

Camila Andreatta da Silva Brezinski

Do plano ao espaço, o uso da Geometria para compreender o funcionamento do GPS

Vitória

2025

Camila Andreatta da Silva Brezinski

Do plano ao espaço, o uso da Geometria para compreender o funcionamento do GPS

Dissertação de mestrado apresentada ao
PROFMAT como parte dos requisitos exi-
gidos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior

Vitória

2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

B828p Brezinski, Camila Andreatta da Silva, 1988-
Do plano ao espaço, o uso da Geometria para compreender o
funcionamento do GPS / Camila Andreatta da Silva Brezinski. -
2025.
53 p. : il.

Orientador: Alcebíades Dal Col Júnior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.

1. Sistema de Posicionamento Global. 2. Geometria. I. Dal
Col Júnior, Alcebíades. II. Universidade Federal do Espírito
Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Do plano ao espaço, o uso da Geometria para compreender o funcionamento do GPS”

Camila Andreatta da Silva Brezinski

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25/06/2025 por:

Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior
Orientador – UFES

Prof. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Membro Interno – UFES

Prof. Dr. Camilo Campana
Membro Externo – UFSC





Folha de Assinaturas Camila Andreatta da Silva Brezinski

Data e Hora de Criação: 23/06/2025 às 12:45:26

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Camila Andreatta da Silva Brezinski.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 3f4a288ecb8bce6776a8cb81993e5f4d8c22a1f2a2df10e9db747ae1f048a464

[SHA512]: 25fb5e267fafce9f73d849f64b7cc792319f15b12ab36d626631a8864eda7a253253ed943d46bc0f9d7fb454aada736b1d3916cbeb15dc483d34a461a1b48d69

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Alcebíades Dal Col Júnior (alcebiades.col@ufes.br)

Data/Hora: 25/06/2025 - 10:15:07, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.275582, -40.304148]

[SHA256]: ec189b98ee6c5b01d19e1e0a08d1c11cd54cf902616e053b35d0490b4c38a535

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Camilo Campana (camilo.campana@ufsc.br)

Data/Hora: 25/06/2025 - 10:01:42, IP: 189.4.110.20, Geolocalização: [-27.593534, -48.523047]

[SHA256]: 6f1796e48d30e9867be0bef58ff00731806c7ede1407310c3a7646f3ece2b151

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)

Data/Hora: 25/06/2025 - 14:46:06, IP: 200.137.65.104

[SHA256]: 1b002703a1247c84c8512b98a63d58a7561ad1ac66f1d2c4bcb52f915f335f4a

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

25/06/2025 14:46:06 - Envelope finalizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.104

25/06/2025 14:46:06 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.104

25/06/2025 14:45:58 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.104

25/06/2025 10:15:07 - Assinatura realizada por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.102

25/06/2025 10:14:05 - Envelope visualizado por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.102

25/06/2025 10:01:42 - Assinatura realizada por camilo.campana@ufsc.br, IP 189.4.110.20

25/06/2025 10:01:20 - Envelope visualizado por camilo.campana@ufsc.br, IP 189.4.110.20

25/06/2025 07:00:40 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

25/06/2025 07:00:39 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

23/06/2025 12:45:26 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.102

Para Júlia e Vítor, vocês são meu coração e minha vida. Nosso segredo pra sempre.

Agradecimentos

A Deus, sempre em primeiro lugar, por todas as bênçãos que derramou sobre a minha vida durante todo o período do mestrado, e por todas as provas que Ele me fez passar, elas me tornaram mais resiliente, somente assim tive a capacidade de concluir este projeto.

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado e nunca mediram esforços para me dar o necessário (seja cuidando das crianças, ajudando na casa, fazendo almoço, apenas perguntando “e a sua dissertação?”, além de tantas outras coisas) para que eu conseguisse concluir essa etapa dos meus estudos.

Ao meu esposo, que me suporta desde o início dessa loucura que foi o PROFMAT em minha vida. Desde ter que fazer duas vezes o ENA e duas vezes o ENQ até precisar de espaço, paz e sossego para conseguir terminar esta dissertação. Sei que fez todo o possível para me ajudar.

Aos meus filhos, Júlia e Vítor, que quando comecei essa jornada nem sequer existiam, mas que se tornaram minha força e alegria. Amo muito vocês.

À minha sogra, Marilza, que, mesmo morando longe, ajudou com as crianças em todas as oportunidades que pôde; e, ao meu sogro, Romário, que abria mão da presença dela para que me ajudasse.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior, por ter tido paciência comigo. Como foi tranquilizador a cada mensagem enviada com dúvidas receber uma resposta que, além de esclarecer o que era perguntado, sempre tinha uma palavra de incentivo e valorização daquilo que estava sendo feito. Foi um prazer ter sido orientada por um colega da graduação e professor excepcional. Obrigada mesmo! Você não faz ideia de quanto me ajudou.

Aos professores do PROFMAT, poderia citar nomes e dizer o que cada um fez para que se tornasse importante porém, para não correr o risco de esquecer alguém, só quero dizer obrigada por todas as oportunidades de aprendizado que me foram oferecidas.

E, finalmente, à Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Damasceno Filho, que permitiu a aplicação das atividades práticas propostas neste trabalho.

“A coisa mais bonita sobre o aprendizado é que ninguém pode tirá-lo de você.”
(Albert Einstein)

Resumo

Nesta dissertação exploramos os conceitos básicos da Geometria Plana e Espacial que tornam possíveis uma compreensão do funcionamento do Sistema de Posicionamento Global - *GPS*. Além disso, é trabalhada a interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e Geografia. A presença do *GPS* nos *smartphones* ajuda instigar a curiosidade dos estudantes como ponto de partida para o aprendizado da Geometria. Ao fazermos o aluno refletir sobre como é possível o celular localizar e ser localizado, abrimos um caminho para mostrar como conteúdos/conhecimentos básicos estão envolvidos na tecnologia que eles tanto apreciam. Ao mostrar que a Geometria e a Geografia trabalham juntas para que seja possível encontrar um ponto no Globo a partir das coordenadas geográficas, latitude e longitude, esperamos que os alunos consigam entender conceitos que antes pareciam abstratos e sem propósito durante as aulas. Estimular a busca por uma conexão entre conteúdos teóricos e a vida real é uma maneira da escola permanecer relevante para o estudante que precisa daquele “empurrãozinho” para se empenhar nos estudos e aprender de maneira efetiva.

Palavras-chave: Geometria plana, geometria espacial, circunferência, esfera, interseção, *GPS*.

Abstract

In this dissertation we explore the basic concepts of Plane and Spatial Geometry that make it possible to understand how the Global Positioning System-GPS works. Furthermore, interdisciplinarity between the disciplines of Mathematics and Geography is also worked on. The GPS presence in smartphones helps to stimulate students' curiosity as a starting point for Geometry learning. By making students reflect on how a cell phone can locate and be located, we open a path to show how basic content/knowledge is involved in the technology they appreciate so much. By showing that Geometry and Geography work together to make it possible to find a point on the Globe based on geographic coordinates, latitude and longitude, we hope that students will be able to understand concepts that previously seemed abstract and purposeless during classes. Encouraging the search for a connection between theoretical content and real life is a way for the school to remain relevant to the student who needs that "little push" to commit to their studies and learn effectively.

Keywords: Plane geometry, spatial geometry, circumference, sphere, intersection, GPS.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plano cartesiano	17
Figura 2 – Distância entre dois pontos	18
Figura 3 – Circunferência	19
Figura 4 – Circunferências secantes	19
Figura 5 – Circunferências tangentes	20
Figura 6 – Circunferências disjuntas	20
Figura 7 – Circunferências concêntricas	20
Figura 8 – Sistema de coordenadas cartesianas no espaço	21
Figura 9 – Latitude e longitude	22
Figura 10 – Esfera de centro O e raio R	23
Figura 11 – Elementos da esfera	23
Figura 12 – Relação entre esferas	24
Figura 13 – Satélites na órbita terrestre	26
Figura 14 – Segmento de controle	27
Figura 15 – Soluções de um sistema linear	29
Figura 16 – Sinal emitido pelos registradores de deslocamento linear	31
Figura 17 – Interface GeoGebra	33
Figura 18 – Funcionamento bidimensional do <i>GPS</i>	35
Figura 19 – Desenvolvimento do trabalho bidimensional	36
Figura 20 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar	36
Figura 21 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol	37
Figura 22 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata	37
Figura 23 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão	38
Figura 24 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açougue	38
Figura 25 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar. Resultado desejado	39
Figura 26 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado desejado	40
Figura 27 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata. Resultado desejado	40
Figura 28 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão. Resultado desejado	41
Figura 29 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açougue. Resultado desejado	41
Figura 30 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar. Resultado obtido pelo estudante A, como esperado	42
Figura 31 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado obtido pelo estudante B, como esperado	42

Figura 32 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão - Resultado obtido pelo estudante C, como esperado	43
Figura 33 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado obtido pelo estudante D, como esperado, após intervenção da professora	44
Figura 34 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata. Resultado obtido pelo estudante E, como esperado, após intervenção da professora	44
Figura 35 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açogue. Resultado obtido pelo estudante F, como esperado, após intervenção da professora	45
Figura 36 – GeoGebra	46
Figura 37 – Construção no GeoGebra	47
Figura 38 – Desenvolvimento do trabalho 3D	48

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA O ESTUDO DO <i>GPS</i>	15
2.1	Orientações curriculares do Espírito Santo	15
2.2	Coordenadas no plano	16
2.3	Distância entre dois pontos no plano	17
2.4	Circunferências	18
2.5	Posições relativas entre circunferências	19
2.6	Coordenadas no espaço	21
2.7	Coordenadas geográficas	21
2.8	Esferas	22
2.9	Posições relativas entre esferas	24
3	FUNCIONAMENTO DO <i>GPS</i>	25
3.1	Um pouco de história	25
3.2	Determinação do posicionamento no plano	27
3.3	Determinação do posicionamento no espaço	28
3.4	Sinal emitido pelo <i>GPS</i>	30
4	INTERFACE E COMANDOS NO GEOGEBRA	32
5	ATIVIDADE DIDÁTICA PARA EXPLORAR O FUNCIONAMENTO DO <i>GPS</i>	34
6	CONCLUSÃO	50
7	ANEXOS	51
7.1	Anexo 1	51
	REFERÊNCIAS	52

1 Introdução

No decorrer da minha prática docente observei que a maioria dos alunos não consegue enxergar a utilidade da matemática para além das contas, o que para eles pode ser resolvido com o uso de uma calculadora, celular, computador, etc. Logo, por não saberem das possíveis aplicações da matemática e por acharem complicada demais, eles não se interessam pela disciplina, não acham que vale a pena se esforçar tanto em algo que eles não conseguem ver utilidade. Então, pensando em melhorar a relação dos estudantes com a disciplina de Matemática e, conseqüentemente, o aprendizado deles, buscamos algo de uso comum na vida dos estudantes. Como esse projeto seria trabalhado nas turmas das 3^{as} séries do Ensino Médio também pensamos em algo que estaria de acordo com as orientações curriculares do Estado do Espírito Santo, visto que a atividade seria desenvolvida em uma escola estadual da cidade de Baixo Guandu-ES.

Nas orientações curriculares atuais, o conteúdo sobre geometria espacial começa na 2^a série do Ensino Médio e termina na 3^a série, e a geometria analítica é trabalhada apenas no último trimestre da 3^a série do Ensino Médio, logo achamos que seria interessante trabalhar alguns aspectos matemáticos presentes no *GPS* (*Global Position System*), pois qualquer pessoa com acesso a um *smartphone* já fez/faz uso dessa tecnologia.

O planejamento de como seriam trabalhados os conteúdos matemáticos relacionados ao *GPS* com os estudantes foi um ponto chave em nosso projeto, pois nesse planejamento foi pensado em como estimulá-los ao estudo da geometria. Mostrá-los, mesmo que de maneira simplificada, como o *GPS* funciona cativou os alunos que se mostraram interessados em aprender mais sobre essa tecnologia e como ela se relaciona com a Geometria. Durante o planejamento, nós lemos algumas dissertações já defendidas no PROFMAT sobre o *GPS* para nos ajudar a definir como desenvolveríamos o nosso trabalho. Nessa leitura foi possível perceber que (LIMA, 2013) se preocupa em desenvolver seu trabalho focado na superfície esférica; (NETO, 2013) foca nas questões teóricas dissertando sobre teoria da aprendizagem e interdisciplinaridade; (MORAES, 2015) trabalha as soluções dos sistemas lineares; e (SOUZA, 2021) aprofunda os conteúdos de geometria plana e analítica. A partir dessas leituras, começamos a pensar no que seria interessante para o nosso projeto, e quais objetivos gostaríamos de alcançar.

Os objetivos gerais desta dissertação são: mostrar algumas possibilidades de como ensinar/trabalhar a geometria com os alunos utilizando a ideia do *GPS* como ferramenta de ensino-aprendizagem; também mostrar como o GeoGebra pode ser utilizado na aula.

Os objetivos específicos são: estimular os estudantes no estudo da Matemática; mostrar que a Matemática é parte fundamental do funcionamento do *GPS*; trabalhar

circunferências e esferas com os estudantes; ajudá-los a compreender melhor o conceito de raio na geometria; aplicar conceitos da Geometria na construção das atividades; trabalhar algumas atividades com régua e compasso para uma visualização de um sistema de localização no plano; mostrá-los que a disciplina se relaciona com conteúdos de outras disciplinas, no caso do nosso projeto a Geografia (e dentro dela, mais especificamente, as coordenadas geográficas); apresentar e ensinar alguns comandos do GeoGebra; construir no GeoGebra um modelo de visualização *3D* do funcionamento do *GPS*.

Considerando que um dos objetivos deste trabalho é o estudo e aplicação de conceitos matemáticos que possam ser compreendidos por estudantes da 3^a série do Ensino Médio não nos aprofundaremos em conceitos que os alunos não seriam capazes de entender, pois queríamos estimulá-los e não desmotivá-los com conteúdos e explicações complicadas para eles. Logo, a maior parte do conteúdo abordado nessa dissertação será explorado da mesma maneira que foi trabalhado na sala de aula, assim esperamos também facilitar a compreensão das atividades presentes neste trabalho encorajando professores a replicá-las em suas salas de aula.

2 Fundamentação teórica para o estudo do *GPS*

2.1 Orientações curriculares do Espírito Santo

O Governo do Estado do Espírito Santo criou as orientações curriculares usando como base a BNCC, distribuindo as habilidades durante as séries e trimestres do ensino médio. As habilidades trabalhadas direta ou indiretamente durante a realização desse trabalho foram retiradas das Orientações Curriculares 2023/Matemática. Essas habilidades representam o que os estudantes devem desenvolver durante sua trajetória escolar, porém elas não descrevem tudo o que deve ser trabalhado até que essa habilidade seja desenvolvida, por isso as habilidades foram colocadas no contexto da atividade tralhada em sala.

A habilidade “(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.” trabalha a posição de figuras geométricas (reta tangente, reta secante, figuras geométricas disjuntas).

A habilidade “(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.” tem como objetivo desenvolver os conceitos e procedimentos de Geometria Plana e Espacial.

