



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS DIADEMA



KARL WILLIAN SOUSA SANTOS

**O ENSINO DE PROBABILIDADE: CONFLUÊNCIAS ENTRE
MODELAGEM MATEMÁTICA, ENSINO E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

DIADEMA

2025

KARL WILLIAN SOUSA SANTOS

**O ENSINO DE PROBABILIDADE: CONFLUÊNCIAS ENTRE
MODELAGEM MATEMÁTICA, ENSINO E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Orientadora: Prof. Dra. Verilda Speridião Kluth

DIADEMA

2025

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Karl Willian Sousa

O ensino de probabilidade: confluências entre modelagem matemática, Ensino e educação matemática. / Karl Willian Sousa Santos. -- Diadema, 2025. 93 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2025.

Orientadora: Verilda Speridião Kluth

1. Modelagem. 2. Matemática. 3. Ensino. 4. Educação Matemática. 5. Probabilidade. I. Título.



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de São Paulo



PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DISSERTAÇÃO E TESE nº 2811016/2025/PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

DIA - PPG - PROFMAT, 27 de junho de 2025.

No dia trinta de junho de dois mil e vinte e cinco reuniu-se, através da Plataforma Google Meet às 09:00 horas, a Comissão Julgadora para a defesa de Dissertação de Mestrado solicitada por **KARL WILLIAN SOUSA SANTOS**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional (PROFMAT), que apresentou a dissertação sob o Título: **O ensino de probabilidade: confluências entre modelagem matemática, ensino e educação matemática**.

A referida Comissão esteve constituída pelos Professores Doutores:

Prof(a). Dr(a). José Carlos Gomes de Oliveira - Centro Paula Souza

Prof(a). Dr(a). Tiago Nunes Castilho - Universidade Federal de São Paulo

Prof(a). Dr(a). David Antonio da Costa - Universidade Federal de São Paulo

O(A) Presidente Prof(a). Dr(a). **Verilda Speridiao Kluth** inicia a sessão dando a palavra ao(a) candidato(a), que dispõe de um período de tempo entre trinta e quarenta minutos para expor sua tese. A seguir, dá a palavra aos examinadores para a arguição. Cada examinador dispõe de até quarenta minutos, no máximo, para arguição, bem como o(a) candidato(a) para as respostas. Tendo o(a) candidato(a) respondido todas as arguições em tempo hábil, os membros da Banca Examinadora emitiram seus Pareceres:

Prof(a). Dr(a). José Carlos Gomes de Oliveira	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). Tiago Nunes Castilho	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). David Antonio da Costa	(X) APROVADO () REPROVADO

Em face dos referidos pareceres, a Comissão Julgadora considera o(a) Sr(a). **KARL WILLIAN SOUSA SANTOS**:

(X) habilitado / () **não** habilitado a receber o título de MESTRE pelo programa de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO.

E por estarem de acordo, assinam a presente ata.

Diadema, 30 de junho de 2025.

Sugestões e Observações:
Sugere-se a escrita e publicação de um artigo.



Documento assinado eletronicamente por **Verilda Speridiao Kluth, Docente**, em 30/06/2025, às 17:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ CARLOS GOMES DE OLIVEIRA, Usuário Externo**, em 01/07/2025, às 14:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tiago Nunes Castilho, Docente**, em 01/07/2025, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **David Antonio da Costa, docente**, em 02/07/2025, às 09:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida [clcando aqui](https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), ou pelo endereço: "https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0" informando o código verificador **2811016** e o código CRC **75EF9AE3**.

Rua São Nicolau, 210 5º Andar - Bairro Centro - DIA - PPG - PROFMAT - SP CEP 09913-030 - <http://www.unifesp.br>

Referência: Caso responda este Ofício, indicar expressamente o Processo nº 23089.022781/2025-22

SEI nº 2811016

*Dedico este trabalho à minha querida mãe e
ao meu querido pai, por todo amor, apoio e
sacrifício ao longo da minha trajetória.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Expresso minha profunda gratidão à Professora Verilda Speridião Kluth, cuja orientação foi fundamental para a realização deste trabalho. Agradeço imensamente pelo apoio constante, sua confiança e incentivo foram decisivos para que eu pudesse seguir adiante.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, com toda certeza todos contribuíram para o aprimoramento da minha prática pedagógica e para a minha formação enquanto professor de Matemática.

Aos professores da banca, agradeço pela generosidade em dedicar atenção e compartilhar sua experiência na avaliação desta Dissertação, assim como pela presença durante a defesa. É uma honra contar com a participação de vocês neste momento tão especial.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais, razões da minha existência. Talvez os únicos capazes de compreender todos os obstáculos que atravessei para chegar até aqui. Meus agradecimentos também aos meus familiares que me apoiaram neste processo.

Também não posso esquecer dos meus amigos, grandes incentivadores do meu progresso: sempre estaremos juntos.

Agradeço aos meus colegas de trabalho pela colaboração, pelo apoio e pelas valiosas contribuições que enriqueceram minha trajetória profissional.

Agradeço àqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para este trabalho.

Por fim, agradeço a Deus pela oportunidade.

*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria
produção ou a sua construção.”*

— Paulo Freire

*“Eu carrego dentro de mim uma obsessão de que o filho do povo trabalhador tem que ter o
mesmo direito de todo e qualquer cidadão de estudar na universidade.”*

— Luiz Inácio Lula da Silva

RESUMO

Esta dissertação investiga de que maneira a modelagem matemática pode contribuir para o Ensino de probabilidade na Educação Básica, considerando os objetivos e propósitos da Modelagem na educação matemática. A pesquisa é orientada pela pergunta: “Como a modelagem matemática, alinhada aos propósitos da educação matemática, contribui para o ensino de probabilidade?” e conduzida com base na hermenêutica filosófica de Gadamer, que estrutura o processo investigativo como um diálogo contínuo entre pergunta e resposta. O estudo envolve a análise e interpretação de textos teóricos relevantes, a avaliação de documentos curriculares oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Currículo Paulista e o Currículo da Cidade de São Paulo, além do levantamento de experiências educacionais que aplicam a modelagem matemática. Essa abordagem metodológica permite compreender as contribuições da modelagem para o Ensino da Probabilidade sob diferentes perspectivas teóricas e práticas. Os resultados indicam que a modelagem matemática permite que os estudantes se conectem diretamente com situações do cotidiano, estimulando a criação de representações matemáticas dessas situações e, assim, promovendo o desenvolvimento do pensamento probabilístico. Nesse processo, a probabilidade deixa de ser vista apenas como um conceito abstrato e passa a ser compreendida como uma ferramenta prática para a análise e a tomada de decisões em situações reais, tornando o aprendizado mais próximo da realidade dos alunos. Além disso, a modelagem promove habilidades essenciais como a investigação, a formulação de hipóteses, a argumentação e a validação de ideias, em consonância com os princípios da educação matemática que valorizam a autonomia, o pensamento crítico e a construção coletiva do conhecimento. Por fim, conclui-se que a integração entre modelagem matemática e o Ensino de probabilidade amplia as possibilidades pedagógicas, fortalece a presença do tema nos currículos escolares e contribui para a formação de estudantes mais reflexivos, críticos e participativos.

Palavras-chave: Modelagem; Matemática; Ensino; Educação Matemática; Probabilidade.

ABSTRACT

This dissertation examines how mathematical modelling can contribute to the teaching of probability in Basic Education, considering the objectives and purposes of modeling within Mathematics Education. Guided by the research question, “How does mathematical modelling, aligned with its purposes in Mathematics Education, contribute to the teaching of probability?” the study is conducted based on Gadamer’s philosophical hermeneutics, which frames the investigative process as a continuous dialogue between questioning and interpretation. The methodology includes critical analysis and hermeneutic interpretation of relevant theoretical texts, evaluation of official curricular documents such as the National Common Curricular Base (BNCC), the São Paulo State Curriculum, and the São Paulo City Curriculum, as well as a survey of educational experiences applying mathematical modelling. This comprehensive approach allows for a nuanced understanding of the contributions of modelling to probability teaching from both theoretical and practical perspectives. Findings indicate that mathematical modelling enables students to engage directly with real-world situations, fostering the construction of mathematical representations of these contexts and promoting the development of probabilistic thinking. Through this process, probability is reconceptualized from an abstract concept to a practical tool for analysis and decision-making in concrete situations, thereby making learning more meaningful and connected to students’ realities. Furthermore, modelling cultivates essential skills such as investigation, hypothesis formulation, argumentation, and validation of ideas, in alignment with Mathematics Education principles that emphasize autonomy, critical thinking, and collaborative knowledge construction. The dissertation concludes that integrating mathematical modelling into probability instruction expands pedagogical possibilities, strengthens the curricular presence of the subject, and contributes to the formation of more reflective, critical, and participative students.

Keywords: Modelling; Mathematics; Teaching; Mathematics Education; Probability.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resumo dos modelos probabilísticos discretos	29
Tabela 2: Resumo dos modelos probabilísticos contínuos	30
Tabela 3: Objetos do Conhecimento e Habilidades segundo a BNCC Matemática (anos iniciais do Ensino Fundamental)	38
Tabela 4: Objetos do Conhecimento e Habilidades segundo a BNCC Matemática (6º ao 9º ano)	40
Tabela 5: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio ...	42
Tabela 6: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos Anos Iniciais ...	45
Tabela 7: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos Anos Iniciais ...	46
Tabela 8: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio ...	47
Tabela 9: Objetos do conhecimento do eixo probabilidade e estatística no ciclo de alfabetização	49
Tabela 10: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ciclo Interdisciplinar	50
Tabela 11: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ciclo Autoral ..	51
Tabela 12: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio ..	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 EXPLICITAÇÃO DA INTERROGAÇÃO NORTEADORA.....	19
3 METODOLOGIA E SEUS FUNDAMENTOS.....	23
4 COMPREENDENDO OS PRINCÍPIOS E PROPÓSITOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA PROBABILIDADE	26
4.1 O QUE É UM MODELO MATEMÁTICO?	26
4.2 TIPOS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS	28
4.3 A PROBABILIDADE COMO SUBÁREA DA MATEMÁTICA.....	31
4.4 AS VISÕES SOBRE A PROBABILIDADE	33
4.5 EXEMPLOS DE TRABALHOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA QUE ENVOLVEM PROBABILIDADE.....	35
4.6 A PROBABILIDADE NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)....	37
4.6.1 <i>A probabilidade na BNCC no Ensino Fundamental</i>	38
4.6.2 <i>A Probabilidade na BNCC no Ensino Médio</i>	41
4.7 A PROBABILIDADE NO CURRÍCULO PAULISTA.....	43
4.7.1 <i>A probabilidade no Currículo Paulista do Ensino Fundamental</i>	45
4.7.2 <i>A probabilidade no Currículo Paulista do Ensino Médio</i>	47
4.8 A PROBABILIDADE NO CURRÍCULO DA CIDADE DE SÃO PAULO	48
4.8.1 <i>A probabilidade no Currículo da Cidade de São Paulo - Ensino Fundamental</i>	49
4.8.2 <i>A probabilidade no Currículo da Cidade de São Paulo - Ensino Médio</i>	52
4.9 PRINCÍPIOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE.....	54
5 COMPREENDENDO OS PRINCÍPIOS E PROPÓSITOS DA MODELAGEM NO ENSINO E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	55
5.1 A MODELAGEM NO ENSINO.....	55
5.1.1 <i>Pesquisas que envolvem o tema Modelagem no banco de dissertações do PROFMAT</i>	56
5.1.2 <i>A modelagem no Ensino: sobre probabilidade</i>	57
5.2 A MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	58
5.2.1 <i>A modelagem na educação matemática: sobre probabilidade</i>	62

5.3 APROXIMAÇÕES E AFASTAMENTOS ENTRE A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	65
5.3.1 Aproximações	66
5.3.2 Afastamentos.....	67
5.3.3 Considerações	67
6 HORIZONTES VISLUMBRADOS COM A PESQUISA.....	69
6.1 APRESENTAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	71
6.1.1 Etapa 1: coleta de dados e cálculo de frequências relativas	73
6.1.2 Etapa 2: construção da matriz de transição com suavização de Laplace	73
6.1.3 Etapa 3: Combinação das probabilidades	73
6.1.4 Etapa 4: cálculo das probabilidades conjuntas	74
6.1.5 Etapa 5: normalização e cálculo das odds justas	74
6.1.6 Etapa 6: Análise crítica e reflexão ética	74
6.1.7 Exemplo de aplicação do modelo: previsão de odds para o jogo São Paulo x Vasco	76
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82
APÊNDICE A – FICHAMENTO DE LEITURA.....	87

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das práticas docentes, é possível observar diversas reações dos estudantes frente a diferentes abordagens pedagógicas. Durante essas práticas, percebe-se que, apesar dos esforços para propor atividades que envolvam situações reais e do entusiasmo que essas propostas geram, os estudantes frequentemente não compreendem completamente o que lhes é apresentado. Contudo, nota-se que há uma receptividade maior em comparação com a forma tradicional de ensino, que se entende como uma abordagem pedagógica que se baseia em métodos convencionais e estruturas de sala de aula, muitas vezes caracterizada pela transmissão unidirecional de conhecimento do professor para os alunos

Outra vulnerabilidade observada é a dificuldade em entender os conceitos de determinados assuntos como, por exemplo, os conceitos de probabilidade, que tal como posto no material didático produzido pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, o “Caderno do Professor”, os conteúdos relacionados ao cálculo de probabilidades trazem desconforto aos estudantes, mas também aos docentes, de modo que a abordagem do tema se faça de forma simplificada e pouco abrangente (São Paulo, 2008).

De fato, consideramos que o estudo de probabilidade é bastante difícil, tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Entretanto, ainda durante a nossa graduação tivemos contato com algumas atividades que se mostraram interessantes para o desenvolvimento do conceito probabilístico. Citamos aqui, o trabalho de Melillo (2011), “A modelagem matemática no futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método do caso”.

Melillo (2011) discute a atribuição de probabilidades aos resultados dos jogos do campeonato brasileiro de futebol de 2010, envolvendo os estudantes na construção de modelos probabilísticos. Além disso, são apresentados conceitos de probabilidade subjetiva (que resulta da intuição, de suposições fundamentadas e estimativas, o que será apresentado no capítulo 4) e são promovidos debates sobre os efeitos do mercado de apostas em eventos esportivos, estimulando o pensamento crítico dos alunos em relação a essas questões.

A pesquisa também destaca a importância de pensar em probabilidades de forma subjetiva, evidenciando a complexidade desse processo e as diferentes perspectivas dos estudantes em relação a eventos futuros. O trabalho de Melillo (2011) foi um importante ponto de partida para entender que existem outras formas de se desenvolver o pensamento probabilístico.

A bagagem adquirida ao longo da graduação me fez refletir sobre os métodos de ensino no sentido de explorar a autonomia dos estudantes, nos quais eles tivessem um papel mais ativo no processo de ensino-aprendizagem, em vez do velho ensino tradicional. O método da modelagem se destacou nesta busca. Mesmo assim, agora como professor de matemática, a pergunta dos estudantes “mas quando eu vou usar isso na minha vida?” ainda persistia e os elos, a interação entre a modelagem e o conhecimento científico, no caso a matemática, não se mostrava presente na fala dos alunos.

Desta forma, cabe questionar: como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da educação matemática contribuem para com o ensino de probabilidade?

A escolha de explorar o ensino de probabilidade por meio da modelagem matemática é motivada por alguns fatores. Segundo Gasperin (1990), a modelagem matemática apresenta uma abordagem de aprendizado ativa para os alunos, buscando envolvê-los na prática para alcançar o conhecimento e ajudar a enfrentar os desafios enfrentados na educação, especialmente no ensino da matemática. Para Santos (1990), o ensino através da modelagem propicia ao aluno trazer à tona situações problemas do seu dia a dia, tornando o aprendizado mais fácil, pois ele identifica-se como coautor e não como mero reproduzidor.

Assim, segundo os autores citados, a modelagem matemática pode oferecer uma maneira eficaz de abordar os conceitos probabilísticos, além de também contribuir para mitigar os desafios enfrentados no ensino de matemática, ao incentivar a autonomia dos estudantes e sua identificação como agentes ativos no processo de aprendizagem.

Esta abordagem também se alinha aos objetivos da educação matemática, considerando que esta tem como um de seus objetivos que o ensino da Matemática construa um processo de interação entre professor e aluno, em que ambos possam problematizar, refletir e construir conhecimentos matemáticos (Dante, 1991).

Para Herzog *et al.* (2019), o ensino de probabilidade é fundamental para o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos estudantes, permitindo-lhes compreender a incerteza e a aleatoriedade presentes em diversos fenômenos. Além disso, o autor enfatiza a importância de abordar a probabilidade de forma lúdica e interativa, como por meio de jogos, para tornar o aprendizado mais significativo e estimulante.

A importância do ensino de probabilidade não só é destacada pelos pesquisadores como também se reflete na organização curricular escolar. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017), nos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano), os alunos são

gradualmente introduzidos aos conceitos fundamentais de probabilidade. No 1º ano, começam a compreender noções básicas de acaso, classificando eventos simples em situações do cotidiano. À medida que avançam para os anos subsequentes, exploram a aleatoriedade, espaço amostral, análise de chances de eventos aleatórios e, finalmente, introduzem o cálculo de probabilidades em eventos equiprováveis no 5º ano.

Nos anos finais (6º ao 9º ano), o estudo da probabilidade se aprofunda consideravelmente. A partir do 6º ano (Brasil, 2017), os alunos lidam com eventos não equiprováveis, probabilidade condicional, e ampliam os experimentos probabilísticos. Conforme avançam, exploram temas mais complexos, como distribuições de probabilidade, eventos independentes e dependentes, a relação com a estatística, cálculos mais elaborados e aplicações práticas em situações cotidianas e em problemas do mundo real, consolidando seus conhecimentos para os desafios do Ensino Médio.

Conforme os parâmetros curriculares nacionais em Brasil (1997),

a principal finalidade para o estudo de probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 1997, p. 56).

Por outro lado, segundo Lopes (2008), o ensino de probabilidade enfrenta desafios que justificam a busca de novas abordagens, sobretudo a importância de repensar a forma como a probabilidade é ensinada na educação básica, destacando a necessidade de desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico desde a infância e adolescência. Ela envolve uma linguagem e notação específicas que podem ser de difícil compreensão.

Outra dificuldade comum reside na falta de conexão entre a teoria e a aplicação prática, deixando os estudantes sem compreensão sobre como esses conceitos podem se relacionar. Estas barreiras didáticas reforçam a necessidade de explorar a modelagem matemática como uma abordagem que pode superar tais desafios, tornando o Ensino de probabilidade mais compreensível.

Além disso, ao enfrentar essas barreiras no ensino de probabilidade, é importante adotar abordagens inovadoras que possam despertar o interesse dos alunos e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos probabilísticos (Lopes, 2008). Nesse sentido, a modelagem matemática emerge como uma possibilidade. Ao integrar situações do mundo real no processo de aprendizagem, os estudantes são desafiados a aplicar conceitos matemáticos em

contextos significativos. Essa abordagem pode proporcionar uma compreensão mais sólida da Probabilidade e estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas, preparando os alunos para enfrentar desafios do mundo real de forma mais eficaz.

A modelagem matemática oferece uma maneira concreta e aplicável de abordar a probabilidade, permitindo que os alunos explorem conceitos probabilísticos em situações do mundo real. Através dessa abordagem, eles são incentivados a usar a matemática como uma ferramenta para resolver problemas reais, o que torna o aprendizado mais envolvente e significativo.

Para Burak (2019),

a adoção da modelagem matemática, para o ensino da Matemática, na Educação Básica, contribui para, de forma gradativa, seja ultrapassado o tratamento estanque e compartimentalizado que há muito caracteriza o ensino. A Modelagem favorece o enfoque interdisciplinar e transdisciplinar no desenvolvimento de um tema (Burak, 2019, p. 107).

Desta forma, ao incorporar a modelagem matemática ao ensino de probabilidade, pode-se não apenas aprimorar a compreensão dos alunos sobre conceitos probabilísticos, mas também capacitá-los a aplicar esses conceitos em situações práticas, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo com confiança.

Na literatura, existem aplicações que são confluências entre a modelagem matemática e a educação matemática. Dois exemplos são o estudo de Ribeiro e Brighenti (2021), “Aplicação de jogos de pôquer através de tecnologias digitais para ensino de probabilidade”, que utilizou tecnologias digitais e o jogo de pôquer para ensinar probabilidade na Educação Básica, com auxílio do *Google Meet*, *Megajogos* e *Cardplayer*, na qual os autores realizaram rodadas de jogadas online, discussões probabilísticas e análise dos resultados, além do já citado trabalho de Melillo (2011).

