CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RODRIGO RAFAEL GURGEL MARTINS

O ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE GEOMETRIA ANALÍTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DO PROBLEMA GERADOR AO PROBLEMA DE APROFUNDAMENTO

Belo Horizonte
2024

RODRIGO RAFAEL GURGEL MARTINS

O ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE GEOMETRIA ANALÍTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DO PROBLEMA GERADOR AO PROBLEMA DE APROFUNDAMENTO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para se obter o título de Mestre.

Orientador(a):
Érica Marlúcia Leite Pagani

Banca Examinadora:
Fernanda Aparecida Ferreira
Márcio Pironel
Valéria Guimarães Moreira

Belo Horizonte
2024

Martins, Rodrigo Rafael Gurgel
M386e O ensino-aprendizagem-avaliação de geometria analítica através da resolução de problemas: do problema gerador ao problema de aprofundamento / Rodrigo Rafael Gurgel Martins. – 2024.
221 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Érica Marlúcia Leite Pagani.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática (Ensino médio) – Teses. 2. Geometría analítica – Teses. 3. Resolução de problemas – Teses. 4. Semiótica – Teses. I. Pagani, Érica Marlúcia Leite. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 510.07

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

RODRIGO RAFAEL GURGEL MARTINS

O ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE GEOMETRIA ANALÍTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DO PROBLEMA GERADOR AO PROBLEMA DE APROFUNDAMENTO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para se obter o título de Mestre.

APROVADA: 19 de setembro de 2024

Rodrigo Rafael Gurgel Martins
Autor

Érica Marlúcia Leite Pagani
Orientadora

Belo Horizonte
2024

Dedico esta pesquisa aos meus familiares e amigos em especial aos meus filhos Davi e Miguel. Ao meu pai pelo amor incondicional e todo incentivo de uma vida inteira. À minha mãe na memória que não se apaga. Às mulheres especiais e incentivadoras que marcaram minha vida, registro meu carinho e gratidão à prof.(a) Érica, Amanda pelo amor e companheirismo, minhas irmãs amadas Vanessa e Milene e minhas amigas do coração Flávia Renata e Rebeca Lloyd.

AGRADECIMENTOS

Primeiro, agradeço aos meus pais pelo incentivo constante e a toda minha família, pelos momentos de luta e conquistas. Pai, você sempre apostou e acreditou em mim. Obrigado pelo amor e incentivo contínuos este título é de todos nós.

Aos meus dois filhos, Davi e Miguel, agradeço o apoio, o amor e as vibrações de sempre e em cada conquista. Continuem acreditando em seus sonhos. Agradeço a minha amada Amanda, pelo amor e incentivo costumeiros a cada aula, a cada prova e pelos momentos de conquistas que tivemos ao longo desta jornada.

Aos(Às) meus(minhas) amigos(as) que continuadamente me incentivaram a alçar novos voos, em especial: Flávia Renata, Rebeca Lloyd, Carlos, Pablo, Bruno e Viviane.

Aos meus colegas do PROFMAT e ao CEFET-MG, seguido do Colegiado e, em especial, ao nosso querido Pedro Falci pelo cuidado com todos nós e apoio.

Aos(Às) professores(as) do PROFMAT, pelo profissionalismo e todos os ensinamentos deste longo período. Em especial, à professora Fernanda Aparecida Ferreira, ao professor Pedro Henrique Pereira Daldegan e ao professor Luis Alberto da D'Afonsenca, obrigado por tudo, pelo apoio e incentivo. Esta conquista também dedico a vocês.

Aos(Às) meus (minhas) queridos(as) estudantes que contribuíram e fizeram parte desta pesquisa.

Aos(Às) colegas e direção das escolas por onde passei e que sempre apoiaram minha trajetória profissional.

Aos membros da banca avaliadora expresso minha gratidão a cada um de vocês e agradeço as contribuições no texto bem como para esta pesquisa até aqui desenvolvida.

Deixo um agradecimento especial à professora Erica Pagani por ter acreditado em mim, e porque, nos momentos de escuridão, acendia sempre uma nova luz de esperança. Você terá guardado aqui o meu respeito, a minha consideração, o meu carinho e a minha admiração. Como cresci com os seus ensinamentos e orientações. Faltam-me palavras para expressar toda gratidão. Que você continue sendo essa fonte de inspiração para os(as) educadores(as).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

O processo de ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica Plana, por vezes, não favorece o trânsito entre abordagens gráficas e algébricas. Como professores de Matemática da Educação Básica, percebemos, na nossa prática diária em sala de aula, tal ocorrência. Atualmente, esses conteúdos, por vezes, estão associados, de forma indireta, à Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), dialogando com suas competências e habilidades. Esta pesquisa apresenta-se no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e busca investigar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações. Para tanto, elaborou-se uma sequência de atividades com problemas geradores e de aprofundamento com o intuito de desenvolver o ensino-aprendizagem de conceitos de circunferência no contexto na Geometria Analítica. Aplicou-se essa sequência de atividades em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola privada. Esta pesquisa é de natureza qualitativa e pedagógica e traz dados construídos a partir dos registros escritos, dos diálogos e das vivências na sala de aula, resultados das diferentes interações promovidas pelo professor pesquisador e pelos estudantes durante a resolução dos problemas, seguindo as etapas da metodologia de ensino-aprendizagem consolidada e sugerida por Onuchic et al. (2021). Constatou-se, nos dados, que a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação e a troca espontânea de um registro de representação para outro foram favorecidas na aplicação de alguns problemas e que a MEAAMaRP, principalmente durante a etapa da plenária, proporcionou ações de reflexões e trocas de saberes, permitiu aos estudantes colaborarem com seus pares na construção das resoluções, (re)construindo assim novos conhecimentos. Além disso, esse momento possibilitou que os estudantes de natureza mais introspectiva, durante as aulas em que se desenvolveu a pesquisa, pudessem se envolver de uma forma colaborativa e aberta com as propostas e os objetivos. Esta dissertação também apresenta um produto educacional composto pela sequência de atividades voltado para professores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Médio. Geometria Analítica. Resolução de Problemas. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

The teaching-learning process of Plane Analytical Geometry topics sometimes does not favor the transition between graphical and algebraic approaches. As Basic Education Mathematics teachers, we notice this occurrence in our daily classroom practice. Currently, these contents are sometimes indirectly associated with the National Common Curricular Base (BNCC, 2018), dialoguing with its skills and abilities. This research is presented within the scope of the Professional Master's Program in Mathematics in the National Network (PROFMAT) and seeks to investigate how the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics, through Problem Solving (MEAAMaRP), can contribute to the classroom work in teaching Plane Analytical Geometry topics, allowing the student to transition between different representations. To this end, a sequence of activities was developed with generating and deepening problems with the aim of developing the teaching-learning of concepts of circumference in the context of Analytical Geometry. This sequence of activities was applied to a 3rd grade high school class at a private school. This research is qualitative and pedagogical in nature and brings data constructed from written records, dialogues, and classroom experiences, resulting from the different interactions promoted by the researcher teacher and students during problem-solving, following the steps of the teaching-learning methodology consolidated and suggested by Onuchic et al. (2021). It was found, in the data, that the simultaneous mobilization of at least two representation registers and the spontaneous exchange of one representation register to another were favored in the application of some problems and that MEAAMaRP, especially during the plenary stage, provided actions of reflection and exchange of knowledge, allowing students to collaborate with their peers in the construction of resolutions, thus (re)constructing new knowledge. Furthermore, this moment allowed students with a more introspective nature to engage in a collaborative and open manner with the proposals and objectives during the classes in which the research was developed. This dissertation also presents an educational product composed of a sequence of activities aimed at teachers.

Keywords: Mathematics Education. High School. Analytical Geometry. Problem Solving. Register of Semiotic Representation.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

GPEAEM – Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática

GTERP – Grupo de trabalho e estudos de resolução

Irem – Instituto de Pesquisa em Educação Matemática

LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEAAMaRP – Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas

NTCM – *National Coucil of Teachers of Mathematics*

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RME-BH – Rede Municipal de Educação de Belo Horizonte

SIRPEM – I Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática

TRRS – Teoria dos registros de representação semiótica

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em um cenário de desafios, os processos de ensino-aprendizagem-avaliação vêm se transformando no que tange aos novos parâmetros e às novas metodologias de ensino presentes e necessárias em um mundo de pluralidades e de sujeitos múltiplos de saberes.

Ensinar Matemática e, ao mesmo tempo, não deixar que sua essência de rigor e demonstrações sejam perdidas tem se tornado um significativo desafio para quem ensina. Nesse sentido, o papel do professor vai além de ensinar e educar, pois vem se transformando na busca por ações efetivas e metodologias de ensino que permitem que o conhecimento seja construído nos processos de ensino-aprendizagem pelos estudantes e que, com ele, sejam capazes de reconhecer e transformar seu cotidiano.

Nesse cenário, como educador e professor de Matemática, há mais de 26 (vinte e seis) anos, lecionando nos anos finais do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, das redes pública e privada de ensino, apresento, no cotidiano da sala de aula, inquietudes acerca dos processos de ensino-aprendizagem-avaliação. Elas me fazem seguir na busca por metodologias de trabalho que possam favorecer esse movimento e que coloquem o estudante como protagonista do seu processo de formação.

Eu, Rodrigo Martins, sou licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2001), instituição na qual dei continuidade à minha formação, em três cursos de Especialização, a saber: a primeira nomeada de Especialização para professores de Matemática com ênfase em Cálculo (2005); a segunda voltada para o estudo em Metodologia de Educação Matemática (2018); e a terceira específica para a Educação de Jovens e Adultos (2018), modalidade de ensino em que atuo na Rede Municipal de Educação de Belo Horizonte (RME- BH).

Durante minha formação e carreira, deparei-me com experiências exitosas na área de ensino, porém o sentimento de que necessitava de algo que pudesse contribuir, de forma mais robusta no “chão da sala de aula”, era cada vez mais intenso e mostrava que algo ainda me faltava.

Ao ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), pude complementar e ampliar minha formação como professor e, ao mesmo tempo, fui despertado para a linha de pesquisa voltada para o ensino de Matemática atrelado à Resolução de Problemas. O interesse por novas metodologias de ensino-aprendizagem, que pudessem agregar à minha prática diária e também contribuir com as aprendizagens dos estudantes, amenizando as dificuldades presentes no processo de ensino da Geometria Analítica, colocou-me na busca por mecanismos que favorecem e contribuem com as aprendizagens dos estudantes devido às consideráveis lacunas e dificuldades em relação ao registro e às conexões entre a álgebra e a geometria. Fato observado principalmente em relação aos estudantes da 3ª série do Ensino Médio, sobretudo, quando se viam diante do estudo da Geometria Analítica.

Nesse contexto, iniciamos nossa pesquisa. Nesta dissertação, usaremos o pronome "nós", por ser um trabalho conjunto, desenvolvido com minha orientadora de mestrado, Dra. Erica Marlúcia Leite Pagani. A terceira pessoa do singular, obviamente na discussão, no âmbito da aplicação da análise de dados, buscando trazer análises interpretativas no campo do ensino de Matemática, tomando como base o levantamento de pesquisas que trouxeram, na sua estrutura, apontamentos significativos associados aos Registros de Representação Semiótica presentes no ensino de Geometria Analítica, com a aplicação direta ou indireta da Metodologia de Resolução de Problemas.

Os dados do repositório de dissertações do PROFMAT foram tomados como referências, bem como pesquisadas as evidências ou não do uso da Metodologia de Resolução de Problemas e de sua aplicação no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, sobretudo, com um olhar do ensino da Matemática sobre os vieses "ensinar para", "ensinar sobre" ou "ensinar através da resolução de problemas", tendo como objeto do conhecimento de pesquisa a Geometria Analítica Plana. Outro refinamento investigativo ocorreu na busca da utilização do referencial teórico dos Registros de Representação Semióticas, referencial este presente nas referidas investigações e, sobretudo, na verificação sobre se tal referencial serviu ou não de embasamento para a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas.

Criou-se um corpus após a construção de um fichamento que levou em conta as formas de abordagem da Metodologia de Resolução de Problemas e do referencial teórico dos Registros de Representação Semiótica. Foram mapeadas dissertações do PROFMAT que, nos últimos 10 anos, apontaram, nos títulos, nos resumos e no próprio texto dissertativo, esses dois objetos de estudos e suas relações de convergência.

Este primeiro trabalho gerou um artigo que foi apresentado no I Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática (SIRPEM) sob o título: "Um mapeamento das produções do PROFMAT que abordam a Resolução de Problemas e Registros de Representações Semióticas: em busca de um diálogo" (Martins; Pagani, Ferreira, 2021). Esse momento serviu como um ponto de partida para esta pesquisa de mestrado na qual também buscamos desenvolver um produto educacional que possa orientar professores de Matemática e educadores interessados na temática aqui tratada. Este produto está relacionado com a nossa questão de pesquisa que é: "**Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações"?**

Dessa forma, nós nos propusemos a construir e a desenvolver, em sala de aula, uma sequência de atividades à luz da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas fundamentada em Onuchic e Allevato (2021) que, ao longo desta dissertação, será abreviada pela sigla: MEAAMaRP. Para, em seguida, analisarmos os dados coletados do questionário inicial de sondagens e de *feedback* e também dos protocolos referentes a sequências de atividades entregues pelos estudantes ao longo das etapas de desenvolvimento da MEAAMaRP e que trouxessem informações contribuitivas para o ensino-aprendizagem-avaliação de conceitos da Geometria Analítica, à luz da Resolução de Problemas e dos Registros de Representação Semiótica a fim de respondermos à nossa questão de pesquisa.

Tal sequência também foi pensada no sentido de que a pesquisa pudesse contribuir para o trabalho em sala de aula, que fosse feito com tópicos de Geometria Analítica Plana, particularmente retas e circunferências. Assim, nossa pesquisa tem como estratégias:

- Estudar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio (Brasil, 2018).
- Fazer uma revisão teórica sobre a Resolução de Problemas, sua história e concepções.
- Elaborar problemas geradores e desenvolver uma sequência de atividades para o estudo de retas e circunferências no Ensino Médio à luz da MEAAMaRP.

E como objetivos específicos temos:

- Desenvolver o ensino-aprendizagem de conceitos de retas e circunferências, na 3ª série do Ensino Médio, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas.
- Identificar registros de representação (conversão e tratamento) nas atividades desenvolvidas pelos estudantes.

As sequências de atividades foram elaboradas tomando como referencial teórico a MEAAMaRP, com a construção de três problemas chamados de Problemas Geradores e de Problemas Propostos para 10ª Etapa, nomeados de Problemas de Aprofundamento, totalizando nove. Estes foram aplicados seguindo as 10 etapas da MEAAMaRP, com o desenvolvimento da metodologia aqui considerada, em uma turma de 3ª série do Ensino Médio de uma escola da rede privada de ensino, de forma presencial. Dezesseis participantes foram divididos em oito duplas de trabalho, durante treze encontros, que se deram entre a aplicação do questionário inicial de sondagem e a aplicação do questionário final, de *feedback*.

Assim, esta dissertação foi estruturada em sete capítulos. No capítulo da Introdução, aqui considerado o primeiro capítulo, trouxemos uma apresentação da pesquisa. No capítulo dois, apresentamos o referencial teórico principal que é a Resolução Problemas mais especificamente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com breve histórico dessa metodologia, bem como suas etapas de aplicação, objetivando mostrar a importância de cada uma delas e como se dão os seus processos.

No capítulo três, procuramos evidenciar o segundo referencial teórico, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apresentados por Raymond Duval (2009), com o objetivo de termos elementos e pistas que permitissem identificar e conhecer os registros dos estudantes durante a aplicação dos problemas da sequência de atividades, como também identificar e conhecer como se davam as interlocuções, os tratamentos e as conversões por eles executadas.

No capítulo quatro, apresentamos os tópicos de Geometria Analítica Plana, abordados na dissertação e na sequência de atividades aplicadas. No capítulo cinco, apresentamos a metodologia e o contexto de pesquisa, ratificando que se trata de uma pesquisa qualitativa, que se pauta como pedagógica. Conforme Onuchic (2021) explica, esse tipo de pesquisa busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e aprendizagens em sala de aula, pois está associada a observações de eventos do cotidiano da sala de aula, sobretudo, das necessidades e inquietudes do professor.

No capítulo seis, apresentamos a estrutura de cada problema aplicado, seguido da análise dos resultados, baseando-nos nos registros dos estudantes (protocolos) e também nos relatos deles, com a finalidade de responder à questão de pesquisa.

Na sequência, os comentários e as análises dos questionários de sondagem e de *feedback*, respondidos pelos estudantes. E, por fim, apresentamos o capítulo sete, com as Considerações Finais.

Torna-se importante destacar que, tomando os referenciais teóricos descritos aqui, como também a sequência de atividades, foi possível elaborar um produto educacional, descrito no capítulo seis. Este produto é destinado a professores e pesquisadores que almejam utilizá-lo para fins pedagógicos ou com a finalidade de estudo. Assim, poderão vivenciar as atividades nele contidas e, ao mesmo tempo, ter um referencial teórico com o qual possam se orientar na busca por respostas ou por caminhos a seguir no desenvolvimento do ensino-aprendizagem-avaliação do objeto de conhecimento matemático

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao longo da nossa trajetória profissional, atuando como professores de Matemática, percebemos a necessidade de buscar novas metodologias e estratégias de trabalho que possam favorecer o ensino-aprendizagem e que, sobretudo, permitam que os estudantes sejam capazes de realizar conexões entre diferentes objetos matemáticos do conhecimento e seus registros, de forma que construam conhecimentos, permitindo a ampliação de suas compreensões alinhadas às vivências individuais e coletivas.

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes, particularmente, na aprendizagem de Geometria Analítica, trouxeram-nos inquietudes acerca de como poderíamos criar cenários que pudessem favorecer as aprendizagens e, consequentemente, a apreensão dos significados de conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, levando em consideração os recursos e os conhecimentos prévios que os estudantes carregam.

Pensando em uma formação mais ampla dos estudantes, as aprendizagens desenvolvidas por pares podem ser consideradas um fator determinante no que tange às interações sociais quanto ao desenvolvimento cognitivo. Assim, podem ler, interpretar informações, bem como se envolverem em temas e em situações que promovam reflexões e que permitam que eles percebam as relações com a Matemática escolar estudada e o cotidiano, ou seja, tudo isso se trata de um movimento importante nos processos de ensino-aprendizagem-avaliação.

Colaborando com essa ideia, Cai e Lester (2012) e Onuchic e Allevato (2005) afirmam que uma das vantagens da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, é que ela permite uma avaliação contínua, no âmbito do movimento que se apresenta. Ao se utilizar o problema no processo de ensino-aprendizagem, tanto o professor quanto o estudante conseguem perceber o que ocorre com a aprendizagem durante as atividades desenvolvidas.

Observamos que, durante as atividades que desenvolvemos em sala de aula com uma turma da 3ª série do Ensino Médio, principalmente na etapa da plenária, os momentos de incentivo das duplas, quanto à busca de soluções dos problemas propostos, permitiram aos estudantes se expressarem, de modo a sanarem dúvidas com o professor e com os demais colegas. Esse movimento foi importante, uma vez que, em atividades corriqueiras do dia a dia, no contexto da sala de aula, como na feitura de exercícios e de avaliações, nem sempre é possível vivenciar tais momentos de troca.

Utilizando os problemas como meios de desenvolvimento de habilidades, ou seja, conhecimentos necessários para o desenvolvimento de competências, a Base Nacional

Comum Curricular (Brasil, 2018) entende que “competência é a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho”. Dessa forma, competência é mais que simplesmente acumular conhecimento, trata-se de aplicar o que se sabe e ser capaz de agir com base nesse conhecimento.

A abordagem de competência na BNCC (Brasil, 2018) enfatiza a aplicação prática do conhecimento, visando à sua utilização em situações reais que possibilitem ao estudante ser capaz de solucionar problemas e, assim, aprender Matemática através dessa ação. Espera-se, por esta investigação, que os sujeitos sejam capazes de produzir descobertas matemáticas, obtendo informações, processando-as no desenvolvimento do pensamento lógico, dedutível e, por sua vez, aplicável ao cotidiano.

Partindo do pressuposto de que a aprendizagem se constrói ao longo do processo de resolução e de reflexões, estas últimas, geradas durante as discussões ao redor dos problemas, apresentamos a questão de pesquisa, tendo esse cenário proposto para a investigação: como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, pode contribuir para o trabalho com tópicos de Geometria Analítica, em sala de aula, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações?

2.1 Um pouco de história

As investigações sobre a Resolução de Problemas foram apresentadas na década de 1940 por George Polya, matemático húngaro e professor, de 1914 a 1940 no ETH Zürich, na Suíça, e, de 1940 a 1953, na *Stanford University*, onde permaneceu como professor emérito até o fim de sua vida e carreira em 1985. Polya (1978), no seu livro “A Arte de Resolver Problemas”, afirma que

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas, se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (Polya,1978, p.5).

No cenário descrito por Polya (1978), podemos entender a ferramenta potente que temos em mãos quando nos propomos a estudar um problema, o que poderá abrir um campo de múltiplas possibilidades, quando fazemos o uso da resolução utilizando estratégias próprias que favoreçam as novas descobertas acerca daquilo que estamos estudando.

Polya (1978) denomina a heurística moderna como o estudo que procura compreender o processo solucionador de problemas, em particular, as operações mentais que se fazem úteis, típicas desse processo. Os trabalhos apresentados por ele relacionam-se à ação de resolver problemas, seguindo uma sequência de passos que poderiam ser utilizados para se resolver um problema em qualquer área do conhecimento. Nesse sentido, Polya (1978) sugere, em seu trabalho, quatro passos para se resolver um problema:

> **1º) Compreensão do problema: Qual é a incógnita?; Quais são os dados?; Qual é a condicionante?** Nota-se que, nesta primeira etapa, Polya (1978) se preocupava com uma aprendizagem que pudesse vir a ser alcançada, na qual também deveriam ser consideradas, sob vários pontos de vista, as partes que fossem julgadas importantes no problema. Dever-se-ia, do mesmo modo, verificar se o problema poderia ser representado por meio de uma Figura e se seria possível satisfazer a determinadas condições que pudessem relacionar a variável, os dados e a condicionante.
> **2º) Estabelecimento de um plano: Já o viu antes?; Já viu esse problema apresentado sob uma forma diferente?; Conhece um problema correlato ou que lhe poderia ser útil; é possível utilizá-lo e o seu resultado?** Destaca-se nessa etapa que, ao se estabelecer um plano para a resolução do problema, a partir da pergunta "Conhece algum problema correlato?", deve-se pensar em um possível problema que já tenha sido resolvido com a mesma incógnita ou informação, e que possa vir a ser utilizado como parâmetro. Ainda poderíamos verificar se seria possível fazer uma reformulação no enunciado, sendo que tal reformulação poderia nos levar a um problema auxiliar adequado, tendo o cuidado de não nos distanciarmos do problema original, ao fazermos essa escolha.
> **3º) Execução do plano: Verifique cada passo do seu plano. É possível apontar acertos e erros? É possível demonstrar que ele está correto?** A execução do plano é uma tarefa prática e necessária, na certeza de que cada passo executado está correto, ao serem verificados e testados os erros e acertos possíveis. Para isso, faz-se necessário examinarmos os detalhes presentes em cada passo executado, um após o outro, de forma paciente e cuidadosa. É importante, nessa etapa, fazermos uso de conhecimentos anteriores não

> perdendo a concentração no objetivo central, sendo necessário, em alguns momentos, mostrarmos que as etapas executadas estão corretas, não apenas pela percepção e, sim, por meio de argumentações que sejam capazes de demonstrar tais efeitos.
>
> **4º) Retrospecto: É possível verificar o resultado e o seu argumento?; Pode-se utilizar um caminho distinto?; É possível utilizar o resultado em outro problema?; É possível verificar o resultado?; É possível verificar o argumento?** Essas interrogativas são necessárias e devem ser respondidas para serem verificadas, no sentido de confirmarmos ou não se poderíamos utilizar o resultado obtido ou o método utilizado em algum outro problema e se haveria a possibilidade de verificarmos se o resultado estaria certo, se ele faz sentido, ou se seria necessário encontrarmos a solução utilizando outra estratégia.

É importante destacar que esse movimento, proposto por Polya (1978) para a resolução de um problema, já apresentava elementos ricos em natureza de reflexão e de construção de algum conhecimento, entre as interrogativas apresentadas nos quatro passos. A ideia não era apenas de se executarem os quatros passos, mas, sim, dizia respeito a utilizar cada um deles de forma reflexiva.

No final da década de 1970, a resolução de problemas, no contexto do ensino e da aprendizagem, bem como nas implicações curriculares, passou a ser fortemente discutida e investigada. Como afirma Pagani (2016), a Resolução de Problemas emergiu na educação Matemática, sendo caracterizada por considerar o estudante um ser ativo, no processo de ensino-aprendizagem, como também por primar pela construção do conhecimento, e não pela simples repetição de técnicas e algoritmos.

Neste contexto, a partir da década de 1980, principalmente, significativos esforços foram realizados para que fossem desenvolvidos materiais e currículos que pudessem favorecer o trabalho com Resolução de Problemas na Matemática. No Brasil, atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) é um documento norteador para a educação básica, o qual traz um conjunto de orientações para professores e equipes pedagógicas. A BNCC (Brasil, 2018) destaca que:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação [..] podem ser citados como forma privilegiadas da atividade matemática motivo pelo qual são ao mesmo tempo **<u>objeto</u>** e **<u>estratégia</u>** para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 264, grifos nossos).

Tratar a resolução de problemas e seus processos, ao mesmo tempo, como um objeto e como uma estratégia de aprendizagem, mostra como o histórico descrito anteriormente serviu como base de sustentação para se chegar a tal conclusão em relação à resolução de problemas. Mais adiante, a BNCC (Brasil, 2018) será alvo de discussão e de aprofundamentos, sendo relevante lembrar que se trata de um documento orientador que reforça a necessidade de se trabalhar com a resolução de problemas, como pode ser destacado na competência três:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 535).

As orientações, hoje presentes na BNCC (Brasil, 2018), como está, acima destacada, são importantes para auxiliar os professores. Porém, para aqueles interessados em tornar a Resolução de Problemas o foco em suas salas de aulas, é também preciso que sejam orientados quanto a saberem diferenciar as formas e as concepções de trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula, sendo ela o foco da Matemática escolar (Onuchic, 1999; Schroeder; Lester Jr., 1989).

No entanto, antes de tratarmos dessas concepções, iremos explorar as definições de um problema, segundo alguns autores.

2.2 O que é um problema?

Partindo do pressuposto de que o principal objeto de estudo da Matemática seja a resolução de problemas, faz-se necessário apresentar as definições daquilo que seja um problema para, em seguida, distinguir exercício, problema e situação-problema. Nem sempre a palavra “problema” é utilizada com o mesmo sentido por diferentes pessoas. Até mesmo professores e educadores matemáticos apresentam definições diferentes que podem convergir para um mesmo sentido.

Segundo o dicionário Oxford (2023, on-line), um problema é: “1.assunto controverso, que pode ser objeto de pesquisas científicas ou discussões acadêmicas. 2.questão social que traz transtornos e que exige grande esforço e determinação para ser solucionado”.

Segundo o Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (2024,on-line), a palavra problema “tem origem no latim problēma, ătis, com o mesmo sentido e adaptação do grego próblēma, atos, saliente, cabo, promontório, cúspide; o que se tem diante de si, obstáculo; proteção, armadura, abrigo; o que é proposto, tarefa, questão, assunto".

Para Dante (1985), um problema é qualquer circunstância que exige que o indivíduo pense para resolvê-la. Um problema matemático não exige apenas o pensar, mas, sim, conhecimentos e maneiras de raciocinar matematicamente para solucioná-lo.

Hiebert *et al*. (1997 *apud* Van de Walle, 2009, p. 57) definem um problema como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método correto específico de solução".

Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004) sinalizam que um problema é algo que não sabemos fazer, contudo, estamos interessados em resolver.

Nas definições de problema apresentadas, percebemos intersecções que estão no campo da construção de algo novo, que requerem um movimento, ou seja, quando estamos diante de um problema, faz-se necessário refletirmos diante daquilo que nos traz as interrogativas e traçarmos objetivos, sem nos basearmos em regras prontas, para, assim, criarmos um plano de ação que permita a nós explorarmos o novo, na busca do interesse maior que seja aquele de resolver o problema.

Ainda sobre problemas, exercícios ou situações problemas, é destacado por Pagani (2016) que

> entre as atividades usualmente desenvolvidas em sala de aula de Matemática, ou mesmo entre as encontradas em livros didáticos, identificamos aquelas, as quais podemos chamar de exercícios, que são usadas para praticar métodos, técnicas e algoritmos previamente conhecidos pelos alunos e cujo êxito da solução depende, muitas vezes, da memorização e repetição de fórmulas. Ressaltamos aqui que, com base em nossa vivência como estudantes e professores, a maioria dos "problemas" com os quais nos deparamos em sala de aula ou que propomos aos nossos alunos, em geral, apenas requerem que esses recordem a teoria já estudada (um teorema, uma definição) ou apliquem um algoritmo para resolvê-los (Pagani, 2016, p.58).

