + b$, $a - b$, ab e $\frac{a}{b}$ também são construtíveis.*

1. Se $a, b \in \delta$, então $a + b \in \delta$.

Demonstração 3.4 *Considere, numa mesma reta r , os pontos A , B , e C tais que $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = b$, e sem perda de generalidade, $0 < a < b$. Agora, tome o compasso e, com centro em C e abertura $\overline{AB} = a$, construa uma circunferência intersectando r em dois pontos. Considere um desses pontos, digamos D , tal que C está entre B e D . Como A , B , C e D são colineares e $BD = AC$, temos que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} = a + b$ e, portanto, $a + b \in \delta$.*

Figura 3.1 – Representação de $a + b$.

Fonte: Da autora (2025)

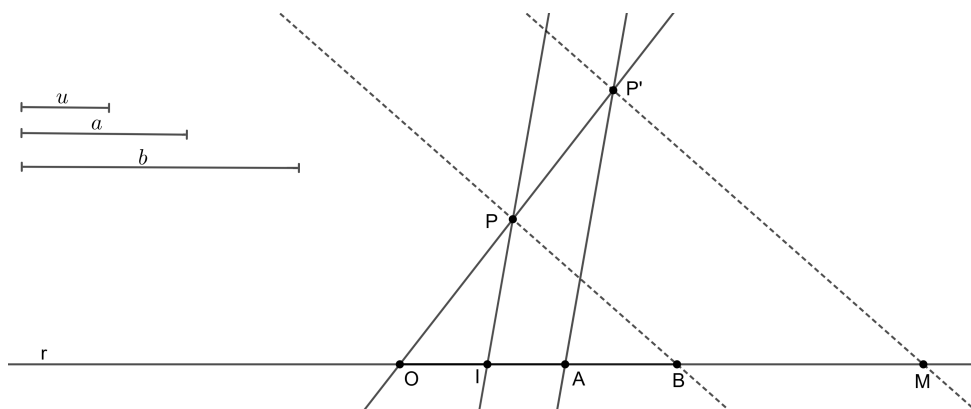
2. Se $a \in \delta$ então $-a \in \delta$.

Demonstração 3.5 . Segue da definição, pois $|a| = |-a|$.

Também podemos concluir que se $a, b \in \delta$, e sabendo que $a - b = a + (-b)$, então $a - b \in \delta$.

3. Se $a, b \in \delta$ então $a \cdot b \in \delta$.

Demonstração 3.6 Considere sobre uma mesma reta r os pontos O, I, A e B , tais que $OI = 1$, $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, e seja P um ponto fora dela. Construa o triângulo OIP e em seguida construa por A uma paralela à IP . Seja P' o ponto de intersecção dessa paralela com OP . Note que os triângulos OIP e OAP' são semelhantes. Assim, temos que $\frac{OI}{OA} = \frac{OP}{OP'}$. Agora, construa o triângulo OBP e em seguida construa uma paralela à BP , passando por P' . Seja M o ponto de intersecção dessa nova paralela com r . Observe que os triângulos OBP e OMP' são semelhantes. Daí, temos que $\frac{OB}{OM} = \frac{OP}{OP'}$. Segue que $\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OM}$, o que nos dá $\frac{1}{a} = \frac{b}{OM}$ e, portanto, $OM = ab$. Logo, $ab \in \delta$.

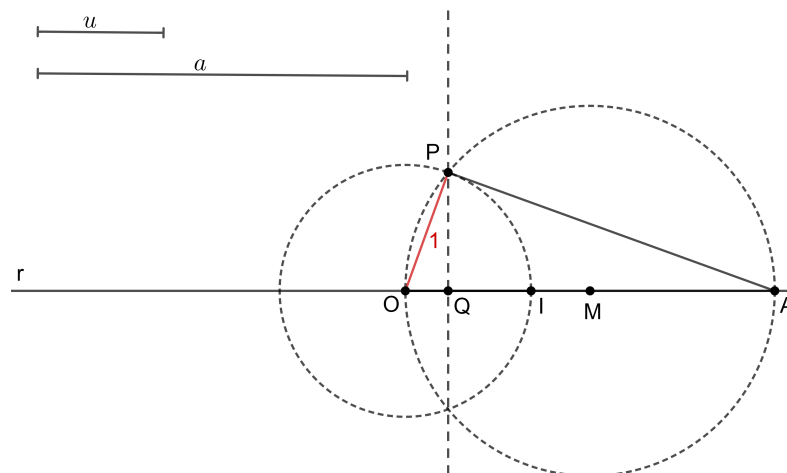
Figura 3.2 – Representação de $a \cdot b$.

Fonte: Da autora (2025)

4. Se $a \in \delta$ então $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \delta$.

Demonstração 3.7 Considere sobre uma mesma reta r os pontos O, I, M e A , tais que $\overline{OI} = 1$, $\overline{OA} = a$ e $\overline{OM} = \frac{a}{2}$ (M é o ponto médio de OA). Tome o compasso e , com centro em M e abertura $\overline{OM} = \frac{a}{2}$, construa uma circunferência intersectando r nos pontos O e A , ambos já construídos. Em seguida, tome o compasso e , com centro em O e abertura $OI = 1$, construa mais uma circunferência, intersectando a primeira em dois pontos. Considere um desses pontos, digamos P . Passando por P , construa uma perpendicular à r , obtendo o ponto Q de interseção da perpendicular com r . Afirmamos que $\overline{OQ} = \frac{1}{a}$. De fato, como PQ é altura do triângulo OAP , retângulo em P , segue que OQ é a projeção do cateto OP sobre a hipotenusa OA . Daí, temos que $OP^2 = OQ \cdot OA$ (Relação Métrica), ou seja, $1 = OQ \cdot a$ e, portanto, $OQ = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Logo, $a^{-1} \in \delta$.

Figura 3.3 – Representação de a^{-1} .



Fonte: Da autora (2025)

Podemos concluir que se $a, b \in \delta$, e $b \neq 0$, então $ab \in \delta$, visto que $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \in \delta$. Como todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, temos, portanto, que $\mathbb{Q} \subset \delta$.

Proposição 3.8 δ é um subcorpo de \mathbb{R} .

Dizer que o conjunto δ é um subcorpo de \mathbb{R} , de acordo com Wagner (2007), significa que é “um conjunto de números reais que possui 0 e 1 e é fechado em relação à adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos (de elementos não nulos)”. Portanto, essa proposição segue da Proposição 3.3.

Embora não seja o objeto principal deste trabalho, apresentamos a seguir uma breve definição de corpo e subcorpo, conceitos importantes na álgebra abstrata, que são frequentemente utilizados em contextos mais gerais de estruturas algébricas.

