

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



FREDERICO TEIXEIRA LEITE

**A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO PROCESSO DE
ENSINO-APRENDIZAGEM DE LÓGICA MATEMÁTICA:
ELABORAÇÃO E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA
DIDÁTICA**

Belo Horizonte
2024

FREDERICO TEIXEIRA LEITE

**A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO PROCESSO DE
ENSINO-APRENDIZAGEM DE LÓGICA MATEMÁTICA:
ELABORAÇÃO E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA
DIDÁTICA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):

Érica Marlúcia Leite Pagani

Banca Examinadora:

Marcio Pironel

Gilmer Jacinto Peres

Belo Horizonte

2024

L533i Leite, Frederico Teixeira
A investigação matemática no processo de ensino-aprendizagem de lógica matemática: elaboração e análise de uma sequência didática / Frederico Teixeira Leite. – 2024.
215 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Érica Marlúcia Leite Pagani..

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática – Educação – Teses. 2. Investigação matemática – Teses.
3. Lógica simbólica e matemática – Teses. 4. Ensino médio – Teses.
5. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Pagani, Érica Marlúcia Leite.
II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 511.3

FREDERICO TEIXEIRA LEITE

**A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO PROCESSO DE
ENSINO-APRENDIZAGEM DE LÓGICA MATEMÁTICA:
ELABORAÇÃO E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA
DIDÁTICA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 19 de setembro de 2024.

Frederico Teixeira Leite

Frederico Teixeira Leite
(Autor)

Érica Marlúcia Leite Pagani

Érica Marlúcia Leite Pagani
(Orientadora)

Belo Horizonte
2024

AGRADECIMENTOS

Inicio os meus agradecimentos enfatizando a infinitude de fatores que me permitiram finalizar essa etapa da minha formação. No entanto, me atendo a agradecer àqueles que, de forma ativa, contribuíram para minha formação e para meu desenvolvimento acadêmico.

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão por, desde o começo, me amarem e demonstrarem seu afeto, contribuindo para minha formação como cidadão. Ao meu pai, agradeço pela preocupação com minha educação, não apenas por me proporcionar uma formação de qualidade, mas também por contribuir ativamente para minha formação, trazendo para dentro de casa o interesse pela busca do conhecimento. Agradeço também à minha mãe por sempre incentivar minha educação e buscar o melhor para o meu futuro, dando suporte e ajudando-me a enfrentar as dificuldades presentes no meu processo de desenvolvimento como pessoa. A ambos, agradeço por sempre terem me permitido acessar as oportunidades que acreditavam que eu merecia. Ao meu irmão, agradeço pelo apoio constante, mesmo em momentos de crise, sempre buscando somar na trajetória que venho traçando.

Gostaria também de agradecer aos meus amigos, que me proporcionaram diversos momentos de alegria e aprendizado. Agradeço por todos os bons momentos em que me senti acolhido e amado por vocês. Pela paciência, agradeço a vocês por permanecerem ao meu lado, mesmo quando fui indelicado, teimoso ou distraído. Agradeço também pelo apoio nos momentos difíceis, quando eu não sabia para onde ir ou mesmo onde poderia chegar. Além disso, não posso deixar de agradecer pelas diferentes perspectivas de vida que vocês me ofereceram.

Acredito ser importante agradecer aos mestres que passaram pela minha vida. A todos os professores, agradeço por darem o seu melhor e por trazerem para a minha vida os aprendizados que adquiriram. Aos meus orientadores na graduação, agradeço por me apresentarem e desenvolverem comigo os saberes da educação, inserindo-me no campo da Educação Matemática, despertando em mim diversos questionamentos e me envolvendo no olhar de um pesquisador. Agradeço também à minha orientadora, Érica, que abraçou minha pesquisa, dando suporte em todo o processo e constantemente me ajudando a me tornar um pesquisador e educador melhor.

Além disso, agradeço aos meus alunos, que abraçaram minha pesquisa de forma participativa. Sem a colaboração deles, eu não poderia ter realizado minha pesquisa e não teria aprendido tanto no processo. Ao longo das aulas de Matemática, muitos buscaram dar o melhor de si e superar as dificuldades encontradas. Sou grato por trabalharmos juntos no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, a todos, citados e não citados aqui, agradeço por me permitirem concluir mais uma etapa da minha vida e por abrirem caminho para o futuro que posso alcançar. Saibam que não apenas neste texto, mas ao longo de toda a minha vida, a gratidão que tenho por todos será sempre lembrada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A Lógica Matemática é um dos pilares do desenvolvimento da Matemática como estrutura e método. No entanto, há poucos materiais que abordam a Lógica Matemática do ponto de vista educacional, particularmente na Educação Básica. Buscando uma alternativa para suprir essa carência, elaboramos uma sequência didática que, baseada na Investigação Matemática, visa desenvolver tópicos de Lógica Matemática dentro do processo de ensino-aprendizagem. Assim, nesta dissertação, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: **"Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos de Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?"**. Para responder a essa questão, traçamos alguns objetivos, entre os quais realizamos uma revisão bibliográfica sobre Investigação Matemática, conforme a perspectiva de Ponte, Brocado e Oliveira (2009). Também foi realizada uma revisão bibliográfica sobre Lógica Matemática, na qual foram identificados e discutidos tópicos importantes para a introdução da Lógica Matemática, considerando uma abordagem educacional. Posteriormente, buscando investigar o processo de ensino-aprendizagem da Lógica, elaboramos um questionário prévio e, em seguida, desenvolvemos e aplicamos uma sequência didática que trabalhasse esses tópicos na 2ª série do Ensino Médio. Por fim, discutimos os impactos do material desenvolvido no processo de aprendizagem dos alunos. Os dados analisados evidenciaram que caráter o exploratório das tarefas investigativas deixou os alunos mais à vontade para expressar suas opiniões e criar uma desenvoltura argumentativa, permitindo um engajamento maior nas atividades e um envolvimento ativo no processo de formalização de conceitos, indagando as definições, sugerindo exemplos e expondo dúvidas que surgiam. Aperfeiçoamos as tarefas desenvolvidas em sala de aula na construção de um guia, no formato de produto educacional, voltado a professores da Educação Básica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Investigação Matemática. Lógica Matemática. Ensino Médio. Sequência Didática.

ABSTRACT

Mathematical logic is one of the pillars of the development of mathematics as a structure and method. However, there are few materials that address Mathematical Logic from an educational point of view, particularly in Basic Education. Seeking an alternative to make up for this lack, this dissertation develops a didactic sequence that, based on Mathematical Investigation, aims to develop Mathematical Logic topics within the teaching-learning process. Thus, in this dissertation, we seek to answer the following research question: **“How does a didactic sequence, based on Mathematical Investigation, contribute to the teaching and learning of Mathematical Logic topics in the second grade of secondary school?”**. In order to answer this question, we set ourselves some objectives, including a literature review on Mathematical Investigation, from the perspective of Ponte, Brocado and Oliveira (2009). We also carried out a literature review on Mathematical Logic, in which we identified and discussed important topics for the introduction of Mathematical Logic, considering an educational approach. Subsequently, in order to investigate the teaching-learning process of Logic, we prepared an initial questionnaire and then developed and applied a didactic sequence that worked on these topics. Finally, we discussed the impact of the material developed on the students' learning process. The data we analyzed showed that the exploratory nature of the investigative tasks made the students feel more comfortable expressing their opinions and creating an argumentative style, allowing them to be more engaged in the activities and actively involved in the process of formalizing concepts, asking questions about definitions, suggesting examples and expressing doubts that arose. We refined the tasks developed in the classroom in the construction of a guide, in the format of an educational product, aimed at primary school teachers.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Investigation. Mathematical Logic. High School. Didactic Sequence.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação de Normas Técnicas

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quadro de Tarefas Matemáticas	21
Figura 2 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura	22
Figura 3 – Exemplos de tarefas	23
Figura 4 – Ambientes de Aprendizagem.	24
Figura 5 - Nuvem de Palavras	68
Figura 6 - Protocolo 1	69
Figura 7 - Protocolo 2	69
Figura 8 - Protocolo 3	70
Figura 9 - Protocolo 4	70
Figura 10 - Protocolo 5	71
Figura 11 - Protocolo 6	71
Figura 12 - Protocolo 7	72
Figura 13 - Protocolo 8	73
Figura 14 - Protocolo 9	74
Figura 15 - Protocolo 10	74
Figura 16 - Protocolo 11	75
Figura 17 - Protocolo 12	79
Figura 18 - Protocolo 13	80
Figura 19 - Protocolo 14	81
Figura 20 - Protocolo 15	82
Figura 21 - Protocolo 16	82
Figura 22 - Protocolo 17	83
Figura 23 - Protocolo 18	84
Figura 24 - Protocolo 19	84
Figura 25 - Protocolo 20	85
Figura 26 - Protocolo 21	86
Figura 27 - Protocolo 22	90
Figura 28 - Protocolo 23	90
Figura 29 - Protocolo 24	92
Figura 30 - Protocolo 25	92
Figura 31 - Protocolo 26	93
Figura 32 - Protocolo 27	93
Figura 33 - Protocolo 28	95
Figura 34 - Protocolo 29	95
Figura 35 - Protocolo 30	96
Figura 36 - Protocolo 31	97
Figura 37 - Protocolo 32	97
Figura 38 - Protocolo 33	98
Figura 39 - Protocolo 34	98

Figura 40 - Protocolo 35	99
Figura 41 - Protocolo 36	100
Figura 42 - Protocolo 37	101
Figura 43 - Protocolo 38	105
Figura 44 - Protocolo 39	106
Figura 45 - Protocolo 40	107
Figura 46 - Protocolo 41	108
Figura 47 - Protocolo 42	109
Figura 48 - Protocolo 43	110
Figura 49 - Protocolo 44	111
Figura 50 - Protocolo 45	114
Figura 51 - Protocolo 46	114
Figura 52 - Protocolo 47	115
Figura 53 - Protocolo 48	116
Figura 54 - Protocolo 49	117
Figura 55 - Protocolo 50	117
Figura 56 - Protocolo 51	118
Figura 57 - Protocolo 52	119
Figura 58 - Protocolo 53	122
Figura 59 - Protocolo 54	123
Figura 60 - Protocolo 55	123
Figura 61 - Protocolo 56	124
Figura 62 - Protocolo 57	124
Figura 63 - Protocolo 58	125
Figura 64 - Protocolo 59	125
Figura 65 - Protocolo 60	127
Figura 66 - Protocolo 61	128
Figura 67 - Protocolo 62	129
Figura 68 - Protocolo 63	129
Figura 69 - Protocolo 64	130
Figura 70 - Protocolo 65	131

LISTA DE QUADROS

Quadro 1– Proposições categóricas	39
Quadro 2– Tabela Verdade 1	42
Quadro 3– Tabela Verdade 2	43
Quadro 4 – Tabela Verdade 3	43
Quadro 5 – Tabela Verdade Negação	44
Quadro 6 – Mudança de Vocabulário	44
Quadro 7 – Tabela Verdade Conjunção	46
Quadro 8 – Tabela Verdade Disjunção	46
Quadro 9 – Tabela Verdade Disjunção Exclusiva	47
Quadro 10 – Tabela Verdade Condicional	48
Quadro 11 – Tabela Verdade Bicondicional	49
Quadro 12 – Tabela Verdade ($p \leftrightarrow p$)	50
Quadro 13 – Tabela Verdade Trivial ($p \leftrightarrow q$)	50
Quadro 14 – Tabela Verdade Dupla Negação	51
Quadro 15 – Tabela Verdade Equivalência Lógica Dupla Negação	51
Quadro 16 – Tabela Verdade Contra Positiva	52
Quadro 17 – Investigação Matemática no repositório do PROFMAT	60
Quadro 18 – Lógica Matemática no repositório do PROFMAT	61
Quadro 19 – Planejamento	67
Quadro 20 – Calendário de Atividades	76

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	15
2.1 Investigação Matemática em sala de aula	16
2.1.1 Tarefas e tarefas investigativas	18
2.1.2 Etapas de uma Tarefa Investigativa	24
2.1.3 Papel do Professor nas Tarefas Investigativas	27
3 LÓGICA MATEMÁTICA	31
3.1 História da Lógica Aristotélica	32
3.2 Lógica Formal	34
3.2.1 Proposição	35
3.2.1.1 Proposições Categóricas	36
3.2.1.2 Proposições Simples e Compostas	38
3.2.2 Tabela Verdade	40
3.2.3 Operações lógicas	41
3.2.3.1 Negação	41
3.2.3.2 Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva	43
3.2.3.3 Condicional e Bicondicional	45
3.2.1 Equivalências lógicas	47
3.2.1.1 Dupla negação	48
3.2.1.1 Contra Positiva	49
3.3 O Ensino de Lógica Matemática no Ensino Médio	50
4 METODOLOGIA E CONTEXTO DE PESQUISA	53
4.1 Pesquisa Qualitativa	53
4.2 Contexto de pesquisa	54
4.3 Investigação e Lógica Matemática em dissertações do PROFMAT	57
4.4 Sequência didática	60
5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS CONSTRUÍDOS	63
5.1 Considerações Iniciais	63
5.2 Planejamento Geral	64
5.3 Questionário Prévio	66
5.4 Aplicação da Sequência Didática	73
5.4.1 Aulas de Introdução à Lógica	75
5.4.2 Tarefa 1: Porque médicos têm a letra feia?	76
5.4.3 Formalização de Proposição Categórica e Tarefa 2: Proposições categóricas	86
5.4.4 Tarefa 3: Investigando o Valor Lógico	89
5.4.5 Tarefa 4: Morcegos	102
5.4.6 Tarefa 5: Construindo a Tabela Verdade	111
5.4.7 Tarefa 6: Investigando relações de causa e consequência	118
5.4.8 Discussão e Definição de Equivalência Lógica e Contrapositiva	130

6 PRODUTO EDUCACIONAL	133
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
REFERÊNCIAS	139
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	143
APÊNDICE A - Produto Educacional	144
ANEXO A – Questionário Prévio Parte 1	191
ANEXO B – Questionário Prévio Parte 2	192
ANEXO C –Atividade 1	194
ANEXO D –Atividade 2	195
ANEXO E –Atividade 3	196
ANEXO F –Atividade 4	200
ANEXO G –Atividade 5	205
ANEXO H –Atividade 6	207
ANEXO I –Atividade 7	212
ANEXO J - Termo de Consentimento e Assentimento	215

1 INTRODUÇÃO

A Lógica e a Matemática são comumente associadas uma à outra. No entanto, durante meu percurso acadêmico, tanto no ensino básico quanto no ensino superior, encontrei uma ausência do estudo explícito da Lógica Matemática. Essa matéria sempre aparece de forma implícita nas aulas de Matemática, seja em um conjunto, em uma demonstração ou em uma simples relação de igualdade. A Lógica está lá, escondida, não explicitada como algo que já nascemos sabendo. Mas será que é tão simples assim a Lógica, a ponto de não precisarmos nem falar sobre ela, muito menos discutir o assunto?

Durante o início da minha graduação em Licenciatura em Matemática, me deparei diversas vezes com momentos que a Lógica parecia cada vez menos intuitiva e as lacunas do conhecimento se mostraram ainda mais evidentes. Nesse momento procurei “Onde estudar Lógica?” e achei no curso de Filosofia disciplinas voltadas para essa área, “Lógica 1” e “Lógica 2”. Durante essa disciplina não deixava de me questionar, “Como aquele estudo estava ausente das aulas de Matemática?”

Uma vez formado no papel de educador matemático, e depois no papel de pesquisador, eu me propus a investigar o processo de ensino-aprendizagem da Lógica Matemática, não mais no Ensino Superior, mas no Ensino Médio. Para isso busquei na Investigação Matemática a metodologia base para o ensino de Lógica, isso se deu por acreditar que investigar a forma e estrutura da Lógica permitiria não apenas o desenvolvimento da Matemática, mas várias etapas da estrutura argumentativa dentro e fora dela.

Dessa forma surgiu a questão de pesquisa desta dissertação de Mestrado:

“Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos da Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?”

Para responder a essa questão traçamos diversos objetivos específicos para responder essa questão. Esses são:

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre Investigação Matemática para fundamentar a elaboração da sequência e análise dos protocolos a serem realizadas pelos alunos.
- Fazer uma revisão bibliográfica sobre Lógica Matemática Para fundamentar a elaboração da sequência didática e compor parte do produto educacional no contexto do Ensino Médio.
- Traçar os conteúdos importantes para uma introdução à Lógica Matemática.

- Discutir as abordagens de conceitos da Lógica Matemática do ponto de vista educacional.
- Elaborar um questionário inicial sobre Lógica Matemática.
- Elaborar uma sequência didática que contemple os tópicos importantes da Lógica Matemática.
- Desenvolver a sequência didática, coletando informações para analisar os processos realizados.
- Analisar e discutir as tarefas realizadas na sequência didática, permitindo assim identificar fatores que respondam à questão de pesquisa.
- Desenvolver um material que permita que outros professores possam se basear para ensinar Lógica Matemática para alunos do Ensino Médio.

Para cumprir os objetivos específicos, a sequência didática foi elaborada pensando em uma turma da segunda série do Ensino Médio em uma escola estadual em Belo Horizonte, MG. Essa sequência foi analisada de forma qualitativa buscando responder à questão de pesquisa. Neste texto vamos apresentar as diferentes etapas do processo de desenvolvimento da dissertação. Esse desenvolvimento foi dividido em 6 capítulos.

No primeiro capítulo, Introdução, temos como objetivos principais introduzir o material apresentado e explicitar a Questão de Pesquisa e os objetivos específicos. No segundo capítulo, voltado à Investigação Matemática, atentemos ao fazer uma revisão bibliográfica sobre essa metodologia e analisar suas variações e benefícios para o processo de ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo, voltado à Lógica Matemática, nos atentamos a apresentar e definir tópicos da Lógica Matemática e a apresentar perspectivas voltadas ao ensino desses tópicos, atentando-se também ao processo de ensino desses conceitos. Também neste capítulo, discutimos a importância do ensino de Lógica Matemática e sua ausência em materiais didáticos.

No quarto capítulo nos atentamos a apresentar as metodologias utilizadas durante o processo de elaboração, desenvolvimento, coleta e discussão dos dados. Já no quinto capítulo, utilizamo-nos das revisões feitas no segundo e terceiro capítulos para, apresentarmos e discutirmos os registros coletados, buscando responder à questão de pesquisa. No sexto e último capítulo retomamos e concluimos as informações apresentadas, respondendo assim a questão de pesquisa e incentivando a busca por uma continuidade da pesquisa nessa área de ensino de Lógica Matemática.

2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo temos como objetivo introduzir e discutir a Investigação Matemática em sala de aula. Essa procura trazer para os alunos o método implementado por matemáticos na sua produção de conhecimento. Assim o aluno tem a oportunidade de entender o processo da construção de conhecimento na prática. Portanto, para entender a Investigação Matemática em sala de aula, primeiro iniciaremos uma discussão sobre o fazer Matemática realizado pelos matemáticos profissionais, chamado neste texto de *Investigar em Matemática*.

Um matemático profissional ao investigar Matemática está explorando conhecimentos desconhecidos por ele para buscar padrões, relações, estruturas, observar objetos matemáticos, elaborar e provar conjecturas relacionadas a esses objetos. Esse processo é o que permite a construção e o desenvolvimento da Matemática com seu rigor e formalismo. Dessa forma, esse processo de criar e testar conjecturas até provar um resultado se torna o processo de construção da própria Matemática.

Esse processo de *Investigar em Matemática* procura desenvolver o conhecimento matemático formal. Para cumprir esse objetivo comumente o matemático passa por um processo padrão de desenvolvimento dos conhecimentos que, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), pode ser dividido em quatro momentos:

- i. Um primeiro momento, em que se identifica a situação problema, explora e formula questões.
- ii. No segundo momento é feita uma organização dos dados e informações para assim formular conjecturas.
- iii. No terceiro momento se inicia a fase de testes para tentar verificar e refinar a conjectura.
- iv. No quarto e último é feita a busca por justificativas e a avaliação dessas.

Esse processo de *Investigar em Matemática* não é feito apenas de forma individual, ele busca também interações com outros matemáticos interessados na pesquisa. Esse diálogo permite enxergar outras perspectivas das conjecturas sendo investigadas, podendo ter novas ideias e questionamentos. Inclusive no último momento, de avaliação, é indispensável levantar esse diálogo para permitir que a comunidade matemática possa averiguar o argumento feito para provar as conjecturas. Dessa forma, o processo de diálogo se torna um mecanismo de desenvolvimento de *Investigar em Matemática*, compartilhando ideias e conhecimentos.

Sintetizando, *Investigar em Matemática* é um processo organizado que busca explorar problemas desconhecidos, elaborar conjecturas, testá-las, verificá-las e discuti-las. Esse processo pode ser extremamente trabalhoso por estar explorando as fronteiras do conhecimento matemático. O processo executado por matemáticos, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), está ao alcance dos alunos nas aulas de Matemática e pode ser adaptado pelo professor. Dito isso, continuaremos a discutir sobre a adaptação desse processo para a sala de aula na sessão seguinte.

2.1 Investigação Matemática em sala de aula

Uma primeira diferença do processo de *Investigar em Matemática* e da Investigação Matemática no contexto da sala de aula é que no processo de ensino-aprendizagem os temas não precisam desenvolver problemas complexos, uma vez que o objeto de trabalho é a construção de um conhecimento já existente e não desenvolver teoremas e demonstrações nunca vistos. Outra diferença é que muitas vezes também não é necessário manter o rigor de um matemático profissional, podendo trabalhar o processo de demonstração de conjecturas elaboradas pelo aluno dentro do grau de abstração do aluno. Considerando essa ideia, Ponte, Brocado e Oliveira apresentam sua perspectiva sobre a temática,

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa lidar necessariamente com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, p.9, 2009)

Assim, como um processo baseado na pesquisa de um matemático, é possível permitir que os alunos, ao simularem o *Investigar em Matemática*, desfrutem do desenvolvimento da Matemática de forma ativa e sejam protagonistas no seu processo de aprendizagem, construindo seu conhecimento como um matemático. Esse processo é importante para desenvolver habilidades matemáticas, raciocínio lógico e compreender os caminhos para a construção do conhecimento.

Também a Investigação consegue se enquadrar em diversos contextos escolares, se adaptando, a faixa etária e o nível de escolaridade, pois se pode adaptar tanto quanto possível o grau de rigor a ser trabalhado pelo aluno.

Assim, dentro do contexto de ensino-aprendizagem de Matemática a Investigação entra na sala de aula com um objetivo maior que apenas passar o conteúdo mas também trazer para o aluno uma possibilidade de realizar a construção do seu conhecimento, colocando-o em um local semelhante ao de um matemático, uma vez que desenvolve habilidades semelhantes como construção, avaliação e comprovação de conjecturas.

Dessa forma surgem duas grandes perguntas sobre a adaptação do *Investigar em Matemática* para a sala de aula.

1. “Por que utilizar o *Investigar em Matemática* como recurso educacional?”
2. “Como utilizar o *Investigar em Matemática* como recurso educacional?”

Para responder a primeira pergunta é necessário observar o enfoque do campo da Educação Matemática de natureza didática. Segundo Vieira (2016) “os centros de interesse desse campo de pesquisa são a compreensão sobre como os alunos aprendem e a procura por maneiras que possibilitem aos estudantes obter sucesso na aprendizagem.”(p.64).

Assim, uma vez que o processo de investigação pode trazer benefícios para aprendizagem, precisamos entender como se dá o processo de aprendizagem de Matemática e como a Investigação pode colaborar. Seguindo o conceito de aprendizagem escolar da Matemática, apresentado por Ponte (2003),

[...] o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.(p.3)

A Investigação Matemática em sala de aula se mostra uma estratégia no processo de ensino-aprendizagem que desenvolve competências como a capacidade de raciocínio, de resolver problemas e usar de conceitos matemáticos em situações diversas, uma vez que esse processo investigativo de elaborar, testar e justificar conjecturas permite ao investigador trabalhar ativamente essas competências.

Também é importante notar que segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), um dos pontos altos da Investigação Matemática em sala de aula é o envolvimento ativo dos alunos no processo de investigar, pois o aluno aprende quando mobiliza os seus conhecimentos prévios para atingir seu objetivo. Dessa forma, a Investigação Matemática se mostra uma forma de envolver os alunos ativamente num processo de aprendizagem que eles necessitam

raciocinar, movimentar conhecimentos e aplicá-los, trabalhando de forma eficiente diversas habilidades necessárias para adquirir conhecimento matemático.

Outra vantagem do processo de Investigação Matemática, que é muito bem destacado por Vieira (2016), é o fato dessa atividade ter poucas limitações relacionadas a “condições especiais de infraestrutura, recursos materiais e/ou humanos específicos, quantidade determinada de alunos em sala, dentre outras demandas” (p. 66) permitindo, assim, que seja facilmente adaptado a diversos contextos escolares, sem a necessidade de grandes adaptações e alocação de recursos.

Além disso, é importante destacar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância da investigação em uma das competências específicas da Matemática e suas tecnologias.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.(BRASIL, 2018, p.523)

Uma vez que a Investigação Matemática está em consonância com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática nas escolas, precisamos responder à segunda pergunta realizada: “Como utilizar o *Investigar em Matemática* como recurso educacional?”. Para responder isso precisamos criar uma diferenciação entre a investigação feita fora e dentro do das aulas de Matemática. Essas diferenças discutiremos na seção a seguir, ao analisar a Investigação Matemática como um processo de ensino-aprendizagem.

2.1.1 Tarefas e tarefas investigativas

Para transpor o *Investigar em Matemática* para o contexto da sala de aula é necessário realizar adaptações que se adequem ao contexto escolar, assim a noção de investigar ganha outro significado em relação à atividade realizada por um matemático. A investigação se torna uma tarefa do aluno. Esse conceito de tarefa no processo de ensino-aprendizagem de Matemática é definida por Stein e Smith(2009) “[...] uma tarefa é definida como um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular.” (p.1). Seguindo a perspectiva das autoras, a tarefa é base para o aprendizado do aluno e podem apresentar diferentes abordagens.

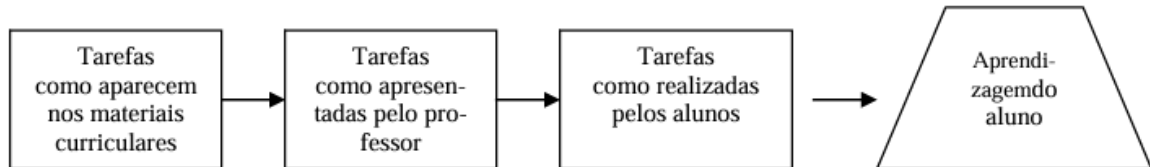
Para Stein e Smith(2009) Uma tarefa ao ser apresentada em sala de aula possui três fases:

- Como aparecem nos materiais curriculares

- Como ela é apresentada pelo professor
- Como ela é executada pelos alunos.

Essas fases são mostradas no quadro a seguir,

Figura 1 – Quadro de Tarefas Matemáticas



Fonte: Stein e Smith (2009, p.4)

Uma tarefa, ao ser apresentada, muda de sentido ao passar de uma fase para outra. Essas mudanças são inevitáveis, pois a linguagem utilizada altera seu significado ao ser transmitida do emissor da informação para o receptor. Nesse contexto, a comunicação entre professor e aluno merece destaque ao se analisar o andamento de uma tarefa, pois é a terceira fase a principal responsável pela aprendizagem do aluno.

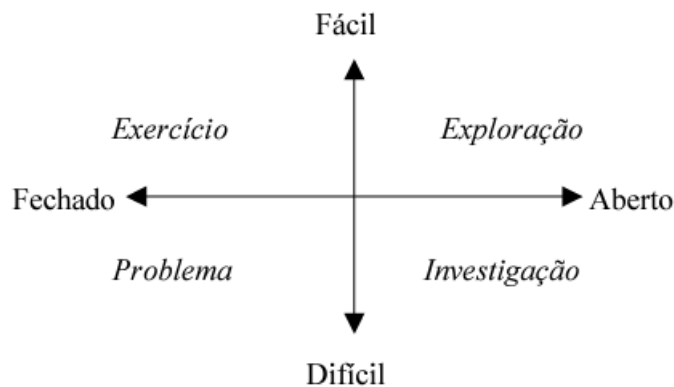
Essa nova atividade do processo de ensino-aprendizagem de Matemática, diferente de uma tarefa como um exercício, busca construir como uma tarefa que adapta as noções de caráter exploratório da investigação. Uma tarefa pode ser apresentada de diferentes formas e contextos, podendo ter vários formatos. Para analisar esses formatos levamos em conta a perspectiva de Ponte (2003), para ele uma tarefa tem “quatro dimensões básicas”(p.4):

- i. Seu grau de complexidade,
- ii. Seu formato,
- iii. Seu tempo necessário,
- iv. Sua contextualização.

Primeiramente, observando as duas primeiras dimensões, temos o grau de complexidade que é quão desafiador a tarefa será para o aluno. Essa dimensão está intrinsecamente relacionada ao contexto de aplicação e merece ser analisada caso a caso. A dimensão (ii) é referente ao tipo de resultado esperado de uma tarefa. Essa solução pode ser fechada se tem solução bem definida ou aberta se possuir vários caminhos a serem tomados durante seu desenvolvimento, podendo levar a diferentes resultados a partir do desenvolvimento da atividade. Ainda relativo ao formato, uma atividade tem diferentes graus de abertura, assim não existe uma linha exata que delimita essa diferenciação.

Ponte (2003) ao analisar o grau de complexidade e o formato de uma tarefa divide em quatro subgrupos como mostrado na figura abaixo:

Figura 2 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura



Fonte: Ponte (2003, p.5)

Ponte (2003) caracteriza exercício, problema, exploração e investigação da seguinte forma:

- O Exercício tem caráter fechado e fácil, sendo uma aplicação direta e com uma solução previamente definida e esperada.
- O Problema também possui uma solução previamente definida e esperada, mas apresenta um grau de complexidade mais elevado dentro do processo de solução.
- A Exploração é menos complexa, mas já apresenta uma estrutura aberta permitindo diversos resultados e caminhos a serem conduzidos.
- A Investigação apresenta uma complexidade maior e uma estrutura aberta assim como a exploração

Esses grupos de tarefas são exemplificados no quadro de Ponte(2003) abaixo:

Figura 3 – Exemplos de tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Entras alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$ 3		

Fonte: Ponte (2003, p.4)

No entanto, Ponte (2003) ainda destaca que existe uma dificuldade de diferenciar a Tarefa de investigação de uma Tarefa de exploração, pois o nível de dificuldade de uma atividade depende de múltiplos fatores imensuráveis que dependem diretamente do agente da atividade, o aluno. Assim, uma atividade de carácter aberto para um aluno pode ser considerada fácil e para outra difícil.

Seguindo essa perspectiva, tentando buscar uma forma de adaptar o *Investigar em Matemática* para a sala de aula, tanto a exploração quanto a investigação conseguem abordar o processo de construção da Matemática. Por isso, ambos os casos serão referidos nesse texto como *Tarefas Investigativas*, uma vez que não terá foco em seus graus de dificuldade, mas no carácter aberto das duas.

Agora, analisando o fator tempo de uma tarefa, é importante destacar que uma tarefa investigativa pode ser realizada em diferentes períodos. Essas tarefas podem assumir longos períodos como projetos que podem durar meses em um trabalho prolongado, mas também podem se enquadrar em períodos mais restritos. Dito isso, é importante salientar que ainda é necessário um tempo adequado para executar os processos de uma investigação, uma vez que as etapas requerem tempo para, executar testes, formular conjecturas e buscar conclusões. Dessa forma, organizar atividades de “natureza mais estruturada” pode ajudar na gestão de tempo em prazos mais curtos. (Ponte, 2003)

No contexto deste trabalho, ressalto que julgo importante destacar que o fator tempo deve ser algo mais maleável dentro das tarefas investigativas. Esse fator se mostra como vantagem, pois permite uma inserção mais orgânica dentro do contexto escolar atual, em que existem diversas demandas de prazos e metas a serem cumpridas. E esse fator foi essencial na

hora de definir, por nós, o tipo de tarefa executada dentro do contexto escolar em que as atividades que serão apresentadas a seguir se inserem.

Por último, uma tarefa, pode ser analisada segundo sua contextualização, isso é a ambientação do problema, em um espectro entre a Matemática pura e uma situação real. Skovsmose (2000) se dedica a analisar essas “referências”, criando um quadro que distingue esses contextos analisados juntamente com seu formato, chamados cada situação de ambientes, em seis cenários são organizados como mostrado no quadro abaixo:

Figura 4 – Ambientes de Aprendizagem.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi- realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p.8)

Considerando que o objetivo deste capítulo é analisar as tarefas investigativas, nos resumimos a analisar os três Cenários de Investigação, que compõem os seis ambientes de aprendizagem descritos por Skovsmose (2000), mostrados na Figura 4. Assim:

- para o cenário para investigação de referência à Matemática pura (2) a tarefa de investigação é voltada para uma análise sem um compromisso com a aplicação em contextos reais se contendo puramente na Matemática,
- para o cenário de investigação de referência a semi-realidades (4) ele se diferencia do (2), pois não é completamente abstrato. Nesse cenário é criado uma simulação baseada na realidade que permite ao aluno investigar conceitos matemáticos. Nele o grau de realidade pode ser variado dependendo de como a situação se apresenta. Dentre os benefícios desse cenário está a possibilidade de associar com situações reais, dando suporte a investigação do aluno. Assim esse cenário se engrandece por permitir se colocar em situações semelhantes à realidade, mas se dando ao luxo de poupar possíveis complicações,
- por último, o cenário de investigação com referência à realidade (6) busca se inserir no mundo real usando de valores reais, motivações reais e problemas reais. Assim, esse cenário permite uma análise profunda e com um significado claro para o aluno. Essa situação permite diversos caminhos para o

desenvolvimento, mas também se limita por alguns fatores com restrições como tempo, grau de complexidade da situação investigada ou acesso às informações necessárias.

No contexto desta pesquisa destacamos, a seguir, as importâncias e peculiaridades dos cenários (4) e (6).

No cenário de investigação de referência à semi-realidade (4), a situação não se encontra no mundo real, isso é, ela é uma simulação baseada na realidade. Nesse cenário o grau de realidade pode variar desde modelos simplificados até a análise de incontáveis fatores e variáveis. A semi-realidade busca se basear na realidade para construir situações em que o professor acredita ser possível explorar a Matemática, mas se limita a um contexto hipotético, podendo assim, dar-se a liberdade de não analisar fatores complicadores, sem fechar a possibilidade de observar os mesmos.

Esse tipo de referência encontra diversos benefícios, pois, além de servir como suporte e exemplo da resolução do problema, ao fazer uma associação com a realidade também cria a oportunidade de quebrar paradigmas de problemas fechados, pois mesmo que seja uma situação abstrata, o caráter aberto do problema abre margem para questionar ou analisar informações externas à situação apresentada inicialmente. Assim, esse cenário se engrandece por permitir se colocar em situações semelhantes à realidade, mas se dando ao luxo de poupar possíveis complicações.

Por último, o cenário de investigação com referência à realidade (6), busca se inserir no mundo real usando de valores reais, motivações reais e problemas reais. Dessa forma, esse cenário permite uma análise profunda e com um significado claro para o aluno, podendo esse explorar, extrapolar, comparar e colher resultados da investigação realizada, sem se limitar ao contexto criado e nem mesmo as informações acessíveis no momento. No entanto, é importante ressaltar que esse ambiente não é a solução final para os processos de investigação por ter muitas outras restrições como tempo, grau de complexidade da situação investigada ou acesso às informações necessárias.

No entanto, apesar de alocar os cenários de investigação em categorias diferentes, Skovsmose (2000) não busca definir um melhor, ideal ou mesmo delimitar onde começa um cenário e termina o outro. Portanto, o objetivo é destacar que o referencial é um fator relevante ao selecionar uma tarefa investigativa.

Após analisar as diferentes tarefas, com ênfase naquelas de caráter investigativo, voltaremos, na sessão seguinte, nossas atenções para analisar em como podemos elaborar e desenvolver tarefas investigativas.

2.1.2 Etapas de uma Tarefa Investigativa

Em busca de organizar o processo de uma tarefa investigativa em sala de aula é necessário identificar os passos desse processo. Para isso, Ponte, Brocado e Oliveira (2009) descrevem as três etapas da execução dessa atividade:

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.(PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, p.25, 2009)

A primeira etapa, introdução da tarefa, é o momento do professor introduzir a atividade, é nela que existe o convite aos alunos para um processo de investigação e a apresentação da atividade em si, crucial para o andamento e compreensão das outras fases.

Nessa etapa é importante ficar claro para os alunos a natureza da tarefa investigativa, explicar o que se entende como uma investigação e seus processos, principalmente em casos em que os alunos não estão acostumados a realizarem atividades desse tipo. Nesses casos o professor precisa esclarecer o caráter aberto do problema buscando quebrar algumas das ideias do “paradigma do exercício” Skovsmose (2000) permitindo que o aluno entenda que nem sempre existe a busca por uma resposta precisa, mas sim uma exploração das informações dadas.

Também nesse primeiro momento é necessário apresentar a tarefa em si. Nesse momento é apresentado o problema e a situação a ser investigada e é papel do professor indagar os alunos e estimulá-los a engajar na situação geradora. Assim também é importante estabelecer os comandos que guiam a atividade de forma clara e se possível por escrito. Para esclarecer também é possível realizar uma leitura conjunta da atividade, mesmo que seja apenas para esclarecer algum termo ou vocabulário desconhecido pelo aluno.

Considerando que o aluno em geral tem pouca familiaridade com atividades investigativas, é indicado ao professor esclarecer os passos a serem tomados na tarefa. Porém, sem deixar de tomar um certo cuidado para não induzir o aluno no processo investigativo, pois, mesmo a interpretação da tarefa faz parte do processo.

É também nesse momento que o professor precisa estabelecer o objetivo da atividade, estimular que os alunos participem e se sintam à vontade para que no seu devido tempo, possam questionar, pensar e expressar suas ideias para colegas e professor.

Para o bom andamento da atividade é importante esclarecer aos alunos o que deve ser produzido ao seu final e que serão explorados os resultados, juntamente com toda a turma, para que os alunos entendam que os resultados serão apresentados e discutidos com outros colegas.

Todos esses destaques são essenciais para o bom andamento da tarefa. Uma vez que esclarecer bem o tipo de tarefa evita uma grande diferença entre a atividade planejada pelo professor e aquela que o aluno executará.

Por fim, é importante esclarecer que apesar das nuances e importância da primeira etapa para o bom andamento da atividade, ela não demanda muito tempo.

Após o término da introdução da tarefa, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), começa a segunda etapa, onde se inicia o processo de investigação. Nesse momento, o professor precisa tomar um papel de retaguarda, observando e entendendo como vai o caminhar dos alunos, permitindo que eles tomem seus lugares de protagonismo da atividade, e só se necessário após essa observação realizar possíveis intervenções. Caso a tarefa seja em grupo e os alunos não estejam acostumados a esse tipo de organização, o professor precisa ter um cuidado dobrado, uma vez que os alunos enfrentarão dois desafios: o trabalho em grupo e o trabalho na perspectiva da investigação.

É nessa etapa do desenvolvimento da tarefa que os alunos devem trabalhar o que se espera de um *Investigar em Matemática*, buscando explorar a situação apresentada na atividade, formular questões, formular conjecturas, testá-las, reformular e justificá-las.

No início da exploração da atividade, mesmo que pareça que os alunos não estejam produzindo, é importante que o professor dê o tempo necessário para os alunos, pois nesse momento eles provavelmente estarão familiarizando-se com os dados apresentados e refletindo sobre as informações. Assim, nesse momento, é quando o aluno tem o primeiro contato e está em processo de apropriação do sentido da tarefa. Nesse momento, quando temos uma atividade em grupo, também é estabelecido a dinâmica do mesmo, consolidando a forma de trabalho desse e assim dando arranque a atividade.

Seguindo o processo de investigação, os alunos muitas vezes são levados a procurar mais exemplos e a gerar mais informações, buscando possíveis padrões, elaborando conjecturas e testando em novos exemplos, assim gerando um ciclo de coleta de dados e elaboração de conjecturas.

Outro processo interessante da investigação dos alunos, destacado por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), é que quando o objetivo é procurar padrões ou regularidades, uma vez

estabelecida uma conjectura, os alunos tentam buscar outras conjecturas por associação, e esse processo se mostra desejável, pois o aluno passa a correlacionar informações e ideias.

Então nesse momento é importante observar que ao caminhar da investigação os alunos começarão a elaborar conjecturas, seja por observações diretas, seja por testes, seja por associação ou qualquer outra forma aqui não prevista. Nesse momento pode ocorrer dessas ideias se limitarem ao pensamento, sem uma verbalização ou uma verbalização parcial do aluno. Daí se apresenta um dos fatores mais importantes de uma tarefa de investigação, o registro escrito do aluno. Esse registro permite que o aluno apresente de forma clara suas ideias e que busque um consenso entre ele e seus colegas, pois tendo a conjectura escrita ela está pronta para ser testada.

O processo de teste costuma ser intrínseco na busca de provar uma conjectura, assim é quase natural que o aluno busque situações para justificar ou refutar suas teorias. No entanto, muitas vezes pode ocorrer de esses testes serem feitos com um número reduzido de casos e é nesse momento que o professor pode intervir para combater essa tendência. Uma maneira seria questionar se os alunos conseguem procurar um contra exemplo da situação.

Após chegarem em suas conclusões novamente é importante que o professor estimule o registro escrito dos resultados, pois isso permite que o professor depois analise e identifique os resultados para dar continuidade posteriormente, mas também é benéfico para os alunos que aprendem a se comunicar matematicamente, expressar suas ideias e clarificar seus pensamentos, por último se tratando de grupos o registro é o momento de tentar chegar em um consenso e um entendimento comum.

Dito isso, durante todos esses processos, quais sejam, explorar, formular questões, formular conjecturas, testá-las, reformular e justificá-las, é importante que o professor fique atento aos processos para permitir que os alunos estejam desenvolvendo e evoluindo na tarefa. Para isso, o professor pode ajudar os alunos a questionarem sobre suas conclusões e a enxergar perspectivas diferentes. Dessa forma o professor consegue otimizar o tempo tornando as atividades produtivas.

Além de testes e elaboração de conjecturas, o processo de investigação precisa também de buscar justificativas. Muitas vezes essas justificativas se dão por meio de demonstrações, que mesmo não sendo alcançáveis pelo aluno, é de importância entender a necessidade de justificar as informações, além de apenas testar exemplos. Uma forma é entender que essas justificativas podem ser introduzidas de forma gradual e buscar dentro de cada situação justificativas plausíveis.

Indo para a terceira e última etapa da tarefa investigativa, se apresenta a discussão de resultados, nesse momento os alunos relatam aos colegas os resultados encontrados, com a moderação do professor. Nesse momento os alunos têm um fechamento para a atividade, mas também abrindo margem para novas indagações, permitindo uma compreensão sobre a investigação e seus processos e também trabalhando a habilidade de se comunicar matematicamente. Como dito por Ponte, Brocado, Oliveira:

Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. É, ainda, um momento privilegiado para despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjecturas.(PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, p.41, 2009)

Então essa etapa final funciona também como um momento de compartilhamento dos conhecimentos tanto de como foi feita a investigação como dos resultados obtidos. A partir desse compartilhamento essa etapa abre margem para o debate dos alunos, que é benéfico tanto para a busca por justificativas quanto para o desenvolvimento da comunicação usando a linguagem matemática. Permitindo que os alunos dividam experiências e confrontem ideias.

Por fim, é importante destacar que existem diferentes estruturas para configurar uma aula de discussão. No entanto, os alunos podem não estar acostumados com debates em aulas de Matemática, por se acostumarem com atividades de caráter fechado. Então é uma atenção especial que o professor deve ter para com os alunos e na escolha do modelo ideal para desenvolver esse fechamento para permitir que eles entendam a dinâmica e as potencialidades de uma atividade de caráter mais aberto.

Esclarecendo as etapas da tarefa investigativa, o papel do professor merece um destaque e uma atenção especial para cumprir um melhor andamento das tarefas.

2.1.3 Papel do Professor nas Tarefas Investigativas

Antes mesmo de iniciar a tarefa investigativa, o papel do professor se mostra importante no processo de produção das questões. Segundo Vieira (2016), o professor precisa se atentar à seleção do problema, pois esse deve ter caráter instigante, desafiador para com os alunos e permitir algum grau de extrapolação para permitir verdadeiramente uma atividade investigativa.

Outros fatores igualmente importantes a serem observados pelo professor são destacados por Ponte, Brocado e Oliveira (2009): “Desafiar o aluno, avaliar o progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.”(p. 47) Para isso, segundo esses autores, o professor precisa atingir um equilíbrio entre dois polos. Primeiro permitir a autonomia dos alunos para eles serem agentes de sua investigação e, por outro lado garantir que a atividade seja produtiva do ponto de vista da disciplina de Matemática.

Na primeira etapa da atividade, o professor deve se atentar a alguns fatores, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) é importante criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo, que estimule a criatividade dos alunos. Para isso é importante esclarecer como se dará a atividade e esclarecer bem o esperado do aluno.

Nas seguintes etapas da tarefa investigativa, Ponte, Brocado e Oliveira (2009) afirmam que é importante manter uma posição de estímulo, desafiando constantemente os alunos. Essa atitude ativa do professor é o que permite que a atividade continue produtiva em situações que os alunos se encontram em um impasse ou quando interrompem o ciclo de trabalho.

Outra constante tarefa do professor nas atividades investigativas é o processo de avaliação do progresso dos alunos. Desde o início é importante que o professor observe como os alunos receberam a tarefa dada e observe se ela constitui um desafio adequado para eles. Também é importante se atentar a como os alunos estão tratando a atividade, como um simples exercício ou se eles se apropriaram da ideia investigativa da atividade e caso necessário realizar intervenções que propiciem o questionamento dos alunos.

Além disso, ao início das atividades, mesmo que trabalhando em grupos, é importante que o professor tente acompanhar o trabalho dos alunos de forma individual. Para isso, o professor precisa recolher informações sobre o trabalho realizado. É importante que o professor procure compreender o pensamento dos alunos, tomando cuidado para fazer perguntas que não tenham como objetivo julgar como verdadeiro ou falso o trabalho do aluno. Muitas vezes um desafio do professor é identificar onde o aluno quer chegar com aquele raciocínio. Devido à dificuldade de comunicação matemática do aluno, o professor pode não compreender facilmente o seu objetivo, assim o ideal é buscar boas perguntas e a melhor forma de entender o aluno, evitando corrigi-lo a todo momento.

Essa avaliação pode gerar como consequência algumas intervenções do professor, como sinalizar aos alunos que continuem seguindo a ideia que tiveram ou fazer pontuações que questionem o caminho seguido por eles. Além disso, um olhar geral permite que o professor interprete como manter o andar da atividade, podendo conceder mais tempo, realizar uma discussão geral entre os alunos ou passar para a discussão final.

Outro desafio é o constante raciocínio matemático do professor durante as tarefas investigativas, pensando de forma crítica e buscando justificativas para as conjecturas apresentadas pelos alunos. Nesse processo é importante que o professor sirva-se de um exemplo de como executar o pensamento matemático dentro da sala de aula, estando disposto a mostrar para os alunos seu raciocínio matemático. Devido ao caráter aberto da atividade, o aluno pode ser levado a caminhos diferentes do esperado, mas o professor tem que manter o processo investigativo em mente, atentando-se à formulação e teste de conjecturas e posteriormente a justificativa. As duas primeiras etapas normalmente não apresentam grandes problemas, mas muitas vezes o processo de justificativa pode ser complexo ou de difícil acesso naquele instante. Então o professor precisa saber avaliar se é o momento correto ou não de buscar essa justificativa, ou se deve deixar para outra oportunidade.

Além disso, o pensamento matemático se mostra quando o professor precisa fazer conexões com outros conteúdos matemáticos ou externos à Matemática que inicialmente não eram previstos na atividade, para isso o professor precisa estar aberto a estabelecer conexões com diversas áreas evidenciando o raciocínio matemático.

Por último e não menos importante, é destacado a importância do apoio ao trabalho do aluno que se destaca em três fatores, colocar questões, fornecer ou relembrar informações e promover a síntese e reflexão dos alunos.