A incorporação da modelagem matemática ao ensino de probabilidade surge como uma abordagem promissora para superar os desafios enfrentados no ensino tradicional dessa disciplina. Ao estimular a aplicação prática dos conceitos probabilísticos em situações do mundo real, essa metodologia pode tornar o aprendizado mais significativo e envolvente para os alunos, capacitando-os a enfrentar os desafios complexos e dinâmicos que encontram fora da sala de aula (Lopes, 2008). Ao reconhecer a importância da probabilidade na análise crítica, na tomada de decisões informadas e no entendimento do mundo ao nosso redor, o ensino de probabilidade fundamentado na modelagem matemática fortalece as bases educacionais dos alunos e os prepara para uma cidadania mais consciente e engajada.

Nesse contexto, esta pesquisa visa explorar as potencialidades dessa abordagem no contexto do ensino de probabilidade, contribuindo para o avanço da compreensão da Probabilidade e para o desenvolvimento dos estudantes em sua jornada educacional.

E a interrogação norteadora da pesquisa se impõe: “Como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da educação matemática contribuem para com o ensino de probabilidade?” desempenha o papel de orientação na compreensão dos elementos fundamentais que desejamos explorar, compreender e investigar. Assim, para dar embasamento à pesquisa, serão descritos os aspectos filosóficos-científicos-educacionais acerca da pergunta norteadora no Capítulo 2, “Explicitação da pergunta norteadora”.

Além desta Introdução, o Capítulo 1, e da citada “Explicitação da pergunta norteadora”, o Capítulo 2, outros cinco capítulos farão parte desta pesquisa, a saber: no Capítulo 3, “Metodologia e seus fundamentos”, discutiremos a trajetória metodológica da pesquisa; Capítulo 4, “Compreendendo os princípios e propósitos da modelagem matemática no âmbito da probabilidade”; Capítulo 5, “Compreendendo os princípios e propósitos da modelagem no ensino e na educação matemática”; Capítulo 6, “Horizontes vislumbrados com a pesquisa”; Capítulo 7, “Considerações finais”; as Referências Bibliográficas e o Apêndice.

2 EXPLICITAÇÃO DA INTERROGAÇÃO NORTEADORA

Neste capítulo, buscamos elucidar a questão norteadora da pesquisa que ora propomos, uma vez que é ela que direciona o estudo, delimitando os passos a serem seguidos durante a investigação.

Voltemos, portanto, à pergunta norteadora: Como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da modelagem na educação matemática contribuem para o ensino de probabilidade? Iniciemos nossa explicitação numa perspectiva filosófica do ponto de vista de Chauí (2000), que descreve características da atitude filosófica ao se indagar: “o que”, “como” e “por que”. De acordo com a autora, quando se pergunta “o que”, “a Filosofia pergunta qual é a realidade ou natureza e qual é a significação de alguma coisa, não importa qual” (Chauí, 2000, p. 11). Ao se perguntar “como”, “a Filosofia indaga qual é a estrutura e quais são as relações que constituem uma coisa, uma ideia ou um valor” (Chauí, 2000, p. 12). E quando se pergunta “por que”, “Filosofia pergunta pela origem ou pela causa de uma coisa, de uma ideia, de um valor” (Chauí, 2000, p. 12).

Considerando o que foi definido por Chauí (2000), nossa pesquisa busca investigar a estrutura e as relações que constituem as ideias da modelagem matemática, articuladas aos propósitos da modelagem no contexto da educação matemática, especificamente no ensino de probabilidade.

A estrutura refere-se à organização e aos elementos fundamentais das ideias da Modelagem matemática, como as estratégias, métodos e conceitos usados para representar problemas matemáticos, especialmente em probabilidade. Nossa pesquisa busca compreender como essas ideias estão organizadas e poderão contribuir para com o ensino da probabilidade no sentido de ir além dos questionamentos que perguntam sobre o uso da probabilidade na vida dos alunos dirigindo seu aprendizado de probabilidade propriamente dita, sem, no entanto, negar a faceta da aplicabilidade da matemática.

As relações implícitas no objetivo acima referem-se às conexões entre a Modelagem Matemática e os objetivos educacionais estabelecidos no âmbito da Educação Matemática. Essa perspectiva busca compreender de que modo a modelagem pode constituir-se como um meio eficaz para o ensino de conceitos probabilísticos. Ademais, procura-se evidenciar como a modelagem matemática potencializa a aprendizagem ao articular o raciocínio abstrato com situações concretas e significativas, vivenciadas pelos alunos.

Contudo, a explicitação da pergunta norteadora não se limita ao entendimento da estrutura e das relações, como propõe Chauí (2000). A pergunta levanta outras questões fundamentais que

sustentam esta investigação. É necessário compreender, por exemplo: “Quais são os princípios fundamentais da modelagem matemática?”. Recorrendo à descrição de Bassanezi (2002), a modelagem matemática:

[...] é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (Bassanezi, 2002, p. 24).

A partir dessa definição, surge uma nova questão: existe uma relação direta entre a modelagem matemática e o ensino de probabilidade? Ou seja, é possível transformar situações da realidade relacionadas à probabilidade em problemas matemáticos passíveis de serem modelados? Para responder a essas questões, é necessário avançar na investigação e entender “Como a probabilidade é teorizada no corpo do conhecimento matemático hoje?” e “Quais são os objetos teorizados aplicáveis ao ensino básico?”. Com essa compreensão, entendemos ser possível identificar quais conceitos probabilísticos podem ser incorporados à modelagem matemática de maneira compatível com o objetivo da nossa pesquisa.

Cabe destacar a importância da História da Matemática para a compreensão do desenvolvimento dos conceitos teóricos em questão. Nesse sentido, formulou-se a indagação: “O que a História da Matemática nos ensina sobre o desenvolvimento destes conceitos?”, a qual sustentou a presente pesquisa.

Em concordância com essa perspectiva, Ferreira, Silveira e Silva (2013) realizam uma análise aprofundada da importância histórica no desenvolvimento dos conceitos de modelagem matemática e afirmam que a história desempenha um papel fundamental nesse processo, pois fornece um contexto diversificado que ilustra como essa prática tem sido utilizada, ao longo dos séculos, para resolver problemas reais. Desde as aplicações da geometria pelos antigos egípcios para medir terrenos até a formulação da Teoria das Probabilidades por Pascal e Fermat em situações de jogos, a modelagem matemática surge como uma ferramenta que vai além do cálculo, conectando a matemática a diversas áreas do conhecimento humano.

Todas as questões levantadas até o momento estão relacionadas à modelagem matemática, mas a pergunta norteadora também abrange a modelagem no contexto da educação matemática, o que introduz novas questões igualmente importantes e complementares às anteriores. Para que a interseção entre esses dois campos fique clara na pesquisa, é fundamental esclarecer os

propósitos da modelagem dentro da educação matemática, de modo a entender como essa abordagem pode ser aplicada no processo de ensino e aprendizagem.

Barbosa (2001) define a modelagem no contexto da educação matemática como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. Essa definição aproxima-se de Bassanezi (2002), com a diferença de incluir o papel ativo dos alunos no processo de investigação.

Com base nessas definições, torna-se necessário aprofundar a análise dos propósitos da modelagem na educação matemática e entender qual fundamentação teórica sustenta as abordagens desses autores - e de outros importantes para o tema. A partir disso, surge a questão: estão destacados nos propósitos da modelagem matemática na educação matemática o ensino específico do conceito de probabilidade?

Também é necessário questionar se há nesses trabalhos aspectos de uma pedagogia fundamentada. Quais são os fundamentos que orientam essas abordagens? São de natureza histórica, considerando a evolução do conceito de probabilidade? Ou de caráter filosófico, buscando desenvolver um pensamento crítico e analítico nos alunos? Essas questões se somam à pesquisa, revelando a necessidade de explorar não apenas os propósitos da modelagem, mas também o embasamento pedagógico que a sustenta, abrindo caminho para uma investigação mais ampla.

Ademais, é fundamental entender os efeitos e desafios práticos da modelagem no ensino. Será que a modelagem, como abordagem pedagógica, consegue realmente conectar de maneira coerente os conceitos abstratos de probabilidade às situações vivenciáveis? E, acima de tudo, o que está sendo considerado pedagógico nas pesquisas que tratam da modelagem?

De igual modo, é pertinente investigar no âmbito do PROFMAT a existência de trabalhos dedicados exclusivamente ao ensino de probabilidade. E, caso existam, quais são as diferenças entre esses estudos e aqueles que têm como propósito a educação matemática de forma mais ampla? Compreender essas distinções permitirá identificar abordagens mais específicas e focadas, possibilitando uma análise aprofundada do ensino de probabilidade e suas contribuições particulares.

Essas perguntas não apenas guiam nossa pesquisa, mas também nos possibilitam identificar as nuances e especificidades do Ensino de probabilidade em comparação com outras áreas da educação matemática. Ao explorar tanto os fundamentos teóricos quanto às práticas

pedagógicas, nossa investigação busca oferecer uma compreensão mais abrangente de como a modelagem matemática aliada à modelagem na educação matemática podem contribuir para o ensino de probabilidade, podendo ampliar o campo educacional e oferecendo novas perspectivas para o processo de ensino e aprendizagem.

3 METODOLOGIA E SEUS FUNDAMENTOS

A metodologia é um componente importante da pesquisa científica, referindo-se ao conjunto de métodos, técnicas e procedimentos que orientam a investigação. Segundo Lakatos e Marconi (2003), o método consiste em um conjunto de atividades sistemáticas e racionais que, de maneira eficiente e econômica, permitem alcançar o objetivo de produzir conhecimentos válidos e verdadeiros. Essa definição enfatiza a importância de uma abordagem estruturada e lógica que, além de buscar respostas, minimiza erros e orienta as decisões do pesquisador.

A seleção da metodologia em uma pesquisa científica deve estar relacionada à teoria que se pretende investigar. De acordo com Lakatos e Marconi (2003), a metodologia deve ser considerada dentro de um contexto que abrange tanto a teoria quanto os métodos específicos a serem aplicados. Essa articulação entre teoria e metodologia guia o processo investigativo e, ao mesmo tempo, fortalece a credibilidade e a relevância das conclusões obtidas, conforme enfatizado na literatura especializada (Lakatos; Marconi, 2003). Assim, uma escolha metodológica bem fundamentada é importante para o sucesso e a validade da pesquisa.

Nesta pesquisa, a investigação se concentrará em uma abordagem metodológica que se alinha à pergunta: “Como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da modelagem na educação matemática contribuem para o ensino de probabilidade?”. O estudo buscará explorar as diversas formas de integrar a modelagem matemática no ensino de probabilidade, analisando criticamente as práticas educacionais existentes e suas implicações.

Para isso, a pesquisa adotará uma perspectiva hermenêutica filosófica inspirada em Gadamer (1997), que se propõe a questionar continuamente as técnicas e os métodos utilizados ao longo do processo investigativo. Essa abordagem visa transformar a investigação em um exercício contínuo de reflexão filosófica, onde cada etapa é uma oportunidade para revisar e aprofundar o entendimento sobre as práticas pedagógicas relacionadas ao ensino de probabilidade. Essa prática de reflexão se alinha perfeitamente com a hermenêutica gadameriana, que enfatiza a importância do diálogo e da historicidade na interpretação de obras e textos presentes nas tradições científicas.

Ervolino (2023) reafirma que a abordagem hermenêutica filosófica inspirada em Gadamer busca, ao longo de sua trajetória, questionar profundamente as técnicas e métodos empregados, convertendo o processo investigativo em uma prática constante de reflexão filosófica.

A metodologia hermenêutica proposta por Gadamer fundamenta-se na ideia de que o entendimento humano é sempre contextual e relacional, isso significa que a compreensão não

é uma atividade isolada, mas sim um processo que envolve a coexistência contínua entre o sujeito e o objeto de estudo (Kluth, 2005).

Para além disto, Kluth (2005) afirma que, segundo Gadamer, a compreensão deve ser vista como uma fusão de horizontes, na qual o intérprete e o objeto de estudo se encontram em um espaço de troca e transformação. Nesse sentido, de acordo com a autora, Gadamer destaca que o pesquisador não atua como um observador neutro, mas sim como um agente ativo que traz suas próprias pré-compreensões e experiências para o processo interpretativo.

Assim, a pesquisa não se limita a decifrar o significado de um texto, mas busca entender como as tradições e contextos históricos moldam essa interpretação. Ao tomarmos consciência dos efeitos que as mais diversas interpretações produzem, nos aproximamos da coisa da qual o texto fala obtendo uma compreensão mais fidedigna das obras humanas.

O método de Gadamer é, portanto, essencialmente dialético, reconhecendo que a compreensão é um processo dinâmico e não linear. Essa abordagem valoriza o papel das perguntas como um meio essencial de explorar o significado que o texto transmite sobre o objeto pesquisado. O processo hermenêutico é visto como um ciclo contínuo que entrelaça a pergunta e a sua resposta, onde cada nova compreensão pode levar a perguntas adicionais, promovendo uma investigação mais profunda.

Na prática da pesquisa, a metodologia hermenêutica pode ser aplicada através de um conjunto de passos que envolvem a formulação de perguntas abertas à reflexão. O pesquisador deve estar preparado para ouvir ativamente as respostas e estar disposto a revisitar suas próprias suposições e pré-compreensões (Ervolino, 2023).

Kluth (2005) afirma que na hermenêutica de Gadamer, a estrutura da pergunta e resposta é um elemento central para a compreensão. A autora destaca que "a estrutura lógica da abertura que caracteriza a consciência hermenêutica é fundamental, pois em toda experiência encontra-se pressuposta a estrutura da pergunta" (Kluth, 2005, p. 16). Isso indica que a pergunta não é apenas um meio de busca de informações, mas uma estrutura que orienta a compreensão e a interpretação.

Dessa forma, na abordagem hermenêutica de Gadamer, a investigação do objeto e a transformação do pesquisador compõem um processo único e essa dinâmica hermenêutica potencializa a produção de conhecimento, além de ampliar a compreensão do fenômeno em seu contexto histórico. Para trabalhar com a metodologia gadameriana, é importante adotar uma postura reflexiva e dialógica. Isso envolve estar aberto a novas interpretações e a considerar

diferentes perspectivas. O pesquisador deve se engajar em um processo de diálogo com o objeto de estudo.

Como visto em Kluth (2005), a hermenêutica filosófica de Gadamer oferece um quadro teórico que valoriza a interrogação como um elemento essencial na construção do conhecimento. Nesse contexto, a investigação se torna um processo dinâmico, onde a formulação de perguntas não é apenas um passo inicial, mas um guia que orienta todo o percurso da pesquisa. A prática de questionar permite que o pesquisador se envolva em uma conversação autêntica, onde as respostas não são meramente conclusões, mas sim partes de um diálogo contínuo que revela significados.

Kluth (2005), à luz de Gadamer, afirma que esse movimento de questionamento e resposta é fundamental para a compreensão no pesquisar, pois cada pergunta suscita novas reflexões e abre caminhos para compreensão mais profundas. A disciplina de perguntar, portanto, não é um exercício isolado, mas uma prática rigorosa que promove uma interação dialética entre o intérprete e o objeto de estudo. O pesquisador conclui o processo capaz de apresentar tanto os resultados da investigação quanto às mudanças em sua compreensão e perspectiva desenvolvidas durante o estudo.

Esta pesquisa, portanto, enfatiza a importância de um diálogo contínuo entre fundamentação metodológica e a prática do método da pesquisa, e a necessidade de reflexões constantes sobre como a abordagem escolhida pode evoluir para atender melhor às demandas da pesquisa em torno do ensino e aprendizagem da probabilidade. A hermenêutica gadameriana se apresenta como uma estrutura necessária para a construção desta pesquisa, uma vez que através do diálogo entre o pesquisador e o objeto de estudo, será possível desvendar as dimensões da modelagem matemática e suas implicações pedagógicas.

Para atingir tal intento, assumindo a fundamentação apresentada, o método da pesquisa revelou-se, em sua execução, como uma busca de respostas às perguntas subjacentes à interrogação norteadora: “Como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da modelagem na educação matemática contribuem para o ensino de probabilidade?”, e a elas mesmas, expressas em textos que se apresentaram como resposta. Assim, a leitura dos textos foi guiada pelas perguntas em busca de respostas, elaborando resumos que trouxeram os indícios investigados pela pesquisa, para que, posteriormente, esses indícios fossem articulados em um texto que respondesse à pergunta norteadora. A título de exemplificação desse procedimento metodológico, apresenta-se, no Apêndice A, um dos resumos produzidos.

4 COMPREENDENDO OS PRINCÍPIOS E PROPÓSITOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA PROBABILIDADE

Nesta seção, introduziremos alguns princípios básicos da modelagem matemática. Bassanezi (2002) a descreve como um processo dinâmico voltado para a criação e validação de modelos, possibilitando a abstração e a generalização de fenômenos para a previsão de comportamentos, que busca converter aspectos da realidade em estruturas matemáticas, de modo que suas soluções possam ser compreendidas e aplicadas no contexto original.

Mais do que traduzir a realidade para termos matemáticos, a modelagem matemática permite examiná-la e interpretá-la mediante uma estrutura lógica. A transformação de aspectos do mundo real em modelos matemáticos possibilita a interpretação de relações, a identificação de padrões e a previsão de comportamentos, ampliando as possibilidades de aplicação prática em diferentes contextos.

4.1 O QUE É UM MODELO MATEMÁTICO?

Para Bassanezi (2002), um modelo pode ser classificado em modelo objeto e o modelo teórico. O modelo objeto é uma representação física ou material de um sistema ou fenômeno, utilizado para simular ou reproduzir o comportamento de um objeto real, permitindo a observação e análise de suas características em um formato tangível.

Bassanezi (2002) diz que o modelo teórico é uma construção abstrata que utiliza conceitos matemáticos e lógicos para descrever relações e comportamentos entre variáveis. Esses modelos são frequentemente empregados para formular e testar hipóteses sobre fenômenos naturais, como no caso da dinâmica populacional ou em reações químicas.

A escolha entre utilizar um modelo objeto ou teórico depende do contexto do estudo e do fenômeno em análise. Ambos, entretanto, são essenciais para a construção do conhecimento científico e a validação de teorias, contribuindo significativamente para a compreensão e a modelagem da realidade.

No âmbito da Matemática, os modelos podem assumir um papel central, sendo considerados ferramentas poderosas para traduzir situações do mundo real em estruturas lógicas e organizadas. Segundo Bassanezi (2002),

o objetivo fundamental do “uso” de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a

Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (Bassanezi, 2002, p. 18).

A ideia de "economia de linguagem" destaca como a Matemática pode expressar conceitos complexos de forma precisa e concisa, eliminando ambiguidades, o que facilita a comunicação entre pesquisadores, mas também amplia sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento.

Chegamos, portanto, ao modelo matemático, cuja definição de Bassanezi (2002, p. 20) é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Bassanezi (2002) define a importância do modelo matemático:

consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas (Bassanezi, 2002, p. 20).

Bassanezi (2002) resume o processo de modelagem como “uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências, que consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. Ressalta-se que a modelagem, segundo Bassanezi (2002), se torna eficiente quando reconhecemos que estamos sempre lidando com aproximações da realidade, isto é, trabalhando com representações simplificadas de um sistema ou de partes dele.

Essas abordagens mantêm o rigor matemático necessário, ainda que admitam a dificuldade de precisão absoluta em fenômenos complexos. Além de resolver problemas estabelecidos, a modelagem se revela igualmente valiosa para identificar novas questões e propor hipóteses originais.

Sobre o processo de modelagem, ele pode ser dividido em etapas principais: identificação do problema, formulação do modelo, análise e validação (Bassanezi, 2020). Na identificação do problema, busca-se compreender a situação real a ser modelada e determinar as questões que se deseja responder. A formulação do modelo envolve a tradução dessa situação para uma linguagem matemática, selecionando variáveis, parâmetros e relações adequadas. A etapa de análise consiste na solução do modelo por meio de técnicas analíticas ou numéricas, enquanto a validação verifica a coerência dos resultados em relação à realidade observada (Bassanezi, 2020).

Ademais, a interação entre os modelos matemáticos e os dados empíricos permite refinar continuamente as representações e melhorar sua precisão. Isso exemplifica a natureza iterativa da modelagem matemática, que evolui em resposta às necessidades de compreensão e predição de fenômenos complexos (Bassanezi, 2020).

Em suma, a modelagem matemática pode interpretar e prever fenômenos naturais enquanto integra teoria e prática, impulsionando avanços científicos e tecnológicos em múltiplas áreas.

