UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

MAURÍCIO EMANUEL FERREIRA COSTA

MÉTODOS RESOLUTIVOS DE APLICAÇÕES COM MATRIZES RETANGULARES E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EUCLIDIANAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

ABAETETUBA-PA

2025

MAURÍCIO EMANUEL FERREIRA COSTA

MÉTODOS RESOLUTIVOS DE APLICAÇÕES COM MATRIZES RETANGULARES E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EUCLIDIANAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal de Abaetetuba-PA, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

ABAETETUBA

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

E53m Emanuel Ferreira Costa, Maurício.
MÉTODOS RESOLUTIVOS DE APLICAÇÕES COM MATRIZES RETANGULARES E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EUCLIDIANAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA / Maurício Emanuel Ferreira Costa. — 2025.
82 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2025.

1. determinante, matriz, método do cadarço, cálculo de áreas planas. . I. Título.

CDD 510

MAURÍCIO EMANUEL FERREIRA COSTA

MÉTODOS RESOLUTIVOS DE APLICAÇÕES COM MATRIZES RETANGULARES E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EUCLIDIANAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal de Abaetetuba-PA, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Aprovada:

BANCA EXAMINADORA

___

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa (Orientador)
Universidade Federal de Abaetetuba-PA (UFPA)

___

Prof. Dr. Wilson Rodrigues Oliveira
Membro externo – CUNTINS – FAMAT (Cametá)

___

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Membro interno – PROFMAT

___

Prof. Dr. Abel Ferreira Gomes Neto
Membro externo – IFPA

A Deus, por guiar os meus caminhos, minhas decisões, meus projetos, por iluminar toda a trajetória dos meus estudos. Aos meus pais Amarildo e Mercês, a minha esposa Sarayane, meu filho Saymon, meu orientador Prof. Dr. José Francisco, aos meus irmãos Murilo e Amanda pelo apoio, enfim, a toda minha família que me muniu de motivações para concluir essa jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que nas horas mais difíceis me concedeu forças que permitiu a conclusão deste curso.

Aos meus pais Amarildo e Mercês pelo apoio, incentivo e dedicação que contribuíram para que eu pudesse buscar o caminho do meu sucesso.

À minha esposa Sarayane que prestou apoio, em todos os momentos, desde o cuidado no momento delicado da minha saúde durante a trajetória do curso até o cuidado de nosso filho Saymon enquanto eu estudava e produzia.

A todos os meus familiares que me incentivaram e apoiaram de alguma forma.

A todos os professores por proporcionarem o meu aperfeiçoamento acadêmico para a minha formação profissional que fez a diferença na vida dos alunos e da sociedade como um todo.

Ao Prof. Dr. Francisco por me orientar neste trabalho, durante a elaboração com esclarecimentos, correções e sugestões, e por demonstrar compreensão e paciência em muitos momentos durante dias e noites.

Ao Prof. Dr. Manuel Costa, o qual tenho como inspiração profissional, por sua participação coordenador do PROFMAT em 2023, pela maneira acolhedora com que sempre tratou os alunos e pela grande ajuda no curso na trajetória de nossa formação.

Por fim, todos que de maneira direta, ou indireta, contribuíram para a realização e conclusão deste sonho.

Com essas palavras estimo meus mais sinceros agradecimentos e dedico esta vitória a minha família que sempre acreditou em mim.

RESUMO

O tema central dessa dissertação corresponde a integração de conceitos matemáticos, como a geometria plana e o uso de matrizes no cálculo de áreas, no ensino da matemática. Busca-se destacar a relevância histórica, pedagógica e prática desses tópicos, promovendo uma abordagem contextualizada, interdisciplinar e conectada ao cotidiano dos estudantes. Os cálculos de áreas de figuras planas podem ser determinados usando a geometria plana e se baseando em axiomas e teoremas que evidenciam a obtenção de formulações matemáticas. Nesse trabalho, no entanto, usar-se-á a matriz retangular, isto é, matrizes formuladas por n linhas e duas colunas como técnica de obter os mesmos resultados. A técnica consiste em aplicar o determinante para obter a área de qualquer figura plana e desenvolver uma maneira elegante e menos trabalhosa de obter áreas das figuras planas, diferentemente, o que se observa na maioria dos livros didáticos de níveis fundamental e médio. A técnica de usar o determinante é geral, desde que seja restrita a duas dimensões, razão pela qual se usam duas colunas e aumentando o número de linhas da matriz que depende do número de coordenadas. Ou seja, se a figura possui 8 vértices, a matriz será formada por duas colunas e 9 linhas, onde o primeiro e o último vértice se repetem para obtenção da área da referida figura. Essa técnica torna interessante para ser trabalhada tendo em vista que o aluno sai do tecnicismo sem precisar memorizar as fórmulas das áreas das principais figuras planas que ele é induzido a operar nas diagonais principal e segundaria do determinante o que representa a vantagem de obter a área da figura plana que se pretende determinar. Outro fato, é construir essa figura plana no plano cartesiano, reconhecendo a coordenada de cada vértice que serão os elementos da matriz retangular, mas esse desenvolvimento não torna complicado diante de exercícios e aplicações que podem ser esclarecidos pelo professor no processo de ensino e aprendizagem. Conclui-se a pesquisa considerando que a técnica apresentada contribui para um melhor entendimento nos cálculos de áreas de figuras planas além de proporcionar ao aluno a vantagem de utilizar a matriz retangular no cálculo de áreas de vértices conhecidos.

Palavras-chave: determinante, matriz, método do cadarço, cálculo de áreas planas.

ABSTRACT

The central theme of this dissertation corresponds to the integration of mathematical concepts, such as plane geometry and the use of matrices in calculating areas, in the teaching of mathematics. It seeks to highlight the historical, pedagogical, and practical relevance of these topics, promoting a contextualized, interdisciplinary, and everyday-life-connected approach for students. The calculations of areas of plane figures can be determined using plane geometry and relying on axioms and theorems that demonstrate the derivation of mathematical formulations. In this work, however, rectangular matrices formed by n rows and two columns—will be used as a technique to achieve the same results. The technique involves applying the determinant to calculate the area of any plane figure, developing an elegant and less labor-intensive method for determining the areas of plane figures, unlike what is observed in most elementary and high school textbooks. The determinant method is general, as long as it is restricted to two dimensions, which is why two columns are used, and the number of rows in the matrix increases depending on the number of coordinates. For example, if the figure has 8 vertices, the matrix will consist of two columns and 9 rows, where the first and last vertices are repeated to calculate the area of the figure. This technique proves interesting for classroom work, as it allows students to move away from technical memorization of area formulas for common plane figures. Instead, they are guided to operate on the principal and secondary diagonals of the determinant, which represents the advantage of determining the area of the intended plane figure. Another point is constructing this plane figure on the Cartesian plane, identifying the coordinates of each vertex that will form the elements of the rectangular matrix. This process is not overly complicated when accompanied by exercises and applications that the teacher can clarify during the teaching and learning process. The research concludes by considering that the presented technique contributes to a better understanding of area calculations for plane figures, while also providing students with the advantage of using rectangular matrices to calculate areas for known vertices.

Keywords: determinant, matrix, shoelace method, plane area calculation.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

A geometria, encontra-se presente no cotidiano das pessoas nos mais diferentes comprimentos e formas cujas áreas podem ser calculadas a partir de relações matemáticas que envolvem problemas geométricos e recursos algébricos decorrentes das geometrias analítica (A.; Callioli, C.A; Feitosa, M.O A, 1978) e plana (DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, 2005) construídas a partir de entes intuitivos e sem definição formal, existentes na imaginação das pessoas. As formas geométricas possuem relações métricas que podem possibilitar o cálculo de área limitada pela região côncava ou convexa.

A geometria analítica, desenvolveu-se para proporcionar um estudo viável para a solução de problemas geométricos analítica (A.; Callioli, C.A; Feitosa, M.O A, 1978), utilizando-se dos recursos algébricos em que o estudo da geometria plana ganha um importante aliado, o cálculo do determinante de uma matriz, que contribui significativamente na solução de problemas analíticos para facilitar ainda mais o entendimento de figuras conhecidas no meio em que se vive.

A geometria plana tem outro critério de solução sem o uso das expressões de áreas planas euclidiana (DOLCE, 2005).

. Nesse caso, baseia-se o estudo em comprimentos de base e altura o que conduz a expressões matemáticas de triângulo, quadrado, trapézio e outras figuras planas conhecidas na literatura (BARBOSA, 2012). Do ponto de vista didático (FACCHINI, 2006) e com o uso da geometria plana é possível obter expressões sem a necessidade de conhecer as coordenadas dos vértices dessas referidas figuras.

Nessa pesquisa, procura-se realizar uma abordagem com cálculo de figuras planas considerando coordenadas de vértices. A dedução de expressões que permitem calcular as áreas das figuras geométricas planas plotadas em gráficos: triângulo, quadrado, retângulo, losango, trapézio e círculo, utilizando as coordenadas dos vértices na forma do determinante de uma matriz retangular ou em termo mais geral, quando se omite a terceira coluna do determinante.

A ideia de realizar essa abordagem didática, constitui uma base crucial para que o professor aplique nas aulas de geometrias plana e analítica esse conhecimento o que, de certa forma, pode auxiliar na compreensão e obtenção das áreas das referidas figuras planas. Vale, no entanto salientar que não se trata de um método novo visto que existem livros textos que fazem essa abordagem.

A ideia de trabalhar diferentes conteúdos, como estudo de matrizes, determinantes e teoria de figuras planas euclidianas para desenvolver os mesmos resultados para as áreas de figuras planas, pode ser justificável, considerando as três abordagens distintas, pela necessidade de explorar diferentes perspectivas e aplicações desse conceito matemático. O método do cadarço, por exemplo, pode ser amplamente utilizado, por exemplo, na área da tecnologia da informação e no geoprocessamento, permitindo o cálculo eficiente da área de polígonos simples a partir das coordenadas de seus vértices.

Justifica-se ainda, a utilização de matrizes no cálculo de áreas planas permite que os estudantes relacionem conceitos abstratos da álgebra linear com aplicações práticas na geometria. Isso não apenas fortalece as habilidades matemáticas, mas também promove o pensamento lógico e o raciocínio espacial, fundamentais para diversas áreas do conhecimento. Compreender o contexto histórico da geometria plana destaca sua relevância no desenvolvimento da matemática como ciência. Essa abordagem auxilia os alunos a valorizar o papel das culturas antigas, como a grega, no surgimento dos fundamentos geométricos usados até hoje.

O alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é essencial para garantir que o ensino da geometria plana esteja integrado aos objetivos educacionais nacionais. A BNCC destaca habilidades como o pensamento crítico e a resolução de problemas, que a geometria promove através de suas aplicações práticas.

Através dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a geometria é reconhecida como uma ferramenta didática para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade. Seu estudo incentiva a interdisciplinaridade, ligando conceitos geométricos à física, engenharia, artes, entre outras áreas. A matemática é uma ciência indispensável no cotidiano por sua aplicação prática, como no gerenciamento financeiro, na arquitetura e em tecnologias modernas. Ensinar sua relevância conecta o conhecimento teórico à vida prática, motivando os estudantes. Introduzir o formalismo matemático auxilia na construção de uma base sólida para compreender conceitos mais avançados. Ele contribui para que os alunos interpretem e resolvam problemas com precisão, além de explorar o rigor matemático.

Ensinar notação matricial e determinantes proporciona aos alunos ferramentas fundamentais e versáteis no cálculo de áreas. Esse conhecimento também abre portas para outros campos da matemática e da ciência, como álgebra linear e computação. Esses temas promovem uma abordagem integral ao ensino da matemática, ligando o conteúdo à história, ao cotidiano e às competências exigidas no mundo atual.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Geral

Compreender a matriz retangular para cálculo de áreas planas e sua aplicação no ensino de matemática**,** proporcionando um ensino da matemática à resolução de problemas práticos e teóricos, fomentando a utilização de temas abordados pela BNCC.

1.1.2. Específicos

✓Desenvolver os conceitos básicos de matrizes, identificar e definir uma matriz retangular além de reconhecer as propriedades e operações como a adição, a subtração e a multiplicação.

✓Aplicar matrizes no cálculo de áreas planas de diferentes figuras, como retângulos, triângulos e polígonos irregulares, além de resolver problemas práticos que envolvam o cálculo de áreas utilizando matrizes.

✓Mostrar as aplicabilidades em problemas contextualizados envolvendo áreas de figuras planas com cálculo de matrizes retangulares.

Para melhor abordar o trabalho, encontra-se dividido em três capítulos.

No **capítulo 2** será verificado contexto histórico da geometria plana euclidiana e suas primeiras aplicações, a origem da geometria, contribuições de Euclides, AS primeiras aplicações, a BNNC no ensino da geometria plana e aplicações, os parâmetros curriculares nacionais e o estudo da geometria e relevância da matemática como ciência para o ensino do cotidiano.

No **capítulo 3,** aborda-se o cálculo de áreas de figuras planas utilizando matrizes e determinantes, formalismo matemático de figuras planas, cálculo de áreas de figuras planas, aplicação das áreas de figuras planas, notação matricial e determinante para o cálculo de áreas planas, determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem, cálculo de áreas de figuras planes e suas extensões usando a notação de determinante, aplicações em parábolas, em área quadrada e elipses.

No **capítulo 4**, enfatizam-se as aplicações envolvendo as técnicas de áreas de figuras planas matricial e euclidiana, contextualizadas, culminando com a conclusão e as referências.

2. CAPÍTULO 2: CONTEXTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA PLANA EUCLIDIANA E SUAS PRIMEIRAS APLICAÇÕES

A Geometria Euclidiana tem suas raízes na antiguidade, consolidada pela obra "Os Elementos", de Euclides, que sistematizou axiomas e teoremas fundamentais. Suas aplicações iniciais incluíam a medição de terras e construções arquitetônicas, sendo indispensável para o desenvolvimento da civilização. No ensino, compreender esse contexto histórico permite ao aluno visualizar a evolução do pensamento matemático e sua relevância prática. Dessa forma, a geometria plana não é apenas um conjunto de regras, mas um campo do conhecimento com implicações concretas no cotidiano, incentivando o raciocínio lógico e a resolução de problemas. Esse presente capítulo enfatiza essa importância histórica que eleva a melhor compreensão da geometria euclidiana.

2.1. A ORIGEM DA GEOMETRIA

A origem da geometria (BRITO, 2005), que significa “medir a terra” em grego, está ligada às necessidades cotidianas. Atividades como dividir terras férteis ao longo dos rios, construir casas e prever o movimento dos astros sempre dependeram de operações geométricas. Documentos das antigas civilizações egípcias e babilônicas mostram um avançado conhecimento de geometria, geralmente relacionado à astronomia. No entanto, foi na Grécia que grandes matemáticos gregos como Euclides, Arquimedes, Apolônio e apenas partes de um trabalho de Hipócrates, deram uma forma definitiva à geometria. No século V a.C., Proclo, ao comentar os "Elementos" de Euclides, referiu-se a Tales de Mileto como o introdutor da geometria na Grécia, conhecimento que ele trouxe do Egito.

Além dos matemáticos já citados, temos Pitágoras que é conhecido por um importante teorema sobre o triângulo retângulo, que introduziu um novo conceito de demonstração matemática. A escola pitagórica do século VI a.C., com seus conhecimentos envoltos em mistério, funcionava como uma seita filosófica. Por outro lado, os "Elementos" de Euclides introduziram um método consistente que tem contribuído para o progresso das ciências por mais de vinte séculos. Esse sistema axiomático começa com conceitos e proposições aceitos sem demonstração (postulados ou axiomas) e, a partir deles, constrói três conceitos fundamentais - ponto, reta e círculo

- e cinco postulados que formam a base da geometria euclidiana, que ainda é útil hoje, apesar da existência de outras geometrias.