A habilidade “(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias.” descreve como ensinar os estudantes a identificar as características de figuras espaciais.

A habilidade “(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.” trabalha o desenvolvimento do raciocínio do estudante para a construção de uma solução para um problema.

A habilidade “(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.” foca no desenvolvimento dos conceitos da geometria analítica.

A habilidade “(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas,

usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.” aborda os seguintes objetos do conhecimento: Sistemas de equações lineares, equações lineares com duas ou mais incógnitas e matrizes aplicadas à resolução de sistemas de equações lineares. Esses objetos do conhecimento foram trabalhados de maneira direta ou indireta durante o desenvolvimento do trabalho. No Currículo Básico Escola Estadual (2009) existia a habilidade “Usar equações e sistemas como estratégias de resolução de problemas.” que no Currículo de 2023 foi incorporado a habilidade EM13MAT301, e um dos objetos de conhecimento dessa habilidade era equação geral e equação reduzida da circunferência que foram utilizadas durante este trabalho.

Todas as habilidades citadas acima foram retiradas das Orientações Curriculares 2023 (KACHEL; MENEGUELLI; AZEVEDO, 2023).

2.2 Coordenadas no plano

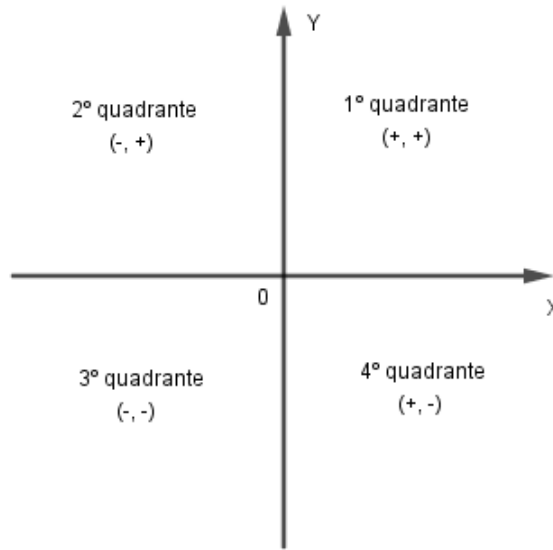
O plano cartesiano é formado pelos eixos ortogonais X e Y , onde X corresponde ao eixo das abscissas e Y ao eixo das ordenadas; esses eixos dividem o plano em quatro regiões, os quadrantes. Os pontos no plano podem ser representados a partir das suas coordenadas x e y , onde temos (x, y) , chamado de par ordenado. Entre o conjunto de pontos do plano e o conjunto de pares ordenados existe uma correspondência biunívoca, ou seja, para cada ponto do plano existe um único par ordenado e, cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano.

Os valores das abscissas e ordenadas dos pares ordenados variam em positivos ou negativos em cada quadrante formado no plano a partir da interseção dos eixos X e Y ; essa interseção é conhecida como a origem do plano cartesiano e possui coordenadas $x = 0$ e $y = 0$, com par ordenado $(0, 0)$.

Observando a representação do plano cartesiano na Figura 1 fica claro que precisamos apenas das coordenadas de um ponto qualquer para conseguirmos inferir a qual quadrante esse ponto pertence. Logo, mesmo que não saibamos a escala do plano é possível saber em qual região do plano o ponto está localizado.

É importante destacar que os pontos pertencentes aos eixos X e Y possuem coordenadas com características distinguíveis, pois se um ponto pertence ao eixo das abscissas ele terá coordenada $y = 0$ e o par ordenado desse ponto será $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, porém se o ponto pertence ao eixo das ordenadas ele terá coordenada $x = 0$ e seu par ordenado será $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$.

Figura 1 – Plano cartesiano



Fonte: Produção da própria autora (2024)

2.3 Distância entre dois pontos no plano

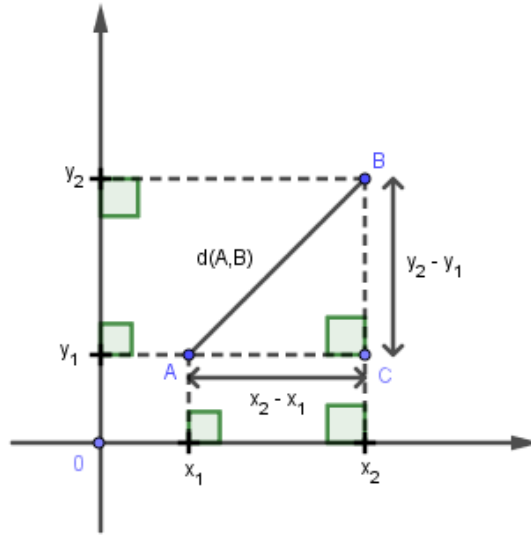
A distância entre dois pontos, A e B , no plano é indicada por $d(A, B)$ e é dada pela medida do segmento de reta AB . Assim, dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, podemos encontrar a distância entre eles aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC da Figura 2, logo temos:

$$[d(A, B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (2.1)$$

Assim, a distância entre quaisquer dois pontos, A e B , pertencentes ao plano é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.2)$$

Figura 2 – Distância entre dois pontos



Fonte: Produção da própria autora (2024)

2.4 Circunferências

Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é definida como o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano, equidistantes de O (Figura 3). Ou seja, a medida do segmento de reta com uma extremidade no centro e outra em um ponto P qualquer da circunferência deve ser sempre a mesma, essa medida é o que chamamos de raio da circunferência. Portanto, $d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$. Assim, a equação da circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é dada por

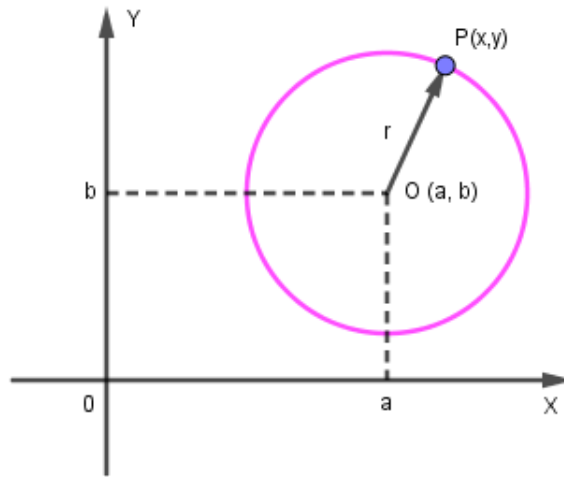
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2.3)$$

A Equação 2.3 é chamada de *equação reduzida da circunferência*. Se o centro da circunferência coincidir com a origem do plano, ou seja, se as coordenadas do centro da circunferência forem $(0, 0)$, a equação dessa circunferência de raio r é dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

Outra maneira de representar a equação da circunferência é resolver os quadrados das diferenças entre dois termos que aparecem na equação, obtendo assim a equação geral da circunferência. Mais especificamente, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, após resolvermos os quadrados das diferenças fica $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$, chamada de *equação geral da circunferência*.

Para um aprofundamento teórico sobre as Seções 2.2, 2.2 e 2.4, consulte o livro (LIMA et al., 2005).

Figura 3 – Circunferência

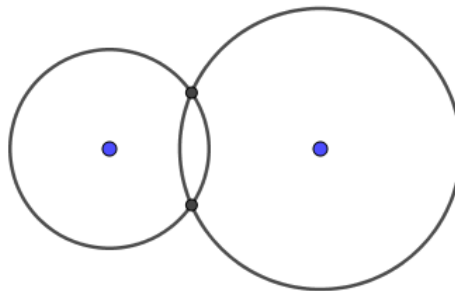


Fonte: Produção da própria autora (2024)

2.5 Posições relativas entre circunferências

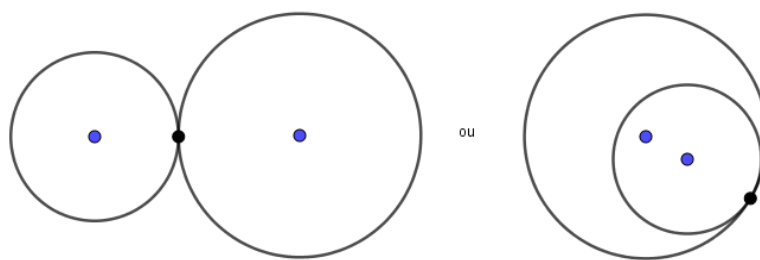
A partir de (DANTE, 2016), é possível dizer que dadas duas circunferências, C_1 e C_2 , distintas, elas podem se relacionar de três maneiras: tendo dois pontos comuns; um ponto comum; ou nenhum ponto comum. Circunferências que possuem dois pontos comuns são chamadas secantes, Figura 4; circunferências que possuem um ponto comum são chamadas tangentes (internamente ou exteriormente), Figura 5; e, circunferências que não possuem pontos comuns são chamadas disjuntas (internas ou externas), Figura 6. Circunferências disjuntas internas com as mesmas coordenadas do centro são chamadas de circunferências concêntricas, Figura 7.

Figura 4 – Circunferências secantes



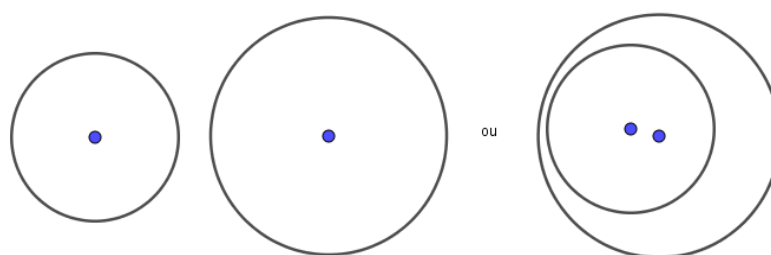
Fonte: Produção da própria autora (2024)

Figura 5 – Circunferências tangentes



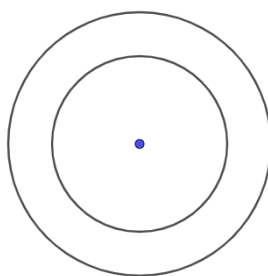
Fonte: Produção da própria autora (2024)

Figura 6 – Circunferências disjuntas



Fonte: Produção da própria autora (2024)

Figura 7 – Circunferências concêntricas

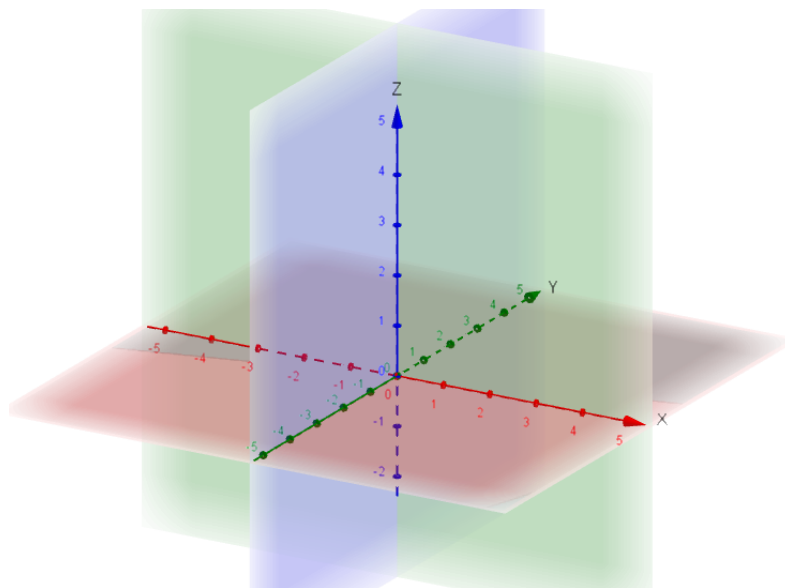


Fonte: Produção da própria autora (2025)

2.6 Coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço é formado pelos eixos ortogonais X , Y e Z , com mesma origem O . Os eixos são perpendiculares dois a dois, logo temos três planos formados pelos eixos X e Y , X e Z , e Y e Z . Os pontos no espaço são dados a partir das coordenadas espaciais (x, y, z) .

Figura 8 – Sistema de coordenadas cartesianas no espaço



Fonte: Produção da própria autora (2024)

Para mais conceitos, consulte o livro (LIMA et al., 2005).

2.7 Coordenadas geográficas

Nesta seção abordaremos alguns pontos sobre as coordenadas geográficas, esclarecendo a relação entre a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich com as definições de latitude e longitude.

“As coordenadas geográficas são um sistema de localização formado por linhas imaginárias traçadas sobre o planisfério terrestre, por meio das quais é possível saber com precisão a localização de um ponto da superfície terrestre. Essas linhas imaginárias são conhecidas como paralelos e meridianos, e é por meio da interseção (ou cruzamento) delas que se obtém a coordenada geográfica exata de um referencial.”¹

As coordenadas geográficas permitem a localização de um ponto qualquer na superfície da Terra por meio de valores numéricos, latitude e longitude. A latitude é a “distância” de um ponto em relação a linha do Equador, paralelo mais conhecido. A

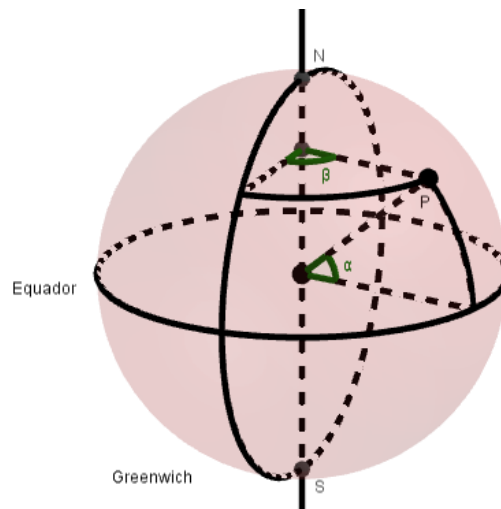
¹ <<https://brasilecola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm>>

longitude é a “distância” de um ponto em relação ao Meridiano de Greenwich. Ambos, latitude e longitude são medidos em graus, onde o marco 0° para elas são a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich, respectivamente. Na Figura 9 vemos a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich, e temos um ponto P na Terra onde α é a medida da latitude e β é a medida da longitude de P . De (LIMA, 2013) temos algumas definições:

Definição 2.7.1. *Dado um ponto P na superfície terrestre, a Latitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de 0° a 90° e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em N (north - norte em inglês) ou S (south - sul em inglês).*

Definição 2.7.2. *Dado um ponto P na superfície terrestre, a Longitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. A longitude mede de 0° a 180° e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em E (east - leste em inglês) ou W (west - oeste em inglês).*

Figura 9 – Latitude e longitude

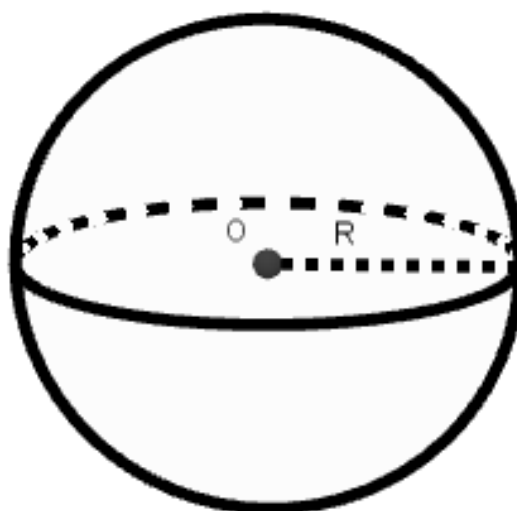


Fonte: Produção da própria autora (2025)

2.8 Esferas

Uma esfera de centro O e raio R é o conjunto formado por todos os pontos do espaço tal que a distância entre o centro e o ponto seja menor ou igual a R (Figura 10). Já o conjunto de pontos do espaço cuja distância entre o centro e o ponto é igual a R é chamado de superfície esférica.

