Carli Cristiane Rizzi Siqueira

# O ensino dos sólidos geométricos no Ensino Médio

Vitória

2025

Carli Cristiane Rizzi Siqueira

# O ensino dos sólidos geométricos no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer

Vitória

2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

Se

Siqueira, Carli Cristiane Rizzi, 1978-
O ensino dos sólidos geométricos no ensino médio / Carli Cristiane Rizzi Siqueira. - 2025.
75 p. : il.

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Didática. 3. Aprendizagem. 4. Capacidade matemática. I. Bayer, Valmecir Antonio dos Santos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

# “O ensino de volume de sólidos geométricos no ensino médio”

## Carli Cristiane Rizzi Siqueira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06/05/2025 por:

____________________________________________

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Orientador – UFES

____________________________________________

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Júlio da Silva Valentim
Membro Interno – UFES

____________________________________________

Prof(a). Dr(a). Pedro Matos da Silva
Membro Externo – IFES

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo – Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES │ 29075-910 │ (27) 4009-2474 │www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM – profmat.ufes@gmail.com

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
**Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 17/05/2025 às 19:29:36**

## Folha de Assinaturas Carli Cristiane Rizzi Siqueira

Data e Hora de Criação: 14/05/2025 às 09:32:16

**Documentos que originaram esse envelope:**
- Folha de Assinaturas Carli Cristiane Rizzi Siqueira.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 38de484d689cf3911638a1477f5584638aaf03a7e0ffd06df344f3726067ae7d
[SHA512]: 31145fb42d2ec910a0d29ccc0f833f72ca87df87f611d93a880fc8d85ab27f011f1324ed55094f98b10f5b9e3abfa23a8724c2b6f8806cad8a88a5aa2a7a314d

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

**ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)**
Data/Hora: 14/05/2025 - 16:15:15, IP: 187.36.171.100, Geolocalização: [-20.285726, -40.294203]
[SHA256]: caec34150daf8b5e889cd3a44017e71d4fed6081b3922b54349d25a96c768f56

**ASSINADO - Fábio Júlio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)**
Data/Hora: 15/05/2025 - 10:14:37, IP: 138.99.33.169, Geolocalização: [-20.362035, -40.301363]
[SHA256]: 10bdc7bd89b9c1d39aa964a19486a94ddf7054baa5412140232628f550bedcb1

**ASSINADO - Pedro Matos da Silva (pedroms@ifes.edu.br)**
Data/Hora: 17/05/2025 - 19:29:36, IP: 187.36.166.189, Geolocalização: [-20.362035, -40.317747]
[SHA256]: 577df5b50b6f36cc7956798c6b6d05ce720661503f1f9efa48fdf1ddf7a3ddf6

### Histórico de eventos registrados neste envelope

17/05/2025 19:29:36 - Envelope finalizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.166.189
17/05/2025 19:29:36 - Assinatura realizada por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.166.189
17/05/2025 19:29:29 - Envelope visualizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.166.189
15/05/2025 10:14:37 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 138.99.33.169
14/05/2025 16:15:15 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.171.100
14/05/2025 16:14:43 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.171.100
14/05/2025 09:33:06 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.100
14/05/2025 09:33:05 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.100
14/05/2025 09:32:16 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.100

*Dedico esse trabalho ao meu pai, Nestor Siqueira(in memoriam), com todo o meu carinho e agradecimento.*

# Agradecimentos


Agradeço a Deus pela proteção durante as longas viagens e pela sabedoria e força que me ajudaram a concluir o curso.

Agradeço à minha família, que é fundamental na minha vida. Sem o apoio deles, essa jornada não seria possível.

Agradeço aos meus animais de estimação pela companhia e por me ajudarem a aliviar meu estresse ao longo dessa jornada.

Agradeço aos meus colegas do PROFMAT pelas aulas online e pelo apoio na compreensão dos conteúdos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer, pelas reuniões e pelo apoio na elaboração da dissertação.

Agradeço aos professores do PROFMAT, que contribuíram com muito conhecimento e apoio durante a minha trajetória acadêmica.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*"Matemática é a linguagem em que Deus escreveu o universo."*

*(Galileu Galilei)*

# Resumo

Pretendemos com este trabalho acadêmico buscar a didática de como desenvolver de forma mais dinâmica o conhecimento de volumes de sólidos geométricos e mostrar sua importância para a aprendizagem de um aluno no Ensino Médio através de atividades práticas. Vamos trabalhar com alunos da segunda série, que são estudantes que enfrentaram a pandemia durante os anos finais do Ensino Fundamental. Nesse período, eles tiveram algumas dificuldades no aprendizado básico. Nosso estudo vai acompanhar como esses alunos vão evoluindo ao longo das atividades, desenvolvendo atividades que ajudem os alunos a compreender melhor o conteúdo sobre o volume de sólidos. A metodologia pedagógica no ensino da Matemática apresenta-se como um importante instrumento na construção do conhecimento científico, especialmente para alunos do Ensino Médio. O objetivo geral desta pesquisa é estimular as habilidades referentes ao cálculo de volume de diferentes sólidos geométricos, capacitando os alunos a resolver problemas práticos de forma eficaz, de acordo com o currículo escolar do Espírito Santo. Os objetivos específicos incluem: situar historicamente a vida de Arquimedes e Cavalieri, evidenciar as diretrizes contidas em documentos oficiais referentes a volume, definir volume, aplicar o Princípio de Arquimedes como uma estratégia de ensino de volume, estabelecer e utilizar o Princípio de Cavalieri para lidar com volume, elaborar abordagens pedagógicas que facilitem o aprendizado de volume no Ensino Médio e acompanhar os alunos no decorrer das atividades.

**Palavras-chave**:volume; Princípio de Arquimedes; Princípio de Cavalieri.

# Abstract

With this academic work, we intend to seek the didactics of how to develop in a more dynamic way the knowledge of volumes of geometric solids and show its importance for the learning of a student in High School through practical activities. We will work with second-grade students who experienced the pandemic during their final years of elementary school. During this period, they experienced some difficulties in basic learning. Our study will monitor how these students progress throughout the activities, developing activities that help them better understand the content about the volume of solids. Pedagogical methodology in mathematics teaching is an important tool in the development of scientific knowledge, especially for high school students. The overall objective of this research is to foster skills related to calculating the volume of various geometric solids, enabling students to solve practical problems effectively, in accordance with the Espírito Santo school curriculum. Specific objectives include: historically situating the lives of Archimedes and Cavalieri, highlighting the guidelines contained in official documents regarding volume, defining volume, applying Archimedes' Principle as a strategy for teaching volume, establishing and using Cavalieri's Principle to address volume, developing pedagogical approaches that facilitate the learning of volume in high school, and monitoring students throughout the activities.

**Keywords**: volume; Archimedes' Principle and Cavalieri's Principle

# Lista de ilustrações

# Sumário

# 1 Introdução

Buscando compreender a deficiência que se evidenciou no processo de ensino em todos os níveis escolares após a pandemia, especialmente na área de Matemática do Ensino Médio, procuramos entender como atuar de maneira a preencher essa lacuna de conhecimento, atuando de forma necessária para que o estudo sobre tal assunto possua abordagens e possibilidades dentro de uma proposta humanizada. Para isso, vamos procurar metodologias que possam nos ajudar, pois elas se mostram como uma ferramenta essencial na construção do conhecimento científico, especialmente para os alunos do Ensino Médio.

Este estudo visa investigar como os alunos do segundo ano do Ensino Médio podem construir conhecimento científico a partir do uso de atividades práticas no ensino da Matemática, destacando aspectos do planejamento e implementação das atividades, assim como relatar e analisar as limitações encontradas.

A relevância deste assunto reside na crescente necessidade de métodos pedagógicos que promovam a participação ativa dos estudantes e desenvolvam habilidades práticas nas resoluções de problemas, pensamento crítico e trabalho em equipe. A pesquisa busca responder também à seguinte questão: "Como o conhecimento científico (habilidades) pode ser construído a partir de atividades práticas no ensino da Matemática na Educação Básica?". De maneira semelhante, os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs) destacam comportamentos que, segundo a perspectiva deste estudo, podem ser desenvolvidos nas atividades práticas, tais como: fomentar a curiosidade, respeitar a diversidade de opiniões e persistir na busca por informações e evidências obtidas através da investigação(BRASIL, 2002).

Justificamos, portanto, a realização deste trabalho pela possibilidade de comprovar que o uso de atividades práticas não só torna o aprendizado mais dinâmico e interessante, mas também efetivo. O objetivo geral desta pesquisa é estimular as habilidades referentes ao cálculo de volume de diferentes sólidos geométricos, empregando atividades práticas para ajudar na dedução das fórmulas, capacitando assim os alunos a resolver problemas práticos de forma eficaz, de acordo com o currículo escolar do Espírito Santo. Os objetivos específicos incluem situar historicamente a vida de Arquimedes e Cavalieri, evidenciar as diretrizes contidas em documentos oficiais referentes a volume, definir volume, aplicar o Princípio de Arquimedes como uma estratégia de ensino de volume, estabelecer e utilizar o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, elaborar abordagens pedagógicas que facilitem o aprendizado sobre volume no Ensino Médio e acompanhar os alunos no decorrer das atividades práticas.

Assim, optamos por direcionar esta dissertação ao exame da grandeza volume, sustentada pelo Princípio de Cavalieri e pelo auxílio do Princípio de Arquimedes, com o intuito de proporcionar a professores e alunos do Ensino Médio uma base teórica e prática para o cálculo de volumes de sólidos geométricos.

A metodologia empregada neste trabalho envolve uma pesquisa experimental realizada na EEEM Pedro Paulo Grobério, em Jaguaré-ES. Utilizando conceitos de manipulação, controle e distribuição aleatória, conforme Pozo (1998), este estudo qualitativo se baseia na análise das atividades realizadas com alunos do segundo ano do Ensino Médio para identificar evidências de construção do conhecimento.

O trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro é introdutório, o segundo capítulo apresenta uma pesquisa histórica sobre Arquimedes de Siracusa e Bonaventura Cavalieri, dois matemáticos de épocas diferentes, mas muito relevantes para os dias atuais. O capítulo apresenta ainda um pouco sobre o Método mecânico e o Método dos indivisíveis, destacando a contribuição para o estudo de volume.

O terceiro capítulo traz diretrizes de diversos documentos oficiais da educação, além de orientações curriculares relacionadas ao ensino da grandeza volume no Ensino Médio.

No quarto capítulo é exposta a problematização do cálculo do volume de objetos quaisquer. Utilizando conceitos físicos por meio da aplicação do Princípio de Arquimedes, apresentamos uma atividade interdisciplinar simples para o cálculo do volume de um sólido qualquer, auxiliando o estudo da Geometria Espacial. O capítulo apresenta ainda um pouco do conhecimento prévio que os alunos devem ter para a realização do experimento.

O quinto capítulo aborda o Princípio de Cavalieri e as aplicações no cálculo de volume de sólidos geométricos, através de um conceito que os alunos do Ensino Médio tenham compreensão. Também é apresentado o conceito matemático de volume.

No sexto capítulo, é descrita uma aplicação prática das atividades na sala de aula, além de suas interações com os conteúdos de Matemática preconizados na BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Explicamos como foi desenvolvido o estudo, descrevendo e aplicando as atividades de uma forma sequencial o conteúdo de volume e analisamos as atividades realizadas na turma. Concluímos o trabalho com uma reflexão sobre os desafios e a possibilidade de implementação das atividades práticas no contexto educacional atual.

A relevância deste estudo para a sociedade é expressiva, pois a educação é um pilar fundamental para o desenvolvimento individual e coletivo. A inovação em métodos pedagógicos, como as atividades práticas em Matemática, pode transformar a maneira como os alunos assimilam conhecimentos. Além disso, este estudo tem o potencial de influenciar políticas educacionais e práticas pedagógicas em diversas regiões, contribuindo para a formação de cidadãos críticos, criativos e colaborativos.

# 2 Um breve relato histórico

Neste capítulo, apresentamos uma introdução concisa sobre a trajetória de dois matemáticos que marcaram a evolução da matemática em suas respectivas épocas: Arquimedes de Siracusa e Bonaventura Cavalieri, destacando suas contribuições para a geometria e o cálculo de volumes.

## 2.1 A história de Arquimedes de Siracusa

Nesta seção, oferecemos um resumo biográfico de Arquimedes de Siracusa. As informações históricas apresentadas são fundamentadas no livro Introdução à história da matemática (EVES, 2008) e Método de Arquimedes: análise e tradução comentada (MAGNAGHI; ASSIS, 2019).

Figura 1 – Arquimedes de Siracusa

Fonte: livro Introdução à história da matemática, EVES, 2008

Arquimedes de Siracusa(figura 1), nascido em 287 a.C. e falecido em 212 a.C., foi um renomado matemático, filósofo, físico, engenheiro, inventor e astrônomo da Grécia. Originário da cidade grega de Siracusa, localizada na ilha da Sicília, ele se destacou como um dos mais importantes matemáticos da história, sendo sem dúvidas o mais proeminente da Antiguidade. Era filho de um astrônomo e gozava de notável consideração junto ao rei Hierão (de quem talvez fosse parente). Há indícios de que ele passou pelo Egito, possivelmente na Universidade de Alexandria, já que contavam, entre seus amigos, Cônon, Dositeo e Eratóstene, o último bibliotecário da Universidade de Alexandria, e os dois primeiros foram os sucessores de Euclides.

Os historiadores romanos registraram diversas narrativas curiosas a respeito de Arquimedes. Entre essas, destacam-se as descrições das engenhocas criativas que ele concebeu para auxiliar na defesa de Siracusa durante o cerco imposto pelos romanos sob a liderança do general Marcelo. Existiam catapultas móveis com alcance regulável, projetadas para lançar projéteis sobre os navios inimigos que se aproximassem perigosamente dos muros da cidade, além de enormes guindastes que levantavam esses barcos da superfície do mar. A narrativa que diz que ele usou enormes espelhos para incendiar navios de guerra inimigos é mais recente, mas pode ser verídica. A narrativa em que ele conseguiu, por conta própria, deslocar um navio carregado - algo que normalmente exigiria a força de vários homens para movê-lo nos cais - é um testemunho que comprova a veracidade de sua célebre frase: "Dê-me uma alavanca que moverei a Terra".

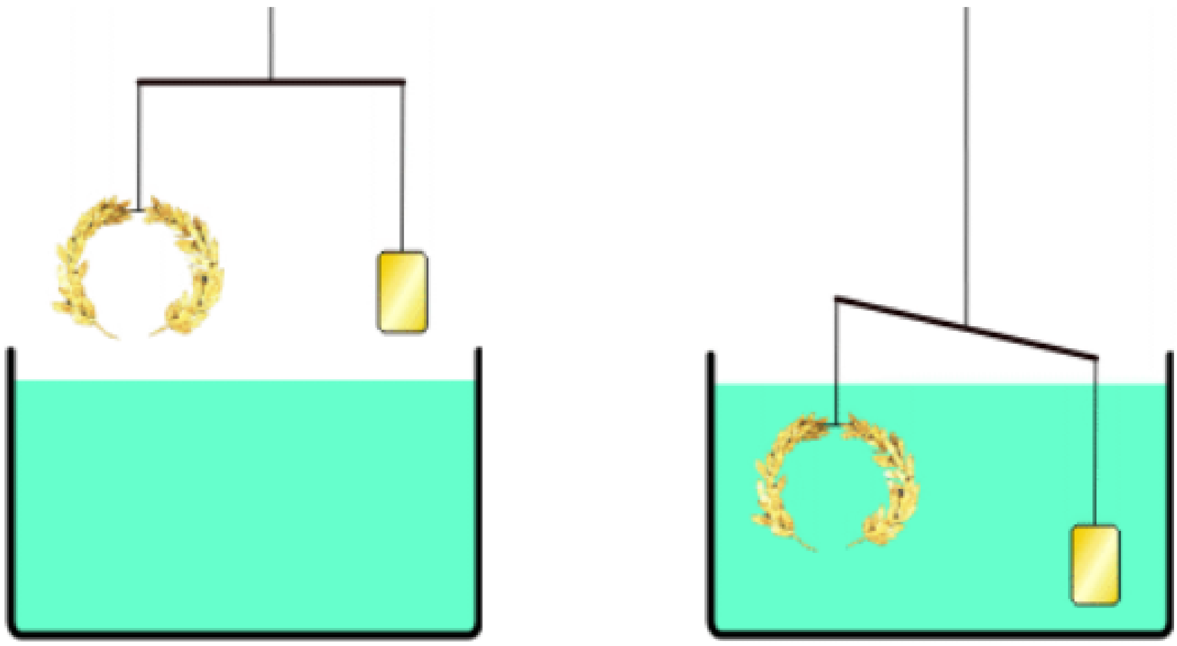
Por conta das máquinas de defesa de Arquimedes, Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos. E as barreiras só se romperam quando, durante uma comemoração no interior da cidade, o excesso de confiança dos siracusanos fez com que afrouxassem a guarda. Pelas suas criações de guerra, o general Marcelo passou a nutrir um grande respeito por seu astuto oponente e, ao conseguir, enfim, encontrar falhas nas defesas da cidade, deu instruções rigorosas para que não se causasse nenhum dano a esse renomado matemático. Conforme narrativas sobre sua notável habilidade de foco, um soldado inimigo ordenou que ele se encontrasse com Marcelo, mas ele se negou, alegando que precisava terminar a tarefa vinculada a um diagrama elaborado em um tabuleiro de areia. O soldado, enfurecido com a negativa, acabou tirando a vida de Arquimedes com sua espada, apesar de ter recebido ordens para não fazer isso. De acordo com outra versão, isso ocorreu durante a invasão de Siracusa, quando ele ordenou a um soldado romano que se afastasse de seu diagrama; o agressor, incontinente, teria atravessado o corpo do ancião com uma lança. Marcelo, ao tomar conhecimento de seu falecimento, ficou profundamente abalado e, com todas as honras e o respeito que a situação exigia, providenciou o sepultamento do renomado intelectual no cemitério da cidade.