2.2. CONTRIBUIÇÕES DE EUCLIDES

Certamente, a construção da escrita foi um avanço significativo para a humanidade que se deu por volta de 3500 a.C., aliado a isso, devido a demanda da agricultura para a subsistência, surgiu a necessidade de se desenvolver um sistema que pudesse se utilizar do artifício da contagem e junto a ela as operações fundamentais. Um dos primeiros momentos históricos da noção de geometria se deu devido a necessidade de medição de terras que era praticada pelos povos para as mais diversas ocasiões, sendo elas o cultivo, a construção de templos e, também, para prever eventos astronômicos como faziam os Egípcios.

Mais adiante, em aproximadamente 300 a.C., o matemático grego chamado Euclides de Alexandria reuniu esses conhecimentos, formalizando e organizando-os em um sistema lógico e dedutivo em 13 livros chamados “Os Elementos”. Graças aos axiomas e postulados aliados as noções de ponto, linha e plano a carência do homem de efetuar medidas com máxima precisão possível dos corpos que o cercavam, pode ser sanada graças a base científica sustentada nos livros.

2.3. AS PRIMEIRAS APLICAÇÕES

Com a fundamentação da geometria feita pelo matemático grego de Alexandria, a geometria pode ser amplamente utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento da época. Um dos grandes marcos foi na arquitetura e na engenharia: a construção de aquedutos, estradas e edifícios públicos no império bizantino como a Basílica de Santa Sofia.

Mais tarde na idade média, do século V ao XV, a geometria passou a ser ensinada nas escolas catedrais e nas primeiras universidades europeias, onde lá, novos matemáticos puderam fazer suas contribuições ampliando e fundamentando ainda mais esse estudo. Um dos principais contribuintes foi o matemático Al-Khwarizmi, o qual difundiu através do livro O Livro Compendioso sobre Cálculo por Completamento e Balanço, que traria métodos de resoluções de equações lineares e quadráticas a conhecida álgebra. Além disso, popularizou o sistema numérico hindu-arábico, juntamente com o matemático Leonardo de Pisa, que inclui os números de 0 a 9, o qual revolucionou a matemática e ainda é o mais utilizado até os dias atuais.

Outro contribuinte dessa era foi o matemático citado Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Suas contribuições estiveram presentes no livro Liber Abaci (1202) que introduziu os num erais hindu-arábicos e o sistema de numeração posicional, além de popularizar a importante sequência de Fibonacci, que inicia com 0 e 1 e cada número subsequente é o resultado da soma dos dois anteriores, que mais tarde viria a explicar fenômenos da formação do universo através da geometria. A tabela (tabela 1) mostra as contribuições e datas dos principais filósofos e matemáticos que deram significativos avanços na área da geometria.

Tabela1: Contribuições e avanços dos principais filósofos ou matemáticos na área da geometria

Filósofos	Contribuições	Datas
Pitágoras	Conhecido pelo Teorema de Pitágoras, que estabelece que em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados	570 - 495 a.C.
Euclides	Autor de "Os Elementos", um dos textos mais influentes na história da matemática, que sistematizou a geometria clássica	Acerca de 300 a.C.
Arquimedes	Desenvolveu métodos para calcular áreas e volumes de figuras geométricas e é conhecido pelo Princípio de Arquimedes	287 - 212 a.C.
René Descartes	Introduziu a Geometria Analítica e o Plano Cartesiano, que permite a representação de pontos e figuras geométricas usando coordenadas	1596 - 1650
Carl Friedrich Gauss	Fez contribuições significativas para a Geometria Não Euclidiana e a Teoria dos Números	1777 - 1855
Henri Poincaré	Conhecido como o "pai da topologia", fez contribuições importantes para a Geometria Algébrica e a Topologia	1854 - 1912
Maryam Mirzakhani	Primeira mulher a receber a Medalha Fields, fez contribuições importantes para a Geometria Hiperbólica e Espaços de Moduli	1977 - 2017

Fontes: matemáticos famosos e suas descobertas que transformaram o mundo - Maiores e Melhores; ; A História Dos Grandes Matemáticos E Suas Contribuições Para A Humanidade - Fc Noticias; Os Matemáticos Famosos e Suas Contribuições para o Mundo Economath.

2.4. A BNNC NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA E APLICAÇÕES

Uma das competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, presentes na BNCC (2018, p. 265), é utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. Diversas são as habilidades que envolvem o uso de tecnologias no ensino de geometria, do ensino básico (Tabela 2).

Tabela 2: Habilidades para o uso de tecnologias no ensino de Geometria

Códigos	Habilidade e Competências
(EF03MA15)	Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
(EF03MA16)	Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.
(EF05MA17)	Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
(EF05MA18)	Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.
(EF06MA21)	Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
(EF06MA27)	Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e / ou tecnologias digitais.
(EM13MAT307)	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT309)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT509)	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT307)	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT309)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT509)	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Fonte: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf

Um dos focos principais da BNCC aplicada ao ensino básico, é a construção da matemática aplicada a realidade de diferentes culturas e contextos. Em consequência disso, quando o contexto é o pilar, é preciso levar em consideração todo o cotidiano dos discentes, as exigências de conhecimento para o mercado de trabalho atual, a potência das redes sociais que hoje desempenham uma importante influência, entre outros fatores.

Assim, torna-se evidente, portanto, a importância dos recursos de tecnologias digitais, o amplo acesso à internet, o uso dos aplicativos que auxiliam no processo de ensino aprendizagem entre outros recursos que servem tanto para dar utilidade quanto a continuidade ao desenvolvimento das ferramentas matemáticas estudadas durante o ensino básico além do pensamento computacional que se evidencia dentro das diretrizes curriculares presentes na BNCC.

2.5. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E O ESTUDO DA GEOMETRIA.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que os conceitos geométricos constituem uma parte importante do currículo de matemática do ensino primário porque através deles o aluno desenvolve uma forma especial de pensar que lhe permite compreender, descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. O estudo da geometria é terreno fértil para a resolução de situações-problema e é um tema de natural interesse para os alunos.

A utilização de conceitos geométricos facilita o aprendizado sobre números e medidas porque estimula os alunos a observarem, perceber semelhanças e diferenças e reconhecer padrões (BRASIL, 1998, p. 51). Portanto, refletindo a atitude de alguns profissionais de que o ensino da matemática, e da geometria em particular, ainda não é relevante para o cotidiano dos alunos, surgiu a proposta de realizar trabalhos de geometria em hortas comunitárias.

> O ensino de geometria, tal como se apresenta na maioria dos livros didáticos, parece ainda seguir o modelo euclidiano. Começa de premissas e definições como ponto, reta e plano, a partir das quais estrutura-se o conhecimento geométrico. A geometria apresentada e estruturada apenas como um conjunto de leis bem determinadas sempre me incomodou, pois assusta e faz com que os alunos tenham a falsa idéia de que nunca se relacionaram com absolutamente nada a respeito do que estão aprendendo (CRISTOVÃO, 2001, p. 51).

É sabido que o estudo da geometria não tem sido bem explorado e este tema é quase sempre abordado no final do ano, nos últimos dois meses. Um dos fatores para tal ocorrência é devido a alguns professores que têm dificuldade com o conteúdo, ora porque não o dominam, ora porque preferem outros conteúdos que consideram pré-requisitos do ensino superior, sem contar que os alunos estão alheios às atividades que lhes são apresentadas e sentem que essas atividades são inconsistentes com a realidade que vivenciam.

Como resultado, os educadores insistem que as aulas de geometria sejam apenas uma repetição do material dos livros didáticos, fazendo com que sejam ignorados ou mesmo descartados. Ensinar geometria exige que os professores a vejam como uma fonte inesgotável de ideias que inspira, estimula, estimula o raciocínio e é desafiadora em termos de conceituação e das competências e habilidades exigidas pela disciplina. Porque como todos sabemos,

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 51), o estudo da exploração do espaço e da forma a partir de objetos do mundo físico, obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artefatos é essencial para que os alunos possam fazer conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento. Diante disso, criou-se o impulso para explorar melhor a geometria, tentando demonstrar na prática o que os livros didáticos traziam para a mesa.

2.6. A RELEVÂNCIA DA MATEMÁTICA COMO CIÊNCIA PARA O ENSINO DO COTIDIANO

Para descobrir que a matemática está presente no dia a dia, consiste em verificar como ela está relacionada nos fenômenos cotidianos e essa observação tem como constatar a necessidade de o ensino focar na formação de cidadãos que utilizam cada vez mais conceitos matemáticos contextualizado. Nesse sentido, é necessário que o professor consiga conectar o conteúdo ministrado em sala de aula com a realidade em que vive e se tornar um promotor dessa transformação da realidade, como citar o autor a seguir,

> [...] nesse cenário, planejar um curso passa a depender do cidadão que se quer formar. E como ninguém tem gavetas de conhecimento na cabeça, onde repousam isolados os conteúdos, a única saída é planejar de forma coletiva. Há que buscar nexos com as demais áreas e entre os próprios conteúdos da disciplina. (FALZETTA, 2001, p. 54–55).

Os professores não devem esquecer que os alunos precisam compreender a inter-relação entre o conhecimento matemático e a realidade em que está inserido. Acredita-se que esta seja a melhor forma de dar sentido ao estudo do tema como importante ferramenta para a compreensão do mundo e de suas realidades. A matemática não pode mais ser pensada como uma sequência linear de informações, mas como uma teia de relações.

Não se pode mais ficar satisfeitos com o que os livros didáticos proporcionam, que se limita ao ensino pobre e sem sentido, precisamos tomar medidas para demonstrar que o ensino da matemática pode e deve ser inovador e desafiador, capaz de quebrar barreiras desconhecidas. É preciso mostrar o que é a matemática, o que acontece atrás da porta,

Nesse caso, compreende-se o papel do professor no ensino de matemática, pois nesse contexto, a realidade pode abrir mostra que novos horizontes de e ensino fazendo que os professores conseguem ousar em suas aulas, sendo mediadores, facilitadores, avaliadores e organizadores desse conhecimento que é a matemática. O autor a seguir esclarece que o professor deve articular metodologia de ensino capazes de motivar e prender a atenção dos alunos,

> [...] para conseguir a atenção dos alunos, é preciso empregar palavras e muitas palavras. Esquecer a aula tradicional, aquela em que determinado ponto da matéria é apresentado no quadro-negro, explicado e, em seguida, praticado por meio de exercícios. Por ser mecânico, esse tipo de aprendizado não avalia se o estudante compreendeu ou não o conhecimento. Em vez disso, procure surpreender a classe. Mostre o conteúdo fazendo uso de muita conversa e abrindo espaço para os estudantes (PCN, Edição Especial, p. 49-50)

É nessa perspectiva, verifica-se que a matemática não acontece apenas dentro da sala de aula, uma vez que é preciso ligar a prática com a teoria a ser abordada entre esses dois vieses.

CAPÍTULO 3: CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS UTILIZANDO MATRIZES E DETERMINANTES.

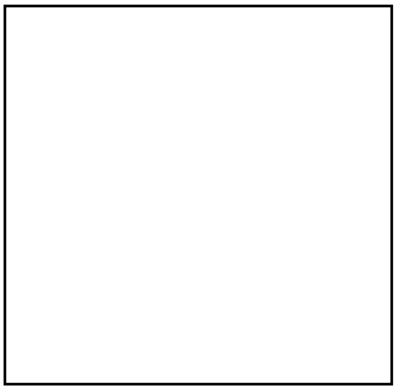
Antes de introduzir a fundamentação teórica, é válido ressaltar que a notação utilizada nesta monografia é a de Barbosa (1995), notação esta que consta na maior parte das literaturas que englobam a geometria euclidiana plana, enquanto as definições, essas são objetos dos elementos de Euclides. Assim, denotamos os pontos e os segmentos pelo alfabeto latino. A conexão com o referencial teórico se torna evidente, uma vez que os conceitos de matrizes, determinantes e a teoria do cadarço fornecem um formalismo matemático rigoroso para o cálculo de áreas em geometria plana.

Essa abordagem não apenas reforça o entendimento dos alunos sobre esses conceitos, mas também amplia sua capacidade de resolver problemas aplicados, consolidando a matemática como uma ferramenta essencial no ensino e na prática profissional. O estudo da matriz retangular para o cálculo de áreas planas e sua aplicação no ensino de matemática demonstrou-se uma abordagem promissora para a resolução de problemas geométricos. Esse contexto permitiu uma análise sistemática das áreas de figuras planas, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Além disso, a teoria do cadarço se mostrou eficaz na determinação de áreas em problemas diversos.

3.1 FORMALISMO MATEMÁTICO DE FIGURAS PLANAS

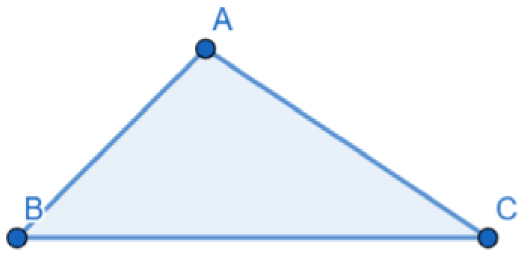
A combinação de um polígono com a sua região interna é chamada de superfície do polígono. A medida dessa superfície é representada por um número real positivo e não nulo que recebe o nome de área do polígono. Para medir essa superfície, precisamos compará-la com uma unidade de área, essa unidade é uma figura (Figura 1) de tamanho unitário, ou seja, com larguras e comprimentos iguais a 1 (um). A partir disso, pode-se determinar quantas vezes essa figura unitária se encaixa na região que se quer medir. Qualquer região quadrada de dimensão 1, apresentará a área de valor unitário.

Figura 1: Medida de área de um quadrado de lado unitário.



A região triangular (Figura 2) é a superfície delimitada por segmentos que determinam os lados de um triângulo, chamado de fronteira da região triangular.

Figura 2: Triângulo de vértices A, B e C.



3.1.1 Elementos do Triângulo

Os elementos de um triângulo são componentes fundamentais que definem essa figura geométrica. Um triângulo ABC é formado por três lados, três vértices e três ângulos internos, quais sejam eles:

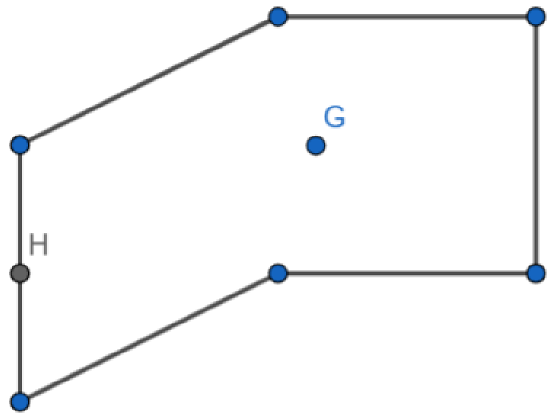
i) Lados, ou também chamados de segmentos: $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

ii) Vértices, ou também chamados de pontos: A, B e C

iii) Ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$

Todo ponto que não pertence a fronteira delimitada pelos segmentos do triângulo é chamado de interior a região triangular. Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que não possuem pontos em comum.

Figura 3: Região poligonal delimitada por vértices.



A noção de área de uma região poligonal é introduzida a partir dos seguintes axiomas enunciados no quadro (quadro 3).

Quadro 3: Os principais axiomas euclidianos**;**

Axiomas	**Enunciado**
1º Axioma	A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.
2º Axioma	Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então, a sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
3º Axioma	Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.
4º Axioma	Se ABCD é um retângulo, então, a sua área é dada pelo produto (AB) · (BC).