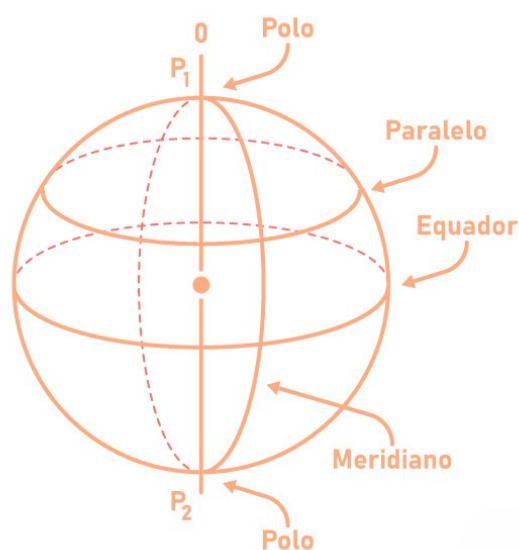
Além do centro e do raio, também são importantes outros elementos da esfera como polos, equador, paralelos e meridianos (Figura 11); termos que também aparecem na seção Coordenadas Geográficas. Os polos são os pontos de encontro da esfera com o eixo central;

Figura 10 – Esfera de centro O e raio R 

Fonte: Produção da própria autora (2024)

esse eixo é a linha imaginária perpendicular ao plano horizontal passando pelo centro da esfera. O equador é a maior circunferência encontrada ao interceptar a esfera com um plano horizontal; o equador divide a esfera em duas partes iguais, chamadas hemisférios. Os paralelos são qualquer circunferência encontrada ao interceptar a esfera com um plano horizontal; inclusive o equador é um caso particular de paralelo. O meridiano é encontrado ao interceptar a esfera com um plano vertical que contenha o eixo central.

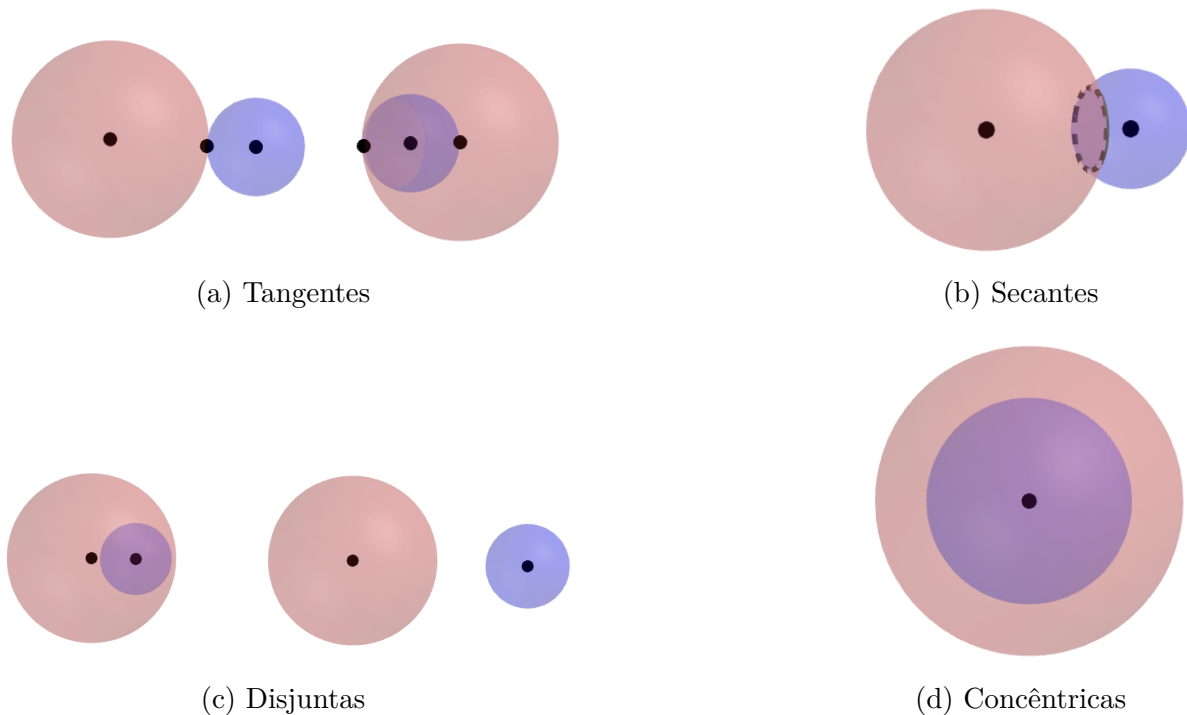
Figura 11 – Elementos da esfera

Fonte: <<https://escolakids.uol.com.br/matematica/esfera.htm>>

2.9 Posições relativas entre esferas

Dadas duas esferas E_1 e E_2 distintas, a relação entre elas pode ser classificada de maneira análoga as circunferências; logo duas superfícies esféricas podem ser tangentes, secantes ou disjuntas. Superfícies esféricas tangentes se intersectam em um único ponto, interna ou externamente, como mostrado na Figura 12a. Superfícies esféricas secantes se intersectam em um círculo, veja a Figura 12b. E, superfícies esféricas disjuntas não se intersectam; na Figura 12c podemos ver que as esferas podem ser disjuntas internamente ou externamente. E, assim como na relação entre duas circunferências, quando temos duas superfícies esféricas disjuntas internas que partilham o mesmo centro, elas são chamadas de esferas concêntricas, Figura 12d.

Figura 12 – Relação entre esferas



Fonte: Produção da própria autora (2024)

Para se aprofundar no estudo das posições relativas entre esferas busque as notas de aula de (DELGADO; DELGADO, 2017), disponível em <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-analitica/>.

3 Funcionamento do *GPS*

3.1 Um pouco de história

A necessidade do ser humano de conseguir se localizar é antiga. Os homens pré-históricos usavam marcações em pedras como forma de identificar os locais onde já haviam passado. Outra maneira de localização era a observação dos astros para se orientar. Com a evolução da humanidade os métodos de localização também evoluíram passando pelo astrolábio, sextante, giroscópio, entre outros, até chegarmos ao *GPS*.

“O *GPS* (*Global Positioning System*) virou parte integrante da vida das pessoas. Por conta dele, não pedimos mais informações sobre endereço. A pergunta “onde fica a rua tal?” sumiu do mapa. Os motoristas em geral e os de Uber em particular, os entregadores de aplicativos, as pessoas, mesmo andando a pé, se orientam e se localizam em silêncio, fazendo uso dessa tecnologia.” (SOUZA, 2021)

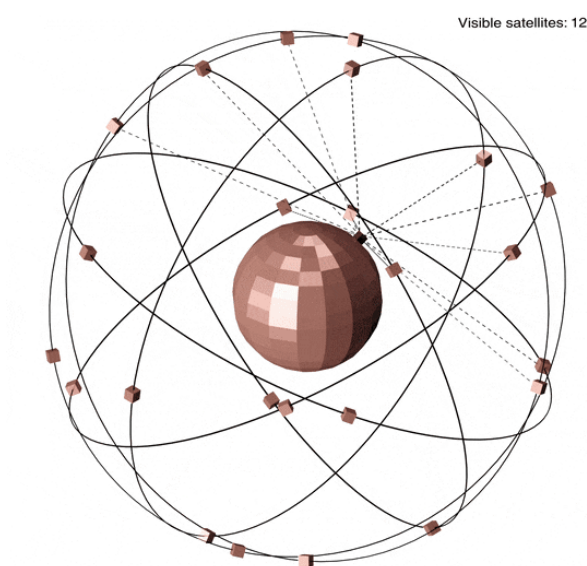
Parar e pedir informação sobre como chegar a um local é algo que quase não acontece mais, apenas precisamos colocar o endereço em nossos *smartphones* e ele nos orientará para que encontremos o local procurado.

O que hoje é tão simples e comum à nossa rotina começou na década de 70, quando foi iniciado o projeto *NAVSTAR* (*Navigation System with Timing and Ranging*), que hoje é mais conhecido como *GPS* (*Global Positioning System*), o qual só foi concluído totalmente em 1995.

“O sistema *GPS* funciona hoje com uma constelação de 32 satélites *NAVSTAR*, sendo 24 operacionais e o restante reservas (sic), prontos para entrar em ação caso ocorra falha nos satélites ativos, que orbitam a Terra com um ciclo aproximado de duas voltas por dia, de forma que, em qualquer ponto da superfície terrestre, ao menos quatro satélites estejam visíveis e nunca estejam coplanares, condições essenciais para que a posição possa ser determinada de maneira única.” (FAGGIAN, 2019)

Os satélites do sistema estão posicionados a 20.200km da superfície terrestre e são distribuídos em 6 órbitas planas. A Figura 13 mostra a órbita desses satélites e quantos deles são visíveis de um determinado ponto na Terra.

Figura 13 – Satélites na órbita terrestre



Fonte: Disponível em <<https://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>>. Acesso em 2023.

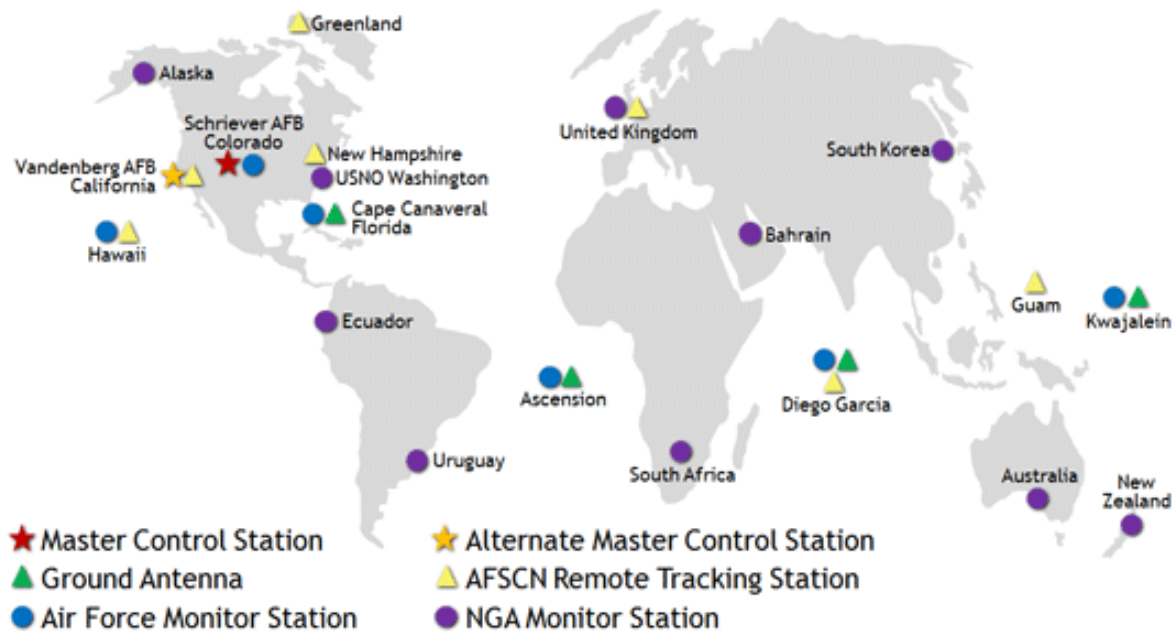
Quando o projeto foi iniciado a ideia era que esse sistema fosse único e apenas utilizado pelo exército dos Estados Unidos. Porém, em 1983, um avião foi abatido por invadir o espaço aéreo soviético e morreram 269 pessoas, incluindo um congressista norte-americano, após essa tragédia o presidente Ronald Reagan liberou o uso civil do *GPS* como forma de garantir a segurança do tráfego aéreo. No entanto, os EUA acrescentaram um ruído no sinal para que a precisão não fosse a mesma do exército. Apenas em 2000 que esse ruído foi retirado, permitindo uma melhor localização, em tempo real, para o receptor do sinal.

O sistema do *GPS* é composto por três segmentos: o espacial, o de controle e o de usuário. O *segmento espacial* é formado pelos satélites já citados, cada um desses satélites possuem 4 relógios de alta precisão. O *segmento de controle* é constituído por uma estação Mestre de controle, uma estação Mestre alternativa de controle, onze antenas de comando e controle, e dezesseis locais de monitoramento, Figura 14.

“As estações rastreiam os satélites, atualizam as suas posições orbitais, calibram e sincronizam os seus relógios. Outra função importante é determinar as órbitas de cada satélite e prever a sua trajetória nas 24 horas seguintes, essas informações são transmitidas a cada satélite para depois serem transmitidas, por este, ao receptor.” (PEREIRA, 2014).

O *segmento do usuário* é formado pelos aparelhos receptores de sinais emitidos pelos satélites, esses receptores são o que chamamos, erroneamente, de aparelho *GPS*. O aparelho receptor recebe o sinal vindo do satélite, então “ele mede o tempo do percurso desse sinal e, em seguida, calcula a distância que esse segmento espacial está do receptor.” (MORAES, 2015).

Figura 14 – Segmento de controle



Fonte: <<https://www.gps.gov/systems//gps/control/>> acesso em 18 de novembro de 2024

3.2 Determinação do posicionamento no plano

Nesta seção falaremos um pouco sobre como localizar um ponto no plano através da interseção de circunferências e da resolução de um sistema de equações lineares.

“Durante a Segunda Guerra Mundial, ocorreu um grande avanço no que se refere a navegação, quando passou-se a usar ondas de rádio para localizar veículos fazendo uso do efeito Doppler, esta propriedade da Física relaciona a velocidade do móvel com a diferença entre a frequência com que as ondas de rádio incidem e a frequência com que são refletidas e assim determinava-se as distâncias entre o veículo e as emissoras. Com essas três distâncias e a localização das emissoras era possível determinar, pelo processo de trilateração, três circunferências cuja intersecção determinava a localização do veículo.” (LIMA, 2013).

A primeira atividade realizada com os estudantes usa a trilateração para determinar a localização dos locais procurados. Os alunos utilizaram da geometria plana e analítica para representarem a resolução desse problema de localização utilizando régua e compasso, onde com três sinais era possível encontrar três circunferências, sendo que a interseção delas era o local procurado.