Pode-se destacar dessas citações que um problema tem a função de despertar, em quem busca solucioná-lo, a criatividade, como também torna essa ação um processo de descobertas nos meios de resolução propostos, no caso, pelos estudantes. Os erros e os acertos são etapas nas quais o engajamento inserido nas experimentações deverá ocorrer em uma Matemática construtiva. Dessa forma, os estudantes podem perceber que a Matemática pode ser desenvolvida utilizando a resolução de problemas, com a aplicabilidade de diferentes estratégias e caminhos.

Nota-se, a partir dessas definições, que um problema é algo que exige uma ação que está condicionada à forma como ele é apresentado e que nos propõe um desafio ou nos leva a conflitos cognitivos. Ele requer um processo de resolução que passa por etapas que, não necessariamente, estão prontas, acabadas e imediatas. O processo e a forma com os quais cada um interage com o problema variam, em função: dos conhecimentos prévios que cada um tem; da imagem que cada um faz sobre sua própria capacidade em produzir uma solução; e, do interesse e do significado que cada um atribui à experiência. Assim, o que é problema para um pode não ser para outro.

É importante destacar a diferença entre problema e exercício, uma vez que ambos têm sua importância no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, mas não podem ser confundidos com a ação e o esforço necessário para se resolver um problema, os quais perpassam por etapas, tais como: leitura; reflexão; elaboração de estratégias; enumeração de conceitos importantes para a resolução; validação da resposta e análise desta, bem como a construção de novos conhecimentos ou a incorporação de novos problemas a partir do problema inicial. Por outro lado, a ação de resolver um exercício, não raras vezes, está associada apenas ao uso de técnicas de repetição e de algoritmos pré-estabelecidos.

Ensinar os estudantes sobre resolução de problemas, isto é, ensiná-los acerca de estratégias de resolução comumente usadas, fases de resolução de problemas, como, por exemplo, o modelo de quatro etapas de resolução de problemas de Polya (1978) pode melhorar a compreensão desses estudantes, mas, não necessariamente, atingir o ponto central do envolvimento deles com a construção geral da resolução, etapa esta, talvez, mais importante de todo o processo.

De acordo com Mirei (1998, p. 192), situação-problema é

> uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. E essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema, se dá ao vencer obstáculos na realização da tarefa.

Por outro lado, pode-se entender que a resolução de situações problemas pretende desenvolver habilidades e atitudes próprias da resolução de problemas, como a capacidade de gerenciar informações e de selecionar estratégias e conhecimentos para a resolução de uma situação problemática.

As situações problema são selecionadas por sua relevância para a vida daqueles a que elas são propostas, e não pelos conteúdos matemáticos que elas podem envolver. A seleção, com base em conteúdos, além de não ser uma meta, não seria possível, já que, entre os problemas da vida real, seja muito difícil encontrar algum que envolva conceitos matemáticos de uma única parte da matemática e, não raras vezes, as situações-problema não têm resposta única nem exigem um tipo único de solução que, por sua vez, colaboram com o desenvolvimento da argumentação crítica. Assim, integrar os conhecimentos matemáticos entre si, para a solução de um problema, tornando-os significativos e lógicos para os estudantes, produz uma aprendizagem matemática mais consistente, na qual os conhecimentos matemáticos, em vez de ficarem fragmentados, vão se relacionando entre si. Não importa que, propondo situações-problema mais amplas, seja necessário ao professor adiantar tópicos ainda não vistos.

Como afirma Onuchic (199) vale destacar que exercícios, problemas e situações-problemas têm suas valências no processo de ensino-aprendizagem-avaliação e não podem ser descartados. É extremamente relevante que sejam utilizados de forma mediada, ou seja, que o professor perceba o momento em que se faz necessário utilizá-los e que avalie durante o processo o quanto a estratégia utilizada está dando resultados.

Assumimos, nesta pesquisa, que problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81) e conduzimos o trabalho em sala de aula sob a perspectiva dessa concepção, em que a resolução de problemas é considerada como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de se obterem novos conhecimentos, a partir daqueles anteriores ou ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas.

2.3 A Resolução de Problemas

Algumas das maneiras de distinguirmos as diferentes concepções sobre Resolução de Problemas, apresentadas por Hatfield (1978 *apud* Schroeder; Lester Jr., 1989, p. 32) e ratificadas por Schroeder e Lester Jr. (1989), continuam presentes no ambiente de ensino, sendo elas: (1) Ensinar **sobre** a Resolução de Problemas, (2) Ensinar (Matemática) **para** a resolução de problemas, (3) Ensinar (Matemática) **através** da Resolução de Problemas. Esta terceira concepção refere-se a ensinar Matemática utilizando o problema como ponto de partida e um meio através do qual vai se ensinar Matemática (Allevato; Onuchic, 2009).

Schroeder e Lester Jr. (1989) ressaltam que, apesar de, teoricamente, as concepções de trabalho, com o foco na Resolução de Problemas, estarem isoladas nas três categorias acima, na prática, elas se sobrepõem e acontecem em várias combinações e sequências.

Assim, desenvolvemos esta pesquisa tendo como foco principal o ensino de Matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas. Sendo que o uso da palavra composta (ensino-aprendizagem-avaliação) tem o intuito de expressar que essas ações devem ocorrer de forma simultânea e durante a construção do conhecimento dos estudantes conforme considerado pelas autoras Allevato e Onuchic (2009).

A Resolução de Problemas vem sendo discutida e ampliada por Lourdes de la Rosa Onuchic, desde o início dos anos 1990, por meio de pesquisas com um expressivo grupo de trabalho e estudos de resolução (GTERP), que vem realizando movimentos significativos desde então, no que podemos denominar "Movimento Pós-Polya", e que utiliza a resolução como uma metodologia de ensino, de aprendizagem e de avaliação.

Após um tempo, Norma Suely Gomes Allevato, pesquisadora que foi orientada e que desenvolve várias parcerias em publicações junto com a professora Lourdes Onuchic, ampliou as pesquisas nesta área, ao criar o Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM), vinculado à Universidade Cruzeiro do Sul que, além de outros estudos, também tem ampliado essa metodologia de ensino. Após todo esse movimento, para Allevato e Onuchic (2009), a metodologia do ensino através da resolução de problema, não discrimina outras formas de se conceber a Resolução de Problemas, mas amplia as possibilidades disto, como sendo uma maneira de desenvolver a resolução de problema, sendo que ensinar Matemática é mais amplo que ensinar para resolver problemas. Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), sigla essa utilizada por ONUCHIC, *et al*. (2021), "o problema é um ponto de partida e de orientação para a aprendizagem de novos conceitos e de novos conteúdos matemáticos" (Allevato; Onuchic, 2019, p.3).

Nessa perspectiva, o trabalho desenvolvido nesta pesquisa de Mestrado procurou se basear na metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2021), por acreditar que o professor seja um elemento importante no cenário da sala de aula, mediando o processo de ensino-aprendizagem, ao perceber que os estudantes são capazes de pensar, interpretar e chegar às próprias conclusões. O professor é o responsável por escolher ou por elaborar problemas que serão propostos aos estudantes, problemas estes que possam ser geradores e que provoquem o despertar e a curiosidade de aprender um conteúdo (objeto de conhecimento). Isto vai de encontro à proposta em que, primeiro, o professor explica o conteúdo e, em seguida, tal conteúdo passa a ser reproduzido pelos estudantes, em outras atividades, normalmente, exercícios ou os chamados problemas de aplicação.

Como defende Van de Walle (2001 *apud* Allevato; Onuchic, 2014, p.47), a resolução de problemas deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática. Nessa perspectiva, iniciaremos a nova seção para descrevermos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, uma vez que as atividades em sala de aula foram desenvolvidas nesta perspectiva.

2.4 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP)

O ambiente dinâmico e os diferentes contextos presentes na sala de aula nos oferecem potencialidades, tais como aquela de explorar a abordagem inicial de conteúdos associados a um determinado objeto de conhecimento matemático, de forma coletiva e construtiva, sendo o professor um mediador das etapas. Onuchic e Allevato (2019), por sua vez, afirmam:

> Orientações curriculares atuais e pesquisas consideram que a aprendizagem deve ocorrer por um processo ativo e construtivo em que os estudantes realizam as atividades de sala de aula à luz de suas crenças e assimilam as informações dentro de suas estruturas de conhecimento pré-existentes (Onuchic; Allevato, 2019, p.2).

Nessa perspectiva, tal Metodologia de Ensino torna-se uma aliada do professor na aplicação de recursos, em que ensinar Matemática, através da Resolução de Problemas, pode propiciar um ambiente de ensino democrático e, sobretudo, de valorização dos sujeitos estudantes, por acreditar que estes últimos devem ser os protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, participando ativamente dele.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas é uma abordagem de ensino que utiliza o problema, chamado de Problema Gerador, para desenvolver a construção de conhecimentos relativos a algum conceito matemático, de forma que o estudante possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado.

O Problema Gerador é proposto ao estudante, antes mesmo de os conteúdos sobre o objeto de conhecimento matemático em estudo terem sido apresentados formalmente pelo professor. Assim, como afirma Onuchic *et al*. (2021, p.50) a compreensão de novos conceitos vai ser construída quando se resolve um problema. Isso contribui com o desenvolvimento da autonomia do estudante e permite a ele aprender a partir de onde ele está, e não de onde o professor está naquele processo.

Após essa apresentação, os estudantes devem ter um tempo de leitura individual e outro, de leitura coletiva do problema. Esse momento é importante, pois, a partir dele, os estudantes terão o primeiro contato com o problema, o que permitirá a identificação deles com a linguagem, com as afirmações e com as interrogativas geradas no contexto, o que também favorecerá as reflexões e as ações a serem feitas, rumo à resolução do problema dado.

O professor, ao colocar os estudantes em grupos ou em duplas, nova leitura deve ser proposta, desta vez, dialogada, o que favorecerá a troca de experiências entre os pares, sendo que, nesse momento, o professor terá o papel de incentivar e de observar o movimento de resolução que possa estar surgindo. Durante a etapa de resolução, os estudantes, em grupos ou duplas, tentarão resolver o problema gerador. Essa etapa será fundamental, pois dará aos estudantes o momento de construção de conhecimentos sobre o que o professor planejou acerca do objeto de conhecimento matemático em estudo. Após, o professor agirá observando o trabalho, pois, nesse momento, os estudantes desenvolverão sua escrita, com a linguagem matemática presente no problema ou utilizando outras estratégias de resolução, tais como o uso de gráficos, desenhos, tabelas ou esquemas.

Passadas essas etapas, os estudantes devem ser convidados a apresentarem seus registros, em plenária ou no quadro da sala de aula. As soluções, que foram apresentadas por eles para o problema gerador, devem ser discutidas e avaliadas, de forma coletiva, em que um painel de soluções e registros pode ser apresentado. Após essa etapa de discussão e consensos ou não, o professor terá o papel de formalizar a resolução daquele problema registrando no quadro – ou com outros recursos – a estruturação do problema. Torna-se necessário dialogar com a turma até que haja algum consenso. Nessa fase, deverá padronizar os conceitos, os princípios e os procedimentos, destacando possibilidades de resolução e até mesmo as demonstrações que podem ser exploradas a partir do Problema Gerador.

Por fim, outros problemas deverão ser apresentados aos estudantes. O objetivo será aquele de o professor analisar se foram compreendidos os conceitos e as definições essenciais do conteúdo matemático proposto a eles.

Observamos, mais uma vez, que o ensino, na perspectiva apontada nesta investigação, está em consonância com as orientações da BNCC (Brasil, 2018), dado que este último documento sugere que a resolução de problemas, entre outros processos, seja uma forma privilegiada da atividade matemática, sendo, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem (Brasil, 2018).

Encaminharemos as atividades em sala de aula, segundo a metodologia trazida em pauta, utilizando 10 (dez) etapas apresentadas por Onuchic e Allevato (2021), as quais foram descritas a seguir:

1) Preparação do problema: o professor deve selecionar o problema (problema gerador) visando à construção de novo conceito, princípio ou procedimento.
2) Leitura individual: uma cópia do problema deve ser entregue para cada aluno e solicitando que seja feita a leitura.
3) Leitura em conjunto: pequenos grupos de alunos devem ser feitos e solicitada a leitura do problema.
4) Resolução do problema: de posse do problema e sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo. Esse processo de resolução do problema os conduzirá à construção do conhecimento.
5) Observar e incentivar: enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento deles e os estimula quanto ao trabalho colaborativo.
6) Registro das soluções na lousa: representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas soluções.
7) Plenária: para essa etapa, todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes soluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.
8) Busca do consenso: após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor procura, com a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9) Formalização do conteúdo: nesse momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.
10) Proposição de novos problemas: após a formalização do conteúdo, são propostos aos alunos novos problemas que envolvam conteúdos e conceitos abordados pelo problema gerador.

Os problemas, propostos nesta 10ª etapa,

> [...] possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se conFigura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante (Onuchic;Allevato, 2021, p. 50).

Ressaltamos que, na presente pesquisa, como será explicitado nos capítulos que se seguem, denominamos os problemas da 10ª etapa, na fase da coleta de dados, como problemas de aprofundamento. Esse termo foi utilizado não apenas pela natureza dos problemas ali propostos, mas, principalmente, com o objetivo de realizar e possibilitar ampliações dos conteúdos matemáticos abordados no problema gerador, diante das capacidades e habilidades a serem desenvolvidas e exploradas na proposição desses problemas, as quais colaboram com os objetivos desta etapa de aplicação da MEAAMaRP.

Ratificamos que a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, expressa segundo Onuchic e Allevato (2021), seja uma concepção na qual o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante o processo da construção do conhecimento pelo estudante, sendo o professor um mediador dessa ação.

Como destacado por Onuchic e Allevato (2021), a inserção da palavra Matemática na expressão acima tem o intuito de retirar o foco exclusivo da resolução de problemas e considerar que a palavra "através" enfatiza o fato de que "ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente" (Onuchic; Allevato, 2021, p. 40).

Na próxima seção, destacaremos estudos mais recentes acerca da Proposição de Problemas, fazendo um contraponto com as atividades desenvolvidas e aplicadas em sala de aula.

2.5 Proposição de Problemas

Conforme definido por Vieira, Possamai e Allevato (2023), a Proposição de Problemas se constitui como uma atividade na qual tanto estudantes quanto professores podem ser criadores de problemas matemáticos. As autoras afirmam que a expressão "proposição de problemas" é utilizada para denotar todo conjunto de ideias que constitui os processos envolvendo a criação de problemas, processos os quais se iniciam com a organização e com a construção das primeiras ideias matemáticas, como também com a estrutura de constituição do problema relacionada à formulação e à elaboração. Nesse contexto, a proposição segue para a apresentação do problema que foi criado para um resolvedor.

Ao ensinar através da proposição de problemas, tem-se uma prática que apresenta intersecções com a ação de ensinar através da resolução de problemas, conforme afirmam Onuchic e Allevato (2021). Nesse caso, o problema criado pode não se constituir como um problema para o próprio propositor, mas, sim, para o potencial resolvedor. Tomando como referência esse contexto, tal movimento exige, de quem está propondo um problema, a ação de desenvolvimento dos objetivos previstos, de forma mais ampla e que exigirá do proponente maior exploração do seu próprio cognitivo estando ele associado ao que se deseja atingir naquela proposição de problemas. No caso de problemas desenvolvidos pelos estudantes, a ação pode favorecer o desenvolvimento matemático deles em diferentes contextos.

Como afirma Cai e Leikine (2020 *apud* Vieira; Possam; Allevato, 2023, p.4), a proposição e a resolução de problemas são atividades matemáticas complementares e intimamente relacionadas, mas de naturezas diferentes. No contexto desta pesquisa, ao desenvolvermos as etapas da MEAAMaRP, ao final de cada ciclo de aplicação, propusemos problemas que nomeamos por Problemas de Aprofundamento[1]. Eles foram criados ou adaptados de outros problemas.

Um dos objetivos, ao propormos os Problemas de Aprofundamento, foi aquele de explorar e de verificar o desenvolvimento de outras habilidades relacionadas ao problema gerador, o qual foi utilizado no início da aplicação da MEAAMaRP, bem como aquele de oportunizar e de perceber tanto as correlações existentes na análise das resoluções apresentadas pelos estudantes como as conexões e inferências construídas por eles, após passarem pelas etapas das soluções apresentadas em plenária e da formalização, pelo professor, do conteúdo matemático em estudo e que foi abordado a partir do problema gerador.

É importante destacar que o detalhamento dos problemas de aprofundamento será feito no capítulo seis desta dissertação. Procuramos utilizar imagens como um possível elemento disparador e trabalhamos com situações abertas que permitissem aos estudantes explorarem a estrutura do problema, utilizando os conhecimentos adquiridos por eles, como também permitissem a eles aprofundarem em outros conhecimentos, aproveitando a experiência em relação aos momentos de aprendizagem anteriores nos quais houve a resolução de problemas.

---

[1] Problemas de Aprofundamento foi a forma como apresentamos os problemas, na 10ª etapa de aplicação da MEAAMaRP, para o grupo de estudantes que participou da presente pesquisa.

Entendemos que essa estrutura está em consonância com Vieira, Possamai e Allevato (2023), em que apresentam a forma como é constituída uma atividade de proposição de problemas e suas categorizações como livres[2], semiestruturadas[3] ou estruturadas[4] (Stoyanova; Ellertons, 1996 *apud* Vieira; Possamai; Allevato, 2023), em que, nesse tipo de atividade, temos os elementos disparadores, comandos que indicam o que é esperado do propositor.

No caso dos problemas geradores, desenvolvidos e aplicados nesta pesquisa, entendemos que, em alguns momentos, utilizamos a proposição de problemas, embora não tenhamos solicitado, em nenhuma etapa, que os estudantes pudessem propor problemas e explorar as atividades semiestruturadas ou estruturadas em que eles, a partir de situações abertas, seriam convidados a explorar um suporte (imagem, texto, charge, dentre outros) e poderiam criar problemas, utilizando suas habilidades e experiências com os conceitos matemáticos.

Por outro lado, durante a aplicação dos problemas de aprofundamento, procuramos desenvolver o protagonismo e a participação dos estudantes. Para isso, eles foram incentivados e colocados na centralidade do processo, principalmente durante as etapas em que pudessem compartilhar suas ideias com os demais colegas. Dessa forma, os estudantes foram motivados a compartilhar os movimentos de resolução propostas e encorajados a reconhecerem suas tentativas de acerto, sempre prezando pela autonomia. Apesar das frustrações nos momentos de erros, o reconhecimento de que este mesmo erro nos ajuda a identificar como poderíamos refazer o raciocínio e quais seriam as retomadas foram importantes ao longo do processo da resolução de um problema.

Outro aspecto que ressaltamos da pesquisa é que, ao aplicarmos os problemas de aprofundamento, abriu-se um campo para avaliarmos as dificuldades apresentadas pelos estudantes, uma vez que, ao longo do processo de aplicação das dez etapas da MEAAMaRP, foi possível fazer retomadas, rever conteúdos e perceber a necessidade da realização de recomposições que favorecessem as aprendizagens. Essa etapa está diretamente relacionada à avaliação, uma vez que, na MEAAMaRP, ela se faz presente o tempo todo e possibilita promover melhorias nas aprendizagens e nos resultados apresentados pelos estudantes, possibilitando a reorganização das práticas de ensino.

---

[2] Os estudantes criam seus próprios problemas, sem restrições a partir de uma situação ou de uma informação dada, sem que seja limitado o tipo a ser proposto.

[3] Aos estudantes é dada uma situação na qual eles são convidados a explorarem a estrutura dessa situação e a completá-la usando seus conhecimentos e habilidades de experiências matemáticas anteriores.

[4] Os discentes criam problemas por modificarem elementos de problemas já resolvidos que são fornecidos a eles.

O movimento da proposição de problemas está recomendado na Base Nacional Comum Curricular:

> [...] no Ensino Médio, a instrução é estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (Brasil, 2018, p.59).

Nas próximas seções deste capítulo, procuraremos fazer um paralelo entre a Resolução de Problemas e as abordagens da Geometria Analítica na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), em que serão destacados, deste documento, os recortes que dialogam com a presente pesquisa e com as aprendizagens de Matemática através da Resolução de Problemas.

2.6 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) é um documento normativo, voltado para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas. Ele define o conjunto orgânico e progressivo das aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio), a qual é regulamentada pelo Artigo 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Brasil, 1996,on-line):

> Os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.

Nessa perspectiva, a BNCC (Brasil, 2018) tem como papel principal nortear a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares de todo o Brasil, procurando diminuir as desigualdades no aprendizado, ao definir os conhecimentos, as habilidades e as competências essenciais para a educação básica. O documento propõe fortalecer a colaboração entre as três esferas de governo e superar a fragmentação de políticas educacionais, indicando as competências e as habilidades que devam ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo da escolaridade básica.

Assim, a BNCC (Brasil, 2018) define competência como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para que sejam resolvidas as demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Essas competências direcionam para uma educação integral, capaz de contemplar todas as dimensões da formação do estudante, com valores e atitudes que estimulem a transformação da sociedade, de forma mais justa e sustentável. O documento encontra-se estruturado da seguinte forma:

- Textos introdutórios (geral, por etapa e por área).
- Competências gerais que os alunos devam desenvolver ao longo de todas as etapas da educação básica.
- Competências específicas de cada área do conhecimento e dos componentes curriculares.
- Direitos de aprendizagem ou habilidades relativas a diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devam desenvolver em cada etapa da educação básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio.

No que tange à matemática e suas tecnologias, a BNCC (Brasil, 2018) propõe o seu desenvolvimento em cinco unidades temáticas, as quais orientariam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo dos ensinos fundamental e médio, com destaque para: números; álgebra; geometria; grandezas e medidas; probabilidade e estatística. Cada uma dessas unidades temáticas poderia ser explorada com ênfases diferentes – tanto quanto ao desenvolvimento de uma ou mais habilidades para o ensino de um mesmo objeto do conhecimento como quanto ao ano de escolarização no qual cada estudante se encontrasse em sua trajetória de formação.

Como nesta pesquisa, o foco principal é o de trabalhar com a Geometria Analítica plana, especificamente, a geometria tida como unidade temática a ser desenvolvida ao longo da formação básica dos estudantes, devemos considerar aquilo que a BNCC (Brasil, 2018) propõe para o Ensino Médio:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (Brasil, 2018, p. 527).

O estudo e o ensino da geometria, como citado, permitem fazer conexões entre as demais unidades temáticas, considerando que ela, a geometria, favorece o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e tem o papel fundamental de possibilitar a ampliação da visão do mundo físico ao nosso redor. Além disso, o ensino e aprendizagem da geometria, relacionados às conexões com a álgebra, tem considerável valor quando as situações-problemas, relacionadas aos elementos geométricos, não se resumem apenas à aplicação de fórmulas, mas, sim, ao propósito do seu desenvolvimento, em um contexto problematizado e que seja capaz de se conectar com a realidade do estudante. A BNCC (Brasil, 2018) reforça em seu texto, nas seções envolvendo o Ensino Fundamental, que

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de Figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (Brasil, 2018, p.271).

Nesse sentido, embora a construção de gráficos no plano cartesiano pode e deva ser abordada desde os anos anteriores, pela riqueza de possibilidades de desenvolvimento de várias habilidades, ela poderá ser aprofundada no estudo da Geometria Analítica. Torna-se importante compreender que a geometria ensinada nessa perspectiva pode ser considerada como um modelo de tratamento algébrico da geometria euclidiana, de seus postulados, definições e teoremas, apoiada em desenhos e representações gráficas dos lugares geométricos e não apenas em seu tratamento algébrico.

Na próxima seção, tratamos mais especificamente dessa geometria e de suas potencialidades de exploração, tomando a BNCC (Brasil, 2018) como documento orientador na construção dos processos de ensino-aprendizagem-avaliação e tendo como prática o trabalho do professor.

2.6.1 O ensino de Geometria Analítica e a Base Nacional Curricular

Em relação à forma de abordagem e às orientações, a BNCC (Brasil, 2018) não traz, de forma direta e formatada, como se deve ensinar a Geometria Analítica. Este objeto de conhecimento matemático e algumas habilidades que nele podem ser desenvolvidas têm identificação, de forma indireta ou direta, conforme podemos observar no Quadro 1, no qual são destacadas a competência específica, a unidade temática e as habilidades associadas a elas.

A BNCC (Brasil, 2018) lista uma série de códigos alfanuméricos que correspondem aos objetivos de aprendizagem e às habilidades específicas que o estudante deva desenvolver, ao ter contato com um determinado objeto do conhecimento, sendo que as habilidades da BNCC (Brasil, 2018) são os conhecimentos necessários para o pleno desenvolvimento das competências. Em outras palavras, ao desenvolver uma competência, estamos mobilizando várias habilidades que, juntas, proporcionam o domínio em determinado contexto. As habilidades na BNCC (Brasil, 2018) estão normalmente relacionadas a verbos, tais como: identificar; associar e interpretar.

É importante ressaltar que, no contexto das habilidades e das competências, a Geometria Analítica não é destacada de forma direta na BNCC (Brasil, 2018). Porém, em relação às habilidades (EM13MAT301), (EM13MAT401) e (EM13MAT402), citadas e descritas no Quadro 1, podem ser destacadas aquelas ações essenciais, importantes no processo de ensino-aprendizagem, a serem desenvolvidas ao se trabalhar a geometria na perspectiva alinhada à álgebra, por exemplo, as conversões das representações algébricas e geométricas, com o uso ou não de *softwares*, e as representações na plano cartesiano.

Do ponto de vista de um planejamento mais específico e que se fundamente na BNCC (Brasil, 2018) para sua construção, é importante destacar que, ao elaborar tal planejamento, o professor de matemática deve ter autonomia, ao apontar as habilidades que deseja desenvolver, mesmo sabendo que uma parte significativa delas não indicará o objeto do conhecimento matemático em estudo, de forma direta, sendo importante que, ao desenvolver uma metodologia de trabalho, várias habilidades sejam trabalhadas ao mesmo tempo.

Outro ponto importante é que, no Ensino Fundamental, outras habilidades podem ter sido desenvolvidas, e elas poderão suportar o aprofundamento que o professor desejar alcançar, embora fosse importante a BNCC (Brasil, 2018) apontar, de forma mais específica, pistas para o desenvolvimento mais aprofundado da Geometria Analítica, como, por exemplo, o estudo dos lugares geométricos, o estudo das equações algébricas e das representações das cônicas e de toda abordagem mais específica da geometria.

O Quadro 1 apresenta um recorte das competências específicas da área da matemática para o Ensino Médio, conforme a BNCC (Brasil, 2018).

Quadro 1- Competências específicas e habilidades de Matemática para o Ensino Médio

Competência Específica	Unidade Temática	Habilidade
3-Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018).	**Geometria e medidas**	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018).
4-Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018).	**Geometria e medidas**	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (Brasil, 2018).
	Geometria e medidas	**(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (Brasil, 2018).

Fonte: O autor (2024)

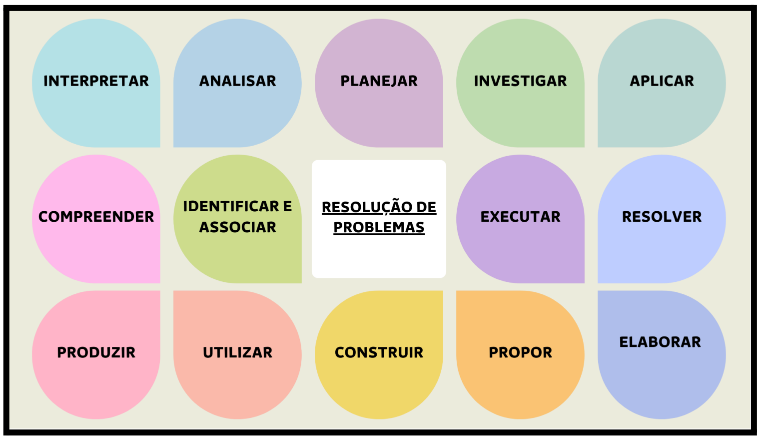
Na próxima seção, serão destacadas reflexões a respeito da Resolução de Problemas – enquanto metodologia aplicável nos processos de ensino presentes na sala de aula – e como a BNCC (Brasil, 2018) apresenta potencialidades associadas à resolução de problemas – enquanto prática de ensino com o objetivo de desenvolver habilidades associadas às aprendizagens matemáticas.