Fonte: Adaptado do livro “os elementos” de Euclides

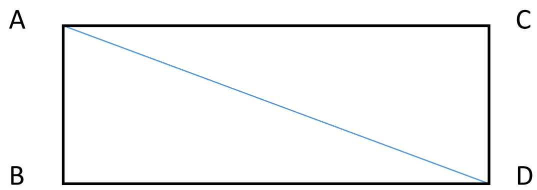
Com base nesta fundamentação, é possível calcular as áreas das regiões poligonais simples que são fundamentais ao estudo da geometria.

3.1.2 Quadriláteros

Quadriláteros são figuras geométricas planas que possuem quatro lados. Esses lados podem ter comprimentos e ângulos variados, além de receberem as propriedades de possuírem apenas duas diagonais e a soma dos ângulos internos ser igual a 360º.

Demonstração:

Dado um quadrilátero ABCD qualquer, podemos subdividi-lo em dois triângulos, facilmente traçando uma de suas diagonais (AC ou AD), como na figura:



Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale exatamente 180° (DOLCE, OSVALDO, 2013)

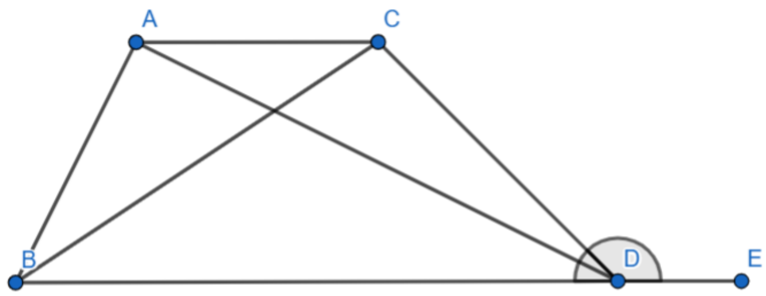
logo, como subdividimos em dois triângulos, temos:

$$2 \times 180° = 360°$$

Assim, como qualquer quadrilátero possui uma diagonal, temos que essa propriedade funciona para qualquer quadrilátero. Como queríamos demonstrar.

A relação abaixo evidencia as características dos elementos de um quadrilátero:

Figura 4: Trapézio qualquer com diagonais e ângulo externo traçado.



a) Lados: São os segmentos de reta que contornam o quadrilátero $ABCD$, AB, AC, CD e DB.
b) Vértices: São os pontos de encontro entre dois lados, A, B, C e D.
c) Ângulos Internos: São os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um quadrilátero, $B\hat{A}C$, $B\widehat{D}C$, $D\hat{C}A$, e $A\hat{B}D$.
d) Ângulos Externos: São ângulos formados pelo prolongamento dos lados de um polígono. Um ângulo externo sempre é suplementar ao ângulo interno adjacente a ele. Na figura, $C\widehat{D}E$ é ângulo externo.

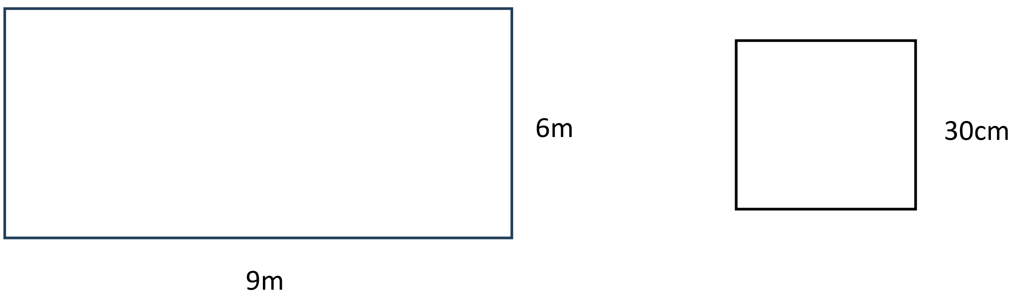
e) Diagonais: São segmentos de reta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos de um polígono. Dessa maneira, são os segmentos de reta que ligam dois vértices e que, ao mesmo tempo, não são lados AD e BC.

3.2 CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

O conhecimento de áreas de figuras planas possui uma grande utilização prática. Para melhor compreender a aplicabilidade, considere que um pedreiro que pretende azulejar uma sala retangular de lados 6m e 9m. O pedreiro quer utilizar lajotas de dimensões quadradas de 900cm^2, ou seja, de lado 30cm. Com base nesse enunciado, é possível ver quantas lajotas o pedreiro precisa para preencher a área retangular;

Solução:

Dado o esquema da figura da sala de formato retangular e a lajota de formato quadrado com suas devidas medidas



A solução para esse problema requer dois passos. O primeiro é necessário que saibamos quantas lajotas cabem na região inferior da sala, levando em consideração que 9 metros equivalem a 900 centímetros, assim podemos calcular quantas lajotas cabem nessa medida:

$$\frac{900}{30} = 30,$$

em outras palavras, em 9 metros de comprimento podemos encaixar 30 lajotas.

Vejamos agora quantas lajotas cabem em 6 metros sabendo que 600 centímetros é a medida equivalente:

$$\frac{600}{30} = 20.$$

Para finalizarmos, basta que multipliquemos os dois valores e encontraremos a quantidade de lajotas necessárias para preencher todo o quarto, assim:

$$30 \times 20 = 600,$$

600 lajotas são necessárias para preencher o quarto.

O enunciado trouxe a dimensão quadrada de cada uma lajota que equivale a 900 cm², assim podemos calcular a dimensão quadrada do quarto, sabendo que nele cabem exatamente 600 lajotas:

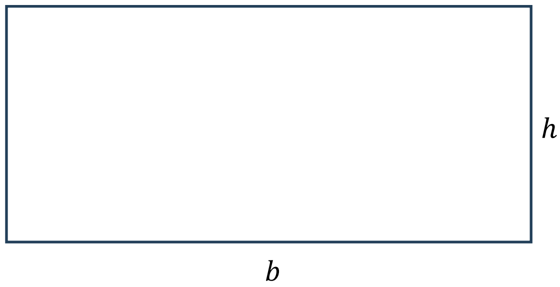
$$600 \times 900 = 540.000\ cm^2.$$

Retornando a unidade de metros teremos $54\ m^2$. A partir dessa problemática, constrói-se a noção intuitiva do cálculo da área de uma figura plana.

3.2.1 Retângulo

A área de um retângulo é dada pelo produto das duas dimensões: base e altura. Esse cálculo definirá o preenchimento total da figura e é a partir dele que se calcula as demais áreas.

Figura 5: Retângulo de base b e altura h.



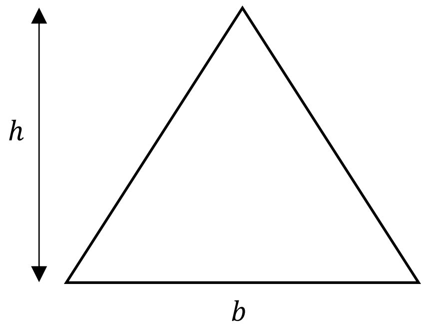
Denotando S como a área da figura, temos:

$$S = b.h \tag{5}$$

3.2.2 Triângulo

Dada a figura de um triângulo com suas medidas:

Figura 6: Triângulo de base b e altura h.

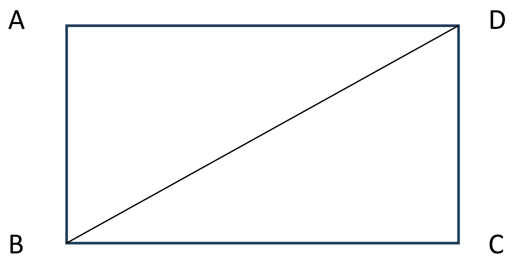


Sua área é dada pela relação:

$$S = \frac{b \times h}{2}. \tag{6}$$

Demonstração:

Dado o retângulo ABCD abaixo com sua respectiva diagonal traçada:



Note que ao traçar a diagonal, obtém-se os triângulos ABD e BDC, que são congruentes pelo caso LLL (Lado, Lado, Lado), logo possuem a mesma área. Aliado a isso, é possível ver que a área do retângulo é a soma das áreas dos triângulos, logo:

$$S = s_{ABD} + s_{BDC},$$

como $s_{ABD} = s_{BDC}$ podemos concluir diretamente que:

$$s_{ABD} = s_{BDC} = \frac{b \times h}{2}.$$

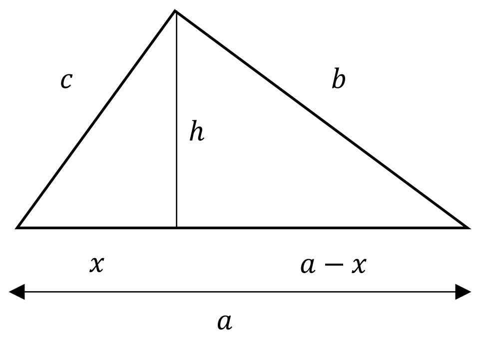
Como queríamos demonstrar.

Teorema de Heron: Em termos do semi-perímetro, pode-se calcular a área S usando a expressão:

$$S = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}. \tag{7}$$

Demonstração:

Dado um triângulo qualquer com suas medidas:



Pela relação acima podemos obter, através do teorema de Pitágoras, duas relações:

i) $c^2 = x^2 + h^2$

ii) $b^2 = h^2 + (a - x)^2$

Fazendo a subtração das duas equações, teremos:

$$b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 \Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 - 2ax \Rightarrow b^2 - c^2 - a^2 = -2ax$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = x.$$

Com o valor de x podemos inseri-lo na primeira equação, assim:

$$c^2 - x^2 = h^2 \Rightarrow (c-x)(c+x) = h^2$$

Substituindo o valor de x na equação

$$\left[c - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\right]\left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right] = h^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2ac - \ a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) = h^2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right]\left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right] = h^2$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2} = h^2.$$

Sabendo que o perímetro de uma figura geométrica é a soma de todos os lados, temos que:

$$2p = a + b + c.$$

Assim, adaptando a relação do perímetro no valor encontrado, temos:

$$\frac{(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)(2p)}{4a^2} = h^2$$

$$\Rightarrow \frac{4(p-a)(p-c)(p-b)p}{a^2} = h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4(p-a)(p-c)(p-b)p}{a^2}} = h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ha}{2}.$$

Pela relação dada em (6), temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Como queríamos demonstrar.

No caso do triângulo equilátero, que possui os três ângulos internos iguais, assim como os seus três lados, podem utilizar a seguinte fórmula: No caso do triângulo equilátero, que possui os três ângulos internos iguais, assim como os seus três lados, pode-se mostrar que a área do triangulo é dado por

$$S = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}. \tag{8}$$

Para calcular a altura deste triângulo, usa-se o teorema de Pitágoras: Isto é:

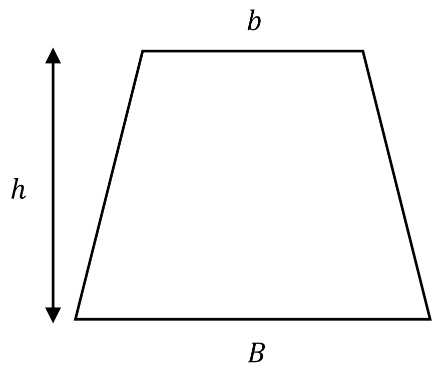
$$L^2 = (\frac{L}{2})^2 + h^2 \Rightarrow L^2 - (\frac{L}{2})^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{4L^2 - L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Como a área do triangulo é dado por

$$S = \frac{b.h}{2} \Rightarrow S = \frac{L..}{2}\frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

3.2.3 Trapézio

Figura 7: Trapézio de bases b e B e altura h.

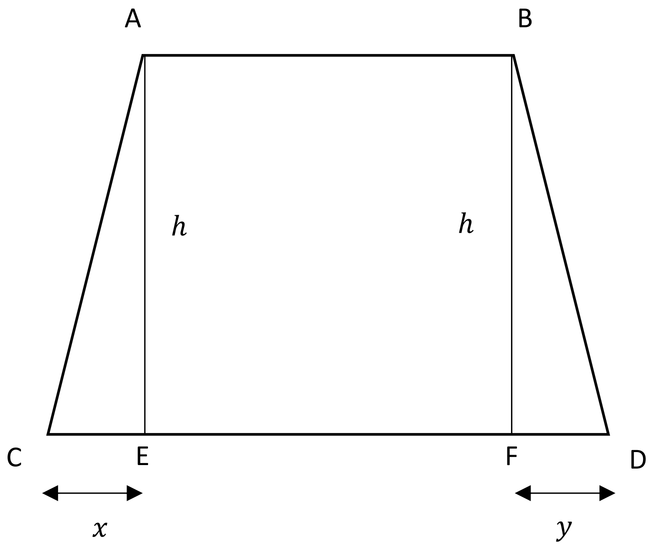


Dada a figura do trapézio, sua área é dada pela relação:

$$S = \frac{(B + b) \times h}{2}. \tag{7}$$

Demonstração

Dado um trapézio comum ABCD, com sua altura h marcada é possível decompô-lo em dois triângulos e um quadrilátero, como na figura abaixo:



Calculando as áreas S_1e S_2 dos triângulos, temos:

$$S_1 = \frac{xh}{2}$$

$$S_2 = \frac{yh}{2}$$

Calculando agora a área do quadrilátero S_3 formado pela base menor do trapézio e pela sua altura

$$S_3 = bh$$

Agora, a área do trapézio S_t será a soma das 3 áreas encontradas $S_1 + S_2 + S_3$, logo:

$$S_t = \frac{xh}{2} + \frac{yh}{2} + bh \Rightarrow S_t = \frac{xh + yh + 2bh}{2} \Rightarrow S_t = \frac{h(x + y + 2b)}{2}.$$

Como $x + y + b$ é o valor da base maior do trapézio, podemos chamá-la de B, assim, concluímos:

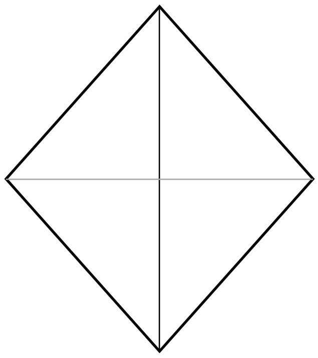
$$S_t = \frac{h(B + b)}{2}.$$

Como queríamos demonstrar.

3.2.4 Losango

Dada a figura do losango, com suas respectivas diagonais traçadas:

Figura 8: Losango com suas diagonais traçadas.