Como na nossa primeira atividade, todos os sinais são emitidos da Terra, precisamos resolver um sistema de equações formado pelas equações de três circunferências encontradas a partir da origem do sinal e da distância do objeto a três pontos de referência. Sejam S_1 , S_2 e S_3 as equações dessas circunferências, temos que o sistema de equações que nos dá o

local procurado é dado por:

$$\begin{cases} S_1 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \\ S_2 : (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \\ S_3 : (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

A primeira vista temos um sistema quadrático, porém ao subtrairmos a equação S_1 da equação S_2 e depois a equação S_1 da equação S_3 , obtemos um sistema equivalente ao anterior, porém agora temos um sistema de duas equações lineares em x e y , como podemos observar abaixo:

$$\begin{cases} S_4 : Ax + By = C \\ S_5 : Dx + Ey = F \end{cases} \quad (3.2)$$

Este sistema pode ser resolvido com as ferramentas aprendidas no Ensino Fundamental e Médio, como a substituição, a eliminação ou usando matrizes. De fato, sua resolução está no Anexo 7.1. A solução do sistema é garantida pelo posicionamento adequado dos satélites “visíveis” a partir do local procurado. O posicionamento dos satélites coincide com o centro das esferas e estes centros são não colineares, isso nos garante que o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero, logo o sistema possui uma única solução. Assim, a interseção das circunferências utilizadas é um conjunto não vazio.

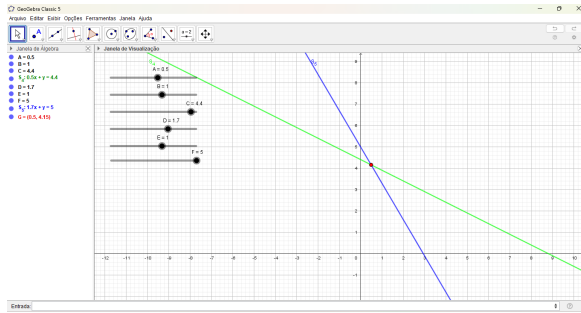
Um sistema de equações lineares, como o Sistema 3.2, pode ser classificado como: *Sistema Possível e Determinado* (SPD): possui uma única solução, geometricamente, isso significa que as retas associadas as equações do sistema são concorrentes, ou seja, se encontram em um único ponto, e esse ponto é a solução desse sistema, Figura 15a; *Sistema Possível e Indeterminado* (SPI): possui infinitas soluções, logo as retas encontradas com as equações que compõem o sistema são coincidentes, dando a impressão de serem apenas uma reta, não sendo possível determinar um único ponto como solução do sistema e sim infinitos pontos, Figura 15b; *Sistema Impossível* (SI): não possui solução, isso acontece quando as retas encontradas pelas equações do sistema são paralelas, então elas não possuem qualquer ponto em comum, assim o sistema fica sem solução, Figura 15c.

Ao considerarmos sinais emitidos da Terra, é natural que esses sinais sejam obtidos por antenas e não por satélites, porém para não confundir os estudantes usando satélites em alguns momentos e antenas em outro, resolvemos adotar o uso da palavra satélite seja para os sinais emitidos da Terra ou da órbita terrestre.

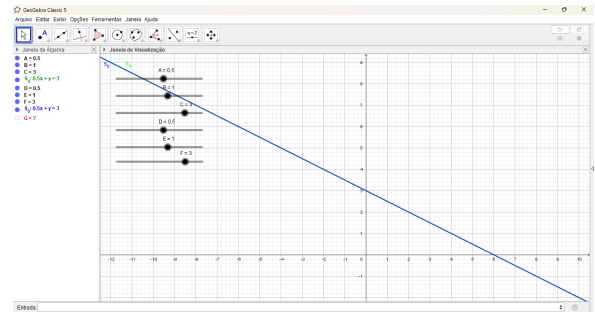
3.3 Determinação do posicionamento no espaço

Nesta seção falaremos um pouco sobre como é possível determinar a localização de um ponto no espaço. Como já mencionado, o Sistema de Posicionamento Global é composto por 24 satélites em funcionamento mais 8 satélites reservas prontos para funcionar caso seja necessário.

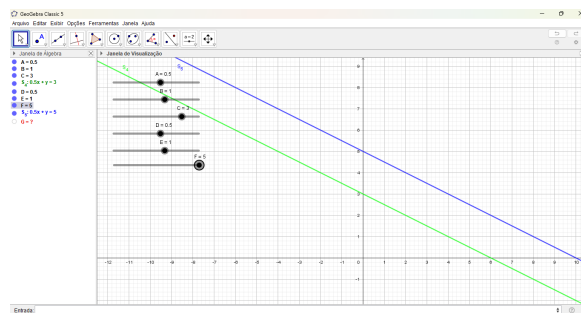
Figura 15 – Soluções de um sistema linear



(a) Sistema Possível e Determinado (SPD)



(b) Sistema Possível e Indeterminado (SPI)



(c) Sistema Impossível (SI)

Fonte: Produção da própria autora (2025)

“Os satélites estão posicionados a $20.200km$ da superfície da Terra, distribuídos em 6 órbitas planas. Há pelo menos 4 satélites em cada órbita plana, equidistantes uns dos outros. Cada satélite completa sua órbita ao redor da Terra em 11 horas e 58 minutos. Essa configuração assegura que em qualquer momento e qualquer localização da Terra nós estamos sendo observados por pelo menos 4 satélites.” (SCANNAVINO, 2015)

A segunda atividade trabalhada com os estudantes foi realizada no Laboratório de Informática da escola, onde utilizamos o GeoGebra para construir uma representação de como um ponto localizado na superfície terrestre é encontrado através dos sinais dos satélites que compõem o *GPS*.

Algebricamente, para encontrarmos a localização de um ponto qualquer na superfície da Terra, lembrando que estamos lidando com estudantes da 3ª série do Ensino Médio, apenas precisamos resolver o sistema de equações formado pelas equações que representam as três esferas dadas pelos sinais dos satélites do *GPS* e uma quarta esfera que representa a Terra.

Teorema 3.3.1. *Se quatro superfícies esféricas de centros não coplanares se intersectam, então essa interseção é um único ponto.*

Logo, sejam E_1 , E_2 , E_3 e E_4 , as esferas que representam os sinais dos satélites e a

Terra, podemos escrever o sistema de equações que nos dará a localização procurada como:

$$\begin{cases} E_1 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \\ E_2 : (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2 \\ E_3 : (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2 \\ E_4 : (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = r_4^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Assim como no sistema com as equações das circunferências, para resolvermos esse sistema, inicialmente quadrático, iremos subtrair a equação E_1 das equações E_2 , E_3 e E_4 , obtendo um sistema de equações equivalentes ao anterior, porém linear. Após a reorganização do sistema, temos:

$$\begin{cases} E_5 : Ax + By + Cz = D \\ E_6 : Ex + Fy + Gz = H \\ E_7 : Ix + Jy + Kz = L \end{cases} \quad (3.4)$$

Este sistema pode ser resolvido com métodos aprendidos no Ensino Médio, como a substituição sucessiva, eliminação de Gauss ou usando matrizes. A escolha dos satélites feita pelo próprio sistema garante que interseção das esferas encontradas a partir dos seus sinais é um conjunto não vazio. Mais precisamente, os seus centros são não colineares, garantindo que o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero, o que determina que o sistema possui uma solução única. A demonstração do Teorema 3.3.1 que corrobora com a existência de um único ponto como solução do sistema pode ser conferida em (LIMA, 2013).

3.4 Sinal emitido pelo GPS

Nesta seção, nós apresentaremos alguns fatos sobre o sinal do GPS. O sinal é gerado por um dispositivo chamado registrador de deslocamento linear.

“Registradores de deslocamento linear permitem a geração de sequências que têm propriedades excelentes em termos de permitir ao receptor sincronizar-se com ele. Esses dispositivos simples de construir (pode-se construir um registrador de deslocamento linear com poucos componentes elétricos básicos) geram sinais pseudoaleatórios, isto é, geram sinais que aparentam ser grandemente aleatórios mesmo quando são gerados por algoritmos determinísticos.” (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2021)

Esses registradores de deslocamento linear permitem que os dados dos satélites se desloquem até um receptor do sinal, como aparelhos de navegação e *smartphones*. O sinal que esses registradores emitem podem ser entendidos como uma sequência de zeros e uns. Imaginemos um registrador de deslocamento linear de comprimento $r = 4$, com constantes a_0, a_1, a_2 e a_3 e q_0, q_1, q_2 e q_3 . Cada satélite tem valores próprios para q_i , $i = 0, \dots, 3$ e os

valores a_i , $i = 0, \dots, 3$ são conhecidos como *condições iniciais*. Os elementos seguintes do sinal são construídos usando as fórmulas

$$a_4 = (a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3) \mod 2,$$

$$a_5 = (a_1q_0 + a_2q_1 + a_3q_2 + a_4q_3) \mod 2,$$

$$a_6 = (a_2q_0 + a_3q_1 + a_4q_2 + a_5q_3) \mod 2,$$

como no Exemplo 3.4.1.

Exemplo 3.4.1. *Seja $r = 4$, $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0, 0)$ e $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$, logo*

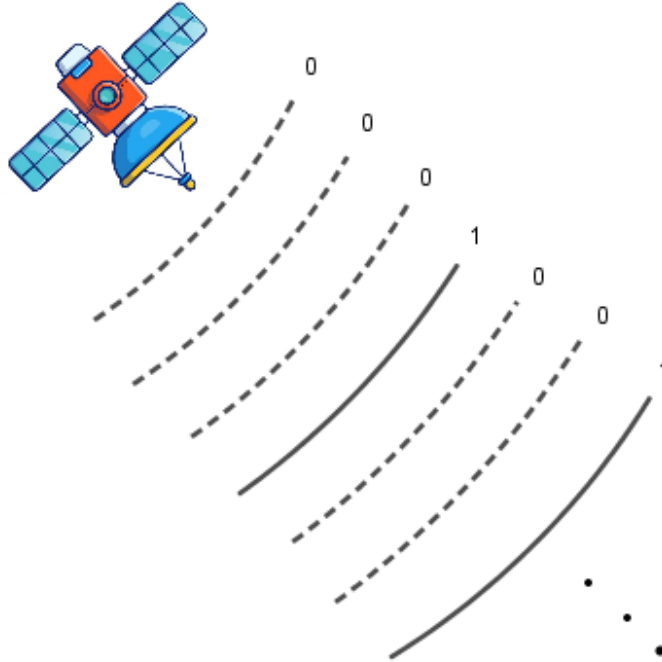
$$a_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$a_5 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$a_6 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

A Figura 16 mostra um sinal de GPS correspondente a esse exemplo.

Figura 16 – Sinal emitido pelos registradores de deslocamento linear



Fonte: Produzida pela própria autora (2025)

Neste capítulo apenas resumimos como funcionam os registradores de deslocamento linear ao emitir o sinal para o aparelho receptor, mas é possível aprender mais sobre o assunto em (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2021).

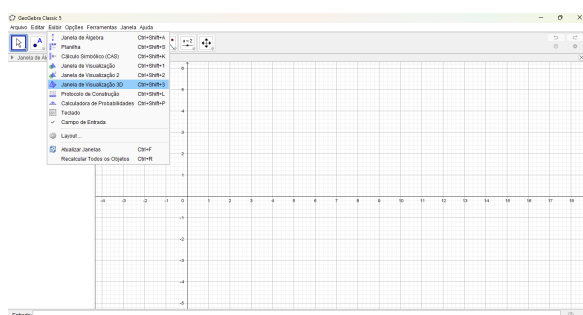
4 Interface e Comandos no GeoGebra

Durante o desenvolvimento do trabalho usamos a ferramenta de geometria dinâmica GeoGebra; por preferência da autora a versão utilizada do programa é mais antiga, sendo o *GeoGebra Classic 5*. Para tanto foi necessário apresentar aos estudantes alguns comandos e possibilidades do programa; como a opção de exibir a *janela de visualização 3D*, Figuras 17a e 17b, com comandos próprios para construções tridimensionais, Figura 17c, já que nossa construção seria feita a partir desses comandos. Também apresentamos a possibilidade de digitar os comandos na *entrada do programa*, Figura 17d; na maior parte de nossa construção optamos por digitar os comandos na entrada para facilitar para os estudantes já que o foco era realizarem o projeto e não ensinar aos estudantes a usarem o GeoGebra. A partir dos botões de comando os alunos criaram apenas os pontos necessários, Figura 17e. E, para “limpar” a construção, ensinamos os estudantes a esconder os eixos, planos e objetos que não eram mais necessários visualmente. Para esconder os eixos e o plano XY é necessário apertar o botão direito do mouse e clicar sobre eixos e plano para que eles apareçam ou se escondam, Figura 17f.

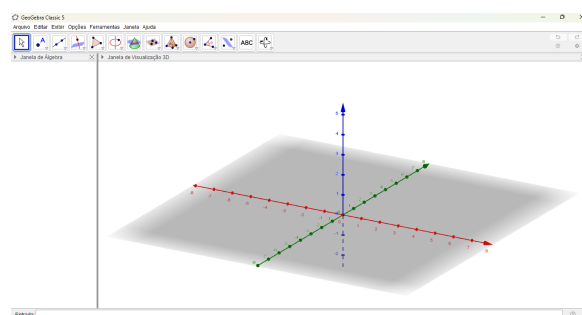
Como já dissemos, em nosso trabalho os estudantes foram orientados a digitar os comandos na entrada do programa para realizar a construção. Para tanto pedimos a eles que digitassem os seguintes comandos:

- TERRA: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, para construir a Terra;
- PlanoX: $x = 0$, PlanoY: $y = 0$ e PlanoZ: $z = 0$, para construir os planos que servirão para encontrar as órbitas dos satélites;
- EsferaÓrbitas: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, para construir a esfera das órbitas;
- Órbita1: *InterseçãoGeométrica*(PlanoX, EsferaÓrbitas), Órbita2: *InterseçãoGeométrica*(PlanoY, EsferaÓrbitas) e Órbita3: *InterseçãoGeométrica*(PlanoZ, EsferaÓrbitas) para encontrar as órbitas dos satélites;
- Clicar em *Ponto em objeto* e criar um ponto em cada órbita e uma sobre a TERRA, para simular os satélites e o local que desejamos encontrar na Terra;
- *Esfera*(A, D), *Esfera*(B, D) e *Esfera*(C, D) para construir as esferas de centro em cada satélite e raio medindo a distância do satélite até o ponto que desejamos localizar na Terra;
- *InterseçãoCônica*(a,b), *InterseçãoCônica*(a,c) e *InterseçãoCônica*(b,c) para encontrar as interseções, duas a duas, das esferas de centro em cada satélite e raio medindo a distância do satélite até o ponto que desejamos localizar na Terra;

Figura 17 – Interface GeoGebra



(a) Exibir janela de visualização 3D



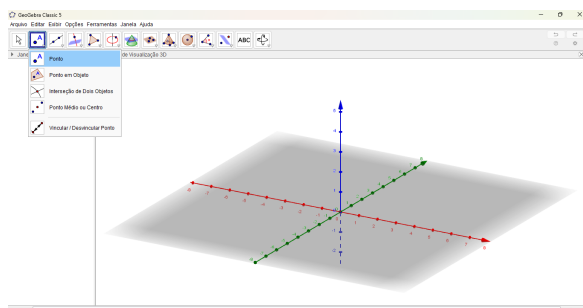
(b) Interface 3D



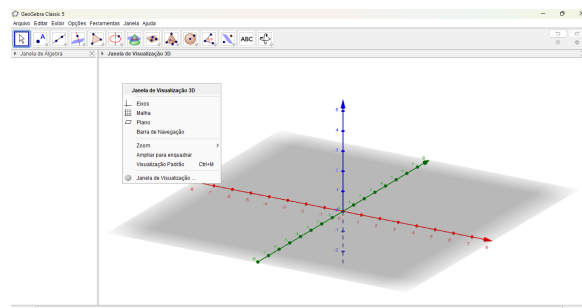
(c) Comandos 3D



(d) Entrada



(e) Criar um ponto



(f) Esconder eixos e plano

Fonte: Produzida pela própria autora (2025)

- Clicar em interseção de dois objetos e criar um ponto onde as interseções cônicas se encontram, para encontrar os dois pontos onde ocorre a interseção e assim concluir que um dos pontos não se encontra na Terra.