4.2 TIPOS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS

Os modelos probabilísticos são ferramentas matemáticas utilizadas para descrever situações em que há incerteza. De forma geral, esses modelos podem ser classificados em duas categorias principais: discretos e contínuos. Esta distinção está relacionada à natureza das variáveis aleatórias que representam os fenômenos de interesse.

Uma variável aleatória é uma função matemática que associa a cada resultado de um experimento aleatório um valor numérico. Em outras palavras, é uma variável cujo valor é determinado de maneira incerta, dependendo de um fenômeno que ocorre de forma imprevisível, mas que segue uma distribuição probabilística conhecida.

Segundo Ross (2010), um modelo probabilístico é considerado discreto quando as variáveis aleatórias envolvidas assumem valores em um conjunto finito de resultados. O autor cita como exemplos clássicos, o resultado de um lançamento de dado, o número de telefonemas recebidos em uma central em uma hora e o número de clientes atendidos em um supermercado em um dia. A Tabela 1 resume os principais modelos probabilísticos discretos:

Tabela 1: Resumo dos modelos probabilísticos discretos

Modelo	Definição	Função de Probabilidade	Média e Variância
Bernoulli	Representa o resultado de um único experimento de Bernoulli, que resulta em sucesso (1) ou fracasso (0).	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	Média: $E[X] = p$ Variância: $Var(X) = p(1 - p)$
Binomial	Modela o número de sucessos em tentativas independentes de um experimento de Bernoulli, cada uma com a mesma probabilidade de sucesso p .	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	Média: $E[X] = np$ Variância: $Var(X) = np(1 - p)$
Poisson	Modela o número de eventos que acontecem em um intervalo fixo de tempo ou espaço, com uma taxa média λ .	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Média: $E[X] = \lambda$ Variância: $Var(X) = \lambda$
Geométrica	Modela o número de tentativas necessárias até o primeiro sucesso em um experimento de Bernoulli.	$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$	Média: $E[X] = \frac{1}{p}$ Variância: $Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$
Binomial Negativa	Modela o número de tentativas necessárias para obter r sucessos em experimentos de Bernoulli.	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$	Média: $E[X] = \frac{r}{p}$ Variância: $Var(X) = \frac{r(1 - p)}{p^2}$
Hipergeométrica	Modela o número de sucessos em n tentativas de extração de uma população finita, sem reposição.	$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Média: $E[X] = n \frac{K}{N}$ Variância: $Var(X) = n \frac{K}{N} (1 - \frac{K}{N}) \frac{N-n}{N-1}$

Fonte: Ross (2010)

Ross (2010) define que um modelo probabilístico é considerado contínuo quando as variáveis aleatórias assumem valores em um conjunto não enumerável, tipicamente um intervalo de números reais. Exemplos de variáveis aleatórias contínuas incluem a altura de indivíduos em

uma população, a temperatura em determinado dia e o tempo até a falha de um equipamento. A Tabela 2 apresenta um resumo dos modelos probabilísticos contínuos:

Tabela 2: Resumo dos modelos probabilísticos contínuos

Distribuição	Características	Uso Comum
Uniforme	Todos os valores em um intervalo têm a mesma probabilidade.	Modelar situações em que cada resultado é igual de provável.
Normal	Forma de sino, média e variância definem sua forma. Muitas variáveis naturais se comportam de maneira normal.	Fenômenos naturais, medições, erros de amostragem.
Exponencial	Modela o tempo entre ocorrências de um evento em um processo de Poisson.	Análise de tempos de espera e eventos esporádicos.
Gama	Generalização da distribuição exponencial, depende de dois parâmetros (k e λ).	Tempos de espera em processos com múltiplas fases.
Beta	Definida no intervalo $[0, 1]$, com dois parâmetros que permitem ajustar a forma da distribuição.	Modelagem de proporções e probabilidades.
Chi-quadrado	Distribuição de variáveis que são quadrados de variáveis normais. Dependente de graus de liberdade.	Testes de hipóteses e intervalos de confiança.
<i>Student</i>	Semelhança com a distribuição normal, mas com caudas mais pesadas, o que a torna apropriada para amostras pequenas.	Inferência estatística, especialmente com amostras pequenas.

Fonte: Ross (2010)

A escolha entre modelos discretos ou contínuos depende do contexto da pesquisa e da natureza dos dados em questão. Modelos discretos são utilizados quando os dados são contáveis ou podem ser agrupados em categorias distintas, enquanto os modelos contínuos são mais apropriados quando se trabalha com variáveis que assumem um número infinito de valores possíveis dentro de um intervalo. Portanto, a decisão entre usar um modelo discreto ou contínuo deve ser guiada pela forma como os dados se comportam e o objetivo da análise.

Independentemente de se optar por modelos discretos ou contínuos, todos eles devem ser construídos com base em princípios fundamentais que orientam a modelagem probabilística. Destacam-se a independência, a aditividade, a causalidade e a aleatoriedade.

A independência diz que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, a probabilidade conjunta de X e Y ocorrerem simultaneamente é dada pelo produto de suas probabilidades individuais: $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$. Este conceito é amplamente utilizado em análises onde a simplificação das relações entre variáveis é necessária, permitindo a decomposição de problemas complexos em partes mais gerenciáveis (Ross, 2010).

A aditividade refere-se à propriedade de eventos mutuamente exclusivos na probabilidade. Quando dois eventos A e B não podem ocorrer ao mesmo tempo, a probabilidade de que um ou outro evento ocorra é simplesmente a soma das probabilidades de cada um: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Essa propriedade proporciona uma maneira intuitiva de calcular probabilidades em cenários onde múltiplos resultados são possíveis, destacando a estrutura lógica na quantificação da incerteza (Ross, 2010).

A causalidade é um princípio que lida com a relação de causa e efeito entre variáveis. Em contexto probabilístico, muitas vezes é difícil distinguir entre correlação e causalidade; entretanto, a modelagem probabilística busca identificar essas relações para entender como mudanças em uma variável podem impactar outra (Ross, 2010).

Por fim, a aleatoriedade é a caracterização do comportamento imprevisível dos eventos e valores das variáveis aleatórias. Ela sugere que nem todos os comportamentos podem ser determinados com certeza, refletindo a complexidade das situações do mundo real. Em um contexto probabilístico, a aleatoriedade é formalizada através de distribuições de probabilidade, que descrevem todas as possíveis saídas de um experimento e a probabilidade associada a cada uma (Ross, 2010).

De maneira geral, a compreensão desses quatro princípios — independência, aditividade, causalidade e aleatoriedade — é de extrema importância para a criação de modelos probabilísticos eficientes.

4.3 A PROBABILIDADE COMO SUBÁREA DA MATEMÁTICA

A probabilidade é uma área interessante da Matemática Aplicada, pois permite compreender e quantificar a incerteza em diversos contextos: desde situações do cotidiano, como a previsão do tempo, até aplicações mais complexas, como a análise de riscos em investimentos

financeiros, ela desempenha um papel essencial na tomada de decisões. Seu estudo oferece ferramentas para entender melhor o mundo ao nosso redor, promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico.

Uma das palavras frequentemente associadas à probabilidade é o “acaso”, cuja definição, conforme o dicionário, é “ocasião imprevista que produz um fato”. Viali (2008, p. 144) traz algo mais preciso: “o denominado “acaso” é um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno”.

Podemos explicar a definição de Viali (2008) com um exemplo simples: no lançamento de uma moeda honesta¹, existem apenas duas opções de resultado, cara ou coroa, mas não é possível controlar quando acontecerá uma ou outra. Ou seja, não há nada o que se possa fazer, para determinar quando acontecerá o evento “cara” ou o evento “coroa”.

Segundo Coutinho (2007), a ideia inicial de acaso, especialmente em relação a jogos de azar, está intrinsecamente ligada ao entendimento do aleatório como um fenômeno que escapa ao controle humano. Nos primórdios, os jogos de azar, como os jogos de dados e astrágalos (um dos primeiros instrumentos utilizados em jogos de azar na Antiguidade), eram praticados com um caráter místico ou psicológico, refletindo a crença de que os resultados eram manifestações da vontade divina ou forças sobrenaturais. Essa perspectiva tornava o cálculo das probabilidades um tabu, pois desafiava a ordem percebida do cosmos, que era frequentemente associada a Deus (Coutinho, 2007).

Um serviço que é muito comum, os seguros comerciais, de saúde, entre outros, é bastante antigo e tem relação direta com a probabilidade. Viali (2008, p. 145) comenta que a história dos seguros remonta às práticas dos comerciantes mesopotâmicos e fenícios, que inicialmente buscavam proteger suas cargas contra naufrágios e roubos. Esta prática evoluiu com os romanos e gregos, ganhando destaque no mundo moderno com os comerciantes marítimos italianos. Embora se saiba pouco sobre as técnicas matemáticas utilizadas por essas antiguidades, especula-se que elas baseavam suas estimativas em dados empíricos sobre a probabilidade de acidentes (Viali, 2008).

¹ Uma moeda honesta é aquela que não apresenta viés, ou seja, cada uma de suas faces tem probabilidade igual de 50% de ocorrer em um lançamento. Esse conceito é fundamental na teoria das probabilidades, embora, na prática, pequenas imperfeições na moeda ou na forma de lançamento possam afetar ligeiramente essa simetria.

Viali (2008) dividiu a evolução da Teoria das Probabilidades em quatro momentos: nascimento, infância, adolescência e vida adulta. Até o presente momento, tratamos do nascimento, dentro da definição do autor.

Para o autor, a infância da Teoria das Probabilidades caracteriza-se pelo emergente desenvolvimento e pela incorporação de princípios matemáticos. Durante este período, matemáticos como Girolamo Cardano começaram a aplicar raciocínios probabilísticos a problemas relacionados a jogos, estabelecendo um diálogo entre a prática e a teoria, ainda que de forma empírica e o foco principal estava na resolução de questões práticas.

Lopes e Meirelles (2005) afirmam, sobre Cardano, que

Cardano é considerado iniciador da Teoria das Probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis (Lopes; Meirelles, 2005, p. 1).

De acordo com Viali (2008), a adolescência da Teoria das Probabilidades é notável por um avanço significativo na formalização de conceitos centrais e na sistematização de seus fundamentos. Contribuições de Jacques Bernoulli e Pierre-Simon Laplace, introduziram os primeiros teoremas clássicos, como a Lei dos Grandes Números, que estabeleceu conexões importantes entre a frequência relativa de eventos e as suas probabilidades subjacentes.

Por fim, Viali (2008) define a vida adulta da Teoria das Probabilidades, que se consolidou no século XX, como marcada pela adoção da abordagem axiomática, a qual instaurou fundamentos rigorosos para o cálculo probabilístico. Transformou-se em um campo da Matemática Aplicada, expandindo suas fronteiras a diversas disciplinas.

4.4 AS VISÕES SOBRE A PROBABILIDADE

De acordo com Ross (2010), a visão clássica da probabilidade é um dos fundamentos da teoria das probabilidades, que se baseia na ideia de que todos os resultados possíveis de um experimento são igualmente prováveis. Essa abordagem é particularmente útil em situações discretas e bem definidas, como o lançamento de uma moeda ou de um dado, onde cada resultado tem a mesma chance de ocorrer.

A probabilidade de um evento é calculada pela razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis, expressa pela fórmula:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados}}$$

Por exemplo, ao lançar um dado honesto, a probabilidade de obter um número par (2, 4 ou 6) é de $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Para Ross (2010), no entanto, a visão clássica da probabilidade apresenta limitações, especialmente em cenários onde os resultados não são igualmente prováveis ou em eventos mais complexos. Em tais casos, a aplicação da probabilidade clássica pode levar a conclusões imprecisas. Por exemplo, em jogos de cartas ou em situações envolvendo variáveis contínuas, a distribuição dos resultados pode não ser uniforme, exigindo abordagens mais sofisticadas, como a probabilidade frequentista ou bayesiana. Essas abordagens consideram a frequência relativa de eventos em experimentos repetidos ou a atualização de crenças com base em novas evidências, ampliando assim a compreensão e a aplicação da probabilidade em contextos mais variados e complexos.

Ross (2010) também trata da visão frequentista da probabilidade, que é fundamentada na ideia de que a probabilidade de um evento é definida pela frequência relativa com que esse evento ocorre em muitos experimentos independentes. Essa abordagem enfatiza a repetição de experimentos e a coleta de dados empíricos, permitindo que a probabilidade seja estimada a partir de observações.

Por exemplo, ao lançar um dado muitas vezes, a probabilidade de obter um número específico pode ser calculada como a razão entre o número de vezes que esse número aparece e o total de lançamentos. Essa perspectiva é amplamente utilizada em estatísticas e inferência, onde a probabilidade é vista como uma propriedade do processo de geração de dados, e não como uma característica intrínseca do evento em si.

De acordo com Ross (2010), a abordagem frequentista é frequentemente aplicada em testes de hipóteses, onde a probabilidade é utilizada para avaliar a evidência contra uma hipótese nula. A inferência frequentista se baseia em amostras e utiliza métodos como intervalos de confiança e testes estatísticos para fazer afirmações sobre populações a partir de dados amostrais. O autor destaca que a abordagem também tem suas limitações, especialmente em situações em que não é viável realizar experimentos repetidos ou quando se lida com eventos únicos.

A visão frequentista, portanto, fornece uma estrutura importante para a análise estatística, mas pode não capturar completamente a incerteza em contextos em que a informação prévia é relevante ou onde os dados são escassos.

Por fim, conforme Ross (2010), a visão subjetiva da probabilidade é uma abordagem que considera a probabilidade como uma medida da crença ou confiança de um indivíduo em relação à ocorrência de um evento. Ela permite que cada pessoa avalie a probabilidade de um evento com base em suas experiências, conhecimentos e informações disponíveis.

Essa abordagem reconhece que diferentes indivíduos podem ter diferentes graus de crença sobre a probabilidade de um evento, refletindo a natureza pessoal e contextual da avaliação da incerteza. Por exemplo, quando um médico estima a recuperação de um paciente com um ferimento na perna após uma queda de bicicleta. Essa estimativa é subjetiva e depende muito de todos os casos que o profissional já viu.

As diferenças entre as visões clássica, frequentista e subjetiva da probabilidade estão relacionadas à forma como cada uma aborda a incerteza e aos contextos em que são mais adequadas. A visão clássica assume resultados igualmente prováveis e se limita a situações bem definidas, enquanto a frequentista se baseia em dados empíricos obtidos por experimentos repetidos, destacando-se em análises estatísticas. Já a subjetiva difere das outras por permitir avaliações personalizadas, dependendo de crenças individuais, o que a torna mais flexível, mas também mais variável.

Enquanto a abordagem clássica apresenta limitações em cenários complexos, e a frequentista exige repetição e grandes volumes de dados, a subjetiva se adapta a contextos de incerteza ou falta de informação, mas carece de uniformidade. Assim, as diferenças entre elas refletem as necessidades específicas de cada situação: precisão matemática na clássica, fundamentação empírica na frequentista e flexibilidade interpretativa na subjetiva.

Dada a abrangência de abordagens e aplicações da probabilidade, ela torna-se imprescindível na formação humana, com presença marcante nos currículos escolares.

4.5 EXEMPLOS DE TRABALHOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA QUE ENVOLVEM PROBABILIDADE

A modelagem matemática fundamentada em conceitos de probabilidade tem se revelado uma estratégia eficaz para a análise e previsão de fenômenos em diferentes áreas do conhecimento. A seguir, apresentam-se cinco estudos que exemplificam distintas formas de aplicação da

probabilidade em contextos reais, abrangendo desde a agricultura até o esporte e a educação. Tais investigações evidenciam o potencial da modelagem probabilística como ferramenta de análise, tomada de decisão e mediação didática.

O estudo de Barros (2017) investiga a probabilidade de frutificação em plantas de café Arábica a partir da ocupação de metâmeros, considerando variáveis como o espaçamento entre plantas, o tipo de ocupação (quadrática ou retangular) e o tamanho do entrenó. A análise baseia-se na utilização de modelos de regressão logística, os quais permitem estimar a chance de ocorrência da frutificação em função das variáveis envolvidas. Esses modelos, ao relacionarem variáveis categóricas e contínuas com uma variável resposta binária (frutificou ou não), são essenciais para a compreensão dos fatores que afetam a produtividade. Dessa forma, a aplicação de métodos probabilísticos neste contexto tem como objetivo principal a redução de incertezas no processo produtivo, viabilizando a otimização de decisões agrônômicas mediante fundamentação estatística robusta.

Freitas *et al.* (2005) utilizaram a Teoria das Probabilidades para estudar o crescimento do rebanho bovino brasileiro entre 1983 e 2000, com o objetivo de estimar a chance de atingir uma população de 200 milhões de cabeças até 2015. A modelagem foi feita com base nas cadeias de Markov, que possibilitam calcular as probabilidades de transição entre diferentes estados populacionais ao longo do tempo, assumindo taxas de abate constantes. O modelo aplicado estima a dinâmica populacional do rebanho e os intervalos temporais das transições, fornecendo bases probabilísticas para o planejamento pecuário e a elaboração de estratégias de manejo.

A pesquisa de Ramos, Lemos e Batista (2021) aplica a distribuição de Poisson para modelar o número de gols em partidas de futebol, assumindo que a quantidade de gols por time, em cada jogo, é uma variável aleatória que segue essa distribuição. A escolha da Poisson se justifica por sua adequação a eventos raros e discretos em intervalos de tempo fixos, no caso, os gols marcados em 90 minutos de jogo. O modelo desenvolvido foi aplicado a 250 jogos da Série A de 2018 e validado por meio da medida de DeFinetti, que indicou boa capacidade preditiva. A probabilidade é, nesse caso, usada para estimar a chance de ocorrência de diferentes resultados, oferecendo uma ferramenta quantitativa para prever desfechos esportivos com base em dados históricos.

Freitas (2019) realiza uma análise crítica das probabilidades divulgadas pela Lotogol, destacando como essas estimativas podem ser distorcidas em relação aos resultados reais dos jogos. Em resposta a essas limitações, o autor propõe o uso da distribuição de Poisson como alternativa para calcular as probabilidades de diferentes placares, considerando variáveis como

o mando de campo e a força das equipes. A probabilidade é explorada tanto como conteúdo matemático quanto como objeto de reflexão crítica, o que permite sua apropriação em contextos educativos. A proposta didática, voltada ao Ensino Médio, utiliza esses modelos como base para atividades práticas que envolvem o cálculo de probabilidades e a análise combinatória, incentivando a compreensão conceitual dos estudantes a partir de um tema motivador como o futebol.

Por fim, Ferreira (2015) propõe o uso dos jogos de azar, especialmente a Mega Sena, como ponto de partida para o Ensino de probabilidade no Ensino Médio. A aplicação da probabilidade neste contexto ocorre por meio do cálculo de chances em jogos com combinações numéricas, permitindo aos estudantes compreenderem, por exemplo, a baixa probabilidade de acerto em apostas simples. O trabalho apresenta atividades que envolvem o cálculo direto de probabilidades clássicas, análise de experimentos aleatórios e resolução de questões de vestibular. Essa abordagem favorece o entendimento dos fundamentos teóricos da probabilidade, ao mesmo tempo que estimula o pensamento crítico sobre a viabilidade dos jogos de azar, conectando o conteúdo matemático com situações reais e de interesse dos alunos.

Os trabalhos apresentados neste capítulo mostram possibilidades da aplicabilidade da probabilidade como ferramenta de modelagem matemática em diferentes áreas do conhecimento. Seja no contexto agrícola, pecuário, esportivo ou educacional, a probabilidade possibilita a construção de modelos que apoiam a tomada de decisões, a formulação de previsões e o desenvolvimento de propostas pedagógicas. Além disso, esses trabalhos ilustram a relevância da interdisciplinaridade e da contextualização no ensino e na pesquisa em matemática, fortalecendo o vínculo entre teoria e prática e promovendo o desenvolvimento de competências analíticas, críticas e criativas.

4.6 A PROBABILIDADE NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo da Educação Básica no Brasil. Estruturada em competências e habilidades, a BNCC busca garantir a equidade no ensino e a formação integral dos alunos, alinhando a educação às demandas contemporâneas (Brasil, 2017). No âmbito da Matemática, a BNCC destaca a importância do desenvolvimento de competências que possibilitem o uso prático e reflexivo do conhecimento matemático em diferentes contextos sociais e culturais (Brasil, 2017).

A BNCC organiza os conteúdos de Probabilidade e Estatística em torno de objetos de conhecimento e habilidades específicas que evoluem progressivamente ao longo dos anos escolares. Essa abordagem tem o objetivo de proporcionar uma construção gradual e consistente do conhecimento, permitindo que os estudantes desenvolvam desde noções básicas, como leitura de gráficos e tabelas, até habilidades mais complexas, como análise de eventos aleatórios e cálculo de probabilidades.