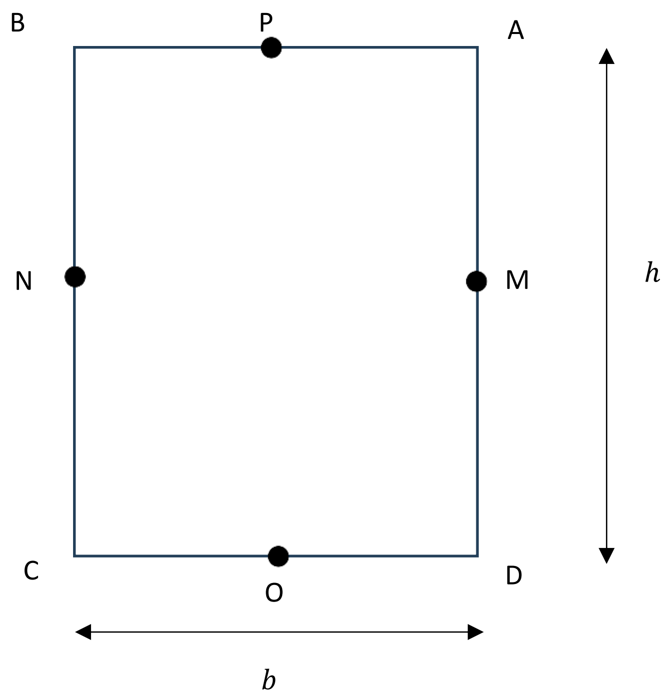


Sua área é dada pela relação

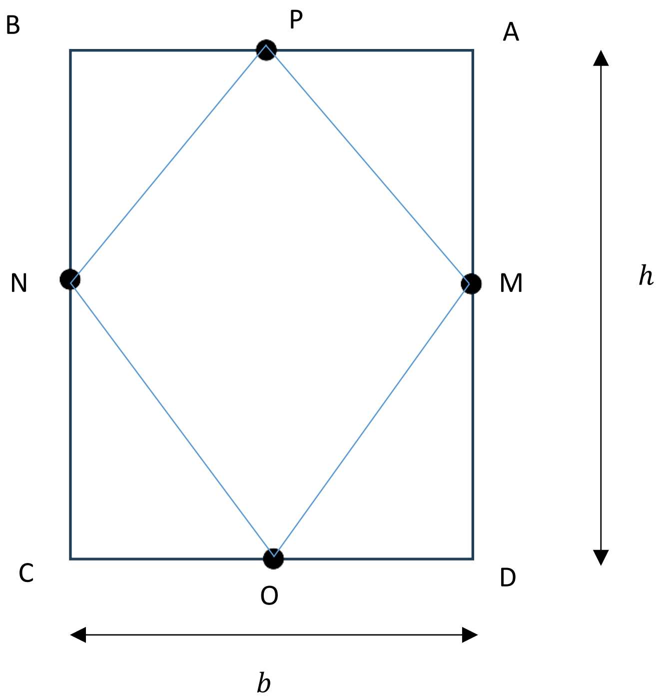
$$S = \frac{D.d}{2}. \quad (8)$$

Demonstração:

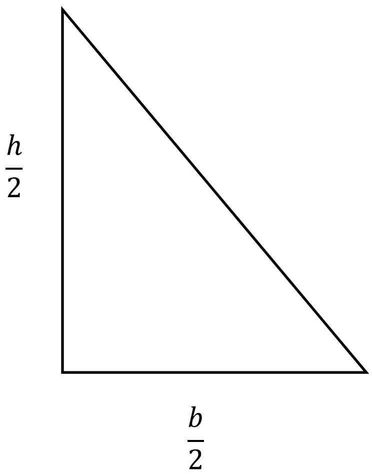
Dado um retângulo ABCD, com seus pontos médios MNOP marcados e com suas medidas de base e altura.



Ao unir os pontos médios do retângulo, pode-se formar a figura de um losango com as devidas medidas das suas diagonais, ou seja:



Separando as figuras, obtemos um losango e 4 triângulos retângulos congruentes com as medidas:



A área do losango pode ser definida pela diferença entre a área do retângulo e as 4 áreas dos triângulos congruentes, como na relação:

$$S_l = S_r - 4S_t$$

assim:

$$S_l = b.h - 4.\frac{\frac{bh}{4}}{2} \Rightarrow S_l = \frac{b.h}{2}.$$

Pela figura é fácil ver que a medida da altura h corresponde a diagonal maior D e a medida de b corresponde a diagonal menor d, assim:

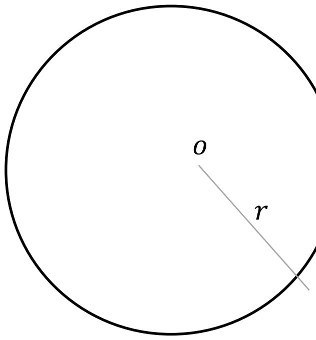
$$S_l = \frac{D.d}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

3.2.5 Circulo

A área do círculo pode ser dada através da fórmula:

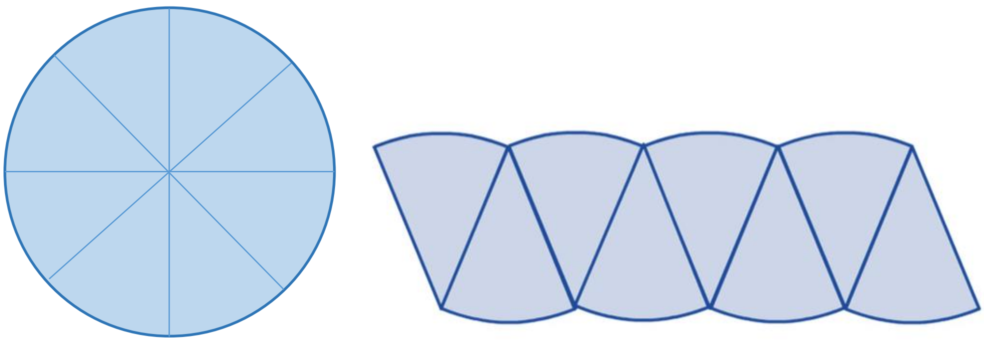
Figura 9: Círculo de centro O e raio r.



$$S_c = \pi r^2 \tag{9}$$

Demonstração

Inicialmente, vamos fracionar o círculo em 8 pedaços e alinhá-los em forma retangular:

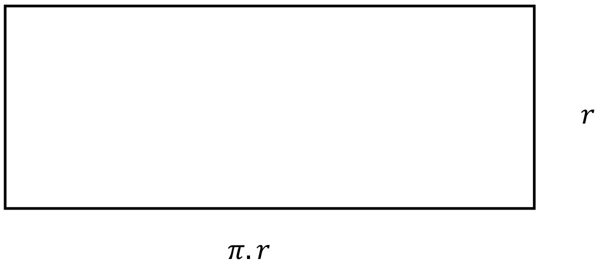


Ao se alinharem os setores circulares lado a lado, a figura se aproxima de uma aparência retangular. Observamos que a parte superior desse alinhamento vale metade do comprimento da circunferência, ou seja:

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

Por outro lado, a parte lateral mede r que equivale ao raio da circunferência.

Se fracionarmos tantas vezes quanto necessário esse círculo e dispusermos as frações lado a lado, obteremos o formato de um retângulo que formará também as medidas observadas na figura acima.



Assim, a área de um círculo pode ser calculada como a área de um retângulo, ou seja:

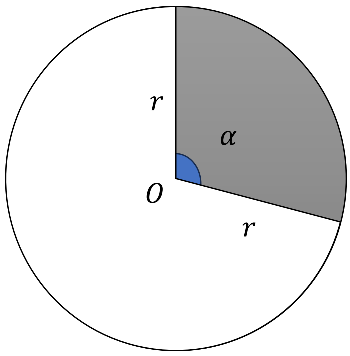
$$S_c = \pi.r^2.$$

Como queríamos demonstrar.

3.2.6 Cálculo da Área de Setores Circulares

A área de um setor circular pode ser calculada usando a área total do círculo e depois se montando uma regra de três, onde a área total estará na proporção de 360°, assim como a área do setor estará ao número de graus da angulação do setor.

Figura 10: Setor circular de raio r, centro O e ângulo α.



Sendo S a área total do círculo e S_α a área do setor circular e α o seu número de graus, temos:

$$\frac{S}{360} = \frac{S_a}{\alpha}$$

A partir dessa igualdade, podemos chegar na fórmula:

$$S = \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, \alpha}{360} \tag{9}$$

Se α e 360° forem convertidos para radianos, temos outra maneira de representar essa fórmula:

$$S = \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, \alpha}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{r^2 \,.\, \alpha}{2}$$

Onde r representa o raio do círculo e α é o ângulo referente ao setor.

3.3 APLICAÇÃO DAS ÁREAS DE FIGURAS PALANAS

Aplicação 1: Dimensão de uma mesa escolar.

Uma mesa escolar de formato retangular mede 1,5m x 1m. Se numa das quinas desta mesa fixarmos um barbante, qual deve ser o tamanho aproximado desse barbante de modo que se consiga percorrer um setor circular com um terço da área total da mesa?

Solução:

Para calcular a área da mesa precisamos fazer o produto das dimensões, logo: $S = b \,.\, h \Rightarrow S = 1{,}5 \,.\, 1 = 1{,}5m^2$.

Com estes dados pode-se calcular, inicialmente, a área ocupada pelo setor circular, assim:

$$S_b = \frac{1}{3} \,.\, 1{,}5 = 0{,}5\, m^2.$$

Como o barbante será afixado em uma das quinas da mesa, deduz-se que o ângulo a ser formado pelo setor circular deve ser de 90º, assim, o comprimento r que teve ter o barbante para cobrir a terça parte da área da mesa, pode ser calculado:

$$S_b = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360} \Rightarrow 0{,}5 = 3{,}14 \,.\, \frac{r^2 \,.\, 90}{360}.$$

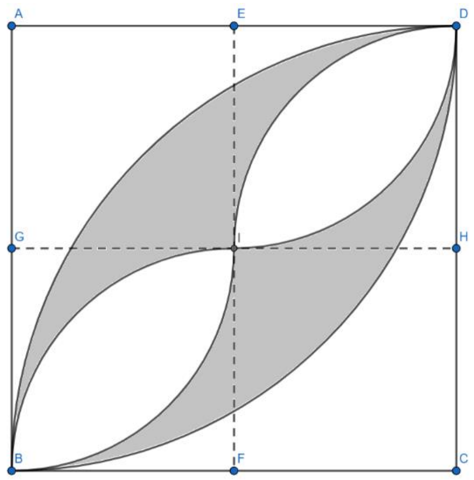
Logo:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3{,}14}} \approx 0{,}8m$$

Assim, o valor do comprimento do barbante deve possuir cerca de 0,8 metros de comprimento.

Aplicação 2: Cálculo da área circular hachurada interna a um quadrado

Na figura abaixo ABCD é um quadrado de lado 12 cm e os arcos indicados tem centros, respectivamente, nos vértices A e C e em $\overline{EI}$, $\overline{FI}$, $\overline{GI}$ e $\overline{HI}$, possuem a mesma medida igual a 6 cm. Determine a medida da área da região hachurada.



Inicialmente, precisamos calcular a diferença entre a metade da área do quadrado A_t e a área do setor circular A_{setor}, assim:

$$A_t = \frac{L^2}{2} = \frac{12^2}{2} \Rightarrow A_t = 72 \text{ cm}^2$$

$$A_{setor} = \frac{\pi}{4} R^2 \Rightarrow A_{setor} = \frac{\pi}{4} . 12^2 = \frac{144}{4}\pi \Rightarrow A_{setor} = 36\pi \text{ cm}^2$$

Agora, como o mesmo cálculo vale para os dois setores circulares, temos então que:

$$A_1 = 2.(A_{setor} - A_t) \Rightarrow A_1 = 2.(36\pi - 72) \Rightarrow A_1 = 72(\pi - 2)$$

Para deduzirmos agora a área hachurada, devemos repetir o mesmo processo para as áreas em branco nos 2 quadrados formados de lado 6cm, assim:

$$A_t = \frac{l^2}{2}$$

$$A_t = 18 \text{ cm}^2$$

$$A_c = \frac{\pi}{4} R^2$$

$$A_c = \frac{\pi}{4} . 36$$

$$A_c = 9\pi \, cm^2$$

Como o mesmo cálculo deve servir para as outras duas áreas, basta multiplicarmos a diferença entre elas por 2, assim:

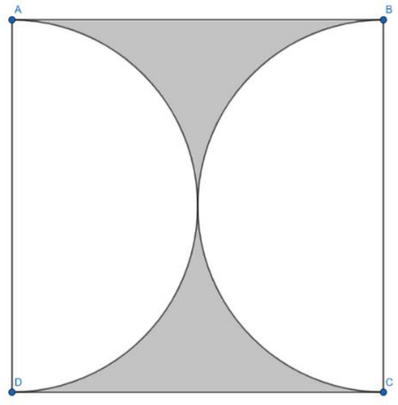
$$A_2 = 4.(9\pi - 18) \Rightarrow A_2 = 36(\pi - 2)$$

Fazendo a diferença $A_1 - A_2$, para obter a área hachurada, temos:

$$A_1 - A_2 = 72(\pi - 2) - 36(\pi - 2) \Rightarrow A_1 - A_2 = 36(\pi - 2)$$

Aplicação 3: Cálculo da área hachurada entre a intersecção dois semicírculos num quadrado.

Um quadrado ABCD tem lados de 18 cm. Com centro nos pontos médios dos lados AD e BC, traçamos os arcos AD e BC. Qual é a área da região hachurada?



Como $l = 18$ cm que é a mesma medida do diâmetro do semicírculo, é fácil deduzir que $R = 9$ cm, por valer a metade deste, logo:

$$A_{quadrado} = l^2 \Rightarrow A_{quadrado} = 18^2 \Rightarrow A_{quadrado} = 324 \text{ cm}^2$$

$$A_{sc} = \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow A_{sc} = \frac{\pi}{2}.9^2 \Rightarrow A_{sc} = \frac{81}{2}\pi.$$

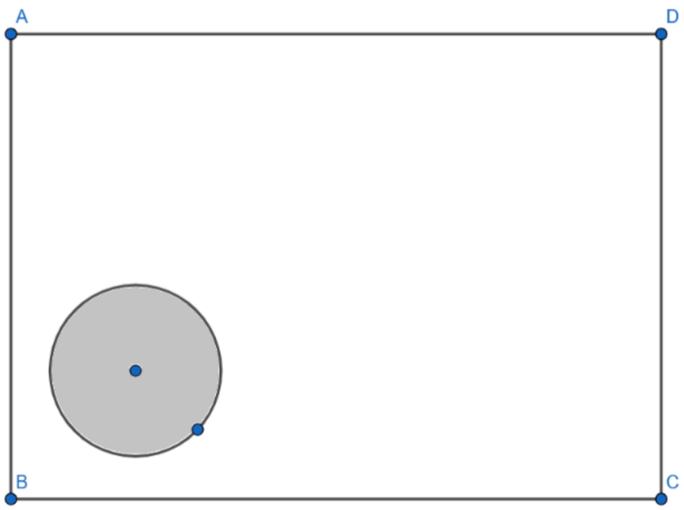
Como são 2 semicírculos, podemos calcular a área hachurada através da relação:

$$A_{hachurada} = A_{quadrado} - 2.A_{sc}$$

$$A_{hachurada} = 324 - 2.\frac{81}{2}\pi \Rightarrow A_{hachurada} = 324 - 81\pi \Rightarrow A_{hachurada} = 81.(4 - \pi)$$

Aplicação 4: Um buraco deve ser cavado em um terreno retangular

Um buraco deve ser cavado em um terreno retangular com a finalidade de ser feito um poço artesiano aberto para colheita de água, afim de abastecer algumas famílias. Qual o tamanho mínimo do diâmetro do poço de modo que consiga cobrir 1/64 do terreno?