Entre esses grandes feitos, é impossível ignorar a famosa história da coroa do rei Hierão e do ourives suspeito, que é muito emblemática e está intimamente ligada ao princípio do empuxo. O primeiro autor a abordá-la foi Marcus Vitruvius Pollio, um arquiteto romano do século I a.C., em sua obra intitulada De architectura. De acordo com a obra, esse ourives teria confeccionado uma coroa para o rei, utilizando um peso específico de ouro. No entanto, desconfiado de que pudesse haver prata escondida entre o ouro e sem querer desmontar a coroa para verificar, o rei decidiu encaminhar o assunto a Arquimedes. E este, quando um dia se encontrava nos banhos públicos, deu com a solução, identificando a primeira lei da hidrostática - que um corpo, quando mergulhado num fluido, recebe um empuxo de intensidade igual ao peso do volume de água deslocado. Na agitação da descoberta, Arquimedes não colocou roupas e saiu nu pelas ruas correndo para sua casa e gritando, “Eureka, eureka!” (“Achei, achei!”). Segundo a versão de Vitruvius, Arquimedes fabricou dois blocos de peso igual, um de ouro e outro de prata, e os mergulhou em um vaso com água para medir seus volumes. Ao mergulhar o bloco de prata, a quantidade de água deslocada indica seu volume, permitindo determinar a relação entre peso e volume de cada material. Após medir o ouro, ele nota que, apesar de terem pesos iguais, o ouro é mais compacto, ocupando menos espaço do que a prata. Quando a coroa, feita de um material misturado com prata, é mergulhada, ela desloca mais água do que um bloco de ouro de mesmo peso, revelando que há uma mistura de prata ao ouro na coroa, o que indica o furto realizado pelo artesão.

Figura 2 – O método da balança hidrostática.

(a) Coroa e barra de ouro

(b) A coroa era menos densa que ouro puro.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes>

Segundo Martins (2000), há fatores um pouco estranhos na história de Vitruvius. Como ele não viveu na mesma época de Arquimedes, suas afirmações não podem ser consideradas como relatos diretos. Muitos autores perceberam problemas no método relatado por Vitruvius. Um desses autores foi Galileo Galilei, que escreveu sobre isso em um pequeno trabalho chamado La bilancetta. Galileo Galilei realizou o experimento seguinte. Uma coroa de ouro e um peso igual de ouro foram colocados em uma balança em equilíbrio. Depois ele repetiu essa ação sob a água(conforme mostra a figura 2). O suporte com a coroa ergueu-se, mostrando que ela continha algum material espúrio, menos denso que o ouro. No artigo "Arquimedes e a coroa do rei: Problemas históricos", Martins relata que:

> Galileo sugeriu que, em vez de utilizar o método descrito por Vitruvius, Arquimedes teria realizado medidas de peso (e não de volume) para resolver o problema, utilizando aquilo que chamamos de princípio de Arquimedes : cada corpo mergulhado em um líquido sofre um empuxo igual ao peso do líquido deslocado. Suponhamos que tomemos a coroa e um igual peso de ouro (medidos no ar). Depois, mergulhamos cada um na água, preso a um fio, e medimos novamente seu peso aparente. Esse peso será menor do que o peso anterior (medido no ar), por causa do empuxo. Se os volumes forem iguais, os empuxos serão iguais. Se a coroa contiver prata, seu volume será maior do que o do ouro puro, e seu empuxo será também maior, portanto seu peso na água será menor do que o do bloco de ouro puro. Através de medidas de peso da coroa e de blocos de prata e ouro puros, na água e no ar, é possível determinar-se com grande precisão a proporção de prata utilizada pelo ourives. No seu pequeno tratado, Galileo mostrou como poderia ser construída uma balança especial que permitisse realizar facilmente esse tipo de comparação.(MARTINS, 2000, p.5).

De acordo com Martins(2000), não foi somente Galileu que desmentiu a versão de Vitruvius, mas muitos documentos fortalecem a ideia de que Arquimedes utilizou o método do peso e não a história de Vitruvius.

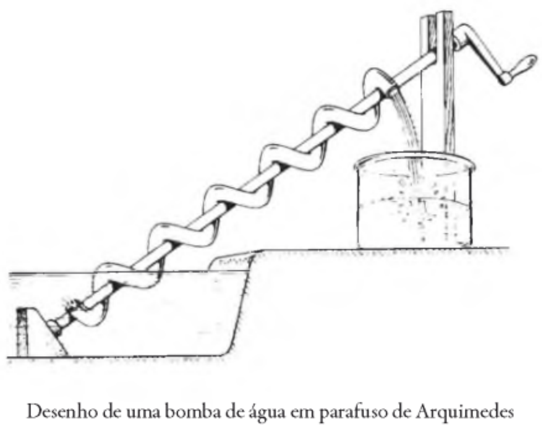
Já no campo da geometria, Arquimedes pesquisou bastante sua geometria em figuras desenhadas em cinzas de lareiras ou no óleo que passava em seu corpo após os banhos. Como já vimos em relato citado, ele encontrou a morte quando concentrado em um problema relacionado a um diagrama. Com sua morte, Marcelo cuidou de atender o pedido de Arquimedes, que era gravar em seu túmulo a figura de uma esfera inscrita num cilindro circular reto.

As obras de Arquimedes são verdadeiras joias da matemática, lembrando notavelmente artigos de revistas especializadas contemporâneas. Além de apresentarem uma originalidade impressionante, competências computacionais e precisão nas provas, estão redigidas em uma linguagem extremamente refinada e direta.

Três das obras que restaram de Arquimedes concentram-se na geometria plana. Essas obras são: *A medida de um círculo*, *A quadratura da parábola* e *Sobre as espirais*. Em *A medida de um círculo*, Arquimedes apresentou o método clássico para o cálculo de $\pi$. Já dois dos escritos que ficaram de Arquimedes abordam a geometria tridimensional, esses são intitulados *Sobre a esfera e o cilindro* e *Sobre os cones e os esferoides*. Em relação à obra *Sobre a esfera e o cilindro*, consistindo em dois volumes, o autor aborda as áreas de uma esfera e de uma calota esférica, além de apresentar de forma clara e elaborada o cálculo do volume da esfera. No que diz respeito à obra *Sobre os corpos flutuantes*, que também é uma obra dividida em dois volumes, ela é composta por 90 proposições e marca a primeira utilização da matemática no estudo da hidrostática. Existem outras obras que lhe são atribuídas e que proporcionaram um vasto conhecimento.

Como um dos grandes inventores da história, não podemos deixar de mencionar a renomada invenção mecânica de Arquimedes: a bomba de água em forma de parafuso(conforme mostra a figura 3). Ele a criou com a finalidade de irrigar campos, drenar áreas alagadas e retirar água de porões de barcos. Esse equipamento ainda é utilizado hoje em dia no Egito.

Figura 3 – Ilustração de uma bomba d'água em formato de parafuso




Fonte: livro Introdução à história da matemática,EVES, 2008

Através desse breve relato sobre sua vida e morte, podemos afirmar com certeza que Arquimedes foi um destacado intelectual de seu tempo.

### 2.1.1 Método mecânico

Nesta subseção, falaremos de forma sucinta sobre o estudo feito por Arquimedes sobre o volume e área da esfera, com ênfase no volume, de acordo com os documentos Introdução à história da matemática (EVES, 2008), O método de Arquimedes: análise e tradução comentada (MAGNAGHI; ASSIS, 2019), Arquimedes e a esfera (BENK; FIGUEIREDO, ) e Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática do ensino médio (NÓS; TAVARES, 2021).

De acordo com Eves (2008), Arquimedes calculava áreas e volumes dividindo-os em tiras planas ou fatias paralelas finas, que eram penduradas na ponta de uma alavanca e equilibradas com áreas ou volumes já conhecidos. Foi em *O Método*, um tratado de Arquimedes enviado em forma de carta para Eratóstene, descoberto em 1906, por Heiberg, em Constantinopla, que nos mostra como Arquimedes chegou à fórmula do volume de uma esfera. Para determinar o volume da esfera, ele utilizou um cilindro e um cone(representação do método mecânico na figura 4).

Segundo Magnaghi (2019), a relevância da carta de Arquimedes para Eratóstenes reside no fato de que é um dos raros tratados (quem sabe até o único) em que um cientista da antiguidade expõe seu método de indução físico-matemática utilizado para chegar a certas conclusões. Como ressaltou Magnaghi em sua avaliação das obras de Arquimedes, é importante levar em conta que:

> Por suas obras, Arquimedes é considerado por muitos como o pai da física matemática. Em seu trabalho *O Método*, perdido por tanto tempo, ele mostra o íntimo relacionamento entre essas duas ciências e como extrair dele o melhor aproveitamento.(MAGNAGHI; ASSIS, 2019, p.43).

De acordo com Magnaghi (2019), o método revelado por Arquimedes para calcular áreas e volumes de formas geométricas, tanto planas quanto sólidas, é apresentado de maneira clara desde o primeiro teorema, mas é importante observar que o próprio Arquimedes não considera que este método seja uma demonstração verdadeira.

Figura 4 – Balança de Arquimedes

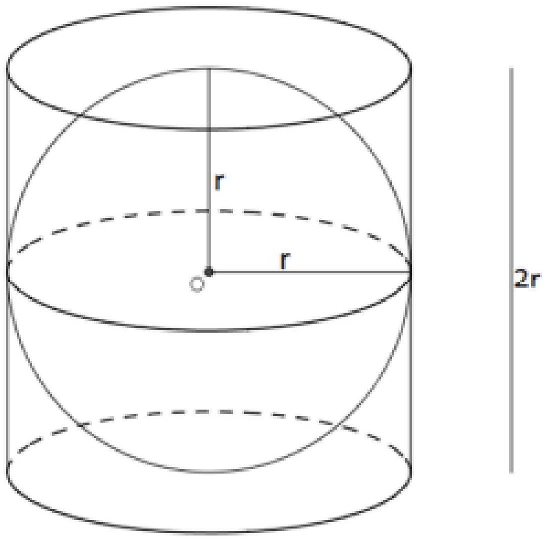

Fonte: Arquimedes e a esfera, Benk; Fiqueira.

De modo geral, ele costumava complementar as demonstrações mecânicas que realizava por meio de outros métodos, usando sua compreensão matemática; isso o levou a utilizar o método de exaustão para apresentar uma evidência mais sólida. No caso do volume de uma esfera, ele realizou uma demonstração matemática utilizando o método da dupla redução ao absurdo; em outras palavras, ele considerou como verdadeiro o volume obtido no método mecânico(forma heurística) e evidenciou que a igualdade em questão teria que ser válida, já que o volume da esfera não poderia ser nem inferior nem superior a esse valor. Porém, para essa demonstração, Arquimedes não fez uso do cilindro; ele se baseou apenas na comparação com o cone.

A demonstração que Arquimedes gostou bastante de realizar foi sobre a relação entre o cilindro e a esfera(figura 5), que revelava como essa proporção entre os dois sólidos auxilia na área da superfície da esfera com o seu volume. No seu raciocínio temos que a área de uma superfície esférica($A_e$) corresponde exatamente a dois terços da área total da superfície do cilindro circular reto que a circunscreve($A_c$), assim como o volume da esfera($V_e$) é precisamente dois terços do volume desse mesmo cilindro($V_c$). Como já vimos, neste trabalho, em sua sepultura foi gravado um cilindro circunscrito a uma esfera com uma inscrição da proporção, como pode ser observado na Figura 5.

$$A_e = \frac{2}{3}A_c \text{ e } V_e = \frac{2}{3}V_c$$

Figura 5 – Esfera inscrita no cilindro.




Fonte: Arquimedes e a esfera, Benk; Fiqueira.

Geralmente, nas aulas de ensino médio, é comum derivar a fórmula do volume da esfera utilizando o conhecido *Princípio de Cavalieri*, como veremos no capítulo 5, não somente da esfera, mas de outros sólidos também. Quem examinar o método mecânico de Arquimedes e o procedimento baseado no *Princípio de Cavalieri* perceberá uma notável semelhança entre os dois.

Os poucos relatos citados nesta dissertação ressaltam a brilhante capacidade de Arquimedes enquanto matemático, tanto no contexto de seu tempo quanto nos dias de hoje.

## 2.2 A história de Bonaventura Cavalieri

Nesta seção, oferecemos uma síntese da biografia de Cavalieri. As informações históricas apresentadas são fundamentadas no livro Introdução à história da matemática (EVES, 2008).

Figura 6 – Francesco Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri
(Coleção David Smith)

Fonte: livro Introdução à história da matemática, EVES, 2008, p. 426

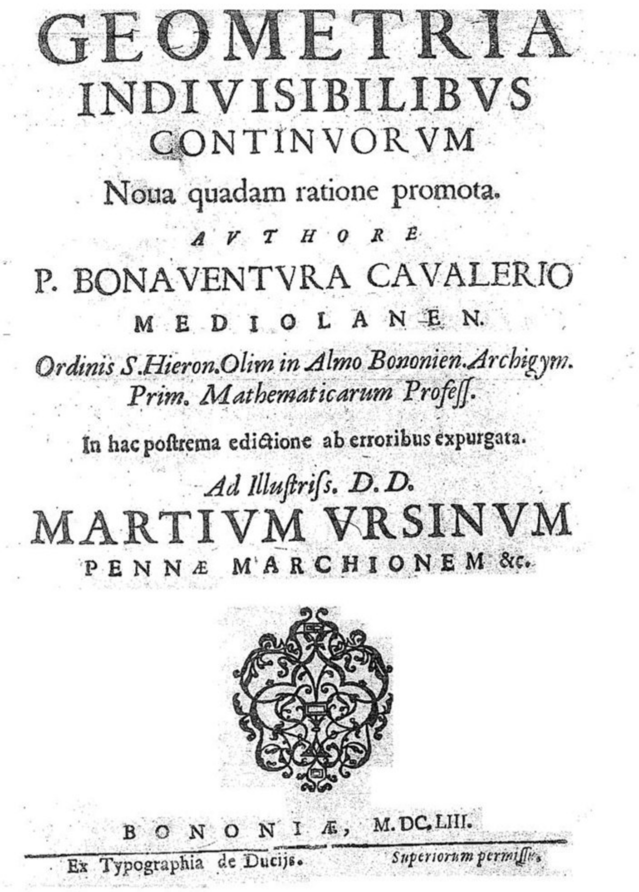
Bonaventura Cavalieri(figura 6), nasceu em Milão no ano de 1598, foi batizado como Francesco Cavalieri. Aos 15 anos, ele entrou para a ordem dos jesuado (uma ordem religiosa de Milão que não é a ordem dos jesuítas, como é frequentemente mencionado de maneira incorreta), adotando o nome de Bonaventura Cavalieri. Foi aluno de Galileu, lecionou matemática na Universidade de Bolonha, onde assumiu essa posição em 1629 e permaneceu nela até falecer em 1647. Como matemático e astrônomo, produziu uma extensa contribuição nas áreas de matemática, óptica e astronomia. Ele desempenhou um papel fundamental na introdução dos logaritmos na Europa. Essas realizações o tornaram um matemático de grande relevância.

Entretanto, a obra que mais o consolidou, e que representa sua significativa contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilus* (Geometria dos indivisíveis), lançado em sua versão preliminar em 1635. Neste tratado, ele expõe seu *método dos indivisíveis*, cujas origens podem ser rastreadas até Demócrito (410 a.C.) e Arquimedes (287 a.C.). No entanto, a motivação principal pode estar nas tentativas de Kepler em estabelecer determinadas áreas e volumes.

### 2.2.1 O método dos indivisíveis de Cavalieri

Nesta subseção, abordaremos de maneira breve a pesquisa realizada por Bonaventura Cavalieri a respeito do método dos indivisíveis, conforme apresentado no livro Introdução à história da matemática, (EVES, 2008) e do artigo Os indivisíveis e o infinito no trabalho de Bonaventura Cavalieri (PINTO, 2012).

Figura 7 – Geometria indivisibilibus


GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
*Ordinis S.Hieron.Olim in Almo Bononien.Archigym. Prim. Mathematicarum Profess.*
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
*Ad Illustris. D.D.*
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. *Superiorum permissu.*

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometriaindivisibilibuscontinuorumnova>

O método, descrito na obra *A Geometria indivisibilus continuorum*, atribuído para calcular áreas e volumes de diferentes figuras, sejam elas planas ou tridimensionais, sem utilizar o método da exaustão, podendo ser visto como uma das primeiras manifestações do cálculo integral. O historiador Howard Eves analisa o tratado e a concepção do indivisível, propostos por Cavalieri da seguinte forma:

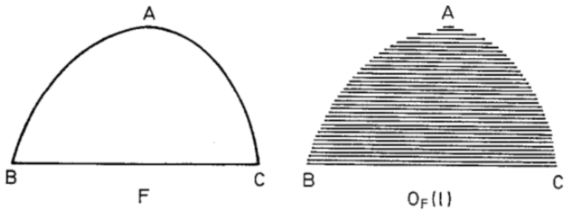
> O tratado de Cavalieri é demasiado prolixo e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por "indivisível". Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e

> que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. (EVES, 2008, p.425)

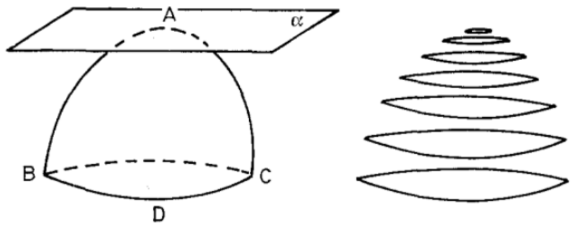
Dessa forma, um plano pode ser imaginado como uma quantidade imensa de cordas com diâmetro insignificante dispostas lado a lado, conforme ilustrado na Figura 8a. De maneira análoga, um sólido pode ser descrito como um número incontável de placas de espessura mínima, que são paralelas umas às outras, conforme mostrado na Figura 8b.