2.6.2 A Resolução de Problemas e a Base Nacional Comum Curricular

As atuais necessidades da sociedade, alinhadas aos conhecimentos matemáticos e aos conteúdos que se propõem a ensinar, cada vez mais, exigem um significado e um alinhamento com outras áreas do saber, o que permite realizar as conexões que dão significado ao que se deseja ensinar. Nessa perspectiva, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, a construção dos conhecimentos escolares[5] é favorecida quando se incentiva o raciocínio na perspectiva da resolução de problemas, o que favorece a ação efetiva que cada habilidade destaca.

A nuvem de palavras a seguir destaca as principais ações que se deseja realizar, entre as diferentes habilidades, integradas aos objetos do conhecimento, relacionadas à Matemática e presentes na BNCC (Brasil, 2018):

Figura 1- Ações e os objetos do conhecimento



Fonte: O autor (2024)

[5] Os conhecimentos escolares podem ser compreendidos como o conjunto de conhecimentos que a escola seleciona e transforma, no sentido de torná-los passíveis de serem ensinados, ao mesmo tempo em que servem de elementos para a formação do estudante.

As ações destacadas nas descrições de cada código de habilidade da BNCC (Brasil, 2018) sinalizam para a necessidade de os conteúdos não serem concebidos como acúmulo de informação, mas como instrumentos que desenvolvem continuamente a capacidade de aprender, bem como de compreender o mundo físico, social e cultural, como destacam as competências da matemática e suas tecnologias e que estão presentes na BNCC (Brasil, 2018) como uma orientação de alta relevância, tal como destacado a seguir:

> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada. No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação (Brasil, 2018, p. 535).

Fazendo um paralelo entre como a resolução de problemas ganhou robustez, até a BNCC (Brasil, 2018) surgir como documento orientador do currículo nas escolas brasileiras, o *National Council of Supervisors of Mathematics* (Conselho Nacional de Supervisores de Matemática) afirmava, nos anos de 1980, que aprender a resolver problemas era o principal objetivo do ensino da Matemática. Essa concepção também foi defendida pelo documento mais reconhecido sobre o tema, o *National Coucil of Teachers of Mathematics* (NTCM), de 1980, denominado "An Agenda for Action" (Huet; Bravo, 2006, p. 117). Sobre essa questão, Puig e Cerdan (1988) defendem que

> [...] a resolução de problemas tem a ver com a produção de conhecimento significados para aquele que aprende. O conhecimento que se valoriza pela sua significação não é o conhecimento transmitido, mas o conhecimento produzido por quem está em situação de aprender. Assim, se a resolução deve ser o lugar da produção do conhecimento, a tarefa de resolver problemas é uma tarefa privilegiada para a aprendizagem (Puig; Cerdan, 1988, p. 20).

É relevante destacar que essa compreensão, embora importante durante as décadas de 1980 e 1990, colocava o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva de valorizar a ação de aprender a resolver problemas. Porém o ensino através da resolução de problemas é aquele em que o conteúdo se desenvolve a partir da necessidade da resolução do problema. Para o professor, a resolução de um problema deveria ser um processo por meio do qual ele desejasse chegar ao ensino de determinado conteúdo matemático, sendo esse o objetivo da proposta. Por outro lado, entende-se que, para o estudante, o conteúdo matemático é o meio e não a finalidade da proposta, sendo que o aprendizado matemático é consequência do problema resolvido.

Nas orientações educacionais para o ensino-aprendizagem de Matemática, a Resolução de Problemas tem um papel importante, devido aos inúmeros benefícios que ela pode oferecer nesse processo independentemente do nível de ensino. Segundo os PCN+(Brasil, 2002),

> [...] a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios no processo de resolução, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao estudante a oportunidade de pensar em si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e perseverar na busca de solução (Brasil, 2002, p. 112).

Considerando as tendências atuais no âmbito da educação, as quais permitam aos estudantes saírem do lugar de espectadores e se tornarem agentes do processo de aprendizagem de matemática, novas metodologias de trabalhos são cada vez mais necessárias para o favorecimento de tais processos.

Conforme Onuchic *et al.* (2021), a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de problemas é uma perspectiva de ensino que utiliza o problema (chamado de Problema Gerador) para desenvolver a construção de conhecimentos relativos a algum conceito matemático, de forma que o estudante possa construir seu próprio aprendizado, com compreensão e significado. Conforme mencionado anteriormente, o problema gerador é proposto ao estudante, antes mesmo de os conteúdos sobre o objeto do conhecimento matemático em estudo terem sido apresentados formalmente pelo professor. Assim, a compreensão de novos conceitos vai ser construída quando se resolve um problema. Isso contribui com o desenvolvimento da autonomia do estudante e permite a ele aprender a partir de onde ele está, e não de onde o professor está naquele processo. Observamos, mais uma vez, que o ensino nessa perspectiva está em consonância com as orientações da BNCC (Brasil, 2018), uma vez que este documento sugere que a resolução de problemas, entre outros processos, trata de uma forma privilegiada da atividade matemática sendo, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem (Brasil, 2018).

O próximo capítulo apresenta a Teoria de Registro de Representação Semiótica e como ela será abordada como um referencial para as análises dos dados obtidos nesta pesquisa a fim de colaborar com a nossa questão de pesquisa.

3 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Raymond Duval era um filósofo, psicólogo de formação e professor que investigava as aprendizagens matemáticas, tomando como base os registros de Representação Semiótica. Ele é autor de várias pesquisas, com ampla divulgação em revistas científicas e publicações internacionais, dentre outras produções, nas quais ele trata do funcionamento cognitivo associado às aprendizagens de matemática em relação a um determinado objeto do conhecimento matemático e suas formas de representação. Entre 1970 e 1995, desenvolveu, no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem), de Estrasburgo, estudos em relação à psicologia cognitiva e esteve no Brasil apresentando sua teoria, que é também objeto de estudo de vários pesquisadores e que, ao longo dos últimos anos, tem sido utilizada como referência na área.

Investigar a presença dessa teoria e suas aferições em pesquisas de pós-graduação, de outros repositórios é algo que merece destaque, como citado no artigo de Ferreira, Santos e Curi (2013), o qual é intitulado “Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica”. Nele, as autoras apresentam um estudo sobre pesquisas brasileiras de mestrado e doutorado tendo utilizado, como busca, a abordagem da Teoria de Registros de Representação Semiótica. No período da pesquisa, oitenta trabalhos foram mapeados e analisados por elas, tomando como referencial o estado da arte. Nesse artigo, Ferreira, Santos e Curi (2013) destacam:

> Não entendemos que esta teoria dentro da Didática da Matemática seja a única que possa contribuir em metodologias adequadas para sala de aula, porém, a nosso ver, esta abordagem pode apontar direcionamentos para o trabalho de professores, quando se tratar de reconhecer as problemáticas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, principalmente em questões ligadas às dificuldades encontradas por alunos em relação a um objeto matemático, suas representações distintas e sua apreensão (Ferreira; Santos; Curi, 2013, p.3).

Essa teoria provocou interrogativas na presente pesquisa e nos levou a refletir sobre as suas convergências acerca das representações existentes no estudo de retas e circunferências, tomando como objeto de estudo a Geometria Analítica. Além disso, junto à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tal teoria se fez um referencial para esta pesquisa que, dentre outras questões, desejou apontar os direcionamentos aqui expostos e investigar, ao utilizar a MEAAMaRP, quais efeitos, sejam eles de avanços ou de retomadas, poderiam ser obtidos, na busca por potencializar as aprendizagens, utilizando a Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS) para contribuir com as respostas e inquietudes apresentadas nesta dissertação.

No contexto do processo de ensino-aprendizagem-avaliação, podemos nos perguntar: "Registro e representação são coisas distintas? Como destacar/exemplificar, em uma atividade matemática, os registros, as representações e as conversões? É possível concebê-las como disjuntas?"

Segundo Duval (2003), a aprendizagem de um determinado objeto matemático está estritamente ligada à ação e às formas de registros: "O sujeito só aprende um determinado conceito matemático quando consegue mobilizar de forma simultânea ao menos dois registros de representação, ou seja, trocar espontaneamente de um registro de representação para outro" (Duval, 2003, p. 14).

Nessa perspectiva, a Geometria Analítica, estudada na 3ª série do Ensino Médio, é rica na abordagem de representações e registros, uma vez que propõe uma interface entre a geometria e a álgebra. Como exemplo, há a representação gráfica e cartesiana da equação de uma circunferência nessa conversão, sendo que tal interface vai além desses registros, pois a própria equação da circunferência, no exemplo dado, pode ser dada na sua propriedade/atributo de lugar geométrico na linguagem materna, sendo outro registro muito menos trabalhado e convertido espontaneamente pelos estudantes.

Dessa forma, neste capítulo e em suas respectivas seções, teremos como objetivo descrever pontos da Teoria de Registros de Representação Semiótica, a qual trataremos, a partir daqui, pela abreviação TRRS. Também apontaremos quais desses registros serão utilizados na busca por respostas ou pistas para a questão de pesquisa.

3.1 Semiótica

Para Duval (2009), o tratamento (transformação de uma representação em outra permanecendo em um mesmo sistema) e as conversões (transformações de representações com a mudança de registro conservando o objeto) são dois tipos distintos de transformações, porém ambas são necessárias para analisar a atividade de resolução de problemas em Matemática.

Uma vez ocorridas as atividades cognitivas – de constituir uma representação de alguma coisa, de transformar as representações pelas regras próprias daquele sistema e ser possível converter as representações produzidas em representações de outro sistema, teremos um sistema semiótico. Um bom exemplo disso ocorre no combinado "linguagem natural, linguagem simbólica, gráficos, figuras e etc" que permite que tais atividades cognitivas ocorram. Nesse contexto, Henrique e Almouloud (2016) apresentam a seguinte definição, fundada na proposta de Duval (2009) para representação semiótica:

> **Definição 1:**Representação **semiótica** é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema e, de outro lado, pela referência do objeto representado.

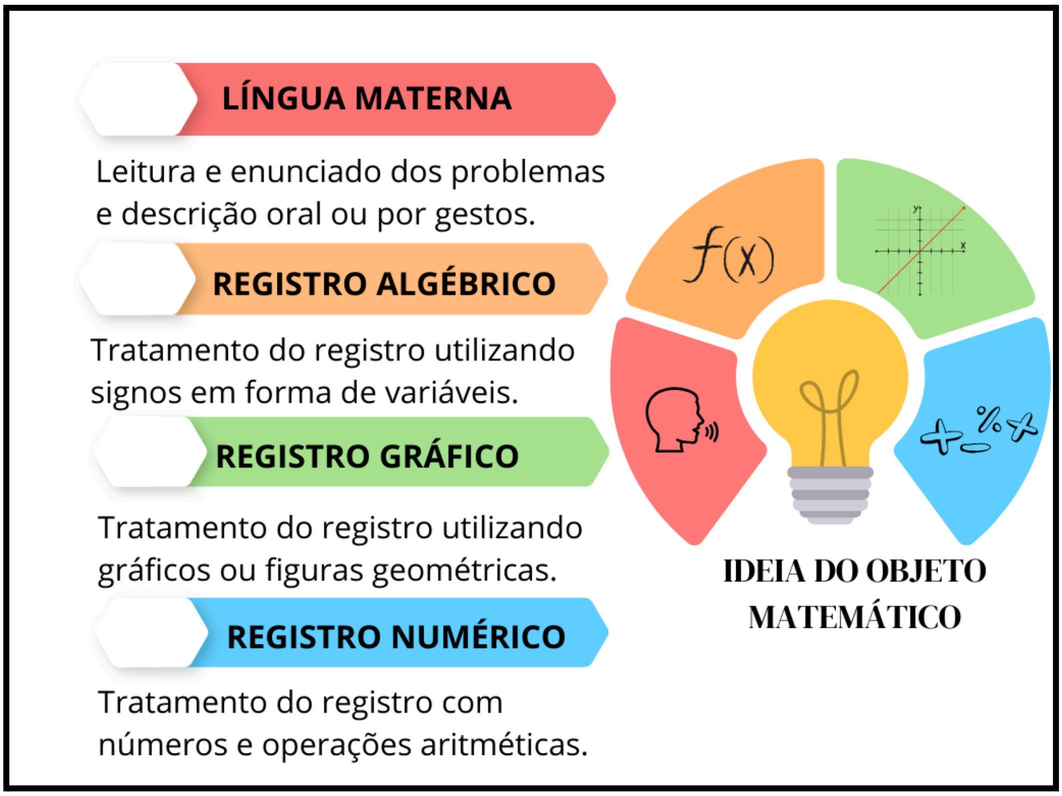
Como forma de ilustrar essa definição, tomemos como exemplo o estudo da circunferência. Na Geometria Analítica, ela é estudada como um lugar geométrico, assim, sua equação cartesiana é vista como uma forma de explorar o registro algébrico que, por sua vez, pode ser convertido em sua representação gráfica no plano cartesiano. Nessa passagem, podemos observar e citar que registrar seja assinalar por escrito, fazer o registro de alguma coisa; a representação seja a imagem, o símbolo, a reprodução de alguma coisa e, por fim, o converter seja a mudança de forma ou natureza, uma transformação.

Ao tomarmos um problema, podemos destacar que o seu enunciado pode ser um exemplo da língua materna, uma representação gráfica e um determinado objeto, e sua equação algébrica sejam as representações semióticas de sistemas diferentes e com diferentes signos (sinal mobilizado por alguém que permite identificar o registro de representação semiótica). A Figura 2 faz referência a essas formas possíveis de registro, ao se tomar como referência a ideia de um objeto, em que cada signo representa e faz referência à ideia que se tem dele.

O tratamento de uma representação pode ser mantido sem mudanças, ao longo daquele registro de representação, sofrendo apenas transformações, sendo que se trata de um sistema dotado de signos os quais permitem identificar uma representação de um objeto do saber, externando aquilo que seja pensado pelo sujeito.

Podemos exemplificar tal ação pensando na resolução de uma equação do 1º grau, em que podemos aplicar o princípio aditivo das igualdades, adicionando ou subtraindo a mesma quantidade nos dois lados da equação, ou isolar a incógnita (a variável desconhecida) em um dos membros da equação, tornando mais fácil encontrar seu valor. Neste exemplo, o tipo de registro é mantido e os tratamentos são as transformações de representações.

Figura 2- Tipos de registros de representação de um objeto Matemático



Fonte: O autor (2024)

No capítulo 6 desta dissertação, traremos mais exemplos desse "movimento", ao descrevermos a aplicação dos problemas gerador e de aprofundamento, que foram utilizados na coleta de dados à luz da MEAAMaRP e da TRRS.

3.2 Representações e Registros

Distinguir um objeto matemático da sua representação é essencial para as compreensões em Matemática. As representações estão associadas às diferentes formas de escrita de um número, ao uso de símbolos, às construções gráficas e aos esboços de Figuras que estão associadas aos objetos matemáticos, tais como as funções, os números, as geometrias de posição métrica e analítica, assim como os demais objetos que podem ser dados por representações diferentes.

Embora os estudos das representações associem-se a um delineamento mais profundo e importante acerca das teorias que envolvem as aprendizagens e o cognitivo individual dos sujeitos, a respeito das chamadas representações mentais, nesta dissertação de mestrado, iremos tratar das representações semióticas e das conversões, ou seja, as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais e que são necessárias para o desenvolvimento da atividade matemática associada à resolução de problemas nos processos de ensino-aprendizagem.

No entanto, destacamos aqui que, segundo Duval (2009), essas representações realizam outras funções, além daquelas consideradas mentais, e que o problema central da semiótica é naturalmente a diversidade dos sistemas de representação, não existindo, assim, a independência entre a chamada "noésis" (os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto) e a "semiósis" (produção ou apreensão de uma representação semiótica).

Nos processos de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, vislumbramos que a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos e as Figuras geométricas permitem, na concepção de Duval (2009), o cumprimento das chamadas atividades cognitivas, inerentes a toda representação e essenciais, nas quais a questão da relação entre semiósis e nóesis concerne somente aos sistemas que permitem essas três atividades de representação, como destacado na Figura 3.

Figura 3- Atividades Cognitivas segundo Duval (2009)

Fonte: O autor (2024)

Como professores de Matemática, as dificuldades dos estudantes, ao realizar as trocas de registros, de forma espontânea, como descrito na teoria de Duval (2009) são perceptíveis.

A prática *versus* resultados, para se alcançarem tais objetivos, tem se mostrado favorável quando da aplicação da metodologia de ensino que provoca a investigação para posterior consolidação. Freitas (1999), no trabalho intitulado "Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno", objetivou diagnosticar o sentido que os alunos do final do 2°grau, hoje denominado Ensino Médio, davam às soluções dos sistemas lineares parametrizados mediante questões em que estabeleciam a relação entre a solução de um dado sistema de, no máximo, três incógnitas e sua representação gráfica. O autor concluiu que utilizar a conversão de registros – passando da escrita simbólica (equações) para o gráfico, como também do registro gráfico para o algébrico – favorece a interpretação e, consequentemente, a compreensão dos resultados obtidos.

Outra experiência notória está presente no trabalho de Jordão (2011), intitulado por "Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio". Nele, afirma o autor:

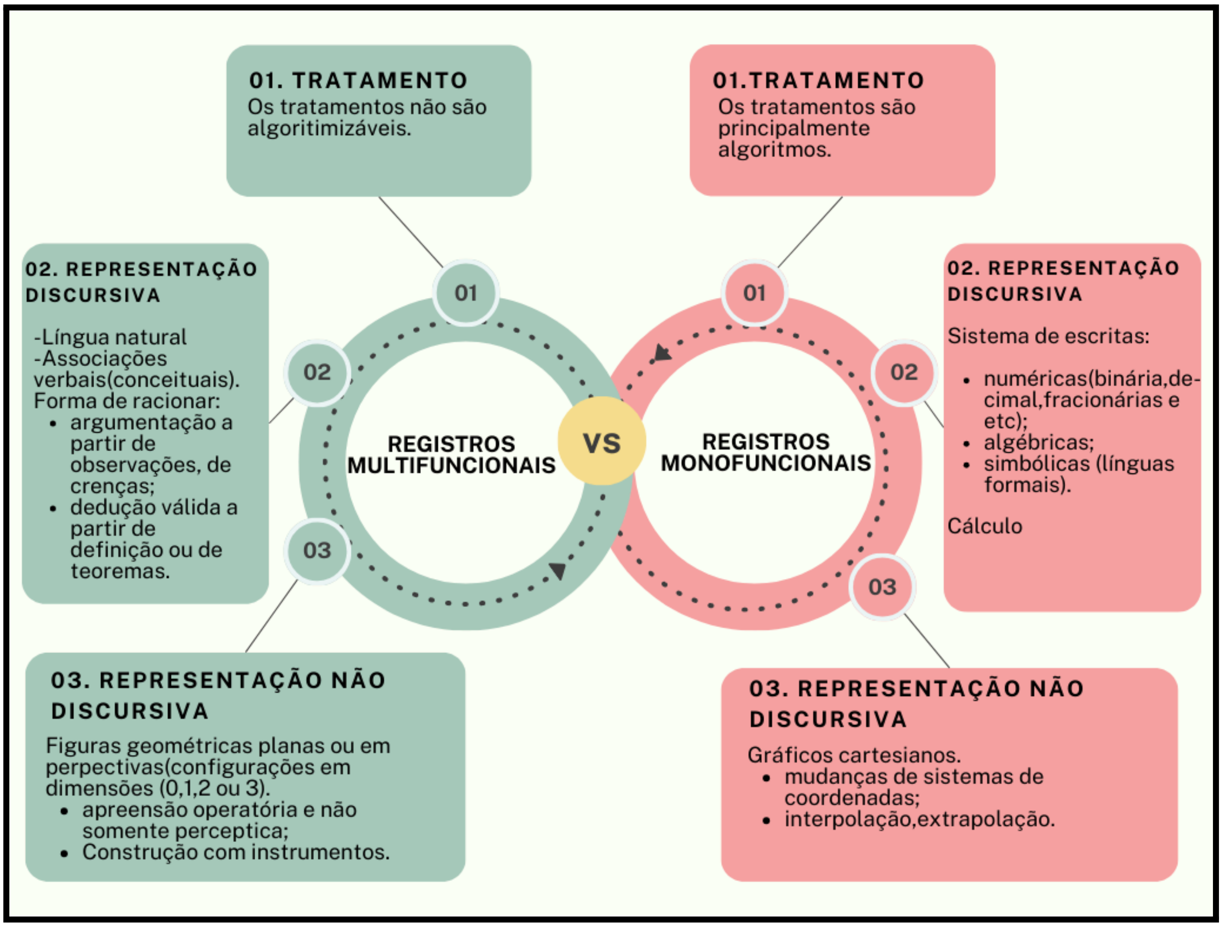
> Neste estudo, foi proposta a utilização de uma ferramenta computacional que permitisse ao estudante compreender com mais clareza a solução encontrada. O uso dessa ferramenta pode levar o aluno à aquisição e domínio do saber, dando significado ao objeto matemático, oferecer-lhe diferentes representações inerentes a esse objeto, expandir o conhecimento dos diferentes saberes, relacionando-os entre si e visualizar os planos em 3D em diferentes posições (Jordão, 2014, p. 70).

No que tange analisar o desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos e à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos, Duval (2009) aponta o confronto entre três fenômenos que, segundo ele, estão interligados:

- diversificação dos registros de representação semiótica.
- diferenciação entre o representante e representado.
- coordenação entre os diferentes registros.

Com relação à diversificação de registros de representação, segundo Duval (2003), existem quatro tipos muito diferentes deles, sendo que a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, como já destacado, trocando a todo momento de registro de representação. A Figura 4 apresenta esses registros.

Figura 4- Classificação dos diferentes tipos de registros mobilizáveis na atividade matemática segundo Duval (2003)



Fonte: O autor (2024)

Nesse sentido, Duval (2009) afirma que o estudo do fenômeno de fechamento dos registros ocorre quando separamos as atividades de tratamento e aquelas de conversões. Na citação que se segue, essa observação pode ser destacada.

> O tratamento e as conversões são atividades distintas. [...] porém, é essencial separá-las bem. Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a um outro, ela requer a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. O estudo dessa atividade de conversão deve então permitir compreender a natureza de uma estrito entre semiósis e noésis (Duval, 2009, p. 39).

Explicitando mais a separação entre tratamento e conversões, apresentaremos os conceitos de conversão e tratamento e o que podemos associar a partir deles à questão de pesquisa.

3.3 Conversão, tratamentos e coordenação

Tomando como referencial a publicação de Henriques e Almouloud (2016), em que há a definição de tratamento, conversão e coordenação seguindo as abordagens de Duval (2009), tem-se:

- **Definição 2:** O **tratamento** de uma representação é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna em um registro.
- **Definição 3:** A **conversão** de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro, sendo ela uma atividade cognitiva diferente e independente do **tratamento**.
- **Definição 4:** A **coordenação** é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos.

Como forma de explicitar cada uma dessas definições, podemos utilizar a Geometria Analítica como referência, sendo ela, na maioria das vezes, composta na sua atividade matemática de registros monofuncionais. Assim, o tratamento, por exemplo, ocorre quando se calcula a distância entre dois pontos, tomando o algoritmo da distância como referência até se chegar na distância pretendida. Um exemplo de conversão pode ocorrer quando se parte da equação de uma circunferência (representação algébrica) para sua representação geométrica no plano cartesiano. Por fim, a coordenação está intrinsecamente associada a essa capacidade de compreender esse movimento, de forma espontânea e natural, quando são apresentadas diferentes formas de representações.

A Figura 5 traz, assim, uma maneira prática de diferenciar as transformações de uma representação semiótica que, para Duval (2009), são completamente diferentes e, segundo ele, os tratamentos e as conversões precisam ser verificados com atenção, no que tange à produção dos estudantes, para que haja o efeito de distingui-las e essa diferença é que dá pistas para se analisar a atividade matemática em uma perspectiva de ensino-aprendizagem e que, para esta pesquisa, tem um papel fundamental. Ainda segundo este autor, do ponto de vista cognitivo, é na conversão que ocorre o fenômeno da transformação representacional fundamental, sendo ela a conduzir os mecanismos da compreensão.

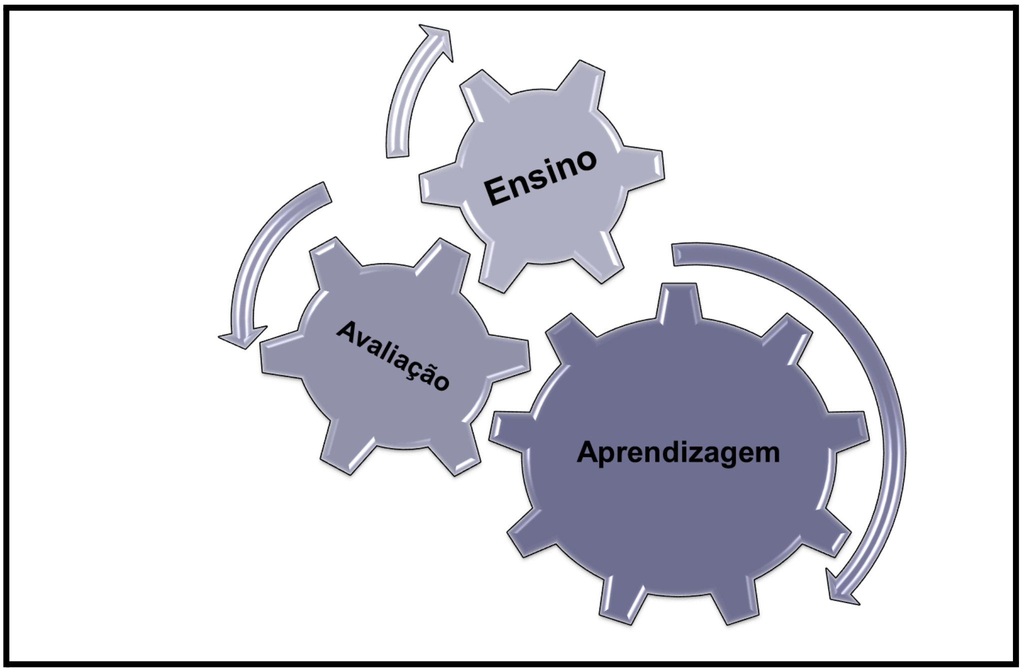
Figura 5- Os dois tipos de transformação de representações semióticas

Fonte:O autor (2024)

As três definições são importantes, pois, no contexto da presente pesquisa, a aplicação da MEAAMaRP possibilitou-nos observar os registros, os diálogos e as trocas entre os estudantes durante a aplicação das etapas previstas para esta investigação. Percebemos que a teoria de Duval (2009) estava muito evidente, pois, mesmo dispondo de vários registros de representação, para alguns dos nossos problemas, como veremos adiante, não tínhamos elementos e pistas suficientes que pudessem nos garantir a compreensão do objeto matemático em estudo.

No entanto, os momentos de trocas foram favorecidos, uma vez que MEAAMaRP não tem como fim apenas verificar ou aferir, mas avaliar os processos, em ciclo de etapas que se renovam a cada novo problema proposto, tornando o ensino-aprendizagem-avaliação como um movimento interligado, como mostra a Figura 6.

Figura 6- Ensino-Aprendizagem-Avaliação: um processo interligado



Fonte: Pagani (2021)

3.4 A Geometria Analítica na perspectiva da TRRS

A riqueza de registros presentes no estudo da Geometria Analítica, as possibilidades relacionadas ao uso de diferentes linguagens, sobretudo, de conversões presentes, e a coordenação de registros mobilizadores, colocam-na em um patamar de possibilidades para que o professor possa explorar esses registros no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) apresenta competências associadas a essa ação. Como em Machado (2003), segundo Duval (1988, p.57),

> [...] os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos estudantes, onde suas soluções exigem um raciocínio ligado a axiomática, além de favorecer o desenvolvimento de funções cognitivas ao organizar problemas de mesma natureza.

A BNCC (Brasil, 2018), por sua vez, afirma que o ensino da matemática e suas tecnologias deve permitir aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos, com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Entendemos que a proposição de problemas aos estudantes, em uma perspectiva que explore a capacidade deles de, por meio de tais problemas, aprenderem Matemática, seja uma ação que demande uma escolha criteriosa e com riqueza de possibilidade de argumentação. Os problemas de Geometria Analítica, quando associados a um contexto cotidiano os conceitos básicos, também associados à noção de representação gráfica, de reconhecimento de equações e de elementos das Figuras geométricas, desenvolvem a competência de representar e são capazes de apresentar, ao menos, três registros de representação semiótica e sua coordenação: o registro da língua; o registro das Figuras; e o registro algébrico. Assim, as competências de raciocinar, representar e argumentar estão presentes nessa atividade e, para a segunda delas, temos o recorte da BNCC (Brasil, 2018) em que:

> [...] as competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (Brasil, 2018, p. 529).