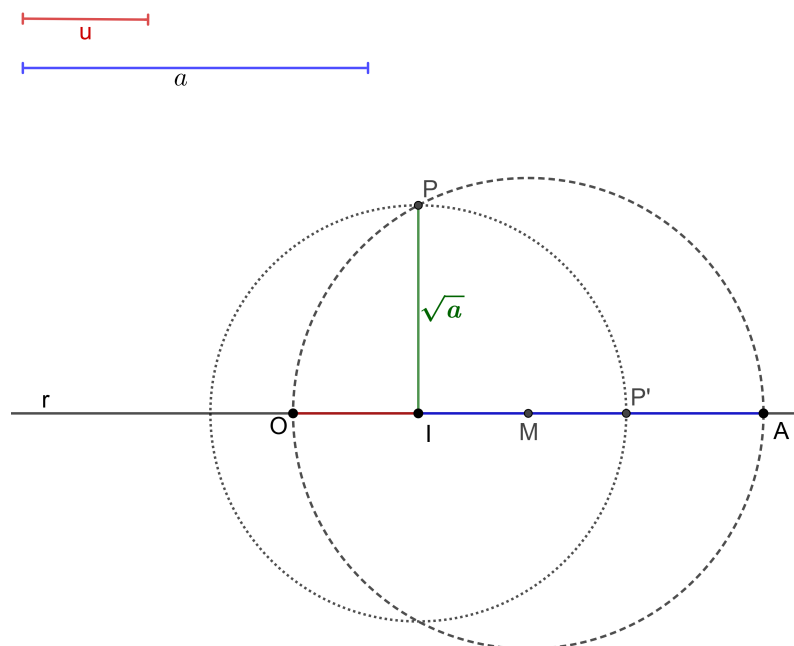
Proposição 3.9 *Seja K um corpo e L um subcorpo de K , então L herda todas as propriedades algébricas de K , como a comutatividade, associatividade e a existência de inversos.*

A definição acima é adaptada de (GARCIA; LEQUAIN, 2022), que discutem esses conceitos em detalhes em seu trabalho.

Proposição 3.10 *Se $0 < a \in \delta$ então $\sqrt{a} \in \delta$.*

Demonstração 3.11 *Queremos mostrar que dados segmentos de comprimentos 1 e a , pode-se construir um segmento de comprimento \sqrt{a} . Considere sobre uma mesma reta r os pontos O , I , M e A , com I e M entre O e A e tais que $\overline{OI} = 1$, $\overline{IA} = a$ e $\overline{OM} = \frac{\overline{AO}}{2}$. Tome o compasso e, com centro em M e abertura \overline{OM} , construa uma circunferência intersectando r nos pontos O e A , ambos já construídos. Em seguida, trace por I uma perpendicular à r , intersectando a circunferência em dois pontos. Seja P um desses pontos. Afirmamos que $\overline{IP} = \sqrt{a}$. De fato, como IP é a altura do triângulo APO , retângulo em P , segue que OI e IA são, respectivamente, as projeções dos catetos OP e PA sobre a hipotenusa OA . Daí, temos que $IP^2 = OI \cdot IA$ (Relação Métrica), ou seja, $IP^2 = 1 \cdot a$ e, portanto, $\overline{IP} = \sqrt{a}$. Logo, $\sqrt{a} \in \delta$.*

Figura 3.4 – Representação de \sqrt{a} .

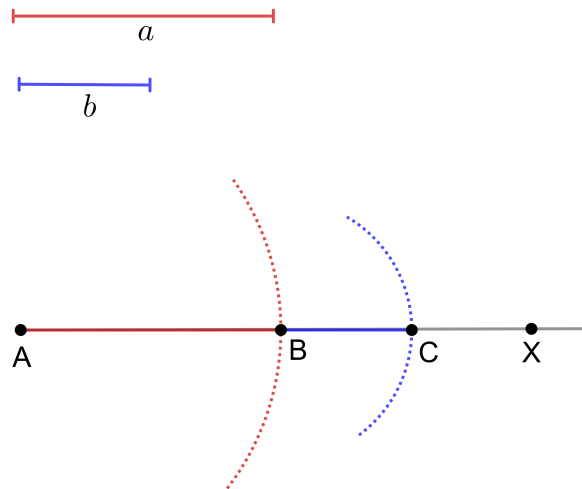


3.3 Construção de Expressões Algébricas

O livro de Wagner (2007) serve como referência fundamental para as construções que serão abordadas nesta seção.

3.3.1 Dados os segmentos a e b , $a > b$, vamos obter graficamente o segmento $a + b$.

Figura 3.5 – Representação de $a + b$.

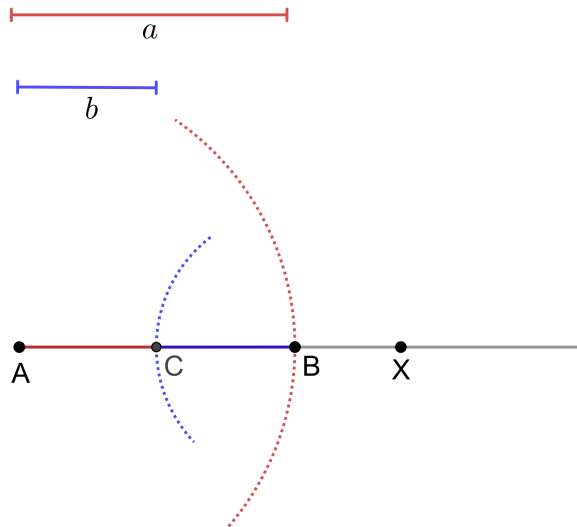


Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.12 Traçamos a semirreta \overrightarrow{AX} e transportamos para ela $\overline{AB} = a$. Em seguida a partir de B e na semirreta oposta a \overrightarrow{BA} , transportamos o segmento b obtendo o ponto C . Assim, $\overline{AC} = a + b$.

3.3.2 Dados os segmentos a e b , $a > b$, vamos obter graficamente o segmento $a - b$.

Figura 3.6 – Representação de $a - b$.



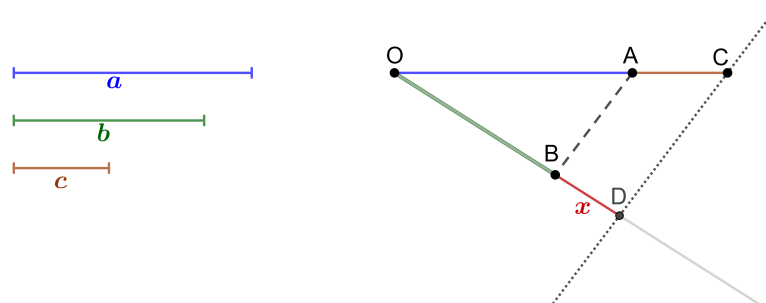
Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.13 Para obtermos o segmento $a - b$, basta transportarmos o segmento $b = \overline{BC}$ sobre a semirreta \overrightarrow{BA} , obtendo o ponto C . Assim, $\overline{AC} = a - b$.

3.3.3 A 4ª Proporcional

Dizemos que o segmento x é a 4ª proporcional entre os segmentos a , b e c quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.
Obter o segmento x , dados os segmentos a , b e c .

Figura 3.7 – Representação da 4ª proporcional.



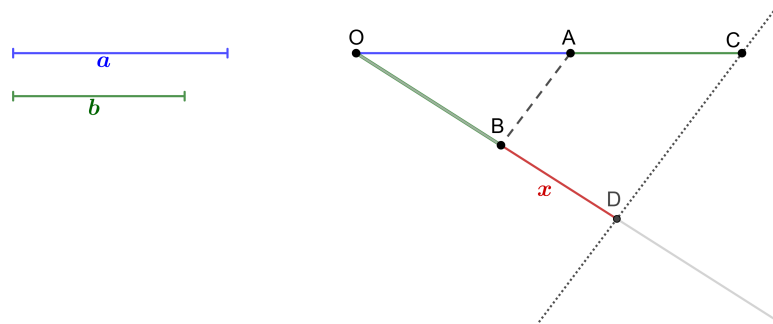
Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.14 Sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado $\overline{OA} = a$ e $\overline{AC} = c$ e sobre o outro lado $\overline{OB} = b$. Traçando por C uma paralela a AB , obtemos D na semirreta \overrightarrow{OB} . Então, $\overline{BD} = x$ é a solução da equação.

3.3.4 A 3ª Proporcional

Dizemos que o segmento x é a 3ª proporcional entre os segmentos a e b quando $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Figura 3.8 – Representação da 3ª proporcional.