Ao colocar questões é importante destacar que o professor deve assumir uma postura interrogativa. Assim, ao dar suporte a investigação deve buscar perguntas que colaboram com o desenvolvimento do processo investigativo. Essas perguntas podem assumir vários formatos, algumas vezes as perguntas podem ser para clarear uma dúvida do professor. Outras vezes podem ser suportes para o aluno, nesses casos muitas vezes o aluno se encontra travado em alguma etapa do seu trabalho e questiona o professor em busca de respostas, nesses casos o mais indicado é devolver a pergunta aos alunos, em outros casos as perguntas podem assumir um caráter sugestivo para os alunos testarem outras alternativas. É importante destacar que esse caráter mediador do professor permite que os alunos compreendam que esse assume um local de apoio ao trabalho realizado e não de validador dos resultados.

Apesar da priorização do questionamento, o professor pode fornecer informações importantes para o andamento da investigação. Seja a informação fornecida o professor relembrando o aluno sobre algum conteúdo ou acrescentando alguma informação essa ação pode ser importante para que o fluxo investigativo em foco não, seja interrompido.

Por último, o professor deve incentivar constantemente os alunos a sintetizar os processos investigativos. Nesse momento o professor tem novamente a oportunidade de

ressaltar que seu objetivo ali não é julgar como certo ou errado as atividades realizadas. Além disso, o professor deve estimular os alunos a refletir sobre suas conclusões e nesse momento a procura por provas matemáticas pode ser enfatizada para fortalecer sua importância.

Assim, como uma tarefa investigativa apresenta diferentes caminhos a serem seguidos. Para executar todos esses papéis dentro dos graus de imprevisibilidade de uma atividade investigativa, o professor precisa estar preparado para lidar com o inesperado, que provavelmente irá aparecer.

3 LÓGICA MATEMÁTICA

Uma vez que trataremos de Lógica Matemática neste capítulo acreditamos ser pertinente as definições encontradas em alguns dicionários:

lógica. [Do gr. *logiké (téchne)* pelo lat. tard. *logica*] **S. f. 1. Filos.** Na tradição clássica aristotélico-tomista , conjunto de estudos que visam a determinar os processos intelectuais que são condição geral do conhecimento verdadeiro. [Distinguem-se a *lógica formal* e a *lógica material*.] **2. Filos.** Conjunto de estudos tendentes a expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento, deduzindo-as de número reduzido de axiomas, com a intenção de criar uma linguagem rigorosa, adequada ao pensamento científico tal como o concebe a tradição empírico-positivista; **lógica matemática**, lógica simbólica.(FERREIRA p.1230, 1999, grifo nosso)

LÓGICA, s. f. Ciência que estuda as leis do raciocínio; coerência; raciocínio. **ló.gi.ca** (BUENO, p.477, 2000)

Segundo a definição do Novo Dicionário Aurélio (FERREIRA, 1999) a lógica tem como uma de suas definições o estudo que visa determinar os processos da produção de conhecimento. Em outra definição temos um conjunto de estudos que busca na linguagem matemática uma forma de organizar o pensamento. Ambas essas definições dialogam entre si no momento em que a lógica trabalha com o estudo da forma argumentativa, buscando organizar e validar raciocínios. Já no Minidicionário Silveira Bueno (BUENO, 2000) é relaciona a lógica ao estudo das leis do raciocínio. Essas definições se mostram suficientes para iniciar o entendimento da lógica como forma de conhecimento, mas para aprofundar nessa ideia podemos observar sua origem e importância durante a história.

O estudo da Lógica foi iniciado por Aristóteles¹ e tem sua importância reconhecida no mundo ocidental desde a Grécia Antiga. Como apresentado por Machado e Cunha (2015) esse conhecimento fazia parte das três disciplinas básicas do cidadão grego Gramática, Lógica e Retórica. Cada um desses conhecimentos tinha um objetivo específico, a Gramática buscava o domínio da língua de forma oral e escrita, a Lógica se referia a capacidade de analisar e estruturar argumentos e por último a Retórica era a capacidade de persuasão. Essas três disciplinas eram chamadas de *Trivium* e deste termo origina a palavra “trivial” enfatizando ainda mais a importância desses conhecimentos. Compreendendo esses conhecimentos é fácil perceber uma correlação entre eles uma vez que a capacidade comunicativa e a capacidade de analisar argumentos parece ser essencial para a capacidade de convencimento. No entanto, para Aristóteles foi importante separar esses três estudos, que para o caso da Lógica era

¹ Aristóteles, filósofo grego que viveu entre 384 a.C e 322 a.C. Ele foi responsável por grandes contribuições para a filosofia, ciência e lógica moderna. Foi discípulo de Sócrates e mestre de Alexandre o Grande.

importante entender a diferença entre a forma de argumentar e o conteúdo do argumento, sendo a forma o foco do estudo de Lógica.

Nesse momento nos reservamos a ressaltar que a lógica se encontra em diversas áreas do conhecimento, se encontra diretamente relacionado com a linguagem e todas as construções científicas e argumentativas. Mas muitas vezes é a Matemática entre todas as ciências que é comumente relacionada ao estudo da lógica. Machado e Cunha apresentam uma ideia para justificar essa correlação:

O que pode explicar esta associação tão forte entre a lógica e a matemática, em detrimento da língua, é o fato de que um estudo inicial da lógica costuma ser realizado admitindo-se a possibilidade de uma separação nítida entre a forma e o conteúdo de uma argumentação, e partindo-se do estudo das formas lógicas, sem conteúdo: Todo a é b e todo b é c acarreta que todo a é c , qualquer que seja o significado dos termos representados por a , b e c . Esta separação faz com que a lógica (formal) se pareça mais com a matemática do que com a língua. Na língua, em seu uso corrente, é muito mais difícil tal separação. Mas isto é só uma estratégia, e é só um começo.(MACHADO, CUNHA, p.25, 2015)

Portanto, o caráter generalista da Matemática parece se associar fortemente com o estudo da Lógica, de congruência assim a ideia dada pelo Novo Aurélio “expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento”.(FERREIRA, p.1230, 1999). Assim vem a origem do termo Lógica Matemática. Além disso, é importante notar que a construção da Matemática em seu processo de investigação e demonstração de resultados busca na lógica formas de justificação e comprovação de raciocínios.

Agora tendo estabelecido uma ideia geral sobre a Lógica, vamos explorar um pouco sobre a história por trás desse estudo, suas origens e seus objetivos, para assim compreendermos melhor sua importância.

3.1 História da Lógica Aristotélica

Para entender o início dos estudos sobre lógica é necessário entender o movimento Sofistas, pensadores que vieram antes de Aristóteles. Ao investigar esses filósofos podemos entender melhor como seus pensamentos estimularam a estruturação da Lógica Aristotélica.

O termo “sofista” segundo Kerferd (2004) está relacionado às palavras gregas “sophos” e “sophia”, traduzida comumente para “sábio” e “sabedoria”. Os Sofistas se consideravam profissionais do saber, recebendo, por exemplo, honorários por seus ensinamentos. Dessa forma, esses profissionais do saber, dentro do contexto de uma nova democracia de Atenas, buscam uma nova concepção de virtude apresentado por Meier (2017) a seguir:

Na educação desse novo homem e cidadão, a grande virtude estará vinculada à excelência da oratória, entendida como a virtude de falar em público, com o conhecimento e o domínio das técnicas de persuasão, recorrendo a gestos, pausas, entonações, olhar voltado para o público. É a habilidade de realizar um discurso bem estruturado, defendendo um ponto de vista, sabendo influenciar o comportamento dos ouvintes.(p.71)

Essas virtudes defendidas pelo movimento Sofista foram fortemente criticadas por Sócrates e Platão. Segundo Meier (2017) essas críticas se davam pelo não compromisso dos sofistas com a verdade, buscando apenas os artifícios que seriam mais eficientes na persuasão. Essas habilidades buscavam a vitória argumentativa, utilizando de manipulações e falácias.

Para compreender melhor as perspectivas dos sofistas, destacamos dois dos principais representantes desse grupo, Protágoras(490-415 a.C) e Górgias de Leontino(487-380 a.C.). Para analisarmos Protágoras precisamos compreender seu principal lema “O Homem é a medida de todas as coisas, daquelas que são por aquilo que são e daquelas que não são por aquilo que não são”. Essa visão defendida pelo filósofo destaca as duas principais características do movimento Sofista, o Humanismo e o Relativismo.

Ao expressar seu lema, Protágoras coloca o ser humano como referencial, trazendo para ele a noção de verdade. O indivíduo passa assim a ser o centro da discussão, trazendo um relativismo à realidade. Para esse filósofo, como tudo é relativo, era possível pela persuasão “transformar um argumento mais fraco em mais forte” tornando tudo em uma possível verdade.

Outra perspectiva sofista sobre a verdade é destacada por Meier (2017), “Segundo Górgias, é impossível um conhecimento preciso e estável das coisas. E mesmo que fosse possível conhecer algo, nossa palavra seria impotente para comunicar sua verdade. E disso resultaria a incompreensão da própria realidade.”. Como consequência desse raciocínio, Górgias compreendia que devido à incapacidade de compreender a realidade, só podemos proferir discursos que não podem ser reconhecidos como verdade. Dessa forma, esse filósofo trata da verdade como irrelevante em relação ao processo argumentativo.

Portanto, esses pensadores negavam ou a verdade absoluta, ou a capacidade de compreender a verdade. Esses fatores são fortemente criticados por Sócrates e Platão, que buscavam uma forma de encontrar a verdade através do método da Dialética. Buscando assim um conhecimento verdadeiro. Destacamos também que grande parte das produções dos sofistas foram perdidas e seus registros foram feitos por Platão, sendo assim esse teve grande influência em como esse movimento foi relatado durante a história.

Devido às diversas críticas ao movimento sofista, o termo deixa de ser associado a suas origens de “sábio” e passa a ser tratado como impostor. E esses pensadores também dão origem ao termo “sofisma” que é destacado por Ferreira (1999) em sua definição apresentada a seguir:

“sofisma(...)1. Lóg. Argumento aparentemente válido, mas, na realidade, não conclusivo, e que supõe má-fé por parte de quem o apresenta; falácia, silogismo erístico. [Cf. paralogismo.] 2. Lóg. Argumento que parte de premissas verdadeiras, ou tidas como verdadeiras, e chega a uma conclusão inadmissível, que não pode enganar ninguém, mas que se apresenta como resultante das regras formais do raciocínio; falácia.”(p.1875)

Apesar das críticas apresentadas por Sócrates e Platão, foi apenas Aristóteles, aprendiz de Platão, que se dedicou a investigar os sofismos e falácias, desenvolvendo pela primeira vez a Lógica Clássica. Esse importante filósofo buscou em seus próprios sentidos observar o mundo ao seu redor, buscando padrões na natureza. Desses padrões buscava a verdade a partir de suas observações, chegando a desenvolver um sistema de organização que é até hoje base da taxonomia.

Dentro deste estudo aprofundado sobre a categorização das coisas, Aristóteles identificou um padrão na construção do pensamento lógico. Esse padrão permitiu a ele identificar e categorizar diferentes tipos de argumentos, de forma rigorosa. Além disso, Aristóteles foi capaz de categorizar as estruturas e partes de um argumento.

Dessa forma, ao dissecar o argumento, separando a forma do conteúdo, Aristóteles foi capaz de evitar sofismos e construiu uma organização que permitisse estruturar o argumento. Esse pensamento dedutivo é descrito em uma de suas obras “Organon”. Alguns dos tópicos apresentados neste livro serão destacados na sessão seguinte, para darmos continuidade ao ensino de lógica.

3.2 Lógica Formal

Na Lógica Aristotélica uma argumentação é separada em forma e conteúdo, sendo o segundo alheio ao argumento em si. Aristóteles estava preocupado em observar os possíveis métodos argumentativos sem considerar o caráter, muitas vezes subjetivo, da veracidade de um conteúdo. Tendo, por exemplo, se “*Todo felino é rápido*” e “*Gato é um felino*” podemos concluir “*Todo gato é rápido*”. Nessa situação não seria relevante se as duas sentenças iniciais são verdadeiras, mas apenas a forma podendo ser resumido a se “*Todo p é q*” e “*r é p*” então “*r é q*”.

Apesar do foco ser a forma que a argumentação se constrói é muito importante esclarecer a linguagem utilizada em uma argumentação para compreender e diferenciar

melhor os processos observados. Para isso é definido uma série de conceitos e estabelecidas formas adequadas de escrita na Lógica Formal. Conceitos esses que serão apresentados e discutidos a seguir.

3.2.1 Proposição

Ao iniciar o processo lógico argumentativo, antes de observarmos o argumento precisamos fazer uma análise cuidadosa sobre a linguagem que utilizamos para construir nossas linhas argumentativas. Ao dizermos “*Os atletas são altos*” podemos entrar em um debate sobre a frase ser verdadeira, falsa ou ao admitir a ausência de informação suficiente podemos até concluir que depende. Em busca de simplificar a análise do argumento e tê-lo como foco da discussão lógica, Aristóteles buscou definir um tipo de sentença que pode ser ou verdadeira ou falsa sem permitir que possa ser considerada os dois ao mesmo tempo.

Outra análise importante é perceber que nem todas as sentenças podem ser julgadas como ou verdadeiras ou falsas, sentenças exclamativas e interrogativas são exemplo disso, como “*Não corra no corredor!*” ou “*Qual seu nome?*”. Nesses casos as sentenças não têm objetivo de expressar uma informação, mas sim dar um comando ou fazer um questionamento. Portanto esse tipo de frase não tem um caráter declarativo.

Levando isso em consideração, Aristóteles cria um conceito de proposição, um tipo de sentença que pode ser bem definida e avaliada.

Definição 1: Proposição

Proposição é uma frase declarativa que pode ser ou verdadeira ou falsa, mas não as duas coisas simultaneamente.

Exemplos:

- i. *A árvore é verde*
- ii. *Existem triângulos retângulos*
- iii. *Todo anjo tem asas*
- iv. $18 \geq 29$
- v. *Se chover então eu vou me molhar*
- vi. $57 = 2x + 1$
- vii. *O céu é vermelho e as baleias são animais*
- viii. *Não existem unicórnios*
- ix. $\sim p \Rightarrow q$

É importante esclarecer que a sentença (i) por exemplo, carece de um contexto para ser efetivamente considerada uma proposição e assim caracterizada como ou verdadeira ou falsa.

Também é interessante notar que a linguagem utilizada não precisa se limitar ao português, o grego antigo ou qualquer língua materna. O uso da linguagem matemática é perfeitamente compatível com a definição, como nos casos (iv), (vi) e (ix), uma vez que as sentenças podem ser caracterizadas como ou verdadeiras ou falsas.

Analogamente, segundo Alencar Filho (2017), na Lógica Matemática a proposição adota dois princípios (ou axiomas):

“(I) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo,

(II) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.”(p.11)

Note que a definição apresentada é análoga aos axiomas estabelecidos e a partir desses podemos observar o caráter bivalente da Lógica Matemática.

Dessa noção podemos criar uma notação auxiliar ao conceito de proposição.

Notação 1: Valor Lógico

O valor lógico de uma proposição ou é Verdadeira (V) se ela for verdade ou é Falsa (F) se ela for falsidade.

A função de uma proposição p que define seu valor lógico é $v(p)$

Exemplo:

- i. *A árvore é verde* ($v(p) = V$)
- ii. $18 \geq 29$ (F)
- iii. *O céu é vermelho e as baleias são animais* (F)

3.2.1.1 Proposições Categóricas

Ao tratar com proposições, Aristóteles buscou ao máximo se distanciar da necessidade de contextualização das informações e também evitar sentidos dúbios na hora de analisar uma sentença como “*Os atletas são altos*”. Fora de um contexto bem definido, essa sentença pode assumir múltiplos significados Estaria a frase se referindo a todos os atletas, alguns atletas, a maioria dos atletas ou algum contexto mais específico? Assim, a construção dessa frase dificulta o entendimento da sentença e impossibilita o desenvolvimento argumentativo.

Como o objetivo da Lógica Formal não é analisar os diversos contextos do discurso, a busca de uma linguagem clara e bem definida foi importante para sua formalização, assim

evitar esses duplos sentidos. Tendo isso em mente, foi definindo apenas quatro tipos básicos chamados de Proposições Categóricas.

Definição 2: Proposições categóricas

Proposições categóricas são proposições que seguem um dos quatro tipos a seguir:

Quadro 1– Proposições categóricas

Tipo:	Forma:	Exemplo:
Afirmção Universal	<i>Todo a é b.</i>	<i>Todo atleta é alto.</i>
Negação Universal	<i>Nenhum a é b.</i>	<i>Nenhum atleta é alto.</i>
Afirmção Particular	<i>Algum a é b.</i>	<i>Algum atleta é alto.</i>
Negação Particular	<i>Algum a não é b.</i>	<i>Algum atleta não é alto.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Na língua portuguesa existem diferentes formas de expressar uma mesma proposição mantendo seu significado “Todo atleta é alto” pode ser apresentado como “Todos os atletas são altos” ou substituir “Algum atleta é alto” por “Existe atleta alto”, mas ainda é importante se atentar às diferenciações entre geral e específico e afirmativo e negativo. Já a linguagem matemática apresenta uma linguagem própria para representar esses códigos que será apresentada separadamente no final do capítulo.

Apesar das proposições categóricas terem como objetivo analisar a construção de um argumento baseado nelas. Uma das vantagens de uma proposição categórica, que por ser bem estruturada e organizada, é que a argumentação Lógico Matemática necessária para verificar seu valor lógico usa de conceitos importantes da demonstração matemática e identifica o quanto é possível utilizá-los.

Para confirmarmos uma proposição universal, em outras palavras, provar que é verdadeira, precisamos garantir que todos os casos são verdadeiros. Podem ser assim necessários métodos mais sofisticados de demonstração. No exemplo abaixo, para realizar uma demonstração suficiente precisamos realizar manipulações algébricas mesmo que simples, mas demandam uma organização e rigor matemático maior, pois é necessário observar de forma direta ou indireta todos os múltiplos simultaneamente.

Exemplo: *Todo múltiplo de 6 é par (V)*

Já para negar uma proposição universal, em outras palavras provar que é falsa, basta buscarmos uma situação falsa, essa chamamos de contra-exemplo. No exemplo abaixo, com

um pouco de investigação, é possível identificar um contra-exemplo (9) negando a totalidade da afirmação.

Exemplo: *Todo múltiplo de 3 é par* (F)

Para confirmarmos uma proposição particular, em outras palavras, provar que é verdadeira, basta encontrar exemplos que satisfazem a proposição. No exemplo abaixo, assim semelhante ao exemplo anterior, é possível identificar um exemplo da existência (6) que confirma a proposição.

Exemplo: *Algum múltiplo de 3 é par* (V)

Já para negar uma proposição particular, precisamos observar todos os elementos, pois se um for verdadeiro a sentença já é verdadeira. No exemplo a baixo, para provar a falsidade precisamos novamente de algumas manipulações algébricas, por demandar que observemos todos os os múltiplos simultaneamente e assim garantir que nenhum deles é ímpar.

Exemplo: *Algum múltiplo de 6 é ímpar*. (F)

Compreender essas ideias permite identificar quais tipos de demonstrações são necessárias em cada tipo de proposição, identificando quando exemplos são ou não suficientes para uma justificativa e também entender que tipos precisam ser usados. Evitando assim falácias que partem da existência para a generalização.

Além das provas dadas acima, em um caráter mais subjetivo, mas igualmente importante, Machado e Cunha (2015) apresentam outras formas de confirmar a veracidade de uma proposição:

- é um conhecimento plenamente justificado, no terreno científico;
- é garantido pela autoridade de especialistas no tema;
- é uma questão de princípios, ou é um dogma, indiscutível;
- é amplamente conhecido, no nível do senso comum;
- é garantido pela confiança que depositamos na palavra de quem as enuncia;
- etc.(p.48)

3.2.1.2 Proposições Simples e Compostas

Outra forma de avaliar e classificar uma proposição é em sua composição, sendo possível separar em dois grupos as proposições simples ou atômicas e as proposições compostas ou moleculares. Segundo Alencar Filho (2017) temos as definições

Definição 3: Proposição Simples

Chama-se de proposição simples ou proposição atômica aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Essas proposições são comumente designadas pelas letras minúsculas como p , q e r .

Exemplo:

- i. p : *Carlos é fedorento*
- ii. q : *Bananas são frutas*
- iii. r : *O céu é vermelho*
- iv. s : *O mar é roxo*
- v. t : *Janeiro é o mês mais quente*

Definição 4: Conectivos

Chamam-se conectivos, palavras, ou símbolos, que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Exemplos:

- i. Não (\sim)
- ii. E (\wedge)
- iii. Ou... ou (\vee)
- iv. Se... então (\rightarrow)

Cada um desses conectivos possui um significado e suas especificidades, quando utilizamos eles estão executando operações lógicas que podem mudar o sentido e o valor lógico de uma proposição, criando as chamadas operações lógicas.

Conectivos também podem ser chamados de operadores lógicos.

Definição 5: Proposição Composta

Chama-se de proposição composta ou proposição molecular aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições, sendo elas simples ou compostas. Essas proposições são comumente designadas pelas letras maiúsculas como P , Q e R . Também são representadas a partir de suas proposições atômicas juntamente de seus conectivos.

Exemplo:

- i. P : *Carlos é fedorento e bananas são frutas* ($p \wedge q$)
- ii. Q : *Se o céu é vermelho então o mar é roxo* ($r \rightarrow s$)
- iii. R : *Janeiro não é o mês mais quente* ($\sim t$)
- iv. S : *Janeiro não é o mês mais quente ou Rinocerontes são vermelhos* ($U \vee v$)

Destaca-se que U é uma proposição composta por $\sim t$ então S também seria equivalente a $\sim t \vee v$.

É interessante que ao notar o significado dos nomes dos tipos de proposição, em (FERREIRA, 1999) a palavra atômica, por exemplo, é originária do conceito de “átomo” que tem entre seus vários significados o sentido de “indivisível”. Já a palavra “molecular” vem de molécula que tem entre seus significados o sentido de agrupamento de um ou mais átomos. Dessa forma é interessante observar uma analogia com o conceito químico de ambas as palavras.

As proposições atômicas assim como o nome mesmo diz são a parte menor de uma proposição molecular que pode conter mais de uma proposição simples utilizando de conectivos extremamente importantes para a construção de sentenças na Lógica Formal. Esses podem relacionar, proposições mudando seu significado e possivelmente seu valor lógico.

3.2.2 Tabela Verdade

Antes de analisarmos cada operação lógica apresentaremos uma forma de organizar todas as combinações do conjunto de proposições que precisamos observar de uma proposição composta para definirmos seu valor lógico. Esse formato é chamado de Tabela Verdade.

Como o valor lógico de qualquer proposição ou é verdade (V) ou falso (F) conseguimos definir o valor lógico de uma proposição composta se baseando nas proposições simples que as formam. Isso traz um forte caráter generalista sobre a forma da Lógica Proposicional, uma vez que podemos isolar o contexto da proposição original e observamos apenas a situação geral. Alencar Filho (2017) apresenta o seguinte princípio: “O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.”(p.14)

Dado esse princípio a tabela verdade busca definir todas as combinações de valores lógicos (V) ou (F) das proposições simples que formam a proposição composta. Assim com uma proposição simples a tabela apresenta 2 casos, com duas proposições temos 4 casos, com três temos 8 casos e com n proposições teríamos 2^n casos. Os três primeiros casos são mostrados abaixo.

Quadro 2– Tabela Verdade 1

	p
1	V
2	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 3– Tabela Verdade 2

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 4 – Tabela Verdade 3

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observe no Quadro 3 que temos quatro situações: VV, VF, FV e FF esgotando assim todas as possibilidades de combinação.

3.2.3 Operações lógicas

Agora tendo as ferramentas necessárias, iniciaremos a análise de operações que podemos realizar com as proposições. Antes de iniciar essa análise é importante enfatizar que apesar de nos contermos a operações com proposições simples, é perfeitamente possível realizar operações com qualquer tipo de proposição.

Além da discussão formal sobre as operações será destacado o sentido das operações em um contexto argumentativo e também possíveis atenções com o cuidado da linguagem utilizada.

3.2.3.1 Negação

Definição 6: Negação

A negação de uma proposição “ p ” é a proposição composta representada por “*não p*”, cujo valor lógico é oposto a “ p ”. Isso é o valor lógico é verdade quando “ p ” é falsa e falsidade quando “ p ” é verdadeira. Existem diversas notações para o conectivo de negação, neste texto usaremos “ \sim ”.

Exemplos:

- i. *Hoje não está quente* é negação de *Hoje está quente*
- ii. *Hoje está quente, por outro lado* é negação de *Hoje não está quente*
- iii. $25 \leq 18$ é negação de $25 > 18$
- iv. $\sim p$ é negação de p

Quadro 5 – Tabela Verdade Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O conceito de negação apesar de inicialmente intuitivo requer alguns cuidados em sua compreensão, por exemplo, uma proposição como “*Pedro é alto*”, sua negação é o completo oposto a essa situação, nesse caso a proposição “*Pedro é baixo.*” não caracteriza uma negação proposicional dessa. Para entender isso é possível ver o seguinte caso “*Pedro tem uma altura mediana*” dessa forma as proposições “*Pedro é alto*” e “*Pedro é Baixo*” são ambas falsas sendo assim não sendo negação uma da outra. Então é importante entender que negar algo não é só dizer algo diferente, a negação precisa ser falsa quando a proposição original é verdadeira e verdade quando a proposição inicial é falsidade.

Machado e Cunha (2015) apresentam outra importante atenção é a linguagem utilizada na língua comum, na lógica uma dupla negação “ $\sim\sim p$ ” representa uma afirmação, mas a língua portuguesa pode assumir o significado de uma negação simples, como, por exemplo “*Não tenho nada a declarar*”. Para evitar isso eles sugerem uma mudança de vocabulário e estrutura como no quadro abaixo:

Quadro 6 – Mudança de Vocabulário

Em vez de	Podemos dizer
<i>Não tenho nada a declarar.</i>	<i>Nada tenho a declarar.</i>
<i>Não havia ninguém à porta.</i>	<i>Ninguém estava à porta.</i>
<i>Não comi nada.</i>	<i>Não comi coisa alguma.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No contexto da Lógica Matemática as proposições categóricas apresentam um importante papel demonstrativo e compreender suas negações é importante etapa de alguns métodos dedutivos. Então abaixo destaco as negações das quatro proposições:

A negação da *Afirmção Universal* é a *Negação Particular* e a recíproca também se confirma.

Exemplo:

Todos os ratos são roedores é negada por *Algum rato não é roedor*

Já a negação da *Afirmção particular* é a *Negação universal* e a recíproca também se confirma.

Existe gato preto é negado por *Todo gato não é preto*

Esses fatos decorrem das discussões feitas no tópico 3.2.1.1 e enfatizam a necessidade de compreender a negação para comprovar uma proposição como ou verdadeira ou falsa.

Pensando matematicamente, podemos fazer uma comparação de uma negação com um conjunto complementar, sendo tudo que não é a afirmação. Assim entender os símbolos matemáticos que são negações uns dos outros se torna mais simples por exemplo, negar que $3 + 3 = 6$ é dizer $3 + 3 \neq 6$ e negar que $25 \leq 18$ é dizer que $25 > 18$.

3.2.3.2 Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva

Até o momento trabalhamos com proposições compostas que eram formadas por uma proposição simples e um conectivo, no caso o de negação. A próxima etapa ao analisar operações lógicas é entender que os conectivos têm objetivo de ligar duas outras proposições que criam uma proposição composta que depende de dois termos para se definir seu valor lógico. Os conectivos mais comumente utilizados são o “e” e o “ou”, *mas* nesse texto trabalharemos juntamente com o “ou... ou” para entender as diferenças.

A primeira entre as três é a conjunção que utiliza o conectivo “e”, como na frase “*O gato é preto e o avião é rosa*” nessa situação é necessário que ambas as proposições “*O gato é preto*” e “*O avião é rosa*” sejam verdadeiras para que a proposição composta seja verdadeira. Assim Alencar Filho (2017) define:

Definição 7: Conjunção (\wedge)

Chama-se Conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “*p e q*” cujo o valor lógico é verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.

A notação para a disjunção de p e q é o “*p \vee q*” e lê-se “*p e q*”.

Exemplos:

- i. *A terra é plana e três é ímpar*
- ii. *João e Ana jogam futebol*
- iii. *p \vee q*

Quadro 7 – Tabela Verdade Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A segunda é a disjunção que utiliza o conectivo “ou” como na frase “O gato é preto ou o avião é rosa.” nessa situação é suficiente que apenas uma das proposições “O gato é preto.” e “O avião é rosa.” seja verdadeira para que a proposição composta seja verdadeira. A atenção que precisa se ter nesse conectivo é que na língua natural o “ou” pode passar a ideia de ideias mutuamente excludentes, não podendo ser os dois ao mesmo tempo, mas no caso da lógica nada impede, por exemplo, que tanto “O gato é preto.” e “O avião é rosa.” sejam verdadeiros.

Definição 8: Disjunção (\vee)

Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “ p ou q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

A notação para a disjunção de p e q é o “ $p \vee q$ ” e lê-se “ p ou q ”.

Exemplos:

- i. *A terra é plana ou três é ímpar.*
- ii. *João ou Ana jogam futebol.*
- iii. $p \vee q$

Quadro 8 – Tabela Verdade Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A terceira é a disjunção exclusiva que utiliza o conectivo “ou... ou” como na frase “Ou gato é preto ou o avião é rosa” nessa situação é necessário que apenas uma das proposições “O gato é preto” e “O avião é rosa” seja verdadeira para que a proposição composta seja verdadeira. Essa diferenciação em relação à disjunção comum, pois exclui o caso que aborda ambas as situações. Destaco aqui que dentro das atividades apresentadas a utilização desse conectivo é uma forma de evidenciar a diferença entre o apenas “ou” e o “ou...ou”. Então é um

importante exercício comunicativo se atentar ao uso desses termos, mesmo antes de apresentar as atividades.

Definição 9: Disjunção Exclusiva (\vee)

Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições p e q a proposição representada por “ou p ou q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) somente quando ou p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a falsidade (F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

A notação para a disjunção de p e q é o “ $p \vee q$ ” e lê-se “ou p ou q ” Também podemos escrever “ p ou q , mas não ambas”.

Exemplos:

- i. *Ou a terra é plana ou três é ímpar*
- ii. *A terra é plana ou três é ímpar, mas não ambas*
- iii. *Ou João ou Ana jogam futebol*
- iv. $p \vee q$

Quadro 9 – Tabela Verdade Disjunção Exclusiva

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

3.2.3.3 Condicional e Bicondicional

Agora vamos discutir duas operações lógicas que criam uma relação de causa e efeito, relacionando as proposições simples como uma sendo consequência de outra, daí a palavra condicional.

A condicional simples gera uma relação de causa e efeito como na frase “Se Pedro ganhar, então ele vai fazer uma festa.” esse tipo de condição funciona como “Pedro ganhar” ser suficiente para “Ele fazer uma festa.”, logicamente se assemelha a uma promessa definida unicamente se a primeira proposição for verdade. Nesse caso nada se é dito sobre quando não ocorre a causa, no caso “Pedro ganhar”, assim ele não tem nenhuma promessa a cumprir, podendo ou não fazer uma festa, sem descumprir a promessa. Se não tem causa, não tem compromisso do efeito, isso é se “Pedro não ganhar” qualquer situação pode ser assumida tanto fazer ou não fazer uma festa.

Definição 10: Condicional (\rightarrow)

Chama-se proposição condicional ou apenas condicional, uma proposição representada por “*se p então q*” cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que *p* é verdadeira e *q* é falsa e a verdade (V) nos demais casos

A notação para a condicional das proposições *p* e *q* é “ $p \rightarrow q$ ” e lê-se “*se p, então q*”. Nessa situação *p* é o antecedente e *q* o consequente.

Exemplos:

- i. *Se a terra é plana, então três é ímpar*
- ii. *Se João joga futebol, Ana joga futebol*
- iii. $p \rightarrow q$

Quadro 10 – Tabela Verdade Condicional

<i>p</i>	<i>q</i>	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Destaco que ao observarmos a escolha de simbologia de uma seta “ \rightarrow ” para representar a implicação é mais uma forma de compreender como não é uma via de duas mãos e apenas se pode concluir algo quando o primeiro é verdadeiro.

Essa noção pode ser pouco intuitiva, pois na língua comum “se isso, então aquilo” pode ser assumido como equivalente a “se aquilo, então isso”, mas para essa situação de ida e volta temos a bicondicional.

A bicondicional pretende criar uma relação em que uma proposição é tanto necessária como suficiente para concluir outra. Ao escrevermos “Pedro trabalhará se somente se o patrão o pagar.” estamos assumindo que o Pedro só trabalha se receber e o patrão só paga se Pedro trabalhar. Nessa situação percebemos que o acordo é quebrado se uma das partes realizar a atividade e a outra não.

Definição 11: Bicondicional (\leftrightarrow)

Chama-se proposição bicondicional ou apenas bicondicional uma proposição representada por “*p se somente se q*” cujo valor lógico é verdade (V) quando *p* e *q* são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e falsidade (F) nos demais casos.

A notação para a bicondicional das proposições *p* e *q* é “ $p \leftrightarrow q$ ” e lê-se “*p se somente se q*”. Nessa situação, *p* e *q* assumem papel de necessária e suficiente para a outra.

Exemplos:

- i. *A terra é plana se somente se três é ímpar*
- ii. *Se João joga futebol, se somente se, Ana joga futebol*
- iii. $p \leftrightarrow q$

Quadro 11 – Tabela Verdade Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Essa definição é extremamente importante para um discurso argumentativo, pois ao analisar e identificar como verdadeira em todos os casos a correlação entre eles cria uma relação de equivalência lógica, garantindo que podemos trocar p por q em um argumento. Mas é importante destacar que essa relação não é tão simples de ser provada, uma vez que é necessário entender que para $p \leftrightarrow q$ ser verdade $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ precisam ser verdade.

3.2.1 Equivalências lógicas

Para provar que uma bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira em todos os casos é necessário garantir que não existe diferenciação em nenhum caso, isso é o valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é sempre (V). Nos casos que isso acontece definimos a relação como uma equivalência lógica.

Definição 12: Equivalência Lógica(\Leftrightarrow)

Uma proposição P composta por $(p, r, q...)$ é logicamente equivalente a uma proposição Q composta por $(p, r, q...)$ se os valores lógicos de P e Q são sempre os mesmos

A notação utilizada é $P \Leftrightarrow Q$

Exemplos:

- i. *Não é verdade que carros não voam \Leftrightarrow É verdade que carros voam ($\sim \sim p \Leftrightarrow p$)*
- ii. *Se eu chegar em casa, então vou ver televisão \Leftrightarrow Se eu não ver televisão, então eu não cheguei em casa ($p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$)*

Nos dedicamos a esclarecer nesse momento a diferença sutil entre uma bicondicional (\leftrightarrow) e uma equivalência (\Leftrightarrow). Uma bicondicional é uma proposição composta que pode assumir os valores lógicos de verdadeira (V) ou falsa (F). Já no caso de uma equivalência temos uma relação entre duas proposições, que é verdadeira sendo assim uma proposição pode ser substituída pela outra, sem alterar seu valor lógico. Abaixo usarei de duas situações triviais de tabela-verdade para exemplificar:

Quadro 12 – Tabela Verdade ($p \leftrightarrow p$)

p	p	$p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 13 – Tabela Verdade Trivial ($p \leftrightarrow q$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No Primeiro exemplo a bicondicional é sempre (V) pois sempre o valor lógico de p vai ser idêntico ao dele mesmo, assim $p \leftrightarrow p$ é sempre verdade. Já no segundo exemplo existe pelo menos um caso em que $p \leftrightarrow q$ é (F) assim a equivalência não é verdade.

Dessa forma, para averiguar se uma proposição é equivalente a outra podemos olhar seus valores na tabela-verdade, sendo uma forma de demonstrar sua equivalência. Inclusive podemos também definir uma proposição P composta por $(p, r, q...)$ é logicamente equivalente a uma proposição Q composta por $(p, r, q...)$ quando a tabela-verdade dessas duas proposições é idêntica.

Portanto, identificar que a tabela verdade de duas proposições são equivalentes é suficiente para garantir sua equivalência.

3.2.1.1 Dupla negação

A primeira das equivalências lógicas destacada nesse documento se refere ao conceito de uma dupla negação, essa ideia é destacada anteriormente ao nos depararmos com a construção de uma negação.

Ao construir uma dupla negação é até contra intuitivo compreendê-la como uma proposição, uma vez que dizer “*Não é verdade que jovens não são inquietos*” só acaba parecendo uma forma confusa de expressar sua equivalência “*Jovens são inquietos*”. Portanto, do ponto de vista do esclarecimento argumentativo, essa equivalência se mostra importante para entender e interpretar uma proposição.

Nesse momento nos ateremos a identificar a relação entre a dupla negação e a proposição inicial. Isso é “ $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ ”, para mostrarmos isso podemos partir da definição de negação, que resumimos em “se p é verdadeira então $\sim p$ é falsidade e se p é falsidade então

$\sim p$ é verdadeira”. Agora partindo da tabela verdade temos a seguinte análise, com um destaque especial para o uso de parênteses que apenas enfatiza $\sim\sim p$ como a negação de $\sim p$:

Quadro 14 – Tabela Verdade Dupla Negação

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 15 – Tabela Verdade Equivalência Lógica Dupla Negação

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
V	F	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	V	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dessa forma podemos observar a equivalência de p e $\sim\sim p$ uma vez que quando p é verdadeira $\sim\sim p$ é verdadeira e quando p é falsidade $\sim\sim p$ é falsidade.

3.2.1.1 Contra Positiva

A segunda equivalência matemática é a contra positiva ou contra recíproca que tem extrema importância para o processo demonstrativo da Matemática, mas logicamente requer que alguns conceitos previamente apresentados estejam bem estabelecidos para compreendê-los. Essa equivalência diz que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$. Anteriormente discutimos a diferença de $q \rightarrow p$ ter sentido diferente de $p \rightarrow q$ mas ao inserir a negação nessas proposições precisamos observar casos diferentes. Assim usaremos dos exemplos abaixo:

- i. “Se Pedro é mineiro, então ele é brasileiro.” ($p \rightarrow q$)
- ii. “Se Pedro é brasileiro, então ele é mineiro.” ($q \rightarrow p$)
- iii. “Se Pedro não é mineiro, então ele não é brasileiro.” ($\sim p \rightarrow \sim q$)
- iv. “Se Pedro não é brasileiro, então ele não é mineiro.” ($\sim q \rightarrow \sim p$)

Observe inicialmente que contextualizadamente “i” é verdadeira, mas para “iii” um contra exemplo seria o caso em que Pedro é paulista, mostrando assim que essa proposição é falsa, então não é possível fazer uma relação de equivalência entre as duas proposições. No

entanto, em “iv” se Pedro não é brasileiro, ele não pode ser mineiro, uma vez que todo mineiro é brasileiro.

Podemos expressar isso de formalmente em uma tabela verdade, para destacarmos as comparações nessa tabela evidenciaremos os itens acima:

Quadro 16 – Tabela Verdade Contra Positiva

p	q	$\sim p$	$\sim q$	i. $p \rightarrow q$	ii. $q \rightarrow p$	iii. $\sim p \rightarrow \sim q$	iv. $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observando a tabela-verdade podemos identificar as equivalências $i \Leftrightarrow iv$ e $ii \Leftrightarrow iii$.

Outro destaque relacionando a contra recíproca é a utilização de proposições categorias para encontrar equivalências lógicas Esse uso é muito comum em demonstrações matemáticas por ser um utensílio poderoso para trabalhar com afirmações universais ou negações particulares que se mostram dificultadores no momento de realizar uma demonstração.

Dessa forma podemos observar as proposições nos exemplos a seguir:

Exemplo:

$p \rightarrow q$: *Se todos os dias são frios, então nenhum dia é quente*

sendo:

p : *Todos os dias são frios*

q : *Nenhum dia é quente*

$\sim p$: *Existem dias que não são frios*

$\sim q$: *Algum dia é quente*

Então temos a equivalência lógica:

$\sim q \rightarrow \sim p$: *Se algum dia é quente, então existem dias que não são frios*

Destaco no exemplo o processo de construção da contra recíproca em que primeiro identificar as negações para depois construir a relação de equivalência, assim organizando o raciocínio.

3.3 O Ensino de Lógica Matemática no Ensino Médio

A Lógica Matemática, apesar de ser de extrema importância para a Matemática como um todo, essa se mostra na maioria ausente do Ensino Médio. mesmo que seja cobrado dos

alunos um sistema de linguagem e argumentação matemática, essa matéria não se apresenta de forma explícita dentro dos materiais voltados a essa faixa de ensino. Essa ausência cria uma desconexão com alguns conteúdos aprofundados e aplicados da Matemática. Visto isso apresentaremos como a Lógica Matemática se apresenta na Matemática escolar.

Embora o estudo de Lógica Matemática não seja apresentado de forma explícita em nenhum momento na BNCC, destacamos que em duas competências específicas da área de Matemática e suas tecnologias dialogam com a Lógica Matemática, sendo elas 4 e 5. Analisaremos cada uma das competências iniciando pela Competência 4:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p.523)(Grifos nossos)

Nessa competência é destacada as diferentes representações matemáticas no processo de aprendizagem e do desenvolvimento do raciocínio matemático, e diz respeito a diferentes representações matemáticas sobre um mesmo tópico, no entanto, apesar dos conceitos e saberes de lógica serem usualmente utilizada na construção da Matemática ela se encontra ausente desta competência da BNCC.

Outro destaque é na habilidade “(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.”(BRASIL, 2018). A habilidade se refere a utilização da linguagem computacional, baseada na Lógica Matemática. No entanto, a habilidade não deixa claro que o desenvolvimento dessa linguagem ou entendimento aprofundado da mesma.

Outra competência que está intrinsecamente voltada à Lógica Matemática é a competência específica 5, já citada nesse documento.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.523)

Nessa competência é destacado uma possível necessidade de uma apresentação de demonstrações cada vez mais formais e validação de conjecturas. Ao se tratar do desenvolvimento formal da Matemática é necessário a utilização de uma linguagem também formal e, portanto não se pode abster dos argumentos fornecidos pela lógica. Entender a

Lógica Matemática é também entender o processo de construção da Matemática e do processo da elaboração, teste e demonstração de conjecturas.

Essa competência sugere a utilização de processos como indução, contraexemplos e argumentos mais formais, mas a necessidade do entendimento da utilização desses tópicos não é explícito nesse processo. No entanto, a BNCC, não apresenta diretamente os tópicos da Lógica Matemática de forma explícita.

4 METODOLOGIA E CONTEXTO DE PESQUISA

Neste capítulo serão apresentadas as características de uma pesquisa qualitativa, passando pelo processo de coleta e análise de dados utilizada nesta pesquisa. Além disso, também apresentaremos o conceito de uma sequência didática, o motivo de sua escolha e como foi construída no processo de pesquisa.

4.1 Pesquisa Qualitativa

A pesquisa qualitativa é uma pesquisa que se preocupa com a compreensão e interpretação dos fatos ou dados e não se preocupa com a representatividade numérica. Segundo Bogdan e Biklen (1994) em uma pesquisa qualitativa não busca analisar dados isolados, mas identificar esses dados dentro do processo de investigação e suas especificidades. Dessa forma, uma pesquisa se preocupa em investigar e analisar, em uma situação específica, os dados, se preocupando com o contexto em si.

Nesse sentido, a pesquisa qualitativa se preocupa não apenas com resultados, mas com todo o processo e contexto de desenvolvimento da pesquisa. Para a pesquisa qualitativa não é suficiente a utilização de dados numéricos, uma vez que esses não descrevem nuances do processo investigativo em análise. Bogdan e Biklen (1994) descrevem:

A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.(p.48)

Essa coleta de dados se mostra parte importante no processo de construção de uma pesquisa qualitativa. Em nossa pesquisa a coleta de dados se deu a partir da observação do professor pesquisador, seus registros e de sua análise documental. Os documentos aqui analisados são os protocolos com as respostas e resoluções das atividades e dos questionários.

Primeiramente, destacando as características da “observação” da pesquisa aqui apresentada, o pesquisador assume papel de “Observador como participante”, segundo Lüdke e André (2014). Nesse caso o pesquisador faz parte da pesquisa e deixa claro aos participantes os objetivos da pesquisa. Em específico, na situação escolar foi esclarecido aos membros da gestão escolar, aos alunos e aos responsáveis o desenvolvimento e os objetivos da pesquisa dentro do processo de ensino-aprendizagem adotado pelo pesquisador. Destaco que o papel do

pesquisador também era de professor, sendo assim assumindo um papel crucial na atividade desenvolvida e analisada.

A partir das observações, o pesquisador utilizou de um diário de campo em que destacou momentos que chamaram a atenção dentro do processo de pesquisa. Sempre buscando identificar a recepção dos alunos e se atentando aos objetivos da pesquisa. Essas anotações eram feitas posteriormente aos encontros, uma vez que o pesquisador, como participante, muitas vezes precisaria interromper os processos para realizar as anotações.

Além da utilização da observação e anotação, a principal fonte de análise da pesquisa se deu a partir de documentos. Esses documentos foram questionários, protocolos produzidos pelos alunos observados. Esses registros foram essenciais para identificar dentro da pesquisa se a questão de pesquisa pode ser respondida. Outra técnica considerada na pesquisa foi a utilização de registros de áudio de diálogos dentro do processo de pesquisa.

Uma vez contemplados os dados coletados pelo pesquisador, a análise dos dados foi realizada e organizada observando os dados encontrados de forma cronológica seguindo o processo desenvolvido. Essa análise passou por uma revisão de todos os dados coletados e então uma filtragem desses em busca de responder os objetivos da pesquisa.

Essa análise foi feita tentando apresentar as situações e, partindo da revisão teórica construída pelos pesquisadores, foram identificados fatores que poderiam contribuir para responder à questão de pesquisa. Assim seria possível conjecturar possíveis respostas à pergunta levantada.

4.2 Contexto de pesquisa

Para avaliar os resultados encontrados na pesquisa é importante compreender o contexto em que as tarefas investigativas foram desenvolvidas pelo professor-pesquisador (PP²).

Começaremos analisando o contexto geral e escolar em que as tarefas em foram aplicadas e analisadas. Assim analisaremos o momento histórico, o contexto social e imprevisibilidades do dia a dia escolar.

Iniciando pelo contexto histórico é importante observar que em 2023 os alunos estavam passando por um período pós-pandêmico³, que trazia consequências constantes para o contexto escolar. Assim, devido ao sistema de adaptação, promovido pelo governo estadual,

² A partir desse momento o Professor-Pesquisador será denominado apenas como PP.

³ Período Posterior ao tempo de isolamento social devido a proliferação da COVID durante os anos de 2020 e 2021.

durante 2020 e 2021 muitos desses alunos não tiveram contato com conteúdos do oitavo e nono ano do ensino fundamental.

Em sua análise, Oliveira (2021), destaca diversas dificuldades da aplicação do ensino remoto durante o período de pandemia, segundo ele, as vídeo aulas eram muito curtas para os alunos, ou desvinculadas as atividades propostas. Outro fator destacado por ele, é a dificuldade dos alunos de utilizarem das estratégias utilizadas no ensino remoto, seja por não terem acesso aos meios como internet e televisão, seja por não se adaptarem aos paradigmas do ensino remoto. Oliveira (2021) ainda destaca que alunos se sentiram desamparados, essa situação é enfatizada em um comentário de um aluno: “Socorro! Quero minha sala de aula de volta!” (Oliveira, 2021, p.102).

Por último é importante enfatizar que esse autor destaca que devido a diversas limitações como espaço físico, acesso a meios de comunicação e dificuldade de acompanhamento familiar, a pandemia criou ainda maiores disparidades sociais quando se trata da educação.

Outro fator importante no contexto histórico dos alunos que participaram dessa pesquisa é a implementação do Novo Ensino Médio⁴. Esse período de adaptação de professores e alunos gerou diversos dificultadores no processo de retomada da prática escolar, devido a mudanças curriculares e de carga horária. A turma que aplicamos a sequência didática, em específico, fazia parte da primeira geração que passou a usar o novo currículo escolar do Novo Ensino Médio, implementado na escola no ano de letivo de 2022.