Figura 8 – Indivisível

(a) Ideia de plano segundo Cavalieri




(b) Ideia de sólido segundo Cavalieri




Fonte: Cavalieri's method of indivisibles. Archive for history of exact sciences, Springer-Verlag, v. 31, p. 291–367, (ANDERSEN, 1985)

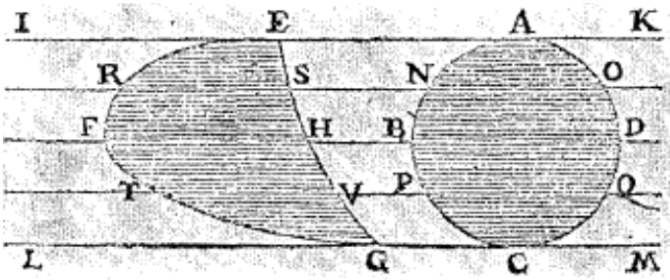
De acordo com Pinto (2012), diversos historiadores têm analisado a obra de Cavalieri, apresentando opiniões diversas sobre seu trabalho, tendo seu trabalho considerado como obscuro. Entretanto, esses aspectos de obscuridade abordados estão diretamente ligados ao estilo, muito particular, de Cavalieri escrever, pois, devido à linguagem antiquada e à falta de um sistema de notação matemática que só seria desenvolvido mais tarde, dificultam a compreensão e a leitura de seus trabalhos, o que fez com que tradutores exprimissem as ideias de Cavalieri em uma linguagem que, na realidade, não lhe pertencia. Mas uma análise mais profunda ou ainda a utilização final de seus métodos no cálculo de áreas e volumes comprova a validade de seu trabalho.

Segundo Eves (2008), Cavalieri, na sua escrita, defendia que, ao deslizar cada elemento de um conjunto de cordas paralelas em uma área plana sobre seu próprio eixo, as extremidades das cordas ainda formariam um contorno contínuo. Dessa forma, a área da nova superfície gerada seria idêntica à da original, já que ambas são compostas pelas mesmas cordas. Um procedimento semelhante, aplicado aos elementos de seções planas paralelas de um sólido, resultaria em um novo sólido com o mesmo volume do original. Esse conceito pode ser facilmente demonstrado ao empilhar cartas verticalmente e, em seguida, deformar suas laterais, transformando-as em superfícies curvas, mantendo o volume da estrutura. Estes resultados, que são um pouco generalizados, apresentam os conceitos conhecidos como princípios de Cavalieri.

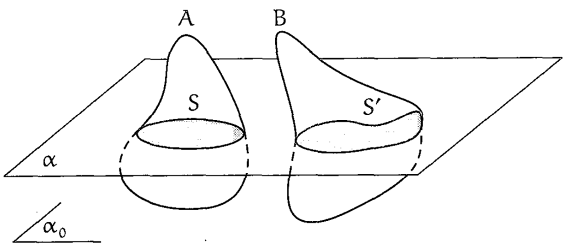
- *Caso duas superfícies planas possuam a propriedade de que toda reta que as intersecta e é paralela a uma reta específica cria, nas superfícies, segmentos de reta com razão constante, então a razão entre as áreas dessas superfícies também será essa mesma constante(representação na figura 9a).*
- *Caso dois sólidos apresentem a característica de que qualquer plano que os atravessa e que seja paralelo a um plano específico gera seções com uma razão constante, então a proporção entre os volumes desses sólidos será essa mesma constante(representação na figura 9b).*

Figura 9 – Princípios de Cavalieri

(a) Duas figuras planas




(b) Duas figuras sólidas




Fonte: (ANDERSEN, 1985)(figura a) e A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2(figura b)

Neste trabalho, o Princípio de Cavalieri será usado como uma ferramenta bastante eficaz para possibilitar o cálculo de volume de formas que podem ser complexas, contanto que haja um sólido de referência para comparar, sendo uma alternativa para o aprendizado de cálculo de volumes no Ensino Médio.

# 3 A Importância do volume nos documentos oficiais da educação no Brasil

Neste capítulo, iremos expor algumas diretrizes encontradas em documentos oficiais da educação do nível médio nas escolas brasileiras em relação a disciplina de Matemática.

A Base Nacional Comum Curricular(BNCC, 2018) é um documento fundamental para a educação brasileira de forma normativa, que estabelece a construção dos currículos das escolas do país. A BNCC tem como objetivo garantir que as decisões pedagógicas estejam orientadas para o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais ao longo da formação educacional do discente, reconhecendo que a educação tem um papel importante na formação e no desenvolvimento humano de maneira intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica. Ela tem um conjunto de aprendizagens essenciais nas etapas e modalidades da educação básica brasileira, promovendo o desenvolvimento integral por meio das dez competências gerais.

No Ensino Médio, o currículo é organizado em quatro áreas de conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias (inclui Língua Portuguesa, Língua Estrangeira, Educação Física, Arte); Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física, Química); Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia, Filosofia) e Matemática e suas Tecnologias.

No contexto da área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC (2018) define orientações com o objetivo de promover a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos de forma contextualizada e significativa, preparando os estudantes para lidar com situações cotidianas e desafios do mundo contemporâneo. A abordagem busca integrar o conhecimento matemático com as tecnologias digitais, promovendo o desenvolvimento de competências essenciais e habilidades que os estudantes devem desenvolver para que tenham um senso crítico na sociedade contemporânea. Conforme a descrição na BNCC:

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BNCC, 2018, p. 265)

Além disso, a BNCC (2018) enfatiza a importância da “Autonomia, protagonismo e responsabilidade”, que busca incentivar os alunos a serem protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem, desenvolvendo a capacidade de tomar decisões, gerenciar seu tempo, estabelecer metas e lidar com os desafios do mundo contemporâneo de forma responsável e crítica.

Para atingir essas competências, a BNCC (2018) propõe uma organização curricular flexível, que valorize a interdisciplinaridade, a contextualização dos conteúdos e a diversidade de metodologias pedagógicas. Além disso, enfatiza a importância da articulação entre teoria e prática, promovendo a integração entre os conhecimentos acadêmicos e as demandas do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

Na fase do Ensino Médio, segundo a BNCC (2018), deve ser um período de consolidação, ampliação e aprofundamento dos conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental, sendo organizado através de unidades do conhecimento da própria área , estruturadas de forma que o desenvolvimento das competências e habilidades seja trabalhado em diferentes dimensões. As unidades temáticas são: Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

Essas unidades são trabalhadas de forma interligada, com o objetivo de promover um ensino que vá além do conhecimento teórico, aplicando a matemática em contextos reais e práticos. Em concordância, a BNCC (2018) descreve:

> [...]a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BNCC, 2018, p. 529)

Assim, a área de Matemática e suas Tecnologias deve assegurar que os alunos do Ensino Médio desenvolvam competências específicas. Posteriormente, são indicadas habilidades a serem alcançadas nessa etapa, referentes a cada competência. Os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN, 2000) do Ensino Médio defendem que:

> O desenvolvimento de competências e habilidades básicas comuns a todos os brasileiros é uma garantia de democratização. A definição destas competências e habilidades servirá de parâmetro para a avaliação da Educação Básica em nível nacional.(BRASIL, 2000, p.17)

Segundo a BNCC (2018), a unidade temática Geometria e Medidas é vista como uma ferramenta fundamental para que os alunos desenvolvam a capacidade de interpretar e representar o espaço e as formas presentes ao seu redor. A geometria não é apenas um estudo das formas abstratas, mas uma disciplina que ajuda os estudantes a visualizarem, modelarem e resolverem problemas relacionados ao ambiente em que vivem. Uma noção de medida, por sua vez, é crucial para quantificar e comparar propriedades físicas, como comprimento, área, volume e ângulos, com aplicações diretas em diversos campos do conhecimento.

Em relação ao conceito de volume, o documento o associa e ressalta a relevância de outras matérias, como Física e Química, na solidificação do conceito de grandezas para os estudantes, além de incentivar a criação de conexões entre essas disciplinas.

Na matemática, o volume está relacionado com a geometria métrica espacial e envolve a mensuração do espaço ocupado por objetos tridimensionais, tais como cubos, prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas. Segundo a BNCC, nas competências específicas, temos as habilidades a serem trabalhadas sobre o volume no Ensino Médio:

- **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

Essas habilidades descritas(EM13MAT201, EM13MAT309 e EM13MAT504) destacam a importância de integrar medições e cálculos geométricos à realidade cotidiana dos alunos, tornando o aprendizado significativo e contextualizado. Na última habilidade(EM13MAT504), a BNCC propõe que o estudante explore métodos de obtenção de volume de figuras geométricas, incluindo o Princípio de Cavalieri, que generaliza a fórmula de cálculo para diferentes tipos de sólidos. O objetivo é que o aluno não apenas memorize fórmulas, mas entenda o princípio por trás delas, algo que será abordado nesta dissertação.

Dessa forma, visando aprimorar o aprendizado dos alunos ao longo de sua jornada educacional e integrando a interdisciplinaridade do tema volume com um conceito físico essencial, através do Princípio de Arquimedes, estabelecemos uma relação entre Matemática e Física. Isso favorece uma aprendizagem mais eficiente, de acordo com as diretrizes da BNCC.

Na BNCC (2018, p. 341) destaca a relevância de que o estudante consiga: "investigar fenômenos do dia a dia que ressaltem as propriedades físicas dos materiais". Assim, a integração de conceitos matemáticos com fenômenos físicos observados experimentalmente geralmente favorece, de maneira considerável, o aprendizado dos alunos.

Nesse cenário, o estado do Espírito Santo desenvolveu um Currículo Estadual que está alinhado com os princípios e diretrizes da BNCC, porém com uma atenção especial às particularidades, necessidades e potencialidades dos nossos estudantes, logo projetando em suas recomendações curriculares o preparo dos estudantes para ingressar na sociedade com as habilidades necessárias para um bom convívio em seu meio. De acordo com o documento, o Currículo do Espírito Santo

> [...]é uma proposta que se fundamenta na concepção de que o currículo é uma construção situada num tempo e espaço permeado de valores, sujeitos e contextos, que se consolida numa proposta que continuará sendo construída em seu caminhar. Portanto, não é algo estático, pronto e acabado. Enquanto documento, trata-se de uma proposta que estabelece as aprendizagens escolares mínimas e oferece diretrizes que buscam assegurá-las como direitos a todos os estudantes do nosso território, dialogando com os seus interesses e suas necessidades, bem como comprometendo-se para que se desenvolvam plenamente e tenham condições de enfrentarem as demandas atuais e futuras, num cenário de incertezas.(Currículo do Espírito Santo, 2023, p.14)

Este documento apresenta uma trajetória a ser seguida pelos alunos do estado do Espírito Santo, destacando as aprendizagens fundamentais às quais todos têm o direito de acessar e desenvolver ao longo de sua jornada na educação básica.

O Currículo de Matemática do Espírito Santo, em sua estrutura curricular, ressalta as oito Competências Específicas da Área de Matemática, que são interligadas e fundamentadas nas dez competências gerais da Base Nacional Comum Curricular(BNCC), sendo organizado de tal forma que visa assegurar o letramento matemático do aluno junto ao aprimoramento de suas habilidades. Isso possibilita uma evolução contínua ao longo dos anos, tornando mais fácil a absorção dos conteúdos de aprendizagem.

Portanto, conforme estabelecido no Currículo do Espírito Santo, o tema de volume é apresentado de maneira gradual ao longo da trajetória escolar do estudante. Nesse percurso, é fundamental que não haja interrupções no aprendizado desse conteúdo, pois eventuais lacunas podem dificultar o avanço do aluno em seu desenvolvimento.

# 4 Princípio de Arquimedes

Neste Capítulo, exploraremos o princípio de Arquimedes de forma sucinta nos conceitos matemáticos e/ou físicos contidos na aplicação do cálculo de volume conforme está presente nesta dissertação, baseando-se nas obras de (BENK; FIGUEIREDO, ) (LOURENÇO, 2014), (BARBOSA; BREITSCHAFT, 2006), (GUIMARÃES, 1999) e (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013).

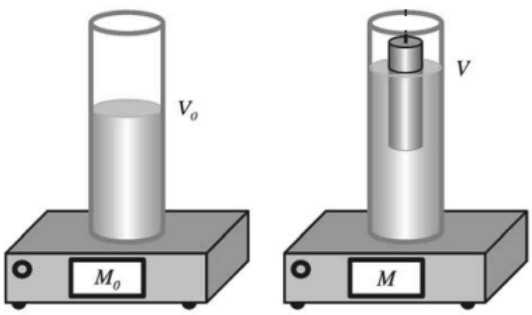
## 4.1 O Princípio de Arquimedes e o cálculo de volume

O Princípio de Arquimedes é um dos conceitos fundamentais da física, especialmente na área da hidrostática, e descreve o fenômeno de empuxo em fluidos. Esse princípio possui diversas aplicações práticas, abrangendo áreas que vão da engenharia naval à metrologia de líquidos. Ele está estreitamente relacionado ao cálculo do volume de sólidos submersos, pois envolve a análise do aumento do volume de líquidos quando sólidos são imersos neles.

De acordo com o Princípio de Arquimedes, sempre que um objeto fica total ou parcialmente dentro de um líquido ou fluido, ele sofre uma força para cima que é igual ao peso do líquido que ele desloca. Essa força age na direção do local onde estava o centro de gravidade do fluido que foi deslocado.

Para entender o processo do Princípio de Arquimedes, vamos analisar a figura 10.

Figura 10 – Mergulhando um objeto no líquido.




Fonte: Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, n. 1, p. 115 - 122, (2006)

Em um recipiente, que a princípio possui um volume $V_0$ de um determinado líquido, é posicionado sobre uma balança que indica uma massa $M_0$, conforme ilustrado na figura 10. Ao se imergir um corpo no recipiente, podendo ser parcial ou total, o volume do líquido aumenta para $V$ e a massa registrada na balança passa a ser $M$.

Além da força que evidentemente age sobre o objeto (como seu peso), existe ainda uma outra força, conhecida como empuxo, que também atua sobre ele devido à sua imersão total ou parcial em um líquido.

Conforme o princípio de Arquimedes, a força de empuxo ($E$) tem a mesma direção e módulo que a força gravitacional correspondente ao volume de líquido deslocado pelo objeto, mas com sentido contrário. Assim, se a densidade volumétrica do líquido é $\rho$, a magnitude da força de empuxo é expressa por:

$$\frac{E}{g} = \rho(V - V_0)$$

Onde $g$ representa o valor da aceleração da gravidade e a diferença entre $V$ e $V_0$ corresponde ao volume do líquido que foi deslocado ao mergulhar o objeto. A fórmula apresentada indica que a razão $\frac{E}{g}$ está diretamente relacionada ao volume de líquido deslocado, sendo a densidade desse líquido a constante de proporcionalidade. Diferentemente do que muitas vezes se imagina, a força de empuxo não é influenciada nem pelo material do qual o objeto é constituído, nem pela sua forma. O volume do corpo é igual ao volume de líquido deslocado.

### 4.1.1 Utilização do Princípio de Arquimedes no Ensino Médio

A experiência clássica para demonstrar o Princípio de Arquimedes envolve objetos de materiais diferentes, como madeira, plástico, metal e pedra, submersos em água. Observa-se que os materiais flutuam ou afundam dependendo de suas densidades relativas à água. Segundo Walker(2009), esta experimentação básica é fundamental para a compreensão inicial do princípio e suas implicações práticas. Embora o Princípio de Arquimedes seja uma ferramenta poderosa, ele possui algumas limitações práticas. Por exemplo, em fluidos não-newtonianos ou em condições extremas de temperatura e pressão(que não é o caso dessa dissertação), o comportamento do fluido pode divergir dos modelos simplificados assumidos pelo princípio. Além disso, em fluidos de viscosidade significativa, como mel ou óleo, o comportamento de empuxo pode ser mais complexo devido à resistência viscosa adicional.

Um procedimento fácil de abordar esse conceito no Ensino Médio é colocar uma pedra com densidade superior à da água em um recipiente preenchido com esse líquido. Ao inserir a pedra no recipiente cheio de água, ocorre um deslocamento de líquido equivalente ao volume da pedra, causando um transbordamento proporcional.

Nesta experiência, também é possível analisar como a água se desloca em um recipiente cheio de água. O volume de água deslocada corresponde exatamente ao volume do objeto que está submerso. Essa técnica é particularmente vantajosa para sólidos com

Figura 11 – Experiência do Princípio de Arquimedes

Fonte: Produção do próprio autor

forma irregular, cuja medição de volume seria complicada por meio de fórmulas geométricas convencionais.

Para resumir, em relação a qualquer objeto, a variação entre o volume do líquido após e antes da imersão corresponde ao volume do sólido que foi submerso.

#### 4.1.1.1 Conhecimento sobre área no Ensino Médio

Nessa subseção, vamos abordar de maneira concisa a área, conhecimentos prévios dos alunos, visando à aplicação das experiências no processo descrito nesta dissertação, com referência às obras (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013), (GUEDES et al., 2013) (LIMA, 2009) e (LIMA et al., 1999).

O conhecimento matemático é construído de forma contínua no Ensino Básico, onde cada novo conceito se apoia em fundamentos anteriormente aprendidos, segundo BNCC(2018). Nesse contexto, o estudo das áreas das figuras planas representa uma base essencial para a compreensão de conceitos mais complexos, como o cálculo de volume. Neste trabalho, utilizaremos os conceitos já aprendidos sobre as áreas das figuras planas para aprofundar nosso entendimento e aplicação no cálculo de volume.

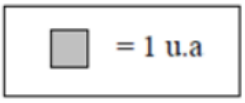
Avaliar uma superfície implica em determinar um valor que simbolize a parte do plano que é ocupada por essa região, em relação a uma outra previamente estabelecida. Essa quantificação é conhecida como área. Segundo Lima (1991, p. 11) trata a área como: "medir a porção do plano ocupada por uma figura plana $F$. Para isso, compararemos $F$ com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura $F$ contém a unidade de área."

Dessa forma, para calcular a área do quadrado e retângulo, podemos utilizar uma outra superfície como referência e observar quantas vezes essa unidade se encaixa dentro da área a ser avaliada, adotando um quadrado como unidade de medida, cujo lado mede uma unidade de comprimento($u.c.$), o número de vezes que esse quadrado representa a região em questão é a área dessa superfície. Assim, a área desse quadrado unitário será igual a uma unidade de área($u.a.$), representada na figura 12. Para calcular as áreas de paralelogramos, triângulos e trapézios, podemos utilizar métodos que envolvem cortes e deslocamentos, onde podemos no livro Medidas e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança (LIMA, 2009) acessar uma definição detalhada sobre as áreas desses polígonos, que foram deduzidas com base nessas três propriedades.