Nessa perspectiva, no capítulo 4, abordaremos o objeto do conhecimento matemático utilizado na presente pesquisa, como também os tópicos de Geometria Analítica plana. No capítulo 5 e seções, serão tratados os dois referenciais teóricos abordados até aqui, trazendo, primeiro, a metodologia de trabalho aqui adotada. Apresentaremos, no capítulo 6, os dados e as análises coletadas, procurando fazer as interseções entre ambas as metodologias e argumentar sobre a questão de pesquisa.

4 GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

O ponto fundamental que caracteriza a Geometria Analítica reside nas possibilidades de investigação, a partir de problemas geométricos, para as interpretações e representações algébricas que podem ser dadas. Há uma riqueza de representações com as quais as manipulações algébricas permitem encontrar os resultados geométricos esperados e isso faz, dessa forma de compreender e estudar a geometria, uma poderosa ferramenta para as demonstrações de teoremas e para o desenvolvimento de resultados presentes na geometria plana e espacial.

No cotidiano, utilizamos a Geometria Plana e Espacial para mapeamento e localizações diversas, sejam elas no plano ou no espaço, na construção e na interpretação de diferentes lugares geométricos e suas representações gráficas, bem como em simulações das áreas da Engenharia, na Computação Gráfica e em Jogos Digitais.

Tratando-se dos processos de ensino-aprendizagem, na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), no que diz respeito às competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, merece destaque a competência quatro, que considera como relevante compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros matemáticos de representação (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc) na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. Além disso, dessa competência, espera-se que os estudantes adquiram as habilidades de escolher as representações mais convenientes a cada situação, e realizando conversões entre as representações de um registro ora algébrico em geométricas e ora geométrico em algébrico, sempre que necessário. A BNCC (Brasil, 2018) ainda reforça que

> A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (Brasil, 2018,p.538).

Ao longo desta dissertação, essas abordagens serão frutos da questão de pesquisa e dos dados analisados interligando a resolução de problemas e os diferentes registros e conversões. Mais especificamente, neste capítulo, iremos tratar dos conceitos, das definições, dos resultados, dos teoremas e exemplos que cercam o estudo da Geometria Analítica Plana, em particular, de lugares geométricos, retas, circunferências, além das posições relativas entre essas figuras no plano. Antes disso, faremos breve histórico do surgimento dessa importante abordagem geométrica.

4.1 Um breve histórico

Descrever aqui a quem se deve dar os créditos de precursão da Geometria Analítica não é o nosso objetivo. Destacaremos, nesta seção, como se deram historicamente os estudos da Geometria Analítica, objetivando fazer um levantamento histórico relacionado ao período que compreende os séculos XVI e XVII, nos quais os matemáticos René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) nasceram e, em seus estudos, construíram a base dessa geometria.

É sabido que os gregos antigos utilizavam a chamada álgebra geométrica e também que as ideias das coordenadas já haviam sido utilizadas no mundo antigo pelos romanos e egípcios, fosse na confecção de mapas ou na resolução de problemas da agrimensura. Porém com Apolônio, em seu trabalho intitulado "As Cônicas", além de outras contribuições[6], ele desenvolveu estudos no campo das secções cônicas e de suas equações cartesianas, ideias essas que podem ter sido iniciadas com Menaecmo[7] (380-320 A.C). Além disso, segundo Eves (2004,p.382), no século XIV, Nicole Oresme antecipou outros elementos importantes da Geometria Analítica, dentre eles, as representações gráficas das latitudes e longitudes relacionadas às leis e às relações entre as grandezas independentes e dependentes.

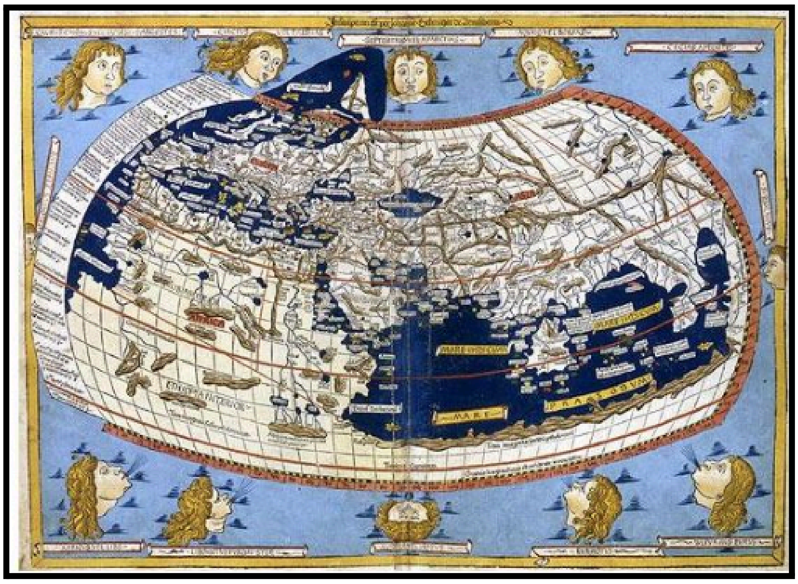
No entanto, os sistemas de coordenadas foram usados pelos gregos por volta de 150 a.C na Astronomia e na Geografia, ainda que não na forma como utilizamos hoje, e podemos exemplificar a representação do mapa do mundo de Claudio Ptolomeu (85-165 d.C), os métodos científicos de Eratóstenes foram adotados por ele, em seu próprio livro, intitulado Geografia (150 d.C.), que listou coordenadas de 8.000 lugares no mundo Greco-Romano, e indicou como uso a matemática e a geometria para inseri-las em uma grade de latitudes e longitudes, conhecida como Graticule (Graus; Minutos; Segundos), Na Figura 7, temos a reprodução desse mapa.

---

[6] Tratado composto de oito livros, de autoria de Apolônio de Perga. Do conjunto, sobrevivem sete deles: "A seção da relação"; "A seção do espaço"; "A seção determinada"; "As inclinações"; "Os lugares planos"; e "Os contatos e Okytokion". Ele demonstra centenas de teoremas com o uso dos métodos geométricos de Euclides.

[7] Nasceu na Normandia e desenvolveu trabalhos onde fez a localização de pontos por coordenadas. Um século mais tarde, pode ter influenciado matemáticos do Renascimento, dentre eles, possivelmente, Descartes.

Figura 7- Mapa do Mundo de Ptolomeu



Fonte:https://time.graphics/uploadedFiles/500/c5/72/c572cbdd92c9b888c17fbf947131796e.jpg Acesso em: 30, mar. 2024

Tomando como referencial o período Renascentista, os trabalhos de René Descartes (1596-1650), em sua obra "*La géométrie"*, merecem destaque, pois, nela e em seus apêndices, ele desenvolveu teorias relacionadas à aritmetização da geometria, utilizando eixos para representar o comprimento de segmentos, formando um ângulo fixo entre os eixos e, entre eles, construiu pontos que pudessem satisfazer uma relação de proporcionalidade entre quatro termos. Segundo Eves (2004, p.385), Descartes também desenvolveu, nessa mesma obra, a classificação de curvas, utilizando métodos de construção de tangentes a essas curvas; porém isto exigia métodos algébricos complexos. Pela complexidade da obra "*La géométrie",* após traduções de ampla circulação e mais de um século depois, Leibniz, em 1692, utilizou os termos coordenadas, abscissas e ordenada para a função que utilizamos hoje.

Paralelamente aos trabalhos de Descartes, outro grande matemático do período renascentista, Pierre de Fermat, também desenvolveu bases importantes da Geometria Analítica, como a equação geral da reta, a equação da circunferência e o estudo sobre as cônicas. Como destacado por Eves (2004), podemos perceber como atuava Fermat, em relação à forma de desenvolver a Geometria Analítica:

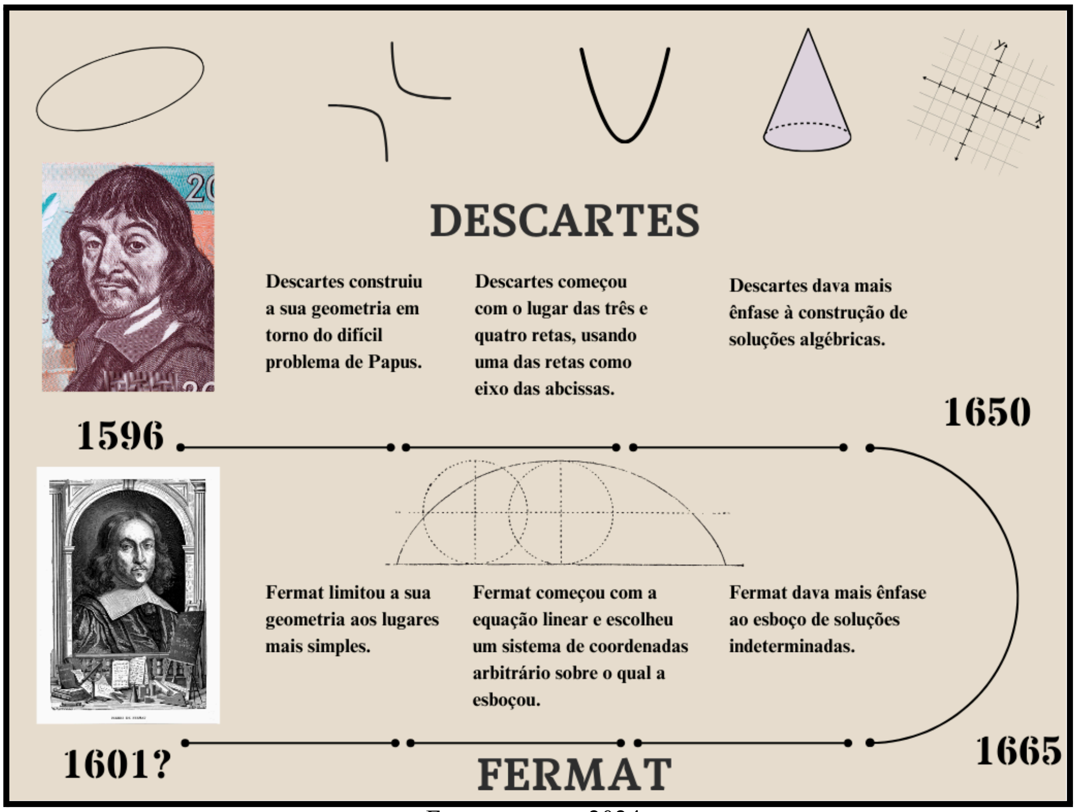
> Assim, em grande escala, onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da Geometria Analítica (EVES, 2004, p.389).

Os estudos e contribuições de Fermat foram publicados no artigo *"Isagoge as locus planos er solidos"*[8], em que ele também descreveu muitas curvas analiticamente definidas por equações algébricas.

Dessa forma, levando em consideração o período e os documentos de registro de como cada um desses matemáticos desenvolvia essa forma de fazer registros de figuras geométricas e de lugares geométricos, podemos referenciar a ambos como sujeitos de destaque da histórias das ciências, tendo eles agido como os principais desenvolvedores da Geometria Analítica, cada qual com suas estratégias de desenvolvimento.

Nesse contexto, destacamos, na Figura 8, as principais ideias desses dois célebres gênios da Matemática, que desenvolveram essa importante forma de entender a Geometria. Buscar por um precursor ou idealizador único da Geometria Analítica seria no nosso entendimento, um grande erro, pois, como descrevemos, ela foi desenvolvida ao longo da história das ciências por vários matemáticos de destaque e por outros tantos que aqui não citamos, mas que deram significativas contribuições, se considerado o grau de importância delas para que usufruíssemos dos conhecimentos acumulados nos tempos contemporâneos e tecnológicos de hoje.

Figura 8 - Estratégias utilizadas por Descartes e Fermat



Fonte: o autor, 2024.

[8] Introdução aos lugares planos e geométricos.

4.2 O ambiente da Geometria Analítica Plana

Na Geometria Analítica, é possível tratar algebricamente muitas situações da abordagem geométrica, como também interpretar situações problemas de forma geométrica utilizando ferramentas algébricas. Essa integração promoveu significativos avanços na resolução de problemas da Matemática e de outras ciências.

Nessa abordagem geométrica, podemos descrever as Figuras em um ambiente dinâmico que permite estudar definições, propriedades e representá-las por meio de uma equação algébrica que, por sua vez, pode ser representada em um ambiente que nos permita realizar a correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais. Assim, cada ponto do plano corresponderá a um único par ordenado (x, y), e cada par ordenado (x, y) será associado a um único ponto do plano. Para representar esses pontos, utilizamos um sistema de eixos ortogonais, no qual podemos nos referenciar , segundo Delgado et al.[9] (2017), conforme a definição 1:

Definição 1: Um sistema de eixos ortogonais em um determinado plano é um par de eixos, OX e OY em que se dá a correspondência biunívoca de associar o par ordenado (x, y) a um ponto P desse plano e ao ponto P, associar ao par ordenado (x, y). Os eixos são perpendiculares e se intersectam em uma origem comum O e por convenção, o eixo OX é denominado eixo horizontal ou eixo das abscissas e o eixo OY é denominado eixo vertical ou eixo das ordenadas.

Dessa forma, a correspondência biunívoca descrita define o conjunto de pares ordenados de números reais em que:

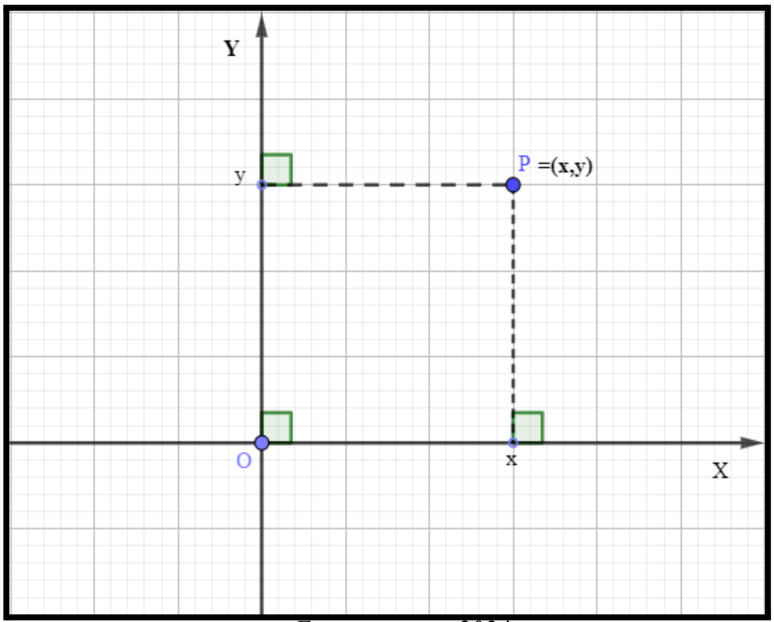
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

Então, os números reais x e y, do par ordenado (x, y), associado ao ponto P, são chamados de coordenadas cartesianas do ponto P, onde x é a abscissa e y é a ordenada, respectivamente, primeira e segunda coordenada do ponto P. A Figura 9 apresentada na próxima página, ilustra tal representação.

---

[9] Ao longo deste capítulo as definições, proposições e demonstrações são citações diretas,referências ou adaptações do livro de Geometria Analítica da Coleção do PROFMAT - SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) Delgado et al. (2017) e também do livro: Álgebra Linear e Geometria Analítca de Machado (1982) ambos referências desta dissertação.

Figura 9 - Plano Cartesiano XOY



Fonte: o autor, 2024.

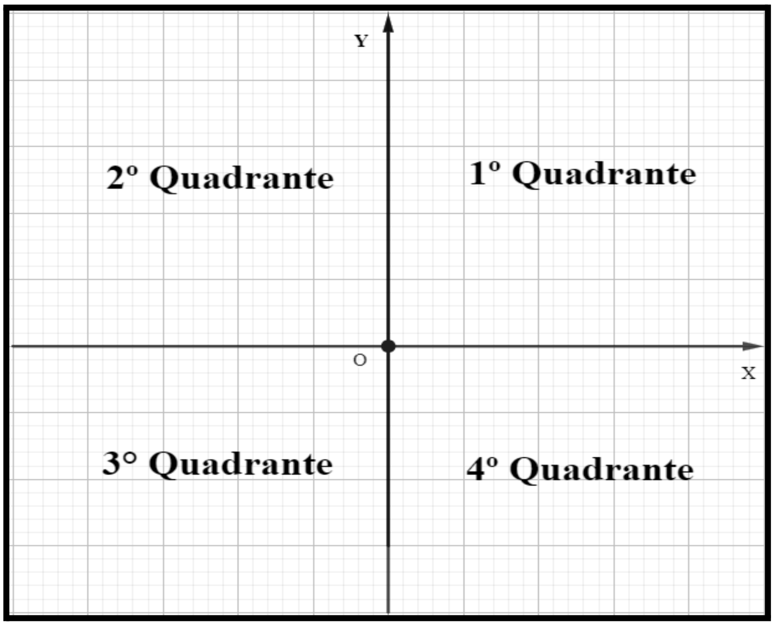
Dadas as quatro regiões planas, as quais serão representadas na Figura 10, define-se como o complementar dos eixos no plano a união dessas quatro regiões, que são denominadas quadrantes, sendo que cada um deles é um conjunto de pontos (x, y)[10], tais que:

- 1º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \; e \; y > 0\}$;
- 2º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \; e \; y < 0\}$;
- 3º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \; e \; y < 0\}$;
- 4º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \; e \; y > 0\}$.

Dessa forma, temos a necessidade de localizar lugares, medir distâncias e áreas de regiões, e, no caso específico da Geometria Analítica Plana, representar lugares geométricos, bem como figuras geométricas notáveis da Geometria Plana. As representações nos quadrantes utilizará o ponto e suas coordenadas e tomará o sistema XOY de coordenadas para esses fins como veremos nas próximas seções deste capítulo.

[10] Neste capítulo, adotaremos no texto e, nos exemplos que seguem, a notação para coordenadas cartesianas de um ponto genérico P ou de coordenadas cartesianas x e y numericamente determinadas, a representação P = (x,y), ou seja, uma letra maiuscula do nosso alfabeto seguida do sinal de igualdade, como destacado no ponto P da Figura 9.

Figura 10 - O plano cartesiano e os quatro quadrantes



Fonte: o autor, 2024.

Dessa forma, nesse sistema de eixos ortogonais que denominaremos como plano cartesiano, será desenvolvida a Geometria Analítica Plana abordada nesta dissertação, e onde também serão construídas definições, demonstrações e propostas de problemas de exemplificações diversas.

4.3 Distância entre dois pontos

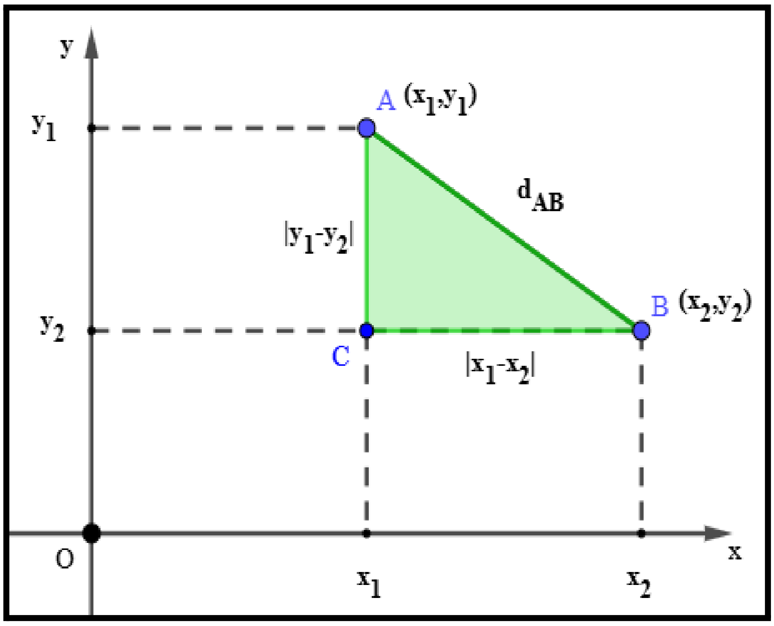
No plano cartesiano, o cálculo da distância entre dois pontos é feito com base nas coordenadas cartesianas desses dois pontos. Em linha reta, isso pode ser feito com base nas representações dos pares ordenados associados a esses pontos

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, pontos do plano cartesiano. Então, o triângulo ABC com $C = (x_1, y_2)$ é retângulo em C com hipotenusa igual a medida de AB.

A Figura 11 ilustra essa situação em que a medida do segmento AB é a distância entre os pontos A e B. Nesta dissertação, indicaremos a distância entre os dois pontos A e B por d_{AB}.

Tomando um dos catetos como a medida igual ao módulo da diferença entre as abscissas representado por $BC = |x_1 - x_2|$ e a medida do outro cateto igual ao módulo da diferença entre as ordenadas representado por $AC = |y_1 - y_2|$, podemos obter a distância desejada ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, retângulo em C, conforme a Figura 11.

Figura 11- Distância entre dois pontos



Fonte: o autor, 2024.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, obtemos a distância entre os pontos A e B, denominada d_{AB} por:

$$d_{AB} = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \textbf{(4.1)}$$

Exemplos de aplicação da fórmula da distância entre dois pontos.

Exemplo 1: Calcule o comprimento do segmento AB em que $A = (3, 4)$ e $B = (8, 16)$.

<u>Resolução:</u>

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (16 - 4)^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} =$$
$$= \sqrt{25 + 144}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13.$$

Exemplo 2: Determine as coordenadas do ponto T, pertencente ao eixo OY, que dista igualmente dos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (6, 5)$.

<u>Resolução:</u>

- Como T é equidistante de A e de B, temos que $d_{AT} = d_{TB}$;
- Como T pertence ao eixo OY temos $T = (0, y)$;

Usando a fórmula (4.1), da distância entre dois pontos, podemos determinar y:

Como $d_{AT} = d_{BT}$, temos:

$$d_{AT} = \sqrt{\left(x_T - x_A\right)^2 + \left(y_T - y_A\right)^2} = d_{BT} = \sqrt{\left(x_T - x_B\right)^2 + \left(y_T - y_B\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0 - 2)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - y)^2}$$

$$= 4 + (y^2 - 6y + 9) = 36 + (y^2 - 10y + 25)$$

$$= 4 + y^2 - 6y + 9 = 36 + y^2 - 10y + 25$$

$$\Rightarrow 4 + y^2 - 6y + 9 - 36 - y^2 + 10y - 25 = 0$$

$$\Rightarrow -4y = -48$$

$$\Rightarrow y = 12.$$

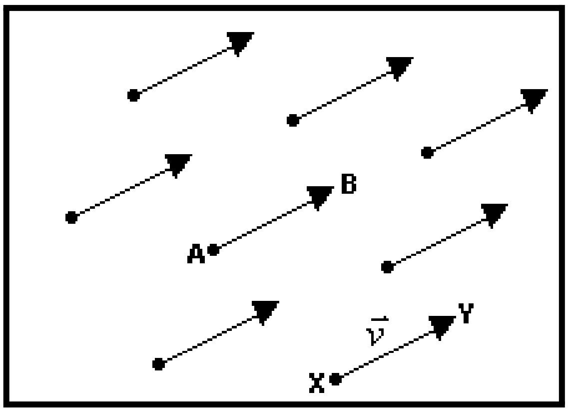
Logo, o ponto T terá coordenadas $T = (0, 12)$.

Na próxima seção, faremos breve abordagem de conceitos gerais e definições sobre os vetores com o objetivo de sustentar particularidades do estudo de retas e circunferências das próximas seções deste capítulo.

4.4 Vetores no plano

Geometricamente, vetores são representados por segmentos (de retas) orientados (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço, conforme a Figura 12. A ponta da seta do segmento orientado é chamada ponto final ou extremidade, e o outro ponto extremo é chamado de ponto inicial ou origem do segmento orientado, onde temos segmentos orientados e equipolentes[11], ou seja, um conjunto de segmentos de reta orientados que possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido, conforme a Figura 12.

Figura 12- Conjunto de segmentos equipolentes a *AB*



Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores3.php, 2024.

[11] Equipolência é a relação de equivalência sob a qual um conjunto de segmentos de reta orientados (vetores) possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

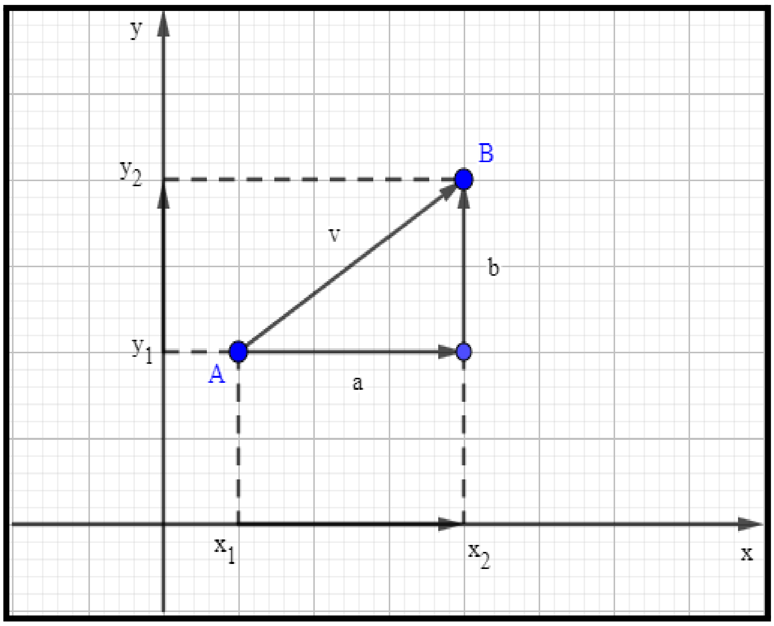
Se o ponto inicial de um representante de um vetor v é A e o ponto final é B, então representamos:

$$v = AB = B - A = v$$

Em geral, todo v (vetor)[12] do plano cartesiano pode ser associado a um par ordenado (x, y) do $\mathbb{R}^2$ em que podemos escrever como $v = (x, y) = (a, b)$sendo $a, b \in \mathbb{R}$ com origem em $(0, 0)$.

Tomando $a\ e\ b$ nessa ordem, as medidas algébricas das projeções de v nas direções (orientadas), podemos dizer que v é o vetor de componentes ou coordenadas $a\ e\ b$, conforme a representação cartesiana apresentada na Figura 13.

Figura 13- Representação cartesiana de um vetor V em componentes



Fonte: o autor, 2024.

As componentes de um vetor v, como da Figura 13, podem ser calculadas a partir das coordenadas das extremidades de um segmento orientado que os representa no plano conforme a definição que segue.

Definição 2:

Seja $v = AB$ o vetor AB e $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, suas extremidades. Então, as componentes de v são dadas pela diferença entre as coordenadas de A e B, dessa forma, temos o vetor $v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ definido por essas coordenadas. Define-se assim o vetor,

[12] Nesta dissertação, os vetores serão representados sem a seta de indicação da direção, em todo o texto deste capítulo e conforme destacado na figura 13.

$v = AB$, onde $B - A$ é a diferença entre os pares ordenados associados aos pontos B e A do sistema XOY.

Nos exemplos a seguir, exploraremos a definição 2.

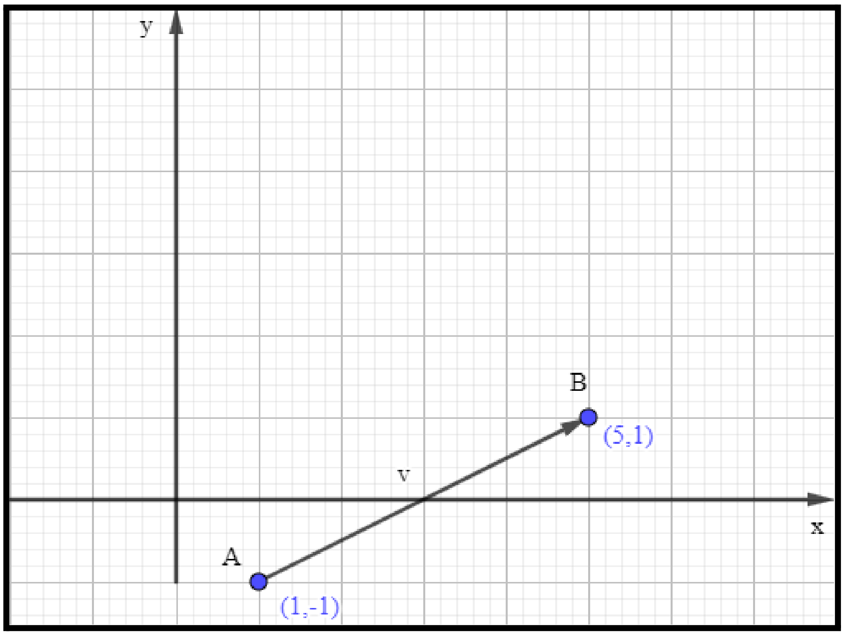
Exemplo 3: Dados $A = (1, -1)$ e $B = (5, 1)$ represente as coordenadas do vetor $v = AB$.