Dentro desse contexto, as tarefas dessa pesquisa foram aplicadas em uma escola localizada na região central de Belo Horizonte, que atende alunos de diversas regiões. A escola oferece turmas de Ensino Fundamental integral, Ensino Médio regular e Ensino Médio EJA. O Ensino Fundamental integral, e o Ensino Médio regular e EJA representam o maior volume de alunos da escola, sendo ele formado por turmas nos turnos da manhã, tarde ou noite com carga horária de trinta aulas semanais.

A instituição estava passando por um período de reforma e expansão. Por um lado, havia sido submetida a uma grande reforma, melhorando sua infraestrutura e atualizando seus materiais. Por outro lado, recebia cada vez mais alunos devido à implementação progressiva do Ensino Médio integral em escolas próximas, que afastou os alunos que trabalhavam em outros turnos. Com o maior volume de novos alunos ingressando na primeira série do Ensino Médio.

⁴ Política Governamental instituída pela Lei nº 13.415/2017 e foi implementada no estado de Minas Gerais no ano de 2022.

Esse contexto permitiu que a escola contasse com aproximadamente 30 alunos por turma, projetores e caixas de som em todas as salas de aula. No entanto, a qualidade dos projetores e caixas de som eram tão baixas que inviabilizavam algumas tarefas, e se mostraram dificultadores na aplicação das atividades.

Referente aos alunos, sujeitos dessa pesquisa, eram adolescentes entre 16 a 18 anos cursando a segunda série do Ensino Médio no turno da manhã. A turma que participou dessa pesquisa foi uma das 5 turmas de segunda série da escola, sendo que 3 dessas eram no turno da manhã. Considerando que o PP já lecionava na turma durante o início do ano letivo e as atividades foram realizadas no segundo semestre, neste momento o PP já tinha conhecimentos sobre o perfil dos alunos. Assim, a partir de sua experiência com a turma, o professor notou que essa era heterogênea e possuía alunos de diferentes contextos sociais e diferentes graus de conhecimento. Essa disparidade se dá tanto na formação dos alunos no ensino fundamental, no contexto socioeconômico quanto nos objetivos que os alunos buscam na escola. Enquanto alguns alunos aparentavam possuir diversos conceitos matemáticos bem desenvolvidos, outros apresentavam dificuldades de escrita e leitura.

Dentro do contexto do Novo Ensino Médio, a pesquisa foi desenvolvida durante as aulas de *Matemática* e *Núcleo de Inovação Matemática*. Essas eram divididas em três aulas de *Matemática* e duas aulas de *Núcleo de Inovação Matemática*, sendo a segunda um itinerário formativo componente do Novo Ensino Médio. Ambas as aulas eram regidas pelo PP totalizando um total de cinco aulas semanais. Assim o PP assumiu também o papel de aplicador das atividades na turma que ele mesmo regia. Essa escolha gerou alguns facilitadores devido ao fato do PP já conhecer os alunos mas também gerou complicações que serão apresentadas ao longo da análise de dados.

Visando um aperfeiçoamento das atividades elaboradas inicialmente algumas das atividades foram aplicadas a uma turma piloto e depois reformuladas para aperfeiçoar a implementação e se adequar melhor ao formato adotado durante a pesquisa.

Outro fator importante referente a aplicação foi o período definido pelo PP. Essa iniciou-se no quarto bimestre do ano letivo e seria inicialmente aplicada durante as duas aulas de *Núcleo de Inovação Matemática*, às terças-feiras. No entanto, devido a múltiplas paralisações de professores, feriados, projetos e demandas escolares, essas atividades se realizaram em algumas aulas de *Matemática* e até mesmo aulas de outros professores que cederam o horário para o PP.

As aulas tinham duração total de cinquenta minutos, e como muitas das aulas eram no primeiro horário ou no quarto, após o intervalo, os alunos constantemente se atrasavam para

as aulas reduzindo, assim, o tempo real dedicado às tarefas. Outro fator é que alguns alunos por serem atletas eram dispensados das aulas no sexto horário, pois praticavam atividades externas à escola, como esportes ou cursos extracurriculares de qualificação.

Durante o desenvolvimento das tarefas em sala de aula, o PP utilizou anotações próprias, tanto escritas quanto por gravações de voz, para registrar dados da pesquisa durante e após o período das aulas, conforme mencionado anteriormente. Para mim, PP, esse momento apresentou um desafio, pois foi necessário dividir a atenção entre as anotações e a condução adequada das atividades em sala de aula. Além dessas anotações, os protocolos das atividades realizadas pelos alunos foram recolhidos pelo PP para analisar seus processos de resolução e desenvolvimento do raciocínio.

Além de compreender o contexto de pesquisa, foi realizada uma busca por trabalhos que abordassem os temas investigação ou lógica Matemática dentro do repositório do PROFMAT, para justificar nosso trabalho. O resultado dessa busca é apresentado na sessão seguinte.

4.3 Investigação e Lógica Matemática em dissertações do PROFMAT

Dentro do processo de elaboração da pesquisa, preocupamo-nos em identificar dissertações de mestrado dentro do programa PROFMAT que, de alguma forma, abordassem Investigação ou Lógica Matemática, afim de entender que nosso trabalho trazia algo de novo. Para isso, verificamos o repositório online do PROFMAT. Nesse repositório, a busca é feita pelo “nome do autor”, “título” ou “nome/sigla instituição”. No campo voltado a “título”, fizemos a busca por dois termos: “Investigação” e “Lógica Matemática”. As dissertações encontradas traziam em seu título uma dessas palavras. Observando os resultados das dissertações fornecidas, analisamos o conteúdo de cada dissertação encontrada a partir de seu resumo, índice e introdução, aprofundando-nos quando necessário.

Ao realizar a busca por “Investigação”, obtivemos 37 resultados de pesquisa. No entanto, ao analisar o conteúdo das dissertações, apenas 16 se tratavam de “Investigação Matemática” como metodologia de ensino-aprendizagem. Dentre os 16 resultados observados, 5 tratavam de tópicos de Geometria, 4 de tópicos de Álgebra e 3 de tópicos de Aritmética. Também foi possível observar que, entre esses 16, havia 11 trabalhos voltados para a Investigação Matemática no Ensino Médio e 8 nos anos finais do Ensino Fundamental, sendo que 3 desses não tinham um público-alvo definido. Por fim, observamos que, dentre esses trabalhos, a Lógica Matemática não se apresentou como foco de nenhuma das dissertações sobre Investigação Matemática. Esses dados são sintetizados no quadro a seguir:

Quadro 17 – Investigação Matemática no repositório do PROFMAT

Investigação Matemática no repositório do PROFMAT		
Autor	Título	Objeto de Conhecimento
Renata Siqueira Reis	Por que o seno de 30 é 1/2: uma proposta de Investigação para uso em sala de aula	Trigonometria
Arthur Batista De Souza	Números ondulantes, repunidades e Investigação Matemática	Aritmética, números ondulantes
Edvan Pureza Jacques	Construindo o conceito de função através da Investigação, Resolução de Problemas e Modelagem Matemática	Função
Marcia Falek Rocha	Estudo da função quadrática: uma proposta utilizando Investigação Matemática	Função quadrática
Jabson Da Cunha Silva	O uso do SCRATCH para Investigação Matemática e os números mágicos de ball	Números mágicos de Ball
Marcelo Barbosa Felix	Investigação Matemática no Ensino Fundamental: Relato de atividades com estudantes do sexto e oitavo anos.	Geometria
Osmair Carlos Dos Santos	Do ensino tradicional à iniciação a atividades de Investigação Matemática: Desconstruindo velhos hábitos	Geometria
Wanderlei Verissimo	Investigação Matemática: Uma abordagem das questões de Álgebra e da Obmep para o Ensino Médio.	Álgebra
Kátia Aparecida Da Cruz	Investigação Matemática em Problemas De Aritmética	Aritmética
Guilhermino Pereira Teixeira	A Investigação Matemática e o estudo das funções reais: Uma experiência com alunos do 1º Ano do Ensino Médio	Função
Helen Bossa Dos Santos Palacidina	O princípio das gavetas de Dirichlet: Uma proposta de tarefas de Investigação Matemática	Análise Combinatória
Darlan Gonçalves Pereira	A Investigação Matemática em sala de aula: Perímetros, áreas e volumes, seguindo os preceitos do princípio de Cavalieri.	Geometria
Adriana De Carvalho Laurenço	Investigação Matemática por meio de fractais	Fractais
Gabriela Nery Pereira	Proposta de oficinas didáticas para o ensino de análise combinatória utilizando traços da Investigação Matemática como método de ensino	Análise Combinatória
Jefferson Gomes De Moraes	Considerações sobre a melhoria do processo ensino-aprendizagem em Matemática baseadas na Orientação ao Processo e na Investigação Matemática	Proporcionalidade
Rose Mary Dos Santos Farias Ramos	A Investigação Matemática como suporte para o estudo de sequências e regularidades: Uma experiência com alunos do 1º ano do Ensino Médio	Sequências

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quando realizamos a busca por “Lógica Matemática”, tivemos 18 resultados de pesquisa. Desses, 16 são pesquisas sobre tópicos da lógica proposicional, como desenvolvida nesta dissertação, mas que, no entanto, não faziam referência à Investigação Matemática.

Dentre esses 16 resultados, 5 se atêm a revisar e apresentar conceitos da lógica proposicional. Dois outros trabalhos se dedicam a destacar a importância do ensino de Lógica em diferentes contextos. Essas dissertações podem ser observadas no quadro a seguir:

Quadro 18 – Lógica Matemática no repositório do PROFMAT

Lógica Matemática no repositório do PROFMAT	
Autor	Título
Antonio El Chami Silva	Decodificação de conceitos Matemáticos em avaliações: Explorando a Lógica Matemática e estratégias afetivas
Thiago Alan Da Silva	Lógica Matemática: uma proposta metodológica para olimpíadas de matemática
Lindberg Barbosa Lira De Almeida	Introdução À Lógica Matemática com aplicações na Educação Básica
Fabricio Adão Germany	Introdução à Lógica Matemática
Luiz Eduardo De Sousa Almendra	A Lógica Matemática e os diagramas de Venn subsidiando uma abordagem para a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos no Ensino Médio
Vanessa De Freitas Travello	O uso da Lógica Matemática para interpretação e resolução de problemas
Karla Waack Nogueira	O uso de videos no Ambiente Escolar: Explorando linguagem e lógica matemática
Diego Roberto Rodrigues Orsano	Uma abordagem do Ensino de Lógica Matemática no Ensino Médio
Érica Gambarotto	Lógica Matemática: Uma proposta de atividades para Educação Básica
Saulo Carvalho De Souza Timóteo	Fundamentos de Lógica Matemática para o Ensino Médio: Um estudo aplicado em geometria plana
Glen Peach	Visualização gráfica dos fundamentos da Lógica Matemática por meio de diagramas de conjuntos
Anailton Veras Sotero	Uso de conjuntos no ensino de Lógica Matemática Básica
Jefferson Alexandre Do Nascimento	Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico
Pablo Vieira Carvalho Silva	Lógica Matemática e estratégias para a solução de problemas matemáticos
Eduardo Ribeiro Sindeaux	Formação do conceito de função a partir da Lógica Matemática fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin nos estudantes do 1 ano do Ensino Médio
Rodrigo Marques Vaz	Formalização do raciocínio lógico baseada na Lógica Matemática

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Entre os outros trabalhos sobre Lógica Matemática, destacou-se a associação com a Teoria de Conjuntos, sendo o foco de 3 dissertações. Outras buscavam alternativas para o processo de ensino-aprendizagem da Lógica Matemática. Destacamos a seguir três trabalhos identificados no repositório.

Em Nogueira (2019), a dissertação propõe apresentar diferentes vídeos para desenvolver discussões e atividades com os alunos do Ensino Médio e Fundamental. Dentre esses vídeos, é apresentado o documentário “As Maravilhas da Lógica”, que trabalha

conceitos de lógica proposicional. A partir desse documentário, é apresentada uma proposta de trabalho de discussão do documentário como tarefa dentro do processo de ensino-aprendizagem.

No trabalho desenvolvido por Gambarotto (2018), é apresentado um interessante trabalho de verificação de conhecimentos da Lógica Matemática a partir de diferentes contextos, voltados para o Ensino Fundamental ou Médio. Entre esses textos, temos textos literários, poemas e textos normativos, nos quais são identificados e trabalhados diferentes tópicos da Lógica. Também são apresentadas questões de vestibulares e concursos que desenvolvem os tópicos previamente trabalhados.

Por último, no trabalho de Silva (2016), o autor propõe apresentar uma sequência de atividades que desenvolvem a Lógica Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas. Esse trabalho preocupa-se com o desenvolvimento do ensino-aprendizagem e do processo de construção do conhecimento em si. As tarefas apresentadas na dissertação têm um caráter fechado que se distancia do enfoque aberto das tarefas investigativas. Além disso, o trabalho se propõe a estruturar uma lista de exercícios que verificam os tópicos desenvolvidos durante o processo de Resolução de Problemas.

Dessa forma, ao analisar o repositório de dissertações do PROFMAT, buscamos justificar a importância de investigar as potencialidades da Investigação Matemática no ensino da Lógica Matemática. Para isso, se dá a importância da elaboração, aplicação e análise dos resultados da pesquisa aqui realizada. Esses fatores permitiram analisar de forma qualitativa as correlações entre o ensino de Lógica Matemática e a Investigação Matemática.

4.4 Sequência didática

Em busca de alcançar os diversos objetivos da pesquisa e do processo de ensino-aprendizagem utilizamos da construção de uma sequência didática. Essa é definida como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

As tarefas investigativas foram pensadas para compor uma sequência didática, pois seria possível a partir dela desenvolver diferentes tópicos da Lógica Matemática em uma linha que tivesse uma construção gradual dos conhecimentos.

Ao construir a sequência didática foi levado em consideração diferentes aspectos dentre eles foram:

- Os conhecimentos de Lógica Matemática que eram desejados a serem alcançados.

- O nível de conhecimento dos alunos sobre os tópicos abordados.
- O tempo de implementação disponível para o desenvolvimento das tarefas.
- A familiaridade dos alunos com tarefas de Investigação Matemática.
- As questões que buscamos responder dentro do processo de pesquisa.

Ao analisar todos esses fatores foi construída a sequência didática de forma que pudesse satisfazer todos os critérios destacados. E assim foram aplicadas as diversas tarefas conforme apresentado no capítulo seguinte.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS CONSTRUÍDOS

Neste capítulo, buscamos apresentar as tarefas de uma sequência didática produzida com o intuito de contribuir para o desenvolvimento dos saberes da Lógica Matemática. Também nesse capítulo nos propomos a discutir os impactos no processo de ensino-aprendizagem em um contexto escolar, particularmente na 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública. Essa análise será feita à luz da teoria já apresentada neste texto, considerando o contexto escolar e os materiais coletados pelo professor-pesquisador (PP).

Essa pesquisa foi desenvolvida na busca por uma forma de contribuir para o desenvolvimento dos conceitos da Lógica Matemática para o Ensino Médio. Para isso, ela busca, no processo de Investigação Matemática, elaborar tarefas que comporão uma sequência de atividades que possam contribuir com o desenvolvimento desse conteúdo. Essa sequência foi aplicada numa turma da 2ª série do Ensino Médio e as respostas das tarefas, bem como as respostas do questionário de sondagem, constituem os protocolos que serão analisados. Dessa forma a análise desses dados busca responder a seguinte questão:

“Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos da Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?”

5.1 Considerações Iniciais

Para responder essa questão é importante retomar o contexto e a metodologia da pesquisa. Ambos tópicos serão esclarecidos para assim identificarmos as capacidades e limitações da análise de dados.

Referente ao contexto, relembramos que a sequência didática foi desenvolvida com alunos do segundo série do Ensino Médio de uma escola estadual de Belo Horizonte, Minas Gerais. Essa turma tinha uma heterogeneidade devido a diferentes fatores socioculturais. Também é importante destacar que a turma passava por uma etapa de transição, tanto referente ao Novo Ensino Médio, quanto pelo período pós-pandêmico.

Já se referindo a metodologia de pesquisa, os dados apresentados e discutidos a seguir foram desenvolvidos visando uma pesquisa de caráter qualitativo. Assim, dentro do contexto escolar buscamos analisar as especificidades permitidas pela forma de coleta de dados.

Compreendendo essas especificidades, elaboramos um planejamento geral para o desenvolvimento da sequência didática. Esse planejamento é apresentado a seguir.

5.2 Planejamento Geral

Para introduzir a Lógica Matemática para os alunos do segundo ano do Ensino Médio e analisar o processo de ensino-aprendizagem desses alunos, elaboramos um conjunto de aulas e tarefas divididas em várias etapas, que constituirão nossa sequência didática.

Para isso definimos os tópicos que achávamos ser essenciais para a introdução do conteúdo de Lógica Matemática. Esses tópicos buscavam também um fio condutor para o desenvolvimento dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos, trabalhando gradualmente a complexidade, generalização e abstração. Nesse momento chegamos nas seguintes etapas de desenvolvimento:

- i. História da Lógica
- ii. Proposições
- iii. Negação
- iv. Proposições Categóricas
- v. Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva
- vi. Tabela Verdade
- vii. Condicional e Bicondicional
- viii. Equivalências Lógicas

Para cada um desses tópicos, uma ou mais tarefas foram elaboradas baseando no referencial teórico, em busca de identificar:

“Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos da Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?”

A construção da sequência didática foi baseada também em algumas aulas e tarefas desenvolvidas em uma turma piloto, na mesma escola e da mesma série, no primeiro semestre de 2023. Essas atividades serviram como base para a construção das tarefas contidas dentro do plano de aula, observando a recepção dos alunos e o engajamento. Dessa forma foi possível selecionar e aperfeiçoar as atividades para o desenvolvimento analisado.

O planejamento inicial foi construído pensando em 23 aulas, 2 para responderem aos questionários prévios e 21 para o desenvolvimento da sequência didática, contendo 7 tarefas como apresentado da tabela a seguir:

Quadro 19 – Planejamento

Tópicos	Desenvolvimento da sequência didática	Aulas Previstas
Aulas de Introdução à Lógica	História da Lógica	2 Aulas
Proposições e Proposições Categóricas	Tarefa 1: Porque médicos têm a letra feia?	2 Aulas
	Formalização de Proposição Categórica Tarefa 2: Proposições categóricas	1 Aula
	Tarefa 3: Investigando o Valor Lógico	4 Aulas
Conjunção, Disjunção e Conjunção Exclusiva	Tarefa 4: Categorizando Morcegos	2 Aulas
	Formalização dos conceitos de Conjunção, Disjunção e Disjunção exclusiva	1 Aula
Tabela Verdade	Tarefa 5: Construindo a Tabela Verdade	2 Aulas
Condicional e Bicondicional	Tarefa 6: Investigando relações de causa e consequência	2 Aulas
	Formalização dos conceitos de Proposição Composta, Conjunção, Disjunção e Disjunção exclusiva	1 Aula
Equivalências lógicas	Formalização de Equivalência Lógica e Dupla Negação	1 Aula
	Tarefa 7: Investigando Equivalências Lógicas	2 Aulas
	Formalização de Contrapositiva	1 Aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Cada uma dessas tarefas continha várias etapas, incluindo a apresentação da situação-problema, o desenvolvimento de diferentes atividades e a discussão posterior às atividades. Assim, no contexto geral da tarefa, a atividade é o material didático apresentado aos alunos.

Uma vez apresentado o planejamento idealizado da sequência didática e os temas abordados partiremos para a análise dos dados coletados no Questionário Prévio, buscando entender o plano de partida dos alunos

5.3 Questionário Prévio

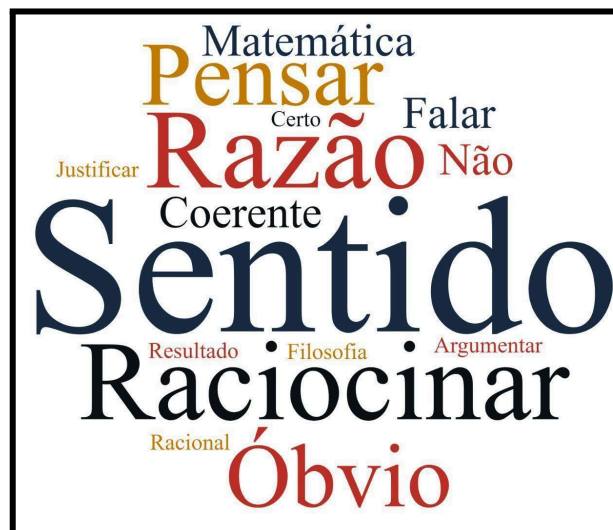
O Questionário Prévio, composto de partes I e II, foi dividido e apresentado aos alunos em duas aulas, uma no dia 12/09/23 e outra no dia 18/09/23. Ambos os questionários foram respondidos individualmente, dentro do tempo delimitado pela aula, sendo realizado sem consulta. Além disso, para os alunos se sentirem à vontade permitimos que esse fosse feito de forma anônima, caso fosse de interesse dos alunos.

Os questionários tinham como objetivo, traçar um perfil de aluno e identificar o nível de conhecimento dos alunos sobre os tópicos estudados anteriormente, além de testar e verificar suas noções “intuitivas” de lógica.

A primeira parte do questionário, respondido no dia 12/09, pretende identificar o perfil dos alunos e suas concepções sobre lógica e seus contatos anteriores com o assunto. Dessa forma, analisamos que em sua grande maioria, o perfil de alunos estavam todos na faixa entre 16 e 18 anos e também foi possível observar que dentro desse grupo existiam alunos que concluíram o Ensino Fundamental em escolas estaduais, municipais e privadas.

Ao questionar os alunos sobre o conceito de lógica, algumas palavras se destacaram como mostrado na nuvem de palavras abaixo:

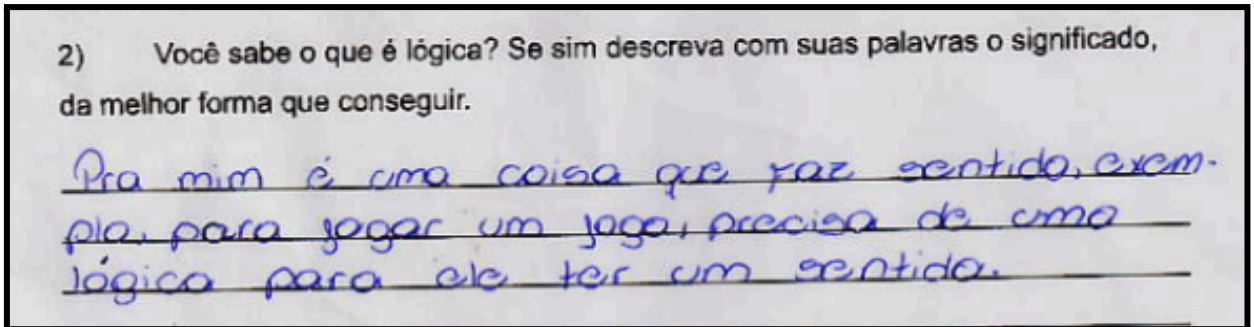
Figura 5 - Nuvem de Palavras



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como se pode notar a palavra *Sentido* foi a que mais apareceu nas respostas dos alunos. Podemos inferir que o conceito de *Lógica* parece estar diretamente relacionado ao conceito de *ser lógico*, ser algo intuitivo que para os alunos, ou seja, aquilo que *faz sentido* ou *tem sentido*. Essa interpretação fica evidente no comentário relatado por um dos estudantes no protocolo 1:

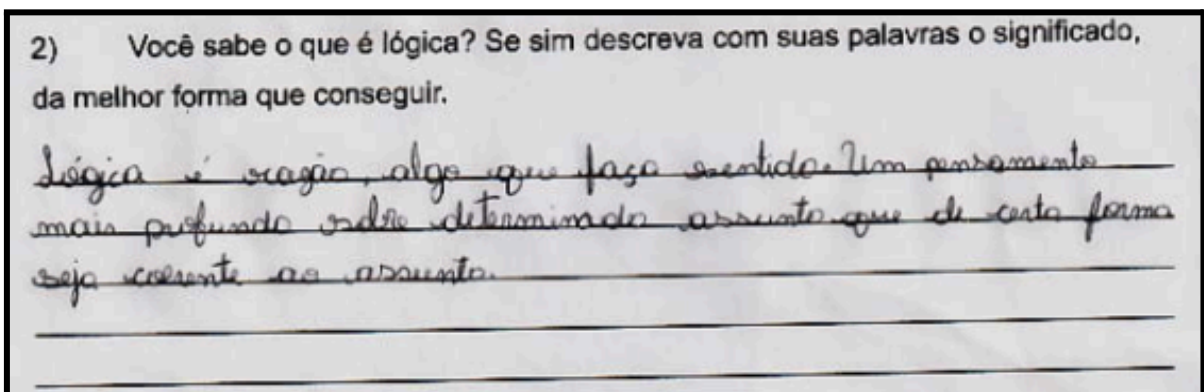
Figura 6 - Protocolo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Outros destaques são as palavras *Razão* e *Raciocinar* que ambas aparecem e mostram outro sentido da *Lógica* ligada ao raciocínio, a capacidade de pensar de forma coerente ou certa. Como podemos observar na resposta apresentada na figura 7, a seguir:

Figura 7 - Protocolo 2

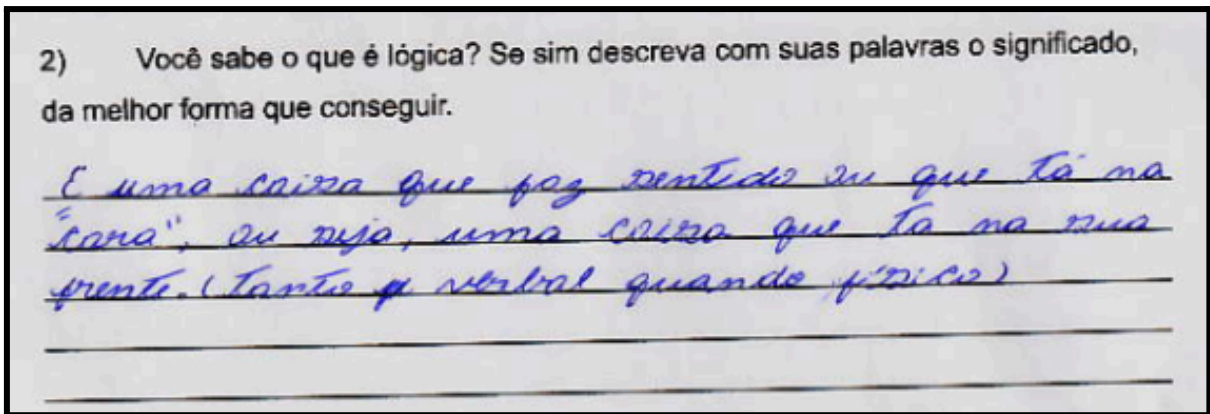


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Palavras como *Pensar*, *Argumentar*, *Falar*, *Justificar* e *Racional* também caminham para o mesmo caminho de *Lógica* como o processo do pensamento.

Outro destaque é a palavra *Óbvio*, que na nossa visão pode ser interpretada como algo que *Ser/É óbvio*, que “*está na cara*” como citado por um aluno. Assim, assumindo a *Lógica* como algo trivial ou de simples compreensão, que não precisa ser desenvolvido. Esse sentido é evidenciado na resposta a seguir:

Figura 8 - Protocolo 3



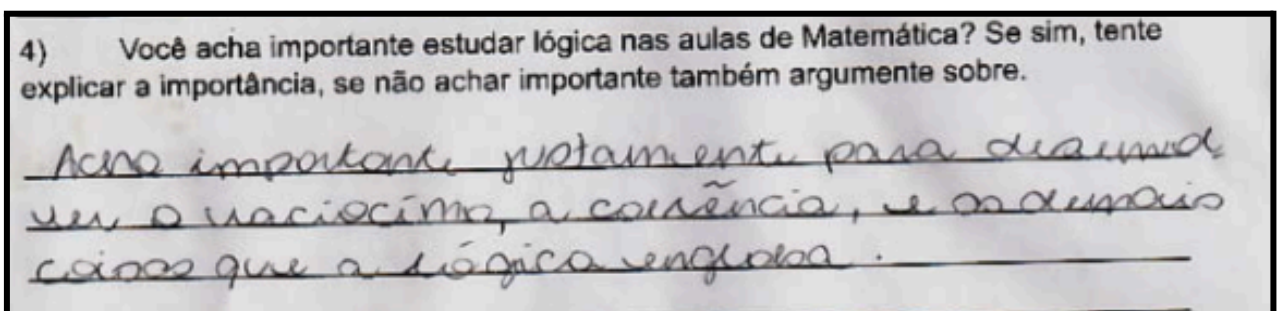
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Outros alunos também comentaram sobre o sentido matemático da *lógica*, separando a lógica em duas: a “*lógica da Matemática*” e a “*lógica da Filosofia*” apresentando como duas coisas diferentes. Outras vezes foi associada a lógica como uma forma de “*chegar em um resultado, sem fazer as contas diretamente*” conforme a resposta de outro aluno.

Por fim é possível notar que a palavra lógica, segundo as respostas dos alunos, leva consigo sentidos diferentes que podem ser conflitantes; por um lado a Lógica é apresentada como óbvia ou simples, outras vezes é apresentado como um pensamento complexo ou matematicamente sistematizado. No entanto, o maior destaque vem no *sentido*, a ideia que para ser lógico precisa ter sentido.

Também a partir das respostas foi possível analisar que nenhum dos alunos tinha estudado Lógica nas aulas de Matemática. E a maioria dos alunos respondeu que acreditavam ser importante aprender lógica nas aulas de Matemática. De forma geral esclareceram que aprender é sempre bom ou que seria uma oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico. A figura, a seguir, exemplifica essa concepção.

Figura 9 - Protocolo 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

No entanto, destacam-se duas falas de alunos sobre o aprendizado de lógica:

Figura 10 - Protocolo 5

4) Você acha importante estudar lógica nas aulas de Matemática? Se sim, tente explicar a importância, se não achar importante também argumente sobre.

Exercitar o raciocínio lógico é importante, porém não vai estar presente na minha área de atuação (não as formas matemáticas). Fora que tenho um problema de fixar o conteúdo de matéria, então a resposta seria não.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 11 - Protocolo 6

4) Você acha importante estudar lógica nas aulas de Matemática? Se sim, tente explicar a importância, se não achar importante também argumente sobre.

Acho que sim, sim é lógico, lógico é importante.
 Ou não, matemática é difícil, não nos cheiramos.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em ambas as respostas, apesar de reconhecerem a importância da lógica, é apresentada uma possível resistência ao conteúdo de lógica, uma vez associada à Matemática. Revisitando o paradigma da Matemática como algo difícil, como citado por Silveira (2002), mostrando que se um conhecimento é matemático existe uma resistência natural a ele. Outro destaque é o fator de por ser um conhecimento matemático está limitado apenas à Matemática, enfatizando uma desassociação da Matemática ao cotidiano do aluno e novamente tornando esse conhecimento inacessível.

Após esse primeiro contato com o projeto, os alunos no dia 18/09/23 responderam à segunda parte do questionário que analisa conceitos intuitivos de lógica. Nas perguntas buscamos identificar a capacidade dos alunos de analisarem uma situação e extrapolar as informações expressas. Também avaliamos as noções intuitivas dos alunos para identificar a veracidade ou falsidade de proposições compostas.

A primeira pergunta da segunda parte do questionário buscava entender o nível dos alunos em conceitos de conjuntos e a capacidade de extrapolar informações fora deste contexto. Na maior parte dos resultados tivemos respostas semelhantes à da figura 12 a seguir:

Figura 12 - Protocolo 7

1) Para verificar o nível de satisfação de seus clientes, uma empresa fez uma pesquisa, através de entrevistas, em que pediu aos clientes que respondessem a uma pergunta atribuindo uma nota de 0 a 10 ao serviço prestado. Ao entrevistar 1.000 pessoas, todas responderam atribuindo nota acima de 7.

a) Ao analisar os dados de uma pesquisa que foi escolhido ao acaso dentre um dos 1.000 entrevistados. Quais são as possíveis notas de satisfação? Justifique.

As possíveis notas são 7, 8, 9, 10, já que essa pessoa é uma das 1000 que foram entrevistadas e todas deram notas maiores que 7.

b) Se essa entrevista for feita para uma pessoa a mais, sendo a milionésima primeira entrevistada. Quais as possíveis notas de satisfação? Justifique.

As possíveis notas podem ser de 0 a 10, já que, por mais que as outras deram notas acima de 7, não quer dizer que ela também vai dar uma nota maior que 7.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesses casos é interessante notar que no item a) mesmo que os alunos confundam a inclusão ou não do 7 em “nota acima de 7” e também tenham uma visão inteira dos números (Devido a uma possível defasagem nas habilidades voltadas a números racionais), os alunos conseguem muitas vezes identificar os elementos dentro do conjunto. Outro fator importante é que eles também conseguem identificar que apesar de um padrão, não é possível assumir um resultado a partir de uma situação não generalizada.

O maior problema da primeira questão aparentemente não foram os conhecimentos sobre as noções de conjunto ou de lógica, mas de interpretação do texto referência, como observado na figura 13.

Figura 13 - Protocolo 8

1) Para verificar o nível de satisfação de seus clientes, uma empresa fez uma pesquisa, através de entrevistas, em que pediu aos clientes que respondessem a uma pergunta atribuindo uma nota de 0 a 10 ao serviço prestado. Ao entrevistar 1.000 pessoas, todas responderam atribuindo nota acima de 7.

a) Ao analisar os dados de uma pesquisa que foi escolhido ao acaso dentre um dos 1.000 entrevistados. Quais são as possíveis notas de satisfação? Justifique.

7, 8, 9, 10. $100/4 = 25\%$. Ela tem 25% de chance de escolher um número de 0 a 10 pela foto de cada terem respondido acima de 7.

b) Se essa entrevista for feita para uma pessoa a mais, sendo a milionésima primeira entrevistada. Quais as possíveis notas de satisfação? Justifique.

As possíveis notas são 7, 8, 9, 10, os dados anteriores mostram de 7 por não que a pesquisa não é boa.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nessa e em outras situações o aluno parece ter tido dificuldade de entender a questão, confundindo conceitos de possibilidade com probabilidade no item a) e no item b) compreendendo a situação como o provável de acontecer e não as possibilidades em si. Esse fator pode ser consequência das dificuldades enfrentadas no Ensino Fundamental durante o período de isolamento.

Por último, na questão 3 da segunda parte do questionário, 13 alunos conseguiram interpretar e entender o conceito de falso e verdadeiro, como valores lógicos de proposições, identificar o valor lógico das negações e das conjunções e disjunções. Dando destaque a dois casos, mostrados nas figuras 14 e 15, que já utilizaram de uma linguagem próxima à lógica para auxiliar a organização:

Figura 14 - Protocolo 9

3) Assuma (ou considere) que a afirmação "Rogério come carne" é verdadeira e a afirmação "Vitor come carne" é falsa e avalie como verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes afirmações :

Não come

(V) Vitor não come carne

(F) Rogério e Vitor comem carne

(F) Rogério e Vitor não comem carne

(V) Rogério ou Vitor comem carne

(V) Rogério ou Vitor não comem carne

(V) Rogério come carne e Vitor não come carne

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 15 - Protocolo 10

3) Assuma (ou considere) que a afirmação "Rogério ^Vcome carne" é verdadeira e a afirmação "Vitor ^Fcome carne" é falsa e avalie como verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes afirmações :

Não come

(V) Vitor não come carne

(F) Rogério e Vitor comem carne

(F) Rogério e Vitor não comem carne

(V) Rogério ou Vitor comem carne

(V) Rogério ou Vitor não comem carne

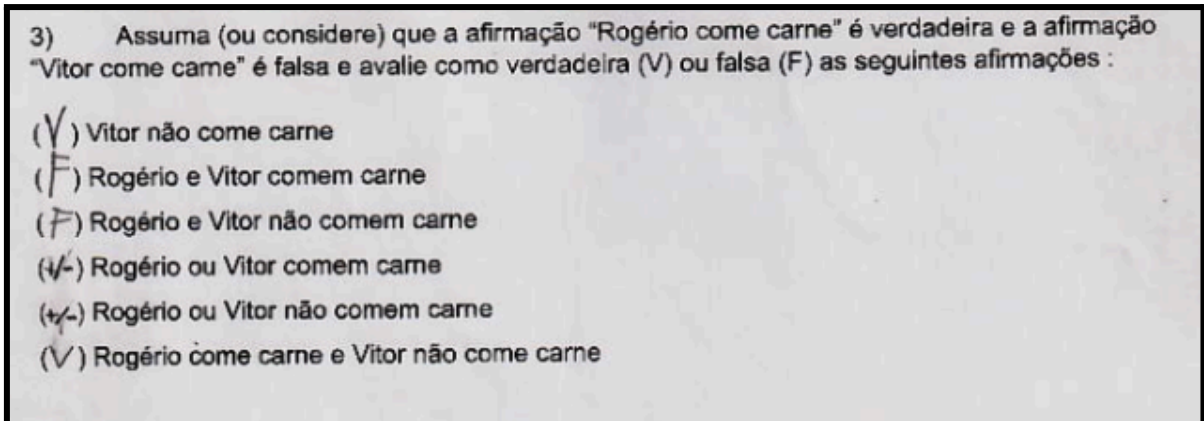
(V) Rogério come carne e Vitor não come carne

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na figura 14 o aluno relaciona o fato da afirmação "Vitor come carne" ser falsa com a frase "Não come" assim podemos inferir que esse aluno aparenta entender a relação de equivalência com a frase "Vitor não come carne" ser verdadeira. Já na figura 15 o aluno atribui o valor lógico das proposições com (V) e (F) para organizar suas informações.

Já em outras situações foi percebido a dificuldade de identificar o valor lógico sendo ou verdade (V) ou falsidade (F), assumindo outras variações. A seguir é possível notar a utilização de (+/-), para representar algum tipo de incerteza.

Figura 16 - Protocolo 11



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Assim, com a análise da segunda atividade foi possível identificar pontos fortes e fracos de conceitos que se aproximam da Lógica Matemática. Com essas informações prosseguimos para a aplicação da Sequência Didática compreendendo os conhecimentos prévios dos alunos.

5.4 Aplicação da Sequência Didática

Analisamos agora a sequência didática sua aplicação e consequências, no processo de adaptação das aulas idealizadas e como de fato foram realizadas. Ressaltamos, o desenvolvimento dos planos de aula foi pensado para ser executado duas vezes por semana nas aulas de *Núcleo de Inovação Matemática*. Na mesma turma o PP estaria, naquele momento, lecionando nas aulas de *Matemática* conteúdos relacionados à função exponencial e função logarítmica.

No entanto, após o início das aplicações, surgiram uma série de demandas escolares, juntamente com uma sequência de paralisações dos professores, e assim foi necessário executar uma série de adaptações ao planejamento.

Dentre as adaptações feitas, mudaram-se os dias do planejamento inicial de cada atividade, o PP deu aulas extras em horários separados e simplificou o último tópico, retirando a "Tarefa 7" do plano de aulas programado. Por fim, o calendário de atividades, desenvolvido em sala de aula, foi disposto da forma, como mostra o quadro 18:

Quadro 20 – Calendário de Atividades

Etapas da Sequência Didática	Atividade	Data
Aulas de Introdução à Lógica	Aulas de Introdução à Lógica	25/09
		25/09
Tarefa 1: Porque médicos têm a letra feia?	Aplicação da Atividade 1	3/10
		3/10
	Discussão dos resultados Atividade 1	4/10
Formalização de Proposição Categórica Tarefa 2: Proposições categóricas	Formalização de Proposição/ Formalização de Negação	23/10
	Formalização de Proposição Categórica/ Aplicação da Atividade 2	23/10
Tarefa 3: Investigando o Valor Lógico	Aplicação da Atividade 3	30/10
		30/10
		31/10
	Discussão dos resultados Atividade 3	31/10
Tarefa 4: Categorizando Morcegos	Aplicação da Atividade 4	03/11
	Discussão dos resultados Atividade 4	13/11
Formalização dos conceitos de Proposição Composta, Conjunção, Disjunção e Disjunção exclusiva	Formalização dos conceitos de Proposição Composta, Conjunção, Disjunção e Disjunção exclusiva	13/11
Tarefa 5: Construindo a Tabela Verdade	Aplicação da Atividade 5	20/11
	Discussão dos resultados Atividade 5/ Definição de Tabela Verdade	20/11
Tarefa 6: Investigando relações de causa e consequência	Aplicação da Atividade 6	23/11
		23/11
	Discussão dos resultados Atividade 6	24/11
Formalização dos conceitos de Condicional e Bicondicional	Formalização dos conceitos de Condicional e Bicondicional	27/11
Discussão e Definição de Equivalência Lógica e Contrapositiva	Discussão e Definição de Equivalência Lógica e Contrapositiva	27/11

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

As tarefas investigativas foram elaboradas considerando o trabalho coletivo dos alunos. Como enfatizado por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), atividades em grupo permitem que os alunos questionem suas conjecturas e trabalhem a linguagem e a estrutura de seus argumentos. Para que essa dinâmica funcionasse, o PP avaliou dois fatores. Primeiro, devido ao alto índice de faltas dos alunos, seria impossível manter grupos fixos, pois muitas vezes apenas uma pessoa do grupo estaria presente, o que seria indesejado. Dessa forma, o PP preferiu flexibilizar a formação dos grupos, exigindo apenas que, em cada atividade, o mesmo grupo fosse mantido.

O outro fator analisado pelo PP foi a obrigatoriedade de formar grupos. Alguns alunos resistiam a trabalhar coletivamente, preferindo realizar as atividades individualmente. Como o objetivo do PP não era impor o trabalho em grupo e acreditava que a insistência poderia aumentar a resistência dos alunos às tarefas, ele decidiu permitir que as atividades fossem

realizadas individualmente, como uma exceção. Dessa forma, embora incentivasse o trabalho em grupo, o PP não criou resistência ao trabalho individual.

Devido a essa gestão de sala de aula, tendo grupos e duplas diferentes para cada atividade, acredito ser pertinente neste momento definir alguns códigos para referenciar as atividades, os grupos e os alunos:

- Representaremos as atividades com números $1, 2, 3...$
- Representaremos os diferentes grupos ou duplas com letras $A, B, C...$
- Assim o grupo ou dupla A da atividade 1 terá notação $A1$
- Os Alunos receberam nomes fictícios

Assim analisaremos os dados pelas etapas da sequência didática dividindo em subseções iniciando pelas aulas introdutórias do conteúdo de lógica.

5.4.1 Aulas de Introdução à Lógica

A introdução das atividades foram feitas buscando não só introduzir o conteúdo de Lógica mas também inserir os alunos no contexto das tarefas investigativas.

A primeira aula foi no primeiro horário do dia 25/09. Nessa aula expliquei o desenvolvimento das atividades seguintes, a dinâmica das aulas e convidar os alunos a se engajarem nelas. Busquei nesse momento esclarecer que o modelo de aula foi pensado contando com a participação deles, eu não avaliaria a participação deles, julgando como certo ou errado, nem daria a eles uma resposta final durante a atividade.

Para introduzir a Lógica Matemática, iniciei a aula falando sobre a origem do estudo da Lógica, mencionando os filósofos Sócrates, Platão e Aristóteles. Posteriormente, esclareci o estudo de Aristóteles sobre a Lógica, explicando aos alunos que o objetivo da lógica aristotélica era estudar a construção de um argumento. Para ilustrar essa ideia, levantei o seguinte questionamento para a turma: “O que faz uma argumentação ser válida ou uma argumentação ser falaciosa?”. Para fomentar a discussão, atentei-me aos seguintes questionamentos, que poderiam levar os alunos à reflexão:

- O que é um argumento?
- Qual o objetivo de um argumento?
- Um argumento é bom se ele é convincente?
- Um argumento é ruim se ele não é convincente?
- A validade de um argumento é relativa ao enunciador ou ao receptor?
- Um argumento ruim invalida sua conclusão?

Na segunda aula do dia 25/09 no sexto horário apresentei o movimento sofista. Esse movimento filosófico ficou registrado por Platão e marcado por suas críticas a ele. Assim, para apresentar o movimento primeiro destaquei sua origem, suas principais ideias e dois representantes desse movimento. Esses foram descritos assim como está apresentado conforme a seção 3.1 sobre história da Lógica.

Depois dessa apresentação disse aos alunos que esse movimento era muito questionado por Platão e pedi para eles tentarem verificar as possíveis críticas. Assim voltamos à discussão sobre argumentação e levantei a seguinte questão: “Uma argumentação válida é uma argumentação vencedora?”, novamente tendo algumas perguntas em mente para fomentar o debate, além das questões anteriores:

- Qual o objetivo de um debate?
- O que é um argumento vencedor?
- O que é um argumento correto?
- Qual o melhor argumento entre os dois?
- A linguagem utilizada é importante para a construção de uma argumentação?
- Qual o papel da lógica em um debate?

Ao realizar ambas as discussões os alunos se mostraram engajados e foram aos poucos percebendo a importância de organizar, entender e estudar o processo de construção de um argumento. Dessa forma aparenta ser um bom ponto de partida para os estudos de Lógica.

5.4.2 Tarefa 1: Porque médicos têm a letra feia?

Ao finalizarmos a introdução partimos para etapa que iniciaria o processo de reconhecimento da importância de uma linguagem lógica formal. Com esse objetivo elaboramos uma tarefa investigativa. Nessa tarefa os alunos em duplas ou individualmente responderam à Atividade 1 baseado em um vídeo do YouTube. Essa foi aplicada no dia 3/10/23 no primeiro e quarto horário Utilizando do vídeo “Médico tem letra feia? | Drauzio Comenta #27”⁵ para levantar questões sobre a necessidade de apresentar um discurso claro. O vídeo apresenta uma dúvida de uma espectadora, a Juju Oliveira, que questiona: “pq vcs médicos tem uma letra horrível?”. Essa pergunta gera uma resposta do Dr. Drauzio Varella, que encadeia uma boa discussão sobre o entendimento ou não da pergunta feita. Nesse momento, a atividade questiona os alunos para identificar e possivelmente procurar soluções para o problema gerado por um duplo sentido.

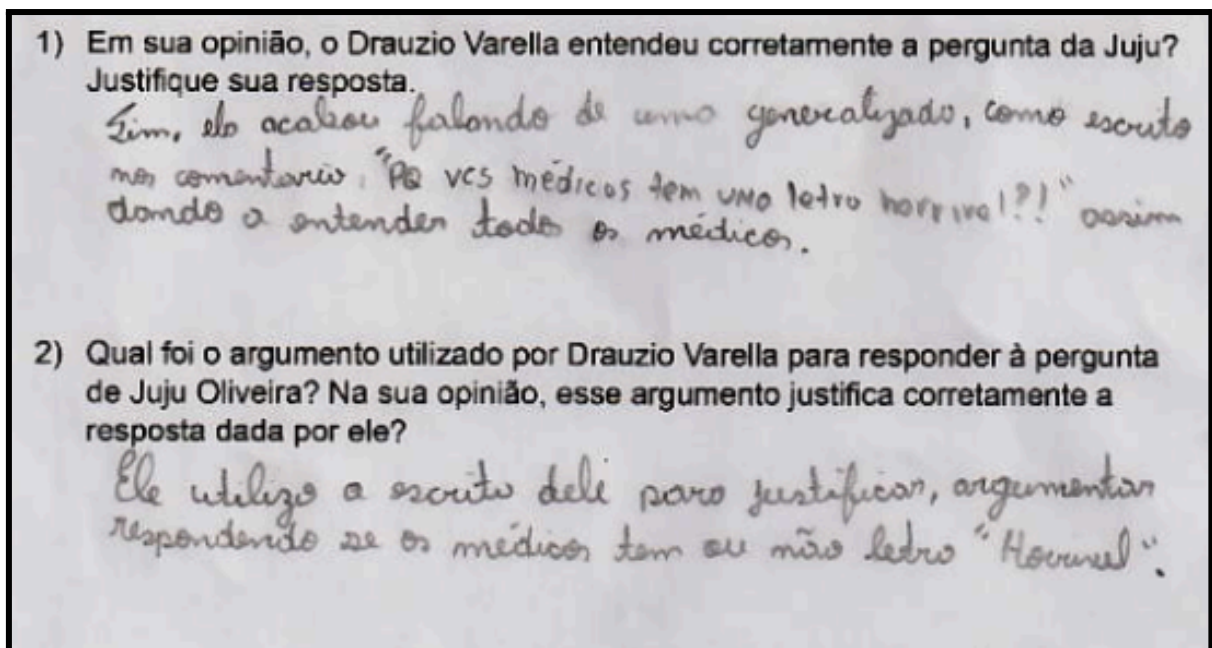
⁵ fonte: <https://youtu.be/00c2ddf5ocQ?si=ESES-Gj06QoXrDmP>. Acesso em 03/10/23

Para a execução da atividade o PP contou com a utilização do retroprojetor e as caixas de som que existem na sala, no entanto, o retroprojetor era muito fraco e as caixas de som chiavam muito, impedindo a compreensão do diálogo. Para contornar esse problema o professor pediu para os alunos com acesso à internet procurarem pelo vídeo e para aqueles sem internet ele forneceu o celular. Esse contratempo reduziu o tempo da primeira aula e gerou um certo tumulto inicial e, para evitar perdas na tarefa, o PP disponibilizou mais tempo para os alunos na segunda aula para responderem o questionário.