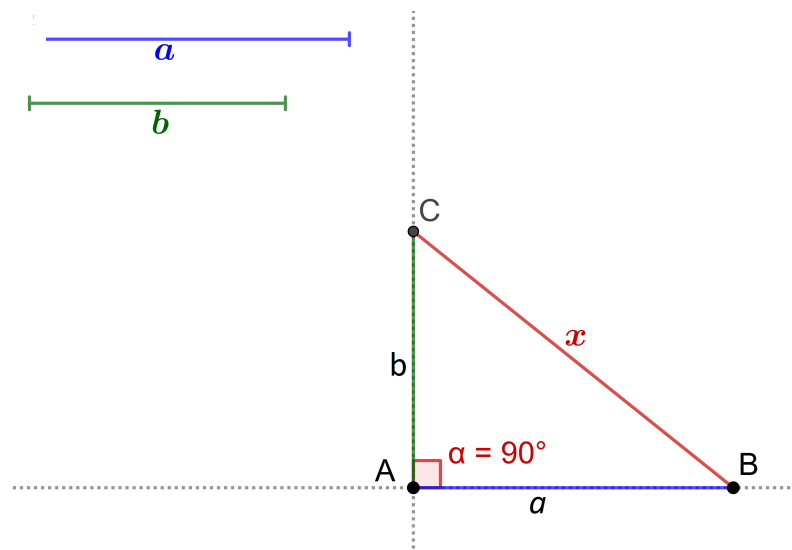
Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.15 *O procedimento é análogo ao anterior.*

3.3.5 ($\sqrt{a^2 \pm b^2}$)

Resolução 3.16 *Se $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ onde a e b são segmentos dados, então x é a hipotenusa em um triângulo retângulo cujos catetos são a e b .*

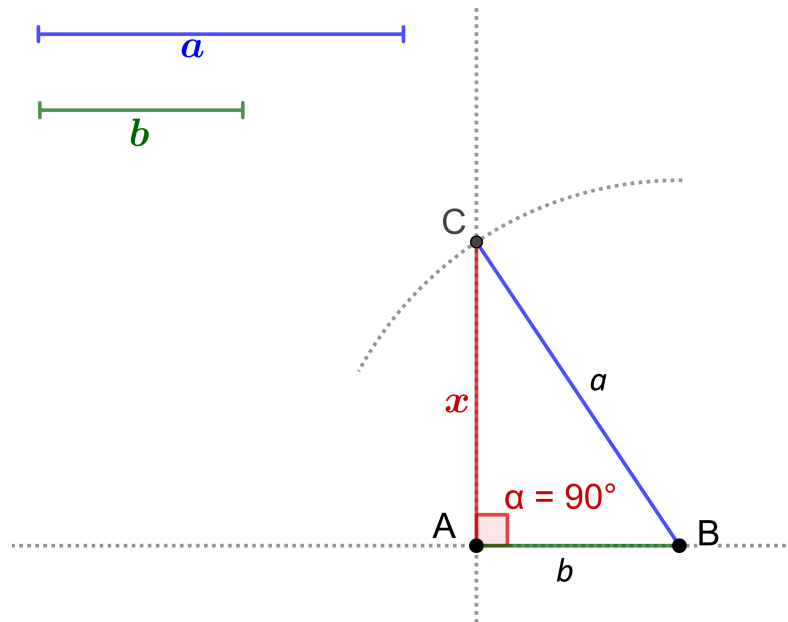
Figura 3.9 – Representação de $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.17 *Se $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ onde a e b , com $a > b$, são segmentos dados, então x é um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a , onde o outro cateto é igual a b .*

Figura 3.10 – Representação de $\sqrt{a^2 - b^2}$.



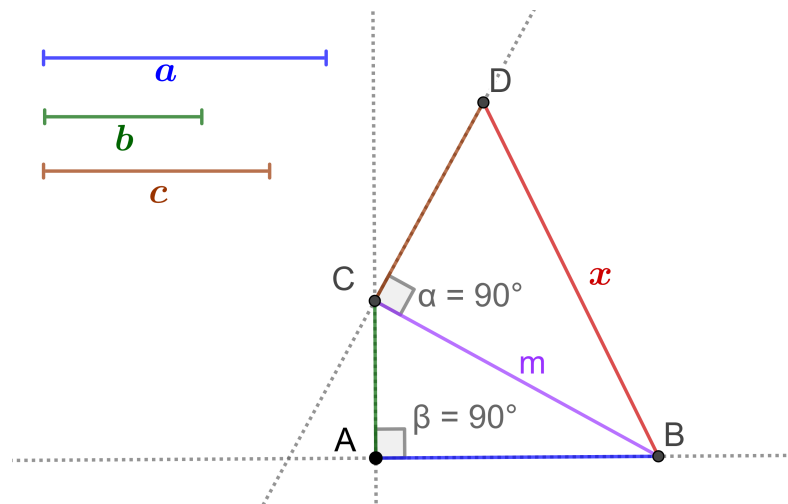
Fonte: Da autora (2025)

Para expressões do tipo $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2}$ podemos construí-las aplicando várias vezes os procedimentos descritos anteriormente. Observemos o seguinte exemplo:

Encontrar o comprimento x , dados a, b, c e a expressão $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Resolução 3.18 Fazendo $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, assim $x = \sqrt{m^2 + c^2}$.

Figura 3.11 – Representação de $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



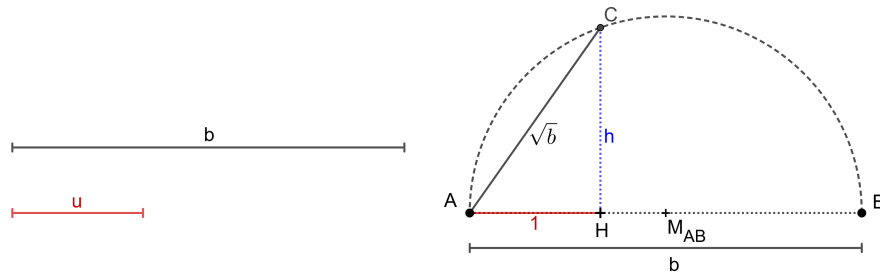
Fonte: Da autora (2025)

3.3.6 \sqrt{b}

Construção do segmento $x = \sqrt{b}$, dado o segmento b .

Resolução 3.19 Para a construção do segmento solicitado, considerando $b > u$, construímos um triângulo retângulo em que b é a hipotenusa, e o segmento unitário representa a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa. Este cateto será o segmento x .

Figura 3.12 – Representação de \sqrt{b} .

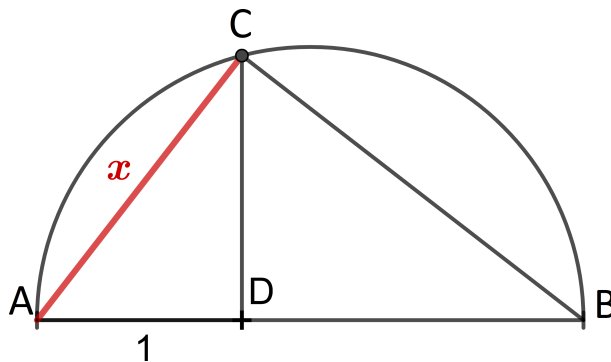


Fonte: Da autora (2025)

Para a situação em que $u > b$ a construção é feita de forma análoga.

Justificativa-No triângulo ABC , retângulo em A , vale a relação $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$, pela semelhança do triângulo ABC com o triângulo DBA . Logo $\frac{b}{x} = \frac{x}{1}$ e daí $x = \sqrt{b}$.

Figura 3.13 – Justificativa de \sqrt{b} .