A questão apresenta a seguinte relação:

$$\frac{A_r}{64} = A_p.$$

Como a área do poço pode ser calculada normalmente por πr^2, podemos substituir:

$$\frac{A_r}{64} = \pi r^2.$$

Isolando r, temos:

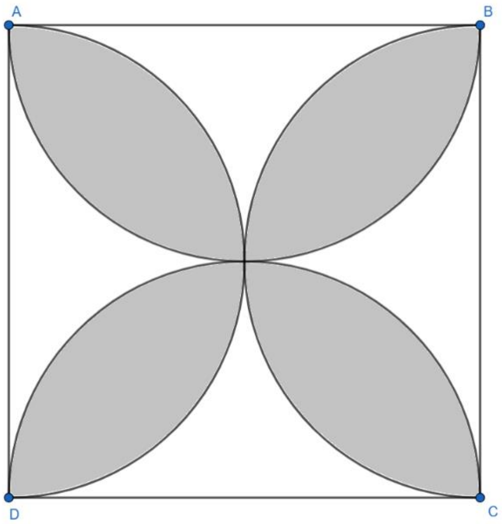
$$r = \sqrt{\frac{A_r}{64\pi}}.$$

Sabendo que o raio é a metade de um diâmetro, podemos deduzir:

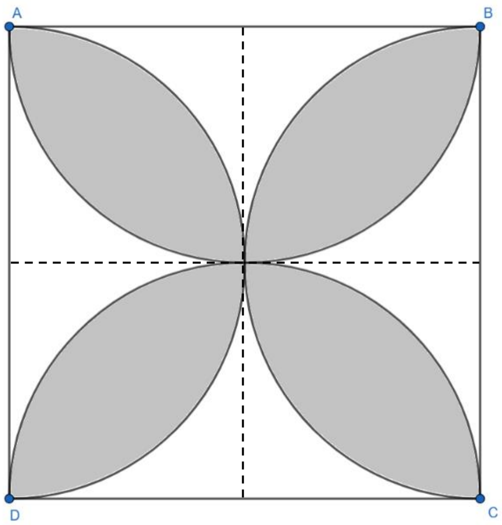
$$2r = 2.\sqrt{\frac{A_r}{64\pi}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{A_r}{16\pi}} \Rightarrow D = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{A_r}{\pi}}.$$

Aplicação 5: Cálculo da área hachurada interna um quadrado

Dado um quadrado ABCD com lados de 14cm com semicírculos centrados nos pontos médios de cada lado, a área dessa região sombreada, semelhante a uma flor, vale:



Inicialmente, devemos dividir o quadrado em 4 partes dividindo por seus pontos médios, tal que:



Com isso, podemos calcular a diferença entre o setor circular e a metade da área do quadrado fragmentado, assim:

$$A_{qf} = \frac{7^2}{2} = \frac{49}{2}$$

$$A_{sc} = \frac{\pi . 7^2}{4} = \frac{49\pi}{4}.$$

Calculando a diferença temos:

$$A_{sc} - A_{qf} = \frac{49\pi}{4} - \frac{49}{2}.$$

Como será necessário calcular duas vezes, temos:

$$2.\left(A_{qf} - A_{sc}\right) = \frac{49\pi}{2} - 49 \Rightarrow 2.\left(A_{qf} - A_{sc}\right) = \frac{49}{2} . (\pi - 2)$$

A área hachurada de um dos 4 quadrados fragmentados deve valer

$$\frac{49}{2} . (\pi - 2),$$

assim, para sabermos o resultado, basta multiplicarmos essa relação por 4, assim:

$$A_h = 4.\frac{49}{2} . (\pi - 2) \Rightarrow A_h = 98 . (\pi - 2)$$

Aplicação 6: Número de mudas plantadas a uma distância X

Mostre que dado uma área retangular de lados L e b e sendo N o número de mudas a serem plantadas a uma distância X uma das outras, mostre que o número N é dado por

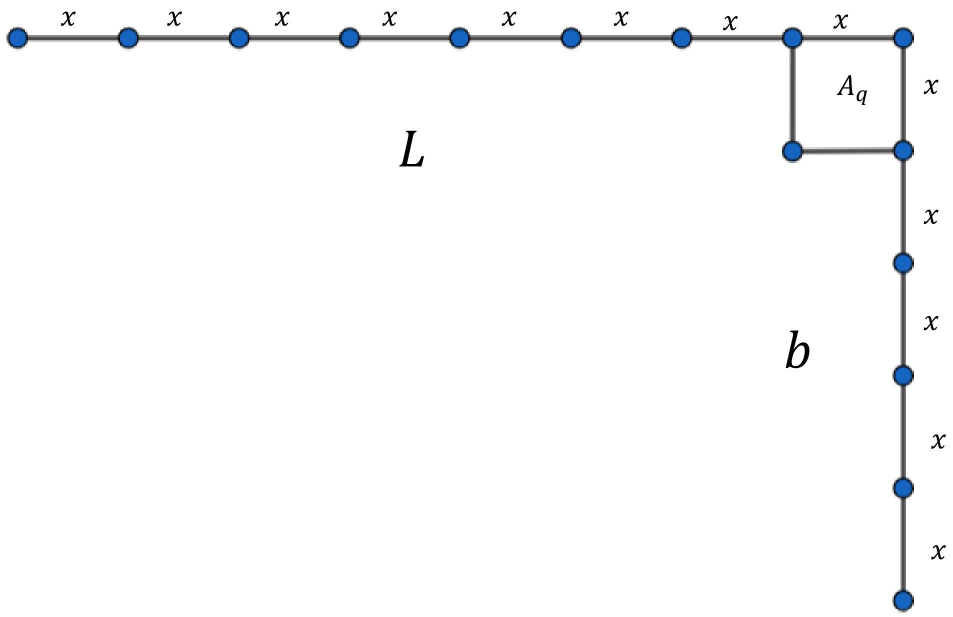
$$N = \frac{A_r}{A_q} + \frac{1}{x}\ (1 + b) + 1,$$

onde,

- A_r, é a área do retângulo de lados L e b;
- A_q, é a área do quadrado de lado x.

Solução

Seja o comprimento L de lado retangular e seja x o número de repartições.



Logo, se o lado L é repartido em n pedaços, tem-se que o número de mudas será:

$$n_1 = \frac{L}{x} + 1,$$

de modo análogo tem-se para o lado b:

$$n_2 = \frac{b}{x} + 1.$$

Logo, o número total de mudas será:

$$N = n_1 . n_2 = \left(\frac{L}{x} + 1\right) . \left(\frac{b}{x} + 1\right) \Rightarrow N = \frac{L . b}{x^2} + \frac{L}{x} + \frac{b}{x} + 1 \Rightarrow N = \frac{L . b}{x^2} + \frac{L + b}{x} + 1$$

Sendo, $L.b = A_r$ e $x^2 = A_q$, temos

$$N = \frac{A_r}{A_q} + \frac{1}{x}(L + b) + 1$$

Aplicação 7: Número de mudas plantadas numa área quadrangular

Dada uma área retangular de lados 400m e 500m e supondo que sejam plantadas mudas a uma distância de 4m umas das outras, calcule o total de mudas distribuídas ao longo da área retangular.

Solução:

- $A_r = 400 \times 500 = 200.000\, m^2$;
- $A_q = 4 \times 4 = 16\, m^2$;
- $L = 500m$;
- $b = 400m$.

Pela fórmula, temos:

$$N = \frac{200.000}{16} + \frac{1}{4}(400 + 500) + 1 \Rightarrow N = 12.500 + 225 + 1 \Rightarrow N = 12.726.$$

Ou seja, 12.726 mudas.

Aplicação 8: Buracos de coelho numa área retangular.

Um coelho invade uma área retangular de lados 30m e 40m. Supondo que constrói um total de 63 buracos com distância x um do outro. Calcule o valor de x.

Solução

Seja a fórmula otimizadora e sendo as informações

- $N = 63$;
- $A_r = 30 \times 40 = 120$;
- $A_q = x^2$;
- $L = 30$;
- $b = 40$;
- $L + b = 70$.

Pela fórmula, temos:

$$63 - 1 = \frac{1200}{x^2} + \frac{70}{x} \Rightarrow 62 = \frac{1200 + 70x}{x^2} \Rightarrow 62x^2 - 70x - 1200 = 0$$

$$\Rightarrow 31x^2 - 35x - 600 = 0$$

Calculando o valor do discriminante da equação, temos:

$$\Delta = (-35)^2 + 4 \times 31 \times 600 \Rightarrow \Delta = \ 1225 + 74.400 \Rightarrow \Delta = 75.625 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 275.$$

Assim, desprezando-se a parte negativa, temos que a raiz possível de resolução dessa equação é:

$$x = \frac{35 + 275}{62} = 5$$

A distância equivale a 5m.

Aplicação 9: Número de intervalos de um espaçamento x em uma área retangular.

Mostre que o número de intervalos de um espaçamento x em uma área retangular não admite discriminante menor que $(L + b)^2$.

Solução

Inicialmente, analisa-se a equação advinda da fórmula.

$$N = \frac{L.b}{x^2} + \frac{1}{x}(L + b) + 1 \Rightarrow (N - 1) = \frac{L.b + (L + b)x}{x^2}$$

$$\Rightarrow (N - 1)x^2 - (L + b)x - L.b = 0$$

Suponha por contraposição que $N = 0$, logo:

$$-x^2 - (L + b)x - L.b = 0$$

$$\Delta = (L + b)^2 - 4.(-1).(-L.b) \Rightarrow \Delta = (L - b)^2$$

Nota-se que o discriminante é menor que $(L + b)^2$, assim os valores das raízes serão:

- $x' = -L$
- $x'' = -b$

Agora, supondo $N = 1$, temos:

$$0.x^2 - (L + b)x - L.b = 0$$

Assim, o discriminante será:

$$\Delta = (L + b)^2$$

Agora o discriminante é igual a $(L + b)^2$.

Como na equação quadrática $a = 0$, não haverá a possibilidade de raízes. Como queríamos demonstrar.

Aplicação 10: Melhor distribuição de um número x de mudas

Determine qual a melhor distribuição de um número x de mudas para uma área plana hexagonal que maximize a plantação com a obtenção de uma equação otimizadora. Para determinar a melhor distribuição de um número para maximizar a área plantada, garantindo que as mudas sejam distribuídas de forma eficiente para um arranjo em grade hexagonal:

$$n = \frac{A}{a \,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \,.\; d^2\right)}$$

Onde:

- A é a área total.
- a é a área ocupada por cada muda.
- d é a distância mínima entre as mudas.

Para um arranjo de grade hexagonal, cada célula hexagonal de lado d pode ser subdividida em 6 triângulos equiláteros com altura $\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,d$. Assim, a área de um hexágono de lado d é dada por:

$$A_{hex} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.\,d^2.$$

Contudo, a área ocupada por cada muda é considerada em termos de distância mínima d entre elas, resultando em uma área eficiente média de:

$$a_{eff} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,d^2.$$

O número total de mudas n que podem ser plantadas na área total A é obtido pela área ocupada por cada muda:

$$n = \frac{A}{a_{eff}}.$$

Substituindo a área eficientemente média e simplificando as equações, temos:

$$n = \frac{2A}{d^2 . \sqrt{3}}.$$

Aplicação 11: fazenda com formato hexagonal

Seja uma fazenda de formato hexagonal com uma área de 11,2 hectare de plantações de dendê, determine a área que deve ocupar cada muda para uma melhor distribuição de 700 plantas de modo que possuam uma distância mínima de 2 metros entre elas.

Solução:

Para calcular esse problema, devemos utilizar a fórmula obtida anteriormente, a qual segue:

$$n = \frac{A}{a \,.\left(d^2 . \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

onde,

a) n é o número de mudas;
b) A é a área total;
c) d é o valor da distância mínima entre elas;
d) a é a área ocupada por cada muda;

Assim,

$$700 = \frac{112.000}{a \,.\left(2^2 . \frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

simplificando, chegaremos a divisão:

$$a = \frac{1120}{14\sqrt{3}} \approx 46{,}18\, m^2$$

Ou seja, cada planta de dendê deve ocupar para a melhor distribuição uma área de, aproximadamente, 46 metros quadrados.

3.4 NOTAÇÃO MATRICIAL E DETERMINANTE PARA O CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

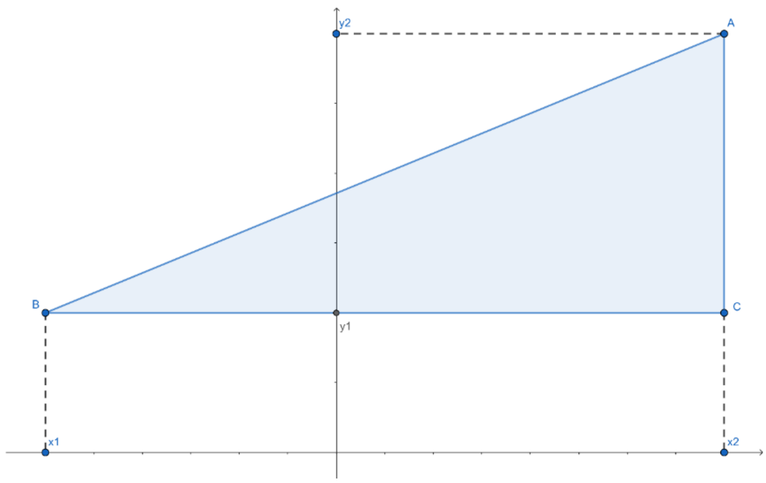
Antes de adentrar nos conceitos de matrizes, procura-se estabelecer os principais conceitos e resultados a Geometria Analítica. Vamos verificar as coordenadas ortogonais nos eixos *OXY* e *OXY*, abordaremos os conceitos fundamentais em alguns conteúdos e demostraremos as principais expressões e teoremas da Geometria Analítica como base para o estudo dos métodos de resolução dos problemas propostos.

É um sistema ortogonal que serve como referência para localizar coordenadas , constituido de dois eixos perpendiculares entre si. A origem desse sistema (0,0) é dado pela intersecção dos eixos. O eixo x é o eixo das abscissas, enquanto o eixo y é o eixo das ordenadas. Um ponto qualquer no plano tem coordenadas $P(x, y)$, onde x é a coordenada da abscissa do ponto e y é a coordenada da ordenada.

Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ pontos no plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos *OXY* dado. A distância de P a Q, que nomeamos por $d_{(P,Q)}$, a medida da distância PQ entre dois pontos que podemos calcular por:

$$d^2_{(P,Q)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Demonstração:



Dada a figura de um triângulo retângulo formado em um plano cartesiano podemos calcular, pelo teorema de pitágoras, o valor da hipotenusa, ou seja, a distância entre os pontos de coordenadas $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, assim:

$$d_{P,Q}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Assim, é possível calcular a distância levando em causa este teorema. Como queríamos demonstrar.

3.4.1 Definição de Matriz

Sejam m e n naturais não nulos. Uma matriz é uma disposição retangular de mn números reais ou complexos distribuídos em m linhas e n colunas. Para denotar uma matriz é necessário utilizar uma letra maiúscula, por exemplo: A, ou $A_{m\times n}$ quando se exigir a quantidade de linhas e colunas. Os números que integram a matriz chamam-se de elementos de uma matriz. Para que seja representado, utiliza-se um sistema simples de coordenadas representadas por duas letras minúsculas i e j, neste caso a_{ij}, onde o primeiro representa a linha e o segundo representa a coluna (REF).

E uma notação formal, matriz é uma função associada ao par $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ ao elemento real a_{ij}.

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ será descrita de maneira genérica, como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observa-se que:

A *i-ésima* linha de A é $[\, a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; a_{i3} \;\; \ldots \;\; a_{in}]$, onde $1 \leq i \leq m$;

A *j-ésima* coluna de A é $\begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$, onde $1 \leq j \leq n$;

3.4.2 Matriz retangular

A expressão utilizada na geometria analítica para o calcular a área de um triângulo quando são conhecidas as três coordenadas do vértice pode ser dada através da relação:

$$A = \frac{1}{2}|D|. \qquad (10)$$

Onde:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Para o caso de obter a área do quadrado ou de qualquer outra figura plana, utiliza-se como método, o somatório das áreas de triângulos. Essa abordagem pode ser observa em livros textos.

Nesse método, não se utilizará as expressões (10) e nem (11), mas sim usa-se a expressão para calcular a área de um triângulo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

A diferença entre essas expressões é que a (11) acrescenta uma coluna a mais com elementos iguais a 1 o que de certa maneira, não influencia no cálculo final, tendo em vista que trata de um elemento neutro multiplicativo enquanto que a expressão dada por (12) omite essa coluna considerando apenas as coordenadas dos vértices.