Para analisarmos os dados da Atividade 1, observamos 6 registros, sendo 4 realizados individualmente, pelos alunos André, Bianca, Cíntia e Débora e dois pelas duplas A1 e B1. A análise será feita por grupo e ao final destacando uma análise geral.

No registro de André (figura 17), o aluno compreende que o doutor entende de uma forma generalizada enfatizando assim que se trata de “todos os médicos”. Esse aluno também aponta que a argumentação do doutor foi a própria escrita “Utiliza a escrita dele para justificar”. Conforme podemos observar na figura 17:

Figura 17 - Protocolo 12



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Dessa forma André conclui que Drauzio Varella entendeu a pergunta e usou de um exemplo para negar a afirmação da espectadora. Nesse momento o aluno é levado a se questionar se Juju construiu de forma adequada a pergunta. André destaca que depende do objetivo que ela tinha. Observe a seguir:

Figura 18 - Protocolo 13

3) Na sua opinião, a pergunta de Juju Oliveira está bem estruturada? Justifique sua resposta.

Depende de que ele quis dizer. Se ele quis dizer em geral, todos os médicos, sim, se ele quis dizer ele (Drauzio) não, porque está escrito de uma forma generalizada.

4) A partir da afirmação "Médicos têm a letra feia". Você entende que a frase quer se referir a todos os médicos ou a maioria dos médicos?

Todos os médicos. Se fosse alguns seria "a maioria dos médicos...".

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

É possível perceber que André identifica a importante diferença entre todos e o indivíduo. Na resposta à pergunta 4, figura 18, esse aluno também completa que existe uma diferença entre "todos os médicos" e "alguns médicos". Assim esse aluno já aparenta identificar a necessidade de diferenciar algo específico de algo geral.

A aluna Bianca compreende, por outro lado, que não houve falha de comunicação, tanto da parte da interlocutora como do receptor, uma vez que o doutor respondeu exatamente o que Juju perguntou. Destaco também que a aluna identifica a relação de causa e consequência entre ele não ter a letra feia é suficiente para não serem todos os médicos. A resposta de Bianca pode ser observada na figura a seguir:

Figura 19 - Protocolo 14

1) Em sua opinião, o Drauzio Varella entendeu corretamente a pergunta da Juju? Justifique sua resposta.

Sim, porque ele foi lá pegou uma folha esca-
 -va e mostrou que ele não tem uma letra feia
 que não é todos os médicos que tem a letra feia

2) Qual foi o argumento utilizado por Drauzio Varella para responder à pergunta de Juju Oliveira? Na sua opinião, esse argumento justifica corretamente a resposta dada por ele?

o argumento mostrado a letra dele para
 a juju. sim

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Notamos também a partir da resposta de Bianca que a justificativa de Drauzio Varella mostra que ele entendeu e contestou a pergunta de Juju. Ênfase também que apesar de trabalhar com uma relação de causa e consequência, essa relação não é explícita pela aluna faltando possivelmente alguns conectivos como “se... então”. Destacamos que com o auxílio dos conectivos as duas sentenças “*que ele não tem a letra feia*” e “*Que não é todos os médicos que tem a letra feia*” passam a ter uma correlação direta não estando soltas, mas sim construindo uma linha de raciocínio.

O protocolo 15 que analisaremos na figura 20 é da aluna Camila, nessa situação a aluna interpretou que o médico entendeu a pergunta se incluindo dentro do grupo de médicos, se usando como exemplo para mostrar que a letra dele não é horrível. Porém, ela enfatiza que esse contraexemplo, sem usar dessa denominação, não é suficiente para responder à pergunta feita.

Figura 20 - Protocolo 15

De acordo com as as informações do vídeo e com seus conhecimentos prévios sobre lógica, responda as perguntas a seguir:

1) Em sua opinião, o Drauzio Varella entendeu corretamente a pergunta da Juju? Justifique sua resposta.

Eu acho que ele até entendeu a pergunta, mas pensei que ele estivesse se referindo a ele tem: sim, já que ele também é médico.

2) Qual foi o argumento utilizado por Drauzio Varella para responder à pergunta de Juju Oliveira? Na sua opinião, esse argumento justifica corretamente a resposta dada por ele?

Ele escreveu em uma folha como forma de argumentar e mostrar que a letra dele não é horrível como os médicos geralmente têm, mas ele não responde à pergunta.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nas outras duas respostas, Camila se atenta a uma generalização da pergunta de Juju e da proposição “Médicos tem a letra feia”, como observado na figura 21.

Figura 21 - Protocolo 16

3) Na sua opinião, a pergunta de Juju Oliveira está bem estruturada? Justifique sua resposta.

Ele generalizou muito, talvez se a pergunta fosse de uma outra forma a resposta seria estruturada e bem mais explicativa.

4) A partir da afirmação “Médicos têm a letra feia”. Você entende que a frase quer se referir a todos os médicos ou a maioria dos médicos?

A frase generaliza, dando a entender que se refere a todos os médicos.

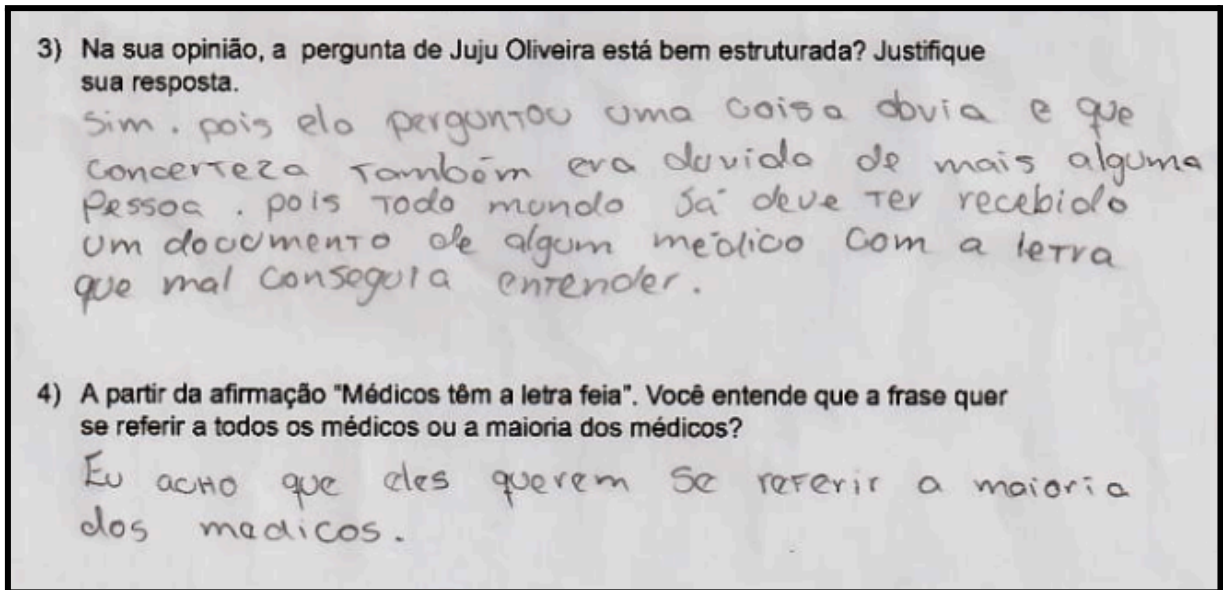
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ressalto que apesar da aluna entender como algo generalizado, ela interpreta que um exemplo não é suficiente para justificar algo geral alegando que o médico não responde à pergunta. Essa inquietação da aluna indica que ela entende que o processo comunicativo não foi alcançado, pois a dúvida não parece ter sido esclarecida. Essa atividade também traz para a

aluna uma oportunidade de entender como generalizar ou não e também as suas formas de justificar.

No protocolo de Débora, ela nas questões 1) e 2) apresenta respostas semelhantes aos alunos anteriores, mas nas respostas das questões 3) e 4) da figura 22, a aluna apresenta uma análise diferente da anterior. Como observamos a seguir:

Figura 22 - Protocolo 17

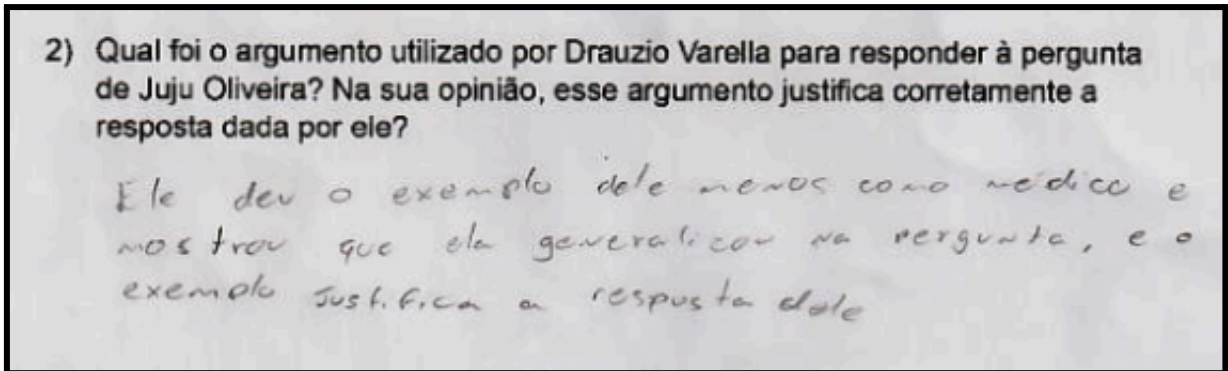


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ao responder sobre a estrutura das perguntas a aluna destaca que a pergunta é “óbvia” analisando a partir do contexto, pois “todo mundo já deve ter recebido um documento de algum médico com a letra que mal conseguia entender”. Dessa forma, Debora associa a clareza de uma sentença a sua experiência de vida, tendo aparente dificuldade de separar esses fatores. Outro destaque importante é que essa aluna interpreta a frase “Médicos tem a letra feia” como a maioria e não todos, enfatizando que a frase pode gerar diferentes interpretações.

A dupla A1, formada pelos alunos Enzo e Fábio, concorda que o Drauzio entendeu a pergunta assim como os alunos anteriores. Ainda acrescenta que o médico mostra a Juju que ela “generalizou” na sua pergunta, como observamos a seguir, na figura 23:

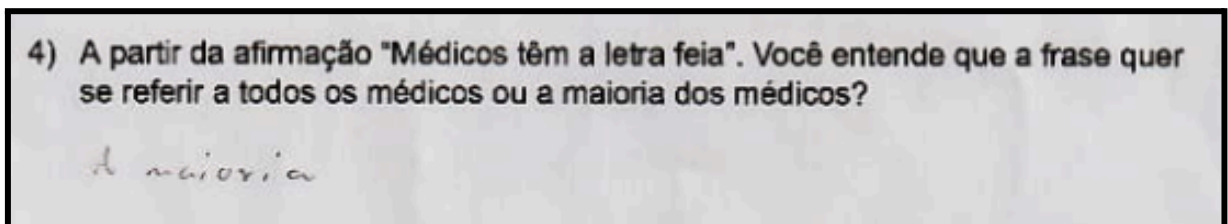
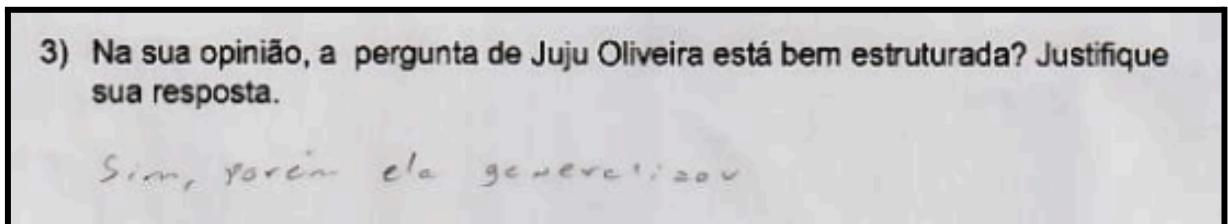
Figura 23 - Protocolo 18



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Apesar da dupla A1 acordar, no protocolo 18 que a Juju “generalizou na pergunta”, logo em seguida eles, no protocolo 19, expressam que “Médicos têm a letra feia” está se tratando da maioria e não de todos. Isso destaca uma possível dúvida do real sentido das frases, se é uma generalização ou não. Isso é observado nos protocolos apresentados nas figuras 24 e 25 a seguir:

Figura 24 - Protocolo 19



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A dupla B1, formada pelas alunas Gabriela e Helena destaca que a interpretação do doutor inicialmente é literal, pois considera “todos os médicos do mundo”, mas depois do lado de trás da folha, destaca que “no geral médicos têm letra feia”, como nas figuras 25.

Figura 25 - Protocolo 20

1) Em sua opinião, o Drauzio Varella entendeu corretamente a pergunta da Juju?
 Justifique sua resposta. *sim, no início "brincou" interpretando de uma forma literal, considerando todos os médicos do mundo, depois, apesar de não ter respondido a pergunta, disse que de fato no geral médicos tem a letra feia.*

2) Qual foi o argumento utilizado por Drauzio Varella para responder à pergunta de Juju Oliveira? Na sua opinião, esse argumento justifica corretamente a resposta dada por ele? *O argumento foi que ele não tem a letra feia, portanto, nem todos os médicos tem a letra feia. Na nossa opinião, sim ~~não~~, sim porque se for considerado dessa forma literal, Juju acha que todos os médicos DO MUNDO tem letra feia, então ele mostrou que nem todos...*

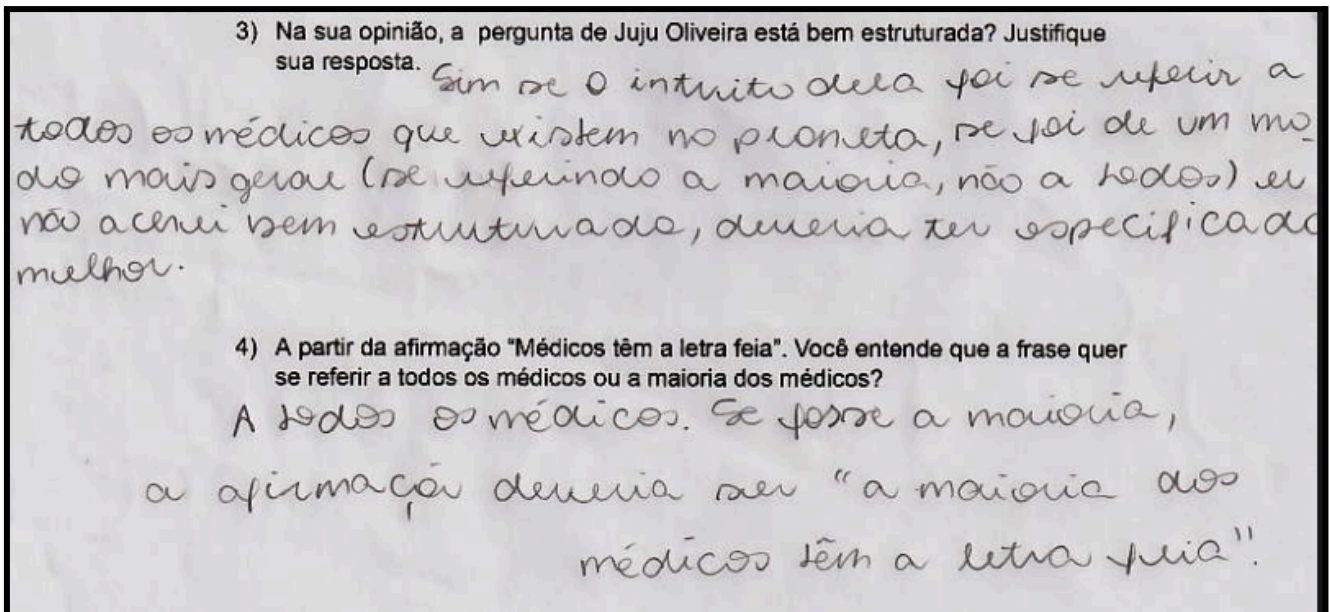
02) Mas ao mesmo tempo ele não respondeu realmente a pergunta da juju.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na questão 2, nas figuras 25, é possível notar que a dupla B1 apresentara uma dúvida ao inicialmente escreverem “sim e não” e depois concluírem que ele responde do ponto de vista literal. Esse destaque se mostra positivo para o desenvolvimento do trabalho, pois permite a elas que reflitam sobre o problema de comunicação.

Nas perguntas 3) e 4) a dupla B1 destaca que o sentido da frase depende do intuito do locutor. Tanto no caso da Juju, quanto no caso da proposição que não esclarece se são todos ou a maioria. Inclusive as alunas sugerem que ao se tratar da maioria isso deveria ser explicitado, como podemos observar no protocolo apresentado na figura a seguir:

Figura 26 - Protocolo 21



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Após o desenvolvimento da Atividade 1, o PP recolheu os protocolos das atividades, para evitar alterações, e iniciou a discussão dos resultados. O próprio PP conduziu a discussão para simplificar o processo e seu desenvolvimento, das discussões, devido ao tempo limitado. A primeira observação foi que os alunos, de fato, concordaram que o Dr. Drauzio Varella entendeu a pergunta. No entanto, os alunos divergiram em relação ao fato de o doutor ter ou não respondido à pergunta. Alguns alunos, incluindo Gabriela do grupo B1, questionaram o tom irônico do médico e relataram que ele se usou como exemplo para justificar que nem todos os médicos têm letra feia.

Ao analisarmos a pergunta de Juju, a maioria dos alunos que se pronunciaram destacou que ela não foi clara. Usaram termos como "muito geral" e "generalizou" para expressar que a pergunta não tinha um objetivo específico. Nesse momento da discussão, os alunos começaram a debater se havia um problema de comunicação, já que não ficou claro se estava sendo tratado do "geral" ou do "específico", do "total" ou de "um grupo menor".

Ao observarem a frase "Médicos têm a letra feia", a maioria dos alunos expressou que entenderam que estava se referindo a todos os médicos. Quando o professor insistiu em questionar se alguém tinha uma interpretação diferente, a Débora destacou que entendeu como "a maioria" e não "todos". Nesse momento, o professor usou a situação para explicar aos alunos que não havia uma resposta precisa para a pergunta e a interpretação da Débora também tinha validade uma vez que havia um duplo sentido na frase. Após esse

esclarecimento, o professor comentou sobre as múltiplas interpretações, mostrando que a frase poderia ser entendida tanto de forma geral quanto específica.

Com isso, os alunos discutiram sobre o que é "geral" e o que é "específico". Uma vez identificadas as duas interpretações, o PP perguntou como eles poderiam esclarecer essa dúvida. Assim, eu, o PP, escrevi no quadro as duas sugestões elaboradas pelos alunos, tanto para a interpretação geral quanto para a específica. As sugestões foram:

- “A maioria dos médicos tem a letra feia.”
- “Todos os médicos têm a letra feia”

Nesse momento os alunos se depararam com uma conjectura para a diferenciação dos possíveis sentidos da frase e assim evitando o duplo sentido. Sendo assim, eles continuaram o processo de desenvolvimento de uma linguagem lógica clara e esclareceram possíveis confusões da linguagem matemática envolvendo generalizações.

O PP então voltou a enfatizar a importância de diferenciar entre o todo e a parte. Nesse momento, utilizei frases escritas no quadro para citar a ideia de uma afirmação geral é uma afirmação particular. Observando essas frases o PP perguntou: “Quando falamos de alguns, pode ou não pode ser todos?” Nesse momento, as alunas Gabriela e Irene expressaram a crença de que, ao falar de uma parte, poderiam estar se referindo ao todo também. Por outro lado, Joana se pronunciou, dizendo que estava em dúvida e achava que quando afirmamos sobre alguns, não podemos estar nos referindo a todos.

O PP então deu um exemplo: “Existe vida na Terra”. Ele explicou que sabemos que existe vida na Terra, mas não sabemos se existe vida em outros planetas. Analogamente em algumas ocasiões podemos afirmar algo sobre um grupo específico, mas, como não sabemos sobre todos, só podemos afirmar sobre um grupo menor. Isso ajudou a aluna a entender a importância de ser claro e preciso na comunicação para evitar ambiguidades e interpretações incorretas.

Analisando a tarefa investigativa à luz da teoria, dando atenção ao processo investigativo elaborado pelos alunos, observamos que a tarefa aparenta cumprir seu objetivo de permitir que os alunos reconheçam a importância de uma linguagem clara para evitar falhas de comunicação. Nesse processo, as tarefas investigativas possibilitaram que os alunos identificassem problemas comunicativos na linguagem observando uma referência à realidade. Entendemos que essa referência a realidade foi benéfica, pois permitiu que os alunos criassem um engajamento na tarefa, se dando ao direito de extrapolar em relação às informações apresentadas. Esse entre outros fatores permitiu que os alunos realizassem o

processo de conjecturar uma linguagem mais clara, se aproximando da linguagem lógica formal.

5.4.3 Formalização de Proposição Categórica e Tarefa 2: Proposições categóricas

Após a discussão realizada na Atividade 1, devido às demandas escolares e um feriado prolongado, retomamos a sequência didática no dia 23/10 durante dois horários. Nesse momento acreditamos ser o ideal para sintetizar as ideias trabalhadas com os alunos permitindo que as conjecturas elaboradas por eles entrem então em consonância com os conceitos formais da Lógica Matemática.

A primeira aula do dia, por ser no primeiro horário, demorou a iniciar, tendo apenas trinta minutos de duração, pois o PP optou por priorizar a chegada dos alunos em relação ao tempo. Ao iniciar a aula, o PP juntamente com os alunos, retomou a Atividade 1, que havia sido feita a mais de 15 dias antes, e retomou as conclusões discutidas pelos alunos. Entre elas destacou a importância de apresentar informações de forma clara e sistematizada para evitar situações em que a veracidade de uma frase esteja associada a um "depende de algo". Para isso, foram apresentados dois conceitos que Aristóteles criou para evitar possíveis duplos sentidos, são esses: Proposição e Negação, assim esses conceitos foram definidos conforme descrito no plano de aula em anexo. Esses conceitos foram construídos enfatizando a unicidade do valor lógico de uma proposição e sua relação com sua negação.

A segunda aula do dia, no sexto horário, foi o momento em que o professor definiu com os alunos as *Proposições Categóricas* usando como referência a frase “Médicos tem a letra feia.”. As afirmações universais e particulares foram discutidas com os alunos e sendo posteriormente definidas por eles mesmos como:

- Afirmação Universal: Afirma para um grupo todo.
- Afirmação Particular: Afirma para um grupo selecionado

Os alunos também construíram exemplos para essas categorias de proposição partindo da frase “Médicos tem a letra feia”. Para afirmação universal o exemplo foi “Todos os médicos têm a letra feia.”. Já para afirmação particular surgiram três formas de escrever:

- “Alguns médicos têm a letra feia.”
- “O meu Médico tem a letra feia.”
- “Existem médicos com a letra feia.”

O segundo exemplo, sugerido por Kaio, levou a uma discussão sobre a correlação entre a noção de particular e algo pessoal ou privado. O PP esclareceu que uma afirmação

particular pode se referir a um indivíduo específico ou a um subconjunto maior, mas ainda limitado, num grupo.

Em seguida, o PP apresentou os conceitos de negação universal e negação particular, entendendo como a negação das proposições. Criando uma analogia com as afirmações os alunos definiram os conceitos como:

- Negação universal: nega para o grupo todo.
 “Nenhum médico tem a letra feia.”
 “Não existem médicos que tem a letra feia”
- Negação particular: negação de um grupo selecionado.
 “Nem todo médico tem a letra feia.”
 “Existem médicos que não tem a letra feia.”
 “Alguns médicos não têm a letra feia.”

A aluna Gabriela ao observar esses exemplos indagou o motivo de “Existem médicos que não tem a letra feia.” ser uma negação particular e “Não existem médicos que tem a letra feia.” ser uma negação universal. O professor destacou que no primeiro caso o “não” nega o “ter” sendo assim a existência é particular. Já no segundo exemplo o “não” nega a “existência” sendo assim nega o todo. Essa discussão foi importante para reforçar a necessidade de uma clareza na hora de construir proposições categóricas, evitando assim dificuldade de interpretação.

Para verificar os conhecimentos estabelecidos na aula anterior o PP aplicou a Atividade 2 que é um exercício de aplicação dos conceitos, que tem como objetivo avaliar a capacidade de transpor os conhecimentos para situações semelhantes.

Analisando as atividades realizada pelos alunos identificamos que grande parte dos alunos conseguiu realizar o exercício variando suas respostas, mas seguindo o formato adequado, como o exemplo a seguir:

Figura 27 - Protocolo 22

Complete o quadro construindo proposições categóricas a partir da frase "Frutas são azedas":

Afirmção Universal	Afirmção Particular
Todas as frutas são azedas	Existem frutas azedas
Negação Universal	Negação Particular
Nenhuma fruta é azeda	Nem todas as frutas são azedas

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em um caso específico a aluna aparentou não entender a atividade respondendo utilizando como base a frase "Médicos tem a letra feia", nos outros casos as respostas foram próximas da resposta da Aluna Camila, da figura X. Se tratando da afirmação universal, as outras proposições foram idênticas à Camila. Por outro lado, as afirmações particulares tiveram algumas variações como "*Algumas frutas são azedas*", "*Existem algumas frutas que são azedas*", "*Certas frutas são azedas*" e "*Essas frutas não são azedas*". Além disso, Kaio, o mesmo aluno que destacou "*O meu médico tem a letra feia.*" escreveu "*A minha fruta é azeda.*". Ele parece conjecturar uma forma de especificação diferente das outras, mas também específica.

Agora observando as negações a negação universal apresentou a seguinte variação: "Não existe fruta azeda.". Além dessa forma de escrita duas alunas escreveram "*Nenhuma fruta são azedas.*". Como é observado no protocolo a seguir:

Figura 28 - Protocolo 23

Complete o quadro construindo proposições categóricas a partir da frase "Frutas são azedas":

Afirmção Universal	Afirmção Particular
Todas as frutas são azedas	Existem frutas que são azedas
Negação Universal	Negação Particular
Nenhuma fruta <u>são</u> azedas	Nem todas as frutas são azedas

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Esse fator indica uma perda de sentido no processo de generalização, devido a algoritmização, repetindo “*são azedas*” mesmo quando deveria estar no singular. Enfatizando que a proposição foi construída sem uma avaliação crítica do resultado.

Por último a negação particular apresentou diferentes variações além da apresentada na figura X. Essas variações foram “*Existem frutas que não são azedas.*”, “*Nem toda fruta é azeda.*”, “*Algumas frutas não são azedas.*” e “*Essas frutas não são azedas*”.

Portanto, é plausível inferir que os alunos, em geral, conseguiram identificar as variações entre as proposições categóricas, uma vez que conseguiram realizar a Atividade 2 e algumas vezes buscaram sinônimos diferentes dos exemplos anteriores, como “*Certas frutas são azedas,*” desenvolvendo o conhecimento lógico de forma ativa e buscando extrapolar as opções apresentadas pelo professor. Isso destacou compreendendo o sentido das diferentes proposições alguns alunos não apenas reproduziram o conteúdo, mas buscaram proposições que fossem equivalentes.

5.4.4 Tarefa 3: Investigando o Valor Lógico

Para prosseguir com o estudo das proposições categóricas e explorar conceitos da lógica foi apresentada a Atividade 3. Essa tarefa investigativa foi aplicada nos primeiro e último horário do dia 30/10 e no primeiro horário do dia 31/10 em três aulas ao todo, é importante enfatizar que, no entanto as aulas do primeiro horário tiveram um tempo menor devido ao atraso dos alunos, contando assim com apenas 30 min por aula, totalizando 110 minutos de execução da atividade.

Já sua discussão foi realizada em uma terça-feira no quarto horário do dia 31/10. O objetivo dessa atividade foi fortalecer as noções de proposição categóricas e explorar métodos e padrões demonstrativos dessas proposições.

A atividade foi realizada em grupos, e devido à insistência dos alunos algumas das atividades foram feitas de forma individual. A tarefa investigativa contava com quatro questões que aprofundaram os conceitos de proposições universais e particulares, além de explorar os conceitos de verdade e falsidade investigando justificativas válidas.

A primeira atividade foi realizada por quatro alunas que formavam o grupo A3. A primeira questão tinha como objetivo permitir que os alunos relembrem e identifiquem as diferenças entre proposições universais e particulares. Assim como a maioria dos grupos o grupo A3 não apresentou maiores dificuldades nesse exercício e sua resolução está apresentada a seguir:

Figura 29 - Protocolo 24

- 1) Caracterize as proposições como universais ou particulares:
- (U) "Todas as notas musicais começam com uma consoante."
 - (P) "Existe uma letra que aparece no nome de todas as estações do ano."
 - (U) "Todos os dias da semana tem a letra 'A'."
 - (U) "Nenhum dia da semana tem a letra 'V'."
 - (P) "Algum mês do ano não tem 30 dias"
 - (U) "Nenhum mês tem exatamente 29 dias."
 - (P) "Algum mês do ano tem 32 dias."
 - (U) "Todos os animais são vertebrados."
 - (P) "Algum vertebrado é animal."
 - (U) "Todos os números primos são ímpares."
 - (P) "Existe um número ímpar e primo."
 - (U) "Todos os múltiplos de 4 são pares."
 - (P) "Existe número ímpar múltiplo de 4."

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para analisar a questão 2, por conta de seu caráter subjetivo e extenso, a análise dos grupos A3, B3 e C3 será feita simultaneamente. Assim conseguimos analisar padrões, identificar diferentes interpretações e desenvolvimentos. Os grupos A3 e B3 eram formados por 4 alunas cada, o grupo C3 era formado por um aluno e uma aluna.

A questão 2 tinha como objetivo que os alunos investigassem se cada um dos itens da questão anterior era verdadeira ou falsa e justificasse as conclusões. Esse momento gerou uma insegurança inicial dos alunos que cobravam do professor uma confirmação imediata. Nesse momento, baseado em Ponte, Brocado e Oliveira (2009), o professor se atentou a estimular o trabalho dos alunos ao mesmo tempo que buscava estimular o pensamento investigativo.

Observe a seguir as respostas aos itens a), b), c), d) dos grupos A3, B3 e C3 nas figuras 30, 31 e 31, respectivamente:

Figura 30 - Protocolo 25

- 2) Investigue se cada uma dessas proposições é verdadeira ou falsa. Justifique suas conclusões.
- (V) *DÓ, RÉ, MÍ, FÁ, SÓU, LÁ, SI, DÓ, pois são consecutas as letras*
 - (F) *são escritas de formas diferentes, por isso não são...*
letras que tem a mesma letra
 - (F) *segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado e*
domingo, de todos apenas um não tem a letra "a"
 - (V) *terça, sábado, o dia da semana, com a letra*
"v", não vai fazer sentido.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 31 - Protocolo 26

2) Investigue se cada uma dessas proposições é verdadeira ou falsa. Justifique suas conclusões.

a) é verdadeira pois todas as notas começam com D, R, M, F, S, L e essas letras são consoantes.

b) É falsa, já que algumas estações possuem letras que em outros não possuem.

Exemplo: O "O" aparece em algumas, mas não aparece em "outono" como por exemplo.

c) falsa, não podemos dizer que todos os dias têm a letra A, porque domingo não tem A.

d) Verdadeira, pois analisando todos os dias da semana, chegamos a conclusão de que nenhum possui a letra "V".

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 32 - Protocolo 27

2) Investigue se cada uma dessas proposições é verdadeira ou falsa. Justifique suas conclusões.

a) V - Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si - D, R, M, F, S, L são consoantes.

b) F - Não existe uma letra que aparece no nome de todas as estações do ano.

c) F - Domingo não tem a letra A.

d) V - Segunda, Quarta, Sexta, Domingo } Nenhuma tem a
Terça, Quinta, Sábado } Letra V.

b) Não existe uma letra que aparece no nome de todas as estações do ano = OUTONO

- VERÃO } V não se repete em nenhuma
- PRIMAVERA } T " " " " "
- INVERNO }

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Antes de responderem ao item a) oralmente, as alunas do grupo A3 questionaram o PP sobre como poderiam justificar a resposta. O professor retornou a pergunta para elas, que começaram a citar cada nota musical de "Dó" até voltar ao "Dó", argumentando que não começavam por vogais. Assim que elas terminaram de responder, o professor novamente

questionou: “Isso justifica sua conclusão?” Após refletir, a aluna Laís, do grupo A3, respondeu que sim, então o professor pediu para registrar o resultado. Esse diálogo foi comum no processo inicial dos alunos, e quase todos os outros grupos realizaram questionamentos semelhantes ao PP ou a outros grupos próximos.

Após o questionamento oral, as alunas do grupo A3 escolheram identificar todos os casos possíveis: “Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó” e grifaram as primeiras letras, além de destacar que eram consonantes. Ao realizar essa justificativa, elas encontraram uma forma de transcrever suas justificativas orais para a forma escrita e visual. Dessa forma, o trabalho investigativo desenvolveu a capacidade de argumentar e registrar logicamente.

O grupo B3, também no item a), justificou citando as letras “D, R, M, F, S, L,” assumindo que essas são as iniciais das notas musicais, e por serem consoantes, a proposição é verdadeira. O grupo C3 foi ainda mais preciso em sua justificativa, apresentando as notas e as letras, mas restringindo-se a uma demonstração mais esquemática e menos escrita. Essas diferenciações são interessantes, pois mostram como se deu o trabalho no processo de tentar comprovar de suas conjecturas.

No item b), os grupos A3 e B3 identificaram corretamente a falsidade da proposição, mas tiveram dificuldade em elaborar uma conjectura que a justificasse. O grupo A3 escreveu a negação da proposição, mas com outras palavras. O grupo B3 tentou justificar usando um exemplo, mas o exemplo ainda foi insuficiente para a demonstração. Esse fator foi previsto pelo professor, uma vez que o método utilizado inicialmente na questão a), de demonstração por varredura, costuma ser exaustivo ao apresentar múltiplas variáveis e testes.

No entanto, o grupo C3, insatisfeito com a resposta dada, ao ser questionado pelo professor “Essa justificativa é suficiente para vocês?”, buscou outra justificativa e a escreveu no final do exercício. Para argumentar, eles usaram a palavra “Outono” para verificar que não existem letras que se repetem em todos os casos, mas se limitaram apenas às letras U e T.

Nos itens a) e b), os alunos às vezes se mostraram “com preguiça” de justificar suas conjecturas observando todos os casos possíveis. Isso levou alguns a procurarem alternativas de justificação mais sofisticadas, permitindo-lhes o desenvolvimento das capacidades argumentativas da lógica.

No item c), para mostrar a falsidade, os grupos A3, B3 e C3 usaram um contraexemplo para justificar a falsidade da proposição, como no grupo C3, que se limitou a dizer “Domingo não tem letra A.” Nesse momento, os alunos se mostraram bem mais confiantes para realizar a demonstração, por contraexemplo.

No item d), destacamos que ambos os grupos B3 e C3 utilizaram o mesmo argumento para justificar a falsidade, mas o grupo B3 deixou implícita a ausência da letra “V”, enquanto o grupo C3 escreveu os dias da semana para evidenciar a ausência da letra “V”. Esse momento é interessante para entender o limite do que é uma justificativa suficiente ou não dentro do contexto escolar e do nível de certeza.

Por outro lado, o grupo A3 usou uma justificativa diferente das previstas na atividade. A aluna J (Paola), pertencente ao grupo A3, afirmou ao PP que não era possível escrever com “V” porque, se ela tentasse, não faria sentido. O professor pediu para as alunas do grupo registrarem essa justificativa, pois ele a achou interessante, destacando que gostou da justificativa da aluna. Nesse momento de questionamento, a aluna Marcela parece destacar uma noção importante para a Matemática: a demonstração por absurdo. Mesmo sem o formalismo matemático, com isso a aluna conjecturou uma ideia e teve a possibilidade de entender de forma ativa o sentido desse conceito. O caráter aberto dessa tarefa foi extremamente importante para o desenvolvimento dessa compreensão, uma vez que não era previsto pelo professor, mas foi construtivo dentro dos tópicos trabalhados.

Continuando a análise da questão 2, os itens e), f) e g) dos grupos A3, B3 e C3 são apresentados respectivamente a seguir:

Figura 33 - Protocolo 28

e) (F) não é verdade os meses do ano que tem 30 dias, ex/ fevereiro que tem 28 mas no ano bisesto tem 29

f) (V) fevereiro no ano bisesto tem 29 dias.

g) (F) Nenhum tem 32 e nem no ano bisesto, pois no maximo que um mês pode ter é 31 dias

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 34 - Protocolo 29

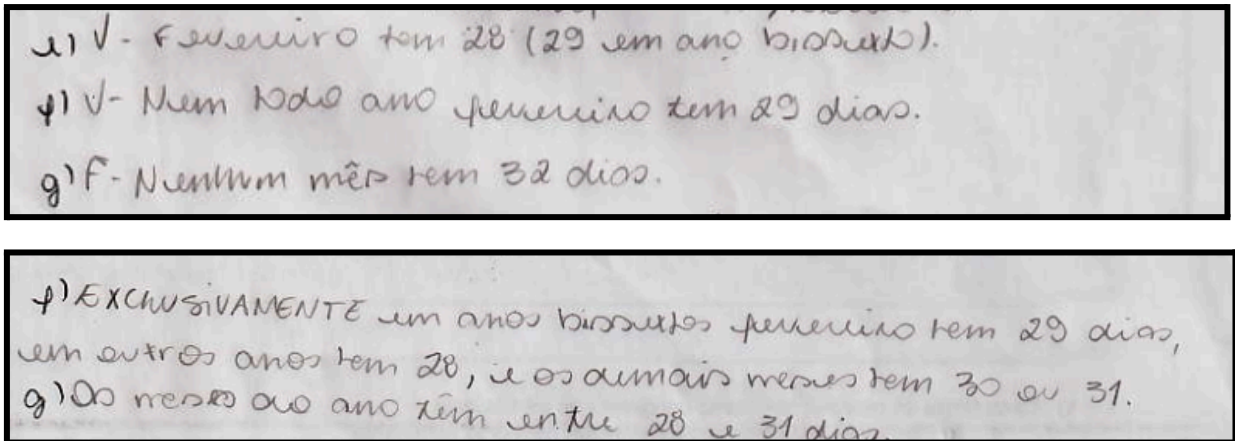
e) Verdadeira, pois fevereiro possui apenas 28 dias (29 em ano bisesto).

f) Falso. Fevereiro tem exatamente 29 dias em anos bisestos.

g) Falso. Nenhum mês do ano tem 32 dias, no máximo tem 31. (Outubro, como por exemplo).

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 35 - Protocolo 30



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

No item e) os grupos conseguem observar e argumentar com facilidade o exemplo que prova a veracidade da situação, no caso o mês “fevereiro”. Analisando as respostas dos alunos referentes ao item f) inferimos que a questão principal ponto de discussão foi sobre o mês de fevereiro. Ao lerem a proposição “Nenhum mês tem exatamente 29 dias.” os alunos do grupo C3 questionaram o PP sobre o termo “um mês tem exatamente” compreendendo dois sentidos. Inicialmente o grupo C3 compreendeu exatamente como “um mês tem sempre” atribuindo ao ano bissexto como uma exceção, dessa forma para eles o mês de fevereiro não tem sempre 29 dias então é falsa a proposição. O grupo B3, por outro lado aparenta ter compreendido “Exatamente” como uma forma de expressar nem mais nem menos, dessa forma assumiram a proposição como verdadeira.

Vista a discussão que estava ocorrendo em diferentes grupos, o professor perguntou para a turma: “O que é um mês para vocês? O mês se repete todo ano ou cada mês é diferente de todos os anteriores?”. Essa pergunta tinha o objetivo de permitir que os alunos compreendessem a origem da dúvida deles e seguissem a interpretação por eles feita progredindo nas atividades, dessa forma os alunos do grupo C3 complementam o item f) esclarecendo que “EXCLUSIVAMENTE” em anos bissextos o mês tem 29 dias.

Identificando o desenvolvimento do grupo A3 notamos que o argumento utilizado por elas no item f) não condiz com o valor lógico apresentado. Enquanto elas justificam que fevereiro tem 29 dias em anos bissextos, o grupo afirma que a proposição é falsa. Isso indica uma dificuldade de interpretação da linguagem lógica em casos da falsidade de uma negação.

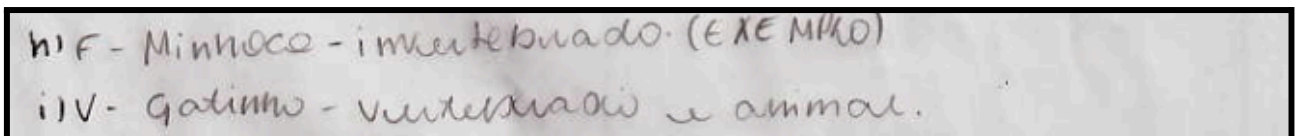
O item g) da questão 2 os grupos A3 e B3 apresentaram argumentos semelhantes e trabalharam com uma ideia de valor máximo dentro de sua argumentação, expressando que se o mês com mais dias tem 31 então nenhum mês tem 32. O grupo C3 além de falar de um

máximo esclarece a faixa “entre 28 e 31 dias” usando de uma limitação para justificar a inexistência de um mês com 32 dias.

Destaco nesse momento que as discussões dos itens permitiram, nesse momento, que os alunos utilizassem argumentos comuns na Matemática em situações que simulam a realidade, dando a eles uma liberdade maior de explorar suas conjecturas e compreender um processo de dedução lógica. Assim o processo investigativo se mostra auxiliar no desenvolvimento de concepções lógicas.

Ao responderem os itens h) e i) a dificuldade de alguns alunos se apresentou no conceito de vertebrado e invertebrado, então foi necessário que eles buscassem uma definição na internet sobre os conceitos, dessa forma estimulando os alunos a buscarem mais informações sobre o assunto e discutir conceitos além da aula do conteúdo de Matemática de forma orgânica. Uma vez esclarecido os conceitos, a maioria dos alunos não tiveram dificuldades de encontrar exemplos que justificavam o valor lógico das afirmações, o grupo C3, por exemplo, se limitou a responder como está a seguir:

Figura 36 - Protocolo 31

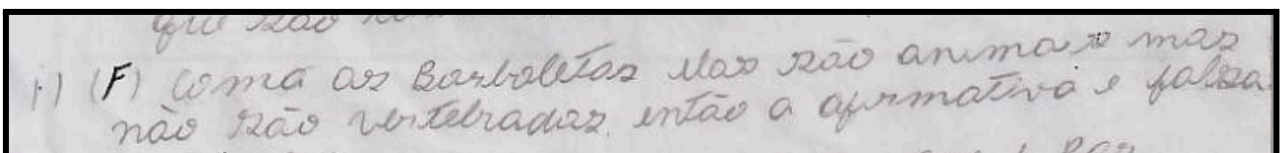


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Dessa forma o grupo apresentou “minhoca” como invertebrado, sendo um contra exemplo da proposição h). Para o item seguinte, “gatinho” foi o exemplo de vertebrado comprovando que “Algum” animal é vertebrado.

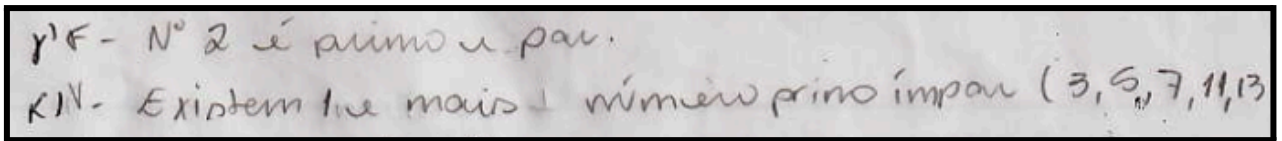
No entanto, o grupo A3 novamente se embola na elaboração de um argumento para o item i) que afirma ser falso pela existência de animais invertebrados como as borboletas. Observe a seguir:

Figura 37 - Protocolo 32



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

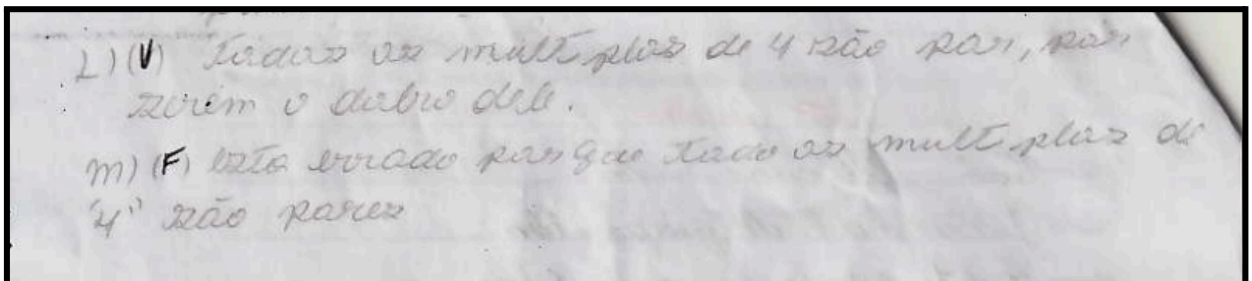
Continuando a análise dos protocolos, os itens j) e k) não apresentaram dificuldades explícitas dos alunos, em ambos os casos o uso de contraexemplos e exemplos foi suficiente para a justificativa dos alunos. Observe as justificativas do grupo 3C a seguir:

Figura 38 - Protocolo 33

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse caso os dados indicam fortemente que os grupos desenvolveram as capacidades de identificar bem a diferença de uma proposição universal é uma proposição particular, além de permitir que esses alunos desenvolvessem suas capacidades de argumentação lógica e Lógica Matemática. Outro fator de destaque foi o desenvolvimento das capacidades de identificar o nível de desenvolvimento de um argumento lógico.

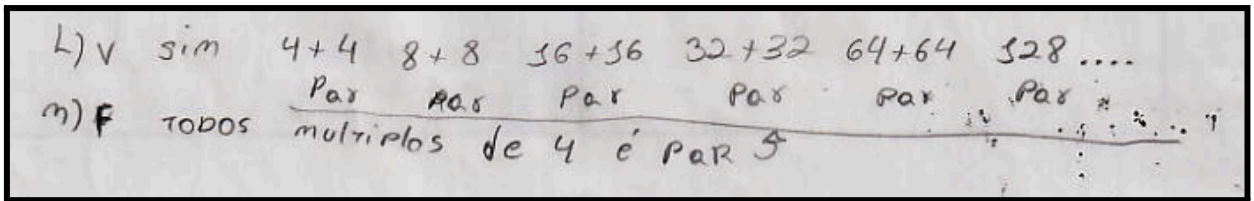
Para os últimos dois itens l) e m) o PP buscava trabalhar argumentações no campo da Matemática que necessitavam de uma análise de um conjunto infinito, os naturais. Para isso os alunos teriam que buscar justificativas mais elaboradas uma vez que um exemplo não seria suficiente. Dessa forma, a expectativa do PP nesse momento era permitir que os alunos explorassem as capacidades argumentativas. Assim, algumas justificativas são interessantes de notarmos. Analisamos as justificativas dos grupos A3, C3 e D3, grupo não previamente mencionado, formado por três alunos e uma aluna. Observe as justificativas a seguir:

Figura 39 - Protocolo 34

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para buscar uma justificativa para o item l) o grupo A3, afirma que “todos os múltiplos de 4 são pares, por serem o dobro dele.” mesmo que essa justificativa e conceito estejam errados elas extrapolam o conceito de par para sua definição “Ser o dobro de um número.”, assim buscando uma solução. Essa justificativa permitiu que as alunas identificassem que se a proposição l) “Todos os múltiplos de 4 são pares” é verdadeira, então a proposição m) “Existe número ímpar múltiplos de 4” que é sua negação é falsa. Dessa forma o grupo usa de uma proposição para identificar o valor lógico da outra.