Terminando assim a construção.

5 Atividade Didática para Explorar o Funcionamento do *GPS*

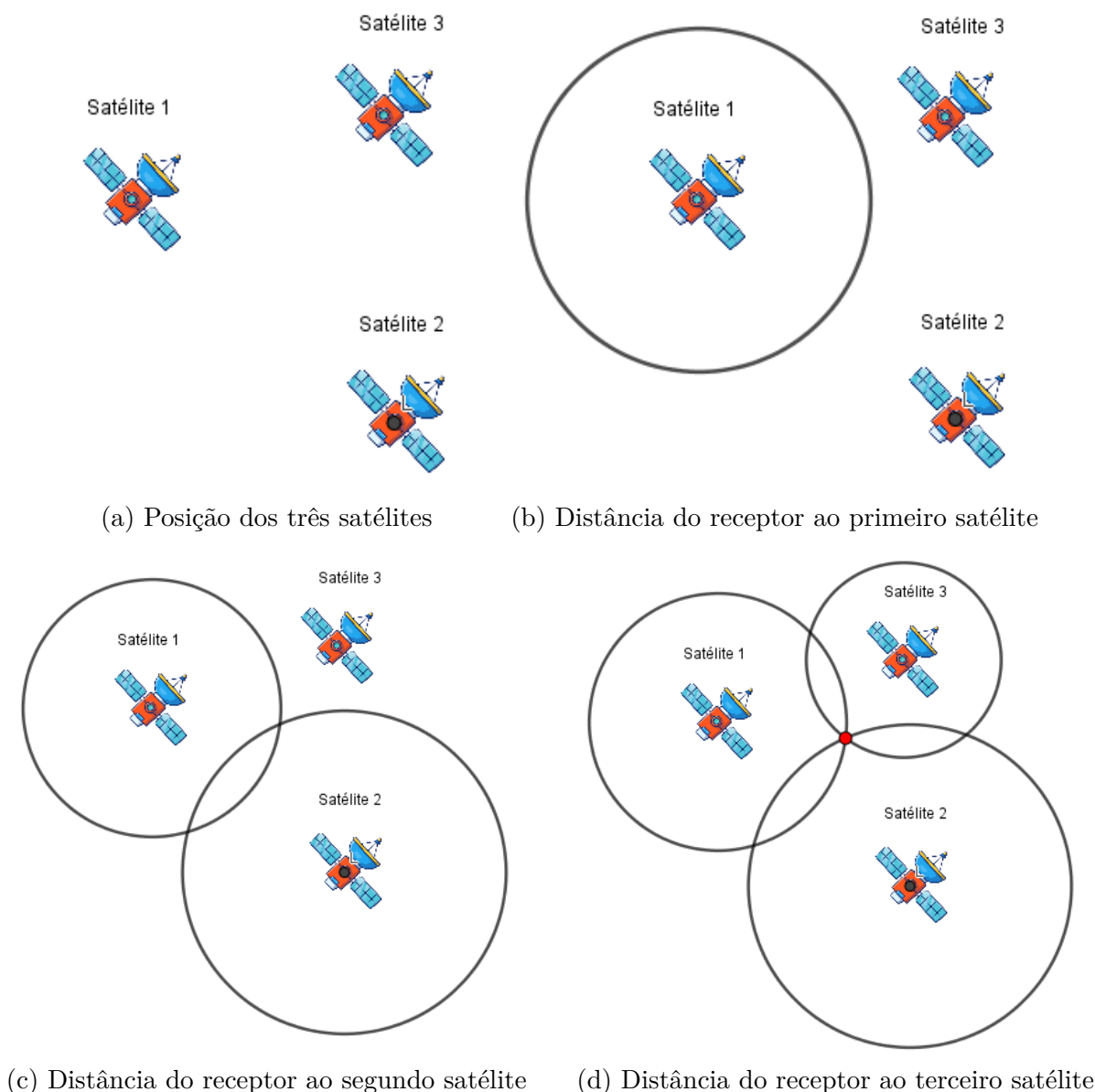
Nesta seção, apresentamos a atividade didática proposta para explorar o funcionamento do *GPS*. A atividade foi aplicada após a conclusão do conteúdo de geometria analítica e espacial pertinentes a uma turma de 3^a série do Ensino Médio.

Em um primeiro momento, nós mostramos aos estudantes o vídeo “A mágica do *GPS* - Professor Albert e a Ciência da Natureza”¹, onde é falado um pouco da história do *GPS* e explicado, de maneira simplificada, como ele funciona. Após o vídeo explicamos aos estudantes o funcionamento bidimensional do *GPS*, Figura 18, onde temos “três satélites” com posições conhecidas transmitindo sinais para o receptor, cada satélite com um tempo específico para o sinal chegar ao dispositivo, assim sendo possível encontrar a distância que ele se encontra dos satélites. O ponto de intersecção das três circunferências indica a localização do receptor do sinal do *GPS*, como é possível observar na Figura 18d.

Para fomentar o interesse dos estudantes exibimos algumas cenas de filmes e seriados onde o *GPS* é usado para localizar algo ou alguém. Foram exibidas cenas dos filmes “Missão Impossível - Protocolo Fantasma” e “Busca Implacável”, e da série “CSI - Investigação Criminal”, temporada 11, episódio 15.

¹ <<https://www.youtube.com/watch?v=OsYU0xPXsgA&t=3s>>

Figura 18 – Funcionamento bidimensional do GPS



Fonte: Produzida pela própria autora (2024)

Para encerrar esse primeiro momento os estudantes foram divididos em grupos, Figura 19a, e a cada grupo foi entregue parte do mapa da nossa cidade, Baixo Guandu - ES, retirado do *Google Maps*, na escala 1 : 10000. Foram distribuídos cinco mapas diferentes e, para cada mapa, instruções para os estudantes seguirem e encontrarem o local procurado. Nessa parte do projeto os estudantes trabalharam com uma visão bidimensional do GPS, utilizando régua e compasso para sua construção, Figura 19b.

Figura 19 – Desenvolvimento do trabalho bidimensional



(a) Estudantes em grupos na sala de aula



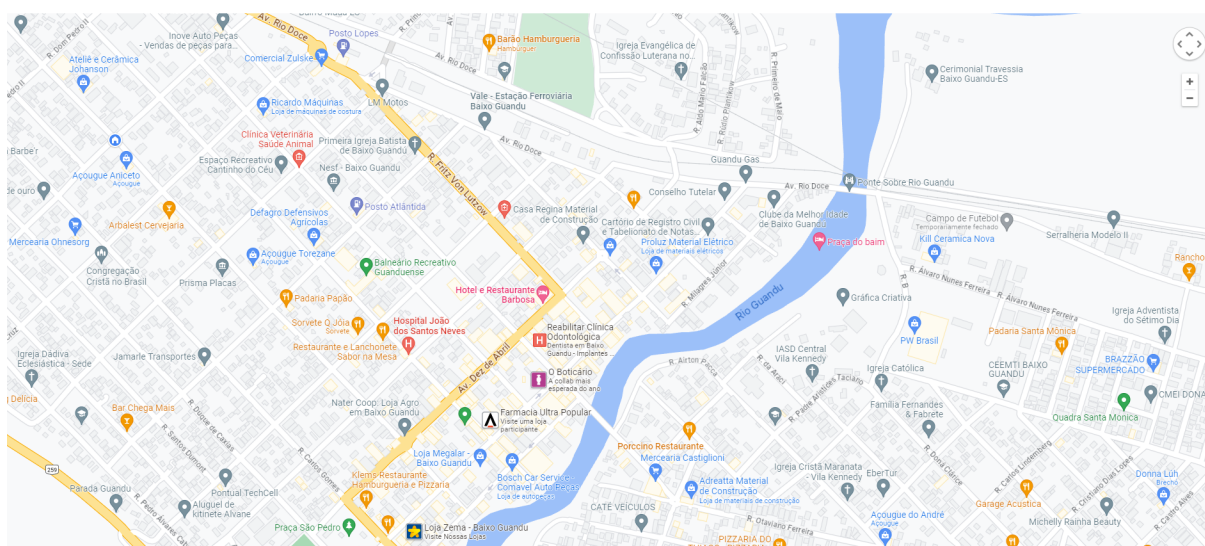
(b) Trabalho bidimensional

Fonte: Acervo pessoal da própria autora (2024)

As instruções passadas para os estudantes encontrarem, em cada um dos 5 mapas, os locais desejados seguem abaixo.

Para o mapa 1: O primeiro satélite, localizado na Arbalest Cervejaria, te dá uma distância de $620m$; o segundo satélite, localizado na Casa Regina Material de Construção, te dá uma distância de $380m$; o terceiro satélite, localizado na Loja Megalar, te dá uma distância de $300m$.

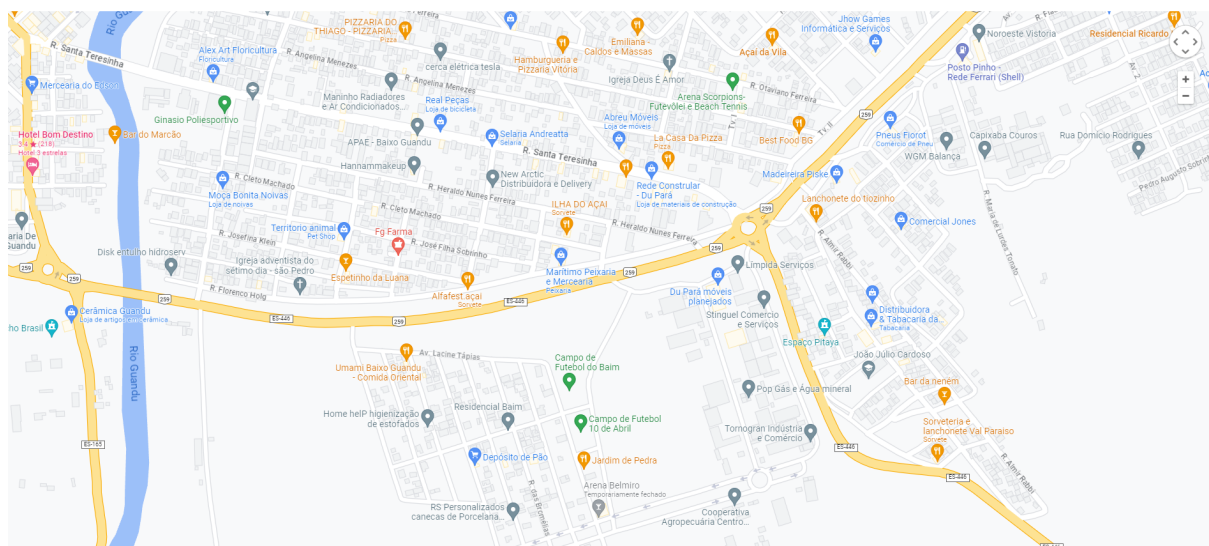
Figura 20 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar



Fonte: Google Maps

Para o mapa 2: O primeiro satélite, localizado no Espaço Pitaya, te dá uma distância de $630m$; o segundo satélite, localizado na FG Farma, te dá uma distância de $380m$; o terceiro satélite, localizado no Campo de futebol do Baim, te dá uma distância de $350m$.

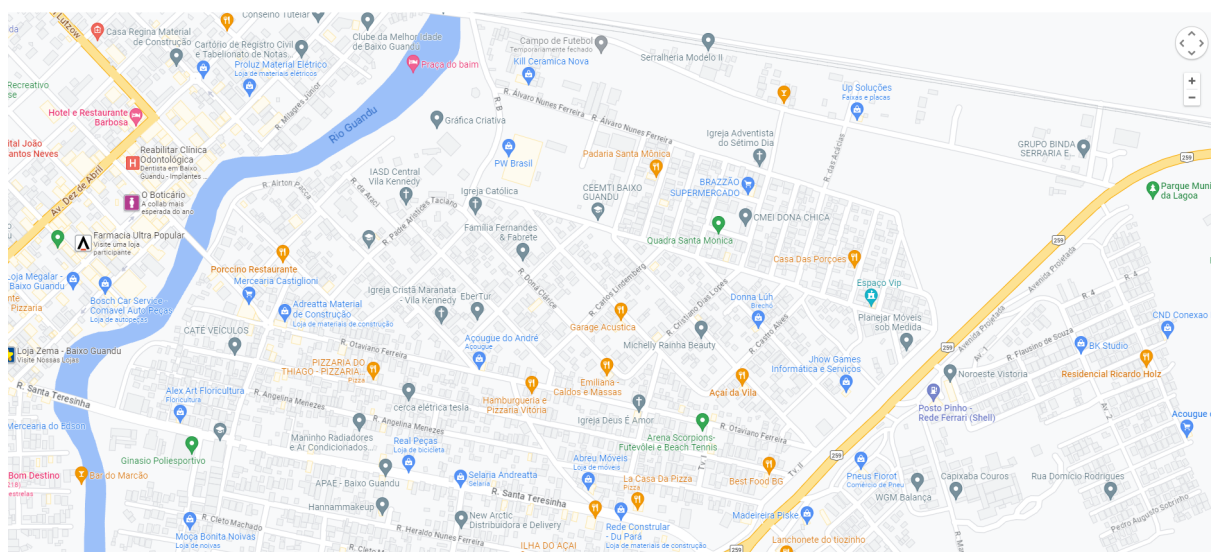
Figura 21 – Mapa 2: Espaço Pitava - FG Farma - Campo de futebol



Fonte: *Google Maps*

Para o mapa 3: O primeiro satélite, localizado no CMEI Dona Chica, te dá uma distância de $460m$; o segundo satélite, localizado na Abreu Móveis, te dá uma distância de $260m$; o terceiro satélite, localizado na Igreja Cristã Maranata, te dá uma distância de $390m$.