Resolução

⇒Pela definição 1 temos $B - A = (5 - 1, 1 - (-1)) = (4, 2)$, então $v = (4, 2)$.

Na Figura 14, temos a representação gráfica das extremidades do vetor definido por A e B.

Figura 14 - Representação gráfica do vetor v



Fonte: o autor, 2024.

4.4.1 Operações com vetores

Considere dois vetores no $\mathbb{R}^2$, u e v sendo $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ definimos as operações de:

I- Adição entre vetores

A adição de vetores é a operação que, a cada par de vetores u e v, podemos associar a um terceiro vetor w, designado como a seguir:

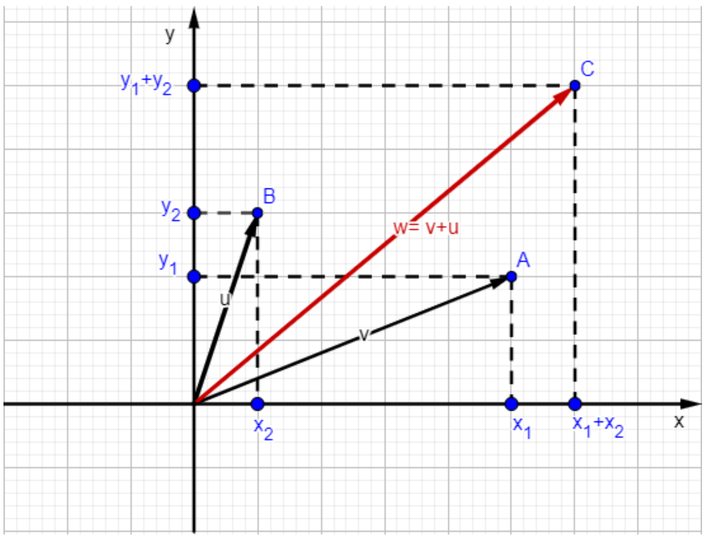
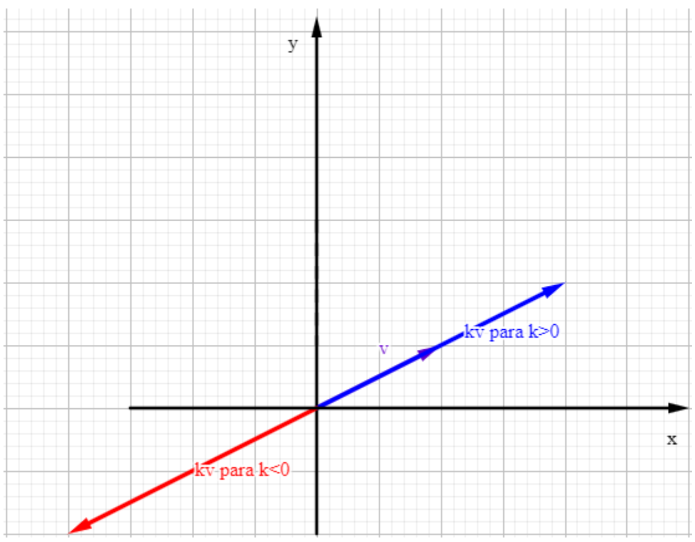
$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = w \quad \textbf{(4.2)}$$

II- Multiplicação por escalar.

Sendo $k \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y)$, temos que $kv = (kx, ky)$. Nesse caso, a cada vetor v e a cada k associa-se a um vetor kv, sendo essa operação considerada o produto escalar entre um valor real por um vetor. É importante observar que, na multiplicação de um vetor por escalar $k \in \mathbb{R}$ real, para $k > 0$ e $k < 0$, os vetores resultantes têm a mesma direção, porém sentidos opostos.

No Quadro 2 , apresentamos essas operações e suas respectivas representações gráficas.

Quadro 2- Operações com vetores no $\mathbb{R}^2$

Operação	Representação Gráfica
u+v ⟹ **Adição**	
kv⟹ **Multiplicação por uma constante**	

Fonte: o autor, 2024.

Para exemplificar as operações apresentadas anteriormente, considere os seguintes exemplos:

Exemplo 4: Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades $A\ e\ B$, dado que $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Em seguida, faça sua representação gráfica.

Resolução:

Sendo M o ponto médio de AB, os vetores $v = AM\ e\ u = MB$ possuem comprimentos iguais, mesma direção e mesmo sentido. Logo, $v = u$. Temos assim que:

$\Rightarrow M - A = B - M$

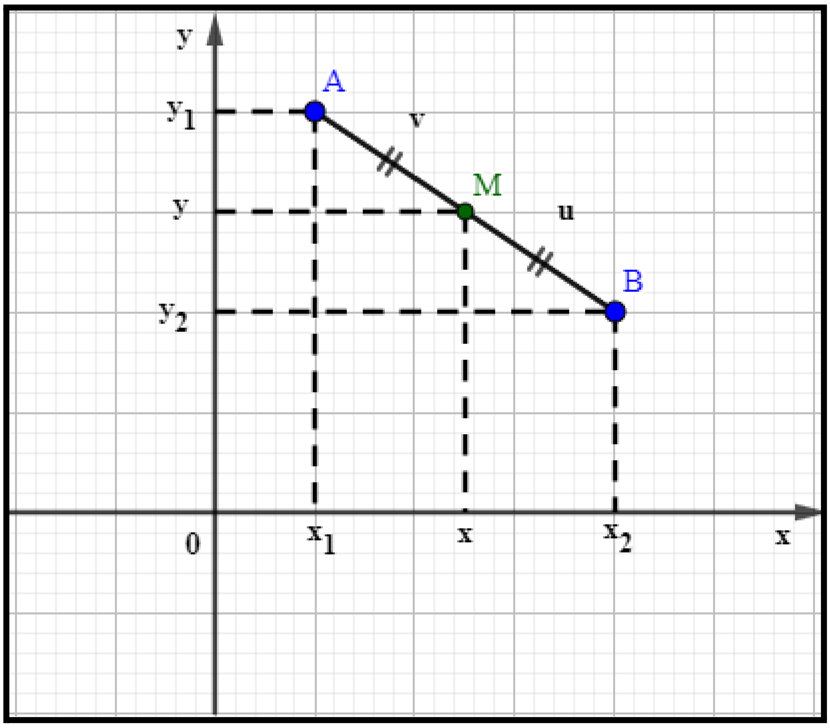
$\Rightarrow 2M = A + B$

$\Rightarrow M = \frac{A+B}{2}$

$\Rightarrow M = \frac{(x_1,y_1) + (x_2,y_2)}{2} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$

A Figura 15, mostra a representação gráfica da resolução do exemplo 4.

Figura 15 - Representação gráfica do exemplo 4

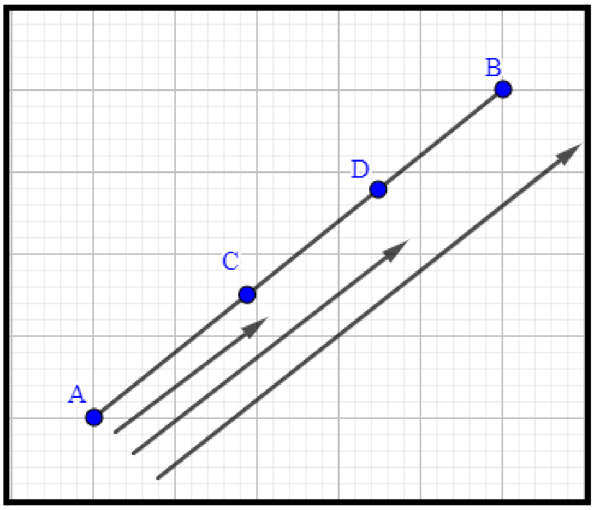


Fonte: o autor, 2024.

Exemplo 5: Obtenha as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB de extremidades em $A = (2, 4)\ e\ B = (14, 13)$, em três partes iguais.

Resolução:

Figura 16 - Pontos sobre o segmento AB



Fonte: o autor, 2024.

Devemos obter os pontos C e D tais:

$$AC = \frac{1}{3}AB \ e \ AD = \frac{2}{3}AB.$$

$$\Rightarrow AC = \frac{1}{3}AB$$

$$\Rightarrow C - A = \frac{1}{3}(B - A)$$

$$\Rightarrow C = \frac{B+2A}{3}$$

Logo, $C = \frac{(14,13)+2(2,4)}{3}$

$= \frac{(14,13)+(4,8)}{3} = C = (6, 7).$

Notando que D é o ponto médio de CB, podemos obter D fazendo:

$$D = \frac{C+B}{2} = \frac{(6,7)+(14,3)}{2} = D = (10, 10).$$

Assim, os pontos são: $C = (6, 7)$ e $D = (10, 10)$.

4.4.2 Propriedades Gerais dos Vetores

Essa seção será destinada a trazer propriedades gerais envolvendo os vetores como produto escalar de dois vetores, seu módulo e a relação com a distância entre pontos no plano XOY, bem como as condições de paralelismo e ortogonalidade entre vetores no $\mathbb{R}^2$.

4.4.3 Produto Escalar de dois vetores

O produto escalar de dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ do $\mathbb{R}^2$ é dado pelo número real $x_1 .\ x_2 + y_1 y_2$ que pode ser indicado pelo símbolo $u.v$, que lemos u escalar v. Assim, temos para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \Rightarrow u.v = x_1 .\ x_2 + y_1 y_2$. Para demonstrar tal resultado, temos que nos ater a duas definições importantes: a de norma de um vetor e a de ângulo entre vetores, uma vez que o produto escalar, assim definido, está relacionado com o ângulo formado entre os vetores. Assim seguem as definições 3 e 4.

Definição 3:

A norma ou comprimento de um vetor u é o número representado por $||u||$ comprimento de um segmento representante[13] do vetor u. Dessa forma, a norma de um vetor independe da escolha do segmento representante do vetor.

Sendo $u = AB = CD$ e, de acordo com a definição 3 temos que $d_{AB} = d_{CD} = ||u||$.

Então, ao tomarmos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $u = AB$ temos:

$$||u|| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Assim, dado o vetor $u = (x, y)$ do ℝ², tomando $OP = u$, $O = (0, 0)\ e\ P = (x, y)$, podemos mostrar que seu módulo ou comprimento é dado por $|u| = ||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

O módulo pode ser expresso usando o produto escalar da seguinte forma:

$$u.u = (x, y).(x, y) = x.x + y.y = x^2 + y^2 = (\ ||u||)^2 \qquad \textbf{(4.4)}$$

<u>**Observação:**</u> um vetor que possui módulo igual a 1 é chamado de vetor unitário sendo que:

v é unitário $\Leftrightarrow ||v|| = 1$

Sendo que para um vetor não nulo v, o vetor normalizado de v é dado por $\frac{v}{||v||}$, sendo ele um vetor unitário da mesma direção e sentido de v, denominado versor de v.

Exemplo 6: Dados $A = (5, -1)\ e\ B = (1, -4)$, determine a norma do vetor $u = AB$.

<u>Resolução:</u> Pela definição 3 e utilizando (4.3) segue $||u|| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ então, temos que:

$||u|| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (-4 + 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$

Logo, a $||u||$=5.

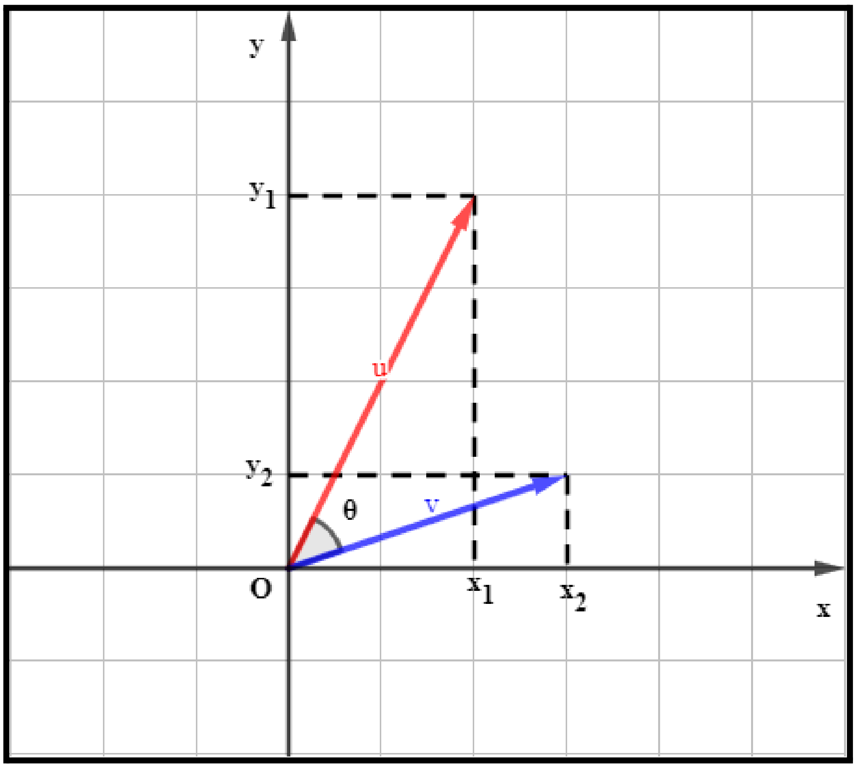
Definição 4

O ângulo entre os vetores não nulos $u\ e\ v$ é o menor ângulo entre os segmentos representantes AB e AC de $u\ e\ v$, respectivamente e que pode ser medido em radianos ou em graus, onde $\pi\ radianos = 180°$. Quando o ângulo θ = 90º, temos que $u\ e\ v$ serão ortogonais. A Figura 17, mostra dois vetores $u\ e\ v$ o ângulo entre eles.

---

[13] Um mesmo vetor AB é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes deste vetor, e todos equipolentes entre si.

Figura 17- Ângulo entre os vetores u e v

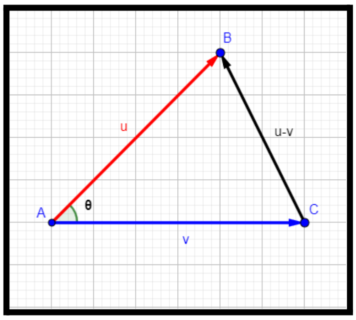


Fonte: o autor, 2024.

Baseando-se nas definições 3 e 4, podemos demonstrar que o produto escalar entre dois vetores u e v é dado por:

$$u.v = ||u||.\ ||v||\ .\cos\theta \qquad \textbf{(4.5)}$$

Figura 18 - Ângulo demonstração



Fonte: o autor,2024.

<u>Demonstração</u>

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC, temos:

$$(||u - v||)^2 = (||u||)^2 + (||v||)^2 - 2.||u||.||v||.\cos\theta$$

$\Rightarrow (u - v).(v - u) = u.u + v.v - 2.||u||.||v||.\cos\theta$

$\Rightarrow u.u - 2.(u.v) + v.v$

$\Rightarrow u.u + v.v - 2.||u||.||v||.\cos\theta$

$\Rightarrow - 2(u.v) = 2.||u||.||v||.\cos\theta$

Logo, $u.v = ||u||.\ ||v||\cos\theta$ representa o produto escalar de dois vetores u e v sendo igual ao produto dos seus módulos pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Dessa forma, utilizando (4.5), podemos inferir que:

➔ $u.v > 0 \Leftrightarrow cos\,\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$;

➔ $u.v < 0 \Leftrightarrow cos\,\theta < 0 \Leftrightarrow 0° < \theta \leq 90°$;

➔ $u.v = 0 \Leftrightarrow cos\,\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ (nesse caso os vetores são ortogonais)

O produto escalar é nulo quando o ângulo θ for reto.

Para ilustrar a aplicação de (4.5), segue o exemplo e sua resolução.

Exemplo 7 - Dado o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (\sqrt{3}, 5)$ e $C = (0, 6)$, calcule a medida do ângulo interno de vértice em A.

Resolução: Tomando como referência o triângulo ABC a seguir, temos:

O ângulo θ entre os vetores u e v, é igual ao ângulo interno de vértice A, então temos:

$u = B - A$=$(\sqrt{3} - 0, 5 - 2) = (\sqrt{3}, 3)$

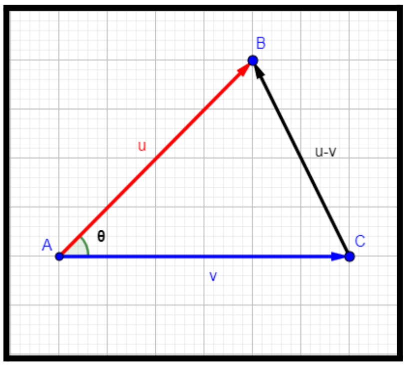
$v = C - A = (0 - 0, 6 - 2) = (0, 4)$

Aplicando (4.5) temos que :

$$cos\,\theta = \frac{u.v}{||u||.\,||v||} = \frac{\sqrt{3}.0+3.4}{\sqrt{12}.4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\theta = 30°$ ou $\frac{\pi}{6} rad.$

Figura 19 - Resolução do exemplo 7



Fonte: o autor, 2024.

Os resultados apresentados serão utilizados nas próximas seções onde serão apresentados o estudo da reta e da circunferência bem como as posições relativas associadas a essas figuras geométricas. Antes de passarmos à próxima seção, segue um resultado importante, o de condição de alinhamento de três pontos.

4.4.4 Condição de alinhamento de três pontos

Dados três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, seja Δ o determinante cujas linhas são formadas pelas componentes dos vetores u e v sendo $u = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $v = C - A = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Assim, temos o determinante:

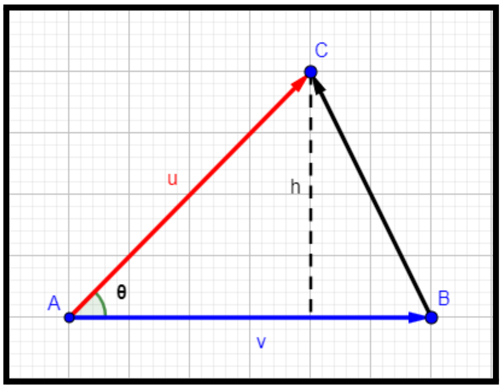
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad \textbf{(4.6)}$$

Se A, B e C são vértices de um triângulo, vamos demonstrar então que a área desse triângulo é $\frac{1}{2}|\Delta|$, logo $\Delta \neq 0$. Dessa forma, se $\Delta = 0$ podemos concluir que A, B e C não são vértices de um mesmo triângulo e, portanto, são pontos colineares.

<u>Demonstração</u>

Consideremos os vetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, não paralelos, e o triângulo ABC de altura h formado. A área A do triângulo ABC da Figura 20 é dada por:

Figura 20 - Área do ΔABC



Fonte: o autor,2024

$A = \frac{1}{2}||v||.h$

$\Rightarrow h = ||u||.sen\,\theta$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}||u||.||v||.sen\,\theta$, sendo $0° < \theta < 180°$, $cos\,\theta = \frac{u.v}{||u||.\,||v||}$ e utilizando a relação trigonométrica $(sen\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$, temos que:

$\Rightarrow sen\,\theta = \sqrt{1 - \frac{(u.v)^2}{(||u||)^2.(||v||)^2}} = \frac{\sqrt{(||u||)^2.(||v||)^2 - (u.v)^2}}{(||u||)\,.(||v||)}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}||u||.||v||.\frac{\sqrt{(||u||)^2.(||v||)^2 - (u.v)^2}}{||u||\,.||v||}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.\sqrt{(||u||)^2.(||v||)^2 - (u.v)^2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.\sqrt{(a^2 + b^2)\,.(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.\sqrt{(ad - bc)^2} = \frac{1}{2}.|ad - bc| = |\Delta|$

Logo, $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, então $\Delta \neq 0$.

Dessa forma, se $\Delta = 0$ podemos concluir que os pontos $A, B\ e\ C$ não são vértices de um triângulo e assim serão colineares. Por outro lado, $A, B\ e\ C$ estão alinhados se, e somente se, os vetores $u\ e\ v$ têm a mesma direção, ou seja, são paralelos. Portanto, temos que:

A,B e C alinhados $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\; tal\; que\; v = \lambda. u \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_3 - x_1 = \lambda.(x_2 - x_1)\; e\;\; y_3 - y_1 = \lambda.(y_2 - y_1)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda(x_2 - x_1) & \lambda(y_2 - y_1) \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $A, B\; e\; C$ são colineares $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

Vamos ao seguinte exemplo de aplicação dos resultados anteriores.

Exemplo 8 Determine uma relação entre $x\, e\, y$, coordenadas do ponto P sabendo que os pontos $P = (x, y), A = (1, 4)\; e\; B = (2, 3)$ são colineares.

Resolução:

Sejam os vetores $u = AP\; e\; v = BP$, dessa forma temos:

- $u = P - A = (x - 1, y - 4)$;
- $v = P - B = (x - 2, y - 3)$.

Como os pontos são colineares, podemos aplicar (4.6) assim segue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 4 \\ x - 2 & y - 3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow (x - 1).(y - 3) - (y - 4).(x - 2) = 0$
$\Rightarrow xy - 3x - y + 3 - xy + 2y + 4x - 8 = 0$
$\Rightarrow x + y = 5\; ou\; x + y - 5 = 0$

A colinearidade dos pontos será fundamental para os resultados que serão apresentados na próxima seção em que a reta no $\mathbb{R}^2$ será estudada e suas diferentes representações e posições relativas.

4.5 Estudo da reta

Euclides foi um famoso matemático grego que viveu há mais de 2.000 anos. Seu pensamento floresceu em Alexandria, por volta de 300 a.C. Sua obra principal, os "Elementos" (em grego, Stoikheia), trata da Geometria e da Teoria dos Números. Os seis primeiros livros desses "Elementos" foram dedicados à Geometria Plana e o método axiomático apresentado por ele teve considerável valia para a construção de conceitos e de definições na Geometria. Um dos axiomas ou postulado foi aquele da determinação de uma reta no plano. Tal postulado diz: “Dois pontos distintos do plano determinam uma reta”.

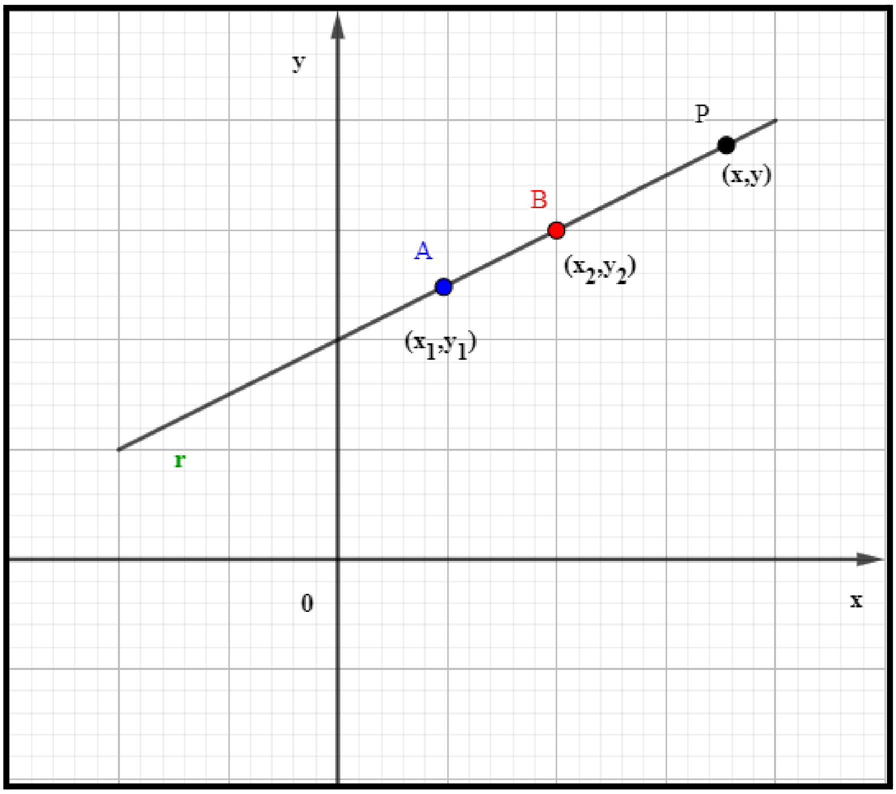
E como seria a compreensão desse postulado de Euclides, nas construções da Geometria Analítica no $\mathbb{R}^2$, considerando que um ponto é representado por um par ordenado? Como seria a representação cartesiana de uma reta associada aos resultados apresentados na seção anterior?

Para responder a tais questionamentos, recorreremos a seguinte definição de equação cartesiana de uma reta no $\mathbb{R}^2$ segundo Machado (1982,p.37)

Definição 5: Denominamos equação cartesiana de uma reta no $\mathbb{R}^2$ toda relação nas incógnitas x e y que é satisfeita pelos pontos $P = (x, y)$, que pertencem à reta e só por eles.

Dada uma reta r do plano cartesiano, como representada na Figura 21, considerando que r é determinada pelos pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, com $A \neq B$ e tomando $P = (x, y)$, um ponto qualquer dessa reta, temos pela relação **(4.6)** que:

Figura 21 - Reta r determinada pelos pontos A e B



Fonte: o autor, 2024

- $AP = P - A = (x - x_1, y - y_1)$;
- $AB = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

Sendo P ponto da reta r, representada na Figura 21, se e somente se , A, B e P são colineares, temos:

$P \in r \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$

Ao desenvolvermos o determinante encontramos o resultado a seguir:

$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$

$\Rightarrow$Fazendo $y_2 - y_1 = a$; $x_1 - x_2 = b$ e $x_2y_1 - x_1y_2 = c$, temos a equação cartesiana de uma reta que também podemos nomear como equação geral da reta.

$$ax + by + c = 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

Dessa forma, dado um ponto $P = (x_p, y_p)$, assumimos que se $P \in r$, então a equação (4.7), deve ser satisfeita, dessa forma temos: $a.x_p + b.y_p + c = 0 \; \forall \; x_p, y_p \in \mathbb{R}$.

Em seguida, dois exemplos que exploram esses resultados.

Exemplo 9: Obtenha um ponto A na reta $r: x - y = 0$ e equidistante dos pontos $B = (1, 0)$ e $C = (5, 2)$.

Resolução:

Como $A \in r \Rightarrow x_a - y_a = 0 \Rightarrow y_a = x_a$ logo, temos $A = (x, x)$.Como A é equidistante de B e C, temos:

$d_{AB} = d_{AC}$

$\sqrt{(1 - x)^2 + (0 - x)^2} = \sqrt{(5 - x)^2 + (2 - x)^2}$

$1 - 2x + x^2 + x^2 = 25 - 10x + x^2 + 4 - 4x + x^2$

$12x = 28$

$\Rightarrow x = \frac{7}{3}$

Logo, $A = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Exemplo 10: Mostre que $A = (1, 2)$, $B = (1 + k, 2 - k)$ e $C = (1 - t, 2 + t)$ $, com\; k,\; t \in \mathbb{R}$ são pontos colineares e determine a equação da reta r que os contém.

Resolução: Tomando os vetores $AB = u$ e $AC = v$, temos:

- $u = B - A = (1 + k - 1, 2 - k - 2) = (k, - k)$;
- $v = C - A = (1 - t, 2 + t - 2) = (- t, t)$.

Utilizando (4.6) podemos mostrar que os pontos são colineares $\forall\, k,\; t \in \mathbb{R}$. Dessa forma, segue que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & -k \\ -t & t \end{vmatrix} = k.t-(-k.-t) = k.t-k.t=0$$

Assim, fixando $k = 1$, temos os pontos $A = (1, 2)\ e\ B = (2, 1)$ dessa forma, podemos obter a equação da reta r que passa por $A, B\ e\ P = (x, y)$, dados os vetores $u = AP$ e $w = BP$ temos:

- $u = P - A = (x - 1, y - 2)$;
- $w = P - B = (x - 2, y - 1)$.

Então, temos que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ x-2 & y-1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow (x - 1).(y - 1) - (x - 2).(y - 2) = 0$

$\Rightarrow (xy - x - y + 1) - (xy - 2x - 2y + 4) = 0$

$\Rightarrow xy - xy - x + 2x - y + 2y + 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0.$

Logo, $r: x + y - 3 = 0$ é a equação geral da reta r procurada.