Do ponto de vista analítico essas duas expressões são equivalentes e conduzem aos mesmos resultados esperados. Nesse caso, surge uma dúvida: como obter áreas de outras figuras planas que não seja a do triângulo utilizando a expressão (12)?

A resposta a essa hipótese advém do fato de considerar um aumento de linhas na expressão (12), onde são conhecidas todas as coordenadas dos vértices. Para o caso do quadrado, deve-se acrescentar uma linha, tendo em vista que essa figura plana possui quatro vértices. Isto é,

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Para o caso do Pentágono, acrescenta mais uma coordenada na última linha da expressão dada por (13). Verifica-se, nesse caso a diferença em utilizar o método em questão em relação ao uso do determinante que utiliza matriz quadrada de ordem 3, e até mesmo a relação de Laplace, onde envolve os cofatores. Naquele caso, realizam-se vários cálculos com o uso das mesmas expressões fazendo somas de áreas de triângulos. Nesse outro método, apenas acrescentam linhas, onde os números delas representam o número de lados de uma determinada figura plana.

Com base nesse contexto, busca-se na próxima seção, mostrar uma maneira de calcular áreas de figuras planas de n vértices com a utilização de uma matriz retangular. No entanto, a obtenção do determinante para essa matriz não quadrada é determinada a partir de permutações, pois a geometria analítica possibilita o cálculo de área de uma região poligonal limitada por n pontos, cujas coordenadas constituem os elementos de entrada da matriz retangular vertical. O método utilizado, mune-se do mesmo critério para o cálculo de determinante de uma matriz retangular.

Para que uma matriz seja retangular, o número de linhas deve ser diferente do número de colunas ou vice-versa. As matrizes a seguir são retangulares,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de matriz pode ser representado como uma tabela onde os valores são inseridos de forma adequada em m linhas e n colunas. Para que se possa determinar as fórmulas que permitem o cálculo da área da figura geométrica no plano cartesiano, agrupam-se as coordenadas dos vértices na forma de determinante de uma matriz não quadrada, cujo procedimento acontece, efetuando-se a soma dos produtos na diagonal à direita menos a soma dos produtos na diagonal à esquerda.

Nessa regra ocorre uma coincidência entre os valores obtidos no cálculo do determinante, que constitui um algoritmo para que se determine a área de um polígono simples. Embora não seja citado nos livros didáticos, o referido método é análogo ao cálculo do determinante de uma matriz 3x3, cuja terceira coluna é constituída pela unidade. No decorrer dessa monografia, desenvolve-se o cálculo a partir de matrizes retangulares.

3.4.3 Determinante de uma Matriz

O determinante de uma matriz é um valor escalar que pode ser calculado a partir da diferença dos produtos da diagonal principal pela diagonal secundária. A forma geral de um determinante de uma matriz $n \times n$ envolve somar produtos de elementos da matriz, seguindo um padrão conforme essas diagonais.

Dado uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, o determinante de A, ou D_A, é a diferença entre o produto da diagonal principal (esquerda para a direita) e a diagonal secundária (direita para a esquerda), logo:

$$D_A = ad - bc.$$

Dado uma matriz $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, o determinante de B, ou D_B, terá a mesma a diferença entre os produtos das diagonais, logo:

$$D_B = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

É a partir dessa ideia é que se pressupõe o desenvolvimento da teoria dos determinantes, abrindo inúmeras aplicações estendendo a ordens matriciais e usando outros critérios de soluções, como os cofatores, método de Laplace e regra de Sarrus.

3.4.5 Cofatores

Consideremos a matriz quadrada de 3ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Chama-se cofator do elemento a_{ij} da matriz quadrada o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij} e que é representado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}. \qquad (14)$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular os cofatores de C_{11}, C_{13} e C_{32}:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-14) = -14$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (28) = 28$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6+8) = -14$$

3.4.6 Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz A_{ij} é igual ao somatório dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos cofatores. Tem-se então que o determinante de uma matriz A_{ij} conforme seja escolhida a *i*-ésima linha ou a j-ésima coluna para o cálculo dos cofatores é dado por:

$$\det A_{ij} = a_{i,1}C_{i,1} + a_{i,2}C_{i,2} + a_{i,3}C_{i,3} + \cdots + a_{i,n}C_{i,n}. \tag{15}$$

Ou se optar por usar uma linha:

$$\det A_{ij} = a_{1,j}C_{1,j} + a_{2,j}C_{2,j} + a_{3,j}C_{3,j} + \cdots + a_{n,j}C_{n,j}. \tag{16}$$

3.4.7 Determinante de uma matriz quadrada de ordem $n > 3$.

O teorema de Laplace é capaz de solucionar matrizes quadradas de ordem superior a 3. Ele consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo: Seja a matriz quadrada de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante, aplicaremos o teorema de Laplace, até alcançarmos determinantes de terceira ordem. Assim, desenvolvendo o determinante da matriz acima, seguindo os elementos da 1ª linha, temos:

$$det\, A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

$$a_{11}C_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 17 = 34$$

$$a_{12}C_{12} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot 44 = -132$$

$$a_{13}C_{13} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot -111 = 111$$

$$a_{14}C_{14} = 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando na fórmula acima, temos:

$$det\, A = 34 - 132 + 111 = 13.$$

3.4.8 Propriedades dos Determinantes

Propriedade 1: Ao analisar uma matriz e verificar que uma de suas linhas seja **0**, portanto o valor de seu determinante também será **0.**

Exemplo:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Propriedade 2: O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$det\ A = det\ At$$

$$Det\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 91 \quad det\ A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 91$$

Propriedade 3: Se trocarmos de posição duas linhas ou duas colunas de uma matriz, seu determinante será o oposto da matriz anterior.

$$Det\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 9 \textbf{ e } Det\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -9$$

Propriedade 4: Se todos os elementos de uma linha ou de uma coluna da matriz forem multiplicados por um número real **q** qualquer, então seu determinante também será multiplicado por **q**.

$$\det M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 120$$

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4*3 & 6*3 & 2*3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 12 & 18 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3(-120) = -360$$

Propriedade 5: Se uma matriz quadrada A de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é:

$$\det(kA_n) = k^n . \det A_n$$

Propriedade 6: O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $det\ A = det\ A^t$. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\ e\ A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\det A = a.d - b\,.c\ e \det A^t = a\,.d - c\,.b,$$

o que mostra a igualdade entre os determinantes.

Propriedade 7: Se trocar de posição entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada A, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

Propriedade 8: O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Propriedade 9: Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz-produto, então $\det AB = \det A\ .\det B$ (teorema de Binet).

Propriedade 10: Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), formando uma matriz B, então $det\ A = det\ B$ (Teorema de Jacobi).

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 9 - 20 = -11$$

Multiplicando a 1ª linha por -2 e somando os resultados à 2ª linha obtém-se que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -1 - 10 = -11$$

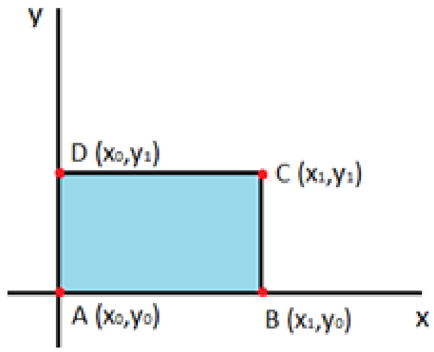
3.5 CALCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANES E SUAS EXTENSÕES USANDO A NOTAÇÃO DE DETERMINANTE

Neste tópico é feito uma abordagem sobre a dedução das fórmulas para o cálculo da área das principais figuras planas plotadas no plano cartesiano utilizando a fórmula (10).

3.5.1 Área do retângulo

Seja a região retangular no plano cartesiano, **Figura 11.** Se ABCD um retângulo no plano cartesiano de modo que um dos vértices está na origem. Colocando as coordenadas dos vértices na forma de determinante, cuja primeira coluna é constituída pelos termos de abscissa *x* e a segunda com os termos de ordenada *y*, aplicando o método do cadarço obtém-se a expressão da área do retângulo, conforme o que se segue, desde que x_1 seja a base e y_1 altura do retângulo. Então:

Figura 11. Cálculo da área de um retângulo com uso do método do cadarço



Fonte: Própria dos autores

Quer-se mostrar que:

$$A = D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow A = x_1 y_1$$

Pelo método do cadarço vem que:

$$A = \frac{1}{2}[(x_0y_0 + x_1y_1 + x_1y_1) - (y_0x_1 + y_0x_1 + y_1x_0)]$$

Como $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, então:

$$A = \frac{1}{2}[2x_1y_1] \Leftrightarrow A = x_1y_1$$

Como x_1 é a base b do retângulo e y_1 a altura h, pode-se escrever que:

$$\mathrm{A} = bh$$

Portanto tem-se, então, a fórmula que determina a área do retângulo. Conclui-se que a área de um retângulo é o produto da base pela altura.

3.5.2 Área do triângulo

Sabe-se que na geometria plana o retângulo pode ser decomposto em dois triângulos desde que se trace uma diagonal no mesmo, implica que a medida da área de um triângulo é igual à metade da área do retângulo. Logo pode-se demonstrar que, usando a expressão (10), pode-se fazer a dedução da fórmula que permite o cálculo da área do triângulo. Nesse caso, sejam os vértices de um $A\ (x_0; y_0), B\ (x_1; y_0)\ e\ C\ (x_0; y_1)$, Como a altura (h) do triângulo é igual a distância de x_0 até y_1, escrevendo as coordenadas dos vértices na forma de determinante, pode-se escrever que:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_0 \\ x_0 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Realizando o desenvolvimento matemático, vem que:

$$A = \frac{1}{2}[(x_0y_0 + x_1y_1) - (y_0x_1 + y_0x_0)].$$

Como $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, logo:

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_1) \Leftrightarrow A = \frac{x_1y_1}{2}.$$

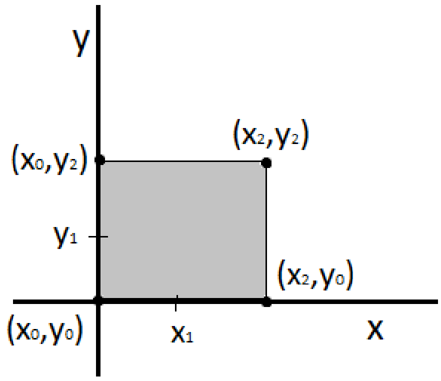
Sabendo-se que, x_1 é a base b e y_1 a altura h, logo:

$$Área\ do\ Tiângulo = \frac{Base\ x\ altura}{2} \Rightarrow A = \frac{bh}{2}.$$

3.5.3 Área do quadrado

Como o quadrado (**Figura 12**) constitui um caso particular de retângulo cujos os lados possuem a mesma medida, o procedimento é análogo ao do retângulo ou seja:

Figura 12: Cálculo da área de um quadrado usando o método do cadarço



Fonte: Própria dos autores

Da figura (**Figura 12**) tem-se que:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_0 \\ x_2 & y_2 \\ x_0 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Realizando o desenvolvimento, tem-se que:

$$A = \frac{1}{2}(x_0y_0 + x_2y_2 + x_2y_2) - (y_0x_2 + y_0x_2 + y_2x_0).$$

Observando a Figura dada, constata-se que $x_2 = y_2 = l$ são as medidas do comprimento do lado do quadrado, permite que se escreva:

$$A = \frac{1}{2}[x_0y_0 + l.l + l.l - (y_o.l + y_0.l + l.x_0)].$$

Como $x_0 = y_0 = 0$ e simplificando, resulta:

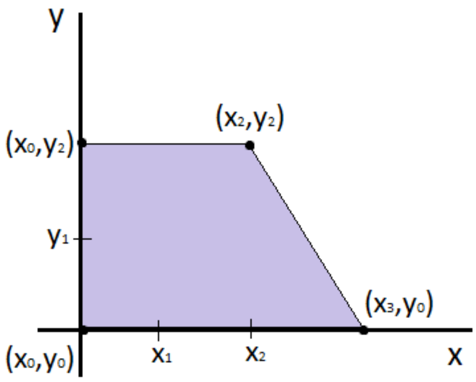
$$A = \frac{2l^2}{2} = l^2$$

É a fórmula da área do quadrado. As deduções das fórmulas das áreas do losango e paralelogramo constituem um procedimento análogo à do retângulo.

3.5.4 Área do trapézio

Seja a região limitada pelo gráfico e o os eixos coordenados constitui um trapézio, representado pela região sombreada cujos vértices estão indicados na figura abaixo:

Figura 13. Cálculo da área de um trapézio usando o método do cadarço.



Fonte: própria dos autores

Fazendo

$x_2 = b, x_3 = B\ e\ y_2 = h$, percebe-se que as coordenadas dos vértices:

i) (x_0, y_0) = origem.

ii) $(x_3, y_0) = (B, y_0)$ = base maior.

iii) $(x_2, y_2) = (b, h)$ = base menor.

iv) $(x_0, y_2) = (x_2, y_2) = (b, h)$ = altura do trapézio.

Pode-se escrever utilizando a fórmula (10) na forma:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ B & y_0 \\ b & h \\ x_0 & h \end{vmatrix}.$$

Pela regra do cadarço, tem-se:

$$A = \frac{1}{2}\,[x_0 y_o + Bh + Bh - (y_0 B + y_0 b + h x_0)].$$

Como $x_0 = 0\ e\ y_0 = 0$ e simplificando, então:

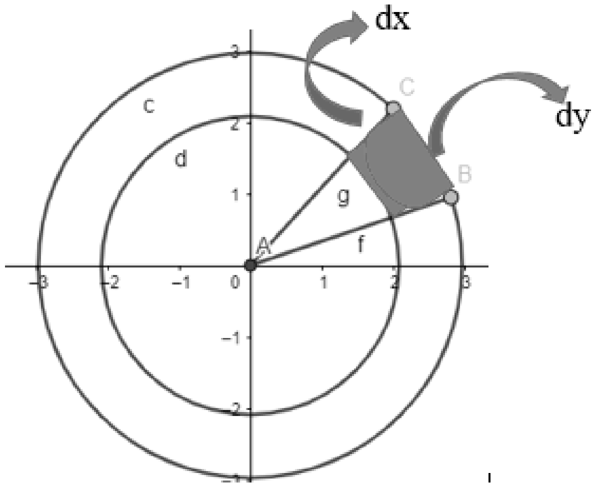
$$A = \frac{1}{2}(Bh + bh) \Rightarrow A = \frac{h.(B+b)}{2}$$

Ficando, assim, deduzida a fórmula da área de um trapézio.

3.5.5 Área do círculo

Na geometria plana, a área da região limitada pelos pontos de uma circunferência no plano cartesiano representa um círculo, conforme a figura (figura 14):

Figura 14. Cálculo da área de um círculo pelo método integral



Fonte: Própria dos autores

Sabe-se que o círculo pode ser obtido quando se considera polígonos regulares em que o número de lados tende para o infinito. Nesse caso, considerando que cada polígono regular é a soma de triângulos de mesma área, é possível a partir dessa ideia intuitiva, obter o número racional π considerando que o raio seja unitário. Antes de mostrar que é possível determinar esse valor irracional, usa-se, primeiramente o cálculo integral para chegar ao valor da área do circulo.