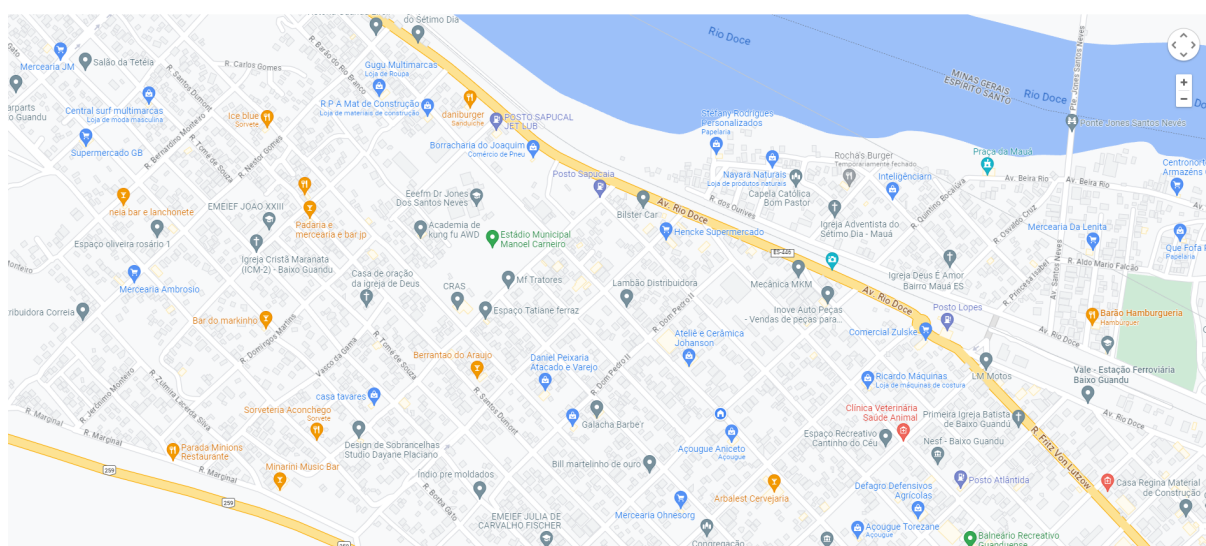
Figura 22 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata



Fonte: *Google Maps*

Para o mapa 4: O primeiro satélite, localizado na EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves, te dá uma distância de 470m; o segundo satélite, localizado no Bar do Markinho, te dá uma distância de 230m; o terceiro satélite, localizado no Berrantão do Araújo, te dá uma distância de 580m.

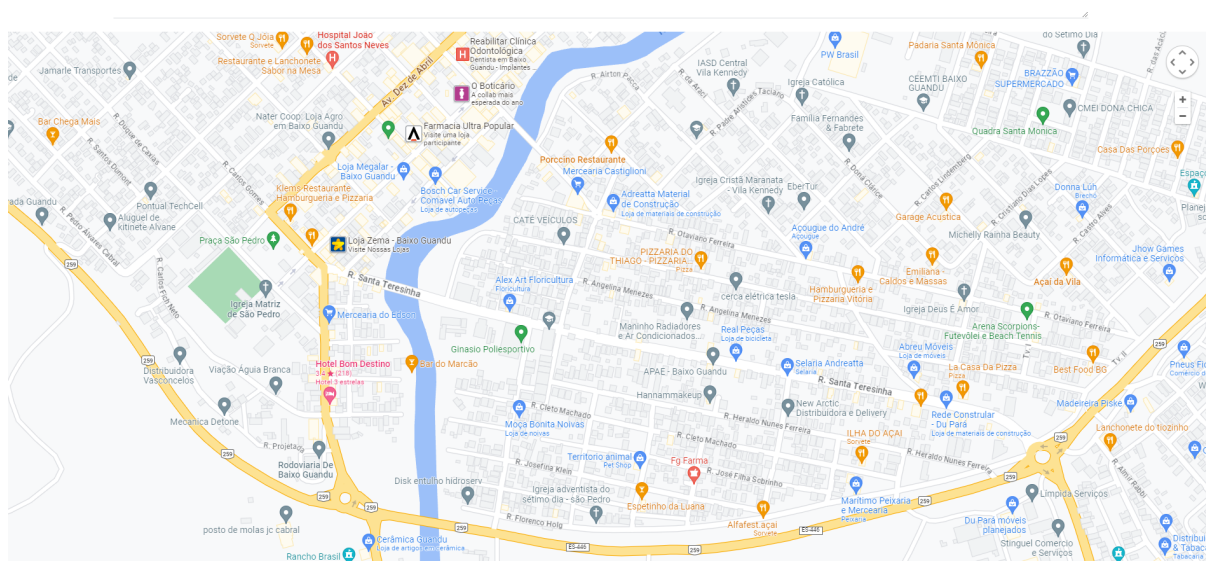
Figura 23 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão



Fonte: Google Maps

Para o mapa 5: O primeiro satélite, localizado no Caté Veículos, te dá uma distância de 250m; o segundo satélite, localizado no Espetinho da Luana, te dá uma distância de 450m; o terceiro satélite, localizado no Açougue do André, te dá uma distância de 670m.

Figura 24 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açougue



Fonte: Google Maps

Com os mapas e os dados em mãos foi necessário que os estudantes fizessem a conversão dos valores a partir da escala usada, para tanto foi necessário que primeiro eles

transformassem as distâncias dadas em metros para centímetros, ou seja, uma conversão de medidas. Isso é feito facilmente multiplicando o valor dado em metros por 100, como a professora mostrou aos alunos através do exemplo: se a distância for de 250 metros, encontra-se a distância em centímetros fazendo $250 \cdot 100 = 25.000$ centímetros. Como nossa escala é $1 : 10.000$, cada 1cm na dimensão do mapa temos 10.000cm na dimensão real. Então, ainda precisamos encontrar o valor que será utilizado no mapa usando a fórmula

$$E = \frac{d}{D},$$

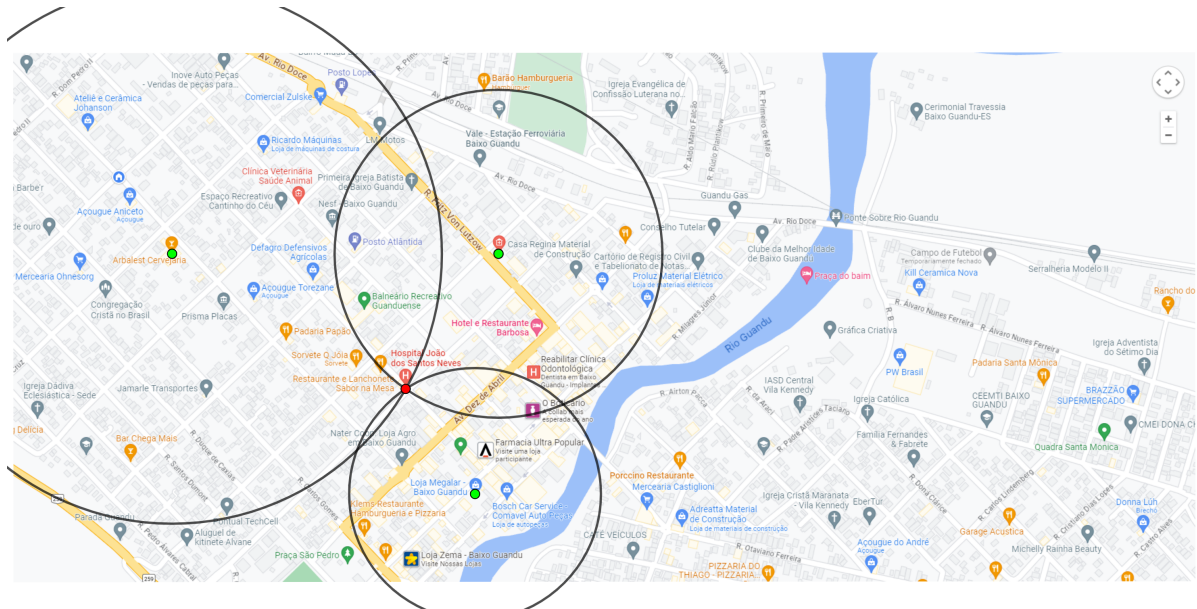
onde E é a escala, d é a dimensão no mapa e D é a dimensão real. Logo, se a distância real for de 25.000cm , na fórmula temos

$$\frac{1}{10.000} = \frac{d}{25.000} \Rightarrow 10.000 d = 25.000 \Rightarrow d = 2,5,$$

assim os 250m da dimensão real se tornam $2,5\text{cm}$ na dimensão do mapa.

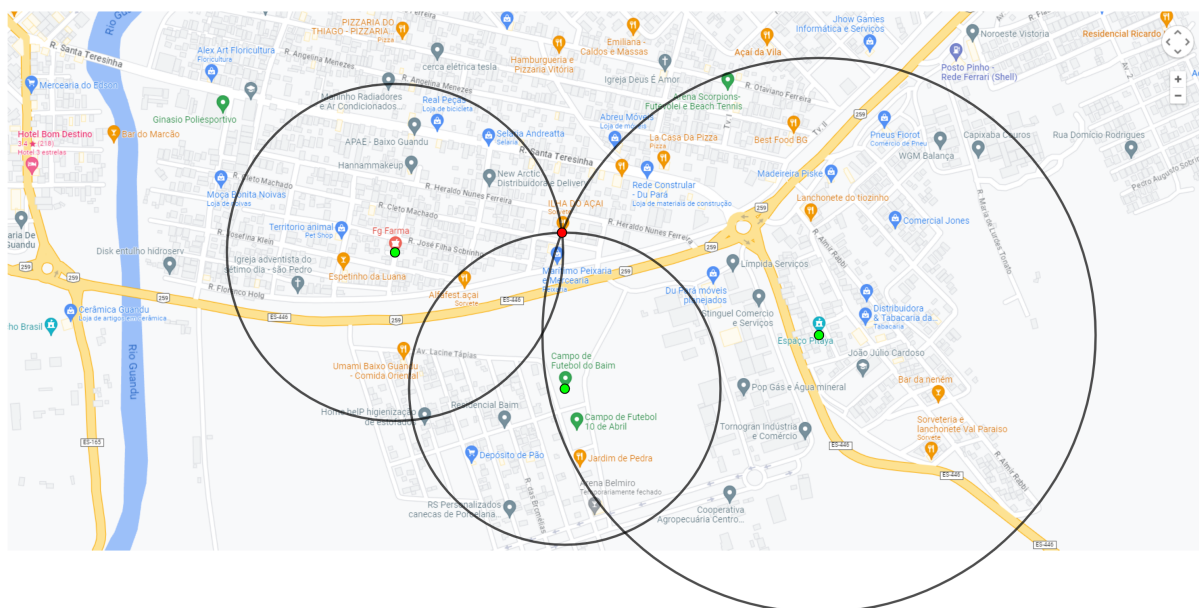
Com as devidas conversões feitas os estudantes precisaram encontrar os locais indicados nos mapas, mas como a cidade é pequena e eles já a conhecem, essa tarefa foi simples. Porém, outras dificuldades apareceram onde foi necessária a intervenção docente para auxiliá-los a encontrar o local desejado. Seguem abaixo, nas Figuras 25, 26, 27, 28 e 29, os mapas com o resultado desejado no trabalho, feitos pela professora.

Figura 25 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar. Resultado desejado



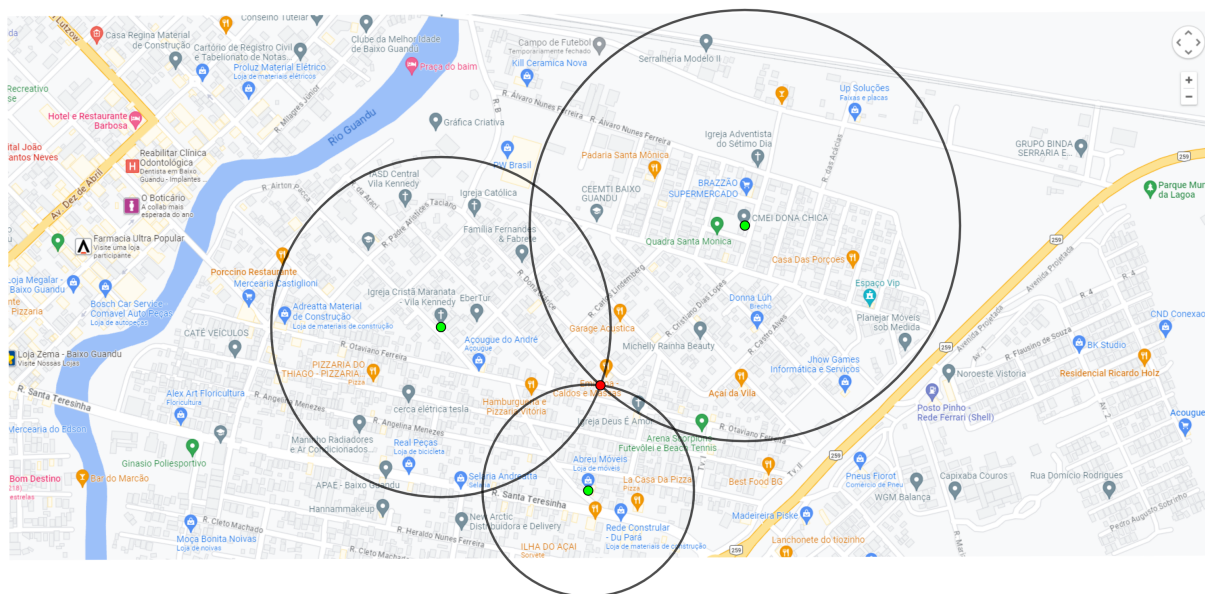
Fonte: Produzida pela própria autora usando como base uma imagem do Google Maps (2024)

Figura 26 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado desejado



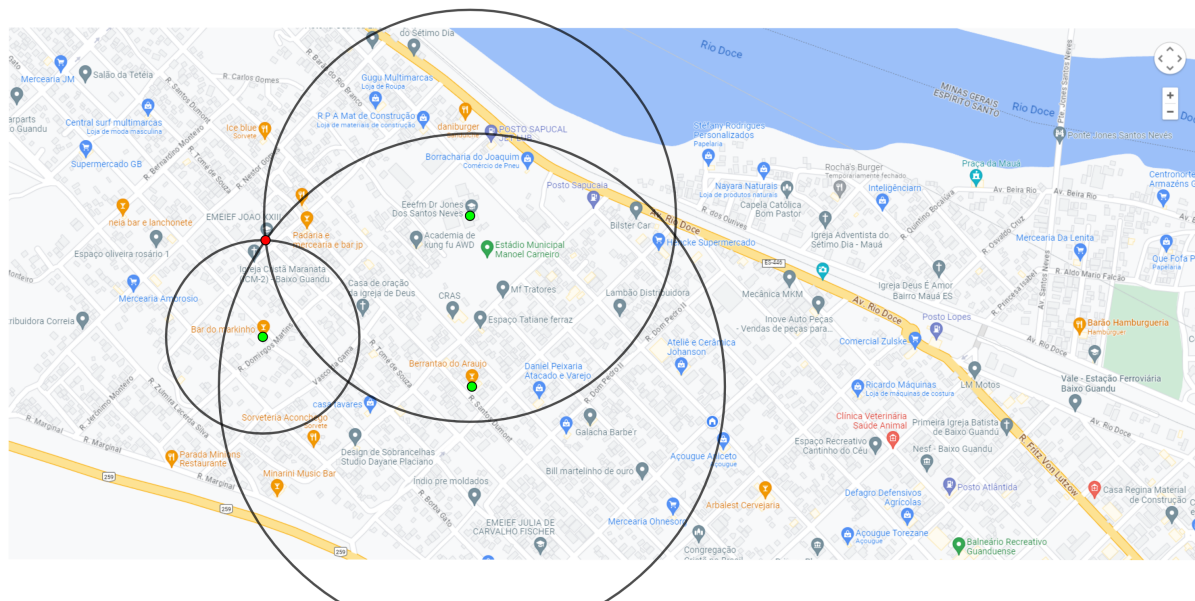
Fonte: Produzida pela própria autora usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Figura 27 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata. Resultado desejado