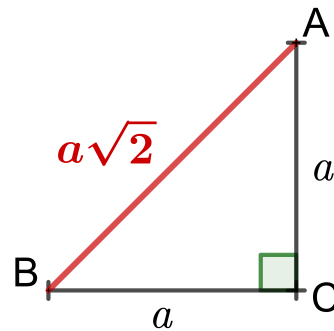


Fonte: Da autora (2025)

3.3.7 $a\sqrt{n}$

Construção do segmento $a\sqrt{n}$, n natural.

Resolução 3.20 Dado um segmento a podemos obter todos os segmentos da sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$,... Para isso, iniciamos a construção com um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida a , concluímos que a sua hipotenusa será o segmento $a\sqrt{2}$.

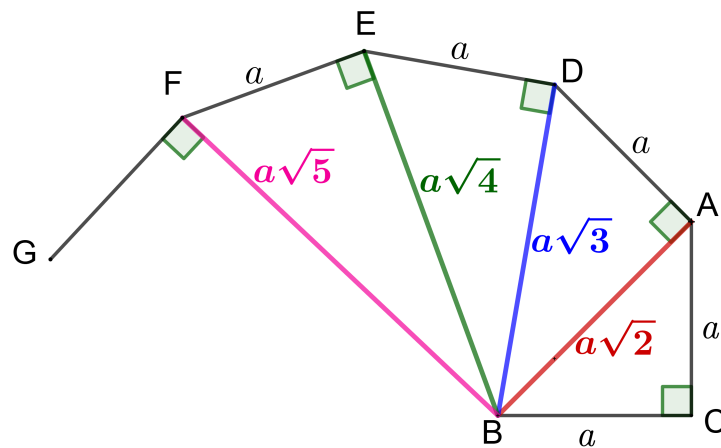
Figura 3.14 – Representação de $a\sqrt{2}$.

Fonte: Da autora (2025)

Justificativa – No triângulo ABC , retângulo em C , temos pelo Teorema de Pitágoras que

$$a^2 + a^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2a^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2} = \overline{AB} \Leftrightarrow a\sqrt{2} = \overline{AB}.$$

Resolução 3.21 Para conseguir o segmento $a\sqrt{3}$, construímos um triângulo retângulo em A , com um cateto de medida a e outro cateto de medida $a\sqrt{2}$. E repetido esse procedimento, conseguimos os demais segmentos da sequência. Conforme observamos na figura abaixo.

Figura 3.15 – Sequências de $a\sqrt{n}$.

Fonte: Da autora (2025)

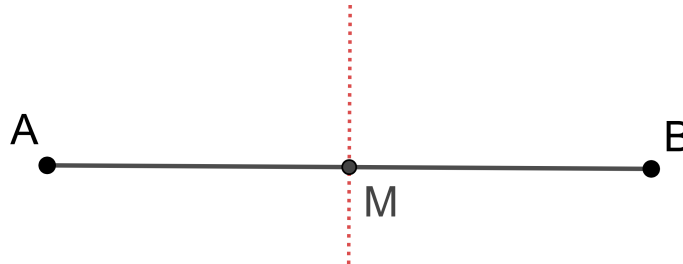
3.4 $\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{a \cdot b}$

Podemos encontrar a expressão $\sqrt{a \cdot b}$ ao calcularmos a média geométrica entre dois segmentos.

Definição 3.22 Dados dois segmentos a e b , definimos a sua média aritmética por $m = \frac{a+b}{2}$ e sua média geométrica por $g = \sqrt{ab}$.

A construção da primeira é simples, primeiramente realiza-se a soma dos segmentos a e b , conforme visto na 3.5. Em seguida, constrói-se a mediatriz do segmento AB encontrando o ponto M interseção da mediatriz com AB . Desta forma, tem-se que $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Figura 3.16 – Representação da média aritmética entre a e b .

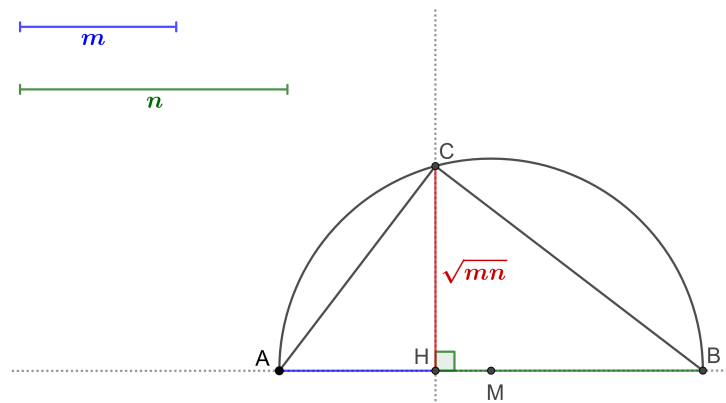


Fonte: Da autora (2025)

A da segunda parte, \sqrt{ab} , pode ser realizada de dois modos utilizando as relações métricas clássicas do triângulo retângulo: o quadrado da altura corresponde ao produto das projeções dos catetos e o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto.

Na Figura 3.17 a seguir temos a construção da primeira relação citada, $h^2 = mn$, dados os segmentos m e n , onde encontramos a medida do segmento $h = \sqrt{mn}$ que é igual a média geométrica entre as medidas dos segmentos m e n .

Figura 3.17 – Representação da média geométrica entre m e n .

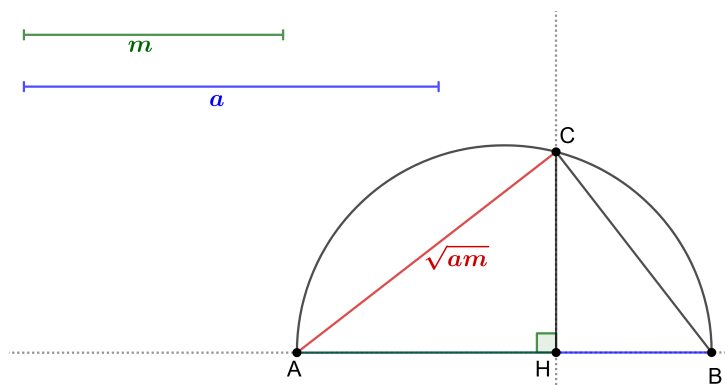


Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.23 Sobre uma reta qualquer transportamos o segmento de medida $\overline{AH} = m$. Na semirreta oposta a \overline{HA} , transportamos o segmento $\overline{HB} = n$. Construímos o arco capaz de 90° sobre o segmento \overline{AB} . Traçamos uma reta perpendicular a AB no ponto H , a interseção da reta perpendicular com o arco capaz determina o ponto C . O segmento HC é a altura do triângulo retângulo ABC e sua medida é igual a $\sqrt{m \cdot n}$.

Veremos na 3.18, a construção da relação $b^2 = am$, dados os segmentos a e m , temos que o cateto $b = \sqrt{am}$ é equivalente à média geométrica entre a hipotenusa a e m , onde m é a projeção do próprio cateto b sobre a hipotenusa.

Figura 3.18 – Representação da média geométrica entre a e m .



Fonte: Da autora (2025)

Resolução 3.24 Sobre uma reta qualquer transportamos o segmento de medida $\overline{AB} = a$. Sobre o segmento AB , transportamos o segmento $\overline{AH} = m$. Construimos o arco capaz de 90° sobre o segmento AB . Traçamos uma reta perpendicular a AB no ponto H , a interseção da reta perpendicular com o arco capaz determina o ponto C . O segmento AC é o cateto do triângulo retângulo ABC de projeção $AH = m$ e sua medida é igual a \sqrt{am} .