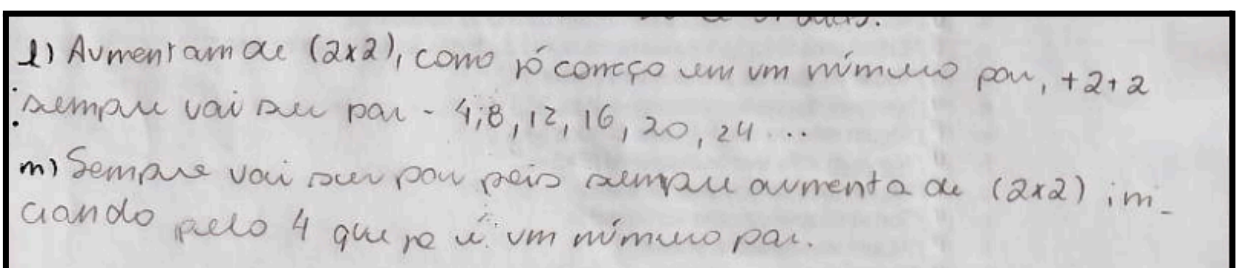
Algo semelhante acontece no grupo D3 que compreende múltiplo como uma potência e por uma ideia de indução confirma que l) é verdadeira. observe a seguir:

Figura 40 - Protocolo 35

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Uma vez concluído o item l) o grupo D3 utiliza desse item para negar o item m). Novamente utilizando de uma proposição para demonstrar outra. Assim, tanto no grupo A3 quanto o D3 é possível entender um avanço no entendimento das relações lógicas de uma proposição e sua negação. Essa correlação evidencia que os alunos desenvolveram uma noção inicial de condicionalidade das proposições, criando a relação verdadeira que “Se todos os múltiplos de 4 são pares, então não existe número ímpar múltiplo de 4.”

Outro grupo que fez uma associação interessante foi o grupo C3 que utilizaram de uma matéria recém estudada de “Progressões Aritmética” para justificar que se um número é par e somarmos 2 duas vezes ele continua par, assim construindo uma lista de múltiplos de 4. Essa associação é favorecida pelo processo de Investigação Matemática que permite que os alunos busquem diferentes conteúdos para seu processo de justificação, permitindo diversos caminhos para solucionar um mesmo problema. Observe a seguir:

Figura 41 - Protocolo 36

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Outro fator interessante foi a construção do número par de duas formas diferentes, tanto como “ 2×2 ” e “ $2 + 2$ ” conseguindo assim utilizar do quatro como um múltiplo de dois ou em outras palavras formado por pares.

Finalizando a questão 2 da atividade investigativa os grupos organizaram as proposições entre quatro grupos distintos, sendo eles:

- Proposição Universal e Verdadeira

- Proposição Universal e Falsa
- Proposição Particular e Verdadeira
- Proposição Particular e Falsa

Com esse agrupamento os alunos tiveram a oportunidade de reconhecer semelhanças de cada um dos grupos. Em seguida, a questão 4 pede para os grupos analisarem cada um dos grupos e identificarem o que tem de comum em cada uma de suas justificativas. Nesse processo os alunos investigaram semelhanças entre as diferentes proposições buscando concluir uma possível semelhança.

Dentre os grupos, alguns não conseguiram concluir as duas últimas questões da atividade pelas múltiplas faltas e atrasos para as aulas, dentre eles o grupo A3. Porém, os grupos que concluíram tiveram respostas congruentes, mostrando que identificaram um certo padrão. Observamos a seguir as respostas do grupo C3:

Figura 41 - Protocolo 36

4) Ao analisar as proposições anteriores:

a. O que te levou a concluir que uma proposição universal como verdadeira?

Analisando se aplico-se a todos os objetos do grupo.

b. O que te levou a concluir que uma proposição universal como falsa?

Analisando se aplico-se a pelo menos 1 objeto do grupo.

c. O que te levou a concluir que uma proposição particular como verdadeira?

Analisando se aplico-se a algum objeto do grupo.

d. O que te levou a concluir que uma proposição particular como falsa ?

ANALISANDO SE APLICA-SE A TODOS OS OBJETOS DO GRUPO

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nelas percebemos que os alunos conseguem concluir que uma proposição universal é verdadeira quando observam todos os objetos, e falsa quando existe uma exceção. Já em uma proposição particular ela é verdadeira quando analisam um elemento e falsa quando aplicam para todos os elementos.

O grupo D3 descreve o mesmo com outras palavras. Observe a seguir:

Figura 42 - Protocolo 37

4) Ao analisar as proposições anteriores:
 a. O que te levou a concluir que uma proposição universal como verdadeira?
 Para uma proposição universal verdadeira, é preciso fornecer evidências sólidas que a comprovem para todos os casos do conjunto em questão

b. O que te levou a concluir que uma proposição universal como falsa?
 Uma proposição universal é considerada falsa se for encontrada uma exceção ou contradição

c. O que te levou a concluir que uma proposição particular como verdadeira?
 uma proposição particular é verdadeira se houver evidência de que ela se aplica a pelo menos um membro do conjunto em consideração

d. O que te levou a concluir que uma proposição particular como falsa?
 Uma proposição particular é falsa se não houver evidência de que ela seja verdadeira para nenhum caso do conjunto em questão.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Com essas respostas é possível identificar que a atividade permitiu que os alunos identifiquem padrões no processo de elaboração de justificativas observando o caráter universal ou particular de uma proposição. Dessa forma o entendimento da lógica passa a ganhar significado no processo argumentativo, através da tarefa investigativa.

Portanto, observando os dados e o andamento da atividade 3 os alunos desenvolveram diversos conhecimentos e fortaleceram suas habilidades, em um processo de elaboração de conjecturas e percepções de padrões.

Após a atividade 3 ser finalizada, o PP conduziu a discussão dos resultados, como proposto pela teoria, no dia 31/10 analisando com os alunos cada uma das proposições da questão 1, nesse momento o professor destacou aos alunos métodos de demonstração idealizados pelos alunos.

Alguns desses métodos foram inicialmente previstos pelo PP. Esses foram os métodos de demonstração por *exaustão*, *exemplo* e *contraexemplo* que se apresentaram em diversos momentos da atividade, assim o PP buscou nas respostas dos alunos exemplos que destacam esses métodos. Ao questionar sobre o método utilizado no item a) da questão 2 os alunos alegaram que precisavam olhar todos os itens para confirmar. Nesse momento o PP disse aos alunos que esse método na Matemática é chamado de *prova por exaustão*, pois é uma forma de separar em uma quantidade limitada de casos. Outro destaque feito pelo professor foi feito no momento de apresentar o método utilizado no item c) em que os alunos usaram de um “exemplo contrário” que na linguagem matemática é chamado de *contraexemplo*.

Além dos métodos previstos, o Professor comentou que a aluna Marcela utilizou de uma ideia importante para Matemática. Como a aluna J insistiu em não se pronunciar o professor destacou que o método desenvolvido por ela era chamado de “Prova por absurdo” e consistia em tentar provar algo contrário ao desejado e fracassar, destacando que encontramos na Matemática um absurdo como, por exemplo “ $1 = 0$ ”. Outra demonstração destacada pelo professor foi a dificuldade de provar por exaustão quando trabalhamos com infinitos, dessa forma a Matemática e outras ciências buscam outras formas de fazer isso. Assim no caso apresentado pelos grupos 3C e 3D no item l) da questão 2 eles fizeram um processo semelhante ao realizado na Matemática que é chamado de indução, partindo dos valores iniciais e concluindo para os valores seguintes.

Posteriormente foi discutido especificamente sobre os resultados encontrados na questão 4. Dessa forma com os alunos foram apresentados os resultados encontrados. Assim, os grupos tiveram a oportunidade de explicar os padrões encontrados na questão quatro. Além de questionar por que esses padrões eram verdadeiros em quaisquer casos, comparando os casos universais com os casos particulares.

Agora buscaremos discutir se analisando a Tarefa 3 nos aproximamos da resposta da questão de pesquisa:

“Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos da Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?”

Nessa tarefa investigativa, diversos conhecimentos da Lógica Matemática formal foram explorados e desenvolvidos no processo de investigação. Métodos de demonstração foram conjecturados, testados e discutidos entre os alunos durante o desenvolvimento da atividade e suas discussões. Alunos que apresentavam aversão à Matemática, como a aluna Marcela, que conjecturou uma forma de demonstração por absurdo, se mostraram ativos no

processo de construção do conhecimento, explorando tópicos que nem mesmo eram previstos na construção inicial da atividade. Esse envolvimento não apenas engrandeceu o trabalho, mas também proporcionou aos alunos a confiança necessária para expressar suas ideias.

O caráter aberto da tarefa investigativa permitiu diferentes níveis de formalização, dependendo das capacidades de abstração dos alunos. Como as justificativas podiam ser mais ou menos rigorosas, os alunos tiveram a oportunidade de explorar suas capacidades de desenvolver o pensamento lógico-matemático. Nesse processo, o papel do professor, como sugerido por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), é desafiar os alunos. O conhecimento do PP sobre seus alunos permitiu trabalhar com diferentes abordagens, avaliando individualmente seus avanços.

A tarefa também indicou que os alunos conseguiram identificar não apenas os métodos de justificação desenvolvidos, mas também começaram a aperfeiçoá-los, seja no rigor ou na simplificação. No item j) da questão 2, por exemplo, os alunos facilmente identificaram a necessidade de um contraexemplo, após já terem utilizado essa estratégia várias vezes. No caso do grupo 3C, os alunos buscaram reescrever seus argumentos por estarem insatisfeitos com a justificativa dada.

Ao compararem as proposições, alguns alunos foram capazes de conjecturar uma generalização dos métodos de demonstração das proposições baseadas no tipo de proposição categórica analisada, obtendo uma compreensão melhor dos conceitos de universal e particular.

Além das observações anteriores, os trabalhos investigativos permitiram aos alunos identificar a importância da formalização na Matemática. Seja no processo de escrita de uma sentença, esclarecendo diferenças entre o todo e a parte, ou no processo de demonstração, para que o argumento seja suficientemente convincente dentro do processo de justificação.

Portanto, o caráter exploratório das tarefas investigativas se mostrou benéfico para o desenvolvimento da lógica. O próprio processo de desenvolvimento e justificação das atividades permitiu que os alunos identificassem a importância da lógica e utilizassem seus conceitos, na prática. No processo investigativo, os alunos se deparam com padrões que, posteriormente, podem ser conjecturados por eles mesmos, criando um significado para os resultados encontrados.

Após a discussão dos resultados partimos para a análise da tarefa 4 apresentada a seguir.

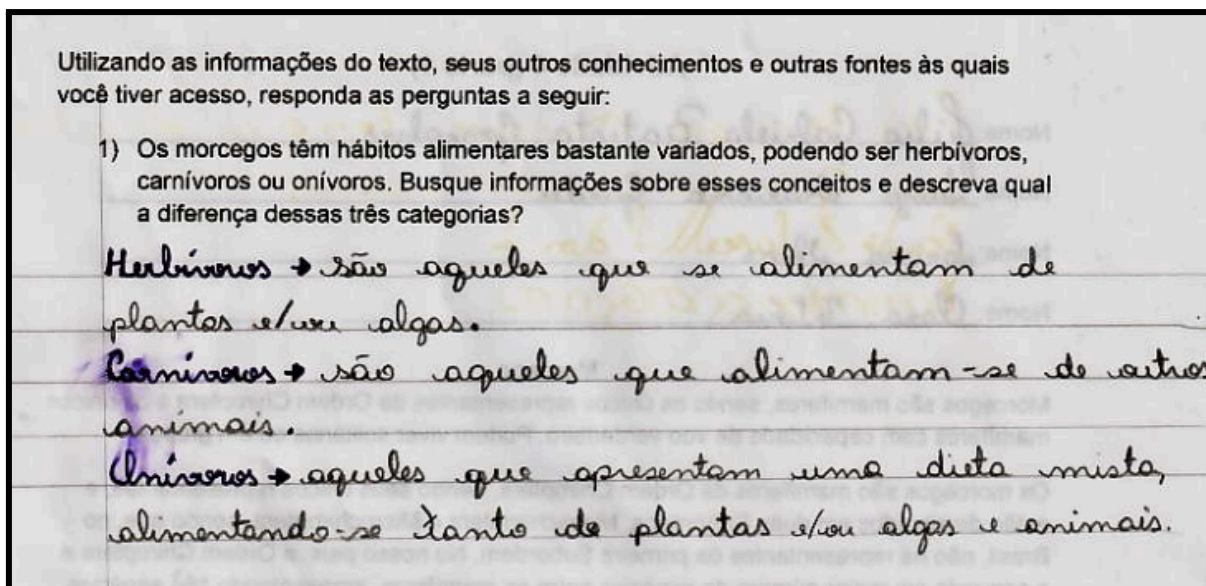
5.4.5 Tarefa 4: Morcegos

Após o desenvolvimento das atividades anteriores, para entender, analisar e construir proposições simples, além de identificar seu valor lógico, o estudo das proposições compostas foi o próximo passo na sequência didática elaborada. Para esse desenvolvimento, estruturamos uma tarefa investigativa que abordasse conceitos da linguagem natural, trabalhando com os conceitos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva.

Esses três conceitos foram trabalhados simultaneamente para que os alunos pudessem comparar as diferenças de linguagem e uso de cada um deles. Assim, a tarefa investigativa visava diferenciar proposições compostas pelos conectivos “e”, “ou” e “ou... ou”. Para isso, foi construída uma atividade em grupo, utilizando o material fornecido pelo professor e a internet dos celulares. A atividade buscava explorar a fisiologia dos morcegos como um ponto de partida para discutir alguns conceitos. Dessa forma, o texto motivador da Atividade 4 inseria os alunos nesse contexto.

Essa atividade foi aplicada no dia 03/11/23, sexta-feira, durante a aula de Português, de forma atípica, devido à necessidade de regularizar as aulas perdidas por conta das paralisações dos professores. A atividade consistia em duas partes. Na primeira parte, os alunos buscaram identificar as diferentes dietas de diferentes tipos de morcegos e categorizar os morcegos em três grupos: "Herbívoros", "Carnívoros" e "Onívoros". Inicialmente, os alunos buscaram definir os três conceitos. As respostas dos alunos foram bem semelhantes entre si, o que já era previsto pelo projeto, uma vez que eles poderiam usar a internet para buscar definições. Os protocolos, de forma geral, estavam bem semelhantes entre si, aproximando-se muito do protocolo do grupo A4, apresentado a seguir:

Figura 43 - Protocolo 38



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse exemplo, é possível inferir que, em alguma capacidade, o grupo A4 conseguiu diferenciar as categorias e entender os "onívoros" como um grupo que tem ambas as dietas: "tanto de plantas e/ou algas e animais." Destacamos aqui também a diferença entre os conectivos utilizados. No caso da dieta herbívora, o grupo destacou "plantas e/ou algas," deixando explícita a diferença entre os conectivos "e" e "ou." Essa linguagem "e/ou" sugere ainda que o grupo entende o "e" como simultâneo e o "ou" como apenas um dos dois, uma vez que na linguagem natural esses conectivos normalmente apresentam esses sentidos.

Nesse momento, evidenciamos a importância de uma linguagem clara e única para a construção do conhecimento lógico. Machado e Cunha (2015) destacam que "A partícula ou, na linguagem natural, pode traduzir tanto a ideia de possibilidades mutuamente exclusivas (ou ocorre isso, ou ocorre aquilo), como a de que pelo menos uma das hipóteses ocorre." (p.52). Por isso, a linguagem natural se diferencia da linguagem lógica, que tem apenas um significado. Na linguagem natural, "ou" pode representar apenas um dos dois, mas, na linguagem lógica, "ou" representa tanto um dos dois quanto ambos ao mesmo tempo.

As questões seguintes da tarefa evidenciam essa discrepância entre as diferentes linguagens. Nas questões 2) e 3) da primeira parte da tarefa, os alunos são questionados sobre a diferença no uso de "e" e "ou," permitindo que explorassem a situação a partir do contexto apresentado. Observe o registro do grupo A4 a seguir:

Figura 44 - Protocolo 39

2) Um morcego que come frutas e insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Um morcego se enquadra na categoria de Onívoro, pois ele se alimenta de frutas e insetos.

3) Um morcego que come frutas ou insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Um morcego que come somente frutas é herbívoro, já aquele que come somente carne é carnívoro.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na questão 2) o grupo A4 expressa que um morcego que come frutas e insetos é onívoro se alimenta de ambos. Já na questão 3) o grupo busca separar em duas situações separadas, quando comem frutas são herbívoros e quando comem carne são carnívoros. Essas respostas destacam ainda mais as noções de exclusão quando usamos o conectivo “ou”.

Finalizando a primeira parte da atividade 4, a segunda parte buscava enfatizar a diferença da disjunção e a disjunção exclusiva. Dessa forma destacar que existem diferenças entre o uso do “ou” e do “ou... ou”. Observe os registros do grupo A4 da atividade 4:

Figura 45 - Protocolo 40

1) Um morcego que **ou** come frutas **ou** come insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Ele pode ser herbívoro (come frutas) ou carnívoro (come insetos).

2) Um morcego que come frutas **ou** insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Ele pode se enquadrar em Onívoro, pois ele come frutas ou insetos.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em busca de diferenciar o item 1) do 2) é plausível entender que o grupo conjecturou uma diferença entre os dois sentidos. Quando temos “ou...ou” o grupo trata como exclusivo, mas diferentemente da parte 1 da atividade quando tem só “ou” o grupo destaca que “ele pode se enquadrar em Onívoro, pois, pois ele come frutas ou insetos”. Portanto, é interessante notar que ao evidenciar que existe uma diferença os alunos conjecturam uma diferenciação semelhante a da Lógica Formal. Destacando a importância de trabalhar não apenas com a conjunção e a disjunção mas também a disjunção exclusiva que está dentro dos paradigmas da linguagem natural.

No entanto, mesmo que os alunos consigam entender que existe uma diferenciação, os conceitos se mostraram não consolidados. Uma vez que na questão 3) da parte dois os grupos buscavam julgar o valor lógico das proposições compostas. E mesmo identificando a diferença dos conectivos “e”, “ou” e “ou... ou” o grupo teve dificuldade de separar os casos. Observe a seguir nos registros do grupo A4:

Figura 46 - Protocolo 41

3) Observe as frases a seguir e identifique se estas são falsas ou verdadeiras de acordo com as informações do texto. Justifique suas respostas.

a. "O morcego é um mamífero e voa."

Verdadeiro, porque ele é um mamífero e ele voa.

b. "O morcego ou é um mamífero ou voa."

Falso, porque não tem como ele ser um ou o outro, pois ele é os dois.

c. "O morcego é um mamífero ou voa."

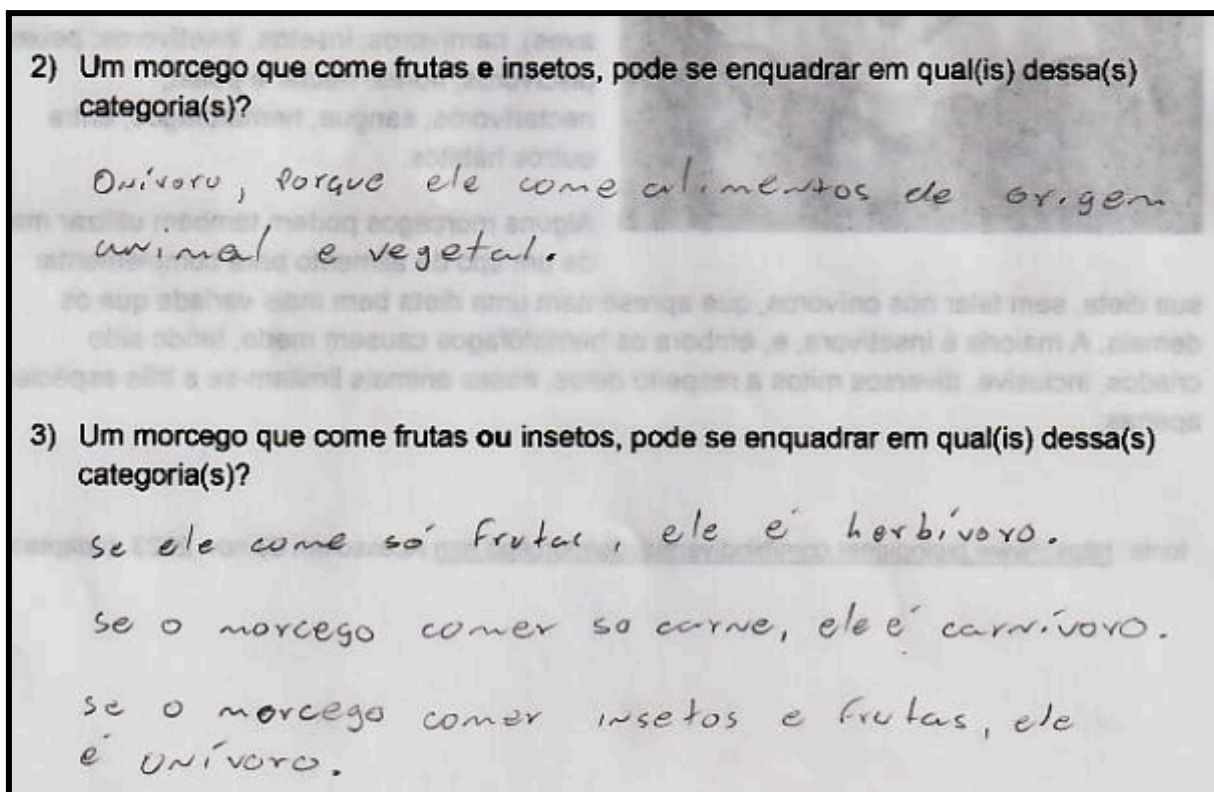
Falso, porque ele tem as duas características.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse momento o grupo apresentou ser capaz de julgar o valor lógico da conjunção e justificar. Mas mesmo que julgasse corretamente o valor lógico da proposição "*O morcego ou é um mamífero ou voa.*" como falsa, não conseguiu reproduzir a diferenciação com a proposição "*O morcego é um mamífero ou voa.*" induzindo a compreender que mesmo entendendo que existia uma diferença essa não se mostrava clara para os alunos.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, no grupo B4 observamos que na parte 1 da atividade 4 os alunos conseguem identificar os diferentes casos da questão 3) apresentada no protocolo a seguir:

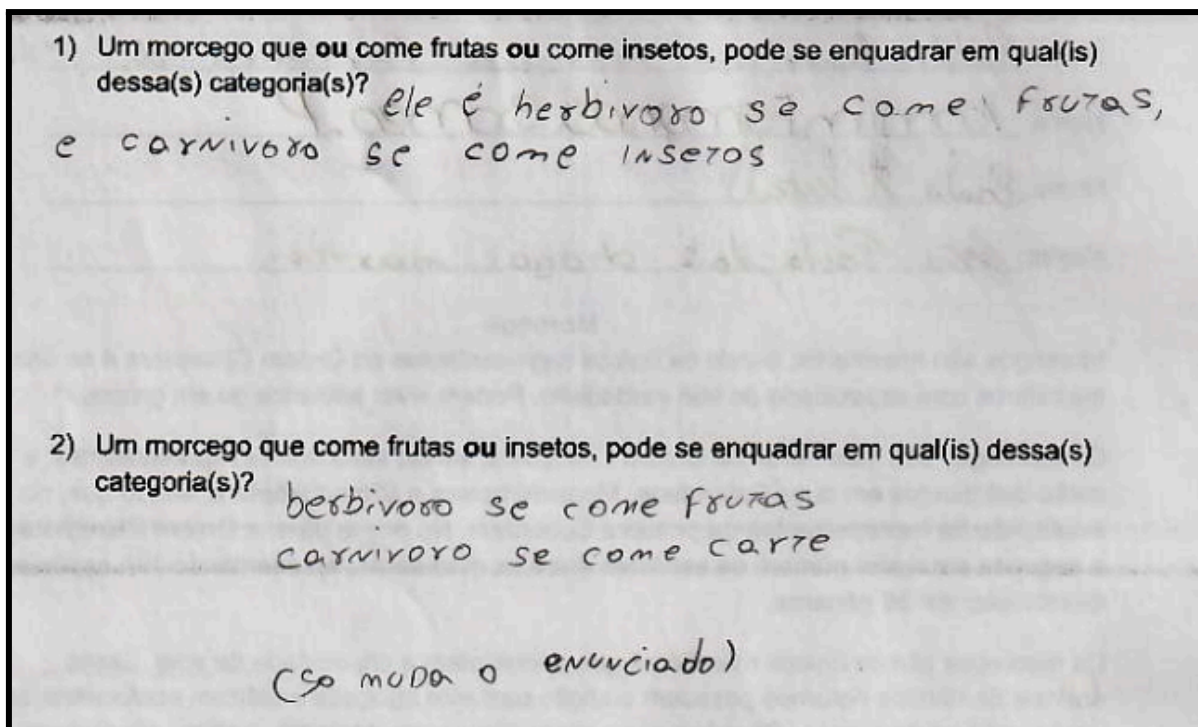
Figura 47 - Protocolo 42



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Os alunos diferenciam em três casos a disjunção, só come frutas, só come carne e come insetos e frutas. Evidenciando assim que o grupo B4 tem alguma noção sobre as diferenças. No entanto, quando o grupo realiza a parte 2 eles desconsideraram o terceiro caso. Não só isso, como entendem “ou” e “ou... ou” como sinônimos. Essa situação é destacada nas respostas a seguir:

Figura 48 - Protocolo 43



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse caso os alunos destacam que suas respostas são as mesmas e “(só muda o enunciado)”, apresentando outra visão da apresentada anteriormente. Uma vez que passam a desconsiderar o caso em que eles são onívoros.

Essas contradições de questões idênticas como a questão 3 da parte 1 e a questão 2 da parte 2 indica uma possível insegurança ou inconsistência na interpretação que é consequência dos duplos sentidos da linguagem natural. Assim, essas divergências de ideias mostram a necessidade de uma organização para construir uma estrutura clara, ausente de duplos sentidos.

Outros grupos tiveram respostas semelhantes às apresentadas nos grupos A4 e B4. A única exceção foi o grupo C4 que na parte 2 conseguem não só diferenciar os casos de disjunção e disjunção exclusiva, como também conseguem analisar o valor lógico das proposições. Observe nos registros do grupo C4:

Figura 49 - Protocolo 44

Considerando as categorias **herbívoros**, **carnívoros** e onívoros responda:

- 1) Um morcego que **ou** come **frutas** **ou** come **insetos**, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Pode ser herbívoros ou carnívoros

- 2) Um morcego que come **frutas** **ou** **insetos**, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Pode ser onívoros, herbívoros ou carnívoros

- 3) Observe as frases a seguir e identifique se estas são falsas ou verdadeiras de acordo com as informações do texto. Justifique suas respostas.

- a. "O morcego é um **mamífero** e **voa**."

Sim, ele pertence ao grupo dos mamíferos e é um animal que voa

- b. "O morcego **ou** é um mamífero **ou** voa."

Não, ele pode ser os dois

- c. "O morcego **é** um **mamífero** **ou** **voa**."

Sim, ele pode ser mamífero e voar

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

É também interessante notar que o grupo C4, na questão 3, respondeu aos itens com "sim" e "não", associando-os ao valor lógico, mas sem de fato atribuir valores de verdade ou falsidade às sentenças.

Após o desenvolvimento da Atividade 4, o PP pesquisador conduziu um debate para discutir os resultados encontrados no trabalho. Essa discussão ocorreu apenas no dia 13/11/23, mais de uma semana depois, devido a diversas paralisações de professores. Além disso, a aula

era no primeiro horário de segunda-feira, começando com quinze minutos de atraso e com muitos alunos ausentes.

As discussões iniciaram relembrando a atividade realizada e abordando os conceitos de onívoro, carnívoro e herbívoro. O professor perguntou aos alunos: “Se um onívoro pode ser carnívoro, já que ele come carne?” Nesse momento, o aluno Enzo, integrante do grupo B4, afirmou que não poderia, pois carnívoro é aquele que “só” come carne, destacando que comer carne não garante que seja carnívoro.

Após essa discussão, três perguntas foram escritas no quadro:

- i. Um morcego que come frutas e insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?
- ii. Um morcego que come frutas ou insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?
- iii. Um morcego que ou come frutas ou come insetos, pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

A partir dessas perguntas, o professor perguntou se existia diferença entre elas e, se sim, quais eram essas diferenças. Os alunos afirmaram que havia uma diferença e rapidamente explicaram a diferença da pergunta i) das outras duas. Após algumas discussões, os alunos alegaram que na iii) tinha que ser só um dos dois. Nesse momento, ficou clara a insegurança em responder sobre a pergunta ii) devido ao duplo sentido. Assim, o PP interferiu nas discussões, comentando que a dúvida dos alunos era esperada, pois novamente havia um duplo sentido. Na linguagem lógica, o “ou” apresenta um significado específico: ou um ou outro ou ambos ao mesmo tempo, sendo a junção dos casos i) e iii).

Depois desse esclarecimento, o PP questionou sobre a questão 3 da segunda parte da atividade. Com as diferenças esclarecidas, os alunos não tiveram dificuldades em identificar os valores lógicos das proposições, com destaque para a proposição “O morcego é um mamífero ou voa,” que agora também englobava o caso em que ambos ocorriam. Por fim, a aula terminou com o professor esclarecendo que, na aula seguinte, escreveria sobre esses conceitos trabalhados em sala.

Observando esses dados, é possível inferir que essa inconsistência inicial dos alunos pode sugerir uma inconsistência no processo de interpretação das proposições. Essa inconsistência pode se dar tanto pelas noções pré-concebidas da linguagem natural quanto por possíveis dificuldades de organizar e confrontar suas ideias.

Dessa forma, a Investigação Matemática se mostra uma forma eficaz de buscar uma elaboração de conjecturas que estruturam a linha de pensamento, tornando-a mais consistente

e com uma linguagem única. É importante também enfatizar a diferença entre a linguagem natural e a linguagem lógica, que necessita de uma forma única para manter sua consistência.

Além disso, o trabalho com a conjunção, disjunção e disjunção exclusiva de forma simultânea permitiu que os alunos confrontassem as diferenças e buscassem um sentido próprio para cada um dos casos, utilizando a comparação para atrelar um sentido a cada uma delas.

5.4.6 Tarefa 5: Construindo a Tabela Verdade

Na aula seguinte, no dia 13/11/23, o PP definiu proposição composta e conectivos. Ele retomou os conceitos apresentados na aula anterior, destacando as nomenclaturas utilizadas, além dos respectivos símbolos relacionados à conjunção, disjunção e disjunção exclusiva. Essas definições foram construídas com os alunos conforme apresentado no capítulo de Lógica.

No entanto, nesse momento inicial, o PP pediu para os alunos deixarem um espaço nas definições, pois seriam completadas posteriormente. Isso ocorreu porque ele ainda não havia tratado do conceito de tabela verdade das respectivas proposições compostas. As noções de tabela verdade seriam trabalhadas na Tarefa Investigativa 5 seguinte, onde os alunos desenvolveriam os resultados, buscando generalizar suas observações.

A Tarefa 5 consistia em duas etapas: a realização da Atividade 5 e, posteriormente, a discussão dos resultados. Os objetivos da Atividade 5 incluíam fixar os conceitos de proposição composta, conectivos, conjunção, disjunção e disjunção exclusiva. Nessa tarefa investigativa, os alunos também trabalharam com noções de valor lógico de proposições simples e compostas a partir de suas definições, buscando conjecturar padrões entre as diferentes proposições compostas.

A Atividade 5 foi realizada em duplas no dia 20/11/23, segunda-feira, no primeiro horário. Devido aos atrasos dos alunos, a atividade iniciou dez minutos mais tarde, mas se estendeu mais dez minutos no segundo horário, totalizando cinquenta minutos de aula. No entanto, alguns alunos chegaram ainda mais atrasados e, por isso, tiveram menos tempo para realizar a atividade.

A primeira questão da atividade pedia para os alunos identificarem as possibilidades de combinação de valores lógicos de duas proposições previamente apresentadas pelo professor e escrevê-las na tabela verdade. O estudo de análise combinatória, realizado naquele mesmo ano, provavelmente facilitou para que os alunos não tivessem dificuldades em

organizar os valores lógicos na tabela. Dentre os protocolos, observamos diferentes organizações, como a apresentada pela dupla A5 na figura 50 a seguir:

Figura 50 - Protocolo 45

Considere as duas proposições abaixo:

a = "Amanhã irá chover."
 b = "Amanhã irá fazer sol"

1) Quais são os possíveis valores lógicos das proposições a e b ? Registre todas as possibilidades na tabela a seguir.

a	b
V	F
F	V
V	V
F	F

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Variações dessa organização é apresentado por outros grupos, mudando a ordem das possibilidades como na dupla B5 apresentada a seguir:

Figura 51 - Protocolo 46

Considere as duas proposições abaixo:

a = "Amanhã irá chover."
 b = "Amanhã irá fazer sol"

1) Quais são os possíveis valores lógicos das proposições a e b ? Registre todas as possibilidades na tabela a seguir.

a	b
V	F
F	F
V	V
F	V

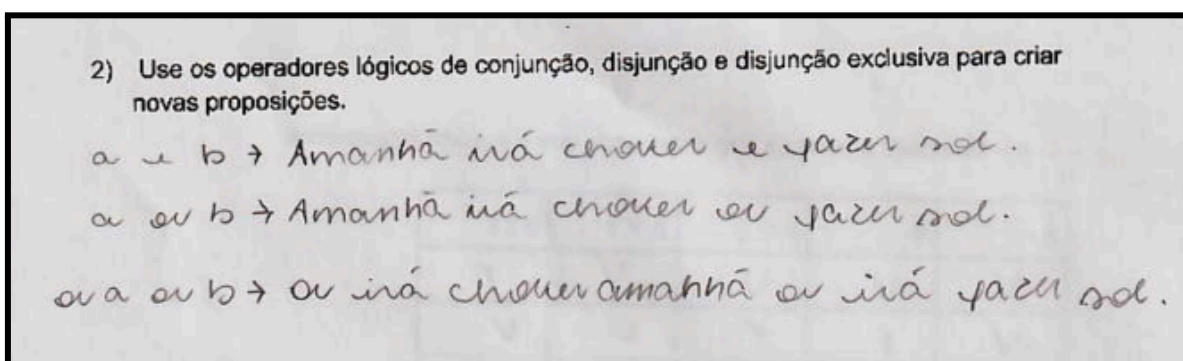
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Tendo a liberdade de organizar a tabela verdade na ordem que desejassem permitiu aos alunos, iniciassem a construção da tabela com algum grau de autonomia, definindo a ordem

que essa seria analisada posteriormente. Também nessa etapa os alunos tiveram a possibilidade de serem agentes da construção do próprio conhecimento.

Partindo para a questão 2 as duplas construíram novas proposições compostas, utilizando dos operadores lógicos definidos na aula anterior. Essa etapa tinha como objetivo testar a capacidade de construir proposições a partir de proposições anteriores. A maioria das duplas apresentou respostas semelhantes a apresentada pelo grupo A5 a seguir:

Figura 52 - Protocolo 47



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Porém, diferentemente da maioria das duplas, a dupla C5 perguntou ao professor se precisava utilizar as preposições a e b . O aluno Natan da dupla C5 alegou que o enunciado não previa essa necessidade, assim o PP disse que os alunos deveriam fazer como eles entenderam. Essa consideração foi prevista na produção do material, pois assim os alunos poderiam adaptar os exemplos a seus contextos. Dessa forma as proposições construídas pela dupla C5 são apresentadas a seguir:

Figura 53 - Protocolo 48

2) Use os operadores lógicos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva para criar novas proposições.

eu jogo Roblox e minecraft

eu jogo Roblox ou minecraft?

ou eu jogo Roblox ou eu jogo minecraft

3) Complete a tabela com os valores lógicos (verdadeiro ou falso) das proposições a seguir:

a	b	a e b	a ou b	ou a ou b
V	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F
V	F	F	V	V

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Destacamos também que a segunda frase construída pelos alunos do grupo C5, não se caracterizaria como uma proposição devido a “?” ao final. Apesar dessa liberdade tomada pela dupla é possível identificar que eles aparentam ser capazes de elaborar uma proposição, mesmo que tenham alguma falha conceitual.

Além disso, na questão seguinte, assim como as duplas A5, B5 entre outras, a dupla C5 é capaz de analisar os valores lógicos corretamente na questão 3. De forma geral os alunos compreenderam o formato da tabela verdade e conseguiram identificar o valor lógico das proposições compostas. O PP observou, no diálogo entre os alunos, que muitas duplas como o B5 e o C5 estavam discutindo sobre os valores lógicos baseados nas proposições construídas no item anterior. Quando existiam dúvidas o PP pedia para os alunos consultarem os conceitos no caderno.

Posteriormente a questão 4, exigia que os alunos com proposições simples diferentes realizassem a mesma análise da questão 3. Propositalmente, a questão 4 estava no verso da folha da questão 3 para, em alguma medida, isolar os dois casos. De forma geral as duplas conseguiram realizar a questão 4 sem muitos problemas. E tiveram resultados semelhantes ao protocolo a seguir da dupla C5:

Figura 54 - Protocolo 49

4) Complete a tabela abaixo considerando as seguintes proposições:
 c = "O menino tem cabelo loiro."
 d = "O menino tem olhos azuis."

c	d	$c e d$	$c ou d$	$ou c ou d$
v	v	v	v	f
f	f	f	f	f
v	f	f	v	v
f	v	f	v	v

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O PP observou que a dupla C5 começou inicialmente a fazer a questão 4 de forma independente, inclusive utilizando uma nova ordem de apresentação dos valores lógicos. Após algumas análises, os alunos começaram a notar a semelhança com a questão anterior e agilizaram a resolução.

Na questão 5, as duplas responderam se tinham identificado semelhanças entre as tabelas. As duplas tiveram respostas semelhantes, como exemplificado pela resposta da dupla C5 a seguir:

Figura 55 - Protocolo 50

5) Descreva as semelhanças ou diferenças das duas tabelas .

As duas tabelas foram preenchidas igualmente

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Por fim, a questão 6 da atividade tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiriam identificar o caráter geral dos valores lógicos das proposições categóricas. Ou seja, identificar que, independentemente das proposições atômicas, os valores lógicos das moleculares dependeriam unicamente do valor lógico das proposições atômicas. Além disso, a questão também buscava permitir que os alunos se apropriassem dos símbolos utilizados na linguagem da Lógica Matemática.

De forma geral, os alunos conseguiram realizar essa questão sem maiores dificuldades. Alguns questionaram a respeito do significado de cada símbolo, e o PP voltou a pedir que eles

consultassem o caderno. Por fim, os resultados ficaram semelhantes aos do grupo C5, representados na figura a seguir:

Figura 56 - Protocolo 51

6) Complete a tabela a seguir sabendo que p e q são proposições:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
V	V	V	V	F
F	F	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Além dos resultados apresentados, até então observamos que outra dupla D5, apresentou um processo diferente. Para analisarmos o caso apresentaremos os protocolos da dupla das questões 2, 3, 4 e 5 nas figuras a seguir:

Figura 57 - Protocolo 52

2) Use os operadores lógicos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva para criar novas proposições.

Amantã irá chover ou irá fazer sol
 Amantã ou irá chover ou fazer sol
 Amantã irá chover e irá fazer sol

3) Complete a tabela com os valores lógicos (verdadeiro ou falso) das proposições a seguir:

a	b	$a \text{ e } b$	$a \text{ ou } b$	$\text{ou } a \text{ ou } b$
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
V	V	V	F	F
F	F	F	F	F

4) Complete a tabela abaixo considerando as seguintes proposições:
 c = "O menino tem cabelo loiro."
 d = "O menino tem olhos azuis."

c	d	$c \text{ e } d$	$c \text{ ou } d$	$\text{ou } c \text{ ou } d$
V	V	V	V	F
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	F	F	F	F

5) Descreva as semelhanças ou diferenças das duas tabelas.

As tabelas seguem um padrão, onde só precisamos identificar o verdadeiro e o falso

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Observamos inicialmente que, na questão 3, os alunos não diferenciam a disjunção da disjunção exclusiva. No entanto, ao construírem pela segunda vez a tabela verdade no item 4, eles aparentam corrigir o resultado encontrado, como destacado na imagem. Esse fator pode indicar que os alunos, naquele momento, identificaram a necessidade de diferenciar as duas colunas. Esse processo pode ser um ponto positivo da atividade, que permitiu que os alunos desenvolvessem o conceito que ainda não estava bem estabelecido até aquele momento.

Destacamos também que, na questão 5, os alunos mencionam que "seguem um padrão, onde só precisamos identificar o verdadeiro e/ou falso." Essa explicação sugere que eles compreenderam o caráter generalista da construção da tabela verdade. Dessa forma, os alunos parecem entender que basta identificar o valor lógico de cada situação.

Ao final da Atividade 5, o PP recolheu as atividades e, no sexto horário do mesmo dia, iniciou a discussão dos resultados. Ele conduziu a discussão analisando e comentando cada questão. Como as soluções dos alunos pareceram convergir, o PP optou por não estimular a extensão da discussão devido ao limite de tempo. No mesmo horário, o professor também definiu o conceito de tabela verdade e completou o espaço reservado para as respectivas tabelas nos conceitos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva.

Analisando de forma geral a Atividade 5, observamos diversos benefícios aos alunos. A atividade permitiu que os alunos organizassem diferentes ordens na construção da tabela verdade, além de variações na construção das proposições compostas. Em especial, a atividade permitiu que os alunos inserissem seu contexto, tendo liberdade de construir suas próprias proposições.

Além desses fatores, a análise de dados sugere que a atividade permitiu que os alunos exercitassem seus conhecimentos recém-adquiridos, fortalecendo pontos que ainda apresentavam dúvidas. Esse fator é evidenciado pela dupla D5, que identificou erros em sua atividade e os corrigiu posteriormente.

Também podemos inferir que os alunos identificaram o caráter geral de uma tabela verdade, observando que o conteúdo de duas proposições não interfere no valor lógico de proposições formadas por elas. Essa capacidade é extremamente valiosa para o entendimento da Lógica Matemática, pois busca, a partir de padrões, generalizar os resultados obtidos.

Portanto, a tarefa investigativa parece ter sido benéfica no desenvolvimento dos saberes da Lógica Matemática, uma vez que permitiu que os alunos construíssem suas tabelas verdade de forma autônoma e identificassem padrões em situações semelhantes, possibilitando um trabalho de generalização baseado na própria experiência.

5.4.7 Tarefa 6: Investigando relações de causa e consequência

Continuando o desenvolvimento relativo a operações lógicas, a próxima etapa foi o trabalho com as condicionais e bicondicionais. Para trabalhar esses conceitos foi desenvolvido uma tarefa investigativa referente a temática. Essa tarefa visa permitir que os alunos identifiquem, diferenciem e construam proposições compostas por uma condicional ou por uma bicondicional. Além disso, a tarefa busca permitir que os alunos sejam capazes de

analisar o valor lógico de diferentes situações envolvendo essas operações. Também permitir que eles sejam capazes de construir a tabela verdade relativa a essas operações.

Para cumprir esses objetivos foi criada a Tarefa 6 que foi posteriormente desenvolvida com os alunos. Essa tarefa conta com a Atividade 6 planejada para ser elaborada em grupos de até 4 alunos e posteriormente a discussão conjunta da atividade. A atividade foi dividida em três partes, sempre que os grupos terminassem uma das partes eles receberiam a seguinte.

Essa tarefa investigativa foi desenvolvida com os alunos no dia 23/11/23, quinta-feira, em dois horários consecutivos. Para isso, as atividades foram realizadas nas aulas de português e artes no segundo e terceiro horário cedidas pelas professoras das respectivas matérias.

Após o professor explicar para os alunos a dinâmica da Tarefa 6, os alunos se juntaram em grupos e iniciaram a primeira parte. Essa parte tinha como objetivo apresentar aos alunos proposições compostas contendo condicional e bicondicional. No primeiro momento os alunos assumiriam como regras as proposições para assim avaliar situações relacionadas a essas regras.

Na primeira questão dessa parte os alunos deveriam analisar as proposições compostas apresentadas e tirar conclusões baseadas na veracidade dessas proposições. Para isso os alunos precisavam compreender inicialmente a relação de causa e consequência que a proposição composta cria, relacionando as proposições simples que as formam. Observe a seguir uma dos registros do grupo A6:

Figura 58 - Protocolo 53

Leiam o texto abaixo:

Buscando uma forma de se vestir melhor, Rodrigo vai obedecer a regras a e b , ditas por ele e escritas a seguir:

a : Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado.

b : Eu usarei meias se somente se eu usar calçado fechado.

Utilizando as informações desse texto, seus outros conhecimentos e outras fontes às quais você tiver acesso, responda as perguntas a seguir, lembrando que a e b são afirmações logicamente verdadeiras

1) Sabendo que Rodrigo usou uma calça comprida, o que podemos concluir a partir dessa informação, assumindo que as regras continuam verdadeiras?

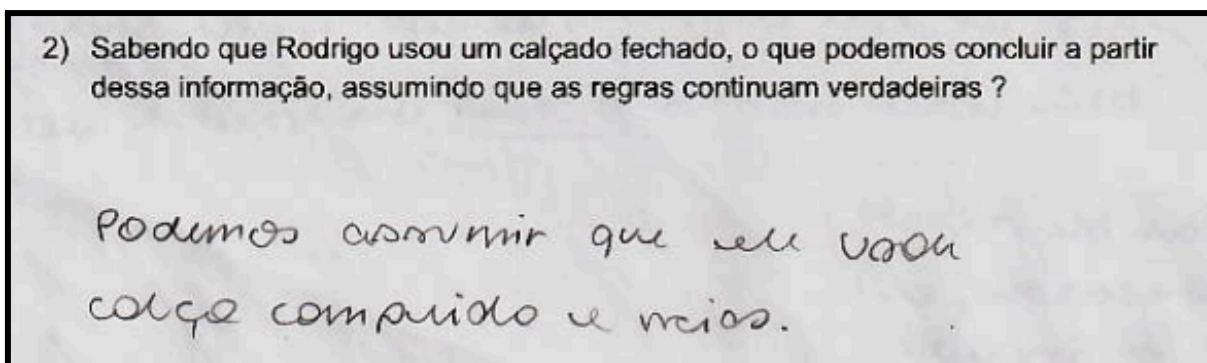
Podemos concluir que se Rodrigo usou uma calça comprida, ele usará sapato fechado. e se ele usará calçado fechado ele terá que usar as meias.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse caso podemos inferir que os alunos do grupo entenderam que se Rodrigo estiver de calça então ele está de calçado fechado. Além disso, os alunos concluíram que ao assumir a consequência da proposição “ a ”, usar calçado fechado, como verdadeira, então devido à regra imposta pela proposição “ b ”, se ele está de calçado fechado então está de meias. É interessante notar que os alunos conseguem criar uma noção de reação em cadeia ao responderem às questões, além de compreenderem que a relação entre meia e calçado fechado é de ida e volta.

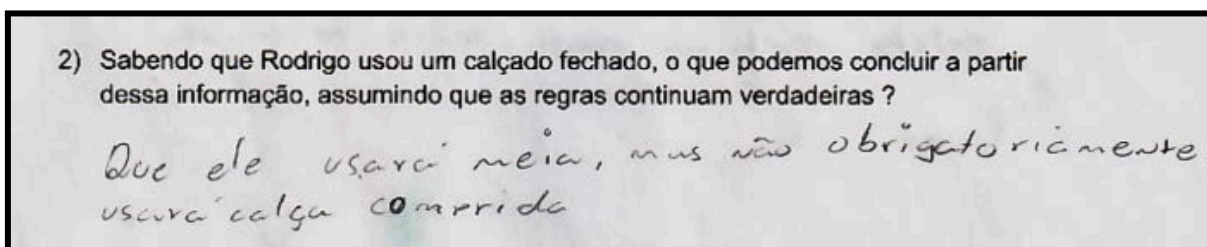
Outros grupos tiveram respostas semelhantes ao grupo A6, além dessas respostas, tiveram grupos que limitaram a relação da proposição “ a ”. Dessa forma, podemos inferir que, de uma forma geral, a compreensão da situação proposta pela atividade foi compreendida pelos alunos.