A área de uma região curvilínea ou plana, pode ser obtida considerando a seguinte integral:

$$A = \int y dx.$$

Como se pretende obter a área do círculo, pode-se utilizar a seguinte equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

ou,

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Se considerando apenas o sinal positivo, a expressão dada por (), transforma-se em,

$$A = \int \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Onde o limite de integração vai de 0 a r e colocando em evidencia, vem que:

$$A = \int \sqrt{r^2(1 - \frac{x^2}{r^2})}\, dx \Rightarrow A = r \int \sqrt{(1 - \frac{x^2}{r^2})}\, dx.$$

Fazendo,

$$sen\theta = \frac{x}{r}$$

E substituindo, vem que

$$A = r \int \sqrt{(1 - sen^2(\theta)}dx.$$

Derivando a expressão, obtém-se que,

$$cos\theta d\theta = \frac{dx}{r},$$

logo,

$$A = r^2 \int cos^2\theta d\theta,$$

sendo,

$$\frac{1}{2}(cos2\theta + 1) = cos^2\theta.$$

Nesse caso, obtém-se que,

$$A = r^2 \int \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)d\theta.$$

Resolvendo a primitiva, chega-se a seguinte primitiva,

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta + \frac{1}{4}sen(2\theta)$$

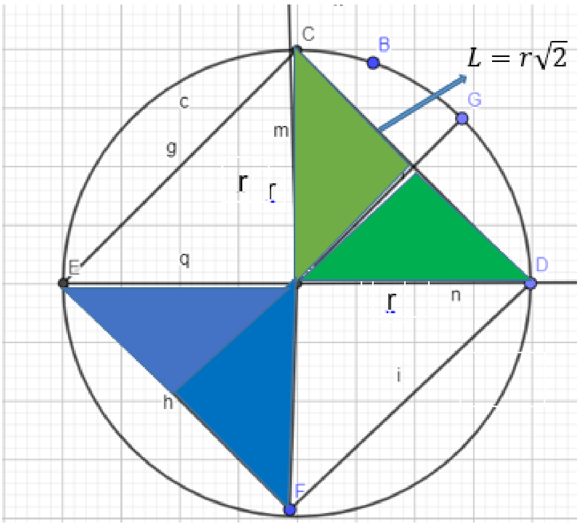
Considerando que o limite de integração é dado por $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto, o resultado da expressão corresponde ao resultado,

$$A = \pi r^2$$

3.5.6 Dedução do número irracional $\boldsymbol{\pi}$.

Considere a figura (Figura 15), que representa um quadrado inscrito num círculo de raio r. Pretende-se demonstrar a partir de polígonos regulares inscritos no círculo a dedução para o número irracional π;

Figura 15: Quadrado de lado $L = r\sqrt{2}$ inscrito numa circunferência de raio r.



Fonte: Autoria próprias

Observando a figura, tem-se que a área do triangulo OCD será dado da seguinte maneira:

$$A_T = \frac{l.a_{po}}{2},$$

onde L representa o lado do quadrado, a_{po} o apótema e A_T a área do triangulo. De acordo com a figura, pode-se escrever:

$$A_T = \frac{r\sqrt{2}.rcos45º}{2} = \frac{\sqrt{2}r^2}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Como a área do quadrado representa a soma dos quatro triângulos pela figura, tem-se que:

$$A_P = 4A_T = 2r^2 = r\sqrt{2}.r\sqrt{2} = L.L = L^2.$$

Que é justamente a área do quadrado de lado L. Esse mesmo resultado pode ser obtido usando a matriz,

$$A_P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Considerando os pontos dos vértices (**Figura 15**), pode-se escrever:

$$A_P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & r \\ r & 0 \\ 0 & -r \\ -r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.4r^2 = 2r^2.$$

De um modo geral, um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência pode ser determinado considerando a área de n triângulos, cuja soma é equivalente a área do polígono. Isto é,

$$A_P = nA_T.$$

Nesse caso, sendo a área do triângulo dado, desde que se conheça os seus vértices,

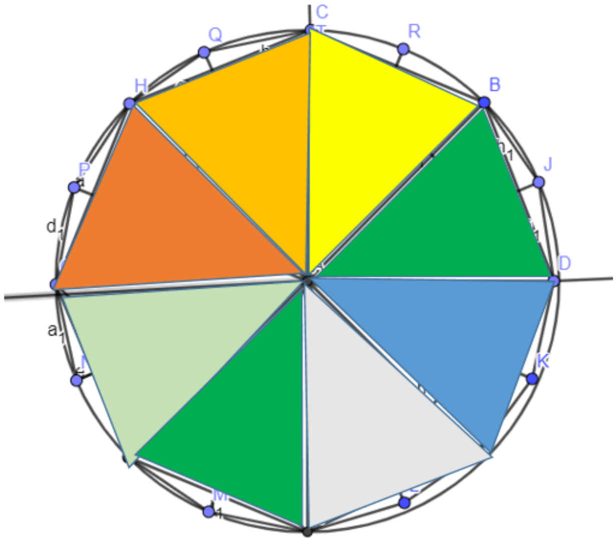
$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

substituindo, vem que,

$$A_P = \frac{n}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Se considerar valores de $n = 8, n = 16, n = 32, n = 64$, etc, pode-se deduzir uma sequência, onde cada uma representa a área de um polígono regular e que quando o número de lados tende ao infinito, a última sequência constitui no número irracional denominado de π. A figura (Figura 16) mostra um polígono para $n = 8$.

Figura 16: Polígono regular inscrito num círculo de raio r.



Fonte: Própria dos autores.

Seja a expressão

$$A_T = \frac{l.a_{po}}{2},$$

onde,

Polígono	Área	Valores para $r = 1$
4	$2r^2$	2,0000
8	$2\sqrt{2}r^2$	2,8284
16	$4\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r^2$	3,0615...
32	$8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,r^2$	3,1214...
64	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,r^2$	3,1365...

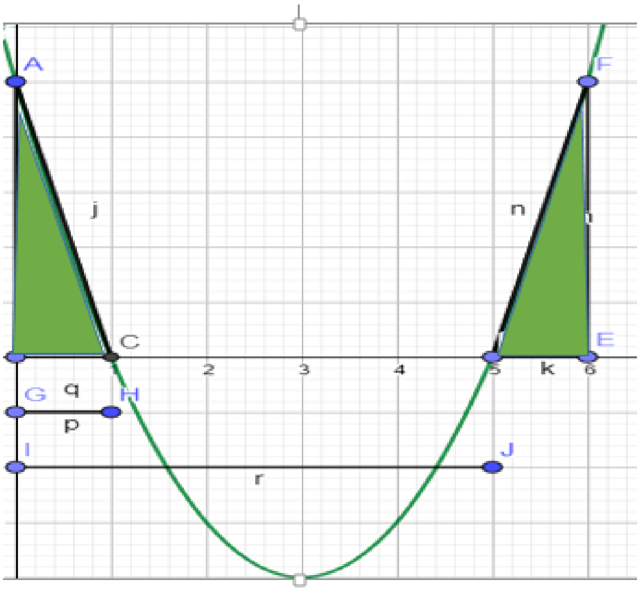
128	$32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\,r^2$	3,1403...
256	$64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}\,r^2$	3,1413...
512	$128\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}\,r^2$	3,1415...
1024	$256\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}\,r^2$	3,1415...
N	$N\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}}}\,r^2..$	3,1415...
Infinitos pontos	π	3,1415...

Verifica-se que sendo a área do circulo πr^2 e tendo em vista que para $r = 1$, a medida que aumenta os números de polígonos ou as áreas dos triângulos, observa-se que quando n tende a valores elevados, a área corresponde ao mesmo resultado π, como mostra a tabela anterior.

3.6 APLICAÇÕES EM PARÁBOLAS, EM ÁREA QUADRADA E ELIPSES

3.6.1 Teorema de Etiene

Dada a parábola seguir:



Prove que $x = x_1 + x_2$, onde x_1 e x_2 são as raízes da função quadrática, supondo que $A_1 = A_2$.

Solução

Para a área A_1 e A_2 vem que,

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}(-x_1C) \rightarrow |A_1| = \frac{1}{2}x_1C,$$

e

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & C \\ x_2 & 0 \\ x & 0 \\ x & C \end{vmatrix} = \frac{x_2 \cdot C - x.C}{2} = \frac{C}{2}(x_2 - x),$$

ou

$$|A_2| = \frac{C}{2}(x - x_2),$$

como

$$|A_1| = |A_2| \rightarrow \frac{C}{2}(x - x_2) = \frac{1}{2}x_1C,$$

vem que,

$$x - x_2 = x_1 \Rightarrow x = x_1 + x_2$$

3.6.2 Área ao quadrado de um triângulo

Considere o triângulo. Para calcular a área do ΔABC, usa-se a expressão:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow A = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)}{2}.$$

Se caso pretender obter A^2, torna-se fácil considerar:

$$\frac{1}{4}A^2 = \frac{A \cdot A}{4} = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{4}.$$

No entanto, como calcular esse resultado usando o produto de matrizes? Isto é:

$$A^2 = A \cdot A = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Não há como realizar o produto de duas matrizes retangulares, pois não se aplica linhas e colunas diferentes, uma vez que, as matrizes não são quadradas. Para sair dessa impossibilidade, usa-se como critério de solução, a eliminação das primeiras e últimas linhas das matrizes dadas, o que as torna matrizes quadradas, tornando possível a solução. Ou seja:

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

logo, fazendo o desenvolvimento, obtém-se que:

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1^2 + y_1y_2 & x_1y_1 + y_1y_2 \\ x_2x_1 + y_2x_2 & x_2y_1 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1^2 + y_1x_2) \cdot (x_2y_1 + y_2^2) - (x_2x_1 + y_2x_2) \cdot (x_1y_1 + y_1y_2)$$

$$x_1^2x_2y_1 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1x_2y_2^2 - x_1^2x_2y_1 - x_1x_2y_1y_2 - y_2x_2x_1y_1 - y_2^2y_1x_2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{4}(x_1^2y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_1^2) \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4}(x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

O que está de acordo com a expressão inicial.

Seja o exemplo:

Dado o triângulo de vértices $A(0,0)$ $B(4,y)$ e $C(6,2)$, de modo que tenha uma área de $5m^2$, calcule o valor de y.

Solução

Usando a notação matricial dada por:

$$A \cdot A = A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & y \\ 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & y \\ 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tendo em vista a propriedade anterior demonstrado, vem que:

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & y \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & y \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 25.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 4 & y \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & y \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 100,$$

ou,

$$\begin{vmatrix} 16 + 6y & 6y \\ 36 & y^2 + 4 \end{vmatrix} = 100 \rightarrow \begin{vmatrix} 2(8 + 3y) & 6y \\ 36 & y + 4 \end{vmatrix} = 100,$$

então,

$$2(6y + 4) \cdot (8 + 3y) - 6y \cdot 36 = 100 \Rightarrow 4(3y + 2) \cdot (8 + 3y) - 6y \cdot 9 \cdot 4 = 100$$

$$\Rightarrow (3y + 2) \cdot (8 + 3y) - 54y = 25 \Rightarrow 24y + 9y^2 + 16 + 6y - 54y = 25$$

$$\Rightarrow -24y + 9y^2 + 16 - 25 = 0 \Rightarrow 9y^2 - 24y - 9 = 0 \div 3 \rightarrow 3y^2 - 8y - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 64 + 36 = 100$$

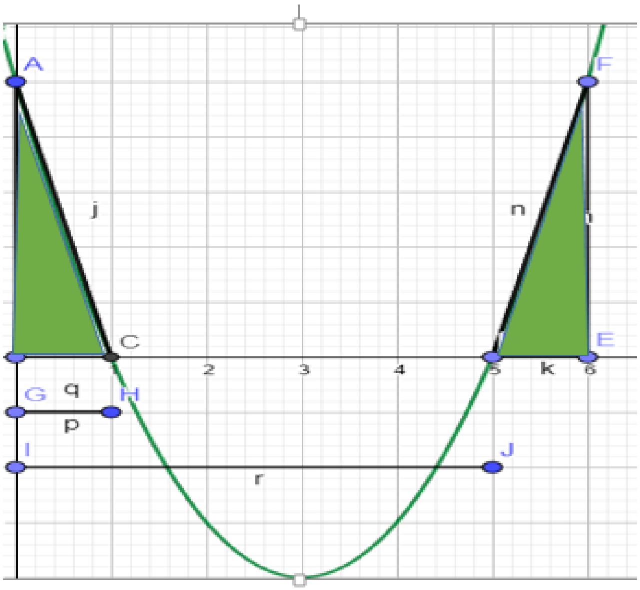
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 10}{6}$$

$$y' = 3 \text{ e } y'' = -1/3$$

Nesse caso, o valor seria $y = 3$

3.6.3 Média das raízes de uma parábola

Dada a parábola



Mostre que:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Solução

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x & y \\ x & 0 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y - xy) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}y(x_1 - x) \Rightarrow |A_1| = \frac{1}{2}y(x - x_1).$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x & 0 \\ x_2 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = \frac{x_2 y - xy}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{y}{2}(x_2 - x),$$

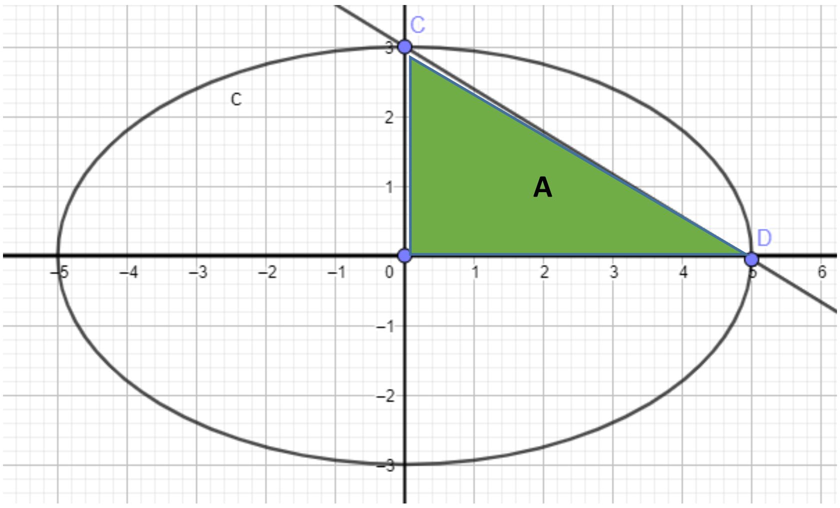
fazendo:

$$A_1 = A_2 \rightarrow \frac{y}{2}(x_2 - x) = \frac{1}{2}y(x - x_1) \Rightarrow x_2 - x = x - x_1 \rightarrow 2x = x_2 + x_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

3.6.4 Equação de uma elipse

Uma elipse mostrada na figura abaixo possui no 1º quadrante um triângulo cuja área ao quadrado é dada por $\frac{225}{4}m^2$. Sabendo-se que a soma dos eixos maior e menor da elipse vale 8, calcule a equação da elipse, usando a notação matricial:



Sabe-se que,

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Onde $A = (\frac{15}{2})m^2$ é uma área do triângulo e $a + b = 8$, vem que,

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ba & 0 \\ 0 & ab \end{vmatrix} \Rightarrow 4A^2 = \begin{vmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{vmatrix} = b^2a^2 \Rightarrow b^2a^2 = 225$$

$$b^2a^2 = 225 \rightarrow Ab = 15$$

$$a + b = 8 \rightarrow a = 3 \text{ e } b = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Portanto, mostra-se como é importante utilizar a propriedade matricial para obter a equação da elipse em que o triangulo se encontra inscrito nela no primeiro quadrante.

3.6.5 Movimento de uma partícula

Uma partícula parte da origem do sistema de coordenada e pretende chegar no ponto D. Sabendo-se que a área do triângulo ABD ao quadrado tem valor de $\frac{225}{4}m^4$, determine a(s) coordenada(s) que a partícula pode passar saindo do ponto A até atingir D.