Ao explorarmos os números construtíveis, foi possível compreender como eles se relacionam com construções geométricas e problemas clássicos da matemática. Esse conceito mostra a conexão entre álgebra e geometria, ajudando a visualizar e entender melhor as limitações do uso da régua e compasso. No próximo capítulo, será abordada a aplicação desse tema na educação básica, destacando como ele pode contribuir para o ensino da matemática, tornando-o mais intuitivo e ajudando a tornar conceitos abstratos mais concretos.

4 GEOMETRIA E IRRACIONAIS: CONEXÕES E DESAFIOS NO ENSINO

O ensino dos números reais, especialmente os irracionais, apresenta desafios importantes tanto para os alunos quanto para os professores. A inserção dos números irracionais no currículo visa proporcionar uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, ampliando a visão dos alunos sobre os números, indo além dos números racionais. Contudo, os números irracionais muitas vezes são abordados de forma abstrata e desconectada da realidade dos estudantes, o que pode gerar dificuldades na compreensão e na aplicação do conteúdo.

Antes de explorar as metodologias e as dificuldades, é importante contextualizar o que são os números reais e irracionais. Os números reais são todos aqueles que podem ser representados em uma reta numérica. Eles incluem tanto os números racionais quanto os irracionais. Os números racionais são aqueles que podem ser expressos como frações, ou seja, como o quociente entre dois inteiros. Já os números irracionais não podem ser expressos dessa maneira. São números cuja expansão decimal é infinita e não periódica, ou seja, não se repetem nem terminam. Exemplos clássicos de números irracionais incluem $\sqrt{2}$, π e e .

Historicamente, a ideia de números irracionais surgiu da necessidade de representar quantidades que não podiam ser expressas como frações. O exemplo mais famoso é a diagonal de um quadrado unitário, cuja medida é $\sqrt{2}$, que não pode ser representada por uma fração simples. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$, atribuída aos pitagóricos, marcou um ponto de ruptura na matemática. Segundo Lima (2016), “a irracionalidade de números como $\sqrt{2}$ é um dos primeiros exemplos que desafiaram a concepção de números como frações e continuam a ser um tema difícil para os alunos no ensino fundamental” (p. 23).

Além disso, a dificuldade em conceituar a infinitude e a não repetição das casas decimais dos números irracionais é um obstáculo significativo no ensino. Como afirmam Freire e Oliveira (2014), “os alunos, muitas vezes, não conseguem compreender o conceito de infinitude, uma vez que ele vai além de sua intuição matemática e cognitiva” (p. 98). A falta de uma representação visual clara desses números é apontada como uma das principais dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, dificultando ainda mais a compreensão dos conceitos.

4.1 Dificuldades no ensino e aprendizado dos números irracionais

O ensino dos números irracionais, apesar de sua importância na formação matemática dos alunos, apresenta diversas dificuldades tanto para os estudantes quanto para os professores. Essas dificuldades estão relacionadas principalmente à abstração do conceito, à representação

visual dos números irracionais e à compreensão das suas propriedades. A seguir, abordaremos as principais dificuldades encontradas no ensino dos números irracionais, dividindo-as em dois aspectos: as dificuldades dos alunos e as dificuldades dos professores.

4.1.1 Dificuldades dos alunos

As dificuldades dos alunos no aprendizado dos números irracionais são notórias, principalmente por se tratar de um conceito abstrato que foge à intuição cotidiana dos estudantes. A seguir, destacam-se as principais dificuldades observadas:

- a) **falta de intuição visual:** os números irracionais não podem ser expressos exatamente como frações, dificultando sua representação e compreensão. A ausência de uma representação visual clara dos números irracionais é um dos maiores desafios no ensino de matemática, conforme Lima (2016);
- b) **confusão entre números racionais e irracionais:** muitos alunos demoram a distinguir que nem todos os números decimais são finitos ou periódicos. A dificuldade em diferenciar os dois tipos de números é amplamente discutida por Freire e Oliveira (2014), que apontam que os alunos tendem a misturar conceitos;
- c) **dificuldade em conceituar a infinitude:** a ideia de um número com infinitas casas decimais sem repetição pode ser complexa para alunos do ensino fundamental e médio. Este é um ponto abordado por Lima (2016), que afirma que a compreensão do conceito de infinitude é abstrata e exige um maior desenvolvimento cognitivo, muitas vezes além da capacidade dos alunos nos anos iniciais do ensino fundamental;
- d) **falta de conexão com a realidade:** sem aplicações concretas, os estudantes podem não perceber a relevância dos números irracionais em problemas do dia a dia. De acordo com Tavares (2009), a desconexão entre a teoria matemática e suas aplicações práticas é um dos principais motivos para o desinteresse dos alunos pelos conceitos mais abstratos, como os números irracionais.

4.1.2 Desafios dos professores no ensino dos números irracionais

As dificuldades não se limitam apenas aos alunos, mas também afetam os professores no processo de ensino. Muitas vezes, os professores enfrentam desafios em como apresentar de forma eficaz os conceitos de números irracionais, principalmente quando a matemática é

apresentada de forma muito abstrata ou formal. As principais dificuldades dos professores incluem:

- a) **limitação de recursos didáticos:** muitas escolas não possuem materiais adequados, como softwares de geometria dinâmica, para auxiliar no ensino. A falta de recursos tecnológicos é um desafio que, segundo Silva e Santos (2022), limita a implementação de metodologias mais inovadoras no ensino de matemática;
- b) **dificuldade na transposição didática:** transformar conceitos abstratos em linguagem acessível aos alunos exige preparo e metodologias eficazes. Segundo Ferreira (2021), a transposição didática é um processo complexo, pois exige que o professor compreenda profundamente os conceitos matemáticos para torná-los acessíveis aos alunos, o que nem sempre ocorre de maneira adequada;
- c) **tempo limitado:** o currículo escolar muitas vezes não permite uma abordagem aprofundada dos números irracionais. Esta dificuldade é discutida por Ribeiro e Almeida (2020), que destacam que a sobrecarga curricular impede um estudo mais detalhado dos números irracionais, comprometendo a compreensão dos alunos;
- d) **avaliação da compreensão:** criar instrumentos de avaliação que realmente meçam a compreensão dos alunos pode ser um desafio. De acordo com Souza e Lima (2022), a avaliação eficaz no ensino de Matemática, especialmente quando se trata de conceitos abstratos como os números irracionais, exige métodos que contemplem tanto a aprendizagem conceitual quanto a prática.

Essas dificuldades, tanto para os alunos quanto para os professores, acabam interferindo diretamente no processo ensino-aprendizagem. A falta de compreensão das representações e propriedades dos números irracionais pode criar lacunas no conhecimento dos estudantes, dificultando o entendimento mais amplo dos números reais. Para os professores, a escassez de recursos didáticos apropriados pode gerar insegurança sobre como abordar esses conceitos de forma eficiente e acessível.

Contudo, essas dificuldades não são insuperáveis. Ao reconhecer os desafios enfrentados por ambos, é possível adotar metodologias de ensino que ajudem a superar esses obstáculos e tornem o aprendizado dos números irracionais mais claro e significativo para os alunos.

4.2 Habilidades da BNCC relacionadas ao ensino dos números irracionais

A **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** estabelece habilidades específicas para o ensino de matemática, visando garantir que os alunos compreendam os conceitos de maneira significativa. No caso dos números irracionais, a BNCC destaca habilidades relacionadas tanto à compreensão dos números reais em geral quanto às construções geométricas, que são fundamentais para a visualização dos números irracionais.

No que diz respeito aos números irracionais, as habilidades específicas são:

- a) EF09MA06: compreender e utilizar os números irracionais no contexto dos números reais, reconhecendo sua necessidade e identificação na reta numérica.
- b) EF09MA07: resolver problemas que envolvam números irracionais, explorando sua representação decimal infinita e não periódica.