Posteriormente os alunos foram questionados sobre uma situação um pouco diferente. Dessa vez, foi assumido que Rodrigo estaria usando calçado fechado e assim os alunos investigaram as conclusões que eles poderiam tomar. O grupo B6 nesse momento tirou as conclusões apresentadas a seguir na figura X:

Figura 59 - Protocolo 54

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse momento, o grupo aparenta não diferenciar as relações de condicional e bicondicional, uma vez que concluem que Rodrigo estaria de calça comprida. Diferente desse caso, o grupo C6 iniciou uma discussão entre eles, o aluno Fábio questionou, levando para um lado pessoal. Nesses casos, o PP percebeu que os alunos compreendiam que “para eles” seria possível utilizar calçados fechados com algum outro tipo de roupa. Ao observar isso, o PP se atentou a questionar para os alunos: “Mas e para o Rodrigo, alguma regra seria quebrada?”. Esse questionamento, do PP, fomentou a discussão entre o grupo. Após essa discussão, o grupo C6 chegou às seguintes conclusões apresentadas a seguir:

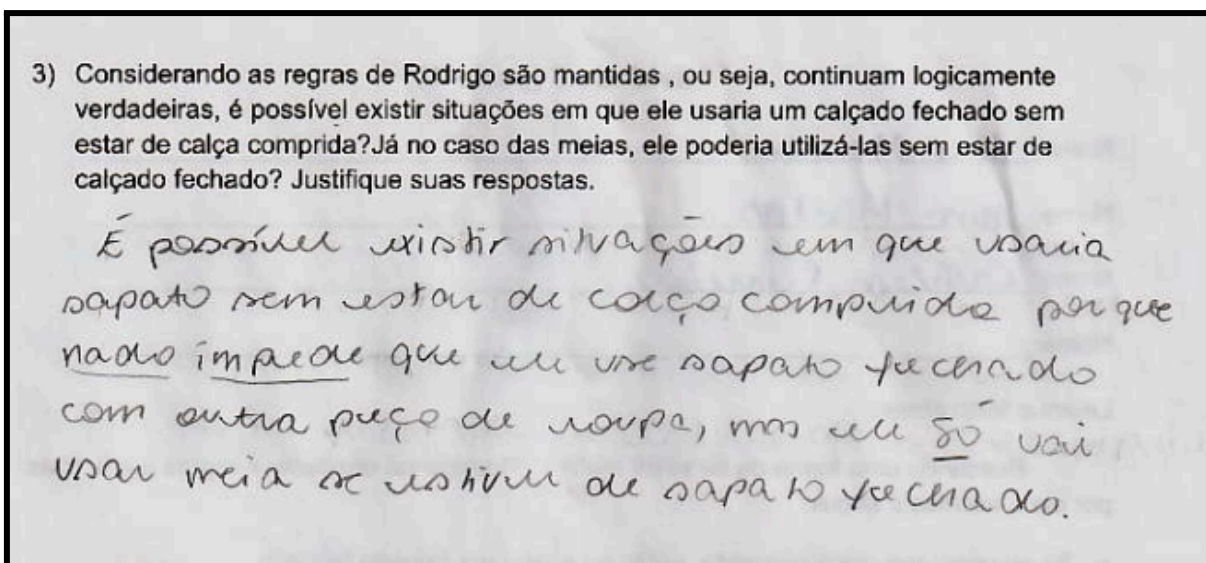
Figura 60 - Protocolo 55

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A partir dos dados coletados, percebemos que, ao trazer para a realidade deles, os alunos analisam de forma mais crítica, questionando a “lógica” apresentada não como um fator incontestável, mas como algo que “faz sentido”. Esse fato é favorecido pela tarefa por se tratar de uma investigação de semi-realidade que leva os alunos a se inserirem na situação imaginada, se distanciando de uma realidade puramente teórica da Matemática.

Na questão 3 desta parte da atividade, os alunos são levados a se questionar sobre outras situações em que Rodrigo não quebraria as regras. Ao questionar isso, os alunos são levados a refletir sobre a relação de causa e consequência das proposições “a” e “b”. O grupo B6 mesmo tendo assumido o uso de calça comprida na questão 2, explorou a situação de forma diferente. Observe as conclusões do grupo a seguir:

Figura 61 - Protocolo 56

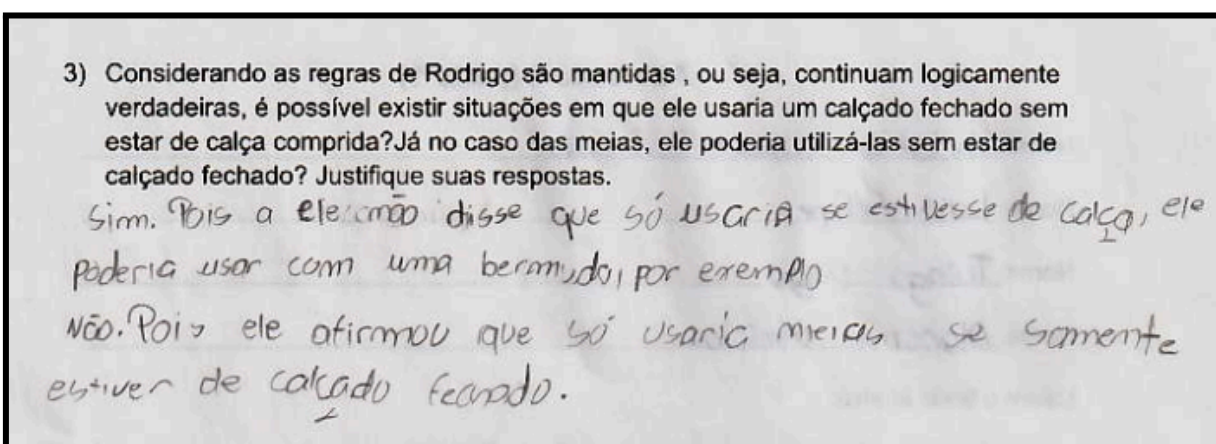


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Esse registro infere que o grupo B6, a partir da investigação da situação apresentada, identificou que não existem restrições impostas pela regra “a” sobre o uso de calçado fechado, mas já o uso de meia é obrigatório. Esse fator contribui então para a diferenciação na estrutura das duas proposições e seus conectivos.

A maioria dos outros grupos nesse momento tem conclusões semelhantes às do grupo B6. Também o PP observou que o grupo D6, ao buscar uma resposta para a questão 3, discutiu sobre quais seriam essas situações que, mesmo não usando calça, poderia usar o calçado fechado. Essa situação é destacada no registro desse grupo, apresentado a seguir:

Figura 62 - Protocolo 57

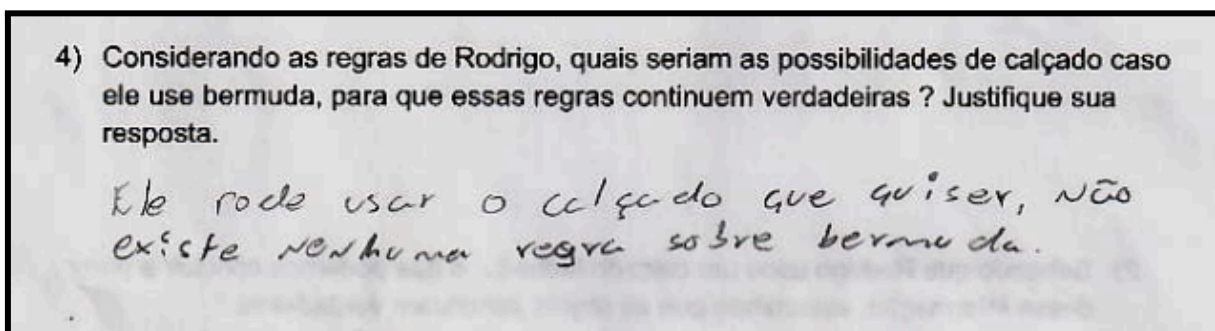


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

No registro, eles apresentam que, em nenhum momento, Rodrigo disse que “só usaria se estivesse de calça” e destaca que ele poderia usar bermuda. Esse fator destaca novamente a importância do caráter aberto da tarefa investigativa, que permite aos alunos extrapolar a

situação, buscando exemplos e compreendendo o sentido lógico aplicado em sua vivência. Essa discussão era prevista, na tarefa, em alguma escala, inclusive coincidentemente na questão 4, os alunos são questionados sobre as regras se utilizarem bermudas. Destacamos que grande parte dos grupos já havia reconhecido, em algum momento da atividade, que a regra “a” se aplicava apenas ao uso de calça. Dessa forma, a maioria dos grupos reconheceu o uso de vários tipos de calçados, como destacado pelo grupo C3 em seu registro a seguir:

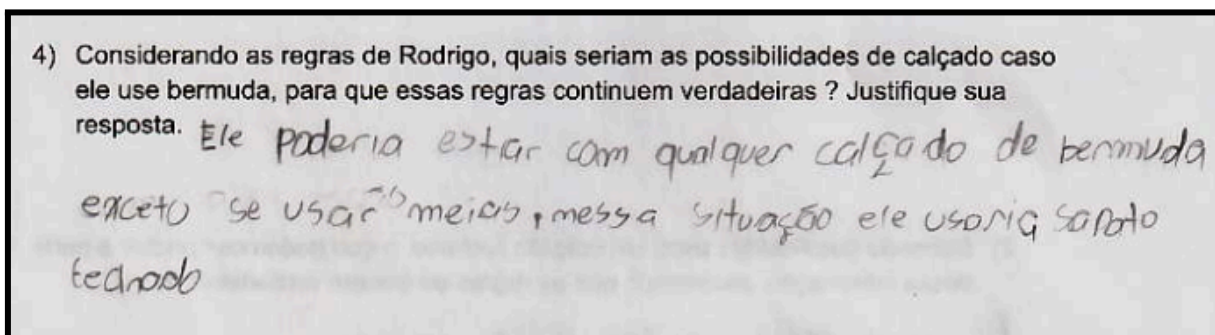
Figura 63 - Protocolo 58



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O grupo D6 ainda destaca em seu registro a relação com o uso de meias, conforme apresentado no registro a seguir:

Figura 64 - Protocolo 59



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse momento, os alunos são capazes de fazer relações entre as duas situações, enfatizando o caráter interpretativo da atividade investigativa. Esse fator permitiu que o grupo D6 definisse uma situação de exceção para o caso da bermuda baseada no uso ou não das meias.

Ao finalizarem a parte um da atividade, os grupos receberam a parte dois e foram discutindo e desenvolvendo ela. O objetivo dessa parte era inverter a situação apresentando diversas situações e, a partir dessas situações, avaliaram se as proposições “a” e “b”. Dessa forma, cabia aos alunos investigarem em cada situação o valor lógico das proposições

definidas. Após investigar esses casos, caberia aos alunos tentar construir a tabela verdade baseando nas proposições simples.

Antes de iniciar a análise dos dados da segunda parte, destaco que, durante a realização da segunda parte da atividade, 6 dois alunos relataram estar “Cansados de pensar.”. Observando a situação e analisando o contexto, observei que os alunos não estavam acostumados a terem duas aulas de Matemática seguidas e também não tinham costume de realizar atividades investigativas. Tendo essas considerações, o PP observou que esses dois alunos não foram exemplos isolados. Foi notado que ao longo da atividade houve uma perda de interesse dos alunos e uma “pressa” para finalizá-la.

Destacamos nesta análise três grupos: C6, D6 e B6 e apresentaremos e discutiremos os dados nessa ordem. Nessa parte, o grupo C6 analisou os dados e encontrou resultados esperados por nós. Observe a seguir o protocolo do grupo C6:

Figura 65 - Protocolo 60

Leia o texto abaixo:

Agora considere que as afirmações a e b podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso.

a : Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado.

b : Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.

Utilizando as informações do texto, seus outros conhecimentos e outras fontes às quais você tiver acesso, responda as perguntas a seguir:

- 1) Considere apenas as afirmações a seguir como verdadeiras e busque avaliar se as afirmações, a e b de Rodrigo seriam verdadeiras ou mentiras em cada um dos casos. Justifique suas respostas.

a) Rodrigo saiu de calça e chinelo.

"a" seria falsa, pois se ele usasse calça, obrigatoriamente ele usaria calçado fechado.

b) Rodrigo saiu de bermuda e tênis.

"a" e "b" são verdadeiras, porque não é obrigatório ele estar de calça se estiver de calçado fechado.

c) Rodrigo saiu de bermuda e chinelo.

"a" e "b" são verdadeiras, porque não existem regras sobre bermudas e chinelo.

d) Rodrigo saiu de chinelo e sem meia.

"a" e "b" são verdadeiras, porque ele só precisa usar meia se estiver de calçado fechado.

e) Rodrigo saiu de chinelo e meia.

"b" é falsa, afinal ele só usaria meia se usasse calçado fechado.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em todos os itens, o grupo C6 parece compreender as interações necessárias com as respectivas proposições. O grupo também assume como verdade sempre que não é citada uma das partes da proposição. Isso é apresentado no item b) em que como ele está de chinelo, o

grupo assume “*b*”, pois não se refere ao uso ou não de meias. Dessa forma, os alunos parecem entender as relações dentro das condicionais e bicondicionais.

Ao chegar na questão 2 da segunda parte, o grupo C6 chamou o PP alegando que estavam com dúvida na questão. Nesse momento, o PP sugeriu aos alunos que consultassem a questão 1, pois cada item da questão 1 se relaciona com a questão 2. Nesse processo, os integrantes foram observando caso a caso das tabelas e chegaram ao resultado a seguir:

Figura 66 - Protocolo 61

2) Complete as tabelas verdades a seguir a partir das investigações feitas anteriormente:

Usar uma calça comprida	Usar um calçado fechado	Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado
V	V	v
V	F	f
F	V	f
F	F	f

Usar meias	Usar um calçado fechado	Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.
V	V	v
V	F	f
F	V	f
F	F	f

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nesse momento, o grupo C6 não parece conseguir transpor os dados analisados para as tabelas verdades. Essa dificuldade pode se dar por diversos fatores, entre eles destacamos a possibilidade de eles estarem cansados, de eles não conseguirem transpor a relação entre a primeira e a segunda questão e de eles ainda contarem com uma resistência à lógica formal.

O grupo D6 apresentou resultados semelhantes ao grupo apresentado anteriormente, compreendendo bem as relações entre as proposições. No entanto, esse grupo parece transpor melhor as informações adquiridas na questão 1 para a tabela verdade. Possuindo um resultado mais próximo do esperado:

Figura 67 - Protocolo 62

2) Complete as tabelas verdades a seguir a partir das investigações feitas anteriormente:

Usar uma calça comprida	Usar um calçado fechado	Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Usar meias	Usar um calçado fechado	Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A única relação que eles parecem não construir nesse momento é a última de uma bicondicional, onde ambas as proposições atômicas são falsas, resultando em um resultado verdadeiro.

Por último, o grupo B6 ao realizar a questão 1 da segunda parte, manteve o mesmo raciocínio da primeira parte da atividade, apenas conferindo se as proposições apresentadas em cada um dos itens eram verdadeiras ou não. Isso é observado no item a) da questão 1 apresentado no protocolo a seguir:

Figura 68 - Protocolo 63

1) Considere apenas as afirmações a seguir como verdadeiras e busque avaliar se as afirmações, *a* e *b* de Rodrigo seriam verdades ou mentiras em cada um dos casos. Justifique suas respostas.

a) Rodrigo saiu de calça e chinelo.

Falso. Se eu usar calça vai usar sapato fechado

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

No entanto, apesar da interpretação do grupo B6 esse grupo conseguiu completar ambas as tabelas verdade da questão 2 de forma correta. Observamos assim a imagem a seguir do protocolo do grupo:

Figura 69 - Protocolo 64

Usar meias	Usar um calçado fechado	Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Após realizarem a parte dois, os alunos foram para a terceira e última parte da atividade 6. Essa parte tinha como objetivo verificar se os alunos seriam capazes de construir proposições formando uma disjunção ou conjunção e expressar as diferenças. Também foi verificada a capacidade de transpor os valores da tabela verdade a partir dos conhecimentos adquiridos.

Nesse caso, os grupos conseguiram construir as proposições utilizando as frases sem maiores problemas, mas apenas o grupo B6 escreveu a diferenciação entre as duas. Além disso, o grupo B6 foi capaz de reproduzir a tabela verdade novamente de forma correta. Essa diferenciação é expressa a seguir no protocolo do grupo:

Figura 70 - Protocolo 65

1) Construa duas proposições compostas utilizando as proposições p e q com os conectivos "se...então" e "se somente se". Explique as possíveis diferenças dessas duas proposições compostas.

I) Se chover amanhã,
 então sairei de guarda-cuva.

II) Sairei de guarda-cuva
 amanhã se somente se
 chover amanhã.

I) Nada impede que ele saia
 com guarda-cuva se não chover.

II) Ele só vai sair com guarda-
 cuva se chover amanhã, se não
 chover ele definitivamente não
 vai sair com guarda-cuva.

2) Complete a tabela verdade abaixo:

p	q	se p então q	p se somente se q
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Os outros grupos, no entanto, tiveram dificuldade em reproduzir a tabela verdade. O grupo C3 construiu a tabela verdade cometendo os mesmos erros anteriores. Já o grupo D6 apresentou valores completamente diferentes dos apresentados anteriormente. O professor notou que, nesse momento, os alunos desse grupo realmente se mostraram cansados e, provavelmente, por isso, encontraram resultados "aleatórios".

Após o fim da Atividade 6, o PP recolheu as atividades e analisou seus protocolos. Dando continuidade à tarefa 6, no dia 24/11/23, novamente no horário das aulas de português, o PP realizou a discussão dos resultados.

Para realizar as discussões da Tarefa 6, o PP se atentou a relacionar as questões e como elas conversavam entre si, notando que as relações de causa e consequência estavam mais claras para os alunos durante a discussão da parte 1.

Já analisando a parte 2, o PP optou por primeiro retomar a questão 2, escrevendo as futuras tabelas verdade no quadro. A partir dessas tabelas, os alunos foram apresentando suas

ideias para cada um dos itens da questão 1, e para cada item, o PP perguntava como ele ajudava a resolver a tabela verdade. Nesse processo, os alunos tiveram a oportunidade de avaliar o valor lógico de cada item da tabela verdade e, assim, completá-la juntamente com os colegas e o PP.

Por fim, para analisar a parte 3 da atividade, o professor iniciou pedindo sugestões de construção das proposições e depois perguntou sobre as diferenças entre elas. Os alunos pareceram concordar entre si nas sugestões e diferenças. Já para analisar a tabela verdade final, o professor pediu que eles a completassem, e eles não tiveram dificuldades, uma vez que a tabela construída por eles na parte anterior estava no quadro.

Uma vez finalizada a análise da tarefa 6, podemos observar que, apesar do cansaço e do menor engajamento dos alunos na atividade 6, o processo de debate foi produtivo para a construção do conhecimento de forma ativa. Os alunos se sentiram abertos para discordar, esclarecer dúvidas e questionar resultados. Acreditamos que esse engajamento foi possível porque, em alguma escala, os alunos participaram do processo de construção de suas conjecturas e as testaram de algum modo, dando-lhes segurança para concordar ou discordar quando julgassem necessário.

Após as discussões dos resultados, o professor formalizou os conceitos de Condicional e Bicondicional, além de apresentar os símbolos correspondentes aos alunos. Essa definição visava unificar os conceitos trabalhados e abordados anteriormente. As definições foram baseadas na teoria apresentada no capítulo de lógica, enquanto os exemplos e a tabela verdade foram criados juntamente com os alunos, garantindo a inserção deles no processo de definição.

5.4.8 Discussão e Definição de Equivalência Lógica e Contrapositiva

Após o desenvolvimento das tarefas de proposição composta, seria inicialmente desenvolvida a tarefa investigativa, que contaria com a tarefa 7 e a subsequente discussão. Devido ao tempo limitado, essa tarefa foi substituída por uma aula em que o PP introduziria o conceito de equivalência lógica e contrapositiva.

Essa aula ocorreu no dia 27/11, no primeiro horário de segunda-feira. Inicialmente, o PP discutiu com os alunos o que caracterizaria duas proposições como “Equivalentes”, noções como “Iguais” e “Que falam o mesmo” foram sugeridas pelos alunos. Complementando essas ideias, o PP definiu o conceito no quadro e trabalhou com o exemplo de “dupla negação de uma proposição” ser equivalente à própria proposição. Posteriormente, o professor falou sobre a Contrapositiva, apresentou exemplos e montou a tabela verdade que demonstra a

equivalência lógica. Essa tabela verdade foi então completada com os alunos, conferindo a equivalência. O resto da aula foi voltado a discutir a construção de uma Contrapositiva e compreender a equivalência. De forma geral, os alunos participaram e aparentaram compreender o processo, apesar de ao final questionarem o sentido das sentenças serem equivalentes.

No sexto horário desse mesmo dia, 27/11/23, o PP aplicou uma pequena lista de exercícios para os alunos retomarem algumas das habilidades desenvolvidas durante a sequência didática. Os alunos tiveram oportunidade de trabalhar em grupos ou individualmente na realização das atividades e tirar dúvidas com o PP.

Com isso, foi finalizada a sequência didática desenvolvida com os alunos e encerradas as tarefas. Dessa forma, concluímos também a análise dos dados e avançamos para o desenvolvimento do produto educacional construído a partir da pesquisa aqui apresentada.

6 PRODUTO EDUCACIONAL

O processo de construção do produto educacional⁶ teve como objetivo criar um guia do professor que proporcionasse acesso a um material de Lógica Matemática alinhado com a Educação Matemática, especialmente com a Investigação Matemática. Para alcançar essa proposta, o produto foi desenvolvido após a análise dos dados, com uma formatação que facilite a consulta e orientação dos professores. O manual é organizado em sete capítulos:

1. Apresentação
2. Lógica Matemática
3. Investigação Matemática
4. Tarefas Propostas
5. Sugestões de Resolução Comentadas
6. Referências
7. Leituras Sugeridas

O capítulo “Apresentação” traz uma introdução ao material, explicando o contexto em que o produto foi construído e sua estrutura. O capítulo seguinte, “Lógica Matemática”, é uma adaptação do capítulo da dissertação, focando em como abordar a Lógica Matemática no ensino. Consideramos este capítulo essencial, pois há escassez de materiais sobre esse tema voltados ao contexto escolar.

O terceiro capítulo, “Investigação Matemática”, também deriva de um capítulo da dissertação. No entanto, no produto, nos concentramos em apresentar diferentes tipos de tarefas e em explicitar o que caracteriza uma tarefa investigativa. Dessa forma, o capítulo é direto em seu objetivo de introduzir professores inexperientes ao contexto da Investigação Matemática.

O quarto e mais extenso capítulo foi desenvolvido a partir da sequência didática apresentada. Nele, as tarefas são descritas de modo que possam ser trabalhadas de forma independente. Algumas atividades foram revisadas para melhorar sua estrutura, com foco maior no processo de investigação dos alunos. Também foram feitas mudanças de estrutura e linguagem, a fim de deixar as perguntas mais claras, baseando-se nas observações das atividades realizadas pelos alunos.

Nesse capítulo, há uma preocupação especial em indicar possíveis pontos de atenção para o professor ao conduzir as atividades com os alunos, apresentados em forma de “Notas ao Professor”. Essas notas incluem sugestões de questionamentos, tópicos importantes a

⁶ Esse produto se encontra no final desta dissertação no Apêndice A

serem enfatizados ou observações sobre respostas inesperadas, visando contribuir com o trabalho do professor. Contudo, é fundamental compreender que, apesar das orientações, tarefas investigativas são naturalmente imprevisíveis, e é importante estar preparado para lidar com o inesperado.

Além das tarefas propostas, optamos por incluir sugestões de resolução das atividades, que aparecem como anexos no quinto capítulo. Em seguida, no sexto capítulo, são apresentadas as referências do material didático utilizado.

Para enriquecer ainda mais a leitura do produto educacional, incluímos o sétimo capítulo, que oferece sugestões de leitura para os que desejem se aprofundar no assunto ou que busquem materiais didáticos adicionais. Nesse capítulo, comentamos e recomendamos seis referências que podem complementar os diversos tópicos abordados no produto educacional.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o processo de pesquisa, buscamos uma forma explorar dentro do processo de ensino-aprendizagem alguns tópicos da Lógica Matemática. Dentro dessa busca, identificamos que a Investigação Matemática era uma estratégia de ensino-aprendizagem adequada ao desenvolvimento dos conteúdos no contexto da pesquisa. Nessa perspectiva foi elaborada e aplicada uma sequência didática, na 2ª série do Ensino Médio, visando responder à pergunta:

“Como uma sequência didática, apoiada na Investigação Matemática, pode contribuir para o ensino-aprendizagem de tópicos da Lógica Matemática na segunda série do Ensino Médio?”

Baseado nos materiais de Lógica Matemática, apresentados principalmente por Da Cunha e Machado (2015) e Alencar Filho (2017), buscamos identificar os tópicos da Lógica Matemática que seriam essenciais em sua introdução. Dessa forma, a Investigação Matemática foi escolhida como uma estratégia que poderia beneficiar o processo de construção dessas noções de Lógica. Assim, foi sendo estruturada a sequência didática tratando sobre os diferentes tópicos da Lógica Aristotélica e Proposicional.

Durante o processo de elaboração das atividades para compor a sequência didática, identificamos que o Investigar em Matemática naturalmente usa da Lógica para efetuar seu processo de justificação, então buscamos explorar isso dentro do processo investigativo dos alunos. Assim, a sequência didática foi elaborada para desenvolver o ensino-aprendizagem de tópicos de lógica matemática por meio da Investigação Matemática, dando foco nos padrões lógicos identificados em cada etapa.

Outro aspecto importante dentro da sequência didática era que os alunos pudessem identificar a importância da linguagem matemática comumente utilizada dentro dos tópicos de Lógica Matemática. Sejam ao apresentar as definições, os termos específicos ou os símbolos, mesmo que esses itens fossem apresentados pelo professor, a investigação realizada anteriormente favorecia o processo de agregar sentido à formalização feita, compreendendo e discutindo a importância de uma linguagem comum.

Após o desenvolvimento da sequência didática, realizamos uma análise qualitativa dos dados coletados. Essa metodologia de pesquisa permitiu que pudéssemos identificar e analisar pontualmente, a partir das atividades dos alunos e das percepções do PP, diferentes benefícios que as tarefas investigativas tiveram na construção do conhecimento lógico matemático dos alunos. Ao utilizar essa estratégia, podemos observar, a partir do contexto estabelecido,

sutilezas encontradas em conversas e anotações de difícil acesso ao analisar dados em larga escala.

Ao iniciar a análise dos dados coletados, um dos benefícios das tarefas investigativas pode ser destacado ao observar o desenvolvimento da Tarefa 1. Nessa tarefa, e nas consecutivas, devido ao caráter investigativo das tarefas investigativas, descrito por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), os alunos tiveram a possibilidade de identificar a importância de uma linguagem lógica comum para assim evitar possíveis duplas interpretações.

Essa importância foi fortalecida no processo de discussão de resultados, como descrito por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), uma vez que os alunos eram confrontados com diferentes interpretações de uma mesma frase ou proposição, assim compreendendo a importância e buscando uma unificação de conceitos.

No desenvolvimento da sequência didática e análise dos dados, foi possível identificar que o trabalho com a Investigação Matemática permitiu que os alunos sentissem, em diversos momentos, a vontade para questionar e buscar os saberes Matemáticos. Um dos fatores que favoreceu essa participação foram os cenários de “Referência à Realidade” e de “Referência à Semi-realidade”, descritos por Skovsmose(2000), apresentados nas tarefas, como, por exemplo, na Tarefa 3 em que os alunos se depararam com Proposições que se relacionavam com diferentes áreas do conhecimento. Assim os alunos investigaram o valor lógico de situações fora do contexto usual da Matemática, mas buscando estratégias semelhantes às utilizadas no processo de demonstração matemática para justificar suas respostas.

Dessa forma notamos que muitas vezes alunos que possuem uma certa resistência aos conteúdos de Matemática se mostraram mais pró-ativos e realizando contribuições importantes na construção do próprio conhecimento e dos colegas. Esse processo gerou confiança dos alunos ao construírem seus conhecimentos sobre a Lógica Matemática.

Outro benefício identificado dentro das tarefas investigativas foi referente ao caráter aberto dessas tarefas, citado por Ponte (2003). Ao trabalhar com argumentação lógica, os alunos em diversos momentos, desenvolveram conjecturas que exploraram aspectos da Lógica Matemática que não foram previstos pelo professor. Um exemplo da importância desses fatores foi à Tarefa 3 em que uma aluna sugeriu uma estratégia que se assemelhava ao contraexemplo, para justificar o valor lógico de uma das proposições. Observe no protocolo a seguir:

Isso permitiu um engrandecimento das aulas ao expandir o sentido daquelas atividades para diferentes áreas da Matemática, uma vez que naturalmente os alunos despertaram interesse em como aquela estratégia apresentada poderia ser utilizada na prática.

Também foi identificado que a construção das atividades investigativas em ambientes de “Referência à semi-realidade” ou de “Referência à realidade” permitiram que os alunos engajassem nas tarefas propostas. Esse fator beneficiou o ensino de Lógica Matemática em duas frentes. A primeira frente é relativa à inserção dos tópicos da lógica em contextos diversos permitindo que os alunos identificassem a situação proposta como algo que eles poderiam utilizar a mesma lógica do cotidiano. A segunda frente se destacou quando os alunos extrapolaram o contexto, costumeiramente fechado da Matemática, para inserir questões não levantadas nas atividades, se dando o direito de não buscar o conhecimento ali apresentado em um recorte, mas também em outras situações semelhantes. Sendo assim as tarefas investigativas aparentam permitir que os alunos agreguem significados a suas investigações, associando e expandindo os tópicos selecionados e assim explorando mais a Lógica Matemática.

O caráter exploratório das tarefas investigativas também deixou os alunos mais à vontade para expressar suas opiniões e criar uma desenvoltura argumentativa no processo de elaboração e justificação de conjecturas como descrito por Ponte (2003). Uma vez que os alunos tiveram a possibilidade de desenvolver os conhecimentos discutidos por conta própria, permitiu um engajamento maior nas atividades e um envolvimento ativo no processo de formalização de conceitos, indagando as definições, sugerindo exemplos e expondo dúvidas que surgiam.

A desenvoltura argumentativa desenvolvida nas tarefas investigativas também contribuiu para os saberes da Lógica Matemática, uma vez que os argumentos dos alunos estavam frequentemente ligados a lógica e tópicos trabalhados. Assim, é perceptível que a investigação permitiu um trabalho com a lógica de forma espontânea dentro da construção e testes das conjecturas.

Outro fator a ser evidenciado é o fato de as tarefas investigativas expor aos alunos a importância da construção de uma linguagem matemática única, uma vez que eles se depararam diversas vezes com a necessidade de explicar suas ideias para os colegas dentro do processo de justificação. Assim os alunos se depararam com a importância da compreensão unificada das proposições e suas interpretações.

Portanto, é possível entender que a Investigação Matemática permitiu dentro da sequência didática um processo de construção de conhecimento em que os alunos se colocaram no lugar de protagonistas, se sentindo mais seguros de questionar, conjecturar e ser questionado. Esses benefícios atingiram diretamente o ensino de lógica, pois trouxeram significado para esse tópico que muitas vezes é implícito nos estudos de Matemática. Por fim

acreditamos que a investigação contribuiu para o ensino-aprendizagem dos tópicos da Lógica Matemática selecionados nessa dissertação.

Mesmo com todos os benefícios da Investigação Matemática no processo de ensino-aprendizagem de Lógica Matemática citados acima, ao analisarmos os dados, percebemos que a utilização da Investigação Matemática, dentre outras metodologias, ainda pode avançar muito, trazendo mais alternativas para o ensino de Lógica Matemática. Portanto, num contexto maior, espero que esta dissertação contribua para o incentivo e o desenvolvimento do ensino de Lógica Matemática, repensando como esse tópico costuma ser abordado no Ensino Médio.

Acreditando nas potencialidades dessa estratégia de ensino para o desenvolvimento da Lógica Matemática, por isso buscamos aperfeiçoar as tarefas desenvolvidas para a construção do produto educacional que os professores possam utilizar. Essas mudanças foram feitas com base na análise dos dados coletados e no parecer dos alunos que participaram das tarefas. Com essas informações, procuramos refinar o plano de aula e suas tarefas, trazendo uma linguagem mais clara, tarefas mais fluídas e que explorem ainda mais as potencialidades dos problemas apresentados. Dessa forma chegamos a um produto testado e reorganizado para auxiliar professores no ensino desse tópico da matemática devido à dificuldade de encontrar materiais sobre esse assunto voltado para o Ensino Médio. O processo de refinamento dessa atividade, no entanto, é constante, e acreditamos que, na próxima análise das tarefas, surgirão novas mudanças que poderão merecer destaque em trabalhos futuros.

Além dessas melhorias, desejamos investigar mais a fundo como a Lógica Matemática é apresentada nos livros didáticos, pois consideramos importante destacar o valor dessa área do conhecimento dentro dos saberes da Matemática. Acreditamos também que este trabalho pode contribuir para a compreensão e valorização da Lógica Matemática no contexto escolar, servindo como referência e exemplo para pesquisas e práticas futuras.

Por fim, esperamos que este trabalho possa beneficiar o avanço do processo de ensino-aprendizagem de Lógica Matemática no Ensino Médio, colocando em evidência as potencialidades desse tópico na formação básica e destacando como a Investigação Matemática pode se associar à Lógica Matemática dentro do processo de construção do conhecimento em Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: NBL Editora, 2017.
- ALMEIDA, L. B. L. **Introdução à lógica matemática com aplicações na educação básica**. Março de 2021. 195 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió – AL, 2021.
- ALMENDRA, L. E. S. **A lógica matemática e os diagramas de Venn subsidiando uma abordagem para a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos no ensino médio**. 2020. 91 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Teresina, 2020.
- Associação Brasileira De Normas Técnicas**. NBR 6028: informação e documentação – Resumo – Apresentação. Rio de Janeiro, 2003.
- BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BUENO, S. **Minidicionário da língua portuguesa**. Edição rev. e atual. São Paulo: Editora FTD S.A., 2000.
- CUNHA, M. O.; MACHADO, N. J. **Lógica e linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
- CRUZ, K. A. da. **Investigação matemática em problemas de aritmética**. 2018. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá (UEM), 2018.
- FELIX, M. B. **Investigação matemática no ensino fundamental: relato de atividades com estudantes do sexto e oitavo anos**. 2020. 79 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), 2020.
- FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.
- GAMBAROTTO, É. **Lógica matemática: uma proposta de atividades para educação básica**. 2018. 134 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, 2018.
- GERMANY, F. A. **Introdução à lógica matemática**. 2021. 70 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FACET), Dourados-MS, 2021.
- JACQUES, E. P. **Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas e modelagem matemática**. 2022. 60 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), 2022.
- KERFERD, G. B. **O movimento sofista**. São Paulo: Edições Loyola, 2004.
- LAURENÇO, A. de C. **Investigação matemática por meio de fractais**. 2017. 82 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, 2017.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.

MEIER, C. **Filosofia: por uma inteligência da complexidade: ensino médio**, volume único. 1. ed. São Paulo: IBEP, 2017.

MORAES, J. G. **Considerações sobre a melhoria do processo ensino-aprendizagem em matemática baseadas na orientação ao processo e na investigação matemática**. 2016. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), 2016.

MORCEGOS. **Biologia Net**. Disponível em:
<https://www.biologianet.com/biodiversidade/morcego.htm> Acesso em: 03 nov. 2023

NASCIMENTO, J. A. do. **Explorando a lógica matemática no ensino básico**. 2016. 183 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Centro de Ciências Exatas e da Terra, Natal – RN, 2016.

NOGUEIRA, K. W. **O uso de vídeos no ambiente escolar: explorando linguagem e lógica matemática**. Dezembro de 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense (UFF), Instituto de Matemática e Estatística, Niterói – RJ, 2019.

OLIVEIRA, B. R. et al. **Implementação da educação remota em tempos de pandemia: análise da experiência do Estado de Minas Gerais**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, p. 84-106, 2021.

ORSANO, D. R. **Uma abordagem do ensino de lógica matemática no Ensino Médio**. 2018. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão (UFMA), São Luís – MA, 2018.

PALACIDINA, H. B. dos S. **O princípio das gavetas de Dirichlet: uma proposta de tarefas de investigação matemática**. 2017. 45 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina (UEL), 2017.

PEACH, G. **Visualização gráfica dos fundamentos da lógica matemática por meio de diagramas de conjuntos**. 2017. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Departamento de Matemática (DM), São Carlos – SP, 2017.

PEREIRA, D. G. **A investigação matemática em sala de aula: perímetros, áreas e volumes, seguindo os preceitos do princípio de Cavalieri**. 2017. 44 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), 2017.

PEREIRA, G. N. **Proposta de oficinas didáticas para o ensino de análise combinatória utilizando traços da investigação matemática como método de ensino**. 2017. 48 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), 2017.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: _____. Actas do ProfMat. Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003. p. 25-39.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

RAMOS, R. M. S. F. **A investigação matemática como suporte para o estudo de sequências e regularidades: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio**. 2015. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), 2015.

REIS, R. S. **Por que o seno de 30 é 1/2: uma proposta de investigação para uso em sala de aula**. 2023. 83 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), 2023.

- ROCHA, M. F. **Estudo da função quadrática: uma proposta utilizando investigação matemática.** 2021. 68 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), 2021.
- SANTOS, O. C. dos. **Do ensino tradicional à iniciação a atividades de investigação matemática: desconstruindo velhos hábitos.** 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás (UFG), 2018.
- SILVA, A. E. C. **Decodificação de conceitos matemáticos em avaliações: explorando a lógica matemática e estratégias afetivas.** 2023. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Cruz das Almas, BA, 2023.
- SILVA, J. da C. **O uso do Scratch para investigação matemática e os números mágicos de Ball.** 2020. 73 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Tocantins (UFT), 2020.
- SILVA, P. V. C. **Lógica matemática e estratégias para a solução de problemas matemáticos.** 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), 2016.
- SILVA, T. A. **Lógica matemática: uma proposta metodológica para olimpíadas de matemática.** 2022. 143 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri (UFCA), Centro de Ciências e Tecnologia, Juazeiro do Norte, 2022.
- SILVEIRA, M. R. A. **Matemática é difícil: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos.** Revista da Enseñanza de Matemática, v. 3, n. 12, p. 67-84, 2002.
- SINDEAUX, E. R. **Formação do conceito de função a partir da lógica matemática fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin nos estudantes do 1º ano do ensino médio.** 2015. 75 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Roraima (UFRR), Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Boa Vista – RR, 2015.
- SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- SOTERO, A. V. **Uso de conjuntos no ensino de lógica matemática básica.** 2016. 69 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí (UFPI), Centro de Ciências da Natureza, Parnaíba – PI, 2016.
- SOUZA, A. B. **Números ondulantes, repunidades e investigação matemática.** 2023. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Tocantins (UFT), 2023.
- STEIN, M.; SMITH, M. **Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática** (artigo original publicado em 1998). Educação e Matemática, 105, p. 22-28, 2009.
- TEIXEIRA, G. P. **A investigação matemática e o estudo das funções reais: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio.** 2018. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), 2018.
- TIMÓTEO, S. C. S. **Fundamentos de lógica matemática para o ensino médio: um estudo aplicado em geometria plana.** 2018. 106 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Tocantins (UFT), Palmas – TO, 2018.
- TRAVELLO, V. de F. **O uso da lógica matemática para interpretação e resolução de problemas.** 2020. 51 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas, 2020.

VARELLA, D. **Médico tem letra feia? | Drauzio Comenta #27**. YouTube, data da publicação. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=00c2ddf5ocQ> . Acesso em: 03 nov. 2023

VAZ, R. M. **Formalização do raciocínio lógico baseada na lógica matemática**. 2014. 109 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL), 2014.

VERISSIMO, W. **Investigação matemática: uma abordagem das questões de álgebra e da OBMEP para o ensino médio**. 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá (UEM), 2018.

VIEIRA, G. **Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais**. 2016. 170 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALLEVATO, Norma; VIEIRA, Gilberto. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, v. 25, n. 1, p. 113-132, 2016.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani et al. O uso da história da matemática na formalização de conceitos. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, p. 26-41, 1992.

GONÇALVES, U. F. **Uma breve reflexão sobre a lógica proposicional com sugestões didáticas para melhoria da aprendizagem**. Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, 2019.

LANDAL, C. SZUDEK, A. TOMLEY, S. **O Livro da Filosofia**. Trad: ZIEGELMARIER, R. São Paulo: Ed. Globo 2012.

MACHADO, N. J. **Lógica? É lógico!**. Nona edição. São Paulo: Editora Scipione, 2000.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem / Iran Abreu Mendes**. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2009.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Unesp, 2001.
Nova Enciclopédia Barsa. 6a ed. vol 13. São Paulo: Barça Planeta Internacional Limitada, 2002.

PONTE, João Pedro da. A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. **Investigación en educación matemática XII**, p. 55-78, 2008.

VIEIRA, Gilberto; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. **Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, v. 1, n. 1, 2012.

WICHNOSKI, P. Investigação Matemática na Educação Matemática: pontos e contrapontos. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 14, n. 2, p. 10, 2023.

APÊNDICE A - Produto Educacional

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Investigando a Lógica Matemática em Sala de Aula: Manual do Professor

FREDERICO TEIXEIRA LEITE

ÉRICA MARLUCIA LEITE PAGANI

2024

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	174
2 LÓGICA MATEMÁTICA	175
2.1 História da Lógica Aristotélica	176
2.2 Lógica Formal	178
2.2.1 Proposição	179
2.2.1.1 Proposições Categóricas	180
2.2.1.2 Proposições Simples e Compostas	182
2.2.2 Tabela Verdade	184
2.2.3 Operações lógicas	185
2.2.3.1 Negação	185
2.2.3.2 Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva	187
2.2.3.3 Condicional e Bicondicional	189
2.2.1 Equivalências lógicas	191
2.2.1.1 Dupla negação	192
2.2.1.1 Contra Positiva	193
3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	195
3.1 Investigação matemática em sala de aula	195
3.1.1 Tarefas e tarefas investigativas	196
3.1.2 Etapas de uma Tarefa Investigativa	199
3.1.3 Papel do Professor nas Tarefas Investigativas	201
4 TAREFAS PROPOSTAS	204
4.1 Introdução à Lógica	204
4.2 Proposições e Proposições Categóricas	207
Tarefa A: Porque médicos têm a letra feia?	207
Tarefa B: Formalização de Proposição Categórica	208
Tarefa C: Investigando o Valor Lógico	208
4.3 Proposições Compostas	211
Tarefa D: Definições de Proposições	211
Tarefa E: Categorizando Morcegos	211
Tópico: Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva	211
Tarefa F: Construindo a Tabela Verdade	213
Tarefa G: Investigando relações de causa e consequência	214
Tópico: Condicional e Bicondicional	214
4.4 Equivalências Lógicas	215
Tarefa H: Explorando a Contra Positiva	215
5 SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO COMENTADAS	217
6 REFERÊNCIAS	217
7 LEITURAS E MATERIAIS COMPLEMENTARES	218

1 APRESENTAÇÃO

Essa apostila visa apresentar uma alternativa de ensino de Lógica Matemática para alunos do Ensino Médio. Esse material foi desenvolvido como o produto educacional no âmbito da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, no Centro Federal de Educação Tecnológica em Minas Gerais - CEFET-MG.

Na pesquisa que tem como resultado esse produto educacional, desenvolvemos, testamos, discutimos e aperfeiçoamos as atividades aqui propostas com intuito de apresentar um produto que auxilie no ensino de Lógica Matemática utilizando da Investigação Matemática.

Esta apostila conta com quatro capítulos, descritos a seguir:

1. Apresentação: Capítulo dedicado a descrever o trabalho e apresentar a organização da apostila
2. Lógica Matemática: Capítulo dedicado a apresentar a Lógica Matemática, juntamente com conceitos introdutórios da Lógica Proposicional. Se propondo a apresentar conceitos e destacar atenções necessárias no processo de ensino de cada um deles.
3. Investigação Matemática: Capítulo dedicado a apresentar a metodologia de ensino usada para desenvolver as tarefas sobre Lógica Matemática. Essa metodologia busca colocar o aluno no local de protagonista do próprio conhecimento, permitindo que ele investigue e conjecture conclusões sobre os temas apresentados.
4. Tarefas Propostas: Capítulo dedicado a apresentar uma sequência didática composta por diferentes tarefas que buscam introduzir conceitos da Lógica Matemática utilizando da Investigação Matemática. Neste capítulo apresentamos a atividade juntamente com sugestões para suas aplicações, apresentando destaques para o professor aplicador.
5. Gabaritos: Capítulo dedicado a apresentar possíveis respostas das atividades apresentadas no capítulo anterior.

Com tudo, a apostila busca suprir a carência de materiais voltados para o ensino de Lógica Matemática no Ensino Médio. Portanto, tentando auxiliar o processo de ensino-aprendizagem desse tópico tão importante para o desenvolvimento da Matemática.

2 LÓGICA MATEMÁTICA

Uma vez que trataremos de Lógica Matemática neste capítulo, acreditamos ser pertinente as definições encontradas em alguns dicionários:

lógica. [Do gr. *logiké (téchné)* pelo lat. tard. *logica*] **S. f. 1.** *Filos.* Na tradição clássica aristotélico-tomista , conjunto de estudos que visam a determinar os processos intelectuais que são condição geral do conhecimento verdadeiro. [Distinguem-se a *lógica formal* e a *lógica material.*] **2.** *Filos.* Conjunto de estudos tendentes a expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento, deduzindo-as de número reduzido de axiomas, com a intenção de criar uma linguagem rigorosa, adequada ao pensamento científico tal como o concebe a tradição empírico-positivista; **lógica matemática**, lógica simbólica.(FERREIRA p.1230 , 1999, grifo nosso)

LÓGICA, s. f. Ciência que estuda as leis do raciocínio; coerência; raciocínio. **ló.gi.ca** (BUENO, p.477 , 2000)

Segundo a definição do Novo Dicionário Aurélio (FERREIRA, 1999) a lógica tem como uma de suas definições o estudo que visa determinar os processos da produção de conhecimento. Em outra definição, temos um conjunto de estudos que busca na linguagem matemática uma forma de organizar o pensamento. Ambas essas definições dialogam entre si no momento em que a lógica trabalha com o estudo da forma argumentativa, buscando organizar e validar raciocínios. Já no Minidicionário Silveira Bueno (BUENO, 2000) é relacionada a lógica ao estudo das leis do raciocínio. Essas definições se mostram suficientes para iniciar o entendimento da lógica como forma de conhecimento, mas para aprofundar nessa ideia podemos observar sua origem e importância durante a história.

O estudo da Lógica foi iniciado por Aristóteles⁷ e tem sua importância reconhecida no mundo ocidental desde a Grécia Antiga. Como apresentado por Machado e Cunha (2015) esse conhecimento fazia parte das três disciplinas básicas do cidadão grego Gramática, Lógica e Retórica. Cada um desses conhecimentos tinha um objetivo específico, a Gramática buscava o domínio da língua de forma oral e escrita, a Lógica se referia a capacidade de analisar e estruturar argumentos e por último, a Retórica era a capacidade de persuasão. Essas três disciplinas eram chamadas de *Trivium* e deste termo origina a palavra “trivial” enfatizando ainda mais a importância desses conhecimentos. Compreendendo esses conhecimentos é fácil perceber uma correlação entre eles uma vez que a capacidade comunicativa e a capacidade de analisar argumentos parece ser essencial para a capacidade de convencimento. No entanto, para Aristóteles foi importante separar esses três estudos, que para o caso da Lógica era

⁷ Aristóteles, filósofo grego que viveu entre 384 a.C e 322 a.C. Ele foi responsável por grandes contribuições para a filosofia, ciência e lógica moderna. Foi discípulo de Sócrates e mestre de Alexandre o Grande.

importante entender a diferença entre a forma de argumentar e o conteúdo do argumento, sendo a forma o foco do estudo de Lógica.