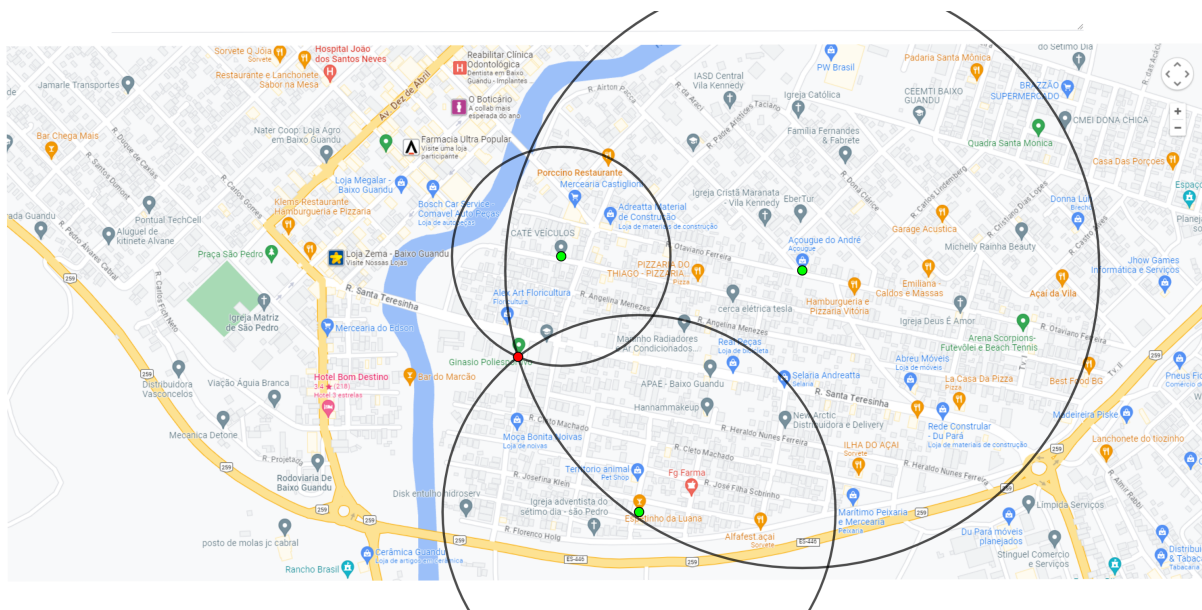
Fonte: Produzida pela própria autora usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Figura 28 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão. Resultado desejado



Fonte: Produzida pela própria autora usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

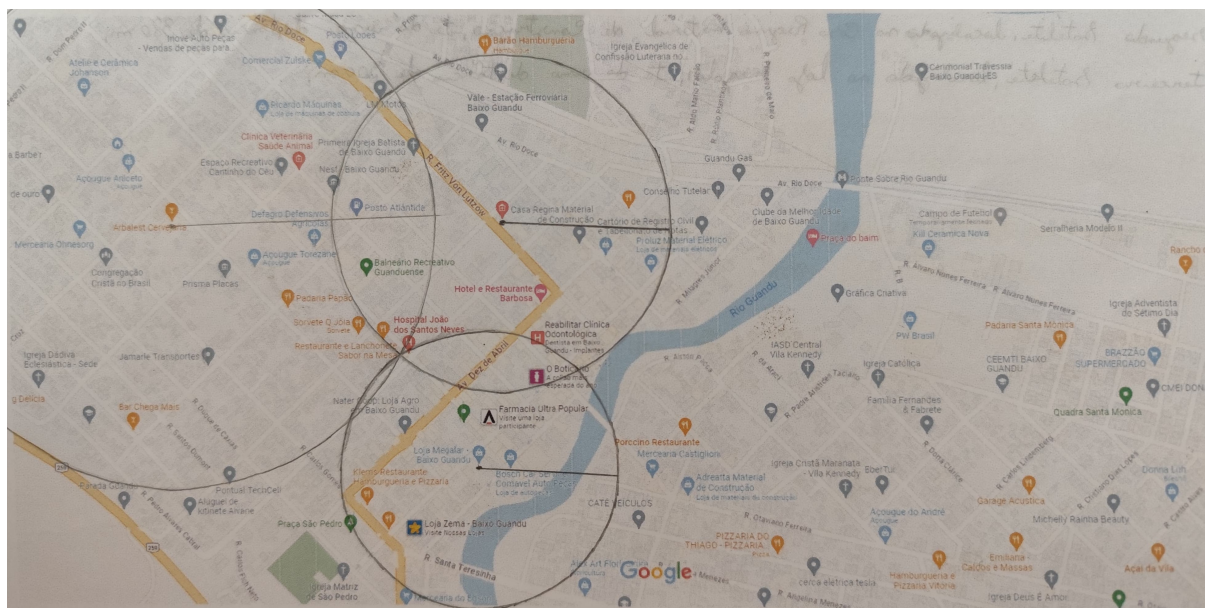
Figura 29 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açougue. Resultado desejado



Fonte: Produzida pela própria autora usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Seguem algumas das atividades realizadas pelos alunos durante as aulas. É possível ver nas Figuras 30, 31 e 32 que os estudantes alcançaram o resultado desejado, sem que fosse necessário uma intervenção docente. Esses alunos conseguiram compreender melhor o que era pedido e também aplicar com segurança o conteúdo de geometria analítica sobre circunferências.

Figura 30 – Mapa 1: Arbalest - Casa Regina - Megalar. Resultado obtido pelo estudante A, como esperado



Fonte: Produzida pelo estudante A, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Figura 31 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado obtido pelo estudante B, como esperado



Fonte: Produzida pelo estudante B, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Figura 32 – Mapa 4: EEEFM Dr. Jones dos Santos Neves - Bar do Markinho - Berrantão
- Resultado obtido pelo estudante C, como esperado



Fonte: Produzida pelo estudante C, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

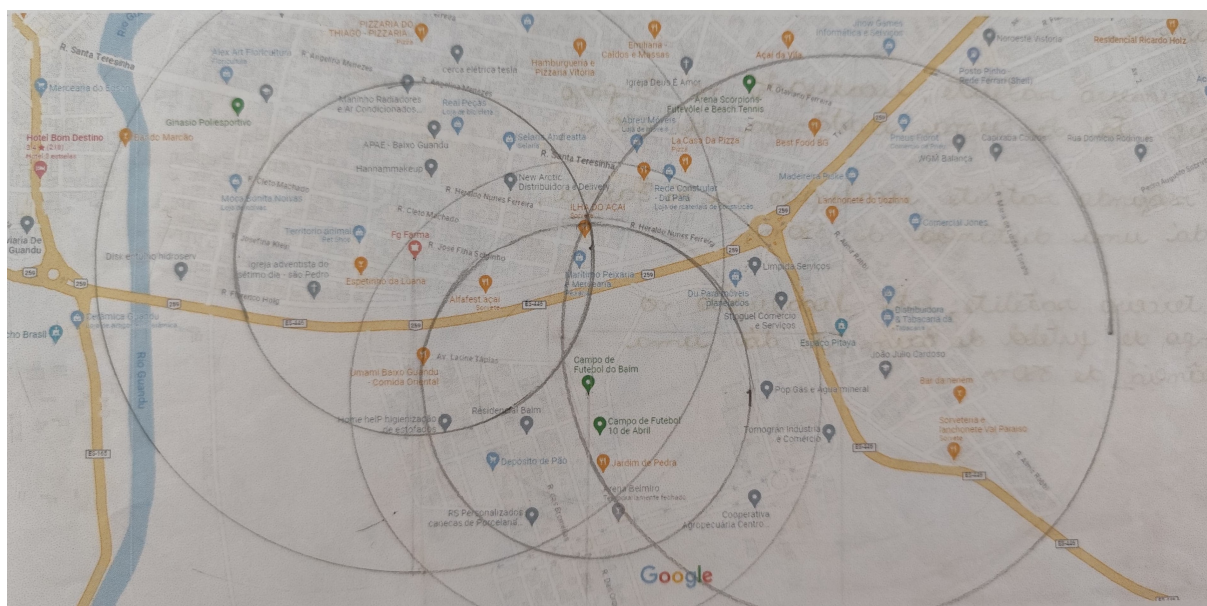
Alguns estudantes apresentaram dificuldades em compreender a atividade e/ou aplicar os conceitos relacionados à circunferência. Com isso, podemos ver alguns trabalhos onde alguns erros foram cometidos, Figuras 33, 34 e 35. É importante ressaltar que toda a produção estudantil foi valorizada e que resultados ditos incorretos foram encarados como oportunidade de esclarecimentos e aprendizagem sobre o conteúdo de circunferência. Abaixo temos algumas atividades onde o resultado inicial não foi o esperado pela professora.

Na Figura 33, os estudantes tiveram dificuldade em desenhar o raio correto de duas circunferências por apresentarem dificuldades em trabalhar com régua e compasso. Porém, como a intervenção da professora aconteceu durante a aula, enquanto os estudantes realizavam a atividade, as medidas corretas foram colocadas e os raios errados foram apagados da folha, então foi necessário que reacendêssemos as circunferências com os desenhos de raios incorretos para mostrar a dificuldade do estudante.

Na Figura 34, o estudante mediu o comprimento dos raios corretamente, porém ao desenhar uma circunferência ele deveria posicionar a ponta seca do compasso no ponto referente a Abreu Móveis, para que ela fosse o centro da circunferência, e a ponta com o grafite deveria ser posicionada ao final do segmento de reta que representava o raio, mas ele fez o contrário, e colocou a ponta seca no final do segmento e o grafite no ponto onde estava localizada a Abreu Móveis, assim encontrou uma circunferência que não correspondia a representação do sinal emitido pelo satélite; foi necessário reacender os erros cometidos pelo estudante já que a correção foi feita durante a aula logo após a intervenção docente.

Na Figura 35, não há a interseção das três circunferências mesmo com as localizações

Figura 33 – Mapa 2: Espaço Pitaya - FG Farma - Campo de futebol. Resultado obtido pelo estudante D, como esperado, após intervenção da professora



Fonte: Produzida pelo estudante D, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Figura 34 – Mapa 3: CMEI Dona Chica - Abreu - Maranata. Resultado obtido pelo estudante E, como esperado, após intervenção da professora



Fonte: Produzida pelo estudante E, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

corretas da emissão do sinal e as medidas corretas dos raios, ou seja, as circunferências desenhadas sem erros nos cálculos preliminares. Contudo, há uma proximidade com o local procurado. Isso aconteceu devido ao fato de ser um trabalho manual onde pequenas divergências, como a localização exata do centro de cada circunferência utilizada pela professora, podem ocasionar erros ao analisarmos o resultado final.

Figura 35 – Mapa 5: Caté - Espetinho - Açougue. Resultado obtido pelo estudante F, como esperado, após intervenção da professora



Fonte: Produzida pelo estudante F, usando como base uma imagem do *Google Maps* (2024)

Em outra aula, após o término das atividades relativas ao *GPS* através de um olhar da Geometria Plana, os alunos foram direcionados para o Laboratório de Informática onde trabalharíamos uma visão tridimensional da localização de um ponto pelo Sistema de Posicionamento Global. Para tanto, os estudantes utilizaram o GeoGebra, programa livre de geometria dinâmica. Inicialmente, foi necessário apresentar a interface do programa, Figura 36, já que nem todos os estudantes o conheciam, e ensinar os comandos necessários para a construção do projeto sobre o funcionamento do *GPS*, como mencionado no Capítulo 4.

Ainda divididos em grupos, agora no Laboratório de Informática, pedimos aos estudantes que exibissem a janela de visualização 3D e escondessem a janela de visualização 2D na interface do programa. A partir dessa janela 3D começaríamos a construção referente ao funcionamento do *GPS*. Para que os alunos fizessem a construção foram passados os seguintes comandos:

1. Construa uma esfera de centro na origem e raio 1, e a nomeie Terra, Figura 37a;
2. Construa os planos XY , XZ e YZ do sistema de coordenadas cartesianas no espaço, Figura 37b;
3. Construir uma esfera que represente a órbita dos satélites (essa esfera deve ter raio maior do que o raio utilizado para a esfera que representa a Terra), Figura 37c;
4. Encontre a interseção geométrica entre a esfera que representa a órbita dos satélites e cada um dos planos XY , XZ e YZ , Figura 37d;

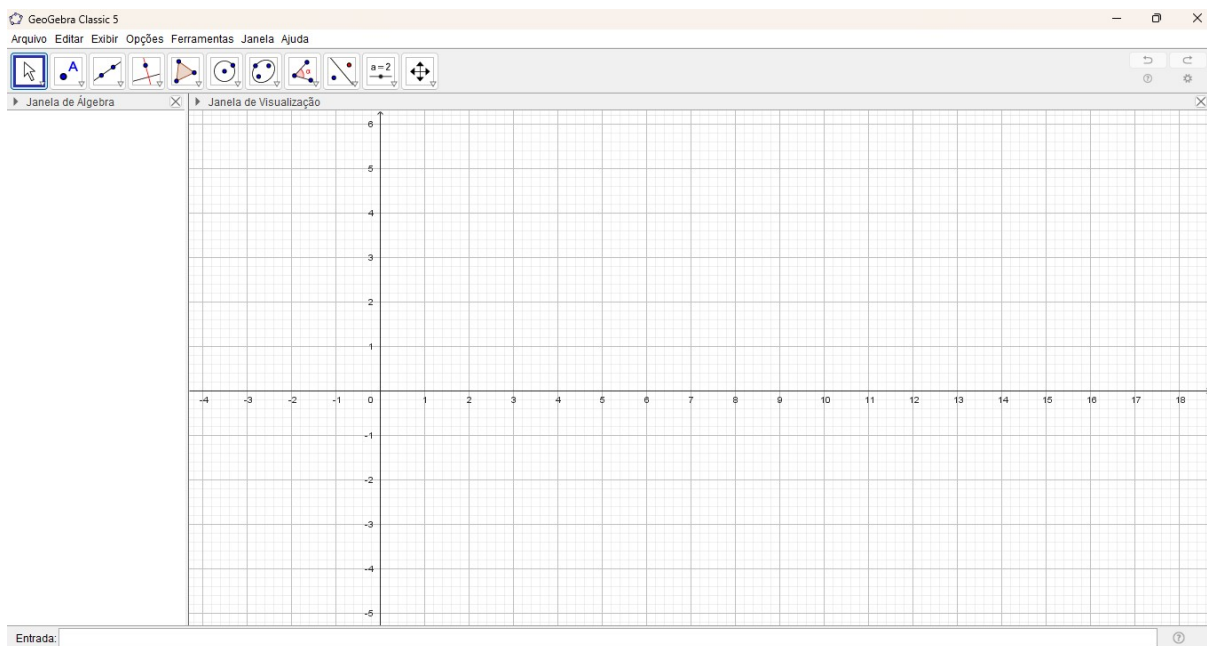


Figura 36 – GeoGebra

5. Limpe sua janela escondendo todos os eixos e planos, e a esfera que representa a órbita dos satélites, Figura 37e;

6. Crie um ponto em cada circunferência criada a partir da interseção geométrica entre a esfera que representa a órbita dos satélites e cada um dos planos XY , XZ e YZ ;

7. Crie um ponto sobre a esfera que representa a Terra, Figura 37f;

8. Construa três esferas cada uma com o centro no ponto criado no passo 6 e com raio igual a distância de cada um desses pontos ao ponto criado no passo 7, Figura 37g;

Em conjunto com os alunos, queremos verificar que uma das duas interseções das três esferas coincide com o ponto criado sobre a esfera que representa a Terra no passo 7.