Essas habilidades abordam a compreensão dos números irracionais na reta numérica e a capacidade de resolver problemas envolvendo esses números, o que requer uma boa base conceitual e a aplicação das propriedades dos números irracionais.

Além dessas habilidades relacionadas aos números irracionais, a BNCC também enfatiza o uso de construções geométricas, que podem ser uma metodologia essencial para o ensino desses números. A utilização de construções com régua e compasso é uma prática que possibilita aos alunos visualizar conceitos abstratos de forma concreta, permitindo uma abordagem mais prática e visual do conteúdo.

As habilidades associadas às construções geométricas incluem:

- a) EF09MA04: realizar construções geométricas utilizando instrumentos como régua e compasso, aplicando conceitos de geometria para resolver problemas e explorar figuras geométricas.
- b) EF09MA08: resolver problemas geométricos utilizando construções com régua e compasso, destacando suas propriedades e relações matemáticas.

Essas habilidades são particularmente relevantes no contexto do ensino de números irracionais, pois as construções geométricas, como a que envolve a construção da diagonal de um quadrado unitário, são exemplos clássicos de como números irracionais podem ser representados de maneira concreta e visual.

A combinação dessas habilidades, tanto as relacionadas aos números irracionais quanto às construções geométricas, oferece um excelente ponto de partida para a aplicação de metodologias que favoreçam o entendimento e a aprendizagem significativa dos alunos. Ao explorar

os números irracionais por meio de construções geométricas, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais profunda das propriedades desses números e de suas representações, alinhando-se diretamente às expectativas da BNCC.

4.3 Metodologias para o ensino dos números irracionais

O ensino dos números irracionais no ensino fundamental envolve desafios tanto para os alunos quanto para os professores. Para superar essas dificuldades, é necessário adotar metodologias eficazes que permitam aos alunos visualizar e compreender melhor esses conceitos matemáticos.

Entre as possíveis metodologias empregadas, de acordo com Tavares (2009) destacam-se:

- a) **uso de construções geométricas:** as construções geométricas são uma ferramenta poderosa no ensino dos números irracionais, pois permitem que os alunos visualizem esses números por meio de segmentos e figuras. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1 é igual a $\sqrt{2}$, um número irracional, e pode ser representada por construções com régua e compasso. Essa abordagem facilita a visualização concreta do conceito abstrato de irracionalidade, ajudando os alunos a entenderem a complexidade desses números de uma maneira mais acessível. Essa metodologia também contribui para o desenvolvimento de habilidades geométricas que são essenciais para o aprendizado da Matemática;
- b) **exploração de aplicativos práticos:** apresentar situações reais que envolvem números irracionais, como medidas de construções e fenômenos naturais (por exemplo, a proporção áurea), pode tornar o aprendizado mais significativo. O uso de exemplos do cotidiano traz relevância ao estudo dos números irracionais, permitindo aos alunos perceberem sua aplicabilidade em situações concretas;
- c) **uso de jogos e atividades interativas:** o uso de jogos matemáticos e atividades lúdicas pode aumentar o engajamento dos alunos e facilitar a compreensão dos conceitos abstratos dos números irracionais. Tais metodologias interativas favorecem a assimilação de conteúdos difíceis de forma mais divertida e envolvente.

Essas metodologias estão diretamente relacionadas às habilidades previstas pela BNCC, que enfatiza a utilização de métodos concretos e visuais no ensino de conceitos abstratos. O uso de construções geométricas, como as realizadas com régua e compasso, facilita a visualização dos números irracionais e permite aos alunos desenvolverem uma compreensão mais intuitiva

desses conceitos. Essa abordagem auxilia na identificação dos números irracionais na reta numérica e contribui para a resolução de problemas práticos, proporcionando uma aprendizagem mais significativa.

Dentro desse contexto, o uso de construções geométricas com régua e compasso revela-se como uma metodologia eficaz e acessível, especialmente no ensino fundamental. Ela promove uma compreensão concreta dos números irracionais e facilita a conexão dos alunos com conceitos abstratos. Sua simplicidade e os poucos recursos necessários tornam-na viável em diversas escolas, independentemente da infraestrutura disponível.

Diversos estudos sobre metodologias de ensino destacam a importância de abordagens que integrem visualização geométrica e resolução de problemas práticos. Para Lima (2016), as construções geométricas são uma excelente ferramenta para o ensino dos números irracionais, pois tornam conceitos abstratos mais tangíveis. Além disso, essas metodologias estão alinhadas com as diretrizes da BNCC, que valoriza a aprendizagem ativa e concreta.

A proposta deste trabalho é oferecer sequências didáticas baseadas na construção geométrica com régua e compasso, visando proporcionar uma abordagem acessível para o ensino dos números irracionais. Essas sequências atendem às habilidades da BNCC e oferecem uma solução prática para os desafios enfrentados tanto pelos alunos quanto pelos professores. Ao integrar essa metodologia com outras abordagens complementares, é possível promover uma aprendizagem mais eficaz e engajante, respeitando as diretrizes da BNCC e favorecendo diferentes estilos de aprendizagem.

Dessa forma, o uso das construções geométricas com régua e compasso não apenas se apresenta como uma solução viável, mas também como uma estratégia que pode contribuir significativamente para o ensino dos números irracionais, proporcionando uma aprendizagem mais concreta e duradoura.

5 CONCLUSÃO

O ensino dos números irracionais é um grande desafio, tanto para os alunos quanto para os professores, devido ao seu caráter abstrato e à dificuldade de representá-los no ensino básico. Ao longo deste trabalho, foi possível perceber como o uso de construções geométricas pode ser uma ferramenta pedagógica eficaz, ajudando na compreensão desses conceitos.

A pesquisa bibliográfica realizada confirma que a abordagem baseada em construções geométricas é uma opção viável e eficiente para o ensino dos números irracionais. Estudos recentes indicam que essa metodologia pode ser aplicada de duas formas complementares: por meio de tecnologias digitais, como softwares de geometria dinâmica (GeoGebra, Desmos), e com recursos acessíveis e de baixo custo, como régua e compasso. Como aponta Silva (2023), "o uso de construções geométricas favorece a visualização dos números irracionais e torna seu ensino mais acessível a diferentes perfis de alunos". Essa flexibilidade torna o ensino dos números irracionais mais adaptável a diferentes realidades escolares, seja em instituições com infraestrutura tecnológica avançada, seja em escolas com recursos limitados.

Com base nessas considerações, é importante que futuras pesquisas explorem a efetividade dessa abordagem em sala de aula, aplicando atividades práticas e avaliando o impacto dessa metodologia no aprendizado dos alunos. Além disso, a utilização de tecnologias educacionais pode ser mais explorada para aprimorar a experiência didática, tornando o ensino ainda mais acessível e dinâmico.