Nesse momento, nos reservamos a ressaltar que a lógica se encontra em diversas áreas do conhecimento, se encontra diretamente relacionada com a linguagem e todas as construções científicas e argumentativas. Mas muitas vezes é a Matemática, entre todas as ciências, que é comumente relacionada ao estudo da lógica. Machado e Cunha apresentam uma ideia para justificar essa correlação:

O que pode explicar esta associação tão forte entre a lógica e a matemática, em detrimento da língua, é que um estudo inicial da lógica costuma ser realizado admitindo-se a possibilidade de uma separação nítida entre a forma e o conteúdo de uma argumentação, e partindo-se do estudo das formas lógicas, sem conteúdo: Todo a é b e todo b é c acarreta que todo a é c , independentemente do significado dos termos representados por a , b e c . Esta separação faz com que a lógica (formal) se pareça mais com a matemática do que com a língua. Na língua, em seu uso corrente, é muito mais difícil tal separação. Mas isto é só uma estratégia, e é só um começo. (MACHADO, CUNHA, p.25, 2015)

Portanto, o caráter generalista da Matemática parece se associar fortemente com o estudo da Lógica, de congruência assim a ideia dada pelo Novo Aurélio “expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento”.(FERREIRA, p.1230, 1999). Assim vem a origem do termo Lógica Matemática. Além disso, é importante notar que a construção da matemática em seu processo de investigação e demonstração de resultados busca na lógica formas de justificação e comprovação de raciocínios.

Agora, tendo estabelecido uma ideia geral sobre a Lógica, vamos explorar um pouco sobre a história por trás desse estudo, suas origens e seus objetivos, para assim compreendermos melhor sua importância.

2.1 História da Lógica Aristotélica

Para entender o início dos estudos sobre lógica, é necessário entender o movimento Sofistas, pensadores que vieram antes de Aristóteles. Ao investigar esses filósofos, podemos entender melhor como seus pensamentos estimularam a estruturação da Lógica Aristotélica.

O termo “sofista” segundo Kerferd (2004), está relacionado às palavras gregas “sophos” e “sophia”, traduzida comumente para “sábio” e “sabedoria”. Os Sofistas se consideravam profissionais do saber, recebendo, por exemplo, honorários por seus ensinamentos. Dessa forma, esses profissionais do saber, dentro do contexto de uma nova democracia de Atenas, buscam uma nova concepção de virtude apresentada por Meier (2017) a seguir:

Na educação desse novo homem e cidadão, a grande virtude estará vinculada à excelência da oratória, entendida como a virtude de falar em público, com o conhecimento e o domínio das técnicas de persuasão, recorrendo a gestos, pausas, entonações, olhar voltado para o público. É a habilidade de realizar um discurso bem estruturado, defendendo um ponto de vista, sabendo influenciar o comportamento dos ouvintes.(p.71)

Essas virtudes defendidas pelo movimento Sofista foram fortemente criticadas por Sócrates e Platão. Segundo Meier (2017) essas críticas se davam pelo não compromisso dos sofistas com a verdade, buscando apenas os artifícios que seriam mais eficientes na persuasão. Essas habilidades buscavam a vitória argumentativa, utilizando de manipulações e falácias.

Para compreender melhor as perspectivas dos sofistas, destacamos dois dos principais representantes desse grupo, Protágoras(490-415 a.C.) e Górgias de Leontino(487-380 a.C.). Para analisarmos Protágoras, precisamos compreender seu principal lema: “O Homem é a medida de todas as coisas, daquelas que são por aquilo que são e daquelas que não são por aquilo que não são”. Essa visão defendida pelo filósofo destaca as duas principais características do movimento Sofista, o Humanismo e o Relativismo.

Ao expressar seu lema, Protágoras coloca o ser humano como referencial, trazendo para ele a noção de verdade. O indivíduo passa assim a ser o centro da discussão, trazendo um relativismo à realidade. Para esse filósofo, como tudo é relativo, era possível pela persuasão “transformar um argumento mais fraco em mais forte” tornando tudo em uma possível verdade.

Outra perspectiva sofista sobre a verdade é destacada por Meier (2017), “Segundo Górgias, é impossível um conhecimento preciso e estável das coisas. E mesmo que fosse possível conhecer algo, nossa palavra seria impotente para comunicar sua verdade. E disso resultaria a incompreensão da própria realidade.”. Como consequência desse raciocínio, Górgias compreendia que devido à incapacidade de compreender a realidade, só podemos proferir discursos que não podem ser reconhecidos como verdade. Dessa forma, esse filósofo trata da verdade como irrelevante em relação ao processo argumentativo.

Portanto, esses pensadores negavam ou a verdade absoluta ou a capacidade de compreender a verdade. Esses fatores são fortemente criticados por Sócrates e Platão, que buscavam uma forma de encontrar a verdade através do método da Dialética. Buscando assim um conhecimento verdadeiro. Destacamos também que grande parte das produções dos sofistas foram perdidas e seus registros foram feitos por Platão, sendo assim esse teve grande influência em como esse movimento foi relatado durante a história.

Devido às diversas críticas ao movimento sofista, o termo deixa de ser associado a suas origens de “sábio” e passa a ser tratado como impostor. E esses pensadores também dão origem ao termo “sofisma” que é destacado por Ferreira (1999) em sua definição apresentada a seguir:

“sofisma(...)1. Lóg. Argumento aparentemente válido, mas, na realidade, não conclusivo, e que supõe má-fé por parte de quem o apresenta; falácia, silogismo erístico. [Cf. paralogismo.] 2. Lóg. Argumento que parte de premissas verdadeiras, ou tidas como verdadeiras, e chega a uma conclusão inadmissível, que não pode enganar ninguém, mas que se apresenta como resultante das regras formais do raciocínio; falácia.”(p.1875)

Apesar das críticas apresentadas por Sócrates e Platão, foi apenas Aristóteles, aprendiz de Platão, que se dedicou a investigar os sofismos e falácias desenvolvendo pela primeira vez a Lógica Clássica. Esse importante filósofo buscou em seus próprios sentidos observar o mundo ao seu redor, buscando padrões na natureza. Desses padrões, buscava a verdade a partir de suas observações, chegando a desenvolver um sistema de organização que é até hoje base da taxonomia.

Dentro deste estudo sobre a categorização das coisas, Aristóteles identificou um padrão na construção do pensamento lógico. Esse padrão permitiu a ele identificar e categorizar diferentes tipos de argumentos, de forma rigorosa. Além disso, Aristóteles foi capaz de categorizar as estruturas e partes de um argumento.

Dessa forma, ao dissecar o argumento, separando a forma do conteúdo, Aristóteles foi capaz de evitar sofismos e construiu uma organização que permitisse estruturar o argumento. Esse pensamento dedutivo é descrito em uma de suas obras “Organon”. Alguns dos tópicos apresentados neste livro serão destacados na sessão seguinte, para darmos continuidade ao ensino de lógica.

2.2 Lógica Formal

Na Lógica Aristotélica uma argumentação é separada em forma e conteúdo, sendo o segundo alheio ao argumento em si. Aristóteles estava preocupado em observar os possíveis métodos argumentativos sem considerar o caráter, muitas vezes subjetivo, da veracidade de um conteúdo. Tendo, por exemplo, se “*Todo felino é rápido*” e “*Gato é um felino*” podemos concluir “*Todo gato é rápido*”. Nessa situação, não seria relevante se as duas sentenças iniciais são verdadeiras, mas apenas a forma podendo ser resumido a: “*Todo p é q*” e “*r é p*” então “*r é q*”.

Apesar do foco ser a forma como a argumentação se constrói é muito importante esclarecer a linguagem utilizada numa argumentação para compreender e diferenciar melhor

os processos observados. Para isso, é definida uma série de conceitos e estabelecidas formas adequadas de escrita na Lógica Formal. Conceitos esses que serão apresentados e discutidos a seguir.

2.2.1 Proposição

Ao iniciar o processo lógico argumentativo, antes de observarmos o argumento, precisamos fazer uma análise cuidadosa sobre a linguagem que utilizamos para construir nossas linhas argumentativas. Ao dizermos “*Os atletas são altos*” podemos entrar em um debate sobre a frase ser verdadeira, falsa ou ao admitir a ausência de informação suficiente, podemos até concluir que depende. Em busca de simplificar a análise do argumento e tê-lo como foco da discussão lógica, Aristóteles buscou definir um tipo de sentença que pode ser ou verdadeira ou falsa sem permitir que possa ser considerado os dois ao mesmo tempo.

Outra análise importante é perceber que nem todas as sentenças podem ser julgadas como ou verdadeiras ou falsas, sentenças exclamativas e interrogativas são exemplos disso, como “*Não corra no corredor!*” ou “*Qual seu nome?*”. Nesses casos, as sentenças não têm objetivo de expressar uma informação, mas sim dar um comando ou fazer um questionamento. Portanto esse tipo de frase não tem um caráter declarativo.

Levando isso em consideração, Aristóteles cria um conceito de proposição, um tipo de sentença que pode ser bem definida e avaliada.

Definição 1: Proposição

Proposição é uma frase declarativa que pode ser ou verdadeira ou falsa, mas não as duas coisas simultaneamente.

Exemplos:

- i. *A árvore é verde.*
- ii. *Existem triângulos retângulos.*
- iii. *Todo anjo tem asas*
- iv. $18 \geq 29$
- v. *Se chover então eu vou me molhar*
- vi. $57 = 2x + 1$
- vii. *O céu é vermelho e as baleias são animais*
- viii. *Não existem unicórnios*
- ix. $\sim p \Rightarrow q$

É importante esclarecer que a sentença (i), por exemplo, carece de um contexto para ser efetivamente considerada uma proposição e assim caracterizada como ou verdadeira ou falsa.

Também é interessante notar que a linguagem utilizada não precisa se limitar ao português, ao grego antigo ou qualquer outra língua materna. O uso da linguagem matemática é perfeitamente compatível com a definição, como nos casos (iv), (vi) e (ix), uma vez que as sentenças podem ser caracterizadas como ou verdadeiras ou falsas.

Analogamente, segundo Alencar Filho (2017), na Lógica Matemática a proposição adota dois princípios (ou axiomas):

“(I) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo,

(II) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.”(p.11)

Note que a definição apresentada é análoga aos axiomas estabelecidos e, a partir desses, podemos observar o caráter bivalente da Lógica Matemática.

Dessa noção podemos criar uma notação auxiliar ao conceito de proposição.

Notação 1: Valor Lógico

O valor lógico de uma proposição ou é Verdadeira (V) se ela for verdade ou é Falsa (F) se ela for falsidade.

A função de uma proposição p que define seu valor lógico é $v(p)$

Exemplo:

- i. *A árvore é verde* ($v(p) = V$)
- ii. $18 \geq 29$ (F)
- iii. *O céu é vermelho e as baleias são animais* (F)

2.2.1.1 Proposições Categóricas

Ao tratar com proposições, Aristóteles buscou ao máximo se distanciar da necessidade de contextualização das informações e também evitar sentidos dúbios na hora de analisar uma sentença como “*Os atletas são altos*”. Fora de um contexto bem definido, essa sentença pode assumir múltiplos significados. Estaria a frase se referindo a todos os atletas, alguns atletas, a maioria dos atletas ou algum contexto mais específico? Assim, a construção dessa frase dificulta o entendimento da sentença e impossibilita o desenvolvimento argumentativo.

Como o objetivo da Lógica Formal não é analisar os diversos contextos do discurso, a busca de uma linguagem clara e bem definida foi importante para sua formalização, assim

evitando esses duplos sentidos. Tendo isso em mente, foi definindo apenas quatro tipos básicos chamados de Proposições Categóricas.

Definição 2: Proposições categóricas

Proposições categóricas são proposições que seguem um dos quatro tipos a seguir:

Quadro 1– Proposições categóricas

Tipo:	Forma:	Exemplo:
Afirmção Universal	<i>Todo a é b.</i>	<i>Todo atleta é alto.</i>
Negação Universal	<i>Nenhum a é b.</i>	<i>Nenhum atleta é alto.</i>
Afirmção Particular	<i>Algum a é b.</i>	<i>Algum atleta é alto.</i>
Negação Particular	<i>Algum a não é b.</i>	<i>Algum atleta não é alto.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na língua portuguesa existem diferentes formas de expressar uma mesma proposição mantendo seu significado “Todo atleta é alto” pode ser apresentado como “Todos os atletas são altos” ou substituir “Algum atleta é alto” por “Existe atleta alto”, mas ainda é importante se atentar às diferenciações entre geral e específico e afirmativo e negativo. Já a linguagem matemática apresenta uma linguagem própria para representar esses códigos que será apresentada separadamente no final do capítulo.

Apesar das proposições categóricas terem como objetivo analisar a construção de um argumento baseado nelas. Uma das vantagens de uma proposição categórica, que por ser bem estruturada e organizada, é que a argumentação Lógico Matemática necessária para verificar seu valor lógico usa de conceitos importantes da demonstração matemática e identifica o quanto é possível utilizá-los.

Para confirmarmos uma proposição universal, em outras palavras, provar que é verdadeira, precisamos garantir que todos os casos são verdadeiros. Podem ser assim necessários métodos mais sofisticados de demonstração. No exemplo abaixo, para realizar uma demonstração suficiente, precisamos realizar manipulações algébricas, mesmo que simples, mas que demandam uma organização e rigor matemático maior, pois é necessário observar de forma direta ou indireta todos os múltiplos simultaneamente.

Exemplo: *Todo múltiplo de 6 é par (V)*

Já para negar uma proposição universal, em outras palavras provar que é falsa, basta buscarmos uma situação falsa, essa chamamos de contra-exemplo. No exemplo abaixo, com

um pouco de investigação, é possível identificar um contra-exemplo (9) negando a totalidade da afirmação.

Exemplo: *Todo múltiplo de 3 é par* (F)

Para confirmarmos uma proposição particular, em outras palavras provar que é verdadeira, basta encontrar exemplos que satisfazem a proposição. No exemplo abaixo, assim semelhante ao exemplo anterior, é possível identificar um exemplo da existência (6) que confirma a proposição.

Exemplo: *Algum múltiplo de 3 é par* (V)

Já para negar uma proposição particular, precisamos observar todos os elementos, pois se um for verdadeiro a sentença já é verdadeira. No exemplo a baixo, para provar a falsidade precisamos novamente de algumas manipulações algébricas, por demandar que observemos todos os os múltiplos simultaneamente e assim garantir que nenhum deles é ímpar.

Exemplo: *Algum múltiplo de 6 é ímpar*. (F)

Compreender essas ideias permite identificar quais tipos de demonstrações são necessárias em cada tipo de proposição, identificando quando exemplos são ou não suficientes para uma justificativa e também entender que tipos precisam ser usados. Evitando assim falácias que partem da existência para a generalização.

Além das provas dadas acima, em um caráter mais subjetivo, mas igualmente importante, Machado e Cunha (2015) apresentam outras formas de confirmar a veracidade de uma proposição:

- é um conhecimento plenamente justificado, no terreno científico;
- é garantido pela autoridade de especialistas no tema;
- é uma questão de princípios, ou é um dogma, indiscutível;
- é amplamente conhecido, no nível do senso comum;
- é garantido pela confiança que depositamos na palavra de quem as enuncia;
- , etc.(p.48)

2.2.1.2 Proposições Simples e Compostas

Outra forma de avaliar e classificar uma proposição é em sua composição, sendo possível separar em dois grupos as proposições simples ou atômicas e as proposições compostas ou moleculares. Segundo Alencar Filho (2017) temos as definições

Definição 3: Proposição Simples

Chama-se de proposição simples ou proposição atômica aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Essas proposições são comumente designadas pelas letras minúsculas como p , q e r .

Exemplo:

- i. p : *Carlos é fedorento*
- ii. q : *Bananas são frutas*
- iii. r : *O céu é vermelho*
- iv. s : *O mar é roxo*
- v. t : *Janeiro é o mês mais quente*

Definição 4: Conectivos

Chamam-se conectivos, palavras, ou símbolos, que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Exemplos:

- i. Não (\sim)
- ii. E (\wedge)
- iii. Ou... ou (\vee)
- iv. Se... então (\rightarrow)

Cada um desses conectivos possui um significado e suas especificidades, quando utilizamos eles estão executando operações lógicas que podem mudar o sentido e o valor lógico de uma proposição, criando as chamadas operações lógicas.

Conectivos também podem ser chamados de operadores lógicos.

Definição 5: Proposição Composta

Chama-se de proposição composta ou proposição molecular aquela formada pela combinação de duas, ou mais proposições, sendo elas simples ou compostas. Essas proposições são comumente designadas pelas letras maiúsculas como P , Q e R . Também são representadas a partir de suas proposições atômicas juntamente de seus conectivos.

Exemplo:

- i. P : *Carlos é fedorento e bananas são frutas ($p \wedge q$)*
- ii. Q : *Se o céu é vermelho então o mar é roxo ($r \rightarrow s$)*
- iii. R : *Janeiro não é o mês mais quente ($\sim t$)*
- iv. S : *Janeiro não é o mês mais quente ou Rinocerontes são vermelhos ($U \vee v$)*

Destaca-se que U é uma proposição composta por $\sim t$ então S também seria equivalente a $\sim t \vee v$.

É interessante que ao notar o significado dos nomes dos tipos de proposição, em (FERREIRA, 1999) a palavra atômica, por exemplo, é originária do conceito de “átomo” que tem entre seus vários significados o sentido de “indivisível”. Já a palavra “molecular” vem de molécula que tem entre seus significados o sentido de agrupamento de um ou mais átomos. Dessa forma é interessante observar uma analogia com o conceito químico de ambas as palavras.

As proposições atômicas assim como o nome mesmo diz são a parte menor de uma proposição molecular que pode conter mais de uma proposição simples utilizando de conectivos extremamente importantes para a construção de sentenças na Lógica Formal. Esses podem relacionar, proposições mudando seu significado e possivelmente seu valor lógico.

2.2.2 Tabela Verdade

Antes de analisarmos cada operação lógica apresentaremos uma forma de organizar todas as combinações do conjunto de proposições que precisamos observar de uma proposição composta para definirmos seu valor lógico. Esse formato é chamado de Tabela Verdade.

Como o valor lógico de qualquer proposição ou é verdade (V) ou falso (F) conseguimos definir o valor lógico de uma proposição composta se baseando nas proposições simples que as formam. Isso traz um forte caráter generalista sobre a forma da Lógica Proposicional, uma vez que podemos isolar o contexto da proposição original e observamos apenas a situação geral. Alencar Filho (2017) apresenta o seguinte princípio: “O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.”(p.14)

Dado esse princípio, a tabela verdade busca definir todas as combinações de valores lógicos (V) ou (F) das proposições simples que formam a proposição composta. Assim com uma proposição simples a tabela apresenta 2 casos, com duas proposições temos 4 casos, com três temos 8 casos e com n proposições teríamos 2^n casos. Os três primeiros casos são mostrados abaixo.

Quadro 2– Tabela Verdade 1

	p
1	V
2	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 3– Tabela Verdade 2

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 4 – Tabela Verdade 3

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observe no Quadro 3 que temos quatro situações: VV, VF, FV e FF esgotando assim todas as possibilidades de combinação.

2.2.3 Operações lógicas

Agora tendo as ferramentas necessárias iniciaremos a análise de operações que podemos realizar com as proposições. Antes de iniciar essa análise é importante enfatizar que apesar de nos contermos a operações com proposições simples, é perfeitamente possível realizar operações com qualquer tipo de proposição.

Além da discussão formal sobre as operações será destacado o sentido das operações em um contexto argumentativo e também possíveis atenções com o cuidado da linguagem utilizada.

2.2.3.1 Negação

Definição 6: Negação

A negação de uma proposição “ p ” é a proposição composta representada por “ $\text{não } p$ ”, cujo valor lógico é oposto a “ p ”. Isso é o valor lógico, é verdade quando “ p ” é falsa e falsidade quando “ p ” é verdadeira. Existem diversas notações para o conectivo de negação, neste texto usaremos “ \sim ”.

Exemplos:

- i. *Hoje não está quente* é negação de *Hoje está quente*
- ii. *Hoje está quente, por outro lado* é negação de *Hoje não está quente*
- iii. $25 \leq 18$ é negação de $25 > 18$
- iv. $\sim p$ é negação de p

Quadro 5 – Tabela Verdade Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O conceito de negação apesar de inicialmente intuitivo requer alguns cuidados em sua compreensão, por exemplo, uma proposição como “*Pedro é alto*”, sua negação é o completo oposto a essa situação, nesse caso a proposição “*Pedro é baixo.*” não caracteriza uma negação proposicional dessa. Para entender isso é possível ver o seguinte caso “*Pedro tem uma altura mediana*” dessa forma as proposições “*Pedro é alto*” e “*Pedro é Baixo*” são ambas falsas sendo assim não sendo negação uma da outra. Então é importante entender que negar algo não é só dizer algo diferente, a negação precisa ser falsa quando a proposição original é verdadeira e verdade quando a proposição inicial é falsidade.

Machado e Cunha (2015) apresentam outra importante atenção é a linguagem utilizada na língua comum, na lógica uma dupla negação “ $\sim\sim p$ ” representa uma afirmação, mas a língua portuguesa pode assumir o significado de uma negação simples, como, por exemplo “*Não tenho nada a declarar*”. Para evitar isso eles sugerem uma mudança de vocabulário e estrutura como no quadro abaixo:

Quadro 6 – Mudança de Vocabulário

Em vez de	Podemos dizer
<i>Não tenho nada a declarar.</i>	<i>Nada tenho a declarar.</i>
<i>Não havia ninguém à porta.</i>	<i>Ninguém estava à porta.</i>
<i>Não comi nada.</i>	<i>Não comi coisa alguma.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No contexto da Lógica Matemática as proposições categóricas apresentam um importante papel demonstrativo e compreender suas negações é importante etapa de alguns métodos dedutivos. Então abaixo destaco as negações das quatro proposições:

A negação da *Afirmção Universal* é a *Negação Particular* e a recíproca também se confirma.

Exemplo:

Todos os ratos são roedores é negada por *Algum rato não é roedor*

Já a negação da *Afirmção particular* é a *Negação universal* e a recíproca também se confirma.

Existe gato preto é negado por *Todo gato não é preto*

Esses fatos decorrem das discussões feitas no tópico 3.2.1.1 e enfatizam a necessidade de compreender a negação para comprovar uma proposição como ou verdadeira ou falsa.

Pensando matematicamente, podemos fazer uma comparação de uma negação com um conjunto complementar, sendo tudo que não é a afirmação. Assim entender os símbolos matemáticos que são negações uns dos outros se torna mais simples, por exemplo, negar que $3 + 3 = 6$ é dizer $3 + 3 \neq 6$ e negar que $25 \leq 18$ é dizer que $25 > 18$.

2.2.3.2 Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva

Até o momento trabalhamos com proposições compostas que eram formadas por uma proposição simples e um conectivo, no caso o de negação. A próxima etapa ao analisar operações lógicas é entender que os conectivos têm objetivo de ligar duas outras proposições que criam uma proposição composta que depende de dois termos para se definir seu valor lógico. Os conectivos mais comumente utilizados são o “e” e o “ou”, *mas* nesse texto trabalharemos juntamente com o “ou... ou” para entender as diferenças.

A primeira entre as três é a conjunção que utiliza o conectivo “e”, como na frase “*O gato é preto e o avião é rosa*” nessa situação é necessário que ambas as proposições “*O gato é preto*” e “*O avião é rosa*” sejam verdadeiras para que a proposição composta seja verdadeira. Assim Alencar Filho (2017) define:

Definição 7: Conjunção (\wedge)

Chama-se Conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “ p e q ” cujo o valor lógico é verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.

A notação para a disjunção de p e q é o “ $p \vee q$ ” e lê-se “ p e q ”.

Exemplos:

- i. *A terra é plana e três é ímpar*
- ii. *João e Ana jogam futebol*
- iii. $p \wedge q$

Quadro 7 – Tabela Verdade Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A segunda é a disjunção que utiliza o conectivo “ou” como na frase “O gato é preto ou o avião é rosa.” nessa situação é suficiente que apenas uma das proposições “O gato é preto.” e “O avião é rosa.” seja verdadeira para que a proposição composta, seja verdadeira. A atenção que precisa se ter nesse conectivo é que na língua natural o “ou” pode passar a ideia de ideias mutuamente excludentes, não podendo ser os dois ao mesmo tempo, mas no caso da lógica nada impede, por exemplo, que tanto “O gato é preto.” e “O avião é rosa.” sejam verdadeiros.

Definição 8: Disjunção (\vee)

Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por " p ou q ", cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

A notação para a disjunção de p e q é o " $p \vee q$ " e lê-se " p ou q ".

Exemplos:

- i. *A terra é plana ou três é ímpar.*
- ii. *João ou Ana jogam futebol.*
- iii. $p \vee q$

Quadro 8 – Tabela Verdade Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A terceira é a disjunção exclusiva que utiliza o conectivo “ou... ou” como na frase “Ou gato é preto ou o avião é rosa” nessa situação é necessário que apenas uma das proposições “O gato é preto” e “O avião é rosa” seja verdadeira para que a proposição composta seja verdadeira. Essa diferenciação em relação à disjunção comum, pois exclui o caso que aborda

ambas as situações. Destaco aqui que dentro das atividades apresentadas a utilização desse conectivo é uma forma de evidenciar a diferença entre o apenas “ou” e o “ou... ou”. Então é um importante exercício comunicativo se atentar ao uso desses termos, mesmo antes de apresentar as atividades.

Definição 9: Disjunção Exclusiva (\vee)

Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições p e q a proposição representada por “ou p ou q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) somente quando ou p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a falsidade (F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

A notação para a disjunção de p e q é o “ $p \vee q$ ” e lê-se “ou p ou q ” Também podemos escrever “ p ou q , mas não ambas”.

Exemplos:

- i. *Ou a terra é plana ou três é ímpar*
- ii. *A terra é plana ou três é ímpar, mas não ambas*
- iii. *Ou João ou Ana jogam futebol*
- iv. $p \vee q$

Quadro 9 – Tabela Verdade Disjunção Exclusiva

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

2.2.3.3 Condicional e Bicondicional

Agora vamos discutir duas operações lógicas que criam uma relação de causa e efeito, relacionando as proposições simples como uma sendo consequência de outra, daí a palavra condicional.

A condicional simples gera uma relação de causa e efeito como na frase “Se Pedro ganhar, então ele vai fazer uma festa.” esse tipo de condição funciona como “Pedro ganhar” ser suficiente para “Ele fazer uma festa.”, logicamente se assemelha a uma promessa definida unicamente se a primeira proposição for verdade. Nesse caso nada se é dito sobre quando não ocorre a causa, no caso “Pedro ganhar”, assim ele não tem nenhuma promessa a cumprir, podendo ou não fazer uma festa, sem descumprir a promessa. Se não tem causa, não tem

compromisso do efeito, isso é se “Pedro não ganhar” qualquer situação pode ser assumida tanto fazer ou não fazer uma festa.

Definição 10: Condicional (\rightarrow)

Chama-se proposição condicional ou apenas condicional, uma proposição representada por “se p então q ” cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade (V) nos demais casos

A notação para a condicional das proposições p e q é “ $p \rightarrow q$ ” e lê-se “se p , então q ”. Nessa situação p é o antecedente e q o conseqüente.

Exemplos:

- i. *Se a terra é plana, então três é ímpar*
- ii. *Se João joga futebol, Ana joga futebol*
- iii. $p \rightarrow q$

Quadro 10 – Tabela Verdade Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Destaco que ao observarmos a escolha de simbologia de uma seta “ \rightarrow ” para representar a implicação é mais uma forma de compreender como não é uma via de duas mãos e apenas se pode concluir algo quando o primeiro é verdadeiro.

Essa noção pode ser pouco intuitiva, pois na língua comum “se isso, então aquilo” pode ser assumido como equivalente a “se aquilo, então isso”, mas para essa situação de ida e volta temos a bicondicional.

A bicondicional procura criar uma relação em que uma proposição é tanto necessária como suficiente para concluir outra. Ao escrevermos “Pedro trabalhará se e somente se o patrão o pagar.” estamos assumindo que o Pedro só trabalha se receber e o patrão só paga se Pedro trabalhar. Nessa situação percebemos que o acordo é quebrado se uma das partes realizar a atividade e a outra não.

Definição 11: Bicondicional (\leftrightarrow)

Chama-se proposição bicondicional ou apenas bicondicional uma proposição representada por “ p se e somente se q ” cujo valor lógico é verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e falsidade (F) nos demais casos.

A notação para a bicondicional das proposições p e q é “ $p \leftrightarrow q$ ” e lê-se “ p se e somente se q ”. Nessa situação, p e q assumem papel de necessária e suficiente para a outra.

Exemplos:

- i. *A terra é plana se e somente se três é ímpar*
- ii. *Se João joga futebol, se e somente se, Ana joga futebol*
- iii. $p \leftrightarrow q$

Quadro 11 – Tabela Verdade Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Essa definição é extremamente importante para um discurso argumentativo, pois ao analisar e identificar como verdadeira em todos os casos a correlação entre eles cria uma relação de equivalência lógica, garantindo que podemos trocar p por q em um argumento. Mas é importante destacar que essa relação não é tão simples de ser provada, uma vez que é necessário entender que para $p \leftrightarrow q$ ser verdade $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ precisam ser verdade.

2.2.1 Equivalências lógicas

Para provar que uma bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira em todos os casos é necessário garantir que não existe diferenciação em nenhum caso, isso é o valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é sempre (V). Nos casos que isso acontece definimos a relação como uma equivalência lógica.

Definição 12: Equivalência Lógica(\Leftrightarrow)

Uma proposição P composta por $(p, r, q...)$ é logicamente equivalente a uma proposição Q composta por $(p, r, q...)$ se os valores lógicos de P e Q são sempre os mesmos

A notação utilizada é $P \Leftrightarrow Q$

Exemplos:

- i. *Não é verdade que carros não voam \Leftrightarrow É verdade que carros voam ($\sim\sim p \Leftrightarrow p$)*
- ii. *Se eu chegar em casa, então vou ver televisão \Leftrightarrow Se eu não ver televisão, então eu não cheguei em casa ($p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$)*

Nos dedicamos a esclarecer nesse momento a diferença sutil entre uma bicondicional (\leftrightarrow) e uma equivalência (\Leftrightarrow). Uma bicondicional é uma proposição composta que pode assumir os valores lógicos de verdadeira (V) ou falsa (F). Já no caso de uma equivalência temos uma relação entre duas proposições, que é verdadeira sendo assim uma proposição

pode ser substituída pela outra, sem alterar seu valor lógico. Abaixo usarei de duas situações triviais de tabela-verdade para exemplificar:

Quadro 12 – Tabela Verdade ($p \leftrightarrow p$)

p	p	$p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 13 – Tabela Verdade Trivial ($p \leftrightarrow q$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No Primeiro exemplo a bicondicional é sempre (V) pois sempre o valor lógico de p vai ser idêntico ao dele mesmo, assim $p \leftrightarrow p$ é sempre verdade. Já no segundo exemplo existe pelo menos um caso em que $p \leftrightarrow q$ é (F) assim a equivalência não é verdade.

Dessa forma, para averiguar se uma proposição é equivalente a outra podemos olhar seus valores na tabela-verdade, sendo uma forma de demonstrar sua equivalência. Inclusive podemos também definir uma proposição P composta por $(p, r, q...)$ é logicamente equivalente a uma proposição Q composta por $(p, r, q...)$ quando a tabela-verdade dessas duas proposições é idêntica.

Portanto, identificar que a tabela verdade de duas proposições são equivalentes é suficiente para garantir sua equivalência.

2.2.1.1 Dupla negação

A primeira das equivalências lógicas destacada nesse documento se refere ao conceito de uma dupla negação, essa ideia é destacada anteriormente ao nos depararmos com a construção de uma negação.

Ao construir uma dupla negação é até contra intuitivo compreendê-la como uma proposição, uma vez que dizer “*Não é verdade que jovens não são inquietos*” só acaba parecendo uma forma confusa de expressar sua equivalência “*Jovens são inquietos*”. Portanto, do ponto de vista do esclarecimento argumentativo, essa equivalência se mostra importante para entender e interpretar uma proposição.

Nesse momento nos ateremos a identificar a relação entre a dupla negação e a proposição inicial. Isso é “ $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ ”, para mostrarmos isso podemos partir da definição de

negação, que resumimos em “se p é verdadeira então $\sim p$ é falsidade e se p é falsidade então $\sim p$ é verdadeira”. Agora partindo da tabela verdade temos a seguinte análise, com um destaque especial para o uso de parênteses que apenas enfatiza $\sim\sim p$ como a negação de $\sim p$:

Quadro 14 – Tabela Verdade Dupla Negação

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Quadro 15 – Tabela Verdade Equivalência Lógica Dupla Negação

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
V	F	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	V	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dessa forma podemos observar a equivalência de p e $\sim\sim p$ uma vez que quando p é verdadeira $\sim\sim p$ é verdadeira e quando p é falsidade $\sim\sim p$ é falsidade.

2.2.1.1 Contra Positiva

A segunda equivalência matemática é a contra positiva ou contra recíproca que tem extrema importância para o processo demonstrativo da matemática, mas logicamente requer que alguns conceitos previamente apresentados estejam bem estabelecidos para compreendê-los. Essa equivalência diz que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$. Anteriormente discutimos a diferença de $q \rightarrow p$ ter sentido diferente de $p \rightarrow q$ mas ao inserir a negação nessas proposições precisamos observar casos diferentes. Assim usaremos dos exemplos abaixo:

- i. “Se Pedro é mineiro, então ele é brasileiro.” ($p \rightarrow q$)
- ii. “Se Pedro é brasileiro, então ele é mineiro.” ($q \rightarrow p$)
- iii. “Se Pedro não é mineiro, então ele não é brasileiro.” ($\sim p \rightarrow \sim q$)
- iv. “Se Pedro não é brasileiro, então ele não é mineiro.” ($\sim q \rightarrow \sim p$)

Observe inicialmente que contextualizadamente “i” é verdadeira, mas para “iii” um contra exemplo seria o caso em que Pedro é paulista, mostrando assim que essa proposição é falsa, então não é possível fazer uma relação de equivalência entre as duas proposições. No

entanto, em “iv” se Pedro não é brasileiro, ele não pode ser mineiro, uma vez que todo mineiro é brasileiro.

Podemos expressar isso de formalmente em uma tabela verdade, para destacarmos as comparações nessa tabela evidenciaremos os itens acima:

Quadro 16 – Tabela Verdade Contra Positiva

p	q	$\sim p$	$\sim q$	i. $p \rightarrow q$	ii. $q \rightarrow p$	iii. $\sim p \rightarrow \sim q$	iv. $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observando a tabela-verdade podemos identificar as equivalências $i \Leftrightarrow iv$ e $ii \Leftrightarrow iii$.

Outro destaque relacionando a contra recíproca é a utilização de proposições categorias para encontrar equivalências lógicas. Esse uso é muito comum em demonstrações matemática por ser um utensílio poderoso para trabalhar com afirmações universais ou negações particulares que se mostram dificultadores no momento de realizar uma demonstração.

Dessa forma podemos observar as proposições nos exemplos a seguir:

Exemplo:

$p \rightarrow q$: *Se todos os dias são frios então nenhum dia é quente*

sendo:

p : *Todos os dias são frios*

q : *Nenhum dia é quente*

$\sim p$: *Existem dias que não são frios*

$\sim q$: *Algum dia é quente*

Então temos a equivalência lógica:

$\sim q \rightarrow \sim p$: *Se algum dia é quente, então existem dias que não são frios*

Destaco no exemplo o processo de construção da contra recíproca em que primeiro identificar as negações para depois construir a relação de equivalência, assim organizando o raciocínio.

3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Um matemático profissional, ao investigar em Matemática, está explorando conhecimentos desconhecidos por ele para buscar padrões, relações, estruturas, observar objetos matemáticos, elaborar e provar conjecturas relacionadas a esses objetos. Esse processo

é o que permite a construção e desenvolvimento da Matemática com seu rigor e formalismo. Dessa forma, esse processo de criar e testar conjecturas até provar um resultado se torna o processo de construção da própria Matemática.

Esse processo de *Investigar em Matemática* procura desenvolver o conhecimento matemático formal. Para cumprir esse objetivo, comumente, o matemático passa por um processo padrão de desenvolvimento dos conhecimentos, que segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) pode ser dividido em quatro momentos:

- i. No primeiro momento que se identifica a situação problema, explora e formula questões,
- ii. No segundo momento é feita uma organização dos dados e informações para assim formular conjecturas,
- iii. No terceiro momento inicia a fase de testes para tentar verificar e refinar a conjectura,
- iv. No quarto e último é feita a busca por justificativas e avaliação dessas.

Esse processo de *Investigar em Matemática* não é feito apenas de forma individual. Ele busca também interações com outros matemáticos interessados na pesquisa. Esse diálogo permite enxergar outras perspectivas das conjecturas sendo investigadas, podendo ter novas ideias e questionamentos. Inclusive no último momento, o de avaliação, é indispensável levantar esse diálogo para permitir que a comunidade matemática possa averiguar o argumento feito para provar as conjecturas. É um processo organizado que busca explorar problemas desconhecidos, elaborar conjecturas, testá-las, verificá-las e discuti-las. O processo executado por matemáticos segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) está ao alcance dos alunos nas aulas de Matemática e pode ser adaptado pelo professor.

3.1 Investigação matemática em sala de aula

Uma primeira diferença do processo de *Investigar em Matemática* e a *Investigação Matemática no contexto da sala de aula* é que no processo de ensino-aprendizagem os temas não precisam desenvolver problemas nem resultados complexos, uma vez que o objeto de trabalho é a construção de um conhecimento já existente e não desenvolver teoremas e demonstrações nunca vistas. Outra diferença é que muitas vezes também não é necessário manter o rigor de um matemático profissional, podendo trabalhar o processo de demonstração de conjecturas elaboradas pelo aluno dentro do seu próprio grau de abstração.

Assim como um processo baseado na pesquisa de um matemático, é possível permitir que os alunos, ao simularem o *Investigar em Matemática*, desfrutem do desenvolvimento da Matemática de forma ativa e sejam protagonistas no seu processo de aprendizagem,

construindo seu conhecimento como um matemático. Esse processo é importante para desenvolver habilidades matemáticas, raciocínio lógico e compreender os caminhos para a **construção do conhecimento**.

Também a investigação consegue se enquadrar em diversos contextos escolares, se adaptando, a faixa etária e nível de escolaridade, pois pode adaptar tanto quanto possível o grau de rigor a ser trabalhado pelo aluno.

Assim dentro do contexto de ensino-aprendizagem de Matemática a investigação entra na sala de aula com um objetivo maior que apenas passar o conteúdo mas também trazer para o aluno uma possibilidade de realizar a construção do seu conhecimento, colocando-o em um local semelhante ao de um matemático, uma vez que desenvolve habilidades semelhantes como construção, avaliação e comprovação de conjecturas.

Uma vez compreendido o que é a Investigação Matemática nos dedicamos em seguida a apresentar como adaptar o *Investigar em Matemática* para o contexto escolar. Para responder isso precisamos criar uma diferenciação entre a investigação feita fora e dentro do das aulas de Matemática. Essas diferenças discutiremos na seção a seguir, ao analisar as tarefas dentro do processo de Investigação Matemática, entendido como estratégia de ensino-aprendizagem.

3.1.1 Tarefas e tarefas investigativas

Para transpor o *Investigar em Matemática* para o contexto da sala de aula é necessário realizar adaptações que se adequem ao contexto escolar, assim a noção de investigar ganha outro significado em relação à atividade realizada por um matemático. A investigação se torna uma tarefa do aluno.

Para analisar esses formatos levamos em conta a perspectiva de Ponte (2003), para ele uma tarefa tem “quatro dimensões básicas”(p.4): seu grau de complexidade, seu formato, seu tempo necessário, sua contextualização. Ponte (2003) ao analisar o grau de complexidade e o formato de uma tarefa divide em quatro subgrupos como mostrado na figura 2:

Figura 2 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura



Fonte: Ponte (2003, p.5)

Ponte (2003), caracteriza exercício, problema, exploração e investigação da seguinte forma:

- O *Exercício* tem caráter fechado e fácil, sendo uma aplicação direta e com uma solução previamente definida e esperada.
- O *Problema* também possui uma solução previamente definida e esperada, mas apresenta um grau de complexidade mais elevado dentro do processo de solução.
- A *Exploração* é menos complexa, mas já apresenta uma estrutura aberta permitindo diversos resultados e caminhos a serem conduzidos.
- A *Investigação* apresenta uma complexidade maior e uma estrutura aberta assim como a exploração

Esses grupos de tarefas são exemplificados na figura 3 a seguir.

Figura 3 – Exemplos de tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$ 3		2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Ponte (2003, p.4)

No entanto, Ponte ainda destaca que existe uma dificuldade de diferenciar a Tarefa de Investigação de uma Tarefa de Exploração, pois o nível de dificuldade de uma atividade

depende de múltiplos fatores imensuráveis que dependem diretamente do agente da atividade, o aluno. Assim, uma atividade de caráter aberto para um aluno pode ser considerada fácil e para outra difícil.

Seguindo essa perspectiva, tentando buscar uma forma de adaptar o *Investigar em Matemática* para a sala de aula, tanto a exploração quanto a investigação conseguem abordar o processo de construção da Matemática. Por isso ambos os casos serão referidos nesse texto como *Tarefas Investigativas*, uma vez que não terá foco no grau de dificuldade das mesmas, mas sim no caráter aberto das duas.

É importante destacar que uma tarefa investigativa pode ser realizada em diferentes períodos. Essas tarefas podem assumir longos períodos como projetos que podem durar meses em um trabalho prolongado, mas também podem se enquadrar em períodos mais restritos. Dito isso, é importante salientar que ainda é necessário um tempo adequado para executar os processos de uma investigação, uma vez que as etapas requerem tempo para, executar testes, formular conjecturas e buscar conclusões. Dessa forma, organizar atividades de “natureza mais estruturada” pode ajudar na gestão de tempo em prazos mais curtos. (Ponte, 2003)

Por último, uma tarefa, pode ser ainda analisada segundo sua contextualização, isso é a ambientação do problema, num espectro que vai da Matemática pura a uma situação real. Skovsmose (2000) se dedica a analisar essas “referências”, criando um quadro que distingue esses contextos analisados juntamente com seu formato, chamando cada situação de ambiente, em seis cenários são organizados como mostrado no quadro mostrado na figura 4 a seguir.

Figura 4 – Ambientes de Aprendizagem.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi- realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p.8)

Na próxima seção, apresentamos como criar uma tarefa investigativa no processo *Investigação Matemática*, para ser usada em sala de aula.

3.1.2 Etapas de uma Tarefa Investigativa

Uma tarefa investigativa em sala de aula, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) é separada em três etapas:

- i. Introdução da tarefa
- ii. Realização da investigação
- iii. Discussão dos resultados

A primeira etapa, introdução da tarefa, é o momento em que o professor deve introduzir a atividade, e é nela que existe o convite aos alunos para um processo de investigação e a apresentação da atividade em si, sendo assim crucial para o andamento e compreensão das outras fases.

Nessa etapa é importante ficar claro para os alunos a natureza da tarefa investigativa, explicar o que se entende como uma investigação e seus processos, principalmente em casos em que os alunos não estão acostumados a realizarem atividades desse tipo. Nesses casos o professor precisa esclarecer o caráter aberto do problema buscando quebrar algumas das ideias do “paradigma do exercício” Skovsmose (2000) permitindo que o aluno entenda que nem sempre existe uma busca por uma resposta precisa, mas sim uma exploração das informações dadas.

Também nesse primeiro momento é necessário apresentar a tarefa em si, nesse momento é apresentado o problema e a situação a ser investigada e é papel do professor indagar os alunos e estimulá-los a engajar na situação geradora. Assim também é importante estabelecer os comandos que guiam a atividade de forma clara e se possível por escrito. Para esclarecer também é possível realizar uma leitura conjunta da atividade, mesmo que seja apenas para esclarecer algum termo ou vocabulário desconhecido pelo aluno.

Considerando que o aluno em geral tem pouca familiaridade com atividades investigativas, é indicado ao professor esclarecer os passos a serem tomados na tarefa. Porém, sem deixar de tomar um certo cuidado para não induzir o aluno no processo investigativo, pois, mesmo a interpretação da tarefa faz parte do processo.

É também nesse momento que o professor precisa estabelecer o clima da atividade, estimular que os alunos participem e se sintam à vontade para que no seu devido tempo possa questionar, pensar e expressar suas ideias para colegas e professor. Assim permitindo que ele se sinta à vontade.

Para o bom andamento é importante esclarecer aos alunos o que deve ser produzido ao final da atividade e que será explorado os resultados juntamente com toda a turma para que os alunos entendam que os resultados vão ser apresentados e discutidos com outros colegas.

Por fim, é importante esclarecer que apesar das nuances e importância da primeira etapa para o bom andamento da atividade, ela não demanda muito tempo.

Após o término da introdução começa a *segunda etapa*, onde se inicia o processo de investigação. Nesse momento o professor precisa tomar um papel de retaguarda, observando e entendendo como vai o caminhar dos alunos, permitindo que eles tomem seus lugares de protagonismo da atividade, e só se necessário após essa observação realizar possíveis intervenções. Caso a tarefa seja em grupo e os alunos não estejam acostumados a esse tipo de organização, o professor precisa ter um cuidado dobrado, uma vez que os alunos enfrentarão dois desafios: o trabalho em grupo e o trabalho na perspectiva da investigação.

É nessa etapa do desenvolvimento da tarefa que os alunos devem trabalhar o que se espera de um *Investigar em Matemática*, buscando explorar, formular questões, formular conjecturas, testá-las, reformular e justificá-las.

No início da exploração da atividade, mesmo que pareça que os alunos não estão produzindo, é importante que o professor dê o tempo necessário para os alunos, pois nesse momento os alunos provavelmente estão se familiarizando com os dados apresentados e refletindo sobre as informações. Assim, nesse momento é quando o aluno tem o primeiro contato e está no processo de se apropriar do sentido da tarefa. Destacamos também que quando temos uma atividade em grupo, também é estabelecido a dinâmica do mesmo, consolidando a forma de trabalho desse e assim dando arranque a atividade.

Seguindo o processo de investigação, ao analisar o cenário apresentado, os alunos muitas vezes são levados a procurar mais exemplos e gerar mais informações, buscando possíveis padrões, elaborando conjecturas e testando em novos exemplos, assim gerando um ciclo de coleta de dados e elaboração de conjecturas.

Outro processo interessante da investigação dos alunos, destacado por Ponte, Brocado e Oliveira (2009), é que quando o objetivo é procurar padrões ou regularidades, uma vez estabelecida uma conjectura os alunos tentam buscar outras conjecturas por associação, e esse processo se mostra desejável, pois o aluno passa a correlacionar informações e ideias.

Então nesse momento é importante observar que ao caminhar da investigação os alunos começarão a elaborar conjecturas, seja por observações diretas, seja por testes, seja por associação ou qualquer outra forma aqui não prevista. Nesse momento pode ocorrer dessas ideias se limitarem ao pensamento, sem uma verbalização ou uma verbalização parcial do aluno. Daí se apresenta um dos fatores mais importantes de uma tarefa de investigação, o registro escrito do aluno. Esse registro permite assim que o aluno apresente, e desenvolva, de

forma clara suas ideias e buscar um consenso entre ele e seus colegas, pois tendo a conjectura escrita ela está pronta para ser verificada.

Após chegarem em suas conclusões, novamente é importante que o professor estimule o registro escrito dos resultados, pois isso permite que o professor depois analise e identifique os resultados para dar continuidade posteriormente, mas também é benéfico para os alunos que aprendem a se comunicar matematicamente, expressar suas ideias e clarificar seus pensamentos, por último se tratando de grupos o registro é o momento de tentar chegar em um consenso e um entendimento comum.

Dito isso, durante todos esses processos, quais sejam, explorar, formular questões, formular conjecturas, testá-las, reformular e justificá-las, é importante que o professor fique atento aos processos para permitir que os alunos estejam desenvolvendo e evoluindo na tarefa.