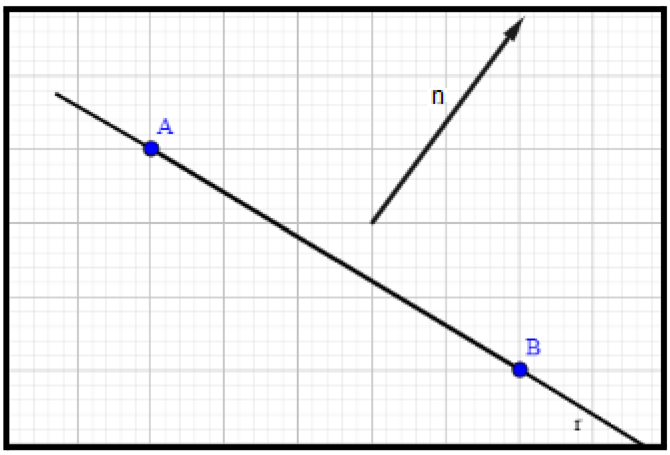
Substituindo em r os pontos $B = (1 + k, 2 - k)\ e\ C = (1 - t, 2 + t)$ temos:

- Para B em $r \Rightarrow 1 + k + 2 - k - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow B \in r$;
- Para C em $r \Rightarrow 1 - t + 2 + t + t - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow C \in r$.

4.5.1 Equação da reta e suas representações

Uma forma de se obter a equação cartesiana de uma reta seria partir da definição do chamado vetor normal n a uma reta. Trata-se de um vetor não nulo perpendicular ao vetor $u = AB$ da reta r , determinada pelos pontos $A\ e\ B$, sendo $A\ e\ B$ dois pontos quaisquer da reta, conforme mostra a Figura 22.

Figura 22- Vetor normal n à reta r.



Fonte: o autor, 2024.

Dada a reta r de equação $ax + by + c = 0$, os coeficientes de $x\ e\ y$ são nessa ordem, as componentes de um vetor normal(ortogonal) à reta r, isto é o vetor $n = (a, b)$ é um vetor normal à reta r. Vamos demonstrar esse resultado que se mostra útil para determinar a equação cartesiana da reta e também dará suporte para outras caracterizações entre duas ou mais retas.

Demonstração

Tomando $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, dois pontos quaisquer de r, temos para o vetor $u = AB$ representado por $B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$:

- I como $A \in r \Rightarrow a.x_1 + b.y_1 + c = 0$;
- II como $B \in r \Rightarrow a.x_2 + b.y_2 + c = 0$;

Fazendo II-I $\Rightarrow a.x_2 + b.y_2 + c - (a.x_1 + b.y_1 + c) = 0$

$\Rightarrow a.(x_2 - x_1) + b.(y_2 - y_1) = 0$ logo, temos um produto interno entre os vetores igual a zero.

$\Rightarrow n.u = 0 \Rightarrow n \perp u$.

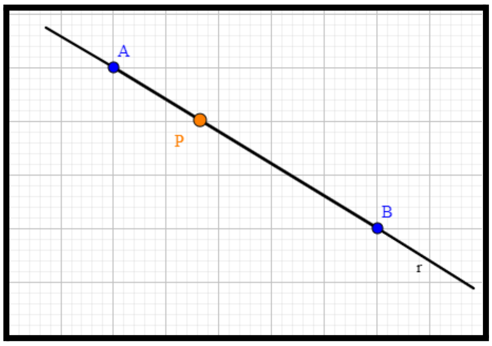
Exemplo 11: Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 4)$ e é normal ao vetor $u = (3, 2)$.

Resolução: Como $u \perp r$ temos $r: 3x + 2y = c$ por outro lado, como o ponto $A = (1, 4) \in r$, temos que:

$3.(1) + 2.(4) = c \Rightarrow c = 9$. Logo,$r: 3x + 2y = 9\ ou\ 3x + 2y - 9 = 0$.

Uma outra forma de apresentar a equação de uma reta no $\mathbb{R}^2$ é a chamada forma paramétrica. Para essa forma de apresentação, podemos definir a reta através de expressões do 1º grau em função de parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Ao variar esse parâmetro, encontramos pontos distintos da reta e a cada ponto da reta temos um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ definido.

Figura 23- Ponto P pertencente a reta r



Fonte: o autor,2024

Observando a reta r que passa pelo ponto P, conforme mostra a Figura 23, ao tomarmos os vetores $u = AP$ e $v = AB$, temos que $P \in r$ o vetor AP é múltiplo do vetor AB, assim tomando $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$AP = t.AB \Rightarrow u = t.v$$

sendo $t \in \mathbb{R}$ o parâmetro que é determinado de forma única por P e será chamado de parâmetro P em r

Para atingirmos o ponto P na reta, devemos nos deslocar ao longo da reta r por $t.v$. Dessa forma, temos a equação paramétrica da reta r dada por:

$$r = AP = A + t.v, t \in \mathbb{R} \quad \textbf{(4.8)}$$

Tomando $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $P = (x, y)$,pontos do plano, temos:

$P = (x, y) \in r \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) + t.(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, para algum $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $I)\ x = x_1 + t.(x_2 - x_1)$

II) $y = y_1 + t.(y_2 - y_1)$

Dessa forma, para algum $t \in \mathbb{R}$ teremos *I e II* definidas como equações paramétricas da reta r em que para cada valor real t atribuído, obtemos as coordenadas (x, y)de um ponto da reta. Podemos destacar que é possível utilizar as formas de apresentação de uma reta e transitar de um forma para outra utilizando algumas manipulações algébricas. No exemplo 12 a seguir, vamos ilustrar essa situação.

Exemplo 12: Determinar a equação geral da reta r cujas equações paramétricas são $x = 2 + 3t\ e\ y = 5 - 4t$, para $t \in \mathbb{R}$.

Resolução: Podemos obter diretamente a equação geral eliminado t nas equações paramétricas dadas.

$$\begin{cases} x = 2 + 3t\,.(4) \longrightarrow 4x = 8 + 12t \\ y = 5 - 4t\,.(3) \longrightarrow 3y = 15 - 12y \end{cases}$$

Adicionando as equações temos : $4x + 3y = 23 \Rightarrow 4x + 3y - 23 = 0$ a equação geral da reta r. Notamos que, para esse mesmo exemplo, podemos atribuir valores para t e determinar pontos da reta r, que serão obviamente colineares e obter sua equação através de (4.6) como exibido a seguir:

- tomando $t = 0 \Rightarrow x = 2 + 3.(0) = 2\ e\ y = 5 - 4.0 = 5 \Rightarrow P = (2, 5)$;
- tomando $t = 1 \Rightarrow x = 2 + 3.(1) = 5\ e\ y = 5 - 4.1 = 1 \Rightarrow Q = (5, 1)$. x=2

$$\Delta = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 5 \\ 5 - 2 & 1 - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -\ 4.(x - 2) - 3.(y - 5) = 0$

$\Rightarrow -\ 4x - 6y + 23 = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y - 23 = 0$

Finalizando o exemplo, é importante destacar que a reta r tem a direção normal ao vetor $n = (4, 3)$ e, como a reta passa, por exemplo, pelo ponto $P = (2, 5)$, podemos determinar a equação geral da reta utilizando os seguinte passos:

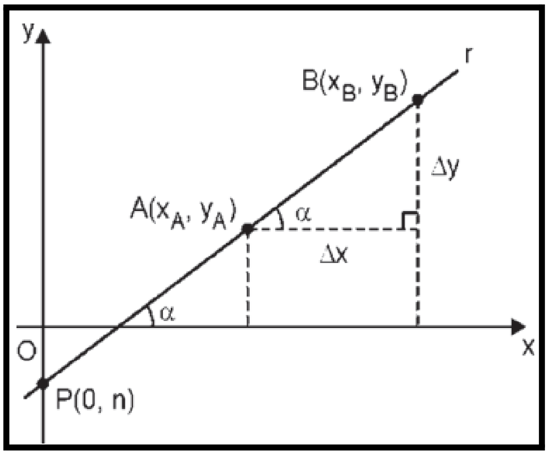
- A reta tem equação geral da forma $4x + 3y = c$;
- $P = (2, 5) \in r \Rightarrow 4.(2) + 3.(5) = c = 8 + 15 = 23 \Rightarrow r$: $4x + 3y - 23 = 0$

Outra forma de representação de equação de reta no ℝ² seria por meio da equação reduzida, que pode ser determinada a partir da equação na forma geral conforme a definição tomada como referência Machado (1982).

Definição 6: Considerando uma reta $r: ax + by + c = 0$, para $b \neq 0$ temos que $ax + by + c = 0 \Rightarrow by =- ax - c \Rightarrow y =- \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Fazendo $m = \frac{-a}{b}$ e $n = \frac{-c}{b}$ temos a equação $y = mx + n$, chamada de equação reduzida da reta r, onde $\boldsymbol{m}$ é chamada de coeficiente angular da reta e $\boldsymbol{n}$ o seu coeficiente linear. Os coeficientes angular m e linear n da reta n, são importantes para as diferentes variações das posição de uma reta no ℝ² a destacar:

- o número real n é a ordenada do ponto P onde a reta r intersecta o eixo OY e se $n = 0$, r passa pela origem;
- o número real m chamado de inclinação ou coeficiente angular da reta está associado ao ângulo de inclinação α da reta r com o eixo OX e pode ser definido como tg α. A Figura 24 mostra essa relação e a partir dela podemos afirmar que:

Figura 24 - O coeficiente angular da reta



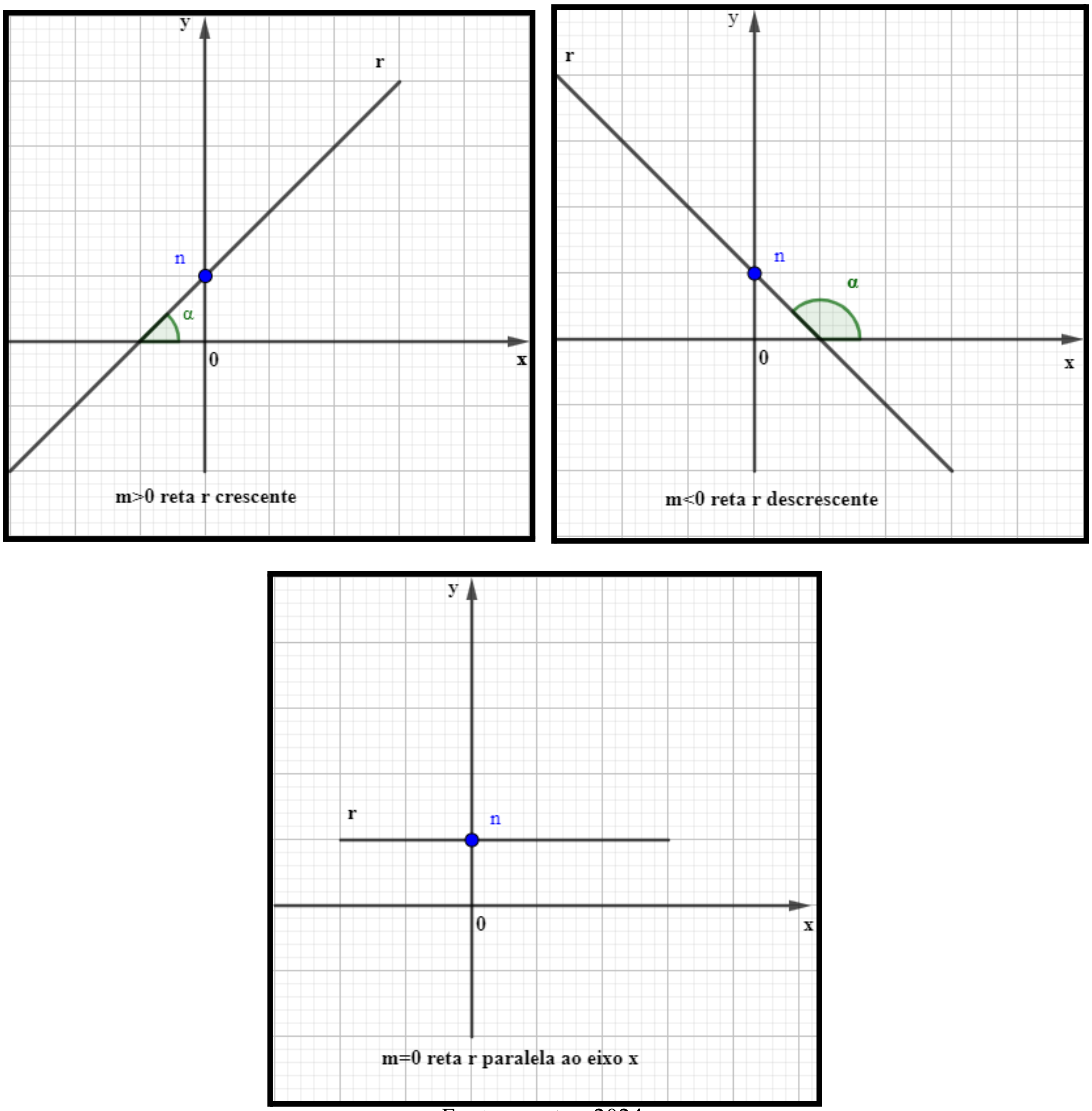
Fonte: Disponível em:https://promilitares.com.br/concursos-militares/conteudo/equacao-reduzida-da-reta/ Acesso em: 01, Maio 24

Tomando A e B pontos distintos da reta, conforme a Figura 23 , substituindo A e B na equação $y = mx + n$, temos $y_A = mx_A + n$ e $y_B = mx_B + n$ então segue:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(m.x_B + n) - (m.x_A + n)}{x_B - x_A} = \frac{m(x_B - x_A)}{(x_B - x_A)} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

- Tomando $y = mx + n$, como uma função, o valor real de m, é a variação entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto um ponto a outro sobre a reta, sendo que para $m > 0$, temos um ângulo agudo e uma função crescente e para $m < 0$ temos uma função decrescente e um ângulo obtuso.
- Para $m = 0$, teremos uma reta paralela ao eixo OX e uma função constante. A Figura 25 ilustra essas variações.

Figura 25 - O coeficiente angular m e as inclinações da reta r



Fonte: o autor, 2024.

Exemplo 13: Considere os pontos $P = (-1, 3)$ e $Q = (2, 2)$, determine a equação reduzida da reta determinada por eles.

Resolução: Pela definição 6, temos que a reta r a ser determinada tem equação $y = mx + n$. Podemos determinar sua equação substituindo os pontos P e Q na equação que eles satisfazem, com efeito temos:

- (I) para $P = (-1, 3) \Rightarrow 3 =- m + n \Rightarrow$ 3=-m+n;
- (II) para $Q = (2, 2) \Rightarrow 2 = 2m + n$.
- Fazendo (II) - (I) temos:

  $2m - n = n =- 1 \Rightarrow 2m =- 1 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}$

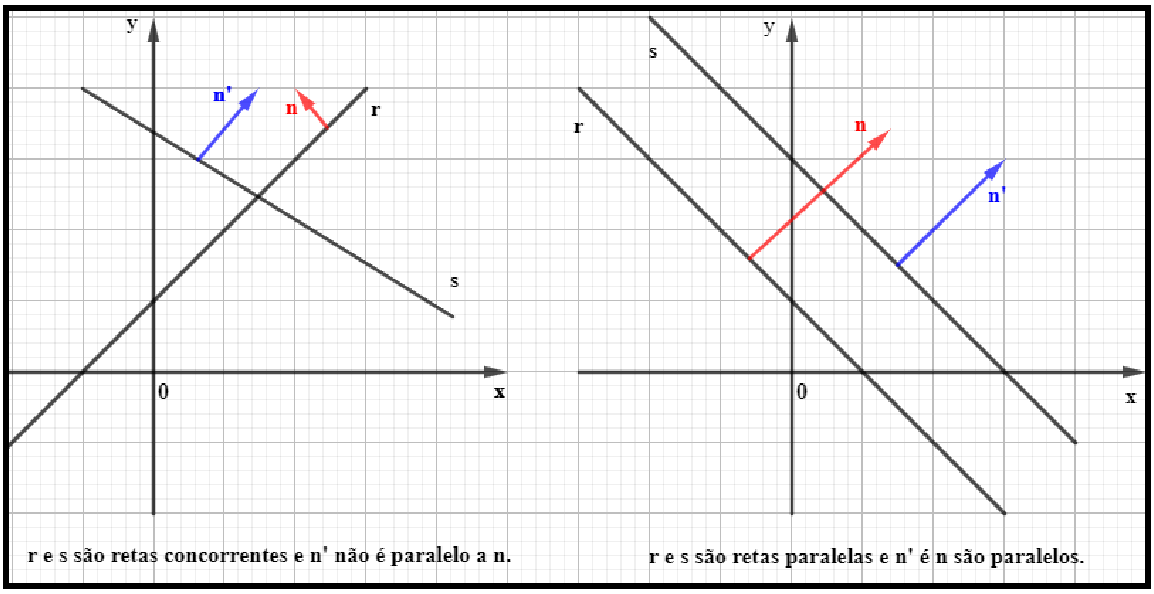
De (I) vem: $n = 3 + m \Rightarrow n = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$, a equação reduzida de r.

4.5.2 Posição relativa entre retas num plano

Duas retas r e s do plano podem ser concorrentes (retas que se intersectam em um único ponto, ou seja, $r \cap s = P$ ou paralelas (distintas ou coincidentes), sendo que as retas paralelas coincidentes são iguais, e as paralelas distintas são aquelas em que a intersecção é vazia, ou seja, $r \cap s = \{\ \}$.

As posições relativas entre duas retas r e s respectivamentes de equações r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$, estão associadas a posição dos seus respectivos vetores normais conforme ilustra a Figura 26 a seguir:

Figura 26- Posição relativa entre retas e o vetor normal



Fonte: o autor, 2024

Podemos dessa forma reconhecer a posição relativa entre retas a partir dos coeficientes angulares das equações. Como $n = (a, b)$ e $n' = (a', b')$ são vetores normais a r e s nesta ordem, temos pelo Quadro 3 a seguir que:

Quadro 3- Relação entre os vetores normais e os coeficientes angulares das retas r e s

$$r \parallel s \Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

$$r \nparallel s \Leftrightarrow n \nparallel n' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$r \perp s \Leftrightarrow n \perp n' \Leftrightarrow n.n' = 0 \Leftrightarrow a.a' + b.b' = 0$$

Fonte: o autor, 2024.

Para demonstrar os resultados apresentados no Quadro 3, seguem as proposições:

Proposição 1

As retas $r: ax + by = c$ e $s: a'x + b'y = c'$ são paralelas ou coincidentes se e somente se existe $\lambda \neq 0$ tal que $(a', b') = \lambda.(a, b)$, isto é, se e somente se seus vetores normais são múltiplos.

Demonstração

Suponhamos que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' \neq \lambda c$ e que $\lambda \neq 0$. Tomando um ponto $P = (x, y) \in r$, ou seja , $ax + by = c$ então temos:

$$\lambda ax + \lambda by = \lambda c \Leftrightarrow a'x + b'y = \lambda c \neq c'.$$

Dessa forma, garantimos que se $P = (x, y) \in r$, então $P = (x, y) \notin s$, ou seja, r $\cap$ $s \neq \{\}$. Porém, se $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ e $\lambda \neq 0$, então temos que:

$$ax + by = c \Leftrightarrow \lambda ax + \lambda by = \lambda c \Leftrightarrow a'x + b'y = c'.$$

Ou seja, as retas r e s são coincidentes.

Agora, supondo que $r \cap s = \{\}$ ou $r = s$ são paralelas ou coincidentes, temos pelo sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

Neste caso o sistema possui uma única solução dada por:

$$x = \frac{c.b' - c'.b}{a.b' - a.b} \;\; e \;\; y = \frac{c.'a - c.a'}{a.b' - a'.b}$$

Então, como as retas são paralelas ou coincidentes, devemos ter $a.b' - a'.b = 0$. O que garante que os vetores $(a, b)\ e\ (a', b')$ são múltiplos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a', b') = \lambda.(a, b)$. Como $(a, b) \neq (0, 0)\ e\ (a', b') \neq (0, 0)$, devemos ter $\lambda \neq 0$.

Proposição 2

As retas $r: ax + by = c\ e\ s: a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se e somente se seus vetores normais $n = (a, b)\ e\ n' = (a', b')$ são perpendiculares, ou seja, $a.a' + b.b' = 0$.

Demonstração

Se as retas $r\ e\ s$ são perpendiculares, então o ângulo formado entre elas é de $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow cos\frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow v.w' = 0$, sendo $v\ e\ w$ vetores paralelos às retas $r\ e\ s$ respectivamente. Então, como $n = (a, b) \perp r$ e $n' = (a', b') \perp s$ tomando $v = (-\ b, a)$ // r e $w = (-\ b', a')$ // s. Então, $r \perp s$, se e somente se

$$v.w = (-\ b).(-\ b') + a.a' \Rightarrow a.'a + b.b' = 0.$$

Os resultados demonstrados anteriormente, nos permite explorar duas novas proposições que são muito úteis acerca da forma como a equação de reta é apresentada e consequentemente a relação que existirá entre os seus coeficientes angulares dadas as posições relativas entre as retas. Dessa forma, dadas as retas $r: y = mx + n\ e\ s: y = m'x + n$, ambas na forma reduzida temos dois resultados que podemos demonstrar a seguir:

I) Se r e s são paralelas então $m = m'$ e $n \neq n'$;

II) Se r e s são perpendiculares dados que $m \neq 0$ e $m' \neq 0$, então $m.m' =-\ 1$.

<u>**Demonstração**</u>

Para o resultado I, temos que como $r: mx - y =-\ n$ e s: m'x-y=-n' os vetores normais dessas duas retas são respectivamente iguais a $n = (m, -\ 1)\ e\ n' = (m', -\ 1)$. Então, temos que:

$$r//s \Leftrightarrow n//n' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -m' & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m = m'$$

dessa forma temos que r é paralela a $s\ se\ m = m'$.

Para o resultado II, temos que se $r \perp s$, então os vetores normais de $r\ e\ s$ respectivamente, $n = (m - 1)\ e\ n' = (m', -\ 1)$ são ortogonais.Logo, teremos:

$$r \perp s \Leftrightarrow n.n' = 0 \Leftrightarrow (-\ m).(m') + 1 = 0$$

Dessa forma, $r \perp s \Leftrightarrow m.m' =-\ 1 \Leftrightarrow\ m' =-\frac{1}{m}$ Seguem alguns exemplos que ilustram os últimos resultados demonstrando anteriormente.

Exemplo 14: Encontre a equação da reta s que passa pelo ponto $A = (-3, 2)$ e é paralela à reta $s: y = 3x + 2$

Resolução: A equação da reta s é da forma $s: y = 3x + ns$, pois se r // s então $r \ e \ s$ têm a mesma inclinação (coeficiente angular) $m = 3$m. Como o ponto $A = (-3, 2) \in s$, as coordenadas $x = -3 \ e \ y = 2$, do ponto A, devem satisfazer a equação de s, então segue que: $2 = 3(-3) + n \Rightarrow 2 = -9 + n \Rightarrow n = 11$. Temos então, $s : y = 3x + 11$.

Exemplo 15:

Obtenha as equações cartesianas das retas perpendiculares à reta r que passa pelos pontos de coordenadas $A = (1, 1) \ e \ B = (2, 4)$.

Resolução: A reta r tem coeficiente angular $m = \frac{4-1}{2-1} = 3$. Pelo resultado II, a reta r tem inclinação $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$. Logo, a equação reduzida de uma reta perpendicular a r é da forma:$r': y = -\frac{1}{3}x + d, \ com \ d \in \mathbb{R}$

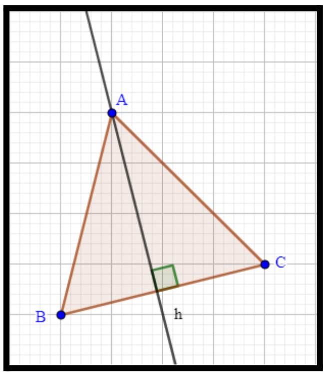
Variando d, obtemos qualquer reta perpendicular a reta r. Dessa forma temos uma família de retas perpendiculares a r com equação cartesiana geral igual a $r': x + 3y = 3d$ fazendo $3d = f$, temos o resultado: $r': x + 3y = f$.

Exemplo 16

Determinar a equação da reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC. Dados $A = (5, 5)$, $B = (1, 0) \ e \ C = (6, 1)$

Resolução:Como h passa por A e é perpendicular à reta suporte da base BC do triângulo ABC, temos que o coeficiente angular $m_{BC} = \frac{1-0}{6-1} = \frac{1}{5}$. Portanto como $h \perp BC$ e $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{5}{1}$. Com efeito, temos $h: y = -5x - n$, como $A = (5, 5)$ é ponto da reta h, temos:$5 = -5.5 + n \Rightarrow n = 5 + 25 = 30$. Logo, $h : y = -5x + 30$ como representado na Figura 27.

Figura 27- Reta suporte da altura AH do ΔABC



Fonte: o autor, 2024.

4.5.3 Distância entre ponto e reta

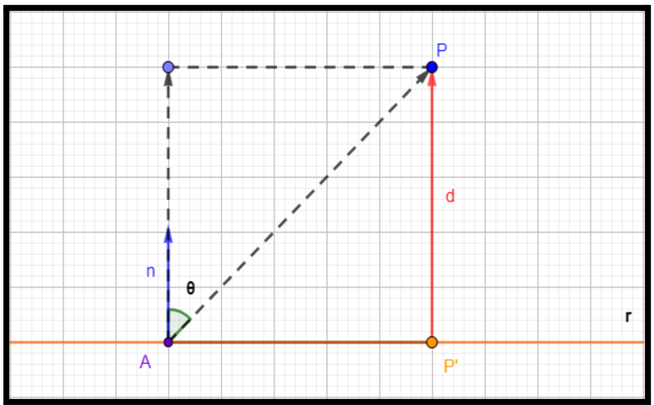
A distância entre um ponto P e uma reta r é, por definição a distância entre P e a sua projeção ortogonal[14] P' sobre r. Daí segue o seguinte teorema a ser demonstrado:

Teorema 1
Sejam $r: ax + by + c = 0$ uma reta e $P = (x_p, y_p)$ P = (um ponto do plano). Então, a distância de P a reta r é dada por:

$$d_{P\,r} = \frac{\left|a.x_p + b.y_p + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

<u>Demonstração:</u>
Para essa demonstração, vamos considerar a Figura 28, como suporte.

Figura 28 - Demonstração da distância entre ponto e reta



Fonte: o autor, 2024

Seja a distância $d_{P'P}$ e dados $r: ax + by = c$ e $P = (x_p, y_p)$, podemos calcular a distância da seguinte maneira:

1. Tomemos um ponto $A = (x_1, y_1)$ em r:

Se A ∈ $r \Rightarrow ax_1 + b.y_1 = c$

2. Como $P'P$ é a projeção de AP na direção de $n = (a, b)$, vetor normal à reta r e sendo θ o ângulo entre AP e n temos:

$$d_{P'P} = |AP|.\,|cos\,\theta| = |AP\,|.\left|\frac{AP.n}{|AP|.|n|}\right| = \left|\frac{AP.n}{|n|}\right|$$

3.Como $AP = P - A = (x_p - x_1, y_p - y_1\ )$ e $n = (a, b)$, temos que

[14] É a distância entre um ponto e a reta conduzida pelo ponto.

$$d_{P'P} = \left|\frac{AP.n}{|n|}\right| = \left|\frac{(x_p - x_1).a + (y_p - y_1).b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{ax_p - ax_1 + by_p - by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Mas como de **(1)** vem que $c = - ax_1 - by_1$, então temos como efeito que a $d_{P'P}$ denominada a distância entre P e P' por $d_{P\,r}$, distância entre o ponto P e a reta r dada.

$$d_{P\,r} = \frac{|a.x_p + b.y_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esse resultado será de grande valia para as próximas seções deste capítulo sendo utilizado para garantir outras propriedades e definições. A seguir alguns exemplos que servem de aplicação desse resultado.

Exemplo 17

Qual a distância entre o ponto $P = (7, -3)$ e a reta $r: 8x + 6y + 17 = 0$?

Resolução: Aplicando o resultado demonstrado anteriormente, temos que $a = 8$; $b = 6$ e $c = 17$ e que o ponto $P = (x_p, y_p) = (7, -3) =$, então $x_p = 7$ e $y_p = -3$ assim segue:

$$d_{P\,r} = \frac{|a.x_p + b.y_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|8.7 + 6.(-3) + 17|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{|56 - 18 + 17|}{\sqrt{64+36}} = 5,5$$

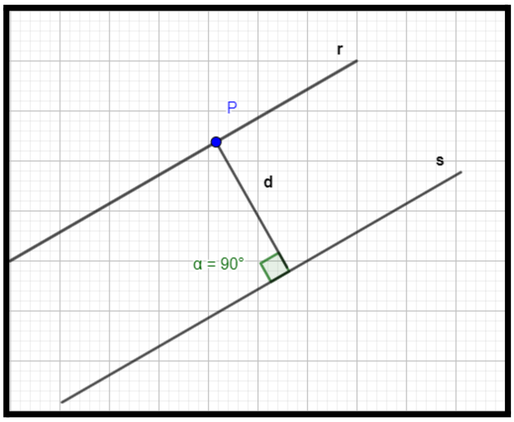
Exemplo 18

Qual é a distância entre as retas $r: x + 2y + 3 = 0$ e $s: x + 3y + 13$?