4.6.1 A probabilidade na BNCC no Ensino Fundamental

A BNCC organiza os objetos de conhecimento e habilidades em probabilidade e estatística de forma progressiva ao longo do Ensino Fundamental.

A Tabela 3 concentra-se especificamente nos anos iniciais (1º ao 5º ano), apresentando as bases conceituais para esse ciclo. Nessa fase, destacam-se habilidades como coleta de dados simples, leitura de gráficos básicos e noções elementares de aleatoriedade. A abordagem prioriza contextos cotidianos e a construção de repertório inicial para o pensamento estatístico. Essa estrutura visa desenvolver a literacia matemática necessária para etapas posteriores de aprendizagem.

Tabela 3: Objetos do Conhecimento e Habilidades segundo a BNCC Matemática (anos iniciais do Ensino Fundamental)

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidades
1º	• Noção de acaso.	• (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
2º	• Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano.	• (EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3º	• Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral.	• (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4º	• Análise de chances de eventos aleatórios.	• (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.

5º	• Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios. • Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.	• (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. • (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
----	--	---

Fonte: Brasil (2017)

Segundo a BNCC, Brasil (2017, p. 276), nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o estudo das Noções de Probabilidade tem como objetivo principal desenvolver a compreensão de que nem todos os fenômenos seguem padrões determinísticos. Nesse contexto, o trabalho inicial com probabilidade é direcionado ao conceito de aleatoriedade, permitindo que os alunos compreendam a existência de eventos certos, impossíveis e prováveis.

No 1º ano, são apresentados conceitos de acaso e classificação de eventos como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer". No 2º ano, a análise da ideia aleatória é aprofundada, classificando eventos como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis". No 3º ano, os alunos identificam todos os resultados possíveis de eventos aleatórios, começando a compreender o conceito de espaço amostral.

Já no 4º ano, os estudantes analisam as chances de eventos aleatórios, identificando aqueles com maior probabilidade de ocorrência, sem o uso de frações. Por fim, no 5º ano, a análise de eventos equiprováveis é explorada, com a apresentação de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, permitindo o cálculo da probabilidade de ocorrência desses resultados, quando todos têm a mesma chance de ocorrer.

À medida que os estudantes avançam em sua formação matemática, a BNCC amplia e aprofunda as exigências cognitivas relacionadas à Probabilidade e Estatística.

A Tabela 4 detalha essa evolução ao apresentar os componentes curriculares previstos para os anos finais (6º ao 9º ano). Nota-se neste segmento uma maior complexidade nas habilidades exigidas, com ênfase na aplicação de conceitos em situações-problema mais elaboradas.

Tabela 4: Objetos do Conhecimento e Habilidades segundo a BNCC Matemática (6º ao 9º ano)

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidades
6º	• Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. • Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	• (EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º	• Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências - Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados.	• (EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º	• Princípio multiplicativo da contagem. • Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	• (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º	• Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	• (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Brasil (2017)

De acordo com a BNCC, Brasil (2017, p. 276), nos Anos Finais, o estudo deve ser expandido e aprofundado por meio de atividades que envolvam a realização de experimentos aleatórios e simulações, permitindo aos alunos compararem os resultados obtidos com a probabilidade teórica, conhecida como probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos ocorre com o aprimoramento da habilidade de enumerar os elementos do espaço amostral, o que também está relacionado à resolução de problemas de contagem.

No 6º ano, os alunos começam a calcular a probabilidade de eventos aleatórios, entendendo-a como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um

espaço amostral equiprovável. Também exploram a probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento, abordando a probabilidade frequentista.

No 7º ano, os estudantes realizam experimentos aleatórios ou simulações para calcular probabilidades, ou estimar probabilidades com base na frequência de ocorrências, além de trabalhar com estatísticas como média e amplitude de conjuntos de dados.

No 8º ano, o ensino envolve o princípio multiplicativo da contagem e a soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral, reconhecendo que essa soma é igual a 1.

Por fim, no 9º ano, os alunos analisam eventos aleatórios independentes e dependentes, aprendendo a calcular as probabilidades de ocorrência desses eventos nos dois casos.

Com a progressão gradual das habilidades ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes desenvolvem competências essenciais para interpretar e representar dados, além de compreender conceitos de Probabilidade.

4.6.2 A Probabilidade na BNCC no Ensino Médio

No estudo da probabilidade, os conceitos de certeza e incerteza são fundamentais, sendo frequentemente associados ao estudo de fenômenos aleatórios e à obtenção de medidas no mundo físico, além de estimativas, análises estatísticas e inferências. Esses conceitos permeiam também argumentações e demonstrações algébricas ou geométricas.

No Ensino Fundamental, os estudantes têm a oportunidade de explorar a Probabilidade de eventos desde os anos iniciais, começando pela construção do espaço amostral de eventos equiprováveis. Para isso, utilizam ferramentas como a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo e simulações, o que permite estimar a probabilidade de sucesso de um evento.

Além disso, a certeza e a incerteza estão presentes em diversas formas de comunicação social, abordando problemas de contagem e formas intuitivas de expressar probabilidades. Essas experiências contribuem para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e para a compreensão das probabilidades em diferentes contextos.

A BNCC para o Ensino Médio aborda a probabilidade enfatizando a construção do espaço amostral de eventos, onde os alunos devem utilizar ferramentas como árvores de possibilidades e simulações para estimar a probabilidade de eventos ocorrerem. Essa prática é fundamental para que os estudantes compreendam as incertezas e variabilidades que fazem parte de diversas situações do cotidiano.

A proposta da BNCC visa conectar a probabilidade às experiências diárias dos alunos, levando em conta suas condições socioeconômicas e realidades. O ensino se direciona para a aplicação prática dos conceitos de probabilidade, capacitando os alunos a interpretar e tomarem decisões informadas com base em dados probabilísticos que encontram em seu cotidiano.

A Tabela 5 apresenta os Objetos de Conhecimento e as Habilidades relacionadas à Unidade Temática Probabilidade e Estatística conforme descritas na BNCC:

Tabela 5: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio

Série	Objetos do Conhecimento	Habilidades
1ª, 2ª e 3ª	• Identificação e representação de situações que envolvem eventos aleatórios utilizando linguagem matemática apropriada. • Reconhecimento de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigação das implicações no cálculo de probabilidades. • Cálculo e interpretação de probabilidades de eventos em diferentes contextos, incluindo o uso de recursos tecnológicos. • Relacionamento da probabilidade com outras áreas do conhecimento, como estatística e ciências, para análise e interpretação de dados.	• (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades. • (EM13MAT501) Identificar e representar situações que envolvem eventos aleatórios, utilizando linguagem matemática apropriada. • (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. • (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades. • (EM13MAT512) Calcular e interpretar probabilidades de eventos em diferentes contextos, inclusive utilizando recursos tecnológicos. • (EM13MAT513) Relacionar a probabilidade com outras áreas do conhecimento, como estatística e ciências, para analisar e interpretar dados. • (EM13MAT514) Propor e realizar experimentos para estimar a probabilidade de eventos, analisando os resultados obtidos.

No Ensino de probabilidade no Ensino Médio, a BNCC propõe um aprofundamento e uma ampliação das habilidades já trabalhadas nas etapas anteriores. Os estudantes são estimulados a aplicar os conhecimentos probabilísticos a situações do cotidiano, explorando suas próprias experiências e as demandas do mundo ao seu redor. Essa abordagem é essencial, pois a compreensão das probabilidades não só contribui para a resolução de problemas matemáticos, mas também desempenha um papel importante na formação de cidadãos críticos e informados.

A BNCC busca desenvolver um pensamento analítico, fundamental para a tomada de decisões, ao incentivar os alunos a modelar e analisar situações que envolvem incertezas. Além disso, são desafiados a formular conjecturas, realizar experimentos e validar suas hipóteses por meio de observações empíricas. Essa prática de explorar como os eventos variam em diferentes cenários ajuda a fortalecer o raciocínio lógico e a argumentação fundamentada.

Com isso, fica claro que a construção do conhecimento em probabilidade vai além da formulação teórica, envolvendo também prática constante e conexão com o cotidiano. Essa conexão da Matemática com a realidade dos alunos, especialmente na área de probabilidade, reflete o objetivo da BNCC de promover competências matemáticas e habilidades essenciais para a vida em sociedade.

No contexto paulista, tanto o currículo estadual quanto o da cidade de São Paulo estão alinhados aos princípios da BNCC, mas com adaptações que atendem às especificidades das realidades locais. O Currículo Paulista, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, propõe uma abordagem abrangente sobre como as habilidades de Matemática devem ser desenvolvidas em cada etapa da educação básica, considerando as necessidades e os desafios enfrentados pelos alunos do estado.

Por outro lado, o Currículo da Cidade de São Paulo apresenta particularidades, como a organização por ciclos, o que o diferencia tanto da BNCC quanto do Currículo Paulista. Nas seções a seguir, exploraremos a sequência de Ensino da Probabilidade ao longo dos anos da Educação Básica, destacando as especificidades de cada currículo e as adaptações para o contexto local.

4.7 A PROBABILIDADE NO CURRÍCULO PAULISTA

O Currículo Paulista segue a estrutura da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, com o objetivo de garantir a formação

integral dos alunos, alinhada às competências e habilidades essenciais para o desenvolvimento acadêmico e para a vida em sociedade.

Para o Ensino Fundamental, o currículo é dividido em anos iniciais (1º ao 5º ano) e anos finais (6º ao 9º ano), seguindo a organização da BNCC, mas com adaptações específicas às realidades locais. No caso do Ensino Médio, o Currículo Paulista também se organiza em três anos (1ª a 3ª série), mantendo a estrutura e os objetivos da BNCC, com ênfase na formação crítica e reflexiva dos estudantes.

O Currículo Paulista é organizado em Unidades Temáticas, dispostas de forma a oferecer uma abordagem integrada e progressiva ao longo do Ensino Fundamental e Médio, facilitando a construção do conhecimento dos alunos. Elas incluem conceitos fundamentais como Equivalência, Ordem, Proporcionalidade, Aproximação e Variação, que são trabalhados de forma a conectar a Matemática com a realidade dos estudantes. Assim, como na BNCC, o Currículo Paulista tem como objetivo assegurar que os estudantes construam uma base sólida de compreensão acadêmica, que se relacione com a prática e as situações do cotidiano.

Ao longo do Ensino Médio, o currículo garante que os alunos se aprofundem em habilidades acadêmicas essenciais, enquanto desenvolvem uma capacidade analítica e crítica, preparando-os para os desafios da vida adulta, seja no campo acadêmico, profissional ou social. Em todas as etapas, a abordagem é voltada para uma formação integral, que vai além do conteúdo acadêmico, promovendo a reflexão e a aplicação prática do conhecimento.

Conforme o Currículo Paulista,

o estudo das noções de probabilidade abordadas no Ensino Fundamental desde os anos iniciais propõe um trabalho centrado na compreensão de que há eventos certos, impossíveis e prováveis, permitindo o desenvolvimento da noção de aleatoriedade e da compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos (São Paulo, 2019a, p. 233).

Ainda de acordo com o documento,

[...] nos Anos Finais, o estudo é ampliado e aprofundado de forma a aprimorar a capacidade de compreensão dos elementos do espaço amostral, associados aos problemas de contagem, e a permitir a realização, pelos estudantes, de atividades que envolvem os experimentos aleatórios realizados (São Paulo, 2019a, p. 233).

A Unidade Temática de Probabilidade e Estatística é importante, pois capacita os estudantes a lidarem com a interpretação e a representação de dados, habilidades essenciais para o Letramento Matemático (São Paulo, 2019a). A unidade aborda a coleta, organização e análise

de informações, permitindo que os alunos desenvolvam competências para construir tabelas e gráficos que representem os dados de forma clara e precisa.

Além disso, os estudantes são incentivados a realizar pesquisas sobre temas de interesse, o que os ajuda a aplicar conceitos estatísticos em contextos reais, explorando noções de acaso e incerteza e promovendo a compreensão de eventos aleatórios por meio de experimentos e observações.

4.7.1 A probabilidade no Currículo Paulista do Ensino Fundamental

A Tabela 6 apresenta os Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Tabela 6: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos Anos Iniciais

Ano	Objetos do Conhecimento
1º ano	• Noção de acaso.
2º ano	• Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano.
3º ano	• Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral.
4º ano	• Análise de chances de eventos aleatórios.
5º ano	• Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios. • Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.

Fonte: São Paulo (2019a)

Essa progressão no ensino da probabilidade segue a Base Nacional Comum Curricular. No 1º ano, os alunos iniciam a compreensão da noção de acaso ao explorar eventos do cotidiano e registrar informações coletadas. No 2º ano, começam a analisar a ideia de aleatoriedade em diferentes situações. No 3º ano, essa aprendizagem se expande com a introdução do conceito de espaço amostral, permitindo que reconheçam e representem diferentes possibilidades de um evento. No 4º ano, a análise das chances de eventos aleatórios é aprofundada, auxiliando na

interpretação da ocorrência de diferentes resultados. Por fim, no 5º ano, os alunos passam a calcular probabilidades de eventos equiprováveis, consolidando sua compreensão sobre o conceito de chance e sua aplicação em diferentes contextos.

A Tabela 7 apresenta os Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Tabela 7: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística nos Anos Iniciais

Ano	Objetos do Conhecimento
6º ano	• Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em espaço amostral equiprovável. • Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).
7º ano	• Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.
8º ano	• Princípio multiplicativo da contagem. • Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.
9º ano	• Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

Fonte: São Paulo (2019a).

Nos Anos Finais, a progressão no Ensino de probabilidade também segue a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No 6º ano, os estudantes aprendem a calcular a probabilidade de eventos equiprováveis, compreendendo a relação entre casos favoráveis e o total de possibilidades. No 7º ano, ampliam o estudo de experimentos aleatórios e espaço amostral, estimando probabilidades com base na frequência de ocorrências observadas. No 8º ano, aprofundam a compreensão do princípio multiplicativo da contagem e da soma das probabilidades dentro de um espaço amostral. Finalizando, no 9º ano, analisam a probabilidade de eventos dependentes e independentes, desenvolvendo uma visão mais crítica sobre a aleatoriedade e sua aplicação em diferentes contextos.

4.7.2 A probabilidade no Currículo Paulista do Ensino Médio

A Tabela 8 apresenta os Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio:

Tabela 8: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio

Série	Objetos do Conhecimento	Habilidades
1 ^a , 2 ^a e 3 ^a	• Probabilidade simples e condicional. Eventos sucessivos, mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos. • Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável). Contagem de possibilidades. Cálculo de probabilidades simples. • Eventos dependentes e independentes. Cálculo de probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos. • Probabilidade. Espaços amostrais discretos ou contínuos. Eventos equiprováveis ou não equiprováveis.	• (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.). • (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. • (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. • (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades. • (EM13MAT512) Calcular e interpretar probabilidades de eventos em diferentes contextos, inclusive utilizando recursos tecnológicos. • (EM13MAT513) Relacionar a probabilidade com outras áreas do conhecimento, como estatística e ciências, para analisar e interpretar dados. • (EM13MAT514) Propor e realizar experimentos para estimar a probabilidade de eventos, analisando os resultados obtidos.

Fonte: São Paulo (2019a).

No Ensino Médio, inicialmente, os alunos exploram conceitos fundamentais, como probabilidade simples e condicional, identificação de eventos sucessivos, mutuamente

exclusivos e não mutuamente exclusivos, além do cálculo de probabilidades em experimentos aleatórios. A compreensão da estrutura do espaço amostral, eventos equiprováveis e contagem de possibilidades permite que os estudantes desenvolvam habilidades matemáticas essenciais para interpretar e quantificar a incerteza.

Além disso, o Currículo Paulista enfatiza a aplicação da probabilidade em situações do cotidiano, alinhando-se às diretrizes da BNCC ao incentivar a análise de riscos probabilísticos. Os alunos também são estimulados a reconhecer diferentes tipos de espaços amostrais, sejam discretos ou contínuos, e a utilizar recursos tecnológicos para calcular e interpretar probabilidades em diversos contextos. Além disso, a abordagem pedagógica valoriza a experimentação e investigação, incentivando os estudantes a realizarem experimentos para estimar probabilidades e analisar os resultados obtidos, consolidando assim uma compreensão prática e significativa dos conceitos probabilísticos.

Na próxima seção, analisaremos como a probabilidade é abordada no Currículo da Cidade de São Paulo, destacando suas diretrizes, objetivos de aprendizagem e estratégias pedagógicas. Exploraremos de que maneira esse currículo estrutura o ensino dos conceitos probabilísticos, considerando a contextualização, a interdisciplinaridade e a aplicação prática no cotidiano dos estudantes.

4.8 A PROBABILIDADE NO CURRÍCULO DA CIDADE DE SÃO PAULO

No currículo de matemática da cidade de São Paulo (Currículo da Cidade), a probabilidade é abordada de maneira progressiva, começando com noções básicas e avançando para conceitos mais elaborados. a organização é feita em ciclos de três anos: no Ensino Fundamental - alfabetização (1º ao 3º ano), interdisciplinar (4º ao 6º ano) e autoral (7º ao 9º ano) - e o Ensino Médio (1ª a 3ª série).

Tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, a proposta curricular é dividida em eixos estruturantes e, conforme definido no documento, organizam os objetos de conhecimento de forma a proporcionar uma abordagem integrada e progressiva. Esses eixos incluem números, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística, e álgebra, cada qual abordando aspectos específicos da matemática de acordo com a faixa etária e as capacidades de aprendizagem dos estudantes.

De acordo com o Currículo da Cidade,

[...] no eixo Probabilidade e Estatística, o documento propõe um trabalho de relevância no mundo atual, incentivando os estudantes a fazerem pesquisas, que envolvam coleta, organização e análise de dados e a comunicação dos resultados por meio de diferentes tipos de gráficos e tabelas. O documento sugere identificar e analisar eventos aleatórios, reconhecendo características de resultados mais prováveis e resolver problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Nesse eixo, as ideias fundamentais da Matemática associadas são a variação, a interdependência, a ordem, a representação, a equivalência, entre outras (São Paulo, 2019b, p. 77-78).

O eixo de probabilidade e estatística enfatiza a relevância de preparar os alunos para um mundo em que a informação desempenha um papel importante. O currículo vai além do desenvolvimento de competências matemáticas, buscando também formar cidadãos conscientes, aptos a tomar decisões informadas em contextos complexos e dinâmicos. Essa abordagem promove a análise crítica e a resolução de problemas, habilidades essenciais para o desenvolvimento em um ambiente repleto de dados e informações.

4.8.1 A probabilidade no Currículo da Cidade de São Paulo - Ensino Fundamental

Nesta seção, apresentaremos como a probabilidade é abordada ao longo do Ensino Fundamental no Currículo da Cidade de São Paulo. O estudo da probabilidade segue uma trajetória progressiva, começando com conceitos iniciais de acaso e aleatoriedade e avançando gradualmente para tópicos mais complexos, como espaço amostral, princípio multiplicativo e cálculo de probabilidades em eventos compostos.

A Tabela 9 apresenta os objetos do conhecimento do eixo probabilidade e estatística no ciclo de alfabetização:

Tabela 9: Objetos do conhecimento do eixo probabilidade e estatística no ciclo de alfabetização

Ano	Objetos do Conhecimento
1º ano	• Noção de acaso
2º ano	• Ideias de acaso em situações do cotidiano
3º ano	• Identificação da ideia de aleatoriedade em situações do cotidiano

Fonte: São Paulo (2019b).

O desenvolvimento das habilidades descritas para o ciclo de alfabetização do Ensino Fundamental no eixo probabilidade e estatística promove o entendimento progressivo de conceitos fundamentais, como a ideia de acaso.

No 1º ano, os estudantes são introduzidos ao conceito de acaso, explorando noções iniciais de eventos imprevisíveis e reconhecendo situações em que os resultados ocorrem de maneira não determinada. No 2º ano, começam a diferenciar eventos certos, prováveis e impossíveis, relacionando essas ideias ao cotidiano. No 3º ano, avançam para a compreensão de experimentos aleatórios, analisando diferentes possibilidades de resultados e desenvolvendo a ideia de que alguns eventos ocorrem com maior ou menor frequência.

Essa progressão permite a construção do pensamento probabilístico desde os primeiros anos, ajudando os alunos a compreenderem a incerteza de forma estruturada e aplicá-la em diversas situações do dia a dia.

A abordagem progressiva contribui para o desenvolvimento do letramento estatístico, capacitando os alunos a compreenderem e utilizarem informações quantitativas de forma significativa, aplicando-as a contextos reais e contribuindo para a formação de cidadãos mais críticos e conscientes.