Portanto, este estudo reforça que as construções geométricas não só viabilizam o ensino dos números irracionais, mas também se apresentam como uma alternativa inovadora e acessível, tornando a matemática mais visual, compreensível e envolvente para os alunos.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 259 p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. Tradução de Elza F. Gomide.
- COSTA, V. C. d. **Números Construtíveis**. 64 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em: <<https://mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Valderi.pdf>>. Acesso em: 19 jan. 2025.
- FERREIRA, C. B. **O ensino de Matemática no século XXI: Desafios e perspectivas**. Campinas: Papirus, 2021.
- FRALEIGH, J. B. **A First Course in Abstract Algebra**. 7. ed. Boston, MA: Addison-Wesley, 2002.
- FREIRE, M. A.; OLIVEIRA, S. A. **A geometria no ensino de Matemática: O uso de régua e compasso no ensino fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2022. ISBN 978-65-89124-10-8.
- IEZZI, O. et al. **Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 9: Geometria Plana**. 11. ed. São Paulo: Atual, 2010.
- LIMA, S. A. **GeoGebra no Ensino de Matemática: Contribuições e perspectivas**. São Paulo: Editora Senac, 2016.
- REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. 257 p.
- RIBEIRO, R. G.; ALMEIDA, M. C. **Currículo e inovação no ensino fundamental: O caso dos números irracionais**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2020.
- SILVA, A. G. O uso de construções geométricas no ensino dos números irracionais. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, Editora Contexto, v. 25, n. 3, p. 45–60, 2023.
- SILVA, A. G. d. **Construções Geométricas com Régua e Compasso**. 133 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2013. Disponível em: <<https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2432/1/Constru%c3%a7%c3%b5es%20geom%c3%a9tricas%20com%20r%c3%a9gua%20e%20compasso.pdf>>. Acesso em: 19 jan. 2025.
- SILVA, P. A.; SANTOS, T. R. **Desafios no uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2022.
- SOUZA, E. M.; LIMA, L. G. **Avaliação no ensino de Matemática: Novas práticas e abordagens pedagógicas**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2022.
- STEWART, I. **Tales of the Unpredictable: Mathematical Stories**. [S.l.]: The Mathematical Association of America, 2013.
- TAVARES, F. **Jogos Matemáticos: Teoria e Prática no Ensino Fundamental**. São Paulo: Editora Ática, 2009.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 108 p.

APÊNDICE A – Sequências Didáticas

Neste apêndice, estão apresentadas as sequências didáticas desenvolvidas para o ensino dos números irracionais, com foco nas construções geométricas feitas com régua e compasso. O objetivo é oferecer uma abordagem prática e acessível para a compreensão dos números irracionais por alunos, utilizando recursos simples e de baixo custo. As atividades foram planejadas para envolver os alunos de forma ativa, permitindo que eles compreendam conceitos matemáticos por meio de construções concretas.

A sequência didática está organizada de maneira sequencial, para garantir que cada etapa seja bem compreendida antes de passar para a próxima. Além disso, as atividades foram pensadas para serem flexíveis, podendo ser adaptadas de acordo com as necessidades dos alunos e o contexto da sala de aula.

O conteúdo aqui apresentado pode ser utilizado e adaptado por outros professores interessados em ensinar sobre os números irracionais de forma prática e significativa. Ao disponibilizar essas sequências didáticas, busca-se contribuir com um material que pode ser facilmente reproduzido em diferentes turmas, ajudando a promover uma aprendizagem mais eficaz e dinâmica.

Atividade 1: Visualizando os números irracionais e a raiz quadrada de 2 através da construção geométrica

Série/Ano

9º ano do Ensino Fundamental

Duração

1 aula de 50 minutos

Objetivos

- Entender o que são os números irracionais e como podemos visualizá-los.
- Ver como a raiz quadrada de 2 pode ser representada através de uma construção com régua e compasso.
- Aprender a fazer construções geométricas de triângulos retângulos e usar essas construções para representar números.

Materiais necessários

- Régua sem escala.
- Lápis.
- Compasso.
- Papel em branco.
- Pergunte aos alunos o que sabem sobre números irracionais, como a raiz quadrada de 2.
- Explique que números irracionais são aqueles que não podem ser representados como frações, e a raiz quadrada de 2 é um exemplo disso.
- Mostre como podemos visualizar esses números de maneira mais concreta, usando uma construção geométrica simples com régua e compasso.

Desenvolvimento:

- **Construção geométrica para a raiz quadrada de 2:**
 - Construa um triângulo retângulo, onde os catetos terão as medidas 1 e 1.
 - A hipotenusa desse triângulo é a raiz quadrada de 2. Essa hipotenusa vai nos dar uma ideia de como a raiz quadrada de 2 se comporta em relação aos números reais.
 - Usando o compasso, desenhe um arco de circunferência com raio igual à hipotenusa do triângulo (raiz quadrada de 2), e observe como ele se aproxima de um ponto na reta numérica.
- **Observando a reta real:**
 - Explique que, à medida que fazemos mais construções com triângulos retângulos, conseguimos aproximar pontos na reta numérica e representar números irracionais de forma visual.

Conclusão :

- Pergunte aos alunos como essa construção os ajudou a entender melhor os Números Irracionais e a raiz quadrada de 2.
- Explique que, ao construir essas figuras, conseguimos visualizar números que, de outra forma, seriam difíceis de entender.

Avaliação

- **Observação:** Durante a atividade prática, observe como os alunos estão aplicando a construção e compreendendo a relação com os números reais e irracionais.
- **Exercício Final:** Peça aos alunos para fazerem em casa mais algumas construções, desenhando os triângulos retângulos isósceles, para visualizarem a aproximação de números irracionais.

Atividade 2: Visualizando a raiz quadrada de números na forma de soma de quadrados

Série/Ano

9º ano do Ensino Fundamental

Duração

1 aula de 50 minutos

Objetivos

- Compreender o conceito de soma de quadrados para calcular raízes quadradas.
- Visualizar a raiz quadrada de números expressos como soma de quadrados através de construção geométrica.
- Desenvolver habilidades na utilização de régua e compasso para construções geométricas.

Materiais Necessários

- Régua sem escala.
- Lápis.
- Compasso.
- Papel em branco.

Introdução:

- Explique que $\sqrt{17}$ pode ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são 1 e 4, pois $\sqrt{17} = \sqrt{1^2 + 4^2}$.
- Diga que a proposta da aula é utilizar construções geométricas com régua e compasso para calcular raízes quadradas de números expressos como soma de quadrados.

Desenvolvimento:

- **Construção geométrica:**

- Primeiramente, desenhe um triângulo retângulo com catetos 1 e 4. A hipotenusa desse triângulo será igual a $\sqrt{17}$, ou seja, $\sqrt{1^2 + 4^2}$.

- **Exploração da reta real:**

- Realize mais algumas construções com outros números, como $\sqrt{18}$, utilizando valores de a e b diferentes para os catetos, e faça a mesma análise.

Atividade Prática:

- Peça aos alunos que construam, com régua e compasso, um triângulo retângulo com catetos 3 e 4. Eles devem calcular a hipotenusa, $\sqrt{3^2 + 4^2}$.
- Peça para repetir o processo com outros valores para os catetos, como 5 e 12, para visualizar as raízes quadradas de $5^2 + 12^2$.

Conclusão:

- Pergunte aos alunos como essa construção os ajudou a entender a raiz quadrada de números na forma de soma de quadrados.
- Explique que, ao visualizar esses números de forma geométrica, conseguimos entender melhor os conceitos de raízes quadradas e suas representações.

Avaliação

- **Observação:** Durante a atividade prática, observe como os alunos estão aplicando a construção e compreendendo a relação com os números reais e irracionais.
- **Exercício Final:** Peça aos alunos para, em casa, realizarem mais construções com outros números na forma $a^2 + b^2$ e visualizarem a raiz quadrada dos resultados.

Atividade 3: Espiral de Teodoro e visualização dos números irracionais na reta dos números reais

Série/Ano

9º ano do Ensino Fundamental

Duração

1 aula de 50 minutos

Tema

Como utilizar a espiral de Teodoro para representar a reta dos Números Reais e visualizar os Números Irracionais.

Objetivos

- Compreender o conceito de espiral de Teodoro e sua construção geométrica.
- Utilizar a espiral de Teodoro para visualizar a reta dos Números Reais e os Números Irracionais.
- Explorar a construção de triângulos retângulos adjacentes e a relação com a reta numérica.

Materiais Necessários

- Régua sem escala.
- Lápis.
- Compasso.
- Papel em branco.