Vamos considerar um polígono $P$. A cada polígono $P$, podemos associar um número real não-negativo, que chamamos de área de $P$, com as seguintes propriedades:

- Os polígonos congruentes possuem áreas iguais.
- Se $P$ é um quadrado com lado de tamanho 1, então a área de $P$ é igual a 1.
- Se $P$ pode ser dividido em uma combinação de $n$ polígonos $P_1$,$P_2$, $\cdots$, $P_n$, onde quaisquer dois desses polígonos compartilham no máximo alguns lados, então a área de $P$ é igual à soma das áreas dos polígonos que a compõem.

Figura 12 – Unidade de área




Fonte: volução no cálculo de áreas de figuras planas: de arquimedes a newton. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

Também podemos encontrar uma definição geral para a área no livro Medidas e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança (LIMA, 2009), onde a área de figura plana $F$ será um número real não-negativo determinado pelo conhecimento de seus valores aproximados, por falta ou por excesso.

O estudo das áreas das figuras planas é um componente essencial no currículo de Matemática do Ensino Fundamental, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular(BNCC). As formas mais comuns que os alunos do Ensino Fundamental vão estudar incluem o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o losango, o trapézio, o triângulo e o círculo. Saber calcular a área de figuras planas é muito importante para os alunos que irão para o Ensino Médio, tanto para a conclusão dos estudos quanto para situações do dia a dia. Vamos imaginar que você precisa pintar uma casa. Na lata de tinta, vem a informação sobre a área que pode ser coberta. Nessa situação, é fundamental saber calcular a área da parede que será pintada para descobrir quantas latas de tinta você vai precisar.

Portanto, compreender como calcular a área de várias formas geométricas nos permite resolver problemas práticos de maneira eficaz.

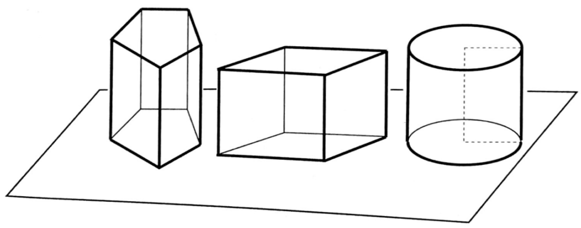
#### 4.1.1.2 O Ensino da Geometria Espacial

Nessa subseção, vamos abordar de maneira concisa a Geometria Espacial, conhecimentos prévios dos alunos, visando à aplicação das experiências no processo descrito nesta dissertação, com referência às obras (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013), (GUEDES et al., 2013) (LIMA, 2009) e (LIMA et al., 1999).

Segundo BNCC(2018), a Geometria Espacial, ramo da matemática que estuda corpos e figuras tridimensionais, desempenha papel fundamental na formação científica e intelectual dos alunos do Ensino Médio. A transição do estudo de formas planas para formas espaciais representa um avanço importante no raciocínio lógico dos estudantes. A Geometria Espacial permite compreender objetos tridimensionais e aplicar esse conhecimento em situações práticas. Neste trabalho, investiga-se o papel da Geometria Espacial no Ensino Médio, com ênfase na distinção entre sólidos regulares e irregulares e no cálculo de volume.

Os sólidos geométricos podem ser divididos em categorias: poliedros, corpos redondos e irregulares. Dentro dessa classificação, encontramos os poliedros convexos e côncavos, esta pesquisa tem como foco principal os convexos. Na figura 13 é possível observar alguns exemplos de sólidos que são analisados na Geometria Espacial, como o prisma de base pentagonal, o paralelepípedo e o cilindro, mas neste trabalho observaremos outros sólidos que são objeto de estudo no Ensino Médio; teremos atividades direcionadas para o cálculo do volume de prismas retangulares(como recipientes) e outros sólidos.

Figura 13 – Ilustração de certos sólidos analisados na Geometria Espacial.



Fonte: A Matemática do Ensino Médio v.2, 1999

Portanto, ensinar Geometria Espacial no Ensino Médio vai muito além de transmitir fórmulas e teoremas: trata-se de formar sujeitos capazes de pensar em três dimensões, de aplicar o conhecimento matemático em contextos variados e de integrar saberes de diferentes áreas. O domínio desses conceitos fortalece o raciocínio lógico, prepara o estudante para desafios acadêmicos e profissionais, promove a aprendizagem interdisciplinar e estimula competências tecnológicas e criativas. Investir em estratégias pedagógicas que tornem a Geometria Espacial acessível e significativa é, sem dúvida, investir na formação de cidadãos críticos e inovadores.

# 5 O Princípio de Cavalieri, uma ferramenta importante para o cálculo de volume no Ensino Médio

Neste capítulo, examinaremos o Princípio de Cavalieri nas suas aplicações fundamentais para compreensão de volumes de sólidos simples como os prismas, pirâmides, cilindros, cones e as esferas. Destacaremos que, para esse nível de ensino, é satisfatória sua apresentação na forma de axioma. Ao fazê-lo, buscamos não apenas compreender a beleza empírica do princípio, mas também reconhecer a influência duradoura de Cavalieri na forma como concebemos e analisamos objetos tridimensionais na geometria. Antes de tudo, é fundamental destacar que a maior parte dos resultados e ideias discutidos nesta abordagem foram extraídas dos documentos A matemática do ensino médio (LIMA, 2009), Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança (LIMA et al., 1999) e Prisma matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias (BONJORNO, 2020) e O Princípio de Cavalieri e suas aplicações: áreas e volumes (MACHADO, 2021).

## 5.1 O Conceito de volume

### 5.1.1 Conceito intuitivo de volume

O volume de um corpo sólido refere-se à quantidade do espaço que ele ocupa.(Isso não é uma definição matemática, mas sim uma ideia que buscamos entender de forma intuitiva.) Para quantificar essa "quantidade de espaço" em termos numéricos, é necessário compará-la a uma unidade específica; o resultado dessa comparação é o que denominamos volume. Essa comparação normalmente utiliza um cubo unitário como referência para calcular o volume de um sólido $S$, ou seja, um cubo com aresta medindo uma unidade de comprimento que será usado para calcular o volume desse sólido.

Dessa forma, o volume de um sólido $S$ será um número que indica quantas vezes o sólido $S$ contém o cubo unitário.

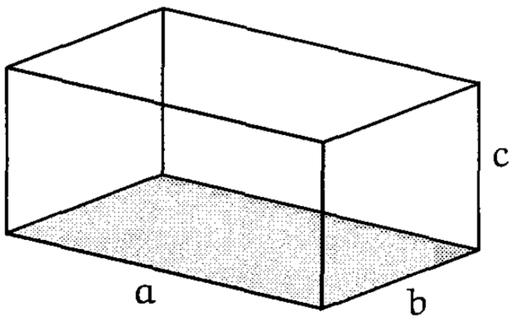
Como o sólido $S$ pode apresentar uma forma irregular, não está evidente o que representa a quantidade de vezes que $S$ contém o cubo unitário. Vamos considerar que o sólido $S$ seja uma substância impermeável, podemos usar o método de Arquimedes para calcular seu volume, como vimos no capítulo 4, mas esse procedimento pode ser útil em situações simples, não atingiu as expectativas esperadas para objetos muito grandes e muito pequenos. Por isso é necessário dispor de métodos para o cálculo indireto do volume, métodos sistemáticos e gerais, que se apliquem tanto aos volumes grandes e pequenos, tanto aos casos concretos como aos abstratos.

Portanto, iremos desenvolver métodos nesse trabalho para determinar o volume de sólidos geométricos que atendam à definição exata.

### 5.1.2 Paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo é um prisma reto, ou seja, é um poliedro com duas faces poligonais congruentes e paralelas, referentes às bases do sólido, e suas faces laterais são paralelogramos. Por se tratar de um paralelepípedo reto, suas seis faces são formadas por polígonos retangulares, sendo uma figura tridimensional com suas dimensões de comprimento(a), largura(b) e altura (c) (Figura 14)

Figura 14 – Paralelepípedo retângulo



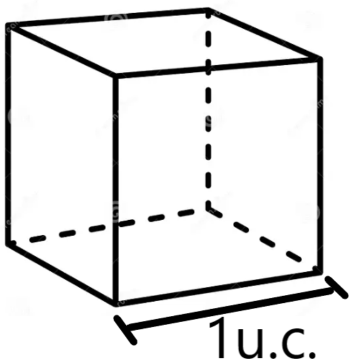

Fonte: A Matemática do Ensino Médio v.2, 1999

Para obter o volume desse paralelepípedo retângulo, vamos adotar como unidade de medida padrão um paralelepípedo retângulo, cujas arestas medem $1u.c.$ (unidade de comprimento), ou seja, um cubo unitário. Por definição, o volume desse cubo unitário é $V(1,1,1) = 1(u.c.)^3$ (Figura 15).

Assim, o número real positivo $V(a,b,c)$ que expressa o volume do paralelepípedo (Figura 14) é a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo unitário (Figura 15), conforme é demonstrado no livro Medidas e Formas em Geometria. (LIMA, 2009)

Além disso, segundo o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, se mantivermos duas dimensões de um paralelepípedo retângulo constantes, o volume dele será proporcional à terceira dimensão. Isso significa que a relação entre o volume e essa dimensão segue uma função do primeiro grau. O teorema quer dizer que: "Sejam $x$ e $y$ grandezas positivas. Se $x$ e $y$ estão relacionadas por uma função crescente $f$ tal que para todo natural $n$, $f(nx) = nf(x)$, então para todo real $r$, tem-se que $f(rx) = rf(x)$." (LIMA et al., 1999, p. 524). De maneira mais simples, podemos dizer que duas grandezas positivas, $x$ e $y$, são

Figura 15 – Cubo unitário



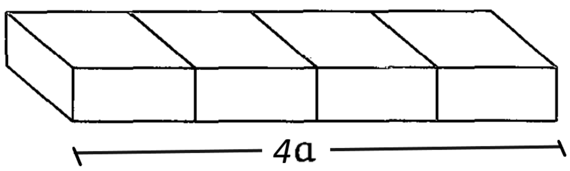

Fonte: Produção do próprio autor.

proporcionais quando, se multiplicarmos a primeira por um número natural $n$, a segunda também é multiplicada por $n$. Esse princípio nos assegura que, se a primeira grandeza for multiplicada por um número real $r$, a segunda grandeza também será multiplicada por $r$.

O volume do paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma das suas dimensões, se mantivermos constantes a largura e altura, e multiplicarmos o comprimento por um número real k, o volume do paralelepípedo obtido ficará multiplicado por $k$, ou seja, $V(ka, b, c) = kV(a, b, c)$

**Exemplo 5.1.1.** *Colocando quatro paralelepípedos retângulos da figura 14, um do lado do outro (justapostos), obtemos o volume total quatro vezes maior, ou seja,* $V(4a, b, c) = 4V(a, b, c)$

Figura 16 – Quatro paralelepípedo retângulo justapostos




Fonte: A Matemática do Ensino Médio,v.2, 1999.(figura modificada)

Portanto, podemos dizer que o volume $V(a, b, c)$ é diretamente proporcional às arestas a, b e c. Isso significa que, para qualquer número real positivo k, temos a relação:

$$V(ka, b, c) = V(a, Kb, c) = V(a, b, Kc) = kV(a, b, c)$$

Este fato nos dá a seguinte compreensão do volume do paralelepípedo retângulo da figura 14.

$$V(a, b, c) = V(1a, b, c)$$

$$= a{\cdot}V(1,b,c) = a{\cdot}V(1,1b,c)$$

$$= ab{\cdot}V(1,1,c) = ab{\cdot}V(1,1,1c)$$

$$= abc \cdot V(1,1,1) = abc \cdot 1$$

$$= abc$$

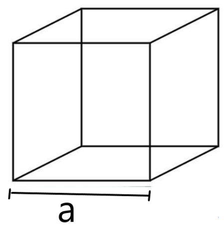
Temos que o volume do paralelepípedo retângulo é produto de suas dimensões. Se a face com dimensões $a$ e $b$ estiver num plano, chamaremos de base do sólido e a dimensão $c$ a altura. Logo o produto $a \cdot b$ equivale à área da base, e $c$ é a medida da altura, podemos dizer que o volume é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

$$\text{Volume do paralelepípedo} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

A fórmula acima é adequada para qualquer valor real para as medidas das arestas. Outra forma de compreender a fórmula de volume de um paralelepípedo retângulo podemos encontrar no livro Medidas e Formas em Geometria. (LIMA, 2009)

Como o cubo é um paralelepípedo com arestas de mesma medida e suas faces são quadradas, e já estabelecemos que um cubo unitário é aquele cujas arestas possuem 1 unidade de comprimento e seu volume é igual a 1, vamos considerar um cubo $C$ cuja aresta possui um comprimento $a$, com $a \in$ Z, a $> 0$. Para calcular o volume do cubo $C$ podemos aplicar o mesmo raciocínio que utilizamos para o paralelepípedo retângulo mencionado anteriormente, temos que:

Figura 17 – Cubo $C$




Fonte: Produção do próprio autor.

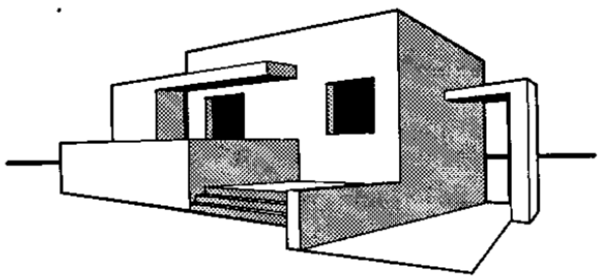
$$\text{Volume do cubo} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

$$\text{V} = a^3$$

### 5.1.3 Conceito geral de volume.

Até este ponto, discutimos uma concepção intuitiva de volume e a aplicamos para determinar o volume de um bloco retangular, considerando-o como a quantidade de vezes que ele comporta um cubo unitário. Agora, nossa meta é estabelecer uma definição mais abrangente de volume que possa ser utilizada também para sólidos que apresentem formas mais irregulares do que o bloco retangular.

Figura 18 – O desenho mostra uma representação de bloco retangular



Fonte: Medidas e forma em geometria: comprimento, área, semelhança e volume,2009

Um poliedro retangular é uma estrutura sólida constituída pela aglomeração de um número limitado de blocos retangulares que se encontram justapostos. O volume desse poliedro é calculado pela soma dos volumes de cada um dos blocos retangulares que o formam.

Considerando um sólido $S$, busca-se determinar com exatidão o número que representa $V(S)$, ou seja, o número que indica quantas vezes o cubo unitário cabe dentro de $S$. Assim, pode-se afirmar que qualquer poliedro retangular $P$ que esteja contido em $S$ cumpre essa condição.

$$V(P) \leq V(S)$$

Adicionando mais blocos retangulares a P dentro de S, obtemos o poliedro retangular $P'$,que é maior que P, de modo que

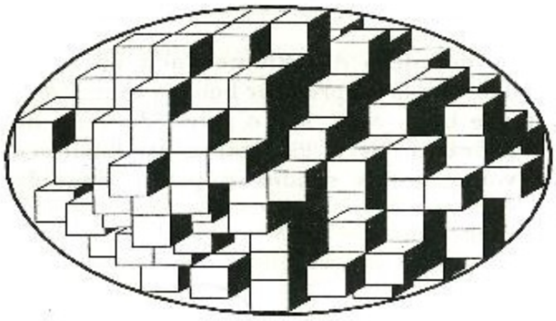
$$V(P) \leq V\ (P') \leq V(S)$$

Observe que é viável adicionar quantos blocos retangulares desejarmos a $P$, de modo que o novo poliedro retangular, que permanece dentro de $S$, tenha seu volume cada vez mais próximo de $V(S)$. Portanto, podemos considerar $V(S)$ poliedros retangulares que estão contidos em $S$.

Isso implica que, para qualquer número real $q$ que satisfaça $q < V(S)$, é viável encontrar um poliedro retangular $Q$ que esteja contido em S, de modo que

$$q < V\ (Q) \leq V(S)$$

Figura 19 – Estimativa inferior para o volume de um sólido



Fonte: Medidas e forma em geometria: comprimento, área, semelhança e volume,2009

Assim, estabelecemos uma forma de aproximação por falta para o volume de um sólido. Também é viável definir uma aproximação por excesso para o volume $V(S)$. Para isso, vamos considerar todos os poliedros retangulares $k$ que contenham o sólido $S$, de modo que eles atendam à condição apropriada.

$$V(S) \leq V(K)$$

É viável localizar poliedros retangulares de tamanhos progressivamente menores que contenham $S$, de modo que seus volumes sirvam como aproximações superiores para $V(S)$, cada vez mais precisas.

Dessa forma, para qualquer número real $q^{'}$ que seja maior que $V(S)$, é viável encontrar um poliedro retangular $Q^{'}$ que inclua $S$, onde

$$V(S) \leq V(Q^{'}) < q^{'}$$

De maneira geral, considerando um sólido $S$ e dois poliedros retangulares $Q$ e $Q^{'}$ , onde $Q$ está contida em S e S, por sua vez, está contida em $Q^{'}$, temos que

$$V(Q) \leq V(S) \leq VQ^{'}$$

Em outras palavras, dado um sólido $S$, $V\ (S)$ é o único número real que satisfaz a condição descrita acima.

Por mais intrigante que a definição de volume exposta nesta seção possa ser, enfrentamos um desafio prático, pois calcular os volumes dos sólidos com base nessa definição é bastante complicado.