A Tabela 10 apresenta os objetos do conhecimento do eixo probabilidade e estatística no ciclo interdisciplinar:

Tabela 10: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ciclo Interdisciplinar

Ano	Objetos do Conhecimento
4º ano	• Chances de ocorrência em eventos aleatórios
5º ano	• Análise de chances de eventos aleatórios • Problemas envolvendo o cálculo probabilidade de eventos equiprováveis
6º ano	• Cálculo de probabilidade

Fonte: São Paulo (2019b).

No Ciclo Interdisciplinar, há ampliação das competências relacionadas ao entendimento de eventos aleatórios. No 4º ano, os estudantes exploram a ideia de chances em eventos aleatórios,

classificando eventos como mais ou menos prováveis e identificando situações de equiprobabilidade em diferentes contextos. No 5º ano, avançam para o cálculo de probabilidades em eventos equiprováveis, utilizando frações simples para representar a chance de ocorrência de um evento e comparando diferentes possibilidades de resultados. No 6º ano, o estudo da probabilidade se torna mais sistemático, incluindo a aplicação da regra do número total de casos possíveis e favoráveis, permitindo um raciocínio mais estruturado sobre a incerteza e a previsão de eventos.

Esse percurso garante que os alunos compreendam os fundamentos da probabilidade matemática, desenvolvendo habilidades para analisar e comparar diferentes cenários de incerteza, aplicando esse conhecimento de forma crítica e contextualizada.

A Tabela 11 apresenta os Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ciclo Interdisciplinar:

Tabela 11: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ciclo Autoral

Ano	Objetos do Conhecimento
7º ano	• Espaço amostral • Probabilidade
8º ano	• Probabilidade de eventos e construção de espaço amostral • Princípio multiplicativo
9º ano	• Problemas envolvendo espaço amostral e probabilidade de ocorrência de eventos • Planejamento, execução e relatório de pesquisa amostral

Fonte: São Paulo (2019b).

No 7º ano, os alunos são introduzidos ao conceito de espaço amostral e aos fundamentos da probabilidade, explorando a contagem dos possíveis resultados de um experimento aleatório e diferenciando eventos simples e compostos. No 8º ano, aprofundam seus conhecimentos com a introdução do princípio multiplicativo, que permite calcular o número de possibilidades em experimentos compostos, além de analisar a frequência absoluta e relativa na determinação da probabilidade. No 9º ano, consolidam o estudo da probabilidade de eventos, incluindo a análise de eventos independentes e dependentes, além do aprofundamento no conceito de espaço amostral e suas aplicações em problemas mais complexos.

Ao longo desse ciclo, os alunos desenvolvem uma compreensão mais sofisticada da probabilidade matemática, tornando-se capazes de analisar e resolver problemas com argumentação lógica e raciocínio crítico, preparando-se para a aplicação desse conhecimento em diferentes contextos do mundo real.

Nota-se que o eixo Probabilidade e Estatística no Currículo da Cidade de São Paulo é estruturado de forma progressiva, conectando teoria e prática durante o Ensino Fundamental, com foco na análise e comunicação de dados em contextos diversos. Esse trabalho busca não apenas desenvolver competências matemáticas, mas também promover o pensamento crítico e a resolução de problemas, essenciais para a interpretação e comunicação de informações no mundo atual.

Promove também a integração de conceitos como aleatoriedade, probabilidade e análise de dados a situações práticas, proporcionando uma formação alinhada às demandas contemporâneas.

4.8.2 A probabilidade no Currículo da Cidade de São Paulo - Ensino Médio

O Ensino Médio, por sua vez, visa aprofundar os conhecimentos adquiridos durante o Ensino Fundamental, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão mais robusta e crítica da Probabilidade. Durante essa etapa, os estudantes exploram o cálculo de probabilidades em experimentos aleatórios, investigam situações reais que envolvem decisões baseadas em riscos e são desafiados a aplicar conceitos probabilísticos em contextos interdisciplinares. Essa organização curricular propõe uma aprendizagem que não só enfatiza a teoria, mas também estimula a análise crítica e a aplicação prática da matemática no cotidiano.

A Tabela 12 apresenta os Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio:

Tabela 12: Objetos do Conhecimento do Eixo Probabilidade e Estatística no Ensino Médio

Série	Objetos do Conhecimento
1ª série	• Probabilidade e estatísticas básicas
2ª série	• Cálculo de probabilidade e espaço amostral • Eventos dependentes e independentes • Tipos de eventos e suas implicações
3ª série	• Probabilidade e risco em situações cotidianas • Cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos • Análise de variáveis aleatórias e modelos discretos

Fonte: São Paulo (2021).

No Ensino Médio, o estudo da probabilidade se aprofunda gradualmente, com cada ano abordando conceitos mais complexos e aplicados. Na 1ª série, os alunos revisitam os fundamentos da probabilidade e estatísticas básicas, desenvolvendo habilidades para analisar tabelas, gráficos e amostras estatísticas, o que os prepara para a interpretação de dados em contextos mais amplos. Na 2ª série, a abordagem se aprofunda com o cálculo de probabilidade, explorando o espaço amostral, a diferenciação de eventos dependentes e independentes, e a análise de tipos de eventos e suas implicações práticas. Já na 3ª série, os estudantes aplicam o conhecimento adquirido em situações cotidianas, analisando a probabilidade e risco em problemas reais, além de calcular a probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos e estudar variáveis aleatórias e modelos discretos.

Portanto, os alunos ficam diante de uma compreensão cada vez mais sofisticada e aplicada da probabilidade, o que lhes permite resolver problemas de forma lógica e crítica, utilizando modelos probabilísticos em diversas situações e tomando decisões informadas em contextos do cotidiano e em áreas profissionais.

Assim como no Currículo do Ensino Fundamental, o eixo Probabilidade e Estatística no Currículo da Cidade de São Paulo para o Ensino Médio é organizado de forma progressiva, aprofundando gradualmente os conceitos e ampliando sua aplicação em contextos mais desafiadores. Ao longo dos três anos, os estudantes são estimulados a integrar a teoria probabilística com situações práticas, explorando o cálculo de probabilidades em experimentos sucessivos, além de estudar variáveis aleatórias e modelos discretos.

O objetivo é não apenas aprimorar as habilidades matemáticas dos alunos, mas também desenvolver habilidades de análise crítica e resolução de problemas, que são fundamentais para compreender e comunicar informações em diversos cenários.

4.9 PRINCÍPIOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

A modelagem matemática constitui-se como uma ferramenta conceitual e metodológica fundamental para a compreensão e representação de fenômenos do mundo real. Trata-se de um processo que articula abstração, idealização e formalização, no qual situações da realidade são traduzidas em linguagem matemática, a fim de permitir sua análise, previsão e simulação (Bassanezi, 2002).

Ela se apresenta como um elo entre o conhecimento empírico e a linguagem formal, entre a realidade e sua representação e ganha relevância no campo da educação matemática, ao ser considerada não apenas como conteúdo ou técnica, mas como abordagem pedagógica que potencializa o ensino-aprendizagem.

Quando mobilizada em sala de aula, a modelagem permite integrar os conhecimentos escolares com os saberes dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento de competências como a resolução de problemas, a investigação, a comunicação matemática e a argumentação crítica. Por meio dela, os estudantes são convidados a interpretar fenômenos do cotidiano, construir modelos, testá-los, analisá-los e reelaborá-los, num movimento dinâmico de construção do conhecimento.

Ademais, a modelagem favorece o diálogo interdisciplinar e a contextualização do ensino, aspectos amplamente valorizados pelas diretrizes curriculares atuais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No capítulo seguinte, serão aprofundados os propósitos da modelagem matemática no Ensino e na educação matemática, com ênfase nas suas contribuições para a formação integral dos estudantes e para o aprimoramento das práticas pedagógicas, considerando os desafios contemporâneos do ensino da matemática.

5 COMPREENDENDO OS PRINCÍPIOS E PROPÓSITOS DA MODELAGEM NO ENSINO E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No âmbito das políticas educacionais brasileiras para formação continuada de professores, a pesquisa da modelagem matemática aplicada à Educação Básica tem particular relevância no contexto da CAPES, que a reconhece como abordagem pedagógica estratégica para a construção do conhecimento matemático. Como órgão responsável pela avaliação e fomento à pós-graduação no país, a CAPES tem incentivado pesquisas que investiguem os impactos desta metodologia nos processos de ensino e aprendizagem, especialmente na formação de professores de Matemática. Doravante, Ensino significa pesquisas ou artigos de pesquisa que se referem à área de Ensino da CAPES.

Este capítulo discute os princípios e propósitos da modelagem matemática aplicada à Educação Básica com ênfase nas contribuições de pesquisadores brasileiros que fundamentam essa abordagem no contexto nacional, considerando as duas grandes áreas de investigação: o Ensino e a educação matemática.

Em se tratando da área de educação matemática, foram examinadas as perspectivas de Barbosa (2001), Biembengut e Hein (2007), Burak (1992), Caldeira (2015) e Klüber (2012), além de trabalhos sobre probabilidade de autores como Lopes (2008) e Coutinho (2013), que analisam a modelagem de fenômenos aleatórios em sala de aula. Esses estudos destacam a modelagem como uma estratégia pedagógica que integra a Matemática a problemas reais, promovendo a aprendizagem.

Em relação ao Ensino, serão analisadas dissertações do PROFMAT que abordam a Modelagem do ponto de vista do Ensino e modelagem matemática, também sob a perspectiva da probabilidade, selecionadas a partir do banco de dados da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Por fim, o capítulo comparará as concepções de modelagem no ensino e na educação matemática, destacando suas diferenças e complementaridades.

5.1 A MODELAGEM NO ENSINO

A área de Ensino, no âmbito da CAPES, configura-se como um campo de pesquisa voltado à produção de conhecimento sobre os processos de ensinar e aprender, com ênfase na prática pedagógica, na formação de professores e no desenvolvimento de metodologias que favoreçam a aprendizagem significativa em diferentes níveis de escolarização. Como área de avaliação da pós-graduação *stricto sensu*, o Ensino ocupa um espaço interdisciplinar que permite a

articulação entre os saberes científicos, didáticos e sociais, valorizando investigações aplicadas ao cotidiano escolar. Nesse contexto, a modelagem matemática tem sido abordada como uma prática pedagógica potente, capaz de aproximar o conteúdo matemático das realidades vividas pelos estudantes e de promover o protagonismo docente no planejamento e na mediação das aprendizagens.

No item 5.1.1, são analisadas pesquisas que tratam da modelagem matemática no Ensino, com base em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). A escolha desse repositório se justifica por seu vínculo direto com a formação de professores da Educação Básica e por sua relevância na produção de estudos aplicados que dialogam com os princípios da área de Ensino da CAPES.

5.1.1 Pesquisas que envolvem o tema Modelagem no banco de dissertações do PROFMAT

Realizou-se uma busca no banco de dissertações do PROFMAT (<https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=modelagem&polo=>) e foram encontrados 222 trabalhos que mencionam o termo “modelagem”. Diante de todas as dissertações do PROFMAT que abordam o tema, o intuito é compreender como essa prática tem sido explorada dentro do programa, especialmente no que diz respeito aos seus princípios, propósitos e fundamentos teóricos.

Para além disto, o objetivo é observar como a modelagem é concebida nos trabalhos: como uma ferramenta aplicada a fenômenos específicos, como uma linguagem de descrição da realidade, ou como um processo mais amplo de construção matemática. Também se busca identificar quais referenciais conceituais são mobilizados, sejam eles de natureza puramente matemática, científica, ou eventualmente social, filosófica ou histórica.

Apesar da diversidade de abordagens em modelagem no Ensino, optou-se por analisar o trabalho “Matemática e Previdência Social: Modelagem, cálculos e os impactos da reforma de 2019”, de Souza (2025), que exemplifica como a construção formal de modelos — mesmo com ferramentas matemáticas elementares — pode ser articulada a propósitos educacionais.

Souza (2025) desenvolve uma modelagem rigorosa do sistema previdenciário brasileiro pós-reforma, utilizando progressões aritméticas, geométricas e juros compostos. Embora não empregue equações diferenciais ou sistemas dinâmicos, comuns em modelagem matemática clássica, a pesquisa mantém um caráter formal ao estruturar matematicamente relações entre variáveis previdenciárias. Seu diferencial está na transposição didática: o modelo simula

cenários financeiros e foi planejado para tornar visíveis, aos trabalhadores, os mecanismos da Previdência Social.

Essa dissertação é importante para a área de Ensino por três razões: (1) rigor e acessibilidade, já que demonstra que modelos baseados em matemática básica podem gerar análises robustas quando bem fundamentados; (2) educação crítica, que vai além da aplicação técnica, incentivando a leitura matemática de políticas públicas; (3) interface teoria-prática, pois o estudo de caso com um servidor público ilustra como a modelagem pode ser mobilizada em situações reais de aprendizagem.

Assim, mesmo como exemplo singular, o trabalho de Souza (2025) reforça o potencial da modelagem matemática, em suas múltiplas vertentes, para articular conhecimento formal e ensino contextualizado.

5.1.2. A modelagem no Ensino: sobre probabilidade

No âmbito das dissertações do PROFMAT, encontramos uma pesquisa que aborda a probabilidade: o trabalho intitulado “Modelagem e ajuste de funções densidade de probabilidade para tamanhos de partículas encontrados em sítios arqueológicos no Vale do Rio Paranapanema”, de Colle (2019). Passaremos a analisá-la em detalhe.

Colle (2019) apresenta uma análise da aplicação de funções de densidade de probabilidade em dados experimentais coletados de sítios arqueológicos. O autor explora a modelagem estatística como um meio para entender e prever a distribuição dos tamanhos de partículas.

No que tange à modelagem matemática, o estudo utiliza três principais distribuições: *Gama*, *Log-Normal* e *Weibull*. Cada uma delas oferece uma perspectiva distinta sobre a interpretação dos dados, sendo a escolha do modelo adequado fundamental para análises precisas. A pesquisa emprega o software *R Studio* para estimativa de parâmetros e aplicação de testes gráficos de aderência, como *Q-Q plot* e *P-P plot*, essenciais para validação dos resultados. O trabalho demonstra a aplicabilidade prática das distribuições de probabilidade, estabelecendo pontes entre teoria estatística e pesquisa arqueológica.

A modelagem é apresentada como uma ferramenta importante para análise de dados e previsões em contextos reais, superando o caráter de mero exercício teórico. Colle (2019) desenvolve ainda material didático adaptável a cursos de graduação e pós-graduação, utilizando dados reais para aproximar os estudantes de situações profissionais - embora não tenha implementado a atividade em sala de aula.

Destaca-se ainda o caráter interdisciplinar da pesquisa, que ilustra a relevância da probabilidade em áreas além da Matemática, como a Arqueologia. Esta transversalidade alinha-se às diretrizes da BNCC (2017), que valoriza a integração entre conhecimentos.

Conclui-se que a modelagem probabilística, quando articulada a problemas concretos e mediada por ferramentas computacionais, configura-se como elemento fundamental no ensino matemático contemporâneo. Além de enriquecer o processo de aprendizagem, sua aplicação prepara profissionais para os desafios de uma sociedade baseada em dados, que exige interpretação crítica de informações.

Estudos como o de Colle (2019) contribuem assim para uma formação acadêmica que equilibra rigor metodológico e aplicabilidade prática, preparando estudantes para os complexos desafios cognitivos e éticos da atualidade.

5.2 A MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Apresentaremos, nesta seção, uma análise de artigos que descrevem pesquisas e resultados relacionados à modelagem matemática, com o objetivo de refletir sobre suas principais características segundo a perspectiva de diferentes pesquisadores no campo da educação matemática.

De acordo com Burak (1992), a Modelagem na educação matemática constitui-se como um campo de investigação que busca compreender os processos de ensino e aprendizagem da matemática por meio da construção, análise e validação de modelos em contextos reais e significativos. Nessa perspectiva, a modelagem ultrapassa a aplicação técnica de conceitos, sendo entendida como prática pedagógica e objeto de pesquisa que articula aspectos epistemológicos, cognitivos e sociais do conhecimento matemático.

Essa abordagem ganha destaque também no cenário das políticas educacionais brasileiras. A CAPES, por exemplo, reconhece a modelagem como uma estratégia didático-pedagógica relevante para a formação de professores de matemática, o que tem incentivado a produção acadêmica voltada à investigação dos impactos dessa metodologia na formação docente e nas práticas pedagógicas.

A fundamentação teórica da Modelagem na educação matemática está alicerçada em três eixos: o epistemológico, que analisa a natureza do conhecimento produzido; o pedagógico, que discute as estratégias de ensino; e o cognitivo, que investiga os processos de aprendizagem dos

estudantes (Klüber; Burak, 2008). Essa tríade permite compreender a modelagem como prática educativa complexa e não apenas como técnica de ensino.

Além disso, a modelagem favorece a interdisciplinaridade e a problematização da realidade, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, ao mesmo tempo, em que fortalece a autonomia docente na criação de propostas significativas de aprendizagem (Barbosa, 2004; D'Ambrósio, 2001). Nesse sentido, ela se apresenta como um caminho potente para a construção de uma educação matemática crítica, reflexiva e socialmente comprometida.

Para Barbosa (2004), a concepção de modelagem matemática envolve a aplicação da Matemática a problemas do mundo real, enfatizando a importância de integrar aspectos teóricos e práticos na educação matemática. Essa perspectiva defende que a modelagem não deve ser vista meramente como a aplicação de técnicas matemáticas em outras áreas do conhecimento, mas sim como um processo dinâmico que favorece a problematização e a investigação. Nesse sentido, a modelagem está diretamente relacionada a situações cotidianas, permitindo que os alunos contextualizem o aprendizado matemático e desenvolvam habilidades para atuar criticamente em sua realidade. Afirma-se que:

[...] a meu ver, o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas, enquanto o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (Barbosa, 2004, p. 75)

Conclui-se que a modelagem se torna uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de uma educação matemática que busca a competência técnica e a construção de uma sociedade mais democrática e crítica.

Segundo Biembengut (1999), modelagem pode ser compreendida como um conjunto de procedimentos envolvidos na construção de um modelo, sendo este entendido como uma representação simbólica de algum fenômeno ou situação. Essa representação pode assumir diferentes formas, como imagens, desenhos, esquemas, gráficos, projetos ou até expressões matemáticas. A ideia de modelo está presente em diversas áreas do conhecimento e desempenha um papel na compreensão e análise de realidades complexas.

Dentro desse contexto, conforme Biembengut (1999), a modelagem matemática se destaca por favorecer o desenvolvimento de competências importantes nos estudantes, uma vez que

propicia a aplicação de conceitos matemáticos em situações concretas do cotidiano. Essa abordagem promove uma articulação entre diferentes áreas do saber, fortalecendo a interdisciplinaridade e contribuindo para uma aprendizagem mais rica e contextualizada.

Além do impacto positivo no desempenho estudantil, Biembengut (1999) diz que a modelagem matemática também tem sido incorporada em documentos oficiais de educação, como os Parâmetros Curriculares Nacionais. Essa inclusão reflete a valorização da modelagem como um método pedagógico que deve ser central nas propostas curriculares. Essa mudança é imperiosa, pois direciona a formação de professores e a elaboração de materiais didáticos, gerando um contexto educacional mais alinhado às necessidades e interesses dos alunos.

No campo da educação matemática, Caldeira (2015) apresenta uma perspectiva inovadora sobre a modelagem matemática, superando os métodos tradicionais de ensino. O autor propõe uma abordagem que valoriza a relação entre o conhecimento matemático e o contexto sociocultural dos alunos, enfatizando o caráter transformador dessa prática pedagógica.

Para Caldeira (2015), os conceitos matemáticos devem ser construídos a partir da realidade social e histórica dos estudantes. Essa visão reconhece os saberes prévios e as experiências cotidianas como elementos fundamentais para uma aprendizagem significativa. O autor defende que a matemática não pode ser reduzida a um conjunto de regras abstratas, mas deve ser compreendida como um conhecimento dinâmico, constantemente reconstruído a partir das interações sociais.

Na prática educativa, essa abordagem se concretiza por meio do trabalho com problemas reais e do desenvolvimento do pensamento crítico. Caldeira (2015) destaca o potencial da modelagem matemática para democratizar o acesso ao conhecimento, formando cidadãos mais conscientes e participativos. No entanto, o autor alerta para os riscos de uma compreensão superficial dessa metodologia, que poderia reduzir sua eficácia pedagógica.