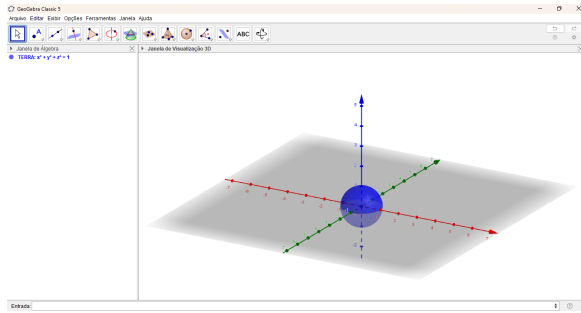
9. Encontre a interseção cônica entre as esferas criadas no passo 8, duas a duas;

10. Esconda as esferas criadas no passo 8 e as circunferências criadas a partir da interseção geométrica entre a esfera que representa a órbita dos satélites e cada um dos planos XY , XZ e YZ , Figura 37h;

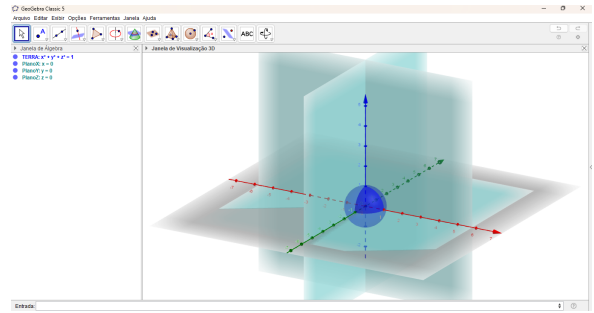
11. Marque o ponto onde as interseções cônicas se encontram, Figura 37i;

12. Esconda a esfera que representa a TERRA, criada no passo 1 e os pontos criados no passo 6, Figura 37j.

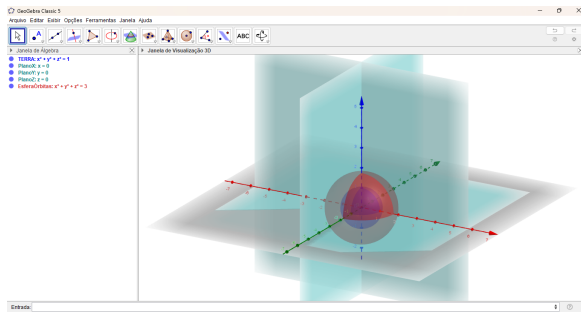
Figura 37 – Construção no GeoGebra



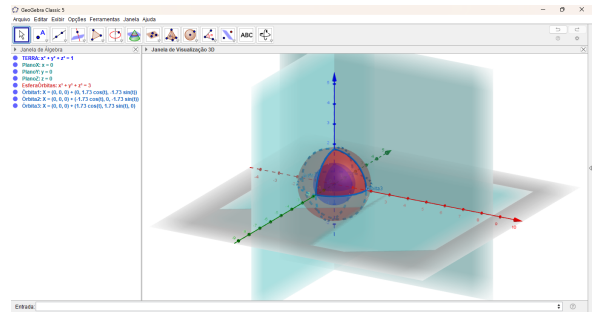
(a) Passo 1



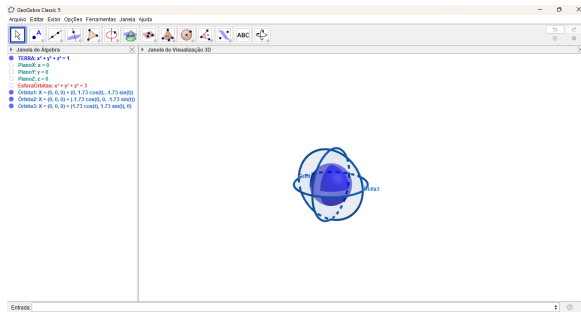
(b) Passo 2



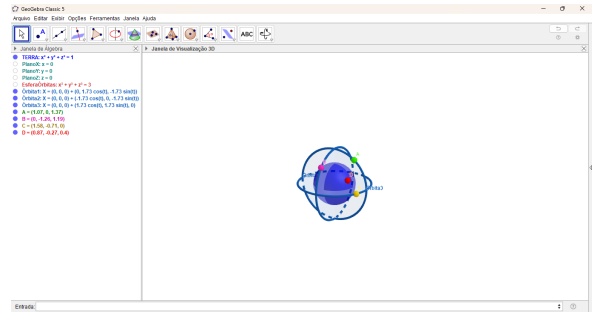
(c) Passo 3



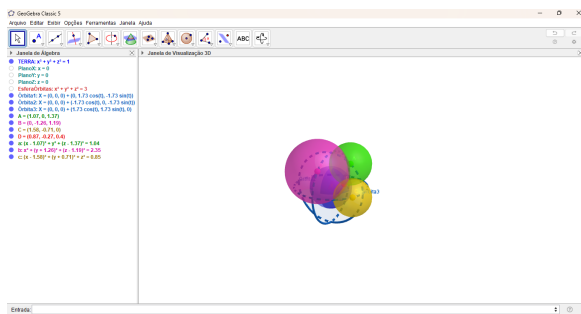
(d) Passo 4



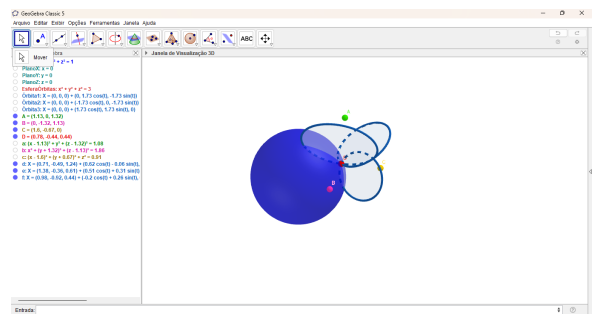
(e) Passo 5



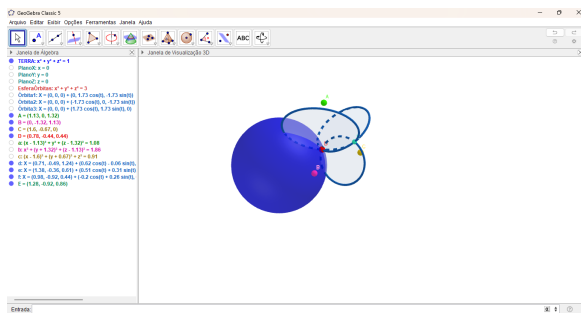
(f) Passos 6 e 7



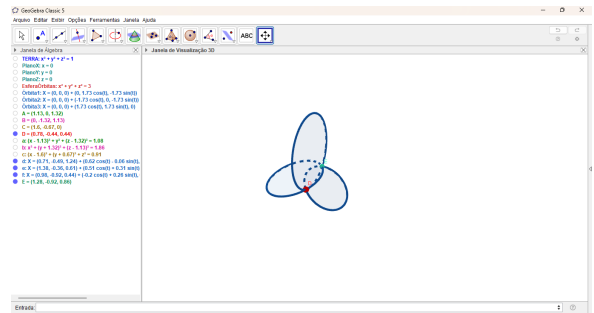
(g) Passo 8



(h) Passos 9 e 10



(i) Passo 11



(j) Passo 12

Nesse momento, com os estudantes no Laboratório de Informática, Figura 38, durante a construção passo-a-passo no GeoGebra, foi discutido com os estudantes o significado de cada parte da construção e feito referência à primeira parte do trabalho, onde eles localizaram pontos no mapa, que seria a versão 2D do projeto. Observamos que não estamos mais trabalhando com mapas planificados e sim com o planeta Terra e nossos satélites não emitem sinal de outro pontos da Terra, mas do Espaço. Cada satélite tem sua órbita e apesar de termos representado apenas três satélites em nosso projeto, existem 24 satélites orbitando a Terra nesse momento. Para encontrar um local na Terra são utilizados os satélites que estão visíveis ao ponto/local que desejamos encontrar, logo quantos e quais satélites serão utilizados depende do momento da recepção do sinal. Com ajuda e direcionamento da professora os alunos conseguiram observar que ao final da nossa construção no GeoGebra foram encontrados dois pontos de interseção, porém um deles estava no Espaço.

Figura 38 – Desenvolvimento do trabalho 3D



(a) Estudantes no Laboratório de Informática



(b) Trabalho 3D

Fonte: Acervo pessoal da própria autora (2024)

Para a representação do “funcionamento” do *GPS* no GeoGebra feita pelos estudantes, Figura 38b, e orientada pela professora, definimos uma esfera de raio 1 para representar a Terra e uma esfera de raio $\sqrt{3}$ para representar a esfera que usaríamos para as órbitas dos satélites, pois queríamos que fosse possível que os estudantes conseguissem enxergar toda a construção na janela de visualização, sem a necessidade de reduzi-la, visto que ainda acrescentaríamos outros objetos. A ideia era que a construção fosse o maior possível, mas contida na janela de visualização. As órbitas dos satélites foram encontradas a partir da interseção dos planos XY , XZ e YZ com a esfera para as órbitas. Logo, cada satélite segue em sua órbita emitindo seu sinal. A posição do receptor em relação à cada satélite é representada pela esfera de centro na posição do próprio satélite. Como nossa construção apresenta 3 satélites, a interseção das esferas nos dá dois pontos de interseção, porém temos que apenas um dos pontos se encontra na Terra, enquanto o outro está no

Espaço Sideral.

Este projeto foi desenvolvido já no final do ano letivo, quando muitos estudantes (aqueles que se consideram aprovados) costumam se ausentar das aulas. Apesar disso, a participação dos estudantes durante as aulas foi relevante. Isso indica que eles gostaram de participar das atividades, inclusive muitos falaram sobre como foi interessante ver uma aplicação do conteúdo de Matemática em algo “concreto”.

6 Conclusão

A construção desse trabalho passou por etapas de leitura, planejamento, execução e reflexão, sempre retomando alguma etapa quando necessário. O processo de ensino-aprendizagem dos estudantes também precisa funcionar da mesma maneira, dando a eles conhecimento e despertando curiosidade para que possam refletir e buscar ampliar esse conhecimento para além da sala de aula.

Ensinar conteúdo após conteúdo sem que os alunos percebam a importância do que estão aprendendo tem se mostrado uma barreira para a própria aprendizagem. Claro que não é possível e nem viável que todos os conteúdos de todas as disciplinas sejam apresentados com uma aplicação “real”, mas os jovens de hoje têm acesso a tudo com tanta rapidez que não podemos esperar que eles fiquem quietos nos escutando falar durante 50 minutos sobre algo que para eles não faz sentido.

Durante o desenvolvimento do trabalho com os estudantes foi possível voltar ao básico, como o uso de régua e compasso. Algo que pode parecer simples para muitos, mas que gerou dúvidas pois os alunos não estavam habituados a usar essas ferramentas. Logo, eles também desenvolveram novas habilidades manuais durante as aulas.

Ao mostrar aos estudantes que conteúdos e conceitos básicos da Geometria estão envolvidos em algo como o celular foi possível despertar o interesse dos alunos pelo o que estávamos estudando/trabalhando. A cada construção relacionada com o conteúdo visto durante as aulas, a cada associação do conteúdo de Geometria com outra disciplina, a cada descoberta feita por eles, a cada vez que ao perguntarem se a atividade estava correta e recebiam o positivo da professora, e mesmo cada vez em que eram orientados a refletirem sobre os erros, foi possível ver que eles se sentiam mais seguros e apropriados daquele conhecimento.

7 Anexos

7.1 Anexo 1

Nesta seção, usaremos o método de eliminação na resolução do Sistema 3.2. Para começar, eliminaremos a incógnita y , para isso multiplicaremos S_4 por E e S_5 por $(-B)$, resultando em

$$\begin{cases} AEx + BEy = CE \\ -BDx - BEy = -BF \end{cases} \quad (7.1)$$

Somando as duas equações do sistema acima, temos

$$AEx - BDx = CE - BF. \quad (7.2)$$

Colocando o x em evidência,

$$x(AE - BD) = CE - BF. \quad (7.3)$$

Assim, temos que

$$x = \frac{CE - BF}{AE - BD}, \quad (7.4)$$

desde que $AE - BD \neq 0$.

Para encontrarmos o valor de y , utilizaremos o resultado encontrado para x na Equação 7.4 e substituiremos esse resultado em S_4 , logo

$$A \cdot \frac{CE - BF}{AE - BD} + By = C. \quad (7.5)$$

Multiplicando a equação anterior por $(AE - BD)$, ficamos com

$$A(CE - BF) + B(AE - BD)y = C(AE - BD). \quad (7.6)$$

Isolando y , temos que

$$y = \frac{C(AE - BD) - A(CE - BF)}{B(AE - BD)}. \quad (7.7)$$

Logo, a solução do sistema é dada por

$$\left(\frac{CE - BF}{AE - BD}, \frac{C(AE - BD) - A(CE - BF)}{B(AE - BD)} \right). \quad (7.8)$$

Referências

- DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações - Volume 3*. [S.l.]: Editora Ática, 2016. Citado na página 19.
- DELGADO, K. R. F.; DELGADO, J. *Disciplina Geometria Analítica*. [S.l.]: UFF, 2017. Citado na página 24.
- FAGGIAN, H. C. Geometria e GPS. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2019. Citado na página 25.
- KACHEL, G. L. S.; MENEGUELLI, L.; AZEVEDO, W. R. de. Orientações curriculares 2023. *Orientações curriculares 2023*, 2023. Citado na página 16.
- LIMA, D. D. Desvendando a matemática do GPS. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 13, 22, 27 e 30.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio Volume 3*. [S.l.]: SBM, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.
- MORAES, M. C. D. O funcionamento do GPS e a matemática do ensino médio. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 26.
- NETO, P. C. G. O GPS como fator motivacional no processo de aprendizagem. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2013. Citado na página 13.
- PEREIRA, E. H. U. A matemática do GPS. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2014. Citado na página 26.
- ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e Atualidade Volume 1*. [S.l.]: SBM, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- SCANNAVINO, F. F. A matemática e o GPS. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2015. Citado na página 29.
- SOUZA, J. C. de. GPS: a matemática por trás e algumas reflexões. *Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 25.