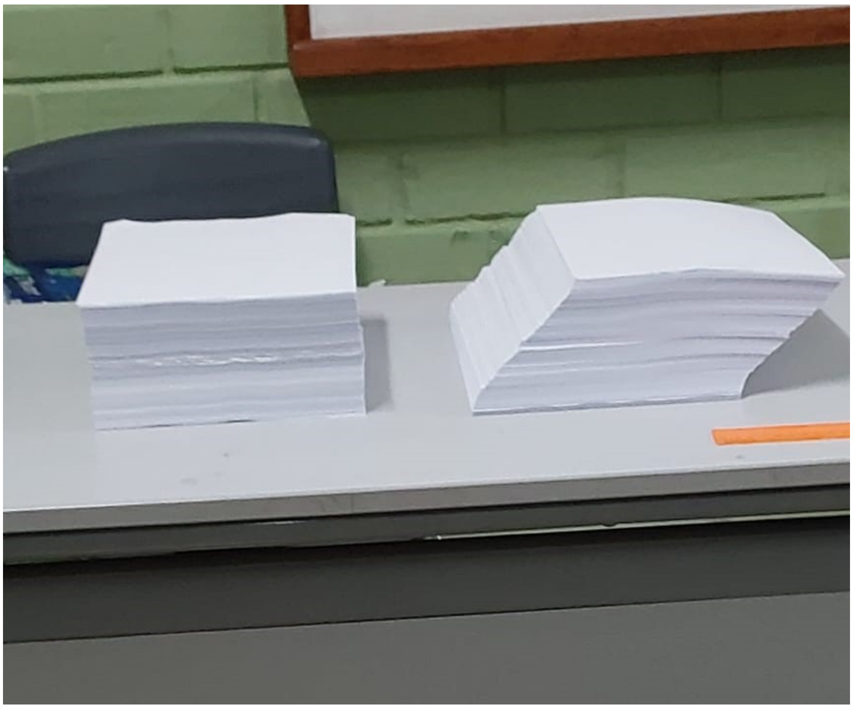
Para prosseguir, iremos aplicar o método do princípio de Cavalieri, sem apresentar a demonstração dele, uma vez que isso requereria conceitos matemáticos que não fazem parte do currículo do Ensino Médio.

## 5.2 Princípio de Cavalieri

Agora discutiremos um resultado conhecido como Princípio de Cavalieri, que nos permitirá avançar no cálculo de volume de maneira prática.

O Princípio de Cavalieri se fundamenta em um conceito matemático que esclarece como dois ou mais corpos tridimensionais podem apresentar volumes idênticos, mesmo que suas formas sejam distintas, desde que certas condições particulares sejam atendidas. Mas quais são essas condições? Para elucidar isso, vamos empregar uma abordagem prática e intuitiva, utilizando um experimento com folhas de papel tamanho $A4$.

Figura 20 – Experimento com pilhas de A4



Fonte: Produção do próprio autor.

Em cima de uma mesa coloque duas pilhas de folhas de papel $A4$, ambas pilhas com a mesma quantidade de folhas. Uma das pilhas de folhas deixe perfeitamente arrumada, essa pilha terá uma forma de paralelepípedo retangular, um sólido que já sabemos calcular seu volume, e a outra pilha acomode de formato diferente.

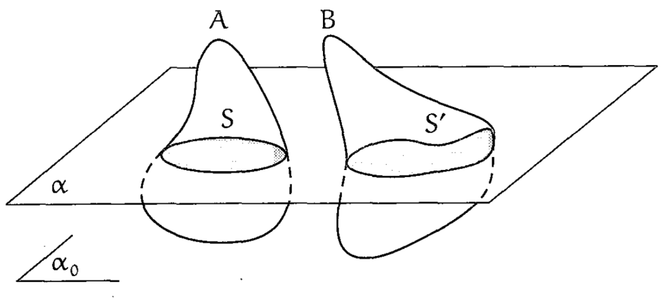
Analisando as duas pilhas, podemos perceber intuitivamente que têm o mesmo volume, pois as duas pilhas têm a mesma quantidade de folha, logo seus volumes são obtidos pela soma dos volumes das folhas. Dessa estrutura temos também o conhecimento de mesma altura e as bases estão contidas num mesmo plano, representada pela mesa, cada secção feita nos dois sólidos paralelas da mesa nos dá a área das folhas que são iguais, ou seja, temos uma representação do Princípio de Cavalieri de uma forma empírica, onde a ideia é imaginar os sólidos decompostos em camadas iguais muito finas, de mesma área e de mesma espessura.

De maneira geral, considere dois sólidos, $A$ e $B$. Para cada plano horizontal $\alpha_0$ , este define seções planas nos sólidos $A$ e $B$, resultantes da interseção com o plano, as quais chamaremos de $S$ e $S'$ , respectivamente. O Princípio de Cavalieri afirma que, se para todos os planos horizontais $\alpha_0$ as seções $S$ e $S'$ têm áreas idênticas, então os volumes dos sólidos A e B são equivalentes.

**Axioma(Princípio de Cavalieri)**

São dados dois ou mais sólidos apoiados no mesmo plano. Se todos os planos paralelos ao plano dado seccionam os sólidos, dando todas figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

Figura 21 – Sólidos de volumes iguais




Fonte: A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2

Na figura 21, temos a representação do axioma com áreas seccionadas iguais; portanto, podemos concluir que os sólidos A e B possuem volumes iguais.

A partir desse conhecimento, vamos utilizá-lo para encontrar as formas gerais de calcular o volume do prisma, das pirâmides, cilindros, cones e esferas.

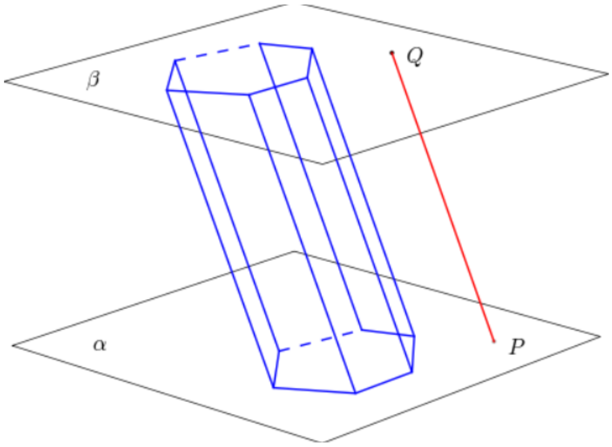
## 5.3 Utilizações do Princípio de Cavalieri

Nesta seção, vamos focar na aplicação do Princípio de Cavalieri para calcular o volume de diferentes sólidos. Os sólidos são bem familiares aos estudantes do ensino médio. É importante ressaltar que esse axioma elimina a necessidade do Cálculo Integral, dessa forma, possibilitando que a análise dos volumes ocorra nesta etapa do processo educativo.

## 5.3.1 Prisma

Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois planos distintos que são paralelos entre si. Vamos considerar uma região poligonal com n lados, situada em $\alpha$, e um segmento $PQ$, onde o ponto $P \in \alpha$ e o ponto Q $\in \beta$. Um prisma é o sólido geométrico que resulta da combinação de todos os segmentos que são paralelos a $PQ$, tendo uma extremidade na região poligonal e a outra em $\beta$.

Figura 22 – Prisma

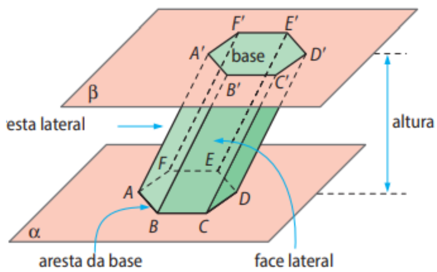



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Prisma

#### 5.3.1.1 Elementos de um prisma

Considerando a perspectiva mostrada na figura 23, apresentaremos os aspectos mais importantes desse sólido.

Figura 23 – Elementos de um Prisma




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

- **Bases**: Os polígonos ABCDEF e $A'B'C'D'E'F'$, chamados de bases do prisma, são congruentes e estão contidos em planos paralelos entre si ($\alpha$ e $\beta$);
- **faces laterais**: são os paralelogramos AB$B'A'$, BC$C'B'$, ..., AF$F'A'$. Note que as superfícies laterais de um prisma sempre possuem a forma de quadriláteros;

- **arestas das bases**: são os lados dos polígonos das bases AB, BC, ..., $F^{'}A^{'}$;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta A$A^{'}$, B$B^{'}$, ..., F$F^{'}$ que são os lados do polígonos das faces laterais;
- **vértices**: são os vértices das faces do prisma, A, B, ..., $E^{'}$, $F^{'}$ que são os pontos de encontro entre duas arestas.
- **Altura**: refere-se à medida entre os planos das bases.

#### 5.3.1.2 Classificação dos primas

Os prismas podem ser classificados de acordo com o número de lados dos polígonos que compõem suas bases. Por exemplo, os prismas podem ser.

- **triangulares**: quando as bases são triângulos;
- **quadrangulares**: quando as bases são quadriláteros;
- **pentagonais**: quando as bases são pentágonos,e assim por diante.

Conforme a disposição das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas podem ser classificados como retos ou oblíquos, onde em um prisma reto, as arestas laterais formam ângulos de 90 graus com os planos das bases, enquanto em um prisma oblíquo, essas arestas se posicionam em um ângulo diferente em relação aos planos das bases.

**Exemplo 5.3.1.** *Representação de prisma reto e oblíquo nas figuras 24a e 24b*

Temos também, quando o prisma é reto e suas bases são formadas em polígonos regulares, ele é classificado como um prisma regular. Um exemplo disso é a ilustração na figura 24a, que mostra um prisma pentagonal regular.

#### 5.3.1.3 Seção transversal de um prisma

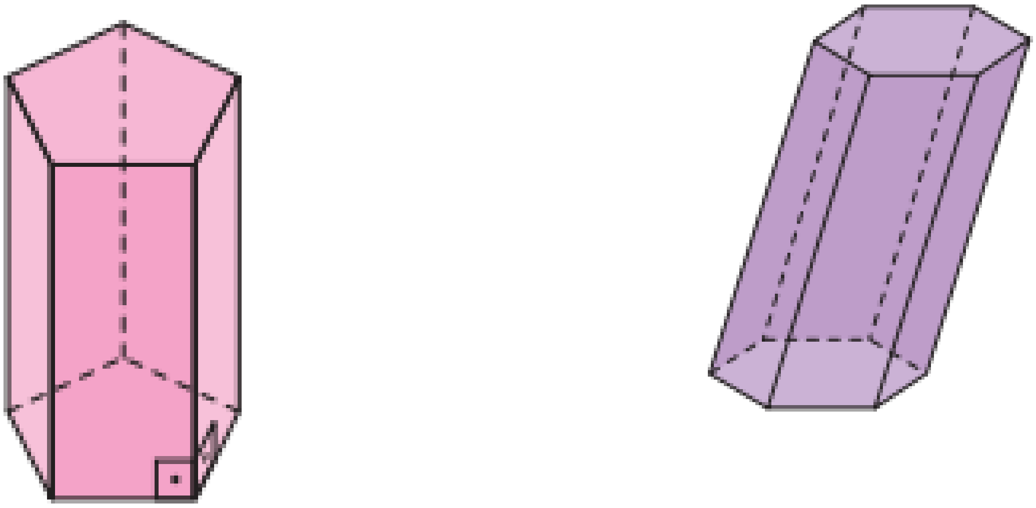
A interseção de um prisma com um plano que é paralelo às suas bases é chamada de seção transversal do prisma.

Note na figura 25 que a seção transversal de um prisma é um polígono que é congruente com os polígonos das bases.

Figura 24 – Prismas

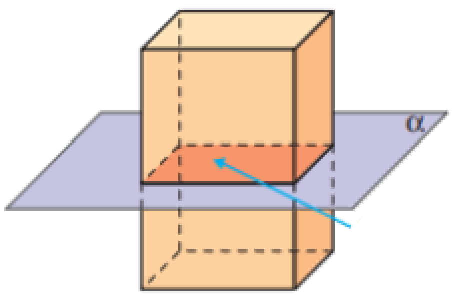
(a) Prisma reto com base pentagonal

(b) Prisma oblíquos com base hexagonal



Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020(figura modificada).

Figura 25 – Seção transversal




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

#### 5.3.1.4 Volume de um Prisma

O paralelepípedo retângulo é um prisma reto com suas faces retangulares e, como já aprendemos a calcular seu volume, usaremos como apoio para calcular o volume de qualquer prisma.

Na seção anterior, vimos que os prismas se diferenciam através dos números de lados do polígono de suas bases e sua inclinação. Nesta parte, utilizaremos o Princípio de Cavalieri para estabelecer uma fórmula para o cálculo do volume de qualquer prisma.

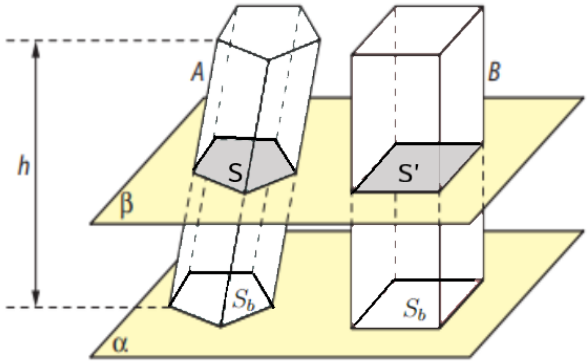
**Teorema 1.** *O volume de um prisma pode ser calculado multiplicando a área da base pela altura.*

Seja $A$ um prisma de altura $h$ e a base um polígono de área $S_b$ apoiado em um plano $\alpha$. Vamos construir ao lado desse prisma uma figura sólida $B$ de formato que seja um paralelepípedo reto retângulo com mesma altura $h$, e com sua base apoiada no plano $\alpha$ que tenha a mesma área $S_b$. Como os sólidos $A$ e $B$ são prismas, qualquer plano que atravesse os dois sólidos, sendo paralelo ao plano $\alpha$, gera seções nos dois, com áreas $S$ e $S'$ correspondentes ao prisma e ao paralelepípedo, respectivamente. Se $\beta$ é um desses planos , conforme ilustração na figura 26. O plano $\beta$ determinará nos sólidos seções transversais congruentes às respectivas bases, assim como figuras congruentes têm mesma área, temos que S = $S_b$ = S'. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que os volumes dos sólidos $A$ e $B$ são iguais. Desse fato, como o cálculo de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base $S_b$ pela medida da altura $h$, então o volume do prisma $A$ também será calculado da mesma forma.

$$\text{Volume do prisma} = (\text{ área da base}) \cdot (\text{ altura})$$

$$\text{Volume do prisma} = S_b \cdot h$$

Figura 26 – Prisma pentagonal e paralelepípedo



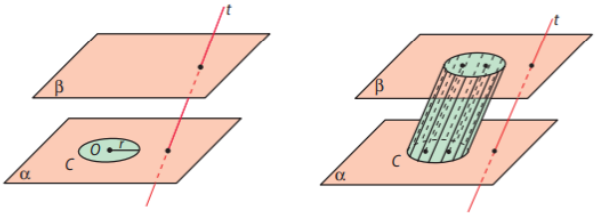

Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020(figura modificada).

## 5.3.2 Cilindro

Considerando dois planos paralelos, $\alpha$ e $\beta$, e um círculo $C$ com centro $O$ e raio $r$ que se encontra no plano $\alpha$ , temos uma reta $t$ que corta os planos $\alpha$ e $\beta$, mas que não toca o círculo $C$. A geometria resultante da combinação de todos os segmentos de reta que são paralelos à reta $t$, com uma extremidade em um ponto do círculo $C$ e a outra no plano $\beta$ é denominada cilindro $S$ de altura igual à distância entre os dois planos paralelos e com bases circulares de raio $r$ e centros $O$ e $O'$ situados nos planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ , respectivamente.

Já os segmentos de reta paralelos $t$ e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases são chamados de geratrizes, que conforme a inclinação no plano $\alpha$, o

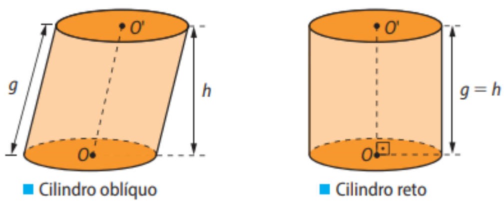
Figura 27 – Construção do cilindro circular




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

cilindro $S$ pode ser classificado como **reto** ou **oblíquo**, ou seja, quando as geratrizes do cilindro se posicionam a 90 graus em relação ao plano da base, caracterizamos esse cilindro como reto. Em contraste, se as geratrizes não forem perpendiculares à base, classificamos o cilindro como oblíquo. Na figura 28, temos uma representação de cilindro reto e oblíquo.

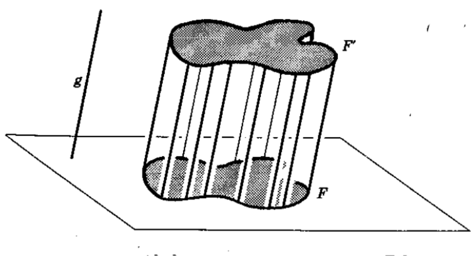
Figura 28 – Cilindro circular




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

A forma que apresentamos a definição de um cilindro é chamada de cilindro circular ou apenas cilindro, mas temos a definição da forma generalizada, onde podemos começar a definição com uma figura qualquer plana $F$, conforme é ilustrado na figura 29. Em uma situação específica, consideramos a possibilidade de a base $F$ ser um polígono. Quando isso ocorre, o sólido é delimitado por faces planas e recebe a denominação de prisma. Assim, um prisma, por definição, é um cilindro cujas bases têm forma poligonal.

Figura 29 – Cilindro

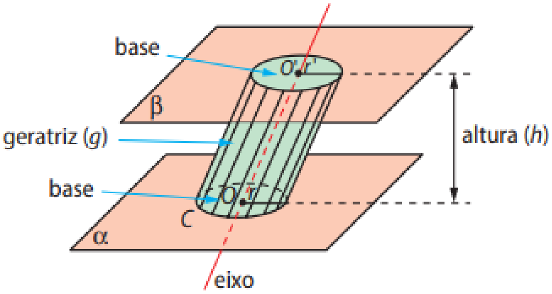



Fonte: Medidas e forma em geometria: comprimento, área, semelhança e volume,2009

#### 5.3.2.1 Elementos do cilindro

Vamos observar o cilindro mostrado na figura 30 e destacar os principais elementos dele.

Figura 30 – Elementos do cilindro



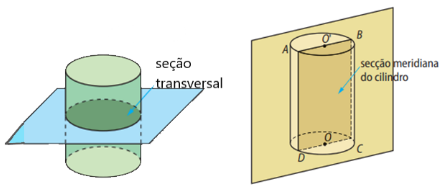

Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

- **bases**:são os círculos de raio $r$ e centros $O$ e $O'$ situados nos planos paralelos $\alpha$ e $\beta$, respectivamente;
- **eixo**:é a reta $OO'$ que contém os centros das bases;
- **raio da base**:é o raio do círculo $C$;
- **geratriz**:são segmentos de reta que são paralelos ao eixo e cujas extremidades estão em pontos das circunferências das bases. Vamos chamar essa medida de $g$;
- **Altura**:a distância entre os planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ , que vamos chamar de $h$.