Já para Burak (1992), a modelagem matemática caracteriza-se como um processo que vai além da simples representação de problemas oriundos do mundo real, envolvendo a construção de modelos que permitem a interpretação e a análise de diversas situações complexas. Este processo inicia-se com a identificação de um problema, seguida pela formulação de um modelo que abstrai elementos essenciais da realidade. A partir desse modelo, ocorrem simulações ou experimentações que possibilitam prever comportamentos ou resultados, considerando as variáveis e inter-relações entre elas.

Conforme Burak (1992), a abordagem promove uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, capacita os estudantes a transferirem suas aprendizagens para situações reais e contribui para a formação de cidadãos críticos e capazes de intervir em sua realidade de modo informativo. Assim, a modelagem é um meio para integrar teoria e prática, preparando os alunos para enfrentar desafios contemporâneos.

Parte interessante também descrita por Burak (1992) em sua tese é a relação entre a Matemática Aplicada e a modelagem matemática. De acordo com o autor, elas são profundamente interligadas, pois a modelagem representa uma maneira efetiva de aplicar conceitos matemáticos a problemas concretos enfrentados na realidade.

O autor diz que a modelagem matemática vai além da simples aplicação de fórmulas, requerendo um entendimento profundo do contexto em que os problemas estão inseridos e a construção de representações matemáticas que possam simplificar e interpretar esses fenômenos.

Por fim, para Klüber (2012), a modelagem matemática deve ser compreendida como uma prática educativa que busca representar situações do cotidiano por meio de construções matemáticas. Essa proposta vai além da simples utilização de fórmulas e procedimentos mecânicos, pois favorece uma compreensão mais profunda, possibilitando que os estudantes percebam a Matemática como um instrumento valioso para interpretar e intervir em diferentes contextos da realidade cotidiana.

O autor entende que se trata também de um processo dinâmico e interativo e que essa perspectiva valoriza a capacidade dos estudantes de lidarem com desafios complexos, tornando o aprendizado mais significativo e atraente.

Klüber (2012) argumenta que a formação contínua dos educadores é outro aspecto necessário, já que a efetiva aplicação desse método no ensino de Matemática requer que os professores possuam um entendimento tanto da teoria quanto da prática associada à modelagem. Para isso, defende-se a realização de projetos e experiências práticas que proporcionem aos educadores a confiança e a habilidade necessárias para implementar essa abordagem em sala de aula.

A discussão sobre as concepções epistemológicas da modelagem matemática é útil para entender suas implicações na Educação. Investigar os pressupostos teóricos que sustentam essa prática é necessário para identificar como a modelagem pode ser integrada no currículo de Matemática.

As concepções apresentadas revelam a riqueza teórica e metodológica da modelagem matemática no campo da educação matemática. Apesar das variações de enfoque, os autores convergem na defesa de uma prática pedagógica crítica, contextualizada e investigativa. A modelagem, compreendida ora como método, ora como abordagem ou postura, assume papel central na mediação entre o conhecimento matemático e a realidade dos alunos. Evidencia-se, portanto, seu potencial transformador na formação de sujeitos autônomos e conscientes.

Observa-se uma significativa convergência entre os autores no que diz respeito à valorização da modelagem matemática como uma prática pedagógica que ultrapassa a simples aplicação de conteúdo. Todos reconhecem seu potencial para promover o pensamento crítico, a contextualização do conhecimento e a construção de significados a partir da realidade dos alunos. Tanto Barbosa (2004) quanto Caldeira (2015) e Klüber (2012) destacam a modelagem como um espaço de investigação, diálogo e articulação com aspectos culturais e sociais. Biembengut (1999) e Burak (1992), embora com enfoques mais estruturais e metodológicos, também destacam o papel da modelagem como meio para tornar o ensino mais significativo e conectado com o cotidiano.

As diferenças entre os autores, por sua vez, residem principalmente no modo como concebem o processo de modelagem e os objetivos que atribuem a ele. Biembengut (1999) e Burak (1992) apresentam uma abordagem mais sistematizada, com etapas bem definidas, destacando o caráter científico e metodológico da modelagem.

Já Barbosa (2004), Caldeira (2015) e adotam uma postura mais dialógica e reflexiva, defendendo uma modelagem centrada na problematização, na cultura dos estudantes e na transformação social.

Essa diversidade de concepções não representa uma fragmentação, mas sim uma riqueza teórica que permite compreender a modelagem matemática como uma prática complexa, multifacetada e em constante construção dentro da educação matemática.

5.2.1. A modelagem na educação matemática: sobre probabilidade

A modelagem na educação matemática, especialmente no que concerne à probabilidade, constitui uma abordagem fundamental para o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico dos estudantes. Conforme Lopes (2008), o ensino dessas áreas deve partir da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos, reais ou simulados, que auxiliem no processo de matematização de fenômenos do dia a dia. A modelagem, nesse

contexto, permite que os alunos compreendam e quantifiquem a incerteza, desenvolvendo a habilidade de analisar informações de forma crítica e fundamentada.

Para Lopes (2008), a probabilidade é uma ferramenta importante para medir e lidar com a incerteza, característica inerente a muitos fenômenos da vida cotidiana. Portanto, a incorporação da modelagem como prática educativa promove a construção de conhecimentos significativos, capacitando os estudantes a estabelecerem relações entre dados, contextos e resultados. Essa prática ativa e heurística incentiva a autonomia dos alunos, que aprendem a ser “donos de sua própria incerteza”, comparando previsões e extrapolações com o que realmente ocorre.

Além disso, Lopes (2008) enfatiza que a formação dos professores desempenha papel central para que a modelagem e o ensino da probabilidade sejam efetivos na Educação Básica. É fundamental que a preparação docente contemple metodologias que estimulem a resolução de problemas, o uso de simulações e experimentos, garantindo que os educadores estejam aptos a trabalhar com diferentes linguagens e formas de expressão matemática. A amplitude do conceito, mais do que seu formalismo, deve ser priorizada para promover uma aprendizagem contextualizada e significativa.

Nesse sentido, a modelagem facilita a construção de relações entre o mundo concreto e o abstrato, permitindo que os alunos representem e analisem fenômenos aleatórios de forma estruturada. Essa prática proporciona um ambiente de investigação em que o raciocínio lógico, a autonomia e a resolução de problemas são continuamente estimuladas, conferindo significado ao aprendizado de probabilidade.

Ademais, o uso de modelagem no Ensino de probabilidade convida à reflexão sobre as implicações sociais, culturais e éticas dos conceitos matemáticos. Fenômenos como jogos de azar, decisões baseadas em incerteza e interpretações de dados ganham nova perspectiva quando trabalhados sob essa ótica, enriquecendo a formação cidadã dos estudantes.

Na sequência, apresentam-se duas experiências pedagógicas que evidenciam o potencial da modelagem no ensino de probabilidade. A primeira, voltada ao Ensino Médio, trabalha com o Teorema de Bayes a partir do problema de Monty Hall, enquanto a segunda, direcionada ao 9º ano do Ensino Fundamental, utiliza jogos de aposta como ponto de partida para a construção de conceitos probabilísticos. Ambas demonstram como a modelagem pode tornar o processo de ensino-aprendizagem mais investigativo, reflexivo e próximo da realidade dos estudantes.

Miranda (2024) propõe uma abordagem pedagógica centrada na aplicação do Teorema de Bayes ao conhecido problema de Monty Hall, com o objetivo de tornar mais acessíveis os conceitos de probabilidade para alunos do 3º ano do Ensino Médio. A escolha do problema se justifica por seu caráter contraintuitivo e pelo potencial de estimular o raciocínio lógico e probabilístico. O material didático elaborado busca favorecer a construção ativa do conhecimento por meio de situações desafiadoras e contextualizadas.

O foco da proposta está em promover a participação ativa dos estudantes e em possibilitar a atualização de suas crenças diante de novas informações — princípio essencial do Teorema de Bayes. Além desse, outros conceitos fundamentais da probabilidade, como espaço amostral, eventos, probabilidade condicional e independência, também são contemplados. A sequência didática sugerida permite que os alunos simulem o jogo, testem hipóteses e desenvolvam suas próprias estratégias, fortalecendo a compreensão dos conteúdos por meio da prática.

Por sua vez, D’Avila Júnior (2024) desenvolve uma sequência didática voltada ao 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada na história da Teoria das Probabilidades e no uso de práticas lúdicas. O autor propõe a análise de jogos de apostas esportivas e cassinos *on-line* como ponto de partida para discutir as noções de risco, ganho e perda, promovendo uma reflexão crítica sobre as reais probabilidades envolvidas nesses contextos.

A proposta enfatiza o papel da modelagem como estratégia pedagógica que possibilita aos alunos representarem e interpretar fenômenos aleatórios de maneira contextualizada. Através dessa abordagem, os estudantes são convidados a refletir sobre os aspectos matemáticos, sociais e éticos dos jogos de aposta, desenvolvendo não apenas competências matemáticas, mas também consciência crítica diante de situações cotidianas que envolvem incerteza e tomada de decisão.

Articulando conceitos matemáticos com situações concretas e cotidianas, como jogos de azar e experimentos contraintuitivos, a modelagem rompe com práticas tradicionalmente expositivas e aproxima o conteúdo escolar das vivências dos alunos. Essa conexão favorece não apenas a compreensão conceitual, mas também a capacidade de interpretar e tomar decisões fundamentadas diante da incerteza, característica central dos fenômenos probabilísticos. A modelagem, nesse sentido, funciona como ponte entre a abstração matemática e os desafios reais enfrentados pelos sujeitos em sociedade.

As propostas analisadas — centradas, respectivamente, no Teorema de Bayes e nos jogos de aposta — demonstram que a utilização de contextos ricos e desafiadores contribui para a

aprendizagem ativa e significativa. Ao permitir que os alunos simulem, investiguem e construam hipóteses, tais experiências ampliam a autonomia dos estudantes e potencializam o engajamento com os conteúdos. Além disso, ao serem incentivados a refletir sobre aspectos sociais e éticos implicados nas situações trabalhadas, os alunos passam a perceber a matemática como uma ferramenta de leitura crítica do mundo. Isso evidencia a importância de uma abordagem que valorize não apenas o domínio técnico, mas também o desenvolvimento de competências interpretativas e argumentativas.

A modelagem, portanto, deixa de ser um recurso pontual e passa a integrar uma proposta pedagógica mais ampla, que compreende a matemática como campo de construção ativa de conhecimento e de formação cidadã. Essa abordagem fortalece o papel da educação matemática como promotora de sentidos e significados, contribuindo para a formação de sujeitos críticos, autônomos e socialmente responsáveis.

5.3 APROXIMAÇÕES E AFASTAMENTOS ENTRE A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem matemática representa uma abordagem que pode assumir contornos distintos conforme os objetivos educacionais e epistemológicos a que se propõe. No âmbito do Ensino e da educação matemática, essa diversidade é ampliada quando se considera a inserção da probabilidade como conteúdo central, uma vez que esta exige o tratamento da incerteza, da aleatoriedade e da variabilidade, conceitos que transcendem a lógica determinista tradicional. Assim, é possível identificar três vertentes principais de atuação: a modelagem matemática Clássica, a Modelagem no Ensino e a Modelagem na educação matemática com enfoque investigativo e crítico.

Enquanto a Modelagem Clássica está associada a uma tradição técnico-científica que busca representar fenômenos reais por meio de estruturas matemáticas formais e exatas, a Modelagem no Ensino emerge como prática pedagógica orientada à aprendizagem significativa de conceitos matemáticos, inclusive os probabilísticos. Já a Modelagem na educação matemática amplia a perspectiva, incorporando aspectos epistemológicos, sociais e éticos no tratamento dos saberes, propondo uma educação crítica que reflita sobre o papel do conhecimento matemático na sociedade.

Diante desse cenário, torna-se relevante identificar os pontos de convergência e os elementos que diferenciam essas abordagens, especialmente no que se refere à forma como cada uma concebe o ensino e aprendizagem da probabilidade. A seguir, serão discutidos as aproximações

e os afastamentos entre essas três abordagens, com base em fundamentos teóricos e experiências práticas documentadas na literatura.

5.3.1 Aproximações

As três abordagens da modelagem matemática compartilham, antes de tudo, a valorização da linguagem matemática como ferramenta estruturante para a análise e a representação da realidade. Bassanezi (2002) define modelagem como o processo de transformar situações do mundo real em expressões matemáticas com o objetivo de compreendê-las, prever tendências e propor soluções. Esse entendimento está presente tanto na modelagem aplicada quanto nas perspectivas educacionais, ainda que com enfoques distintos quanto à finalidade e ao grau de formalização.

Outro aspecto comum é o reconhecimento da probabilidade como um campo fundamental para lidar com situações de incerteza, onde os resultados não são completamente previsíveis. Todas as vertentes analisadas mobilizam conceitos probabilísticos para interpretar eventos aleatórios, realizar estimativas e tomar decisões com base em dados. Lopes (2008) enfatiza que a educação probabilística deve permitir ao estudante desenvolver uma leitura crítica do mundo, sendo esta uma premissa que perpassa tanto as aplicações formais da modelagem quanto às práticas escolares voltadas à formação cidadã.

A contextualização dos problemas também constitui um ponto de aproximação relevante. Na modelagem clássica, frequentemente aplicada em áreas como agricultura, economia ou estatística, os modelos são construídos a partir de dados reais e situações concretas (Barros, 2017; Ramos et al., 2021). Da mesma forma, a modelagem no Ensino e na educação matemática parte de contextos vivenciados pelos alunos para construir significados, tornando o conhecimento mais acessível e significativo. Biembengut e Hein (2007) afirmam que compreender a realidade por meio da modelagem é essencial para tornar o processo de aprendizagem mais autêntico e eficaz.

Por fim, as três abordagens reconhecem a importância da interação entre teoria e prática. Na modelagem aplicada, essa interação ocorre pela verificação empírica dos modelos; na modelagem para o Ensino, pela resolução de problemas contextualizados; e na educação matemática, pela articulação entre conhecimento técnico, reflexão crítica e ação transformadora. Essa convergência indica que, apesar das diferenças metodológicas e filosóficas, todas essas formas de modelagem se baseiam na relação ativa com o mundo real, sendo a matemática um meio para compreender, questionar e transformar a realidade.

5.3.2 Afastamentos

Embora apresentem pontos de intersecção, as três abordagens de modelagem matemática diferem significativamente em seus pressupostos teóricos, finalidades educativas e formas de operacionalização. A modelagem matemática Clássica ou Aplicada é caracterizada por um paradigma técnico e formalista, que busca representar o comportamento de sistemas complexos por meio de equações matemáticas precisas. Ross (2010) sustenta que esse tipo de modelagem é orientado à eficiência e à acurácia na previsão de eventos, utilizando, por exemplo, distribuições probabilísticas rigorosamente definidas. A Modelagem no Ensino, por sua vez, rompe com esse formalismo ao priorizar o processo de ensino e a mediação docente como elementos centrais para a aprendizagem.

A Modelagem na educação matemática se afasta ainda mais das premissas técnicas, assumindo uma postura crítica e investigativa em relação ao conhecimento. Para Barbosa (2004), modelar é mais do que aplicar a matemática a problemas reais; é criar espaços de questionamento, construção coletiva e reflexão sobre a realidade. Nessa abordagem, a probabilidade deixa de ser apenas uma ferramenta para lidar com o acaso e passa a ser uma linguagem para discutir desigualdades, riscos sociais, decisões éticas e posicionamentos políticos, ampliando o horizonte formativo dos estudantes.

Outra divergência importante refere-se à concepção de erro. Na modelagem aplicada, o erro é geralmente tratado como uma falha técnica a ser minimizada, indicando inadequações do modelo em relação à realidade. Já nas abordagens educacionais, especialmente na educação matemática, o erro é entendido como uma parte essencial do processo de aprendizagem. Barbosa (2004) destaca que errar pode ser um ponto de partida para a revisão de estratégias e a reconstrução de conceitos, promovendo autonomia intelectual e desenvolvimento crítico. Essa concepção pedagógica contrasta radicalmente com a rigidez que caracteriza os modelos clássicos.

5.3.3 Considerações

A análise das aproximações e afastamentos entre as diferentes abordagens de modelagem matemática evidencia a riqueza e a complexidade desse campo de investigação e prática. Embora compartilhem princípios estruturantes, como o uso da linguagem matemática, a valorização da contextualização e o papel central da probabilidade, cada vertente responde a finalidades distintas.

Enquanto a modelagem aplicada foca na resolução eficiente de problemas, a modelagem no Ensino busca promover a aprendizagem significativa de cunho matemático e a modelagem na educação matemática propõe uma formação humana crítica, reflexiva e emancipadora.

Tais diferenças não devem ser vistas como excludentes, mas como complementares. O diálogo entre essas abordagens pode enriquecer a prática pedagógica, permitindo que o Ensino de probabilidade se beneficie tanto da solidez técnica quanto da sensibilidade didática e da perspectiva crítica. Com isso, amplia-se o repertório metodológico dos professores e fortalecem-se os vínculos entre a matemática escolar e as questões do mundo contemporâneo.

Ademais, compreender os afastamentos entre as abordagens ajuda a evitar reducionismos no campo educacional. Não se trata de aplicar a modelagem técnica no contexto escolar sem adaptações, nem tampouco de abandonar o rigor conceitual em nome de uma abordagem mais “leve” ou intuitiva. O desafio está em encontrar equilíbrio entre a formalização e a significação, entre o cálculo e a crítica, entre a técnica e a ética.

Portanto, a modelagem matemática, em suas múltiplas expressões, constitui-se como uma ponte entre a matemática e a vida. Quando articulada à probabilidade, ela adquire um papel ainda mais relevante, pois prepara os estudantes para compreender e intervir em um mundo marcado pela incerteza. Cabe à escola promover esse encontro entre saber matemático e realidade social, contribuindo para a formação de sujeitos autônomos, analíticos e capazes de agir de forma consciente frente aos desafios do século XXI.

6 HORIZONTES VISLUMBRADOS COM A PESQUISA

A presente pesquisa permitiu identificar tanto os pontos de convergência quanto de divergência entre as noções de modelagem matemática, Modelagem no Ensino e Modelagem na educação matemática. Embora esses termos sejam frequentemente utilizados de modo indistinto nos discursos educacionais, a análise aqui efetuada da literatura atual evidenciou a necessidade de distingui-los conceitualmente para atingirmos o intento desta pesquisa.

A modelagem matemática, conforme delineada por Bassanezi (2002), caracteriza-se por uma abordagem focada na construção de modelos representativos de fenômenos da realidade, com vistas à sua abstração, análise e previsão. Esse processo, fundamentalmente técnico e estruturado, é ancorado em fundamentos matemáticos rigorosos, com objetivo de fornecer interpretações e soluções para situações reais por meio de representações simbólicas e formais.

Já a Modelagem na educação matemática, conforme defendem autores como Barbosa (2001) e Biembengut e Hein (2007), insere-se em um campo epistemológico que transcende a dimensão estritamente técnica da modelagem. Nesse escopo, o processo de modelagem é compreendido como uma prática pedagógica, cujo foco reside na construção coletiva do conhecimento, na problematização da realidade e no desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos estudantes. Trata-se de uma modelagem enquanto práxis, fundamentada em perspectivas pedagógicas críticas, nas quais o aluno é agente ativo do processo de aprendizagem.

Nesse contexto, observou-se que a Modelagem no Ensino ocupa um espaço intermediário, articulando os elementos técnicos da modelagem matemática às dinâmicas didáticas que buscam conferir sentido e significação à Matemática ensinada. A Modelagem no Ensino se aproxima, portanto, tanto da tradição da Matemática Aplicada quanto das propostas estratégicas de ensino da Matemática.

Assim, as aproximações possíveis entre essas três concepções ocorrem quando a modelagem é compreendida não apenas como técnica, mas como um processo epistemológico e educativo. Por outro lado, os afastamentos tornam-se evidentes quando a modelagem é concebida unicamente como uma ferramenta de aplicação matemática focada em seu conteúdo e parcialmente desvinculada da formação humana no âmbito do pessoal e social. Isto é evidenciado no ensino de probabilidade, pois este oferece um campo fértil para tais articulações, dado seu potencial para promover reflexões sobre o acaso, a incerteza e a tomada de decisões, tanto em contextos escolares quanto sociais mais amplos.

Ao final deste percurso investigativo, a pergunta norteadora — “*Como as ideias da modelagem matemática articuladas aos propósitos da modelagem na educação matemática contribuem para com o ensino de probabilidade?*” — como elemento estruturante de toda a pesquisa, revela as conexões existentes entre a modelagem matemática, a modelagem na educação matemática e o ensino de probabilidade. A análise desenvolvida ao longo do estudo permite afirmar que a articulação entre essas abordagens amplia significativamente o potencial formativo do ensino de probabilidade, tanto no que se refere à apropriação conceitual quanto ao desenvolvimento de competências cognitivas, sociais e culturais.