Na terceira e última etapa da tarefa investigativa, se apresenta a discussão de resultados. Nesse momento os alunos relatam aos colegas os resultados encontrados, com a moderação do professor. Os alunos têm um fechamento para a atividade, mas também abrindo margem para novas indagações, permitindo uma compreensão sobre a investigação e seus processos e também trabalhando a habilidade de se comunicar matematicamente.

Então essa etapa final funciona também como um momento de compartilhamento dos conhecimentos tanto de como foi feita a investigação como dos resultados obtidos. A partir desse compartilhamento essa etapa abre margem para o debate dos alunos que é benéfico tanto para a busca por justificativas quanto para o desenvolvimento da comunicação usando a linguagem matemática. Permitindo que os alunos dividam experiências e confrontem ideias.

Por fim, é importante destacar que existem diferentes estruturas para configurar uma aula de discussão. No entanto, os alunos podem não estar acostumados com debates em aulas de Matemática, por se acostumarem com atividades de caráter fechado. Então é uma atenção especial que o professor deve ter para com os alunos e na escolha do modelo ideal para desenvolver esse fechamento para permitir que eles entendam a dinâmica e as potencialidades de uma atividade de caráter mais aberto.

3.1.3 Papel do Professor nas Tarefas Investigativas

Antes mesmo de iniciar a tarefa investigativa o papel do professor se mostra importante no processo de produção das questões segundo Vieira (2016) o professor precisa se atentar a seleção do problema, pois esse deve ter caráter, instigante, desafiador para com os alunos e permitir algum grau de extrapolação para permitir verdadeiramente uma atividade investigativa.

Na primeira etapa da atividade o professor deve se atentar a alguns fatores, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) é importante criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo, que estimule a criatividade dos alunos. Para isso é importante esclarecer como se dará a atividade e esclarecer bem o esperado do aluno.

Nas etapas seguintes da tarefa investigativa, Ponte, Brocado e Oliveira (2009) afirmam que é importante manter uma posição de estímulo, desafiando constantemente os alunos. Essa atitude é o que permite que a atividade continue produtiva, em situações de impasse ou quando interrompem o ciclo de trabalho.

Outra constante tarefa do professor nas atividades investigativas é o processo de avaliação do progresso dos alunos. Desde o início é importante que o professor observe como os alunos receberam a tarefa dada e observe se essa constitui um desafio adequado para eles. Também é importante se atentar a como os alunos estão tratando a atividade, como um simples exercício ou se eles se apropriaram da ideia investigativa da atividade.

Além disso, ao início das atividades, mesmo que trabalhando em grupos, é importante que o professor tente acompanhar o trabalho dos alunos de forma individual. Para isso, o professor precisa recolher informações sobre o trabalho realizado. É importante para isso que o professor procure compreender o pensamento dos alunos, tomando cuidado para fazer perguntas que não tenham como objetivo julgar como verdadeiro ou falso o trabalho do aluno. Muitas vezes um desafio do professor é identificar onde o aluno quer chegar com aquele raciocínio. Devido à dificuldade de comunicação matemática do aluno o professor pode não compreender facilmente o objetivo dele, assim o ideal é buscar boas perguntas e buscar a melhor forma de entender o aluno, evitando corrigir o aluno a todo momento.

Essa avaliação pode gerar como consequência algumas interferências do professor, como sinalizar aos alunos que continuem seguindo a ideia que tiveram ou fazer pontuações que questionem o caminho seguido por eles. Além disso, um olhar geral permite que o professor interprete como manter o andar da atividade, podendo conceder mais tempo, realizar uma discussão geral entre os alunos ou passar para a discussão final.

Devido ao caráter aberto da atividade, o aluno pode seguir caminhos diferentes do esperado, mas o professor precisa manter o processo investigativo em mente, se atentando à formulação e verificação de conjecturas e, posteriormente, à justificação.

Além disso, o pensamento matemático se mostra quando o professor precisa fazer conexões com outros conteúdos matemáticos ou externos à matemática que inicialmente não eram previstos na atividade e para isso o professor precisa estar aberto a estabelecer conexões com diversas áreas evidenciando o raciocínio matemático.

Por último e não menos importante, salientamos a importância do apoio ao trabalho do aluno, que se destaca em três quesitos: colocar questões, fornecer ou relembrar informações e promover a síntese e reflexão dos alunos.

Ao colocar questões, é importante destacar que o professor deve assumir uma postura interrogativa atuando como mediador no processo de ensino-aprendizagem. Assim, ao dar suporte à investigação, deve buscar perguntas que colaboram com o desenvolvimento do processo investigativo.

Por último, o professor deve incentivar constantemente os alunos a sintetizar os processos investigativos. Nesses momentos, o professor tem sempre a oportunidade de ressaltar que seu papel não é julgar como certo ou errado as atividades realizadas. Além disso, o professor deve estimular os alunos a refletir sobre suas conclusões e nesse momento a procura por provas matemáticas pode ser enfatizada para fortalecer sua importância.

4 TAREFAS PROPOSTAS

Neste capítulo sugerimos tarefas investigativas para desenvolver com os alunos. Essas atividades foram pensadas como uma sequência didática que trabalha diferentes tópicos da Lógica Matemática, buscando introduzir esses. Essas tarefas, no entanto podem ser trabalhadas de forma isolada, ao critério do professor, caso deseje trabalhar de forma independente. Para isso, é apenas recomendado que se atenha aos pré-requisitos necessários.

Cada uma das tarefas será apresentada destacando os seguintes informações:

- Objeto de conhecimento
- Objetivos
- Pré-requisitos
- Tempo (Quantidade de aulas de 50 minutos sugeridas)
- Material complementar (Materiais além dos usuais da sala de aula: lápis, caneta, borracha, quadro e pincel)
- Formato indicado (Estrutura da sala e dos alunos: individual, duplas ou grupos)

Além dessas informações, apresentaremos as atividades e um guia comentado de como o professor deve se organizar para cada atividade.

4.1 Introdução à Lógica

Tópico: História da Lógica

Objetivos:

- Apresentar contexto histórico do desenvolvimento da Lógica como estudo formal
- Apresentar a Lógica aristotélica em comparação à argumentação sofista
- Discutir importância da Lógica para tomar conclusões verdadeiras e identificar falsas

Pré-requisitos: Nenhum

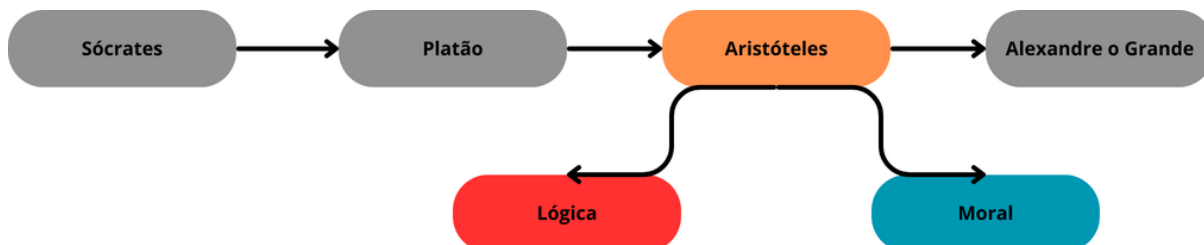
Tempo: 2 aulas

Material: Nenhum

Formato: Individual

Para iniciar a primeira aula, recomendamos esclarecer o caráter aberto das tarefas propostas. O engajamento dos alunos é essencial para o desenvolvimento. Assim iniciar o diálogo com os alunos esclarecendo que não existe uma busca pela avaliação do certo e do errado é importante para a participação dos alunos de forma ativa. Esse diálogo inicial também contribui para o processo de distanciamento de uma aula puramente expositiva.

Para introduzir a Lógica Matemática, recomendamos iniciar a aula falando sobre a origem do estudo da Lógica, mencionando os filósofos Sócrates, Platão e Aristóteles. Posteriormente, esclarecendo o estudo de Aristóteles sobre a Lógica, explicando aos alunos que o objetivo da lógica aristotélica era estudar a construção de um argumento. Sugerimos o fluxograma a seguir:

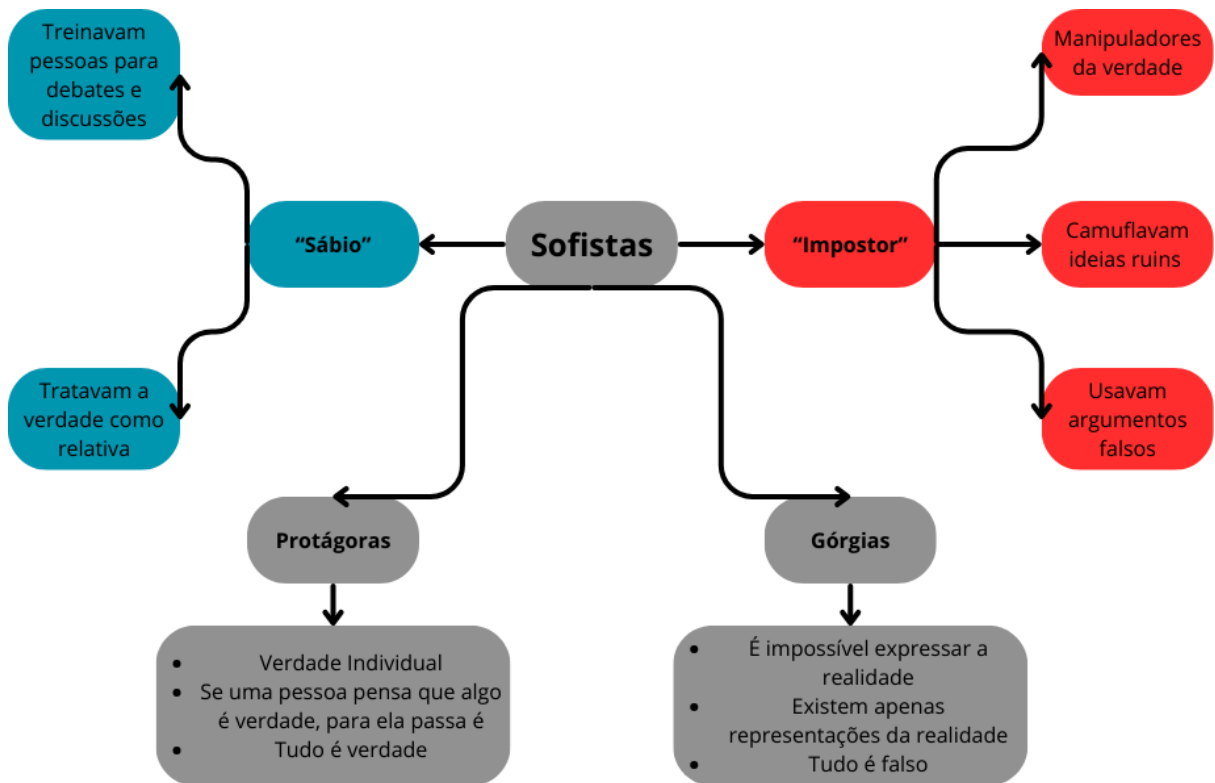


Para ilustrar essa ideia, levante o seguinte questionamento para a turma: “O que faz uma argumentação ser válida ou uma argumentação ser falaciosa?”. Para fomentar a discussão, atente aos seguintes questionamentos, que poderiam levar os alunos à reflexão:

- O que é um argumento?
- Qual o objetivo de um argumento?
- Um argumento é bom se ele é convincente?
- Um argumento é ruim se ele não é convincente?
- A validade de um argumento é relativa ao enunciador ou ao receptor?
- Um argumento ruim invalida sua conclusão?

Essas perguntas auxiliares são uma forma de fomentar as discussões e podem ser inseridas durante as falas dos alunos. Também é interessante que sejam escritas no quadro as ideias principais dos alunos no quadro, juntamente com as perguntas feitas.

Na segunda aula, recomendo apresentar o movimento sofista. Assim, para apresentar o movimento, primeiro destaque sua origem, suas principais ideias e dois representantes desse movimento. Esses foram descritos assim como está apresentado a seguir:



Depois dessa apresentação, destaque aos alunos que esse movimento era muito questionado por Platão e peça que eles tentem identificar as possíveis críticas. Assim é levantado, pode ser levantado aos alunos a seguinte questão: “Uma argumentação válida é uma argumentação vencedora?”, novamente se atentando a algumas perguntas em mente para fomentar o debate, além das questões anteriores:

- Qual o objetivo de um debate?
- O que é um argumento vencedor?
- O que é um argumento correto?
- Qual o melhor argumento entre os dois?
- A linguagem utilizada é importante para a construção de uma argumentação?
- Qual o papel da lógica em um debate?

Novamente, é interessante que seja registrado no quadro as discussões realizadas. Assim, os alunos irão se acostumando com registros do pensamento e de suas conclusões.

Essas aulas funcionam como uma introdução e motivação para o estudo da Lógica e são um ponto inicial para as tarefas.

4.2 Proposições e Proposições Categóricas

Tarefa A: Porque médicos têm a letra feia?

Tópico: Proposições Categóricas

Objetivos:

- Identificar possíveis ambiguidades no discurso e como evitá-las
- Investigar formas de construir proposições
- Identificar tipos de proposições lógicas

Pré-requisitos: Nenhum

Tempo: 1 ou 2 aulas

Material: Retroprojektor, caixas de som, internet ou celular com internet

Formato: Duplas

Para iniciar a tarefa, apresentamos o vídeo “Médico tem letra feia? | Drauzio Comenta #27” <https://youtu.be/00c2ddf5ocQ?si=ESES-Gj06QoXrDmP> para iniciar as discussões.

Antes de entregar a atividade que deve ser respondida, é recomendado que o professor questione aos alunos:

- Qual a temática do vídeo?
- Já se questionaram sobre a pergunta apresentada anteriormente?

Estes questionamentos ajudam a situar o ambiente e engajar os alunos. Posteriormente, deve ser entregue a atividade às duplas. Também esclarecendo aos alunos o processo de discussão das respostas que serão posteriormente debatidas com os colegas, dessa forma os alunos já saberão o que se espera ao final da atividade. A atividade em si é:

 Atividade 1: Porque médicos tem letra feia?.docx

Após os alunos finalizarem as atividades, inicia-se o processo de discussão dos resultados que podem ser conduzidos pelo professor, registrando as diferentes respostas dos alunos e confrontando suas particularidades.

Notas ao professor:

Durante o processo de aplicação, é importante que o professor se atenha ao duplo sentido da frase de Juju, mas tome cuidado para não expressar suas ideias para os alunos, tomando cuidado para não tomar uma das interpretações como correta, mas questionando se é a única interpretação.

Também é interessante que o professor peça para os alunos construam exemplos que esclareçam suas possíveis interpretações, construindo novas formas de se escrever a sentença.

Lembrar de estar preparado para o inesperado e, nesses casos, pensar ao responder possíveis questionamentos dos alunos para evitar uma condução dos alunos no processo de investigação.

Tarefa B: Formalização de Proposição Categórica

Tópico: Proposições Categóricas

Objetivos:

- Definir proposição
- Definir valor lógico
- Definir proposições categóricas
- Diferenciar e construir proposições universais e particulares
- Diferenciar e construir proposições afirmativas e negativas

Pré-requisitos: Tarefa A

Tempo: 1 aula

Material: Nenhum

Formato: Individual

O início da atividade se dá apresentando um conceito de “proposição” e “valor lógico”.

Após a Tarefa 1 é esperado que os alunos entendam o duplo sentido da frase “Médicos têm a letra feia” e consigam sugerir possíveis formas de diferenciar os dois sentidos, surgindo agora proposição que evite esse duplo sentido. Dessa forma, surge a importância de esclarecer o caráter particular ou universal de uma proposição. Dai, juntamente com os alunos, é possível definir os conceitos de proposição universal e particular e apresentar posteriormente a definição de negação.

É interessante que os alunos apresentem os próprios exemplos e discutam as palavras-chave de cada tipo de proposição categórica.

Após essas definições, a atividade a seguir pode ser uma forma de fortalecer os conhecimentos desenvolvidos durante a aula.

Atividade 2: Proposição Categórica

Tarefa C: Investigando o Valor Lógico

Tópico: Proposições Categóricas e valor lógico

Objetivos:

- Consolidar conceitos de afirmações e negações categóricas

- Consolidar e Diferenciar conceitos de proposições universais e particulares
- Investigar reconhecer o valor lógico de proposições
- Investigar métodos de justificação do valor lógico de proposições
- Investigar e identificar padrões de justificação entre diferentes proposições categóricas
- Introduzir métodos de demonstração matemática
- Identificar o conceito de contra exemplo, além de identificar quando ele é eficiente
- Investigar estratégias argumentativas para se provar veracidade ou falsidade de diferentes proposições

Pré-requisitos: Proposição, Valor Lógico e Proposições Categóricas

Tempo: 3 a 4 aulas

Material: Nenhum

Formato: Grupos de até 4

Para iniciar a tarefa, é importante entregar a atividade e explicar as questões, passando por todos os itens e esclarecendo o que é esperado de cada um deles. Também é importante enfatizar o caráter investigativo. A atividade está apresentada a seguir:

 Atividade 3: Investigando o Valor Lógico.docx

Ao fim da atividade, é importante que o professor conduza uma discussão dos resultados apresentados pelos alunos, colocando as justificativas a prova, permitindo valorizar os processos dos alunos, mas também colocar suas estratégias a prova.

Notas ao professor:

Dentro do processo de investigação da questão 2 é interessante permitir que os alunos busquem por informações em diferentes fontes como internet do celular caso tenham acesso, mas também é importante incentivar justificativas desenvolvidas pelos próprios alunos usando os conhecimentos já conhecidos.

Se atenha principalmente ao processo de justificação dos alunos, questionando provas insuficientes. A tendência dos alunos é de dar exemplos ou se satisfazerem com justificativas incompletas se tratando de afirmações universais e negações particulares.

Entre os métodos mais comuns apresentados pelos alunos estão:

- Exemplos
- Contraexemplos
- Exaustão de casos
- Definição

Mesmo em casos que os dois primeiros são suficientes, como em afirmações particulares e negações universais, é interessante questionar se a estratégia do aluno é “suficiente”.

Sobre a exaustão, é interessante destacar aos alunos o fator cansativo do método e questionar a eles se eles usariam esse método se tivessem mais casos a serem observados.

Quando se trata de definições, se atenha a questionar a origem da definição e a descrição dos padrões observados.

Outros métodos de demonstração podem aparecer e merecem um destaque e atenção do professor:

- Absurdo
- Indução
- Demonstração direta

Esses métodos talvez apareçam como ideias, mas sem o grau de estrutura necessária. Como deve ser conduzido o desenvolvimento dos grupos que sugerirem essas estratégias, cabe ao professor identificar o grau de abstração. Sugiro três possíveis abordagens nesse caso.

A primeira seria em casos de menor abstração dos alunos. Nesse caso, o professor poderia apresentar o nome desse tipo de demonstração para os alunos para destacar a eles que é um método importante e válido dentro da matemática.

A segunda abordagem seria para um grau intermediário de abstração. Nesta situação, o professor poderia dar um exemplo de demonstração desse tipo e sugerir aos alunos que tentem desenvolver algo semelhante.

A terceira abordagem seria caso os alunos tivessem um maior grau de abstração. Nesse caso, o professor pode questionar onde os alunos precisam chegar e incentivar o processo de estruturação do caminho.

Os três métodos não são excludentes e podem ser trabalhados em conjunto.

Devido ao caráter investigativo da tarefa, podem aparecer outros métodos aqui não previstos. Nesses casos, recomendo buscar entender ao máximo a ideia dos alunos para permitir realizar questionamentos ou apresentar sugestões que sejam construtivas no processo de construção do conhecimento. Também é importante valorizar o imprevisível, pois o aluno pode se sentir podado caso suas ideias sejam rapidamente negadas.

Por fim, no momento da apresentação de resultados, é importante destacar as diferentes justificativas, valorizando não apenas a estratégia, mas a clareza no processo de justificação, sempre questionando se os alunos se sentem convencidos. Também é de extrema

importância que os alunos ao final identifiquem padrões semelhantes no processo de justificação, notando quando é possível usar ou não de exemplos e contraexemplos.

4.3 Proposições Compostas

Tarefa D: Definições de Proposições

Tópico: Proposições Compostas e Simples, Conectivos, Negação, Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva

Objetivos:

- Definir Proposições Simples e Compostas
- Definir Conetivos
- Definir Negação como uma proposição composta

Pré-requisitos: Proposição, Valor Lógico

Tempo: 1 aula

Material: Nenhum

Formato: Qualquer

Essa aula é um momento de sintetizar conceitos formais da Lógica Matemática que foram previamente explorados pelos alunos. A aula pode ser iniciada apresentando os conceitos de Proposição Simples, Proposição Composta e Conectivos.

Após apresentar essas definições, utilize a definição de Negação para exemplificar uma primeira proposição composta que já tinha sido de alguma forma trabalhada com eles. Nesse momento, é importante discutir o conceito de Negação para a lógica, levantando algumas questões como:

- Qual a negação da proposição “Artur é alto.”?
- Se Artur não for alto, ele é obrigatoriamente baixo?

Essas questões permitem dar um norte à compreensão de negação não como um oposto, mas tudo que não é a afirmação. Posteriormente, pode ser feita a definição formal de negação como uma forma de proposição composta.

Tarefa E: Categorizando Morcegos

Tópico: Conjunção, Disjunção e Disjunção Exclusiva

Objetivos:

- Investigar a diferença dos conectivos “e”, “ou” e “ou...ou”
- Apresentar e identificar conectivos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva

- Identificar diferenças entre conjunção, disjunção e disjunção exclusiva
- Identificar e estruturar relações entre afirmações verdadeiras e falsas
- Construir proposições compostas com conectivos
- Definir Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva

Pré-requisitos: Proposição Simples, Proposição Composta e Valor Lógico

Tempo: 3 aulas

Material: Nenhum

Formato: Grupos de até 4

Essa tarefa busca a diferenciação da conjunção, disjunção e disjunção exclusiva. Para isso, propomos uma atividade que trabalha com a investigação a partir da comparação entre essas tarefas. Para aplicar essa atividade, é importante que os alunos busquem suas próprias diferenciações até que, na conclusão, seja realizada uma formalização dos conceitos. Assim, permita que os alunos tenham liberdade para realizar a atividade a seguir, questionando as situações apresentadas na atividade a seguir:

☰ Atividade 4: Categorizando Morcegos

Após a realização da atividade, o processo de discussão ajudará a unificar as diferenças apresentadas pelos alunos. Iniciando a apresentação dos resultados, é interessante apresentar os conceitos de Carnívoro, Herbívoro e Omnívoro encontrados pelos alunos durante a atividade. O professor pode pedir para os alunos escreverem os conceitos encontrados no quadro, ou ele mesmo escrever segundo os alunos.

Após dar palavra aos alunos e discutirem a pergunta, sugerimos 3 questões para serem apresentadas no quadro para os alunos debaterem:

- Um morcego que come frutas e insetos pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?
- Um morcego que come frutas ou insetos pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?
- Um morcego que ou come frutas ou come insetos pode se enquadrar em qual(is) dessa(s) categoria(s)?

Posteriormente, é importante questionar os alunos sobre a diferença das perguntas feitas para buscar a diferenciação entre as proposições. Assim, passar para a última etapa, que é o processo de formalizar a diferenciação e introduzir os conceitos de forma organizada, juntamente com os alunos.

É importante deixar um espaço para futuramente acrescentar as tabelas verdades de cada uma das proposições compostas.

Notas ao professor:

A base da atividade é a comparação de sentenças semelhantes com conectivos diferentes, recomendamos enfatizar as diferenças. Com destaque ao “ou” e “ou...ou” que, diferente do português, na linguagem lógica apresentam diferenciações importantes. Inclusive, é válido apontar que a inclusão da intercessão na disjunção é uma noção da linguagem lógica para evitar duplos sentidos.

Outro destaque é que, dentro do processo de investigação dos alunos, sugerimos ao professor levantar algumas perguntas pertinentes, uma delas que destaco aqui é:

- Se um onívoro pode ser carnívoro, já que ele come carne?

Tarefa F: Construindo a Tabela Verdade

Tópico: Tabela Verdade

Objetivos:

- Buscar generalizações dos valores lógicos em conceitos de Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva
- Desenvolver e construir a tabela verdade da Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva

Pré requisitos: Proposições Compostas e Simples, Conectivos, Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva

Tempo: 2 aulas

Material: Nenhum

Formato: Grupos de até 4

Para iniciar a tarefa, é importante entregar a atividade e destacar o que se espera dos alunos ao final desta.

 Atividade 5: Construindo a Tabela Verdade

Após a realização da atividade, deve ser feita a discussão dos resultados encontrados e conferir se os alunos foram capazes de generalizar os conceitos de Conjunção, Disjunção, Disjunção Exclusiva e seu valor lógico em cada situação na tabela verdade. Após essa discussão, é interessante retomar os conceitos realizados na **Tarefa E** para completar com a tabela verdade construída.

Notas ao professor:

Durante o preenchimento das tabelas verdades, é de extrema importância que os alunos discutam caso a caso e se questionem, baseando nos conceitos pré-definidos. Para

garantir isso, é importante que o professor relembre os alunos dos conceitos, de forma indireta, pedindo para eles buscarem exemplos nas tarefas anteriores.

Dentro do processo de investigação, os alunos podem organizar a tabela verdade em diferentes ordens. Esse fator pode ser destacado no momento de discussão, discutindo se a ordem de organização da informação interfere no resultado. Assim, também cabe ao professor decidir se, ao completar a tabela verdade, dentro das definições, se a ordem será a apresentada aqui ou outra sugerida pelos alunos.

Tarefa G: Investigando relações de causa e consequência

Tópico: Condicional e Bicondicional

Objetivos:

- Investigar relações condicionais e bicondicionais.
- Identificar, diferenciar e construir proposições compostas por uma condicional ou por uma bicondicional.
- Construir e generalizar as tabelas verdade das proposições condicionais e bicondicionais

Pré-requisitos: Proposições Compostas e Simples, Conectivos, Tabela Verdade

Tempo: 3 aulas

Material: Nenhum

Formato: Grupos de até 4

Essa tarefa é composta por uma atividade dividida em três partes, em todas elas é de extrema importância que o professor esclareça o contexto para os alunos explorarem a situação avaliando os diferentes fatores.

A primeira parte destaca duas regras tomadas como verdadeiras e convida os alunos a investigarem diferentes conclusões que podem ser tomadas a partir das condições pré-determinadas. Essa parte está apresentada a seguir:

Atividade 6: Condicional e Bicondicional (parte 1)

Na segunda parte, as proposições apresentadas, não são mais tomadas como obrigatoriamente verdadeiras. Então, é importante esclarecer essa diferenciação em relação à primeira parte da atividade. Nesse momento, os alunos devem avaliar o valor lógico das proposições a partir de outras. Em seguida, eles devem organizar as informações encontradas na tabela verdade. Essa parte está apresentada a seguir:

Atividade 6: Condicional e Bicondicional (parte 2)

Após a segunda atividade, vale a pena ter uma discussão sobre as conclusões dos alunos, permitindo que eles compartilhem seus resultados com outros colegas e confrontem suas ideias a partir de um debate inicial. Esse momento ainda não tem como finalidade sintetizar e formalizar os conceitos, mas carrega importância para nivelar o avanço dos alunos.

A terceira parte é um momento dos alunos buscarem a generalização das ideias desenvolvidas a partir de outro exemplo e construindo posteriormente a tabela verdade. Essa parte está apresentada a seguir:

☰ Atividade 6: Condicional e Bicondicional (parte 3)

Após essa parte, espera-se que os alunos já sejam capazes de diferenciar as proposições e entender suas peculiaridades. Então, é esperado que a discussão seja mais sucinta, já podendo partir para definição.

Notas ao professor:

Para fomentar a discussão das atividades, o professor pode se ater a algumas perguntas interessantes tanto na primeira quanto na segunda parte da atividade:

- “Rodrigo estaria desrespeitando alguma regra caso ele fizesse isso?”
- “Seria possível que Rodrigo usasse essa roupa sem desrespeitar nenhuma regra?”
- “As regras de Rodrigo dizem respeito a situações em que ele está de bermuda ou short?”

4.4 Equivalências Lógicas

Tarefa H: Explorando a Contra Positiva

Tópico: Equivalência Lógica, Dupla Negação e Contra Positiva

Objetivos:

- Definir Equivalência Lógica
- Apresentar a Dupla Negação como uma Equivalência Lógica
- Reforçar conceitos de Negação, Condicional e Bicondicional
- Investigar relações de equivalência
- Demonstrar a Equivalência Lógica da Contra Positiva

Pré-requisitos: Proposição, Valor Lógico, Negação, Tabela Verdade, Condicional e Bicondicional

Tempo: 3 aulas

Material: Nenhum

Formato: Grupos de até 4

Para iniciar essa atividade, é interessante discutir com os alunos ideias de frases equivalentes, que dizem o mesmo em outras palavras. Posteriormente, pode passar para uma proposição e pensar em proposições equivalentes, questionando sobre o valor lógico. Posteriormente, recomendamos definir o conceito de Equivalência Lógica.

É pertinente questionar e destacar a diferença da equivalência e da bicondicional, destacando que, enquanto o valor lógico da bicondicional pode ser Falsidade, a equivalência é comprovadamente sempre Verdade.

Posteriormente, use a Dupla Negação, para apresentar e discutir um exemplo de equivalência lógica. Para isso, use exemplos e do caminho para sua demonstração, mesmo que aparentemente trivial.

Na aula seguinte, entregue aos alunos a primeira parte da atividade a seguir, apresentando o que é esperado deles na atividade e permitindo que eles explorem a tarefa. Quando finalizarem, entregue a segunda parte para eles explorarem de forma abstrata as equivalências.








☰ Atividade 7: Explorando a Contra Positiva (parte 1)

☰ Atividade 7: Explorando a Contra Positiva (parte 2)

Após a realização da atividade, na terceira aula, realize a discussão com os alunos comparando as conclusões de cada um. Nesse processo, se atente a analisar não apenas o caráter abstrato das conclusões da segunda parte, mas também como as frases escritas na primeira parte são equivalentes entre si. Para isso, é interessante explorar diferentes exemplos.

Seguindo as discussões, procure demonstrar a Contra Positiva como apresentado, É interessante também que os alunos sugiram exemplos diferentes do apresentado.

5 SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO COMENTADAS

-  Sugestão de Resolução Atividade 1: Porque médicos tem letra feia?.docx
-  Sugestão de Resolução Atividade 2: Proposição Categórica
-  Sugestão de Resolução Atividade 3: Investigando o Valor Lógico.docx
-  Sugestão de Resolução Atividade 4: Categorizando Morcegos
-  Sugestão de Resolução Atividade 5: Construindo a Tabela Verdade
-  Sugestão de Resolução Atividade 6: Condicional e Bicondicional
-  Sugestão de Resolução Atividade 7: Explorando a Contra Positiva

6 REFERÊNCIAS

- Associação Brasileira De Normas Técnicas. NBR 6028: informação e documentação – Resumo – Apresentação. Rio de Janeiro, 2003.
- BUENO, S. Minidicionário da língua portuguesa. Edição rev. e atual. São Paulo: Editora FTD S.A., 2000.
- DA CUNHA, M. O.; MACHADO, N. J. Lógica e linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
- ALENCAR FILHO, E. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: NBL Editora, 2017.
- FERREIRA, A. B. H. Novo Aurélio século XXI: o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.
- KERFERD, G. B. O movimento sofista. São Paulo: Edições Loyola, 2004.
- MEIER, C. Filosofia: por uma inteligência da complexidade: ensino médio, volume único. 1. ed. São Paulo: IBEP, 2017.
- PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: _____. Actas do ProfMat. Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003. p. 25-39.
- PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. Investigação Matemática na sala de Aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- VIEIRA, G. Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais. 2016. 170 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

7 LEITURAS E MATERIAIS COMPLEMENTARES

DA CUNHA, M. O.; MACHADO, N. J. Lógica e linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

(Livro sobre Lógica voltado para o professor, nele são apresentados e discutidos vários conceitos de lógica com uma visão direcionada a educação. Essencial para explorar Lógica Matemática dentro do contexto escolar.)

DE ALENCAR FILHO, E. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: NBL Editora, 2017.

(Livro sobre Lógica que traz uma linguagem mais formal voltado para o ensino superior. Nesse livro, a formalização da lógica é muito bem estruturada e aprofunda bastante no tópico. Recomendo para um estudo rigoroso da Lógica Matemática como área da Matemática.)

MACHADO, N. J. Lógica? É lógico!. Nona edição. São Paulo: Editora Scipione, 2000.

(Livro sobre Lógica Matemática que apresenta tópicos da Lógica de forma leve e didática, trabalhando com imagens, histórias e diferentes formatos de atividade. Esse livro pode ser um apoio para o professor ou mesmo um material didático voltado para o aluno.)

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. Investigação Matemática na sala de Aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

(Livro sobre Investigação Matemática voltado para o professor, nele são apresentadas de forma aprofundada as características e o processo necessário para a desenvolver uma tarefa investigativa. O livro também conta com diversos exemplos, se dedicando a tratar da Investigação Matemática na Geometria, na Aritmética e na Estatística.)

SILVA, P. V. C. Lógica matemática e estratégias para a solução de problemas matemáticos. 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), 2016.

(Dissertação de mestrado do programa PROFMAT que apresenta uma proposta didática de ensino de Lógica Matemática utilizando a Resolução de Problemas. Nessa dissertação, também é apresentada uma extensa lista de exercícios sobre lógica que podem ser desenvolvidos com os alunos.)

GONÇALVES, U. F. Uma breve reflexão sobre a lógica proposicional com sugestões didáticas para melhoria da aprendizagem. Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, 2019.

(Dissertação de mestrado do programa PROFMAT que apresenta uma ótima revisão teórica sobre Lógica Proposicional. Essa revisão é feita com uma linguagem clara e bem organizada, sendo um bom guia teórico.)

ANEXO A – Questionário Prévio Parte 1

Caro aluno, este questionário tem como objetivo investigar seus conhecimentos prévios sobre lógica e conceitos associados a esse conteúdo. Para isso, peço que é de extrema importância que ele seja feito de forma séria. Ao responder às perguntas evite, sempre que possível, deixá-las em branco, lembrando que o objetivo não é fazer juízo de valores como certo ou errado, mas investigar as habilidades já adquiridas.

Nome(opcional): _____

Escola: _____ Idade: _____

Turma: _____ Data: _____

- 1) Em que escola você concluiu o Ensino Fundamental?

- 2) Você sabe o que é lógica? Se sim descreva com suas palavras o significado, da melhor forma que conseguir.

- 3) Você já estudou lógica na disciplina de Matemática antes do segundo ano do ensino médio? Se sim, quando?

- 4) Você acha importante estudar lógica nas aulas de Matemática? Se sim, tente explicar a importância, se não achar importante também argumente sobre.

ANEXO B – Questionário Prévio Parte 2

Caro aluno, este questionário tem como objetivo investigar seus conhecimentos prévios sobre lógica e conceitos associados a esse conteúdo. Ao responder às perguntas evite, sempre que possível, deixá-las em branco, lembrando que o objetivo não é fazer juízo de valores como certo ou errado, mas investigar as habilidades já adquiridas.

Nome (opcional): _____

Escola: _____ Idade: _____

Turma: _____ Data: _____

Use seus conhecimentos anteriores para responder todas as situações apresentadas a seguir. Você pode escrever da forma que lhe parecer mais adequada.

- 1) Para verificar o nível de satisfação de seus clientes, uma empresa fez uma pesquisa, através de entrevistas, em que pediu aos clientes que respondessem a uma pergunta atribuindo uma nota de 0 a 10 ao serviço prestado. Ao entrevistar 1.000 pessoas, todas responderam atribuindo nota acima de 7 .
 - a) Ao analisar os dados de uma pesquisa que foi escolhido ao acaso dentre um dos 1.000 entrevistados. Quais são as possíveis notas de satisfação ? Justifique.

- b) Se essa entrevista for feita para uma pessoa a mais, sendo a milionésima primeira entrevistada. Quais as possíveis notas de satisfação? Justifique.

- 2) Ao realizar testes, um remédio para vacas pareceu não surtir efeito nas 5 primeiras vacas testadas. Dessa forma, é possível concluir que esse remédio faz ou não faz efeito nas vacas? Explique com suas palavras.

3) Assuma (ou considere) que a afirmação “Rogério come carne” é verdadeira e a afirmação “Vitor come carne” é falsa e avalie como verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes afirmações :

- () Vitor não come carne
- () Rogério e Vitor comem carne
- () Rogério e Vitor não comem carne
- () Rogério ou Vitor comem carne
- () Rogério ou Vitor não comem carne
- () Rogério come carne e Vitor não come carne

ANEXO D –Atividade 2**Atividade 2**

Nome: _____

Complete o quadro construindo proposições categóricas a partir da frase “Frutas são azedas”:

Afirmação Universal	Afirmação Particular
Negação Universal	Negação Particular

ANEXO E –Atividade 3**Atividade 3**

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

- 1) Caracterize as proposições como universais ou particulares:
 - a. () “Todas as notas musicais começam com uma consoante.”
 - b. () “Existe uma letra que aparece no nome de todas as estações do ano.”
 - c. () “Todos os dias da semana tem a letra ‘A’.”
 - d. () “Nenhum dia da semana tem a letra ‘V’.”
 - e. () “Algum mês do ano não tem 30 dias”
 - f. () “Nenhum mês tem exatamente 29 dias.”
 - g. () “Algum mês do ano tem 32 dias.”
 - h. () “Todos os animais são vertebrados.”
 - i. () “Algum vertebrado é animal.”
 - j. () “Todos os números primos são ímpares.”
 - k. () “Existe um número ímpar e primo.”
 - l. () “Todos os múltiplos de 4 são pares.”
 - m. () “Existe número ímpar múltiplo de 4.”

- 2) Investigue se cada uma dessas proposições é verdadeira ou falsa. Justifique suas conclusões.

3) Complete o quadro a seguir com as proposições do item 1.

A) Proposição Universal e Verdadeira	B) Proposição Universal e Falsa
C) Proposição Particular e Verdadeira	D) Proposição Particular é Falsa

ANEXO F –Atividade 4

Atividade 4 (parte 1)

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Morcego

Morcegos são mamíferos, sendo os únicos representantes da Ordem Chiroptera e os únicos mamíferos com capacidade de voo verdadeiro. Podem viver solitários ou em grupos.

Os morcegos são mamíferos da Ordem Chiroptera, sendo seus únicos representantes, e estão distribuídos em duas Subordens, Megachiroptera e Microchiroptera, sendo que, no Brasil, não há representantes da primeira Subordem. No nosso país, a Ordem Chiroptera é a segunda em maior número de espécies entre os mamíferos, apresentando 164 espécies distribuídas em 56 gêneros.

Os morcegos são os únicos mamíferos que apresentam a capacidade de voar. Esses animais de hábitos noturnos possuem audição bastante aguçada e utilizam ecolocalização para a captura de presas. Os morcegos podem apresentar diferentes hábitos alimentares, alimentando-se, por exemplo, de frutos, insetos, peixes e até mesmo sangue.

- **Alimentação do morcego**



Os morcegos apresentam hábitos alimentares bastante variados, podendo alimentar-se de frutos, sendo denominados frugívoros; pequenos vertebrados (como anfíbios e aves), carnívoros; insetos, insetívoros; peixes, piscívoros; flores, néctar e pólen, nectarívoros; sangue, hematófagos, entre outros hábitos.

Alguns morcegos podem também utilizar mais de um tipo de alimento para complementar sua dieta, sem falar nos onívoros, que apresentam uma dieta bem mais variada que os demais. A maioria é insetívora, e, embora os hematófagos causem medo, tendo sido criados, inclusive, diversos mitos a respeito deles, esses animais limitam-se a três espécies apenas.

fonte: <https://www.biologianet.com/biodiversidade/morcego.htm> Acesso em 03 nov. 2023. (adaptado)

Atividade 4 (parte 2)

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Morcego

Morcegos são mamíferos, sendo os únicos representantes da Ordem Chiroptera e os únicos mamíferos com capacidade de voo verdadeiro. Podem viver solitários ou em grupos.

Os morcegos são mamíferos da Ordem Chiroptera, sendo seus únicos representantes, e estão distribuídos em duas Subordens, Megachiroptera e Microchiroptera, sendo que, no Brasil, não há representantes da primeira Subordem. No nosso país, a Ordem Chiroptera é a segunda em maior número de espécies entre os mamíferos, apresentando 164 espécies distribuídas em 56 gêneros.

Os morcegos são os únicos mamíferos que apresentam a capacidade de voar. Esses animais de hábitos noturnos possuem audição bastante aguçada e utilizam ecolocalização para a captura de presas. Os morcegos podem apresentar diferentes hábitos alimentares, alimentando-se, por exemplo, de frutos, insetos, peixes e até mesmo sangue.

- **Alimentação do morcego**



Os morcegos apresentam hábitos alimentares bastante variados, podendo alimentar-se de frutos, sendo denominados frugívoros; pequenos vertebrados (como anfíbios e aves), carnívoros; insetos, insetívoros; peixes, piscívoros; flores, néctar e pólen, nectarívoros; sangue, hematófagos, entre outros hábitos.

Alguns morcegos podem também utilizar mais de um tipo de alimento para complementar sua dieta, sem falar nos onívoros, que apresentam uma dieta bem mais variada que os demais. A maioria é insetívora, e, embora os hematófagos causem medo, tendo sido criados, inclusive, diversos mitos a respeito deles, esses animais limitam-se a três espécies apenas.

fonte: <https://www.biologianet.com/biodiversidade/morcego.htm> Acesso em 03 nov. 2023. (adaptado)

- 4) Que diferenças você percebeu na escrita das proposições anteriores e que te levaram às conclusões apresentadas.

ANEXO G –Atividade 5

Atividade 5

Nome: _____

Nome: _____

Considere as duas proposições abaixo:

a = “Amanhã irá chover.”

b = “Amanhã irá fazer sol”

- 1) Quais são os possíveis valores lógicos das proposições p e q ? Registre todas as possibilidades na tabela a seguir.

a	b

- 2) Use os operadores lógicos de conjunção, disjunção e disjunção exclusiva para criar novas proposições.

- 3) Complete a tabela com os valores lógicos (verdadeiro ou falso) das proposições a seguir:

a	b	$a e b$	$a ou b$	$ou a ou b$

4) Complete a tabela abaixo considerando as seguintes proposições:

c = "O menino tem cabelo loiro."

d = "O menino tem olhos azuis."

c	d	$c e d$	$c ou d$	$ou c ou d$

5) Descreva as semelhanças ou diferenças das duas tabelas .

6) Complete a tabela a seguir sabendo que p e q são proposições:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$

ANEXO H –Atividade 6**Atividade 6 (parte 1)**

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Leiam o texto abaixo:

Buscando uma forma de se vestir melhor , Rodrigo vai obedecer a regras a e b , ditas por ele e escritas a seguir:

a : Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado.

b : Eu usarei meias se somente se eu usar calçado fechado.

Utilizando as informações desse texto, seus outros conhecimentos e outras fontes às quais você tiver acesso, responda as perguntas a seguir, lembrando que a e b são afirmações logicamente verdadeiras

1) Sabendo que Rodrigo usou uma calça comprida, o que podemos concluir a partir dessa informação, assumindo que as regras continuam verdadeiras?

2) Sabendo que Rodrigo usou um calçado fechado, o que podemos concluir a partir dessa informação, assumindo que as regras continuam verdadeiras ?

- 3) Considerando as regras de Rodrigo são mantidas , ou seja, continuam logicamente verdadeiras, é possível existir situações em que ele usaria um calçado fechado sem estar de calça comprida? Já no caso das meias, ele poderia utilizá-las sem estar de calçado fechado? Justifique suas respostas.
- 4) Considerando as regras de Rodrigo, quais seriam as possibilidades de calçado caso ele use bermuda, para que essas regras continuem verdadeiras? Justifique sua resposta.

Atividade 6 (parte 2)

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Leia o texto abaixo:

Agora considere que as afirmações a e b podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso. a : Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado. b : Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.

Utilizando as informações do texto, seus outros conhecimentos e outras fontes às quais você tiver acesso, responda as perguntas a seguir:

- 1) Considere apenas as afirmações a seguir como verdadeiras e busque avaliar se as afirmações, a e b de Rodrigo seriam verdades ou mentiras em cada um dos casos. Justifique suas respostas.
 - a) Rodrigo saiu de calça e chinelo.

- b) Rodrigo saiu de bermuda e tênis.

- c) Rodrigo saiu de bermuda e chinelo.

d) Rodrigo saiu de chinelo e sem meia.

e) Rodrigo saiu de chinelo e meia.

2) Complete as tabelas verdades a seguir a partir das investigações feitas anteriormente:

Usar uma calça comprida	Usar um calçado fechado	Se eu usar uma calça comprida, então eu usarei um calçado fechado
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Usar meias	Usar um calçado fechado	Eu usarei meias se somente se eu usar um calçado fechado.
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Atividade 6 (parte 3)

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Leia as seguintes proposições:

p : “Choverá amanhã”

q : “Sairei de guarda-chuva amanhã”

- 1) Construa duas proposições compostas utilizando as proposições p e q com os conectivos “se...então” e “se somente se”. Explique as possíveis diferenças dessas duas proposições compostas.

- 2) Complete a tabela verdade abaixo:

p	q	se p então q	p se somente se q
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

ANEXO I –Atividade 7**Atividade 7 (parte 1)**

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Leia as seguintes proposições:

 p : “Pedro passou de ano.” q : “Pedro ganhou um celular.”

- 1) Escreva as frases que representam as seguintes proposições, $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow p$. Essas proposições são logicamente equivalentes? Justifique sua resposta explicitando as diferenças caso exista.

- 2) Escreva as frases que representam as seguintes proposições, $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Essas proposições são logicamente equivalentes? Justifique sua resposta explicitando as diferenças caso exista.

3) Escreva as seguintes proposições compostas:

a) $\sim p$

b) $\sim q$

c) $p \Rightarrow q$

d) $q \Rightarrow p$

e) $\sim p \Rightarrow \sim q$

f) $\sim q \Rightarrow \sim p$

4) Dentre as proposições construídas nas letras “d”, “e” e “f”, alguma(s) dela(s) é equivalente à proposição “c”? Justifique sua resposta.

Atividade 7 (parte 2)

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

Nome: _____

1) Complete a tabela verdade abaixo:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

2) Qual das proposições acima são equivalentes?

ANEXO J - Termo de Consentimento e Assentimento

Termo de Consentimento e Assentimento

Prezados estudantes da 2ª série do Ensino Médio, pais ou responsáveis,

Esse termo pretende esclarecê-los sobre uma pesquisa de mestrado e os procedimentos adotados para sua realização. Essa pesquisa está sendo conduzida por mim, Prof. Frederico Teixeira Leite sob a orientação da Profa Dra Erica Marlúcia Leite Pagani, no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG).

Atualmente, várias estratégias e metodologias de ensino-aprendizagem vem sendo pesquisadas e desenvolvidas com o objetivo de favorecer o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos e desenvolver competências e habilidades como aquelas indicadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Nesse contexto, a Investigação Matemática é uma abordagem de ensino-aprendizagem que busca protagonismo do estudante no processo de construção do conhecimento, participando de forma ativa na observação, discussão e sintetização de conceitos da Matemática.

Assim, o estudante está sendo convidado a participar dessa pesquisa cujas atividades realizadas em sala de aula bem como as impressões do professor pesquisador serão transcritas e analisadas. Esses dados serão utilizados na dissertação e poderão ser publicados em eventos científicos ou revistas da área de Ensino e Educação Matemática. Salientamos que **NENHUM** dos estudantes participantes e nem a instituição serão **IDENTIFICADOS**.

Nesse sentido, solicitamos sua autorização para participação da pesquisa e pedimos, por gentileza, que preencham os dados a seguir, que confirmam o consentimento dos pais ou responsáveis e assentimento do estudante participante.

Cordialmente,

Prof. Frederico Teixeira Leite

1. Assim, considerando que fui informado(a) dos objetivos e procedimentos da pesquisa proposta declaro que:

() Li e concordo com o termo acima e confirmo participação.

() Li e não concordo com o termo acima, não participaremos.

2. Nome completo do estudante.

3. Nome completo e assinatura dos pais ou responsável