#### 5.3.2.2 Seções de um cilindro

A parte que ao cortar um cilindro com um plano paralelo às suas bases é chamada de **seção transversal do cilindro** e a parte que aparece quando cortamos um cilindro com um plano que passa pelo seu eixo é chamada de **seção meridiana do cilindro**, como podemos observar a representação das seções na imagem 31.

Figura 31 – Seções do cilindro circular



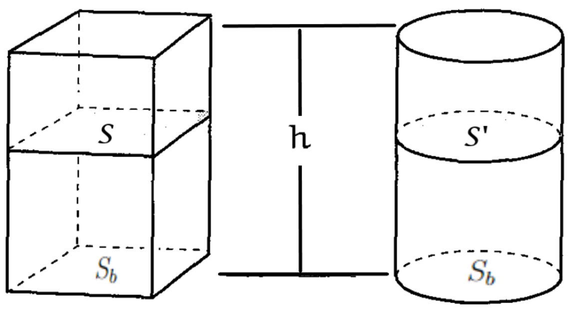

Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

#### 5.3.2.3 Volume de um cilindro

No cilindro, similar ao prisma, temos a característica de suas seções paralelas à base formar figuras congruentes. Após estabelecermos o conceito de cilindro e apresentarmos seus componentes, classificações e situações específicas, podemos empregar o Princípio de Cavalieri para deduzir a fórmula geral que permite o cálculo do volume deste tipo de sólido.

**Teorema 2.** *O volume de um cilindro é a multiplicação da área da base pela altura.*

Figura 32 – Paralelepípedo e cilindro




Fonte: A Matemática do Ensino Médio,v.2, 1999(figura Modificado).

Se colocarmos um cilindro $R$ e um prisma $P$, conforme representado na figura 32, apoiados em um mesmo plano, com mesma altura $h$ e a área de suas bases igual a $S_b$. Se um plano paralelo ao plano das bases secciona os dois sólidos dando figuras planas de área $S$ e $S'$, como figuras congruentes têm a mesma área, assim temos que $S = S_b = S'$. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, temos que o dois sólidos têm o mesmo volume, logo o volume do cilindro é o produto da área da base por sua altura.

$$\text{Volume do cilindro} = (\text{ área da base}) \cdot (\text{ altura})$$

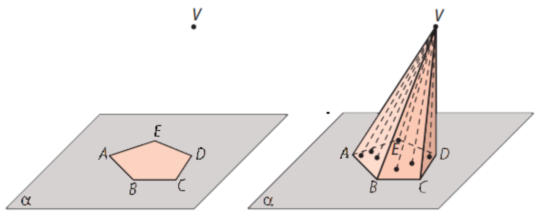
$$\text{Volume do cilindro} = S_b \cdot h$$

Estabelecemos as fórmulas para prismas e cilindros, e observamos que o cálculo do volume se relaciona diretamente com o cálculo de área. Com base nesses dados e no Princípio de Cavalieri, vamos agora determinar as fórmulas para o volume de pirâmides, cones e esferas.

### 5.3.3 Pirâmides

Imagine um plano $\alpha$, um polígono convexo que está contido em $\alpha$, e um ponto $V$ que não faz parte de $\alpha$ denomina-se pirâmide a união de todos os segmentos que possuem uma extremidade no ponto $V$ e a outra em um ponto do polígono.

Figura 33 – Pirâmides




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

#### 5.3.3.1 Elementos de uma Pirâmides

Considerando a pirâmide representada na figura 33, destacamos os seguintes elementos:

- **Bases**: O polígono ABCDE é a base da piramide;
- **vértice de pirâmide**: é o ponto $V$; os vértices da base são os pontos A, B, C, D, E;
- **faces laterais**: As faces laterais são formadas por triângulos, na figura são os triângulos VAB, VBC, VCD, VDEe VEA;
- **arestas da base**: são os lados do polígono da base AB, BC, CD, DE e EA;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta VA, VB, VC, VD e VE;
- **Altura**: refere-se à medida vertical entre o ponto $V$ e o plano que serve como base identificado $\alpha$.

#### 5.3.3.2 Classificando uma pirâmide

As pirâmides podem ser categorizadas com base na quantidade de lados que possui o polígono da sua base. Por exemplo, temos as seguintes pirâmides:

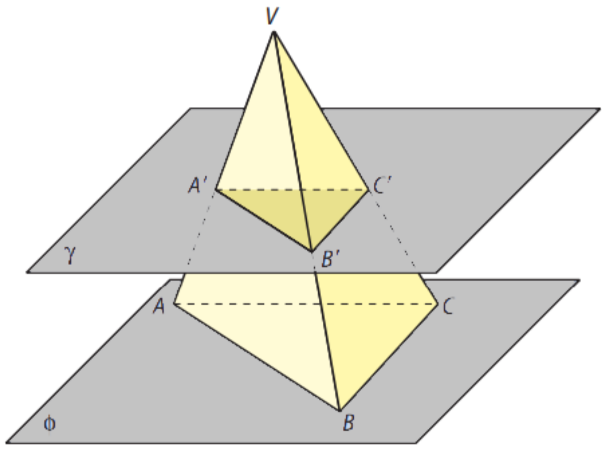
- **triangulares**: quando as bases são triângulos;
- **quadrangulares**: quando as bases são quadriláteros;
- **pentagonais**: quando as bases são pentágonos,e assim por diante.

Também podemos classificar a pirâmide como **reta, oblíqua ou regular**. Se a projeção perpendicular do vértice no plano da base coincide com o ponto central $O$ da base, que representa o centro da circunferência que circunscreve o polígono da base, dizemos que a pirâmide é **reta**. Por outro lado, se essa projeção não cai sobre o centro da base, a pirâmide é considerada **oblíqua**. Já se a pirâmide é reta e tem como base um polígono regular, a pirâmide é uma **pirâmide regular**.

#### 5.3.3.3 Seção transversal de uma pirâmide

Ao contrário do que acontece com o prisma e o cilindro, na pirâmide, quando é cortada por um plano paralelo à sua base, a forma resultante da seção é um polígono que possui semelhança em relação à base, mas não é congruente.

Figura 34 – Seção transversal da pirâmide




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

Na figura 34 temos o plano $\gamma$ paralelo ao plano $\Phi$, o plano $\gamma$ secciona a pirâmide formando o polígono $A'B'C'$, esse polígono concebido é semelhante ao polígono $ABC$ que está contido no plano $\Phi$.

#### 5.3.3.4 Volume de uma pirâmide

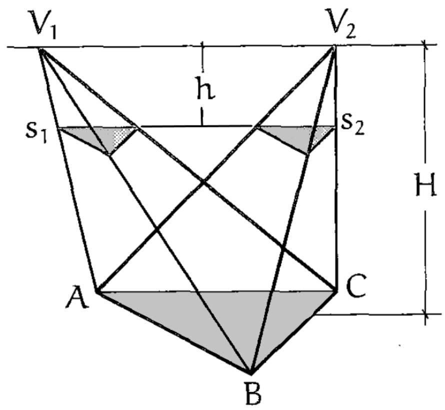
O Teorema a seguir será introdutório para conseguirmos o volume da pirâmide. Conforme se encontra no livro A Matemática do Ensino Médio. (LIMA et al., 1999)

**Teorema 5.3.2.** *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.*

Usaremos para a demonstração a figura 35. Na imagem temos a exibição de duas pirâmides de base poligonal $ABC$ e vértices $V_1$ e $V_2$ , onde um plano paralelo à base seciona os sólidos a uma altura $h$ em relação aos vértices, concedendo dois polígonos $S_1$ e $S_2$.

Seja $x$ a área da base $ABC$ e as áreas de $S_1$ e $S_2$ têm resultados $x_1$ e $x_2$, respectivamente. Agora, vamos mencionar dois pontos relevantes em relação à situação mencionada.

Figura 35 – Pirâmides de mesma base e altura.




Fonte: A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2

1. A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $(\frac{h}{H})$.

2. A proporção das áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Com o auxílio desses dois pontos, temos:

$$\frac{x_1}{x} = (\frac{h}{H})^2 = \frac{x_2}{x}$$

Assim, concluímos que $x_1 = x_2$. Através do Princípio de Cavalieri, finalizamos que as duas pirâmides têm o mesmo volume.

Dessa proposição e a capacidade de deslocar o vértice de uma pirâmide em um plano que seja paralelo à sua base, sem modificar o seu volume, é fundamental para a prova do volume da pirâmide com base triangular. Iremos demonstrar o teorema a seguir.

**Teorema 5.3.3.** *Numa pirâmide de base triangular, seu volume é a terça parte da multiplicação da área da base pela altura.*

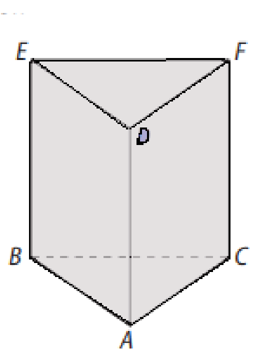
Seja ABCDEF um prisma reto de base triangular(figura 36).

Sabemos calcular o volume desse prisma, vamos considerar $V_{prisma}$ o volume desse sólido. Para a demonstração, vamos dividi-lo em três pirâmides triangulares, conforme a figura 37

Dessa divisão, temos que:

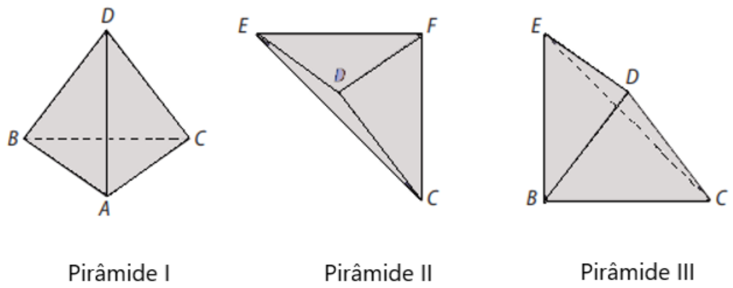
- as pirâmides $I$ e $II$, têm bases iguais, pois os triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes por pertencerem as bases do prisma da figura 36, e têm a mesma altura(altura do prisma), pelo **teorema** 5.3.2 as pirâmides $I$ e $II$ tem o mesmo volume, que iremos representar $V_I$ e $V_{II}$, ou seja, $V_I = V_{II}$ .

Figura 36 – Prisma de base triangular




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

Figura 37 – Três pirâmides




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

- com as pirâmides $II$ e $III$, com respectivas bases $CEF$ e $BCE$,e tendo a mesmo altura (distância do ponto D ao retângulo BCFE), logo seus volumes são iguais, pois suas bases são congruentes(na figura 38 podemos observar a diagonal $EC$ dividindo o retângulo $BCFE$ em dois triângulos congruentes que são $CEF$ e $CBE$ ), volta ao **teorema** 5.3.2, concluímos que as pirâmides $II$ e $III$ tem o mesmo volume, que iremos representar por $V_{II}$ e $V_{III}$, ou seja, $V_{II}= V_{III}$.

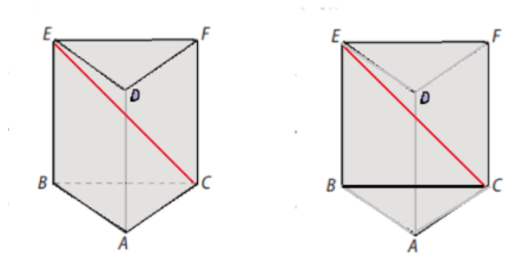
Decorrente dos fatos acima, temos que $V_I= V_{II}= V_{III}= V_{pirâmide}$, e que a soma desses volumes é igual ao volume do prisma, então temos:

$$V_{prisma}= V_I + V_{II} + V_{III} \Rightarrow V_{prisma}= 3V_{pirâmide} \Rightarrow V_{pirâmide}= \frac{V_{prisma}}{3}$$

Então, temos que o volume da pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, onde $V_{prisma}$ é o produto da área da base pela sua altura.

Logo podemos escrever que:

Figura 38 – Diagonal EC




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.(figura modificada)

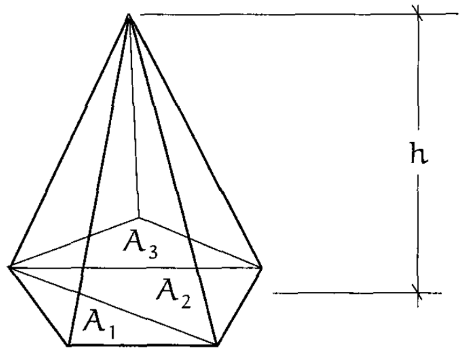
$$\text{Volume da pirâmide triangular} = \tfrac{1}{3}\ [(\text{área da base}) \cdot (\text{ altura})] = \tfrac{1}{3}\ A \cdot h$$

Como resultado desse evento, no próximo teorema abordaremos a fórmula geral para determinar o volume de qualquer pirâmide.

**Teorema 5.3.4.** *Numa pirâmide qualquer, o seu volume é a terça parte da multiplicação da área da base pela altura.*

Para justificar, note que toda pirâmide pode ser segmentada em pirâmides com base triangular. Essa segmentação ocorre ao dividir a base em triângulos adjacentes utilizando diagonais, e cada plano de divisão da pirâmide é determinado por uma dessas diagonais da base, juntamente com o vértice da pirâmide.

Figura 39 – Representação da divisão da pirâmides de base pentagonal em pirâmides triangulares.




Fonte: A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2

Agora considere que a pirâmide possui uma altura $h$ e que sua base, com área $A$, foi segmentada em $n$ triângulos de áreas

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n.$$

Uma vez que o volume da pirâmide corresponde à soma dos volumes das pirâmides triangulares, concluímos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}\,A_1\,h + \frac{1}{3}\,A_2\,h + \cdots + \frac{1}{3}\,A_n\,h = \frac{1}{3}\,(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)h = \frac{1}{3}\,A\,h$$

como queríamos demonstrar, fica assim determinado que:

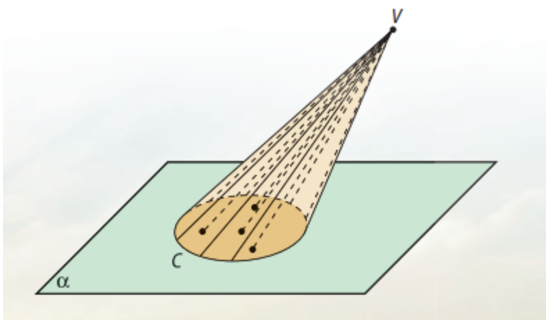
$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3}\cdot[(\text{área da base})\cdot(\text{ altura})] = \frac{1}{3}\,A\,h$$

Concluímos que para calcular o volume de qualquer pirâmide, basta pegar o produto da área de sua base e sua altura, e multiplicar por $\frac{1}{3}$. Com esse resultado, poderemos seguir para o próximo sólido.

### 5.3.4 Cone

Considerando um plano $\alpha$, um círculo C que se encontra dentro dele, e um ponto $V$ fora do plano $\alpha$, a figura gerada pela união de todos os segmentos de reta que se estendem de $V$ até qualquer ponto do círculo C é chamada de cone, cuja altura trata-se da medida da distância entre o ponto $V$ e o plano $\alpha$, ou seja, é a medida da perpendicular que é traçada de P sobre o plano da base, conforme representado na figura 40.

Figura 40 – Cone circular ou cone



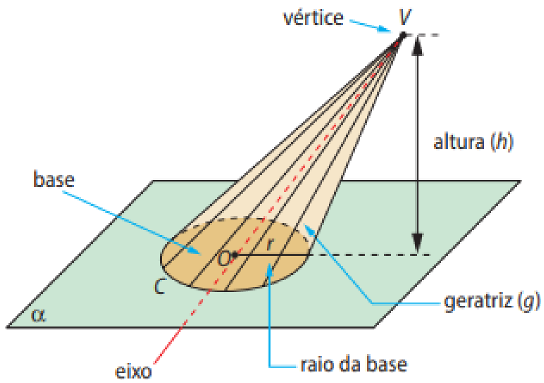

Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

Esse cone, conforme definimos, é chamado de cone circular ou apenas cone. No entanto, também existe a definição de cone generalizado, onde sua base pode ser uma figura plana qualquer. Em casos particulares, podendo ser um polígono, quando isso ocorre, o sólido é cercado por faces laterais planas triangulares e é denominado pirâmide. Assim, segundo a definição, uma pirâmide é considerada um cone que possui uma base poligonal. Podemos explorar de maneira mais detalhada na obra Medidas e Forma de Geometria.

#### 5.3.4.1 Elementos do cone

Vamos observar o cone mostrado na figura 41 e destacar os principais elementos dele.

Figura 41 – Elementos do cone




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

- **base**:é o círculo C, que tem raio r e centro O, localizado no plano $\alpha$;
- **eixo**:é a reta $OV$;
- **vértice**:é o ponto $V$;
- **raio da base**:é o raio do círculo $C$;
- **geratriz**:é qualquer segmento de reta que tenha como extremidades o vértice $V$ e um ponto qualquer na circunferência da base é chamado de segmento, e vamos representar sua medida pela letra $g$.
- **Altura**: refere-se à medida entre o ponto $V$ até o plano da base.

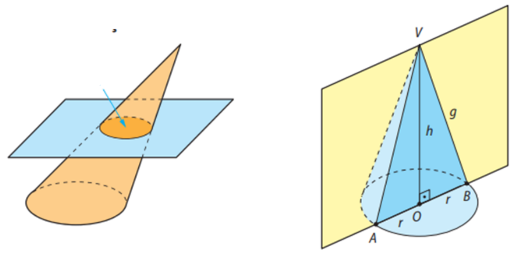
#### 5.3.4.2 Seções de um cone

Quando cortamos um cone com um plano que é paralelo à sua base, a forma que aparece é chamada de **seção transversal do cone** e quando cortamos um cone com um plano que passa pelo seu eixo, a forma que fica é chamada de **seção meridiana do cone**, como mostra a figura 42.