A modelagem matemática, em sua concepção clássica, oferece ao ensino um referencial estruturado de análise e formalização de fenômenos que envolvem incerteza, aleatoriedade e variabilidade. Sua função é essencial na construção de modelos representativos da realidade, capazes de fornecer previsões, interpretar comportamentos e auxiliar na tomada de decisões fundamentadas (Bassanezi, 2002). Ao se apropriar dessa perspectiva, o Ensino de probabilidade se beneficia da clareza conceitual e do rigor lógico que caracterizam a modelagem matemática enquanto prática científica.

Entretanto, os limites dessa abordagem tornam-se evidentes quando transpostos diretamente para o contexto escolar da Educação Básica. A complexidade e a abstração dos modelos matemáticos, se não forem devidamente contextualizadas, podem se tornar obstáculos para o ensino e para a formação humana, especialmente quando se trata de conteúdos tradicionalmente pouco explorados nos currículos, como a própria probabilidade (LOPES, 2008). É nesse ponto que a modelagem na educação matemática se apresenta como uma mediação potente.

Ela, como defendem Barbosa (2001) e Biembengut e Hein (2007), não se restringe à aplicação de técnicas matemáticas a problemas dados, mas propõe uma abordagem dialógica, problematizadora e emancipatória da realidade. Nesse escopo, a modelagem é compreendida como um processo pedagógico no qual os estudantes constroem compreensões sobre os conceitos matemáticos a partir da investigação de situações reais, socialmente relevantes e abertas à interpretação.

A articulação entre essas duas dimensões — a técnica, oriunda da modelagem matemática, e a pedagógica, proposta pela modelagem na educação matemática — permite que o Ensino de probabilidade se desenvolva em uma perspectiva mais ampla e analítica. Em vez de restringir-se ao cálculo de frequências e à aplicação de fórmulas, os conceitos da probabilidade podem também ser compreendidos como um instrumento para interpretar fenômenos incertos,

construir explicações plausíveis, avaliar riscos e formular conjecturas fundamentadas em evidências que atendam às demandas sociais e culturais.

Nesse sentido, o Ensino de probabilidade tem densidade epistemológica e relevância social. Os estudantes aprendem a calcular probabilidades, compreendendo os pressupostos matemáticos dos modelos utilizados, analisando seus limites e refletindo eticamente sobre os resultados obtidos. Desenvolvem-se, assim, competências fundamentais para a formação cidadã no mundo contemporâneo, tais como o pensamento crítico, a argumentação, a tomada de decisão sob incerteza e a leitura qualiquantitativa da realidade.

Essa concepção de Ensino de probabilidade está em consonância com os documentos normativos que orientam a Educação Básica, como a Base Nacional Comum Curricular, o Currículo Paulista e o Currículo da Cidade. Tais documentos enfatizam a importância do desenvolvimento do pensamento probabilístico desde os anos iniciais da Educação Básica, com ênfase na resolução de problemas, na interdisciplinaridade, no uso de tecnologias digitais e na análise crítica de dados em contextos diversos (Brasil, 2017; São Paulo, 2019a; São Paulo, 2019b; São Paulo, 2021).

Portanto, a pergunta norteadora desta pesquisa conduz a uma compreensão sobre o Ensino de probabilidade que conjuga o rigor analítico da modelagem matemática, que assegura os pressupostos matemáticos que compõem o modelo, com os compromissos formativos propostos pela modelagem na educação matemática. Desta forma, o Ensino de probabilidade se revela mais promissor didaticamente e mais alinhado com os objetivos da formação integral dos estudantes.

6.1 APRESENTAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A construção de modelos probabilísticos a partir de dados empíricos enfrenta, em contextos educacionais, o desafio da escassez de informações observadas. No Ensino Médio, quando se propõe uma atividade de modelagem baseada, por exemplo, em resultados esportivos, a quantidade reduzida de partidas analisadas tende a limitar a validade estatística das estimativas, sobretudo quando certas transições entre estados não ocorrem. Para contornar esse problema, propõe-se aqui a utilização de um modelo híbrido que articula cadeias de Markov com a frequência relativa ajustada por suavização de Laplace.

As cadeias de Markov permitem modelar a dinâmica sequencial dos resultados, isto é, como os estados (vitória, empate ou derrota) se sucedem ao longo do tempo. Este tipo de estrutura é útil

para identificar padrões de comportamento e prever prováveis estados futuros com base no estado presente, considerando uma cadeia de primeira ordem (Ross, 2010). No entanto, como destacado anteriormente, nem todas as transições possíveis são observadas em uma amostra pequena, o que pode levar à atribuição de probabilidades nulas, o que é um problema tanto do ponto de vista estatístico quanto pedagógico.

Neste sentido, a suavização de Laplace é utilizada como ferramenta para corrigir essa limitação. O procedimento consiste em adicionar uma unidade a cada frequência observada, evitando que a ausência de um evento nos dados signifique que ele é impossível (Ross, 2010). Ao ajustar a matriz de transição com essa técnica, cria-se um modelo mais estável e representativo, especialmente útil em atividades de ensino nas quais o foco está no processo de construção do conhecimento, e não necessariamente na precisão estatística.

A proposta desse modelo híbrido encontra respaldo nos pressupostos da modelagem matemática como prática didática (Bassanezi, 2002). Para fins didáticos, essa abordagem permite que os estudantes compreendam que modelos são aproximações e que, como tal, podem ser ajustados e aprimorados à medida que novas informações são incorporadas.

No campo da educação matemática crítica, tal proposta também encontra respaldo. Para Barbosa (2001), a modelagem matemática, quando inserida em um contexto investigativo, permite aos estudantes compreenderem criticamente os limites e possibilidades dos modelos criados, mobilizando saberes matemáticos em articulação com fenômenos do cotidiano. Da mesma forma, Lopes (2008) destaca a importância de proporcionar ao estudante não apenas o domínio técnico dos conceitos de probabilidade, mas também a oportunidade de refletir sobre como esses conceitos se aplicam, ou não, a diferentes contextos e dados disponíveis.

Desta forma, a sequência didática propicia-se aos estudantes da 3ª série do Ensino Médio a vivência de um processo matemático mais completo, articulado aos fundamentos da modelagem, ao pensamento probabilístico e à crítica da própria produção matemática. Tal abordagem possibilita um ensino mais contextualizado, que favorece o desenvolvimento de competências como a interpretação, a argumentação e a tomada de decisões com base em dados (Brasil, 2017).

6.1.1 Etapa 1: coleta de dados e cálculo de frequências relativas

Esta etapa envolve a coleta de dados históricos dos últimos n jogos dos times analisados, categorizados em vitória (V), empate (E) ou derrota (D). Além disso, calculam-se as frequências relativas de cada resultado para cada time:

$$P_{Freq}V: \frac{\text{número de vitórias}}{\text{total de jogos}}$$

$$P_{Freq}E: \frac{\text{número de empates}}{\text{total de jogos}}$$

$$P_{Freq}D: \frac{\text{número de derrotas}}{\text{total de jogos}}$$

Também são registradas as transições entre estados, como por exemplo, quantas vezes uma vitória foi seguida por outra vitória, empate ou derrota.

6.1.2 Etapa 2: construção da matriz de transição com suavização de Laplace

A matriz de transição de Markov é estimada utilizando suavização de Laplace para evitar probabilidades nulas em casos de poucos dados. Para cada transição de estado i para j :

$$p_{ij} = \frac{N_{ij} + \alpha}{N_i + \alpha \times k}$$

Onde:

N_{ij} : número de transições observadas de i para j

N_i : total de ocorrências do estado i

α : parâmetro de suavização

k : número de estados possíveis (V, E, D)

6.1.3 Etapa 3: Combinação das probabilidades

As probabilidades de Markov P_{Markov} são combinadas com as probabilidades de frequência relativa P_{Freq} usando um peso λ ($0 \leq \lambda \leq 1$):

$$P_{Híbrida} = \lambda \times P_{Markov} + (1 - \lambda) \times P_{Freq}$$

A escolha de λ pode variar, mas a sugestão é: se há muitos dados históricos, λ pode ser maior, dando mais peso às Cadeias de Markov; se há poucos dados, λ pode ser menor, priorizando a frequência relativa.

6.1.4 Etapa 4: cálculo das probabilidades conjuntas

Assumindo independência condicional entre os times A e B, calculam-se as probabilidades conjuntas para o próximo jogo:

$$\text{Vitória de A: } P(V_A) = P_{Híbrida}(V_A) \times P_{Híbrida}(D_B)$$

$$\text{Vitória de B: } P(V_B) = P_{Híbrida}(V_B) \times P_{Híbrida}(D_A)$$

$$\text{Empate: } P(E) = P_{Híbrida}(E_A) \times P_{Híbrida}(E_B)$$

6.1.5 Etapa 5: normalização e cálculo das *odds* justas

As probabilidades conjuntas são normalizadas para que sua soma seja igual a 1:

$$P'(X) = \frac{P(X)}{P(V_A) + P(E) + P(V_B)}, \text{ onde } X \in \{V_A, E, V_B\}$$

Em seguida, calculam-se as *odds* justas, que representam o retorno esperado em um cenário equilibrado:

$$Odd(X) = \frac{1}{P'(X)}$$

6.1.6 Etapa 6: Análise crítica e reflexão ética

A etapa final da sequência didática consiste na realização de uma análise crítica dos resultados obtidos pelos modelos probabilísticos construídos pelos estudantes, bem como uma reflexão ética sobre os significados, usos e impactos sociais desses números, com destaque para o tema das apostas esportivas, hoje amplamente difundidas no contexto brasileiro.

Após aplicarem diferentes técnicas de modelagem, como a frequência relativa, cadeias de Markov e a suavização de Laplace, os alunos são convidados a validar seus modelos, isto é, a analisar se os resultados estimados fazem sentido diante do contexto dos jogos estudados. Ao perceberem diferenças entre o que o modelo prevê e o que de fato aconteceu nas partidas, abre-se espaço para a problematização: os modelos são aproximações da realidade, construídos a

partir de suposições e dados limitados (Bassanezi, 2002). Essa constatação é fundamental para que os estudantes desenvolvam uma postura crítica diante da Matemática e de suas aplicações.

Nesse sentido, as seguintes perguntas orientadoras podem auxiliar o processo de validação e análise crítica:

- Os números encontrados com o modelo fazem sentido para os jogos analisados?
- Que fatores o modelo não considerou e que poderiam influenciar o resultado?
- Como mais dados (de outros jogos ou campeonatos) poderiam alterar as estimativas?
- Até que ponto podemos confiar nesses modelos como previsões do futuro?

Além do aspecto técnico, esta etapa também propõe uma reflexão ética sobre os usos da probabilidade em contextos reais, especialmente nas apostas esportivas, prática cada vez mais presente entre jovens e adolescentes. A modelagem matemática, ao ser usada para estimar probabilidades de vitória, empate ou derrota, é a base do funcionamento das casas de apostas. No entanto, essa prática levanta importantes questões sociais e éticas, que devem ser abordadas criticamente no ambiente escolar.

Como destaca Lopes (2008), o ensino da probabilidade não deve se limitar à resolução de problemas numéricos, mas precisa fomentar o desenvolvimento de um pensamento estatístico consciente, sensível às implicações sociais do uso da Matemática. Do mesmo modo, Barbosa (2001) defende que a modelagem, no contexto da educação matemática crítica, deve proporcionar espaços para que os estudantes questionem a produção, a interpretação e a circulação do conhecimento matemático na sociedade.

Assim, algumas questões éticas e críticas que podem ser lançadas ao grupo incluem:

- Qual a relação entre o modelo que construímos e as apostas esportivas?
- As probabilidades que estimamos podem ser usadas para ganhar dinheiro? Isso seria justo?
- Quem ganha e quem perde com o crescimento das casas de apostas?
- As apostas são apenas uma forma de lazer ou podem gerar vício e problemas sociais?
- De que forma a matemática pode ser usada para criticar e compreender esse mercado?

Ao abordar o tema das apostas de maneira crítica, esta etapa promove o exercício da cidadania matemática, conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), que orienta o ensino da matemática para além da técnica, integrando competências voltadas à

argumentação, à análise crítica de dados e à tomada de decisões responsáveis em contextos diversos.

Conclui-se, assim, que esta etapa não se encerra na checagem dos cálculos, mas amplia-se em direção a um posicionamento crítico sobre os limites, riscos e responsabilidades envolvidas na aplicação da matemática à vida social. Ao discutir o impacto das apostas e dos modelos matemáticos que as sustentam, os estudantes são convidados a reconhecer o poder da matemática — e, ao mesmo tempo, a responsabilidade ética que seu uso carrega.

6.1.7 Exemplo de aplicação do modelo: previsão de *odds* para o jogo São Paulo x Vasco

São Paulo e Vasco são clubes que disputam o Campeonato Brasileiro – Série A, e nos últimos cinco jogos, o retrospecto de cada um é: São Paulo (empate, derrota, vitória, derrota e derrota); Vasco (derrota, derrota, vitória, derrota e derrota). Esse histórico considera do jogo mais antigo (o 5º jogo) até o mais recente. Portanto, como o último resultado do São Paulo, por exemplo, foi uma derrota, esse é o resultado mais recente. Assim, o estado atual do São Paulo é derrota (D) e o do Vasco, é derrota (D).

Na Etapa 1, devemos calcular as frequências relativas, logo, teremos:

$$P_{Freq}V_{S\tilde{A}O} = \frac{1}{5}$$

$$P_{Freq}V_{VAS} = \frac{1}{5}$$

$$P_{Freq}E_{S\tilde{A}O} = \frac{1}{5}$$

$$P_{Freq}E_{VAS} = 0$$

$$P_{Freq}D_{S\tilde{A}O} = \frac{3}{5}$$

$$P_{Freq}D_{VAS} = \frac{4}{5}$$

Na Etapa 2, devemos construir as matrizes de transição com a suavização de Laplace ($\alpha = 1$). Para o São Paulo, a sequência é $E \rightarrow D \rightarrow V \rightarrow D \rightarrow D$, assim a contagem por estado atual é:

E, 1 transição ($E \rightarrow D$); V, 1 transição ($V \rightarrow D$); D, 2 transições ($D \rightarrow V$, $D \rightarrow D$). Aplicando suavização ($\alpha = 1, k = 3$):

$$P_{V \rightarrow V}(S\tilde{A}O) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{V \rightarrow E}(S\tilde{A}O) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{V \rightarrow D}(S\tilde{A}O) = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_{E \rightarrow V}(S\tilde{A}O) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{E \rightarrow E}(S\tilde{A}O) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{E \rightarrow D}(S\tilde{A}O) = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_{D \rightarrow V}(S\tilde{A}O) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}; P_{D \rightarrow E}(S\tilde{A}O) = \frac{0+1}{2+3} = \frac{1}{5}; P_{D \rightarrow D}(S\tilde{A}O) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

A matriz de transição é: $M_{S\tilde{A}O} =$

	V	E	D
V	1/4	1/4	1/2
E	1/4	1/4	1/2
D	2/5	1/5	2/5

Para o Vasco, a sequência é $D \rightarrow D \rightarrow V \rightarrow D \rightarrow D$, assim a contagem por estado atual é: E, nenhuma transição; V, 1 transição ($V \rightarrow D$); D, 3 transições (1 $D \rightarrow V$, 2 $D \rightarrow D$). Aplicando suavização ($\alpha = 1, k = 3$):

$$P_{V \rightarrow V}(VAS) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{V \rightarrow E}(VAS) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}; P_{V \rightarrow D}(VAS) = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_{E \rightarrow V}(VAS) = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}; P_{E \rightarrow E}(VAS) = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}; P_{E \rightarrow D}(VAS) = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

$$P_{D \rightarrow V}(VAS) = \frac{1+1}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P_{D \rightarrow E}(VAS) = \frac{0+1}{3+3} = \frac{1}{6}; P_{D \rightarrow D}(VAS) = \frac{2+1}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A matriz de transição é: $M_{VAS} =$

	V	E	D
V	1/4	1/4	1/2
E	1/3	1/3	1/3
D	1/3	1/6	1/2

Na Etapa 3, há a combinação das probabilidades. Tanto São Paulo como Vasco foram derrotados na última partida, então, usaremos a linha D das respectivas matrizes de transição. O peso $\lambda = 0,6$ será adotado nesse modelo, dando uma importância maior à probabilidade calculada via Markov.

$$P_{Híbrida}V_{(S\tilde{A}O)} = 0,6 \times \frac{2}{5} + 0,4 \times \frac{1}{5} = 0,32$$

$$P_{Híbrida}E_{(S\tilde{A}O)} = 0,6 \times \frac{1}{5} + 0,4 \times \frac{1}{5} = 0,20$$

$$P_{Híbrida}D_{(S\tilde{A}O)} = 0,6 \times \frac{2}{5} + 0,4 \times \frac{3}{5} = 0,48$$

$$P_{Híbrida}V_{(VAS)} = 0,6 \times \frac{1}{3} + 0,4 \times \frac{1}{5} = 0,28$$

$$P_{Híbrida}E_{(VAS)} = 0,6 \times \frac{1}{6} + 0,4 \times 0 = 0,10$$

$$P_{Híbrida}D_{(VAS)} = 0,6 \times \frac{1}{2} + 0,4 \times \frac{4}{5} = 0,62$$

Na Etapa 4, assume-se a independência condicional entre os times, calculando-se as probabilidades conjuntas para o próximo jogo:

$$\text{Vitória do São Paulo: } P(V_{S\tilde{A}O}) = 0,32 \times 0,62 = 0,1984$$

$$\text{Vitória do Vasco: } P(V_{VAS}) = 0,28 \times 0,48 = 0,1344$$

$$\text{Empate: } P(E) = 0,20 \times 0,10 = 0,0200$$

Na Etapa 5, normaliza-se as probabilidades e calcula-se as *odds* justas. Normalizando, temos:

$$\text{Vitória do São Paulo: } P'(V_{S\tilde{A}O}) = \frac{0,1984}{0,1984+0,1344+0,02} = \frac{0,1984}{0,3582} \approx 0,5624$$

$$\text{Vitória do Vasco: } P'(V_{VAS}) = \frac{0,1344}{0,1984+0,1344+0,02} = \frac{0,1344}{0,3582} \approx 0,3810$$

$$\text{Empate: } P(E) = \frac{0,02}{0,1984+0,1344+0,02} = \frac{0,02}{0,3582} \approx 0,0567$$

Calculando-se as *odds* justas:

$$Odd(S\tilde{A}O) = \frac{1}{0,5624} \approx 1,78$$

$$Odd(VAS) = \frac{1}{0,3810} \approx 2,63$$

$$Odd(E) = \frac{1}{0,0567} \approx 17,64$$

A Etapa 6 é destinada às reflexões acerca dos números encontrados nesse modelo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo investigar como as ideias da modelagem matemática, articuladas aos propósitos da modelagem na educação matemática, podem contribuir para o ensino de probabilidade. A partir da análise de diferentes propostas e referenciais teóricos, evidenciou-se que há um potencial promissor na articulação entre essas duas abordagens para promover um ensino mais reflexivo, contextualizado e formativo.

No que tange à prática docente, a investigação permitiu identificar que há, nas produções sobre modelagem na educação matemática e sobre modelagem matemática, um conjunto expressivo de atividades que, embora com propósitos distintos, podem ser reelaboradas com vistas a atingir objetivos pedagógicos mais amplos. Essa constatação aponta para a possibilidade de ressignificar tais atividades de modo a articular, de forma mais profunda, os conteúdos matemáticos com a realidade dos estudantes e com a formação de competências críticas. Ao reformular essas propostas, os professores passam a dispor de alternativas metodológicas que dinamizam o processo de ensino-aprendizagem e favorecem a construção de sentidos para o estudo da probabilidade, frequentemente associado à abstração e à descontextualização. Assim, esta pesquisa reafirma a importância de uma prática docente reflexiva, criativa e comprometida com a formação integral dos estudantes.

No âmbito da pesquisa, o produto educacional desenvolvido constitui uma proposta que visa contribuir para o enfrentamento das dificuldades históricas no ensino de probabilidade. Entretanto, é necessário reconhecer que os limites da investigação aqui realizada nos colocam diante de uma tarefa pendente: a de avaliar, em contextos concretos de sala de aula, a efetividade do material produzido em relação à aprendizagem dos alunos. Trata-se, portanto, de uma etapa futura imprescindível, que permitirá validar a proposta apresentada e compreendê-la em sua dinâmica prática, considerando as múltiplas variáveis que incidem no processo educativo. A pesquisa, nesse sentido, não se conclui com este trabalho, mas projeta-se como um processo em continuidade, aberto a novas análises, revisões e aprimoramentos.