Resolução: Primeiro podemos garantir que as retas r e s são paralelas pois, ambas têm os mesmo coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$. Por outra lado, a distância entre r e s é a distância entre um ponto P, com $P \in r$, e a reta s. Fazendo $y = 0$ em $r: x + 2y + 3 = 0$ temos o seguinte resultado:

$x + 2.(0) + 3 = 0$. Logo se $x = -3 \Rightarrow P = (-3, 0)$ conforme mostra a Figura 29.

Figura 29 - Distância d entre retas paralelas



Fonte: o autor,2024.

Assim, como $P = (-\ 3, 0) \in r$ temos:

$$d_{P\,r} = \frac{|a.x_P+b.y_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|(-3)+2.(0)+13|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Na próxima seção vamos apresentar a definição de lugar geométrico e dar início ao estudo de alguns lugares geométricos. Nosso objetivo principal ao trazer essa seção é o de, mais adiante,estudar a circunferência e seus elementos e a sua definição como conjunto de pontos com determinada condição. Nesse sentido, a próxima seção nos dará suporte para desenvolver estudos acerca da circunferência e dos seus principais elementos no $\mathbb{R}^2$.

4.6 Lugar Geométrico

Segundo Machado (1982), segue a definição de lugar geométrico:

Definição 7: Denominamos lugar geométrico (l.g.) a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

Dessa forma, fixado um plano, para afirmarmos que um determinado conjunto de pontos L é o lugar geométrico de uma propriedade P, devemos assegurar que duas condições ocorrem:

- **(1)** todos os pontos de L satisfazem a condição P ;
- **(2)** nenhum outro ponto do plano que esteja fora de L satisfaz a condição P .

Ao estudar lugares geométricos no $\mathbb{R}^2$, como por exemplo, uma reta e o seu conjunto de infinitos pontos, temos que nos atentar à equação de um lugar geométrico do plano cartesiano. Nesse sentido, para toda equação nas incógnitas $x\ e\ y$ cujas soluções (x, y) são coordenadas dos pontos do l.g.(lugar geométrico), basta considerar um ponto genérico $P = (x, y)$ e impor que P satisfaz à condição para um ponto pertencer ao l.g. (isto é, P deve possuir a propriedade dos pontos do l.g.). Já estudamos em seções anteriores que, para que um ponto seja pertencente a uma reta, ele deverá satisfazer sua equação.

Para exemplificar, são exemplos de lugares geométricos importantes: a circunferência, a reta mediatriz de um segmento e a reta bissetriz de segmento.

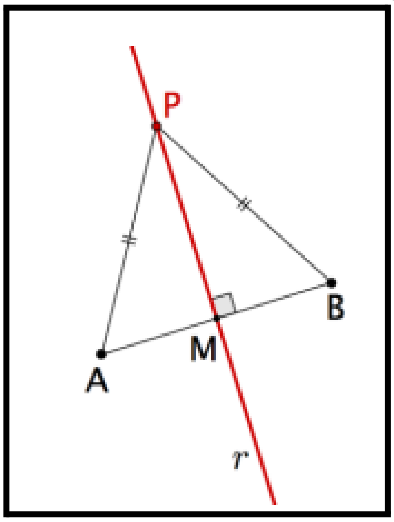
Entre os exemplos citados, destacamos inicialmente a ideia da reta mediatriz de um segmento como um lugar geométrico e que tal forma de abordagem está associada à geometria plana. Dessa forma segue que a seguinte proposição:

Proposição 3 : A mediatriz de um segmento AB é o lugar dos pontos equidistantes de $A\ e\ B$.

Demonstração:

Essa demonstração foi proposta por (Wagner, 2020). Nela, define-se que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio. Sabemos que todo ponto P da mediatriz de um segmento AB equidista de A e de B . De fato, observando a Figura 30, os triângulos são congruentes (caso LAL) e, portanto, $PA = PB$.

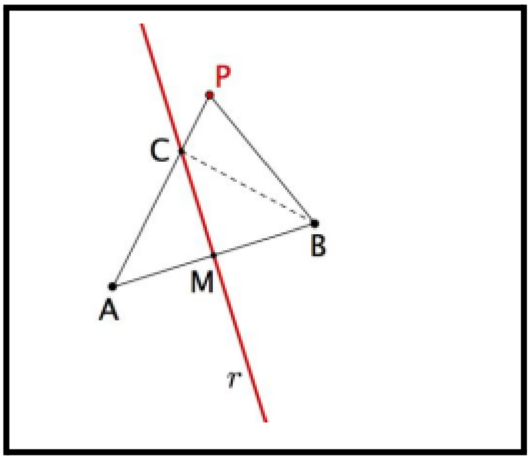
Figura 30 - ΔABP e a reta r mediatriz do segmento AB



Fonte: PAPMEM, 2020

Logo: $PA < PC + CB = PC + CA = PA$

Figura 31 - Posição do ponto P em relação a semiplanos.



Fonte: PAPMEM, 2020

Esse é fato bastante intuitivo: se P está no semiplano que contém B então ele está mais próximo de B do que de A . Naturalmente que, no outro semiplano o argumento é o mesmo.

Dessa forma podemos então dizer que a mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e de B

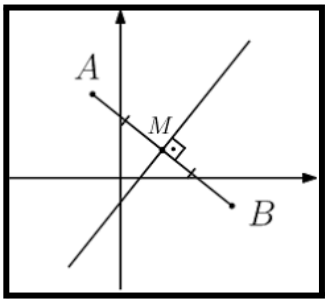
Após a demonstração anterior, temos o seguinte exemplo que utiliza a definição da mediatriz como lugar geométrico.

Exemplo 19

Dados $A = (0, 2)\ e\ B = (3, 1)$, podemos obter a equação da mediatriz de AB.Então, sendo $P = (x, y) \in mediatriz\ de\ AB \Leftrightarrow d_{AP} = d_{BP} \Leftrightarrow d^2_{AP} = d^2_{BP} \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow 6x - 2y - 6 = 0$. Logo , $r: 3x - y - 3 = 0.$

Portanto, temos a equação geral de uma reta r, chamada de mediatriz do segmento AB.Assim, tomando qualquer ponto P de r, temos a equidistância $d_{AP} = d_{BP}$, garantida.

Figura 32 - Reta mediatriz do segmento AB



Fonte: o autor, 2024

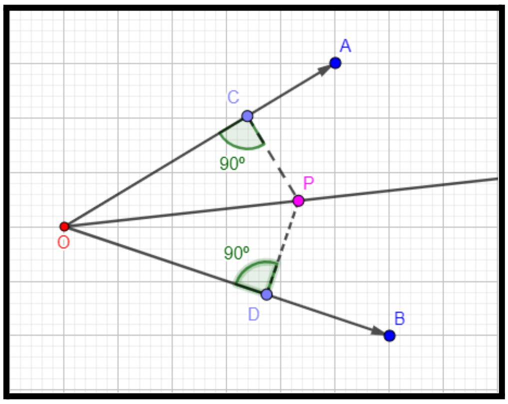
Dando continuidade ao estudo de alguns lugares geométricos, segue a definição 8.

Definição 8: A bissetriz de um ângulo é a semirreta que o divide em dois ângulos congruentes com origem no vértice desse ângulo.

A bissetriz como *l.g* (lugar geométrico) pode ser caracterizada pela seguinte proposição.

Proposição 4: Seja $\angle$ AOB um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então $d_{AP} = d_{BP} \Leftrightarrow P \in (bissetriz\ de\ \angle AOB)$

Figura 33 - Bissetriz de um ângulo

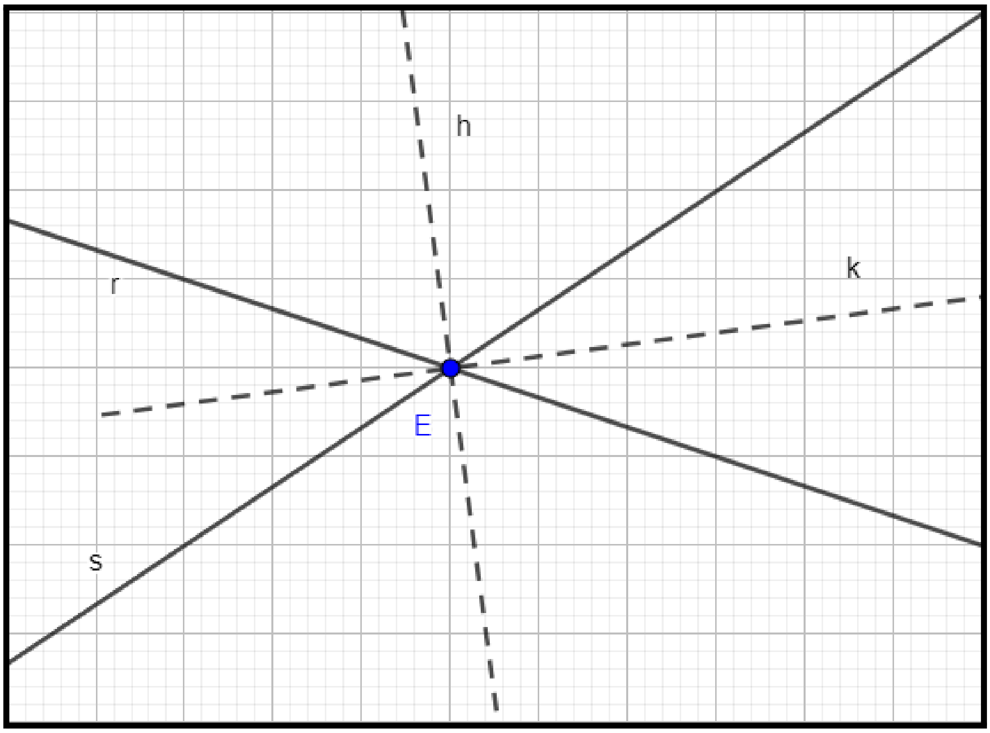


Fonte: o autor, 2024.

Seja $\angle$AOB um ângulo qualquer e P um ponto equidistante às semirretas $OA\ e\ OB$, de forma que essa distância seja realizada pelos pontos $C \in OA\ e\ D \in OBC$, ou seja, os segmentos $PC\ e\ PD$ são perpendiculares a $OA\ e\ OB$, respectivamente. Observe que os triângulos ΔPCO e ΔPOD são congruentes pelo caso LLAo (Lado – Lado - Ângulo oposto, pois OP é comum aos dois triângulos, $PC \cong PD$ (P equidista de $C\ e\ D$), e $\angle$ODP ≅ $\angle$OCP (ângulos retos). Daí, segue que $\angle$COP ≅ $\angle$DOP, o que mostra que a semirreta OP divide o ângulo $\angle$AOB ao meio e, portanto, é a bissetriz. Reciprocamente, tome como premissa que OP é a bissetriz do ângulo $\angle$AOB, em que P é um ponto arbitrário. Observe que essa semirreta divide o ângulo $\angle$AOB nos ângulos $\angle$AOP e $\angle$BOP de mesma medida. Considere as retas perpendiculares às semirretas $OA\ e\ OB$ que contêm P de forma que as interseções entre as perpendiculares e as semirretas definam os pontos $C\ e\ D$, respectivamente, sobre as semirretas $OA\ e\ OB$ Note que os triângulos ΔPCO e ΔPOD são congruentes pelo caso LAAo (Lado - Ângulo - Ângulo oposto), pois o segmento OP é comum, $\angle AOP \cong \angle BOP$ e $\angle PCO \cong \angle PBO$. Consequentemente, os segmentos $PC\ e\ PD$ são congruentes, ou seja, $d_{P,OA} = d_{P,OB}$.

Quando aplicado a retas $r\ e\ s$ concorrentes em E, conforme mostra a Figura 34 o conjunto de pontos equidistantes a estas retas concorrentes será o *l.g* denominado bissetriz.

Figura 34 - Bissetriz como *l.g.*



Fonte: o autor, 2024.

Dada a demonstração da proposição 4, um exemplo que podemos explorar de lugar geométrico é aquele que é constituído pelas bissetrizes dos ângulos formados por retas que é o lugar geométrico dos pontos. Para exibirmos esse resultado, segue o exemplo.

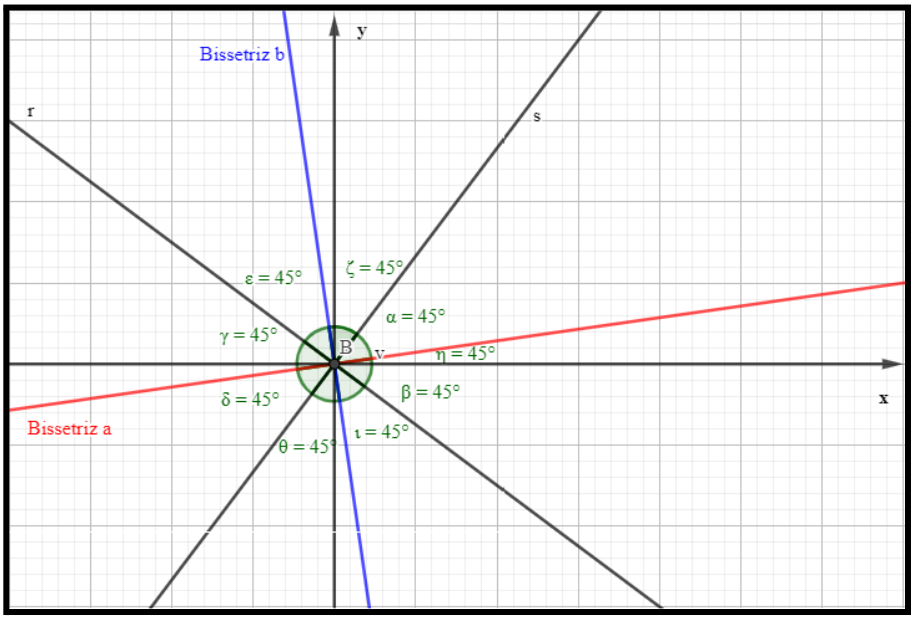
Exemplo 20

Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas $r: 3x + 4y = 0$ e $s: 4x - 3y = 0$.

Resolução:Tomando $P = (x, y) \in l.g. \Leftrightarrow d_{P,r} = d_{P,s} \Leftrightarrow \left|\frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{4x+3y}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| \Leftrightarrow \frac{3x+4y}{5} = \frac{4x-3y}{5}$ ou $\frac{3x+4y}{5} = \frac{-4x+3y}{5} \Leftrightarrow x - 7y = 0$ ou $7x + y = 0$

Concluímos que o *l.g.* é formado pelas retas de equações Bissetriz $a: x - 7y = 0$ e pela Bissetriz $b: 7x + y = 0$ como apresentado na Figura 35 a seguir com a respectiva representação geométrica desse *l.g.*

Figura 35 - Representação das bissetrizes como l.g



Fonte: o autor, 2024

4.7 Estudo da circunferência

Devido a seu aspecto visual, bem como às características próprias, a circunferência é uma forma geométrica utilizada em várias áreas, tal como Engenharia, Artes, e Agricultura e, em todo progresso da humanidade. Além disso, existem evidências históricas que mostram que os primeiros povos a usarem o conceito de comprimento da circunferência foram os egípcios e os babilônios, por volta de 1800 a.C. (Eves, 2004; Pitombeira; Roque, 2012).

A circunferência e o círculo estão sempre presentes no nosso cotidiano, assim, vemos diversos objetos em nossa volta que tenham o formato circular e que são de utilização fundamental para situações práticas.

Associar uma equação a uma circunferência no $\mathbb{R}^2$ e estudar suas diferentes posições relativas entre ponto, reta e duas ou mais circunferências, será nossa proposta nas próximas seções. Esta abordagem será importante, pois, além de alinhar os conceitos da Geometria Plana, usaremos a Geometria Analítica Plana para mostrarmos resultados importantes acerca da circunferência, tomando como ponto de partida sua definição como um *l.g.*(lugar geométrico). Além disso, entre as atividades desenvolvidas em sala de aula, nos Problemas Geradores e de Aprofundamento no desenvolvimento da MEAAMaRP, a circunferência na sua abordagem analítica, foi objeto de ensino-aprendizagem que procuramos desenvolver.

Tratando uma circunferência como um conjunto de pontos e baseando-nos nas definições e resultados acerca de lugar geométrico, os quais foram apresentados na seção anterior, apresentamos a seguinte definição, segundo Machado(1982), para circunferência:

Definição 9: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo C, denominado centro. Cada segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado de raio r. Dessa forma, a circunferência é um lugar geométrico que apresenta uma equação cartesiana para esse conjunto de pontos que será apresentada na próxima seção.

4.7.1 Equação da circunferência

A equação de uma curva em $x\ e\ y$ apresenta soluções (x, y) que são coordenadas dos pontos dessa curva. No caso de uma circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r, dados, temos:

$P = (x, y) \in$ curva$\Leftrightarrow d_{CP} = r \Leftrightarrow d_{CP}^2 = r^2$

Utilizando (4.1), fórmula da distância entre dois pontos,obtemos:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2 \text{ } \textit{Equação Reduzida da Circunferência} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Uma outra maneira de escrever a equação de uma circunferência é através da chamada equação geral, que pode ser obtida desenvolvendo a equação reduzida. Dessa forma segue que:

$\Rightarrow x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + Ax + y^2 + By + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ *Equação Geral da Circunferência* **(4.11)**

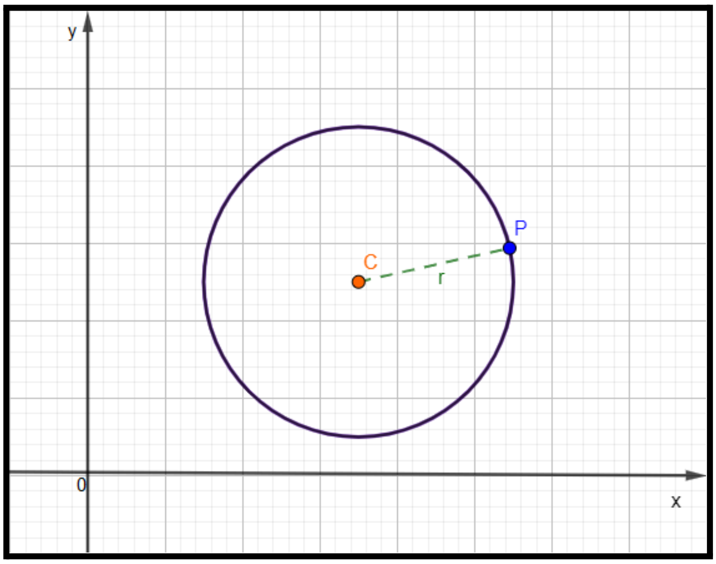
Para a equação nessa forma podemos afirmar ainda que:

- $-2x_0 = A \Rightarrow x_0 = -\frac{A}{2}$
- $-2y_0 = B \Rightarrow y_0 = -\frac{B}{2}$;
- $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = C \Rightarrow r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C}$.

Os resultados apresentados anteriormente nos levam a tirar algumas conclusões importantes sobre a equação de uma circunferência dados que:

- se $x_0^2 + y_0^2 - C > 0 \Rightarrow$ *temos a equação de uma circunferência de centro* $C = (x_0, y_0)$. Nesse caso, as soluções (x, y) da equação são as coordenadas dos pontos da curva;
- se $x_0^2 + y_0^2 - C = 0 \Rightarrow$ *temos a equação de uma circunferência de centro* $C = (x_0, y_0)$. Nesse caso, dizemos que a equação tem solução única dada por $x = x_0$ e $y = y_0$. E a equação é o ponto de coordenadas (x_0, y_0) ;
- se $x_0^2 + y_0^2 - C < 0 \Rightarrow$ *o raio r não existe*. Então, não temos a equação de uma circunferência.

Figura 36 - Circunferência de centro C e raio r



Fonte: o autor, 2024

As duas formas de representar a equação de uma circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r podem ser utilizadas para explorar exemplos em que podemos escrever de um formato para o outro. Com efeito, seguem alguns exemplos:

Exemplo 21:

Dada a circunferência de equação geral igual a $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0$, determine seu centro C e seu raio r.

Resolução:Podemos determinar seu centro e raio utilizando as relações:

- $-2x_0 = A \Rightarrow x_0 =- \frac{A}{2} \Rightarrow Para\, A =- 8 \Rightarrow x_0 = 4.$
- $-2y_0 = B \Rightarrow y =- \frac{B}{2} \Rightarrow Para\, B = 12 \Rightarrow y_0 = 6.$
- $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = C \Rightarrow r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C} \Rightarrow Para\, C = 3 \Rightarrow r = \sqrt{49} = 7.$

Logo, seu centro $C = (4, 6)$ e seu raio é igual a 7.

Outra forma de determinar o centro e o raio dessa circunferência seria completando o quadrado na equação $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0$. Dessa forma teremos:

$x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8x) + (y^2 - 12y) =- 3$

$\Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 12y + 36) =- 3 + 16 + 36$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 49$

Sendo este último resultado a equação reduzida da circunferência de centro $C = (4, 6)$ e raio igual a 7.

Exemplo 22: Mostre que existe um único ponto do ℝ² que satisfaz à equação

$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0,$

Resolução: A equação geral dada tem $A =- 2; B = 2\, e\, C = 2$. Para garantir o resultado desejado, podemos verificar a seguinte condição:

- se $x_0^2 + y_0^2 - C = 0 \Rightarrow$ *temos uma circunferência de centro* $C = (x_0, y_0)$.

Dessa forma, pela equação apresentada, temos

- $-2x_0 = A \Rightarrow x_0 =- \frac{A}{2} \Rightarrow Para\, A =- 2 \Rightarrow x_0 = 1.$
- $-2y_0 = B \Rightarrow y =- \frac{B}{2} \Rightarrow Para\, B = 2 \Rightarrow y_0 = -1.$
- $Como\, C = 2\, ,\, x_0 = 1\, e\, y_0 =- 1\, podemos\, utilizar\, x_0^2 + y_0^2 - C = 0$

Logo, temos que $x_0^2 + y_0^2 - C=(1)^2 + (-1)^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0.$

Então, temos do resultado esperado, que existe um único ponto do $\mathbb{R}^2$ que satisfaça $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ sendo esse ponto o próprio centro $C = (1, -1)$ da circunferência dada.

Nas próximas seções, vamos tratar das posições relativas envolvendo a circunferência e suas diferentes formas de apresentação de equação, fazendo também uma análise algébrica em cada caso em que as intersecções ocorrerem entre pontos,retas e circunferências. Nesses casos, vamos utilizar os resultados apresentados ao longo deste capítulo.

4.7.2 Posições relativas entre ponto, retas e circunferência

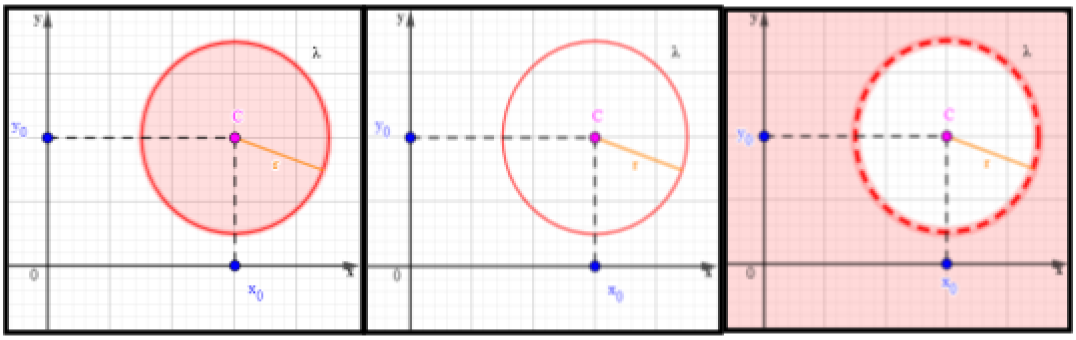
Nas seções anteriores, descrevemos as posições relativas entre duas retas no $\mathbb{R}^2$ agora, vamos explorar as posições relativas entre circunferências, retas e pontos, do ponto de vista algébrico. Para isso, iniciaremos com o enunciado da Geometria Plana sobre as diferentes posições entre ponto e circunferência e entre reta e circunferência. Adiante, trataremos das posições relativas entre circunferências.

Dado um ponto $P = (x, y)$ e uma circunferência λ de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r temos as seguintes posições relativas entre eles:

- P é interno a $\lambda \Leftrightarrow d_{PC} < r$, ou seja, um ponto qualquer é interno a uma circunferência se, e somente se, a distância desse ponto até o centro da circunferência é menor do que o raio da circunferência;
- P pertence a $\lambda \Leftrightarrow d_{PC} = r$, ou seja, um ponto qualquer pertence (ou está sobre) a uma circunferência se, e somente se, a distância desse ponto até o centro da circunferência é igual ao raio da circunferência;
- P é externo a $\lambda \Leftrightarrow d_{PC} > r$, ou seja, um ponto qualquer é externo a uma circunferência se, e somente se, a distância desse ponto até o centro da circunferência é maior do que o raio da circunferência.

Dessa forma, podemos definir o interior e o exterior de uma circunferência. O interior de uma circunferência é o conjunto dos pontos internos a ela, e o exterior de uma circunferência é o conjunto de pontos externos a ela, conforme mostra a Figura 37. Quando unimos o interior de uma circunferência à própria circunferência, temos um círculo ou um disco, sendo este um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado nesse plano é menor ou igual ao raio.

Figura 37 - Pontos interiores e exteriores (circunferência e círculo)



Fonte: o autor, 2024

Em relação às posições relativas entre reta e circunferências e considerando a Geometria Plana, temos que uma circunferência λ e uma reta r do plano podem ter três posições relativas a destacar:

I) $r \cap \lambda \Rightarrow$ *dois pontos de intersecção: a reta r é dita secante* à λ;

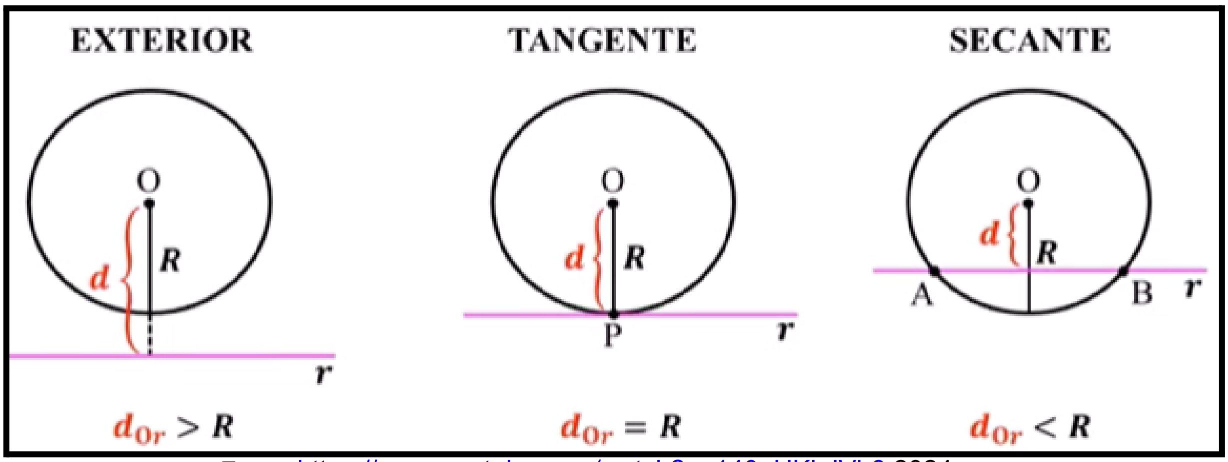
II) $r \cap \lambda \Rightarrow$ *exatamente um ponto de intersecção: a reta r é dita tangente* à λ;

Nesse caso, o ponto P de intersecção é chamado de ponto de tangência.

III) $r \cap \lambda = \{\,\} \Rightarrow$ *a reta r é dita exterior* à λ;

A Figura 38 a seguir, ilustra bem as situações apresentadas anteriormente onde os resultados serão demonstrados posteriormente.

Figura 38 - Posição relativa entre uma reta r e uma circunferência



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=140oHKhJVb8,2024.

Com relação à caracterização da tangência de uma reta a uma circunferência, temos os seguintes Teoremas 2 e 3, conforme Delgado et al (2017).

Teorema 2

Sejam λ a circunferência de centro O e raio $r > 0$, P um ponto de λ e r uma reta que passa por P. Então, r é tangente a λ no ponto P se e somente se r é perpendicular à reta que passa por A e P.