Sequência Didática

Introdução):

- Pergunte aos alunos o que sabem sobre a reta dos números reais e como podemos representá-la graficamente.
- Explique que a espiral de Teodoro é uma maneira de representar a reta numérica de forma visual, usando construções geométricas.
- Fale sobre o conceito de triângulos retângulos adjacentes e como eles ajudam a construir a espiral.

Desenvolvimento:

- **Construção geométrica:**
 - Comece desenhando um triângulo retângulo com catetos de 1 unidade. Este será o primeiro triângulo da espiral.
 - Em seguida, desenhe um novo triângulo retângulo com catetos de 1 unidade e a hipotenusa do triângulo anterior. Esse novo triângulo será adjacente ao primeiro.
 - Repita esse processo de construir triângulos retângulos adjacentes, aumentando os catetos à medida que a espiral cresce.
- **Exploração da reta real:**
 - Mostre como os triângulos vão se organizando para formar a espiral, e explique que, à medida que ela cresce, a reta numérica é “completada”.
 - Diga que, ao prolongarmos a espiral, podemos visualizar todos os números reais ao longo da curva.

Atividade prática:

- Peça aos alunos para construírem a espiral de Teodoro em uma folha de papel, utilizando régua e compasso.
- Eles devem construir os primeiros triângulos retângulos adjacentes e observar como a espiral vai se expandindo.
- Peça para os alunos desenharem alguns arcos de circunferência com raios igual às hipotenusas de cada triângulo, representando a reta numérica em sua forma visual.

Conclusão:

- Pergunte aos alunos como a espiral de Teodoro ajudou a entender melhor a reta dos Números Reais e as relações entre os números irracionais.
- Explique que, ao construir a espiral, conseguimos uma representação visual de uma reta numérica infinita.

Avaliação

- **Observação:** Durante a atividade prática, observe como os alunos estão aplicando a construção da espiral e compreendendo sua relação com os números reais.
- **Exercício Final:** Peça aos alunos para continuarem a construção da espiral em casa e registrarem os primeiros números irracionais na reta numérica representada pela espiral.

Atividade 4: Encontrando a raiz quadrada a partir da diferença de quadrados com régua e compasso

Série/Ano

9º ano do Ensino Fundamental

Duração

1 aula de 50 minutos

Objetivos

- Calcular a raiz quadrada de 21 utilizando construção geométrica com régua e compasso.
- Aplicar o teorema de Pitágoras para resolver um problema envolvendo números irracionais.
- Visualizar a raiz quadrada de um número irracional através de construções geométricas.

Materiais necessários

- Régua sem escala.
- Compasso.
- Lápis.
- Papel em branco.

Introdução:

- Pergunte aos alunos como eles poderiam calcular a raiz quadrada de um número irracional, como $\sqrt{21}$, sem o uso de uma calculadora.
- Explique que, por meio de uma construção geométrica com régua e compasso, podemos encontrar a raiz quadrada de 21 utilizando o teorema de Pitágoras.
- Apresente a ideia de que o número 21 pode ser expresso como a diferença de quadrados:
 $21 = 5^2 - 2^2$.

Desenvolvimento:

- **Exemplo: cálculo de $\sqrt{21}$:**

- Explique que queremos calcular $\sqrt{21}$, e que podemos representar 21 como a diferença de quadrados: $21 = 5^2 - 2^2$.
- Com a régua e o compasso, desenhe o segmento de reta de 5 unidades de comprimento, representando a hipotenusa do triângulo retângulo.
- Em seguida, construa um cateto de 2 unidades de comprimento. Este será um dos catetos do triângulo.
- Conecte as extremidades dos catetos para formar o triângulo retângulo.

- **Atividade: Construção com os alunos :**

- Divida os alunos em grupos pequenos e peça para que cada grupo calcule a raiz quadrada de outros números utilizando a construção geométrica.
- Sugira números como 25, 50 e 29, que podem ser representados como hipotenusas de triângulos retângulos e podem ser resolvidos de forma semelhante à de $\sqrt{21}$.
- Oriente os alunos na construção dos triângulos e no cálculo das raízes quadradas.

Conclusão:

- Pergunte aos alunos como a construção geométrica com régua e compasso ajudou a visualizar a raiz quadrada de um número irracional, como $\sqrt{21}$.
- Reforce a ideia de que, com a construção de triângulos retângulos, podemos calcular a raiz quadrada de números irracionais, visualizando os catetos e a hipotenusa.
- Finalize explicando que essa abordagem geométrica pode ajudar a compreender melhor o conceito de raiz quadrada de maneira mais visual e intuitiva.

Avaliação

- **Observação:** Durante a atividade prática, observe se os alunos estão aplicando corretamente o teorema de Pitágoras nas construções geométricas.
- **Exercício Final:** Proponha aos alunos que calculem outras raízes quadradas utilizando a técnica da construção geométrica e o teorema de Pitágoras.

Atividade 5: Resolução de equações do 2º grau com duas raízes positivas

Série/Ano

9º ano do Ensino Fundamental

Duração

1 aula de 50 minutos

Habilidade Desenvolvida

Compreender e aplicar a resolução geométrica de uma equação do 2º grau com duas raízes positivas utilizando régua e compasso.

Objetivos

- Resolver uma equação do 2º grau com duas raízes positivas usando a régua e o compasso.
- Relacionar a resolução algébrica com a interpretação geométrica.
- Aplicar conceitos de construção geométrica para determinar as raízes da equação.

Materiais Necessários

- Régua com marcações
- Compasso
- Lápis
- Folha quadriculada ou papel sulfite

1. Introdução

- Pergunte aos alunos: “Vocês sabiam que existe uma forma geométrica de resolver uma equação do 2º grau?”
- Apresente um exemplo: $x^2 - 7x + 10 = 0$.

- Explique que eles aprenderão uma forma geométrica de encontrar as raízes dessa equação usando régua e compasso.

2. Construção geométrica da solução

Na equação dada a soma das raízes é igual a 7 e o produto igual a 10. Das relações métricas no triângulo retângulo encontramos que *hipotenusa* = 7 e a *altura* = $\sqrt{10}$. Então, vamos construir um triângulo retângulo de hipotenusa 7 cm e altura igual a $\sqrt{10}$ cm.

Passos:

1. **Construção auxiliar que determina $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$** Construção já realizada na atividade 2: um triângulo retângulo de catetos de medidas 1 cm e 3 cm, que determina a hipotenusa de medida $\sqrt{10}$ cm.

2. Desenho da reta e marcação dos coeficientes:

- Trace uma reta r .
- Determinar $\overline{AB} = 7\text{cm}$ na reta r .
- Determinar o ponto médio de AB ponto O
- Traçar a semicircunferência de centro O e raio de medida \overline{OA}
- Construir uma reta $s \parallel r$, distando dela $\sqrt{10}$ cm.
- Escolher um dos pontos de encontro de s com a circunferência (ponto C). Construir a reta t perpendicular à reta r , passando por C , determinando o ponto H , interseção entre r e t .
- Medir com a escala da régua \overline{AH} e \overline{HB} (raízes da equação)

3. Discussão e conclusão

- Compare os valores encontrados geometricamente com os obtidos pela fórmula de Bhaskara.
- Reforce que a geometria oferece uma interpretação visual das soluções algébricas.
- Pergunte aos alunos:
 - O que podemos concluir sobre a relação entre geometria e álgebra?

– Como essa construção pode ser aplicada em outros problemas?

Avaliação

- Observar a participação dos alunos na construção geométrica.
- Corrigir possíveis erros no uso da régua e do compasso.
- Verificar se os alunos conseguiram entender e aplicar corretamente os conceitos da equação do 2º grau.