Quanto à formação profissional, esta pesquisa evidencia o papel formativo da investigação na constituição do professor como sujeito que pensa, problematiza e transforma a própria prática. A vivência investigativa proporcionada pelo mestrado profissional, especialmente no contexto do PROFMAT, mostrou-se fundamental para ampliar a compreensão do ensino de Matemática não como uma ação meramente técnica, mas como uma prática educativa complexa, atravessada por dimensões epistemológicas, pedagógicas e sociais. A pesquisa tornou-se, assim, um espaço privilegiado de formação continuada, no qual foi possível (re)significar

experiências docentes, confrontar saberes instituídos e elaborar propostas de intervenção fundamentadas teoricamente. Entende-se, portanto, que investir na formação continuada dos professores, por meio da pesquisa, é investir na qualidade da educação matemática e na valorização do profissional da educação como agente transformador.

Por fim, destaca-se que esta investigação abre caminhos para novas possibilidades. A aplicação do produto educacional, sua avaliação em diferentes contextos escolares e a articulação com outras áreas do conhecimento se apresentam como desdobramentos futuros relevantes. Além disso, propõe-se como desafio o fortalecimento de redes de colaboração entre professores-pesquisadores, com vistas à construção coletiva de saberes didáticos que respondam aos desafios contemporâneos do ensino da Matemática. Assim, esta pesquisa se insere no esforço coletivo de ampliar as reflexões e práticas em direção a uma educação matemática crítica, contextualizada e socialmente referenciada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBOSA, J. C. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2001.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARROS, L. Y. de. *Modelagem para probabilidade de frutificação em café Arábica baseado em ocupação de metâmeros*. 2017. 41 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2017.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem Matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*. Blumenau: Furb, 1999.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2007.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica*. Brasília: MEC, 2020.
- BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.
- BURAK, D. A modelagem matemática na perspectiva da educação matemática: olhares múltiplos e complexos. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, Brasil, v. 1, n. 1, p. 96–111, 2019.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Aspectos Epistemológicos da Educação Matemática: diálogos e contribuições para a construção de um novo constructo. *Acta Scientiae*, v.10, n.2, p.93-106, jul./dez. 2008.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática, Currículo e Formação de Professores: Obstáculos e Apontamentos. *Educação Matemática em Revista*, [S. l.], v. 20, n. 46, p. 53–62, 2015.

CHAUÍ, M. *Convite à Filosofia*. São Paulo: Ática, 2000.

COLLE, J. E. *Modelagem e ajuste de funções densidade de probabilidade para tamanhos de partículas encontrados em sítios arqueológicos no Vale do Rio Paranapanema*. 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2019.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 2, n. 3, p. 50-67, 2007. Universidade Federal de Santa Catarina.

COUTINHO, C. Q. S. Introdução ao conceito de probabilidade e os livros didáticos para Ensino Médio no Brasil. In: SALCEDO, A. (org.). *Educación estadística en América Latina: tendencias y perspectivas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2013. p. 193-210.

D’AVILA JÚNIOR, R. E. S. *Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade? Uma sequência didática para ensino de probabilidade*. 2024. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Canoas, Canoas, 2024.

D’AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, L. R. Algumas reflexões sobre Educação Matemática. *Temas & Debates*, v. 1, n. 3, p. 45-60, 1991.

ERVOLINO, L. L. *Os fractais articulados à teoria do caos: uma possibilidade de ensino na educação básica*. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Instituto de Ciências Ambientais,

Químicas e Farmacêuticas, Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema, Diadema, 2023.

FERREIRA, A. L. P. *Probabilidade e Loterias*. 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

FERREIRA, G. P.; SILVEIRA, A.; SILVA, L. A. da. *A Modelagem Matemática ao Longo da História e o Surgimento da Modelação Matemática no Brasil*. In: XI ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RETROSPECTIVA E PERSPECTIVAS. 18 a 21 jul. 2013, Curitiba, PR. *Anais XI ENEM* (publicado em CD ROM).

FREITAS, W. S. *Uma crítica às probabilidades da Lotogol*. 2019. 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

FREITAS, A. R. de; LOIBEL, S. M. C.; ANDRADE, M. G. de; VAL, J. B. R. do. Modelagem do crescimento populacional do rebanho bovino brasileiro. *Revista Brasileira de Zootecnia*, v. 34, n. 6, p. 2225-2232, 2005.

GADAMER, H. G. *Verdade e Método*. Petrópolis: Vozes, 1997.

GASPERIN, I. M. *Modelagem matemática: uma metodologia para o ensino de Matemática na 3ª série do 1º grau*. 1990. 36 p. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática e Ciências) – Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, Guarapuava, 1990.

HERZOG, R. C. B. *et al.* Probabilidade na Educação Básica: Uma proposta de jogo como recurso didático. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Recife, v. 10, n. 2, p. 1-14, 2019.

KLÜBER, T. E. *Modelagem Matemática e educação matemática crítica*. São Paulo: Editora Unesp, 2011.

KLÜBER, T. E. *Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática*. 2012. 396 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KLUTH, V. S. *Estruturas da álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento*. 2005. 192 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos CEDES*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. *Estocástica nas séries iniciais*. In: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. *Anais [...]*. Campinas: LEM/IMECC/UNICAMP, 2005. p. 1-8.

MELILLO, C. R. *Modelagem matemática no futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método do caso*. 2011. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

MIRANDA, D. S. *Proposta pedagógica para o ensino de probabilidades com aplicação do Teorema de Bayes no estudo do Problema de Monty Hall*. 2024. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes Maldonado", Barra do Bugres, 2024.

RAMOS, L. F. P.; LEMOS, H. C. F.; BATISTA, B. D. O. Modelagem matemática para previsão de jogos de futebol. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 1, p. 46–64, 2021.

RIBEIRO, M. A.; BRIGHENTI, C. G. R. Aplicação de jogos de pôquer através de tecnologias digitais para ensino de probabilidade. *Professor de Matemática Online (PMO)*, v. 9, n. 1, 2021.

ROSS, S. M. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Tradução de Alberto Resende de Conti. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SANTOS, M. E. P. dos. *Modelagem matemática: uma metodologia para o ensino de Matemática na 4ª série do 1º grau*. 1990. 62 p. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática e Ciências) – Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, Guarapuava, 1990.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Currículo Paulista*. São Paulo, 2019a.

SÃO PAULO (Município). *Currículo da Cidade: Ensino Médio: Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias*. São Paulo: SME/COPED, 2021. 82 p.

SÃO PAULO (Município). *Currículo da Cidade: Matemática*. São Paulo: SME/COPED, 2019b. 132 p.

SOUZA, A. P. S. de. *Matemática e Previdência Social: modelagem, cálculos e os impactos da reforma de 2019*. 2025. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT), Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2025.

VIALI, L. Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Porto Alegre, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

APÊNDICE A – FICHAMENTO DE LEITURA

Aluno: Karl Willian Sousa Santos

Programa Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Data: 02/02/2025

MELILLO, Célio Roberto. *modelagem matemática no Futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método do caso*. 2011. 218 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

1. Resumo informativo

O texto está estruturado em cinco capítulos que seguem uma sequência lógica e progressiva, articulando teoria, prática e análise, com o objetivo de investigar o potencial educativo da modelagem matemática no contexto escolar. A organização do trabalho revela uma abordagem metodológica coerente, comprometida com os princípios da educação progressiva e com uma perspectiva qualitativa de pesquisa.

A abordagem adotada pelo autor é marcadamente qualitativa e interpretativa, voltada para a compreensão profunda dos fenômenos educacionais em contextos específicos. O autor assume uma perspectiva relativista de conhecimento, na qual a verdade é vista como construída a partir das interações e experiências dos sujeitos envolvidos. Essa escolha metodológica sustenta-se na valorização do processo de aprendizagem, mais do que nos produtos, e reconhece o papel ativo dos estudantes na construção de sentidos.

Ao longo de todo o texto, o autor enfatiza o papel do professor como mediador do processo educativo, alguém que orienta sem impor, que organiza sem limitar a criatividade, e que estimula a reflexão crítica sem anular a autonomia dos alunos. A integração entre teoria e prática, a valorização da experiência concreta, e o estímulo ao pensamento crítico revelam uma abordagem pedagógica coerente com os princípios da educação progressiva e com uma concepção emancipatória do ensino de matemática.

O primeiro capítulo estabelece a base conceitual do estudo ao discutir as diferentes concepções de modelagem matemática presentes no campo educacional. O autor propõe uma visão ampliada da modelagem, compreendida não somente como aplicação de técnicas matemáticas, mas como um processo reflexivo de construção conceitual, pautado na formulação de pressupostos e na contextualização dos problemas. Ao destacar seu caráter investigativo e formativo, o autor introduz a modelagem como uma prática educativa que conecta a matemática

escolar ao mundo real, favorecendo aprendizagens significativas e o desenvolvimento de habilidades críticas nos alunos.

O segundo capítulo aprofunda os fundamentos teóricos ao dialogar com o pensamento de John Dewey, especialmente sua proposta de educação progressiva centrada na experiência e no pensamento reflexivo. O autor defende que a escola deve promover a participação ativa do estudante na construção do conhecimento, superando práticas instrucionais tradicionais. Nesse contexto, o método do caso é apresentado como uma estratégia pedagógica que estimula o enfrentamento de situações reais e complexas, favorecendo a investigação, a colaboração e o desenvolvimento da autonomia intelectual. A convergência entre modelagem matemática, método do caso e educação progressiva é delineada como o alicerce filosófico do estudo.

Para Dewey, o processo de aprendizagem deveria estar enraizado na experiência do aluno, valorizando a interação com o ambiente e a construção ativa do conhecimento. Ele criticava os métodos tradicionais, baseados na transmissão passiva de conteúdos, e propunha uma educação centrada no pensamento reflexivo, na resolução de problemas reais e na participação ativa do estudante. Dewey acreditava que a escola deveria ser um espaço de experimentação, no qual o aluno aprende por meio da investigação, da dúvida e da ação, desenvolvendo não apenas habilidades cognitivas, mas também sociais e éticas.

No contexto da modelagem matemática e do uso do método do caso, a influência de Dewey é evidente. Sua concepção de educação progressiva serve de fundamento para práticas pedagógicas que buscam integrar teoria e prática, promover o protagonismo estudantil e estimular o pensamento crítico. Ao defender que o ato de pensar é um instrumento para dominar o futuro, Dewey reforça a importância de atividades que desafiem os alunos a formular hipóteses, tomar decisões e refletir sobre as consequências de suas escolhas. Assim, a aplicação da modelagem matemática em situações reais, como a analisada no estudo, dialoga diretamente com o legado de Dewey, ao oferecer uma aprendizagem significativa, contextualizada e voltada para a formação integral do indivíduo.

No terceiro capítulo, o autor descreve o processo de elaboração da atividade de modelagem, ancorada nos princípios discutidos anteriormente. A proposta se baseia na análise das últimas rodadas do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2010, proporcionando uma situação. A escolha do tema visa mobilizar o interesse dos alunos, ao mesmo tempo em que permite a exploração de conceitos probabilísticos. A construção de um modelo protótipo pelo professor antecede a aplicação da atividade, funcionando como preparação para prever possíveis dificuldades e ajustar o encaminhamento didático. A concepção da atividade valoriza a

autonomia dos estudantes na formulação e validação de seus modelos, alinhando-se às concepções de Dewey e Bean sobre o papel formativo da modelagem matemática.

O quarto capítulo apresenta os procedimentos metodológicos adotados, destacando a escolha de um paradigma interpretativo e qualitativo, adequado à complexidade dos processos educativos investigados. A pesquisa foi conduzida em uma disciplina de modelagem matemática para licenciandos em Matemática da UFOP. Os instrumentos de coleta de dados incluíram gravações de áudio, relatórios escritos, anotações em caderno de campo e observações em sala, permitindo uma análise multifacetada das interações e aprendizagens dos estudantes. O autor justifica o uso da análise de conteúdo como técnica de tratamento dos dados, ressaltando seu potencial para identificar unidades de sentido e categorias relevantes à luz dos objetivos da pesquisa.

Por fim, o último capítulo relata a implementação da atividade em sala de aula e apresenta uma análise detalhada dos resultados, conectando-os aos eixos teóricos e pedagógicos anteriormente estabelecidos. O foco recai sobre o protagonismo estudantil, a construção colaborativa do conhecimento e o desenvolvimento do pensamento reflexivo. A análise qualitativa dos dados evidenciou o engajamento dos alunos, sua capacidade de articular conceitos matemáticos a contextos reais, e a importância da mediação docente para a organização e aprofundamento das ideias. O capítulo também aponta contribuições da atividade para a formação docente e sugere caminhos para a continuidade da pesquisa.

2. Em que esta leitura contribui para a minha pesquisa?

2.1 O que é probabilidade subjetiva?

O autor diz que a probabilidade subjetiva é uma medida que representa o “grau de certeza” do observador a respeito da ocorrência de um evento, ou seja, é a probabilidade do “eu acho” ou da crença pessoal sobre a chance de algo acontecer.

2.2 Quais exemplos de aplicação da probabilidade subjetiva são citados?

O autor menciona aplicações em companhias de seguros, mercado financeiro, previsão do tempo, planos de saúde e apostas esportivas.

2.3 O que é modelagem matemática?

O autor define modelagem matemática como a criação de modelos fundamentados na adoção de premissas e formulação de pressupostos que sistematizam um problema real usando conceitos matemáticos.

2.4 Como a modelagem matemática pode contribuir para o ensino da probabilidade?

O autor diz que a modelagem permite aproximar problemas reais, como os resultados de jogos de futebol, transformando-os em problemas matemáticos para que os alunos construam conhecimento e desenvolvam o pensamento probabilístico.

2.5 É possível transformar situações do cotidiano relacionadas à probabilidade em problemas matemáticos?

O autor diz que sim, citando como exemplo a modelagem dos resultados dos jogos do campeonato brasileiro de futebol para atribuir probabilidades a vitória, derrota ou empate.

2.6 O que é o método do caso na modelagem matemática?

O autor diz que é um método inspirado na educação progressiva que usa casos reais para estimular a construção de modelos matemáticos pelos alunos, promovendo reflexão e aprendizagem baseada na experiência.

2.7 Que atitudes o professor deve ter para introduzir modelagem matemática no ensino?

O autor diz que o professor precisa ter audácia, desejo de modificar a prática, disposição para aprender e conhecimento da literatura para ajustar modelos à realidade escolar e promover descobertas significativas.

2.8 O que o autor diz sobre a influência da mídia nas percepções de probabilidade dos alunos?

O autor diz que a exposição maciça da mídia em temas específicos, como eleições ou casos policiais, pode influenciar fortemente as respostas e estimativas subjetivas dos alunos, gerando tendências ou enviesamentos nas percepções.

2.9 Como os alunos inicialmente consideram os aspectos para fazer palpites em apostas esportivas?

O autor diz que, no início, os alunos consideram fatores como desempenho dos times, qualidade do time, mando de campo, entre outros, baseando-se em observações e crenças pessoais, que podem ser modificadas ao longo da atividade de modelagem.

2.10 O que diz o autor sobre o envolvimento dos alunos durante as atividades de modelagem relacionadas ao futebol?

O autor observa que, apesar do interesse inicial demonstrado por alguns alunos, em certos casos houve falta de envolvimento efetivo dos estudantes, especialmente em trabalhos em grupo, o que surpreendeu os pesquisadores.

2.11 Qual a visão do autor sobre a legalização das apostas esportivas?

O autor relata que as respostas dos alunos foram divididas, com argumentos favoráveis à legalização pela regularização de uma prática já existente, e argumentos contrários focando na possibilidade de corrupção, fraude e má-fé, refletindo a desconfiança social.

2.12 Por que o autor considera importante trabalhar a probabilidade subjetiva no Ensino Médio?

O autor afirma que incluir a probabilidade subjetiva contribui para diminuir a distância entre o modo como os alunos pensam e agem em situações reais e o conhecimento produzido na escola, fortalecendo o raciocínio crítico e a capacidade de argumentação.

3. Citações do texto que respondem à interrogação norteadora e as perguntas subjacentes

3.1 Quais são os objetos teorizados aplicáveis ao ensino básico?

"Em aulas sobre cálculo combinatório e probabilidades, utilizamos jogos com cartas, dados, moedas, etc., o que promove avaliação positiva do efeito desse tipo de trabalho no ensino básico" (Melillo, 2011, p. 28).

"O uso de exemplos do cotidiano, como o futebol, aproxima os estudantes das noções probabilísticas, tornando-as mais concretas e relevantes para o ensino básico" (Melillo, 2011, p. 30).

3.2 Como a probabilidade é teorizada no corpo do conhecimento matemático hoje?

"Delimitamos os conceitos de probabilidade clássica, frequentista e subjetiva, sendo esta última uma medida que representa o 'grau de certeza' do observador a respeito da ocorrência de eventos" (Melillo, 2011, p. 74).

"A probabilidade subjetiva é entendida como uma medida que envolve crenças pessoais e intuição, fundamentais na quantificação das chances em situações reais como jogos de futebol" (Melillo, 2011, p. 75).

3.3 O que a história da matemática nos ensina sobre o desenvolvimento destes conceitos?

"A probabilidade subjetiva tem múltiplas aplicações e sua emergência histórica está vinculada a contextos sociais, econômicos e éticos que permeiam diferentes áreas, como o mercado de apostas" (Bernabeu, 1999, citado em Melillo, 2011, p. 75).

"Três formas diferentes de interpretar e solucionar problemas revelam como a modelagem matemática evoluiu incorporando juízos subjetivos e raciocínio matemático ao longo da história" (Melillo, 2011, p. 50).

3.4 Estão destacados nos propósitos da modelagem matemática na educação matemática o ensino específico do conceito de probabilidade?

"Objetivamos diminuir o distanciamento entre a maneira de agir e pensar em problemas escolares e a tomada de decisões em situações extraescolares, por meio da modelagem matemática envolvendo conceitos probabilísticos" (Melillo, 2011, p. 30).

"A modelagem matemática aplicada ao futebol favorece o entendimento da probabilidade como uma ferramenta para expressar crenças justificadas e embasadas em evidências" (Melillo, 2011, p. 74).

3.5 Quais são os fundamentos que orientam essas abordagens?

"Nossa abordagem pedagógica inspira-se na educação progressiva de Dewey, pautada no desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo dos estudantes" (Melillo, 2011, p. 155).

"A problemática de decisões cotidianas fundamenta-se no conceito de probabilidade subjetiva, incentivando a reflexão e o juízo de valores, segundo a filosofia educacional de Dewey" (Melillo, 2011, p. 117).

3.6 Modelagem conecta coerentemente probabilidade e situações vivenciáveis?

"A modelagem matemática, conduzida pelo método do caso, promove situações que estimulam a reflexão dos estudantes, associando conhecimento escolar a diferentes ramos da atividade humana" (Melillo, 2011, p. 155).

"As experiências do cotidiano influenciaram a forma das estudantes lidarem com problemas matemáticos, enquanto a atividade em sala afetou suas ações diárias, mostrando a conexão entre modelagem e vivências reais" (Melillo, 2011, p. 145).

3.7 O que é considerado pedagógico nas pesquisas sobre modelagem?

"Modelar deve ser considerado um objetivo educacional essencial, pois alia o raciocínio matemático à formação integral, privilegiando o desenvolvimento do pensamento e da linguagem ao invés da mera sistematização" (Melillo, 2011, p. 74).

"Ao sugerir a formação de grupos com níveis semelhantes de conhecimento em futebol, evita-se hierarquia que comprometa o debate e o desenvolvimento do raciocínio coletivo, valorizando a pesquisa e argumentação" (Melillo, 2011, p. 117).

4. Referências Úteis

4.1. ARAÚJO, J. L. *Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica*. – In: Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009.

- 4.2 CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. *A modelagem matemática: uma epistemologia da matemática aplicada*. Londrina: CNMEM, 2009
- 4.3 D'AMBRÓSIO, U. *Na sala de aula: a História, a Etnomatemática e a Modelagem*. – Encontro Regional de Professores de Matemática - Campinas: Unicamp, 2003.
- 4.4 BEAN, D. “*O que é modelagem matemática?*”. educação matemática em Revista. São Paulo, n. 9/10, p. 49-57, abril 2001.
- 4.5 ABRANTES, P. et al. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. [Lisboa]: Associação de professores de matemática. 226p. 1999.
- 4.6 BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- 4.7 DEWEY, J. *Democracia e Educação*. (Tradução de Godofredo Rangel e Anísio Teixeira). São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. 421 p.
- 4.8 BLUM, W.; NISS, M. *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction*. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, Feb. 1991.