Solução: Sejam os pontos $A(0,0), B(x,3)$ e $D(6,3)$ e $C(x,1)$

$$A \cdot A = A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & 3 \\ 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & 3 \\ 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tendo em vista a propriedade anterior demonstrado, vem que:

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4.A^2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+18 & 3x+6 \\ 6x+12 & 18+4 \end{vmatrix} = 4.A^2 \Rightarrow 22(x^2+18) - (3x+6).(6x+12) = 4.A^2$$

$$\Rightarrow 22x^2 + 396 - 18(x+2)^2 = 4.A^2 \Rightarrow 22x^2 + 396 - 18(x^2+4x+4) = 4.A^2$$

$$\Rightarrow 22x^2 + 396 - 18x^2 - 72x - 72 = 4.A^2 \Rightarrow 4x^2 - 72x + 324 = 4.A^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = A^2.$$

Sendo

$$A^2 = \frac{225}{4},$$

logo,

$$x^2 - 18x + 99/4 = 0$$

$$\Delta = 324 - 99 = 225$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{18 \pm 15}{2}$$

$$x' = 3 \text{ e } x'' = 16{,}5.$$

Logo, as coordenadas da partícula seria $B(3{,}3)$ e $C(3,1)$ ou $B(16{,}5{,}3)$ e $C(16{,}5{,}1)$.

CAPÍTULO 4: APLICAÇÕES ENVOLVENDO AS TÉCNICAS DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS MATRICIAL E EUCLIDIANA, CONTEXTUALIZADAS.

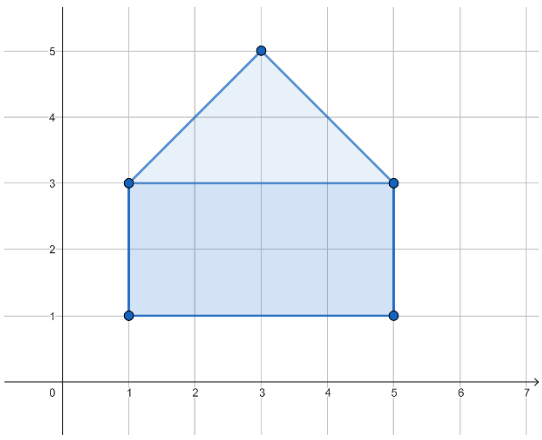
As técnicas de cálculo de áreas de figuras planas desempenham um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a matemática pura até aplicações em engenharia, arquitetura, computação gráfica e geoprocessamento. No contexto educacional, a abordagem matricial e euclidiana oferece perspectivas distintas, complementares e altamente eficazes para a resolução de problemas geométricos.

A técnica euclidiana, baseada nos princípios clássicos da geometria, permite a compreensão intuitiva das propriedades das formas, enquanto a abordagem matricial, ancorada na álgebra linear, possibilita a manipulação eficiente de dados e equações, sendo amplamente utilizada em modelagens computacionais. A contextualização dessas metodologias torna-se essencial para conectar a teoria à prática, facilitando o aprendizado e ampliando suas aplicações em problemas do mundo real. Este capítulo explora a relevância dessas técnicas, destacando suas vantagens, limitações e aplicabilidades em diversos cenários, contribuindo para uma visão mais abrangente e integrada do estudo das áreas de figuras planas.

Aplicação 1: Engenheiro civil responsável pelo planejamento de um parque.

Suponha que um engenheiro civil responsável pelo planejamento de um parque. Ele precisa calcular a área de uma área retangular e de um triângulo adjacente ao retângulo para determinar a quantidade de grama necessária para cobrir essa área As coordenadas dos vértices do retângulo são $A\ (1, 1)$, $B\ (5, 1)$, $C\ (5, 3)$, $D\ (1,3)$. E as coordenadas dos vértices do triângulo adjacente são $C\ (5, 3)$, $D\ (1, 3)$ e $E\ (3, 5)$.

Seja a figura abaixo que representa esse planejamento.



Primeiro, organizamos as coordenadas dos vértices do retângulo na tabela, incluindo o primeiro vértice no final:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

calculando o determinante dessa matriz, temos:

$$D = 1\,.\,1 + 5.\,3 + 5\,.\,3 + 1\,.\,1 - 1\,.\,5 - 1\,.\,5 - 3\,.\,1 - 3\,.\,1 = 32 - 16 = 16.$$

Portanto a área do retângulo vale:

$$A_r = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A_r = \frac{16}{2} = 8,$$

agora, organizamos as coordenadas dos vértices do triângulo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante, temos:

$$D = 5\,.\,3 + 1\,.\,5 + 3\,.\,3 - 3.\,1 - 3\,.\,3 - 5\,.\,5 = 29 - 37 = -8,$$

aplicando a fórmula da área, temos:

$$A_t = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A_t = \frac{8}{2} = 4,$$

por fim, a área total pode ser calculada pela soma das áreas encontradas, logo:

$$A_{total} = A_t + A_r$$

$$A_{total} = 12$$

Aplicação 2: Pilotando um drone em uma área aberta.

Ana está pilotando um drone em uma área aberta e deseja medir a área de uma região triangular no solo. Ela marca três pontos no solo e registra as coordenadas dos pontos no plano cartesiano. As coordenadas dos pontos são:

- Ponto $A\ (4, 18)$
- Ponto $B\ (8, 10)$
- Ponto $C\ (6, 12)$

Queremos calcular a área da região triangular no solo usando a fórmula do cadarço.

Solução:

Para calcular essa área usaremos a fórmula da área, obtida a partir do determinante de uma matriz sobre as coordenadas da figura.

$$A_t = \frac{1}{2}|D|,$$

calculando o determinante pela fórmula do cadarço, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 8 & 10 \\ 6 & 12 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$D = 4\,.\,10 + 8\,.\,12 + \ 6\,.\,18 - 18\,.\,8 - 10\,.\,6 - 12\,.\,4 \Rightarrow D = 244 - 252 = -8,$$

agora, vejamos o valor da área:

$$A_t = \frac{1}{2}\,.\,|-8| = 4$$

Aplicação 3: cálculo dos lados de um polígono regular de n lados.

Usando a teoria do cadarço, determine uma fórmula que mostre como calcular os lados de um polígono regular de n lados.

Solução:

Para calcular essa área pela regra do cadarço, precisaremos determinar as coordenadas dos vértices. Em um polígono regular de n lados, os vértices podem ser distribuídos uniformemente ao longo de um círculo de raio r, centrado na origem (0, 0). As coordenadas dos vértices podem ser dadas por:

$$(x_i, y_i) = \left(r.cos(\theta_i), r.sin(\theta_i)\right),$$

onde:

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{n},$$

para $i = 0,1,2,..,n-1$.

Para aplicar a fórmula do cadarço, precisamos listar as coordenadas dos vértices em ordem e duplicar a primeira coordenada ao final da lista. Assim:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})\right|,$$

onde, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

Para um polígono que possui n lados e raio r, podemos deduzir:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(r\,.\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right).r\,.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) - r.sen\left(\frac{2\pi i}{n}\right).r.cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right)\right)\right|,$$

ao simplificar a fórmula, temos:

$$A = \frac{1}{2}\left|r^2.\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) - sen\left(\frac{2\pi i}{n}\right).cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right)\right)\right|,$$

pela propriedade trigonométrica que enuncia:

$$sen(B-A) = \cos(A)\,.sen(B) - sen(A).\cos(B).$$

Assim,

$$A = \frac{1}{2}\left|r^2.\sum_{i=1}^{n-1} sen\left(\frac{2\pi(i+1)}{n} - \frac{2\pi i}{n}\right)\right| \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left|r^2.\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|.$$

Como $sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ é constante para todo i, chegamos a solução da fórmula que calcula um polígono de n lados.

$$A = \frac{1}{2}\left| r^2. n. sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|,$$

como queríamos demonstrar.

Aplicação 4: Área de um jardim.

Usando a expressão anterior, encontre como obter a área de um jardim que possui 8 lados, sabendo que a distância do centro a um de seus vértices vale 10 metros.

Solução

Usando a fórmula que derivamos anteriormente:

$$A = \frac{1}{2}\left| r^2. n. sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|,$$

no caso de um octógono, sabendo que a distância do seu centro a um dos seus vértices é de 10 metros, ou seja, $r = 10$, substituímos:

$$A = \frac{1}{2}\left| 10^2. 8\ .sen\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right|$$

sabendo que:

$$sen\left(\frac{2\pi}{8}\right) = sen\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

então:

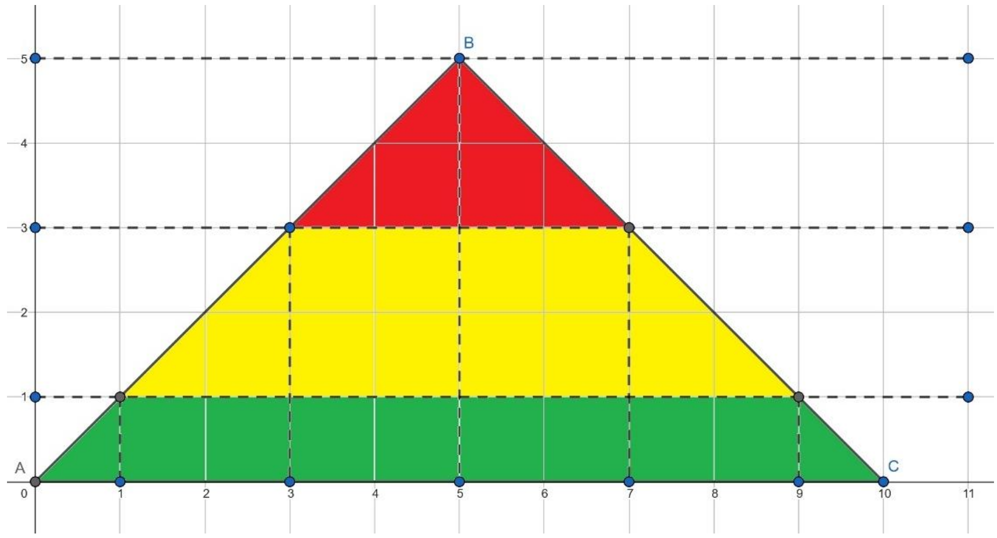
$$A = \frac{1}{2}\left|100\ .8\ .\frac{\sqrt{2}}{2}\right|,$$

assim, temos que a solução vale:

$$A = 200\sqrt{2}.$$

Aplicação 5: Retas paralelas e transversais.

Sejam dadas as retas paralelas e transversais que determinam as áreas A_1 (em vermelho), A_2(em amarelo) e A_3 (em verde):



Usando o método do cadarço, determine as áreas:

a) A_1

Solução:

Com a utilização do método do cadarço, vamos inicialmente coletar os pontos para solucionar o determinante. Sejam os pontos:

$$(5,5), (3,3), (7,3)$$

Aplicando no determinante temos:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \\ 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 5.3 + 3.3 + 7.5 - 5.3 - 3.7 - 3.5 \Rightarrow D = 8$$

Agora, aplicamos a fórmula da área pelo determinante:

$$A = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A = \frac{1}{2}.8 \Rightarrow A = 4\,u.a.$$

b) A_2

Solução:

Assim como no exemplo anterior, vamos coletar os pontos. Sejam eles:

$$(1,1), (3,3), (7,3), (9,1)$$

Aplicando no determinante do cadarço:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 7 & 3 \\ 9 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 1.3 + 3.3 + 7.1 + 9.1 - 1.3 - 3.7 - 3.9 - 1.1 \Rightarrow D = -24$$

Pela fórmula da área com determinante:

$$A = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A = \frac{1}{2}.24 \Rightarrow A = 12\ u.a.$$

c) A_3

Solução:

Coletando os pontos, temos:

$$(0,0), (1,1), (9,1), (10,0)$$

Calculando o determinante:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 0.1 + 1.1 + 9.0 + 10.0 - 0.1 - 1.9 - 1.10 - 0.0 \Rightarrow D = -18$$

Calculando a área, temos:

$$A = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A = \frac{1}{2}.18 \Rightarrow A = 9\ u.a.$$

d) A_{total}

A área total pode ser verificada através da relação:

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_{total} = 4 + 12 + 9 = 25\ u.a.$$

CONCLUSÃO

O estudo da matriz retangular para o cálculo de áreas planas e sua aplicação no ensino de matemática demonstrou-se uma abordagem promissora para a resolução de problemas geométricos. A utilização de matrizes nesse contexto permitiu uma análise sistemática das áreas de figuras planas, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Além disso, a teoria do cadarço, ao ser incorporada ao estudo das matrizes, apresentou-se como uma ferramenta eficaz para o cálculo de áreas de regiões delimitadas por polígonos.

No âmbito do ensino da matemática, a abordagem proposta mostrou-se vantajosa por permitir um ensino mais dinâmico e interativo. A incorporação de matrizes para a resolução de problemas geométricos proporciona um maior engajamento dos estudantes, pois permite a utilização de recursos tecnológicos e softwares matemáticos que facilitam os cálculos e visualizações gráficas. Dessa forma, os alunos conseguem compreender de maneira mais intuitiva e concreta os conceitos matemáticos relacionados à geometria plana.

Outro aspecto relevante dessa abordagem é sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento matemático e da capacidade de resolução de problemas. A utilização de matrizes e da teoria do cadarço permite que os estudantes explorem diferentes estratégias de cálculo, promovendo um raciocínio mais analítico e estruturado. Além disso, essa metodologia pode ser aplicada a diversas situações reais, como o cálculo de áreas de terrenos irregulares, mapas e projetos arquitetônicos, demonstrando sua relevância prática.

Para os docentes, a implementação dessa abordagem também representa um avanço significativo, pois possibilita o uso de atividades interdisciplinares que conectam álgebra e geometria. A interseção entre essas áreas do conhecimento torna o ensino mais dinâmico e motivador, contribuindo para um aprendizado mais significativo. Além disso, o uso de matrizes no ensino de geometria pode ajudar a reduzir as dificuldades comuns enfrentadas pelos alunos ao lidarem com cálculos de área, oferecendo um método alternativo e eficiente para a solução desses problemas.

Por fim, conclui-se que a matriz retangular e a teoria do cadarço representam ferramentas valiosas no ensino da matemática, proporcionando um aprendizado mais eficaz e acessível. A adoção dessa metodologia pode contribuir para uma melhoria significativa no desempenho dos alunos em geometria plana, tornando o ensino mais atrativo e estimulante. Assim, é recomendável que educadores explorem essa abordagem em sala de aula, promovendo uma forma inovadora e eficiente de ensinar matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. Utilizando a história no ensino da Geometria. *História da Matemática em atividades didáticas*. Natal, RN: EDUFRN, 2005. p. 11–52.

CAROLI, A.; CALLIOLI, C. A.; FEITOSA, M. O. *Matrizes, vetores e geometria analítica*. 9. ed. São Paulo: Nobel, 1978.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. v. 1. São Paulo: Makron Books do Brasil, [s.d.].

CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Pelos caminhos de uma nova experiência no ensino de Geometria. In: **FIORENTINE, Dario; MIORIM, Maria Ângela.** *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas, SP: Editora Graf. FE/Unicamp – Cempem, 2001. p. 45–82.

DICIONÁRIO ENCICLOPÉDICO CONHECER. História da geometria: o corpo como unidade. *Só Matemática*, 2021. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/geometria.php. Acesso em: 12 abr. 2025.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. v. 9. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FACCHINI, Walter. *Matemática para a escola de hoje: livro único*. São Paulo: FTD, 2006.

FALZETA, Ricardo. Medições, cálculos e legumes. *Revista Nova Escola*, São Paulo, n. 144, p. 33, ago. 2001.
--- A matemática pulsa no dia a dia. *Revista Nova Escola*, São Paulo, n. 150, p. 18–24, mar./abr. 2002.

PCNs Fáceis de Entender. *Nova Escola*. São Paulo: Abril, [s.d.].

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOUD, S. A. A aprendizagem de geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 322–346, 2019. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p322-346.