#### 5.3.4.3 Volume do cone

Depois de expor a definição de cone, procederemos à dedução da fórmula geral para calcular o volume desse sólido.

Figura 42 – Seções do cone




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

**Teorema 5.3.5.** *Num cone, o seu volume é a terça parte da multiplicação da área da base pela altura.*

Seja um cone com altura $H$ e uma base com área $A$ situada em um plano horizontal, podemos considerar uma pirâmide que também possui altura $H$ e uma base de área $A$ localizadas nesse mesmo plano, conforme ilustração na figura 43.

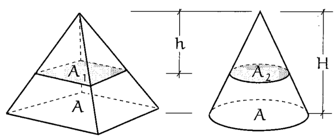
Se um plano que é paralelo às bases, ao intersectar os sólidos a uma altura $h$ em relação aos seus vértices, resultará em seções transversais que são paralelas às bases da pirâmide e do cone, com áreas $A_1$ e $A_2$, respectivamente. Segue a mesma lógica apresentada anteriormente para o cálculo de volume de uma pirâmide. A razão entre as áreas das bases do cone maior e do cone menor, assim como a razão entre as bases das pirâmides maior e menor, é equivalente à razão entre os quadrados das respectivas alturas. Logo

$$\frac{A_1}{A} = (\frac{h}{H})^2 = \frac{A_2}{A}$$

Daí, temos $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri assegura que os dois sólidos possuem volumes idênticos, e assim chegamos à conclusão de que o volume é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3} \cdot [(\text{área da base}) \cdot (\text{ altura})] = \frac{1}{3}\ A\ h$$

Figura 43 – Pirâmide e cone



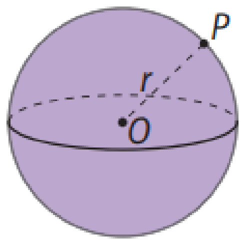

Fonte: A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2

## 5.3.5 Esfera

Vamos analisar um ponto $O$ e um número real $r$ positivo, onde o conjunto de todos os pontos $P$ no espaço, que possuem uma distância igual a $r$ em relação ao ponto $O$, é conhecido como a **superfície esférica** com centro em $O$ e raio $r$, conforme a figura 44.

O objeto tridimensional delimitado por uma superfície esférica é denominado esfera. Assim, a esfera com centro O e raio r é definida como o conjunto de todos os pontos no espaço cuja distância em relação ao ponto O é inferior ou igual a r.

Figura 44 – Esfera

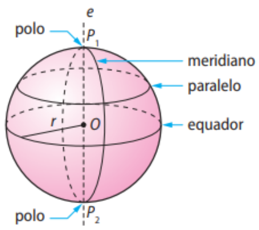



Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

### 5.3.5.1 Elementos da esfera

Vamos falar um pouco sobre os principais elementos de uma esfera.

Figura 45 – Esfera




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

- **eixo**:é uma reta que passa pelo centro da esfera é chamada de reta que contém o centro, e a representamos por $e$;
- **polos**: são os pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo e, e indicamos por $P_1$ e $P_2$;
- **equador**:é a circunferência de uma seção conseguida por um plano perpendicular ao eixo e e que passa pelo centro da esfera;

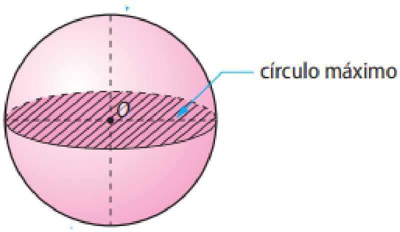
- **paralelo**: é a circunferência de uma seção conseguida por um plano perpendicular ao eixo $e$;

- **meridiano**: é a circunferência de uma seção conseguida por um plano que contém o eixo $e$.

#### 5.3.5.2 Seções da esfera

A seção obtida por um plano perpendicular ao eixo $e$ é um círculo. Os círculos obtidos pela intersecção da esfera com um plano que passa pelo centro O são chamados **círculos máximos**.

Figura 46 – Seção da esfera




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

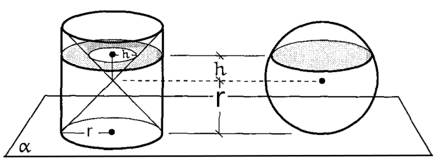
#### 5.3.5.3 Volume de uma esfera

Após apresentarmos a definição da esfera, vamos deduzir a fórmula geral para determinar o volume desse sólido.

**Teorema 5.3.6.** *O volume de uma esfera de raio $r$ é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Considere um cilindro circular reto de raio da base $r$ e altura $2r$, ou seja, um cilindro equilátero. Além disso, considere uma esfera com raio $r$ que é tangente ao plano $\alpha$, onde se encontra apoiada a base desse cilindro, como é demonstrado na figura 47.

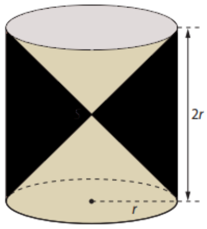
Figura 47 – Cilindro equilátero e esfera




Fonte: A Matemática do Ensino Médio, 1999. v.2(figura modificada)

Do cilindro, iremos remover dois cones idênticos, sendo que cada cone terá sua base sobre uma das bases do cilindro e os vértices se encontram no centro do cilindro, ou seja, dois cones circulares retos de altura $r$ e raio da base $r$. Retirando esses dois cones do cilindro, obtemos o sólido $A$, conforme ilustra na figura 48.

Figura 48 – Sólido $A$




Fonte: Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias, 2020.

Considere agora um plano $\beta$ que é paralelo ao plano $\alpha$ e que seccione a esfera e o sólido $A$ a uma distância $h$ do centro da esfera(ou do centro do cilindro, o que é o mesmo), produzindo no sólido $A$ uma seção que se configura como uma coroa circular, tendo um raio externo de $r$ e um raio interno de $h$. Isso ocorre porque a geratriz dos cones forma um ângulo de 45° com o plano que contém a base, logo a área da coroa é calculada da seguinte maneira;

$$S_1 = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

Já na esfera, o plano $\beta$ secciona um círculo, cujo raio chamaremos de $R$, usando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$r^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - h^2$$

Dessa forma, a área do círculo que definiremos por $S_2$ é determinada por:

$$S_2 = \pi R^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

Como o plano $\beta$ estabelece seções com áreas idênticas e as alturas dos sólidos são equivalentes, de acordo com o Princípio de Cavalieri, podemos concluir que os volumes do sólido $A$ e da esfera são iguais, logo

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

$$V_{esfera} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$V_{esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

# 6 Atividades

Discutiremos quatro atividades realizadas com os alunos da segunda série do Ensino Médio na disciplina de Matemática em uma escola estadual de Educação Básica localizada na zona urbana do município de Jaguaré-ES, no turno vespertino, no período de outubro a dezembro de 2023.

Trataremos aqui de um estudo experimental, de acordo com Ponticelli (2013) constitui o delineamento mais prestigiado nos meios científicos. Consiste essencialmente em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis capazes de influenciá-lo e definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto. Temos, portanto, uma pesquisa em que o pesquisador é um agente ativo, e não um observador passivo.

Para Pozo (1998), os conceitos básicos da Pesquisa Experimental podem ser desenvolvidos em qualquer lugar, desde que apresentem as seguintes propriedades: a) Manipulação: o pesquisador precisa fazer alguma coisa para manipular pelo menos uma das características dos elementos estudados; b) Controle: o pesquisador precisa introduzir um ou mais controles na situação experimental, sobretudo criando um grupo de controle; c) Distribuição aleatória: a designação dos elementos para participar dos grupos experimentais e de controle deve ser feita aleatoriamente.

Nesse contexto, almejaremos responder à seguinte questão da pesquisa: "Como os conhecimentos científicos(habilidades) podem ser construídos a partir de atividade prática no ensino de Matemática na Educação Básica?" Para responder a essa questão, foi desenvolvida uma pesquisa de cunho qualitativo em que se analisaram as atividades que foram implementadas com alunos.

No âmbito dessa discussão, buscamos abordar o seguinte: medir e compreender o volume dos sólidos geométricos através de aulas práticas e/ou experimentais que possam ser inseridas em um ambiente de ensino e aprendizado onde se realizem atividades de compreensão, interpretação e reflexão. As atividades práticas são uma poderosa ferramenta didática para facilitar a assimilação desses conceitos e promover uma aprendizagem ativa e significativa. Andrade e Massabini (2011, p. 836) relatam que: "As atividades práticas permitem aprendizagens que a aula teórica, apenas, não permite, sendo compromisso do professor, e também da escola, dar esta oportunidade para a formação do aluno".

Segundo os PCN (2000), para uma didática mais sólida dos conteúdos, a interdisciplinaridade desempenha um papel funcional. Ela envolve a utilização de conhecimentos que são diretamente aplicáveis e úteis na solução de problemas. A combinação de diversos saberes pode estabelecer as bases para uma aprendizagem inspiradora, ao proporcionar maior autonomia tanto para educadores quanto para estudantes na escolha de conteúdos que estejam mais conectados a temas ou questões relevantes para a vida. Com isso, implementando a interdisciplinaridade nas atividades práticas, podemos enriquecer o saber dos alunos.

A partir desse trabalho, foi possível levantar características importantes do uso das atividades práticas na Educação Básica, como maior participação dos alunos durante as aulas; capacidade de trabalhar em grupo e aprimoramento do raciocínio mental. Cada atividade abordada promove uma faceta distinta do conceito sobre sólidos: área da superfície, capacidades, volume através do deslocamento da água e Princípio de Cavalieri.

A primeira atividade prática tem como direcionamento realizar um flashback sobre os conteúdos relacionados a figuras planas e sólidas, além da planificação desses sólidos, explorando os conhecimentos dos alunos de maneira eficaz. A atividade foi realizada em sala de aula, explorando o trabalho em grupo. Foi disponibilizada uma caixa de papelão à qual os alunos deveriam medir e planificar para calcular a superfície dessa caixa, utilizando as habilidades e competências adquiridas em sua formação escolar no Ensino Fundamental.

A segunda atividade visa ilustrar como medir o volume utilizando recipientes no formato de paralelepípedos retângulos , destacando que, independentemente das dimensões, os recipientes podem ter volumes iguais. A atividade foi realizada em uma área externa para evitar sujeira, pois foi utilizada água tingida para o experimento. Mas antes desse processo os alunos tiveram que construir um cubo unitário de 1 dm = 10 cm de aresta, usando plástico acetato ou pasta polipropileno, fita adesiva e tesoura, sendo orientados a como construir esse cubo. Em aula posterior, foram utilizados recipientes de um litro e de tamanhos menores para determinar quantas vezes precisavam ser cheios para encher um cubo. Também foi utilizado um aquário cujas dimensões de comprimento, altura e largura eram todas de 30 cm, ou seja, um aquário em formato cúbico. Os alunos analisaram de forma prática quantos cubos, com aresta de 1 dm(10 cm), seriam necessários para preencher o aquário com água.

A terceira atividade aplica o Princípio de Arquimedes para calcular o volume de um objeto irregular, como uma pedra, através do deslocamento de água em um recipiente retangular. Este método é ideal para sólidos com formas não regulares e fornece uma abordagem intuitiva para o cálculo de volumes. Esse experimento demonstra de forma prática e visual como o volume de um objeto pode ser determinado observando a diferença no nível da água antes e depois da submersão do objeto, consolidando o entendimento do princípio de deslocamento de água. A interligação entre Matemática e Física na resolução de problemas, ao desenvolver habilidades essenciais como o pensamento crítico e o raciocínio lógico, é crucial para aprimorar as práticas pedagógicas e facilitar a compreensão de conteúdos em ambas as áreas do conhecimento.

A quarta atividade tem a finalidade de ilustrar o Princípio de Cavalieri, definido que dois sólidos que possuem a mesma altura, se todas as seções que são paralelas ao plano de apoio desses sólidos resultam em figuras planas com áreas iguais, isso indica que os volumes desses sólidos são iguais. Para isso, foram utilizadas pilhas de folhas A4 organizadas em diferentes formatos. Essa atividade serve como um apoio na introdução do conceito do Princípio de Cavalieri, deixando de forma mais dinâmica o conhecimento adquirido para o aluno.

Nesse contexto, é importante ressaltar que essas quatro atividades são essenciais para exemplificar e fortalecer conceitos geométricos e físicos ligados ao volume. As atividades oferecem uma experiência de aprendizado dinâmica e envolvente, permitindo que os alunos visualizem e entendam o conceito de volume de forma prática e tangível. Essas atividades não só auxiliam na compreensão de teorias abstratas, como também incentivam o desenvolvimento do pensamento crítico e a solução de problemas.

## 6.1 Atividade 1

### 6.1.1 Calculando a Área da Superfície de uma Caixa de Papelão

**Objetivo**: compreender e aplicar o conceito de área da superfície de sólidos geométricos, explorando as áreas de figuras planas através das planificações, conectando esses conhecimentos a situações práticas do cotidiano, como embalagem.

**Materiais:**

1. uma caixa de papelão (pode ser de sapato, de cereal ou qualquer outra no formato de um paralelepípedo reto, onde a tampa esteja conectada com a embalagem.);
2. tesoura ou estilete;
3. régua;
4. lápis;
5. caneta marcador;
6. caderno.

**Procedimento:**

- Para a atividade usaremos uma aula de 50 minutos, sendo administrada dentro de sala de aula.
- Observe a caixa e identifique suas faces. Com a régua meça as dimensões e anotem no caderno (comprimento(C), largura(L) e altura(H)).

- Planifique a caixa . Com a caneta marcador marque cada rosto da caixa(por exemplo, A, B, C etc.) e a note no caderno as dimensões de cada rosto (comprimento e largura). Nesse item podemos trabalhar a planificação mental da caixa.
- Para cada rosto, calcule sua área usando a fórmula:

$$\text{Área da face} = \text{comprimento} \times \text{largura}$$

- Cálculo da área total da superfície será a somatória de todas as áreas da face. Neste momento, é possível notar que algumas faces da caixa apresentam áreas idênticas. Com a identificação das faces poderemos verificar que são faces opostas. Conclusão da equação geral a área total da superfície de um prisma retangular é dada por:

$$\text{Área total} = 2(\text{C} \times \text{L}) + 2(\text{C} \times \text{H}) + 2(\ \text{L} \times \text{H})$$

- Essa atividade pode ser realizada utilizando diferentes tipos de formas geométricas, considerando as habilidades dos alunos da turma.

Figura 49 – Atividade 1

(a) Caixa (b) Planificação da caixa


Fonte: Produção do próprio autor.

## 6.2 Atividade 2

### 6.2.1 Medindo o volume da água com recipientes

**Objetivo:** Compreender e medir o volume de um paralelepípedo retângulo e sua capacidade . Demonstrar como medir o volume através de líquidos usando recipientes e entender como diferentes recipientes podem ter dimensões diferentes, mas volumes iguais, e trabalhar a relação da grandeza volume e grandeza capacidade de uma forma intuitiva para o aluno.

**Materiais:**

1. recipiente de plástico acetato ou vidro de formato de um paralelepípedo retângulo com 5 faces e dimensões iguais $10cm{=}1dm$, ou seja, um "cubo unitário"(aquário);
2. recipientes de um litro;
3. recipientes menores ou iguais de diferentes formatos, como copos de tamanhos variados, uma garrafa de água, uma caixa de leite, etc;
4. recipientes maiores, como um aquário;
5. tesoura ou estilete;
6. água e tinta guache(água tingida é opcional);
7. fita adesiva transparente grossa;
8. marcador ou fita adesiva;
9. régua.

**Procedimento:**

- Construção do cubo com dimensão de $10cm$ usando o plástico acetato( como esse material não tinha na cidade foi usando pasta polipropileno), os alunos usaram régua para a medição, tesoura e estile para os cortes das faces do cubo e fita adesiva para a montagem do cubo. Foram utilizadas duas aulas de 50 minutos para a construção do cubo e a turma foi dividida em grupos para a construção do .
- Utilização de uma área externa, pois o experimento pode regera sujeira no ambiente. Para o experimento usaremos uma aula de 50 minutos.
- Encha o recipiente de um litro com água ou água tingida até a borda, Isso representa o volume total do recipiente, em seguida despeje a água no cubo construído sem derramar para fora. A note o que aconteceu e qual a conclusão da experiência;

- Usando um dos recipientes menores, despeje cuidadosamente a água do recipiente do cubo. Anote o número de vezes que você enche o recipiente menor. Por exemplo, se você precisar encher o recipiente menor duas vezes, anote "2".

- Repita o passo 4 para vários recipientes menores de formatos diferentes e anote quantas vezes você precisou encher cada um.

- Agora, pegue dois recipientes de formato diferente, mas que possuam o mesmo volume(caixa de leite). Encha um deles até a borda com água e despeje-o no outro. Observe que ambos ficam com o mesmo volume de água, apesar de terem formatos diferentes. Isso demonstra que o volume é uma medida intrínseca e não depende da forma do recipiente.

- Opcionalmente, você pode medir o volume em mililitros ou litros usando uma régua para verificar se os recipientes têm volumes iguais. Por exemplo usando a régua, meça a altura,comprimento e a largura da caixa de leite faça o calculo de volume e compare o resultado com o calculo do cubo.

- com o recipiente maior, verifique a quantidade que cabe do cubo unitário. Por exemplo usando um aquário de dimensões 30$cm$, coloque água no cubo e vai despejando no aquário, a note quantas vezes precisou encher o cubo.

Figura 50 – Experimento 2

(a) Construindo o cubo unitário.

(b) Preenchendo com água tingida.

Fonte: Produção do próprio autor.

## 6.3 Atividade 3

### 6.3.1 Estimando o volume de uma pedra usando o princípio do deslocamento de água

**Objetivo:** Compreender e aplicar o Princípio de Arquimedes, fornecendo uma abordagem prática para calcular o volume de sólidos irregulares, especialmente aqueles que podem ser submersos em um fluido. A ideia central é que um corpo imerso em um fluido sofre um empuxo igual ao peso do fluido deslocado. Ao aplicar o Princípio de Arquimedes para calcular volumes, é possível determinar a quantidade de fluido que foi deslocada quando um objeto é submerso, e essa quantidade está diretamente relacionada ao volume do objeto.

**Materiais:**

1. uma pedra(ou qualquer objeto irregular);
2. recipiente transparente com um aquário ou uma jarra;
3. água e tinta guache(água tingida é opcional);
4. marcador ou fita adesiva;
5. régua;
6. uma balança (opcional).

**Procedimento:**

- Utilização de uma área externa, pois o experimento pode regera sujeira no ambiente. Para o experimento usaremos uma aula de 50 minutos.
- Encha o recipiente transparente com água ou água tingida deixando o nível da água abaixo da borda, permitindo a submersão completa da pedra sem transbordar. No caso desse experimento foi usando um aquário de dimensões $30cm$.
- Meça o volume inicial de água do aquário e anote-o, em seguida, marcando o nível da água. Nesse experimento foi usando um aquário de formato cúbico, os alunos tiveram o cuidado na hora de medir, eliminando os centímetros da espessura do vidro deixando o comprimento e a largura com $29cm$.
- Delicadamente, coloque a pedra no aquário com água. Certifique-se de que a pedra esteja totalmente submersa na água

- O nível da água no aquário irá subir devido ao deslocamento de água causado pela pedra. Meça o novo nível da água no aquário e anote-o. Nesse passo deixe os alunos a vontade para a medição do nível da água, podendo os alunos medir somente o nível elevado da água a partir da marcar feita com o marcador ou a fita.

- Calcule a diferença entre o volume final da água no aquário e o volume inicial da água. Isso representará o volume da pedra. Lembre-se de que o volume da pedra é aproximadamente igual ao volume de água deslocado. O cálculo poderá ser feito também através da medida do nível deslocado é o comprimento e a largura do aquário.

- Esse item pode ser opcional. Pese a pedra em uma balança(se disponível) e anote a massa em gramas. Se você usou uma balança para medir a massa da pedra, agora você pode calcular a densidade da pedra. A densidade é igual à massa dividida pelo volume: $Densidade(g/cm^3) = Massa(g)/Volume(mL)$.

- Como no item anterior esse também pode ser opcional. No final do experimento o docente poderá pedir que seus alunos façam um relatório do experimento, podendo utilizar uma aula de 50 minutos.

Figura 51 – Atividade 3

(a) Medindo o nível da água. (b) Medindo o deslocamento da água.

Fonte: Produção do próprio autor.

## 6.4 Atividade 4

### 6.4.1 Medido o volume das pilhas de folhas $A4$ com a mesmas quantidades de folhas

**Objetivo:** Compreender e aplicar o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de sólidos, utilizando a ideia de que, se duas regiões estão contidas entre planos paralelos e possuem a mesma área em cada plano, então elas têm o mesmo volume. Promovendo uma compreensão intuitiva e concreta desse princípio geométrico.

**Materiais:**

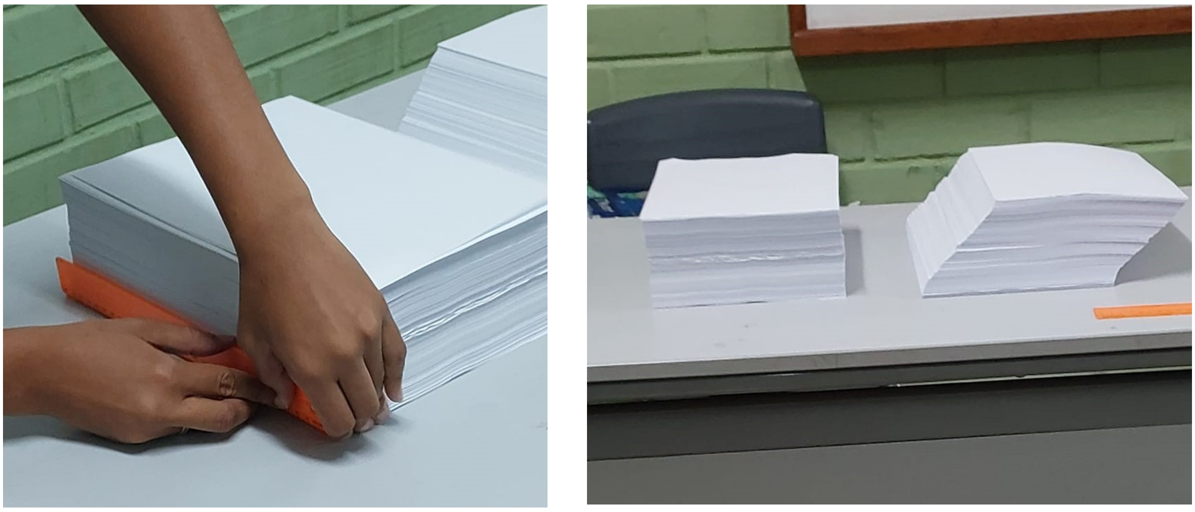
1. folhas $A4$(duas ou mais pilhas de folhas) ou cartas de baralho;
2. Régua;
3. Mesa.

**Procedimento:**

- Utilização da sala, caderno e uma mesa. Para o experimento usaremos uma aula de 50 minutos.
- Coloque sobre a mesa as duas pilhas ou mais pilhas de folhas com a mesma quantidade de papeis(na figura52a e 52b, temos nas pilhas 1.000 folhas )
- Organize as pilhas de forma que um das pilhas fique no formato de um bloco retangular e as outras de formatos quaisquer.(figura52a e 52b)
- Meça as dimensões da pilha em formato de um bloco retangular e calcule o volume, anote no caderno.
- Meça as bases de cada pilha, ou seja, meça a dimensões das folhas, anote no caderno.
- Com a régua meça a altura de cada pilha, anote no caderno.
- Com os dados anotados, vamos fazer comparações entres as pilhas. Sabemos que as pilhas têm mesmo volume(quantidade igual de folhas). As pilhas têm mesma altura e são formadas por folhas $A4$ que tem mesma área e espessura,
- Fechamento da experiência, as pilhas têm a altura, base, e sua estrutura é formada por camada de folhas iguais e seus volumes são iguais.

Figura 52 – Experimento com pilhas de A4

(a) Medido e organizando a pilha (b) Formatos diferentes com o mesmo volume



Fonte: Produção do próprio autor.

## 6.5 Ocorrência da execução e do período posterior à implementação das atividades

No decorrer das atividades com os alunos, o objetivo foi explorar o processo de ensino-aprendizagem ligado aos conceitos geométricos através de atividades práticas, em conformidade com as diretrizes da BNCC e ao Currículo do Espírito Santo. Estamos centrando nossos esforços no desenvolvimento das habilidades **EM13MAT201**, **EM13MAT309** e **EM13MAT504**, assim objetivando identificar as deficiências resultantes de um pós-pandemia e corrigi-las.

Para cada prática, foi realizado um flashback, com a finalidade de comparar a situação após o contato com a atividade, visando reforçar as habilidades desenvolvidas durante a intervenção pedagógica.

Ao longo da realização das atividades, implementadas no terceiro trimestre, foram avaliados diversos aspectos relevantes, incluindo a dinâmica de grupo dos estudantes, bem como sua postura, com ênfase primordial no conteúdo abordado e em suas aplicações práticas no dia a dia, resultando em uma experiência bem organizada e gratificante.

### 6.5.1 Ocorrências da atividade 1

Na primeira atividade, foi feita em sala de aula no coletivo. Um estudante ficou encarregado de medir e marcar as superfícies da caixa, enquanto os demais registravam as informações em seus cadernos, resultando em um resultado conjunto. Antes de realizar a atividade, foi realizada uma análise sobre figuras planas e sólidos geométricos, abordando seus componentes e a nomenclatura associada.

Durante a atividade, os alunos identificaram o formato da caixa, que é um paralelepípedo retângulo, assim sabendo medir e classificar suas faces. Com o conhecimento prévio sobre como calcular a área de um retângulo, não encontraram dificuldade em realizar a soma das áreas, encontrando a área da superfície da caixa. Mas alguns estudantes apresentaram dificuldade para chegar à fórmula geral necessária para calcular a planificação de um paralelepípedo retângulo, recebendo, assim, auxílio do professor.

Após a atividade prática, foi feito um resumo sobre o que aconteceu em sala de aula e se a atividade contribuiu para o entendimento do conteúdo. Os alunos compreenderam que a fórmula encontrada pode ser aplicada a diferentes dimensões de comprimento, altura e largura de um paralelepípedo. Foi sugerido que os alunos encontrassem a fórmula geral da área da superfície de um cubo, e apenas poucos não conseguiram.

### 6.5.2 Ocorrências da atividade 2

Na segunda atividade, os alunos se reuniram no pátio em grupos. Cada equipe teve a tarefa de criar um recipiente cúbico com dimensões de 1 $dm$. Para auxiliá-los na construção, foi fornecido um modelo. O propósito dessa confecção é mostrar ao aluno a expressão matemática que leva a determinar o volume de um paralelepípedo e também trabalhar as medidas de capacidade de um sólido.

Depois da conclusão da construção do cubo, em aula subsequente, foram realizadas medições utilizando líquidos para esses sólidos, entre outros. A constatação de que o cubo comporta um litro de água despertou a curiosidade nos alunos. Nenhum aluno tinha conhecimento dessa relação que $1l = 1dm^3 = 1000cm^3$.

Em seguida, o grupo recebeu a seguinte pergunta: "Quantos cubos são necessários para encher o aquário(comprimento, altura e largura com mesma medida de $30cm$) que está sobre a mesa?". Para realizar a tarefa, alguns grupos encheram de litro em litro, enquanto outros já conheciam a maneira de calcular o volume do cubo e do aquário, conseguindo assim realizar por divisão. Há também aqueles que tentaram encaixar o cubo dentro do aquário até alcançarem a quantidade desejada. Dessas três formas de realizar a tarefa, apenas um grupo não conseguiu achar a resposta, foi um grupo que tentou por encaixe.

Após a atividade prática, foi feito um resumo sobre o que aconteceu e uma revisão do volume do cubo e do paralelepípedo, ressaltando dessa maneira os elementos que constituem a abordagem da aprendizagem e analisando as concepções feitas pelos alunos. Uma avaliação da atividade foi realizada: “A atividade desempenhada contribuiu para a compreensão do conteúdo?”, todos os alunos responderam positivamente.

### 6.5.3 Ocorrências da atividade 3

Na Terceira atividade, realizamos uma atividade com abordagem no Princípio de Arquimedes. Os alunos se reuniram no pátio e foi colocado um aquário com água e uma pedra em cima de uma mesa, foi sugerido que eles encontrassem o volume da pedra. Nessa atividade, eles já possuíam o entendimento sobre o volume de um paralelepípedo.

Com a orientação da professora, a pedra foi colocada dentro do aquário, e foi levantada a questão sobre o que ocorreu com a água. Os alunos conseguiram compreender o processo usando volume. Nesse momento, eles mediram o comprimento e a largura do aquário e depois foi retirada a pedra para marcar o nível da água. Logo em seguida, colocaram de volta a pedra e marcaram esse nível. Calculando pelo volume final menos o volume inicial, encontraram a solução da resposta. Outra solução encontrada foi por meio da medida da elevação da água e das medidas do comprimento e largura do aquário. Toda ação foi registrada no caderno individual e durante a atividade, todos estiveram envolvidos e contribuíram para a solução do problema.

Após a atividade, foi narrada a história de Arquimedes e a coroa do rei, seguida de uma sugestão para que cada aluno elaborasse um relato sobre a experiência.

### 6.5.4 Ocorrências da atividade 4

Na quarta atividade, realizamos uma atividade com abordagem no Princípio de Cavalieri. Dentro da sala, foi colocada duas pilhas de folhas $A4$ de mesma quantidade em cima de uma mesa, uma com o formato de um paralelepípedo retângulo e outra com o formato de um paralelepípedo oblíquo, duas formas já conhecidas pelos alunos. Foi feita a seguinte pergunta: "Qual é o volume da pilha com o formato oblíquo?". Todos os alunos afirmaram que o volume é idêntico ao da outra pilha reta. Assim, um dos alunos se ofereceu para medir a pilha reta e determinar seu volume, levando à resposta da questão.

A próxima pergunta foi: "Por que eles acham que têm o mesmo volume, se têm formatos diferentes?", a resposta feita por todos os alunos foi "porque as pilhas têm a mesma quantidade de folhas."

Após essa ação, foi introduzido o conceito do Princípio de Cavalieri, em seguida, foi perguntado se a representação visual ajudou na compreensão do conteúdo ministrado, todos os alunos responderam positivamente.

# 7 Conclusão

O estudo do volume de sólidos geométricos é uma etapa crucial na formação matemática e técnica dos estudantes. Estabelecemos nesse trabalho as habilidades essenciais a aprendizagem dos alunos da segunda série, como resolução de problemas, abstração e pensamento lógico envolvendo o conteúdo de volume. Além disso, a compreensão do volume dessas figuras tridimensionais é vital para a aplicação prática em diversas áreas profissionais, contribuindo para uma educação completa e relevante.

A partir dos objetivos delineados inicialmente, fica evidente que o presente estudo alcançou plenamente suas metas. A investigação realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio, focada em sequência didática prática para o ensino de Matemática, mostrou-se eficiente na construção do conhecimento científico. Através das atividades práticas realizadas na Escola Estadual de Ensino Médio Pedro Paulo Grobério, foi possível observar um aumento significativo na participação ativa dos alunos, bem como na habilidade de trabalhar em grupo e aprimoramento do raciocínio mental .

Ao explorar como os conhecimentos científicos podem ser construídos pela atividade prática, o estudo conseguiu responder à questão da pesquisa proposta, comprovando que essa abordagem é válida e eficaz. Assim, as atividades desenvolvidas permitiram que os estudantes não só compreendessem melhor os conceitos matemáticos, mas também aplicassem esse conhecimento de maneira prática e significativa em suas vidas cotidianas.

Os resultados obtidos confirmam a hipótese de que as aulas práticas e/ou experimentais no ensino de Matemática contribuem significativamente para o desenvolvimento das habilidades cognitivas e práticas dos alunos, fomentando um aprendizado mais dinâmico e envolvente. Os dados analisados demonstraram que os alunos conseguiram internalizar e aplicar os conceitos de volume de sólidos geométricos, conforme preconizado pelo currículo escolar do Espírito Santo e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No que tange ao problema de pesquisa, ele foi solucionado com êxito. A atividade prática mostrou ser uma ferramenta poderosa e alfabetizadora no sentido amplo, capacitando os estudantes a resolver problemas matemáticos de forma lúcida e intuitiva. As atividades propostas, como a medição da capacidade, a aplicação do Princípio de Cavalieri e o uso do deslocamento da água para medir volumes de objetos irregulares, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos estudados.

Os desafios e limitações enfrentados durante a implementação das atividades foram também objeto de análise. Apesar de algumas dificuldades, como a necessidade de materiais específicos e o tempo de execução das atividades, as vantagens superaram em grande medida esses obstáculos. A relevância social e educacional deste estudo foi evidenciada pela capacidade de engajamento dos alunos, a melhoria do desempenho acadêmico e a potencialidade de influenciar positivamente práticas pedagógicas e políticas educacionais.

Portanto, conclui-se que os objetivos deste projeto foram atingidos com sucesso. A metodologia de atividades práticas no ensino de Matemática revelou-se uma estratégia pedagógica eficaz, capaz de transformar a aprendizagem em um processo ativo e significativo. Estes resultados não apenas validam a importância de métodos pedagógicos inovadores, mas também reafirmam o papel crucial da experimentação como uma prática sustentável e influente na modernização do ensino, conforme defendido por autores e documentos teóricos consultados, como Pozo (1998), Andrade e Massabini (2011), entre outros. Este trabalho poderá servir de referência para futuras pesquisas e implementações práticas em diversas regiões educacionais, contribuindo para o desenvolvimento de cidadãos críticos, criativos e colaborativos, prontos para enfrentar os desafios do século XXI.

# Referências

ANDERSEN, K. Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for history of exact sciences*, Springer-Verlag, v. 31, p. 291–367, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

BARBOSA, V. C.; BREITSCHAFT, A. M. S. Um aparato experimental para o estudo do princípio de arquimedes. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 28, p. 115–122, 2006. Citado na página 31.

BENK, P.; FIGUEIREDO, E. B. de. Arquimedes e a esfera. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 31.

BNCC. Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

BONJORNO, J. R. *Prisma matemática : geometria : ensino médio : área do conhecimento :matemática e suas tecnologias*. [S.l.]: FTD, São Paulo, 2020. Citado na página 36.

BRASIL, M. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. *Ministério da Educação Brasília*, 2000. Citado na página 28.

BRASIL, M. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. *Ministério da Educação e cultura - Secretaria da Educação Básica*, 2002. Citado na página 14.

Currículo do Espírito Santo. Currículo capixaba. *SEDU*, 2023. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/>. Citado na página 30.

EVES, H. *Introduçãoção à históriaória da matemática*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 16, 20, 22, 24 e 25.

GUEDES, A. d. S. et al. Evolução no cálculo de áreas de figuras planas: de arquimedes a newton. Universidade Federal da Paraíba, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

GUIMARÃES, A. O velho princípio de arquimedes. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 16, n. 2, p. 170–175, 1999. Citado na página 31.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. [S.l.]: Atual, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 35.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 33, 34, 35, 36, 37 e 39.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1999. v. 2. Citado 5 vezes nas páginas 33, 35, 36, 37 e 52.

LOURENÇO, M. M. V. R. P. *Hidrostática: principio de arquimedes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Beira Interior (Portugal), 2014. Citado na página 31.

MACHADO, L. L. M. d. C. O princípio de cavalieri e suas aplicações: Áreas e volumes. 2021. Citado na página 36.

MAGNAGHI, C. P.; ASSIS, A. K. O método de arquimedes: análise e tradução comentada. *Montreal: Apeiron*, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 16, 20 e 21.

MARTINS, R. d. A. Arquimedes e a coroa do rei: Problemas históricos. Instituto de Física - UNICAMP, 2000. Citado na página 19.

NÓS, R. L.; TAVARES, M. C. F. Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática do ensino médio. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 8, n. 1, 2021. Citado na página 20.

PINTO, A. Os indivisíveis e o infinito no trabalho de bonaventura cavalieri. 2012. Citado na página 24.