Demonstração:

Tome o plano YOX um sistema de eixos ortogonais com origem em O e eixo OX, positivo e contendo o ponto P. Nesse sistema de coordenadas, $A = (0,0)$, $P = (r,0)$ A=(0,0), e a reta s que passa por O e P é o eixo OX.

⇒ Suponhamos que r é tangente à λ no ponto P. Mostraremos que a equação cartesiana de r no sistema YOX é $r: x = r$.

Supondo por absurdo que , r não é vertical. Então, $r: y = ax + b$r. Como $P = (r,0)$ é ponto de r, teremos $0 = ar + b \Rightarrow b =- ar \Rightarrow y = a(x - r)$.

Dessa forma, dado o sistema:
$$\begin{cases} y = a(x-r) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Temos que $x^2 + y^2 = r^2$ é equação de uma circunferência λ do sistema XOY . Como um ponto é comum à reta r ao círculo λ se e somente se suas coordenadas satisfazem a duas equações do sistema, ao substituir $y = a.(x - r)$ em $x^2 + y^2 = r^2$ obtemos:

$$x^2 + a^2.(x - r)^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - r^2 + a^2.(x - r)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - r).(x + r) + a^2.(x - r)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - r).[(x + r + a^2.(x - r)] = 0$$

Então, temos que :

$x = r$ ou $x + r + a^2.(x - r)] = 0 \Leftrightarrow x = r \; ou \; x = \frac{r(a^2-1)}{1+a^2}$.

Dessa forma o sistema tem dois valores para abcissa de P e dois valores para ordenada de P, logo são dois pontos o que configura um absurdo., pois por hipótese a reta r e a circunferência λ são tangentes. Logo, ser uma reta não vertical é falsa, portanto r é vertical.

⇐ Reciprocamente, se r é a reta que passa P e é perpendicular à reta s, então, no sistema OYX, sua equação é x=r. Então, $\lambda \cap r = \{P\}$, ou seja, r é ponto de tangência a λ em P

Exemplo 23 (Coleção Profmat Geometria Analítica 2017 -Adaptada):

Seja λ a circunferência de centro $C = (2, 4)$ e que passa por $P = (2, -1)$. Determine a equação da reta r tangente a λ em P.

Resolução: A equação da circunferência λ dada é da forma:

$\lambda: \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = r^2 \, para \, r > 0.$

Como $P = (2, -1) \in \lambda \Rightarrow (2 - 2)^2 + (4 + 1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5.$

Logo, λ: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25 \, para \, r > 0.$

Utilizando o Teorema 2 temos que r é perpendicular a s que contém os pontos $Q \, e \, P$ e s é vertical, pois $Q \, e \, P$ têm abscissas iguais a 2. Dessa forma, a equação de s é s: $x = 2$ e a reta r deve ser horizontal, com pontos de ordenada -1, logo $r: y = -1$, sendo essa a equação da reta procurada.

Dando sequência ao estudo das posições relativas, segue o seguinte teorema:

Teorema 3 :

Seja $r: ax + by = c$ uma reta e λ uma circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$. Então, teremos:

I) $r \cap \lambda = \{ \}$ se e somente se $d_{C,r} > r$.

II) $r \cap \lambda = \{P\}$, sendo o ponto P único se e somente a $d_{C,r} = r$.

III) $r \cap \lambda$ consiste de exatamente dois pontos se e somente se $d_{C,r} < r$.

Demonstração:

Dadas as equações **I** de uma reta e **II** de uma circunferência de centro C e raio r>0, iniciaremos essa demonstração analisando o número de soluções do sistema formado por essas equações.

I- $ax + by = c$

II - $\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2$

Dessa forma, tomando $b \neq 0$ de I temos que $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Substituindo $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ em II obtemos a seguinte sequência de transformações:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} - y_0\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(x - x_0\right)^2 + \left(-\frac{1}{b}[ax - c + y_0 b]\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow\left(x - x_0\right)^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2(ax - c + y_0b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow\left(x - x_0\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2(ax - c + y_0b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(x - x_0\right)^2 + (ax - c + y_0b)^2 = b^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(x - x_0\right)^2 + (ax - ax_0 + ax_0 - c + y_0b)^2 = b^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(x - x_0\right)^2 + (a(x - x_0) + (ax_0 + y_0b - c))^2 = b^2 r^2.$$

Fazendo $x' = x - x_0$ e $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$ na equação anterior temos:

$$b^2(x')^2 + (a(x') + Q_0)^2 = b^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow b^2.(x')^2 + a^2.(x')^2 + 2ax'Q_0 + Q_0^{\ 2} = b^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2.(x')^2 + 2aQ_0x' + (Q_0^{\ 2} - b^2 r^2) = 0.$$

Essa equação tem solução única para x' (logo, uma única solução para x), se e somente se o seu discriminante for igual a zero. Dessa forma teremos

$$\Delta = (2aQ_0)^2 - 4(a^2 + b^2)(\ Q_0^2 - b^2 r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2Q_0^2 - 4a^2Q_0^2 + 4a^2b^2r^2 - 4b^2Q_0^2 + 4r^2b^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2r^2 - 4b^2Q_0^2 + 4r^2b^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^2(a^2 r^2 - Q_0^2 + r^2b^2) = 0$$

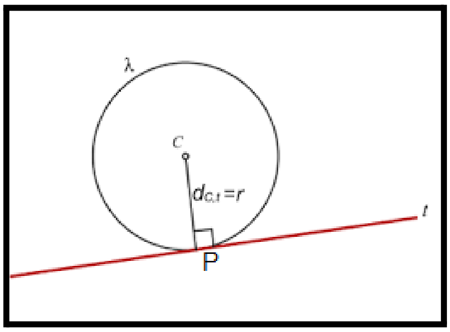
Como b$\neq$ 0, podemos definir que :

$$\Leftrightarrow a^2r^2 - Q_0^2 + r^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2(a^2 + b^2) - Q_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{Q_0^2}{(a^2+b^2)}$$

Como $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$ temos que: $r = \frac{\left|ax_0+by_0-c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d_{A,r}$ relação já demonstrada para a distância entre ponto e reta. Logo, $r \cap \lambda = \{P\}$, isto é, r é tangente a λ se e só se $r = d_{A,r}$, como ilustra a Figura 39.

Figura 39 - Reta r tangente à circunferência λ no ponto P



Fonte:mundo educação,2024.

Dessa forma o sistema formado pelas equações I e II pode continuar sendo analisado pela sua quantidade de soluções. Com efeito temos:

- o sistema não tem solução se e somente se $\Delta < 0 \Leftrightarrow d_{C,r} > r$;

A reta é exterior à circunferência.

- O sistema terá duas soluções se e somente se $\Delta > 0 \Leftrightarrow d_{C,r} < r$.

A reta é secante à circunferência

A seguir, mais um exemplo para ilustrar os resultados apresentados anteriormente.

Exemplo 24:

Verifique a posição relativa entre a reta r, dada pela equação $2x + y - 1 = 0$ e à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

<u>Resolução:</u> Primeiro vamos determinar as coordenadas do centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ é a medida do seu raio utilizando o método de completar os quadrados. Assim, segue que:

$x^2 + 6x \rightarrow$ completando o quadrado em x temos o resultado $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

$y^2 - 8x \rightarrow$ completando o quadrado em y temos o resultado $y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$.

Dessa forma para $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ temos que :

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 \quad \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Utilizando a equação reduzida da circunferência dada por $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$, temos que as coordenadas do centro C são $C = (-3, 4)$ e a medida do raio é $r = 5$.

Determinando a distância entre o centro $C = (-3, 4)$ e a reta r: $2x + y - 1 = 0$ temos:

$$d_{C,r} = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2.(-3)+1.4-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-6+4-1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Temos que a distância é menor que o raio, pois $\frac{3\sqrt{5}}{5} < 5$. Dessa forma, a reta é secante à circunferência.

Na próxima seção deste capítulo, vamos explorar as posições relativas entre duas circunferências, utilizando as definições e teoremas já explorados até aqui.

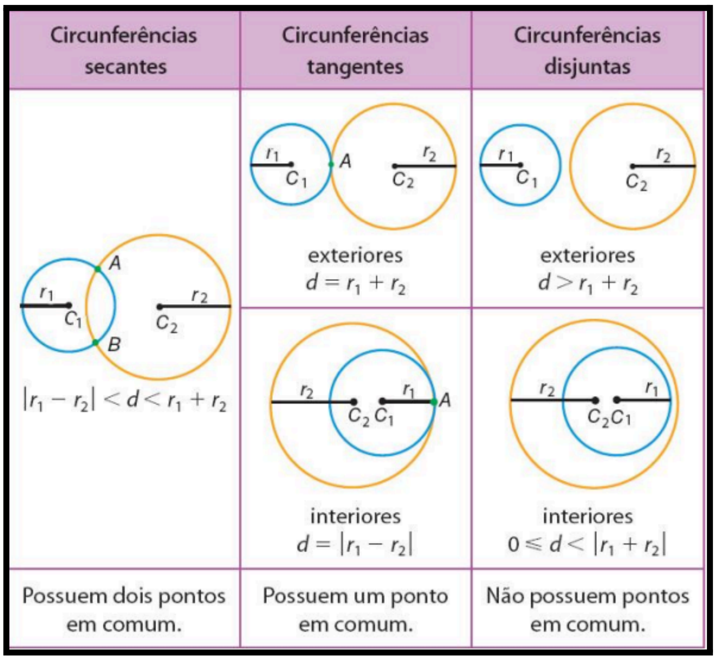
4.7.3 Posições relativas entre circunferência

Duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum. Considerando duas circunferências de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, a distância os centros será dada por $d_{C_1C_2}$.

A partir das equações das duas circunferências podemos descobrir quantos e quais são os pontos comuns entre elas resolvendo o sistema de equações formado por elas, em que ao discutir sua solução, podemos estabelecer condições algébricas que garantirão ou não solução para o sistema.

No Quadro 4, apresentamos as diferentes posições entre C_1 de raio r_1 e outra de centro C_2 de raio r_2.

Quadro 4 - Posição relativa entre duas circunferências



Fonte: https://engenhariaestacio.files.wordpress.com/2013/08/cc3b4nicas-circunferc3aancia-e-elipse.pdf, 2023

Observamos que a posição entre duas circunferências fica determinada pela comparação entre a distância d entre os centros C_1 e C_2, como apresentado no Quadro 4. As circunferências dadas podem apresentar infinitos, dois, um ou nenhum ponto de intersecção, conforme sejam, respectivamente, coincidentes, secantes, tangentes (exteriormente ou interiormente), ou de intersecção vazia (disjuntas) tanto exteriormente quanto interiormente uma a outra.

Para determinar as intersecções entre duas circunferências, podemos também resolver o sistema de equações formadas por tais circunferências e, em seguida, verificar a posição relativa entre elas, utilizando a relação de distância entre os centros e o raio. Porém, o sistema formado por essas equações apresentará ou não uma solução, conforme o valor discriminante da equação encontrada. Dessa forma, seguem alguns exemplos para verificação de tais resultados.

Exemplo 25:

Temos que duas circunferências de equações $C_1: x^2 + y^2 = 16 \; e \; C_2: x^2 + y^2 + 4y = 0$ são tangentes, isto é, possuem um ponto em comum. Determine a coordenada desse ponto.

<u>Resolução:</u>

Resolver o sistema de equaçõe $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

Temos pela 1ª equação que $x^2 + y^2 = 16$, então:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0 \rightarrow 16 + 4y = 0 \rightarrow 4y = -16 \rightarrow y = -16/4 \rightarrow y = -4.$$

$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow x^2 + (-4)^2 = 16 \rightarrow x^2 + 16 = 16 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

O ponto de intersecção das circunferências é $(0, -4)$.

Exemplo 26:

Dada as equações $C_1 \; e \; C_2$ de circunferências na forma geral de equação cartesiana no $\mathbb{R}^2$ igual a: $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \; e \; C_2: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ determine se elas possuem pontos em comum.

<u>Resolução:</u> Resolvendo o sistema por adição ao fazer $C_1 - C_2$ temos que:

$$-2x - 2y - 6 = 0 \rightarrow -x - y - 3 = 0 \rightarrow -y = x + 3 \rightarrow y = -3 - x.$$

Substituindo y em qualquer das equações temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

$x^2 + (-3 - x)^2 - 4x - 8(-3 - x) - 5 = 0.$

Dessa forma, chegamos a seguinte equação:

$2x^2 + 10x + 28 = 0$

Resolvendo a equação temos:

Δ = b² – 4ac

Δ = 10² – 4 . 2. 28

Δ = 100 – 224

Δ = – 124

Em razão do Δ < 0, a equação não possui raízes reais. Logo, as circunferências não possuem pontos em comum.

Exemplo 27 Esboce no plano cartesiano as circunferências de equações:

$$C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - x - y = 0$$

Em seguida, obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $A\ e\ B$ intersecção entre as circunferências dadas.

Resolução: Nesse caso, temos que determinar centro e raio de cada circunferência para realizar tal esboço.Utilizando as relações já exploradas anteriormente temos :

Para C_1

- $-2x_1 = A \Rightarrow x_1 = -\frac{A}{2} \Rightarrow x_1 = -1$
- $-2y_1 = B \Rightarrow y_1 = -\frac{B}{2} \Rightarrow y_1 = 2$
- $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = C \Rightarrow r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - C} \Rightarrow r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 - 0} = \sqrt{5}$

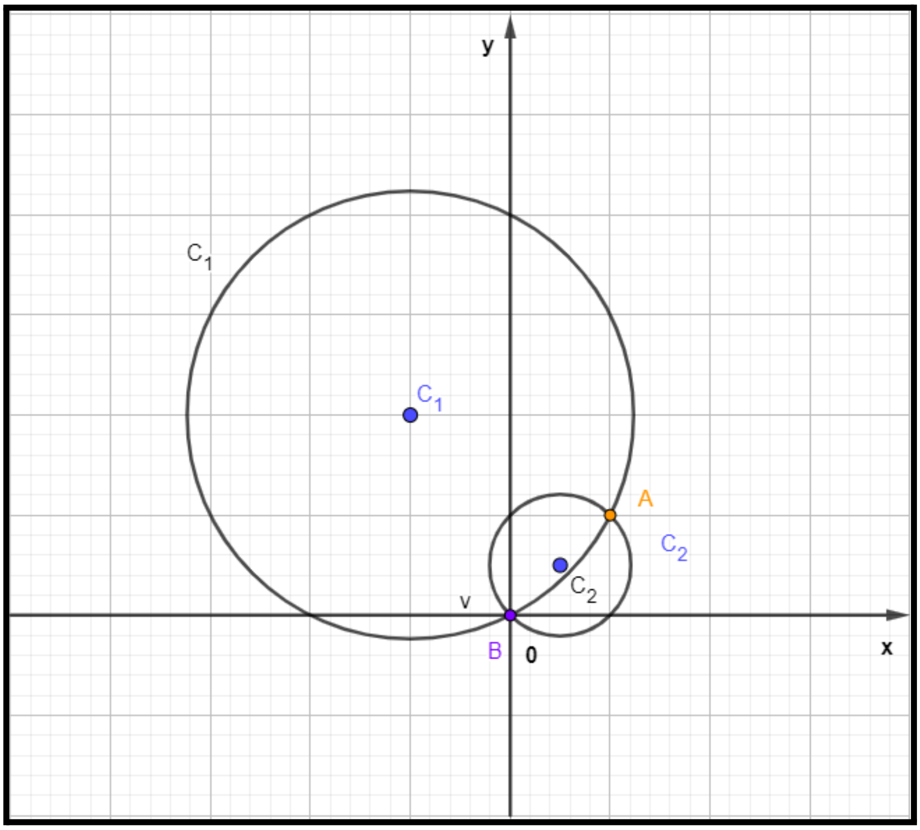
Para C_1

- $-2x_2 = A \Rightarrow x_2 = -\frac{A}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$
- $-2y_2 = B \Rightarrow y_2 = -\frac{B}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}$

- $x_2^2 + y_2^2 - r^2 = C \Rightarrow r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - C} \Rightarrow r_2 = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dados o centro e o raio dessas circunferências, temos o seguinte esboço de C_1 e C_2 o gráfico que representa o esboço das circunferências na Figura 40

Figura 40 - Esboço de C_1 e C_2



Fonte: o autor, 2024.

Determinando os pontos A e B intersecção entre C_1 e C_2

Para obter esse pontos,temos que obter a intersecção entre as circunferências resolvendo o sistema de equações formado por elas bastando fazer $C_1 - C_2$

Dessa forma, teremos: $3x - 3y = 0$, que será a equação da reta procurada, pois a distância d entre os centros das circunferências é dada por:

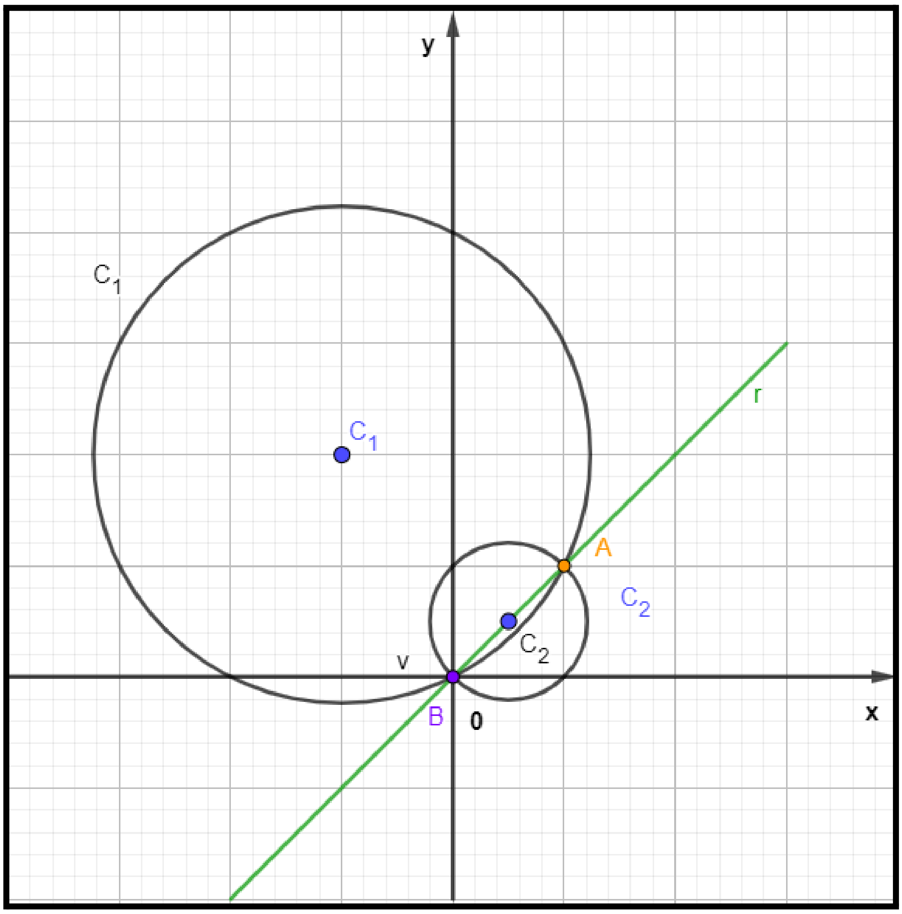
$$d_{c_1c_2} = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow |r_1 - r_2| < d_{C1,C2} < |r_1 + r_2|$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < \frac{\sqrt{10}}{2} < \left|\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

Logo, C_1 e C_2 são circunferências secantes tal que $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$. A Figura 41 a seguir, mostra a reta procurada e os pontos de interseção $A = (1, 1)$ e $B = (0, 0)$ que determinam a reta r

Figura 41 - Reta r secante a C_1 e C_2



Fonte: o autor, 2024.

No próximo capítulo serão abordados a metodologia e o contexto do trabalho em que foi desenvolvido em sala às sequência de atividades à luz da MEAAMaRP conforme Onuchic et al (2021) para posteriormente, analisarmos os protocolos e resultados dos dados dessa pesquisa de mestrado,

5 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

Os procedimentos de investigação são os mecanismos de coleta e de análise de dados que necessitam de uma metodologia de trabalho que permita fazer tal investigação. Esta pesquisa ocorreu no ambiente da sala de aula, abarcando todas as sutilezas e peculiaridades deste local. Nesta perspectiva, Luna (2019,p.15) afirma que, essencialmente, a pesquisa visa à produção de conhecimento novo, à relevante teórica e socialmente, o qual também seja fidedigno e que, dentre os objetivos a serem atingidos, esteja a demonstração da existência (ou da ausência) de relações entre diferentes fenômenos.

Como professor, venho, ao longo dos últimos anos, percebendo a necessidade de buscar novas metodologias de trabalho que favoreçam o ensino-aprendizagem e que, sobretudo, permitam que os estudantes sejam capazes de realizar conexões entre diferentes objetos matemáticos e seus registros, em busca da ampliação e da aplicação do conhecimento adquirido no ambiente escolar, associadas às vivências individuais. Nesse cenário, para esta pesquisa de Mestrado, propusemo-nos a investigar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) pode contribuir para o trabalho em sala de aula com tópicos de Geometria Analítica, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações. Nesse sentido, construímos e desenvolvemos, em sala de aula, uma sequência de atividades fundamentadas em Onuchic e Allevato (2014,2021) para, em seguida, analisar os dados coletados de forma a responder a nossos questionamentos nesta investigação.

Segundo Luna (2019), se o problema formulado constitui um conjunto de perguntas, às quais o pesquisador pretende responder ao final do trabalho, o passo seguinte deveria ser a determinação de um conjunto de informações a serem obtidas e que, uma vez analisadas, o encaminhariam até as respostas pretendidas. Nesse cenário, este capítulo é dedicado à metodologia e ao contexto da pesquisa, sendo dividido em duas seções. Na primeira seção, descrevemos a pesquisa qualitativa e suas características. Na segunda, apresentamos o contexto em que foi desenvolvido o produto educacional.

5.1 Pesquisa Qualitativa

A pesquisa que desenvolvemos teve, como ambiente referencial, a sala de aula e as diferentes experiências vivenciadas durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Desta forma, os eventos experimentados no cotidiano da sala de aula e as relações de trocas estabelecidas entre o professor e os estudantes colocaram a pesquisa no campo qualitativo e pedagógico.

> Algumas características básicas identificam os estudos denominados “qualitativos". Segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando “captar" o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes. Vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno (Godoy, 1995, p. 21).

Motivados pela mediação oportunizada pelo docente-pesquisador, os estudantes tenderam, paulatinamente, a assumir seu papel de protagonista na ação de resolver os problemas apresentando suas ideias, considerações, estratégias, recursos e conhecimentos utilizados, assim, demonstraram suas perspectivas, o que tornou possível compreender o processo em suas peculiaridades.

A coleta dos dados ocorreu em um ambiente cuja configuração não somente era de uma sala de aula ativa e eficazmente atuante, como também permeada pela dupla função de ser local de aprendizagem e construção de conhecimento e local de pesquisa e observação. Dado o número significativo de aulas envolvidas, a responsabilidade com a aplicação da pesquisa tornou-se ainda maior. Se, por um lado, todos os estudantes estavam cientes da participação na pesquisa, por outro lado, não deixavam de ser estudantes de uma escola da rede particular, imersos em um contexto de significativas exigências, uma vez que eram quase concluintes do Ensino Médio, o que apontava para logo estarem diante de concursos para ingresso no Ensino Superior. Não havia tempo a perder. Desse modo, minha responsabilidade em tornar o quanto mais significativo aquele momento a eles era uma constante. Os resultados da investigação poderiam ter sido outros daqueles aqui apresentados. E, fossem quais fossem eles, eu precisaria, ainda assim, mediar os processos e mostrar a viabilidade disto, ainda que não contemplasse a expectativa inicial.

O fato de professor e turma se conhecerem mutuamente, mesmo antes da realização da pesquisa, colaborou com o estabelecimento de vínculos de confiança, necessários para a fluidez do trabalho. Contudo, exigiu do professor-pesquisador maior atenção no momento da observação de campo e da análise dos dados, uma vez que o olhar atento sobre cada circunstância impediria que situações importantes não fossem consideradas. Para tanto, o diário de campo fez-se um importante instrumento auxiliar, pois as anotações recobravam a memória e corroboravam as análises posteriores.

A partir da construção coletiva dos estudantes para a formulação de respostas para os problemas apresentados, tendo o professor-pesquisador como mediador, a intenção e o desejo eram de impactar positivamente o ambiente da sala de aula. Segundo Onuchic e Noguti (2014), a pesquisa pedagógica busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula, utilizando para isso o ponto de vista do professor. Por este ponto de vista, espera-se compartilhar conhecimentos e experiências, como também desenvolver competências e autonomia do professor e dos estudantes.

> A pesquisa pedagógica envolve: a observação empírica da sala de aula; a reflexão sistemática; a documentação das experiências - pode ser voltada para estudo de pessoas, textos etc. Pode estudar o passado, o presente ou mesmo ser prospectiva. Esta modalidade de pesquisa deve possuir todas as características das demais pesquisas, logo, deve ser sistemática, ou seja, não pode ser casual ou arbitrária, deve estar baseada em teoria e contemplar as diversas áreas do conhecimento. Deve ser um meio de construção do conhecimento (UNIFAP, 2010, on-line).

Tendo em conta a análise das respostas produzidas pelos estudantes, a reflexão realizada, de forma sistemática e teoricamente fundamentada, tal como apontado, bem como o acompanhamento minucioso do trabalho deles em sala de aula, tudo isto permitiu a condução dos apontamentos feitos nesta investigação.

Diante disso, o trabalho desenvolvido, por meio da aplicação da MEAAMaRP, teve como um dos objetivos principais perceber se, ao aplicarmos esta Metodologia, haveria o favorecimento dos registros de representação semiótica e suas conversões por meio da coleta de dados e dos registros realizados pelos estudantes, ao desenvolverem, em sala de aula, os problemas geradores e de aprofundamento no campo da Geometria Analítica.

Sobre os possíveis riscos da pesquisa, como apontado pelo Conselho Nacional de Saúde, "Toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados" (Resolução 466, de 12 de dezembro de 2012, V – Dos riscos e benefícios), assim, tornou-se imprescindível atentar-nos para este fato. Convém explicitar que foram tomados todos os cuidados para que a identidade dos estudantes fosse integralmente preservada (assim, lendo os resultados aqui trazidos, não é possível identificar individualmente o autor deles) e para que os desconfortos produzidos pela participação em uma investigação desse teor fossem minimizados. Nesse sentido, os estudantes poderiam interromper, a qualquer momento e a partir do desejo deles, a participação na pesquisa. Durante a realização desta em sala de aula, as ações foram feitas em grupos e eles puderam se expressar entre pares. Aqueles que se sentiram mais à vontade realizaram colocações para toda a classe e, com o tempo, o número deles foi crescente. Não houve obrigatoriedade de exposição individual. Não houve a participação de outras pessoas, além do professor-pesquisador e dos estudantes da turma.

Como previsto na Resolução 466, de 12 de dezembro de 2012 (Conselho Nacional de Saúde, 2012) , "V.7 - Os participantes da pesquisa que vierem a sofrer qualquer tipo de dano resultante de sua participação na pesquisa, previsto ou não no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, têm direito à indenização, por parte do pesquisador, do patrocinador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa". Ratifica-se que foram tomados todos os cuidados para que não houvesse qualquer dano aos estudantes, tendo sido garantida a eles a integridade física, moral, psíquica e emocional durante o processo. O clima em sala de aula era de expectativa e contentamento, permeado, por vezes, por alguma tensão ou receio, até que a resposta definitiva, com a resolução do problema, fosse dada de forma consensual entre os estudantes e também do professor-pesquisador.

Luna (2019) afirma que qualquer que seja o referencial teórico ou metodologia empregada, uma pesquisa implica o preenchimento dos seguintes requisitos:

1) a formulação de um problema de pesquisa;
2) a determinação das informações necessárias para encaminhar as respostas às perguntas feitas;
3) a seleção das melhores fontes das informações a serem coletadas;
4) a definição de um conjunto de ações que produzam tais informações;
5) a seleção de um sistema para tratamento das informações;
6) o uso de um sistema teórico para interpretação das informações;
7) a produção de respostas às perguntas formuladas pelo problema da pesquisa;
8) a indicação do grau de confiabilidade das respostas obtidas;
9) a indicação da generalidade dos resultados.

Dessa forma, Luna (2019) mostra que:

> Se o problema que gera a pesquisa não pode ser respondido diretamente, (caso contrário não teríamos um problema!), isso significa que a realidade não pode ser apreendida diretamente, mas depende de um recorte dela que faça sentido. Esse recorte é garantido pelo procedimento que seleciona as informações necessárias para uma leitura pelo pesquisador. Diferentes tendências farão recortes diferentes, mas não poderão prescindir de procedimentos de coleta de informações. Os critérios 5 e 6 justificam-se pela noção de "recorte da realidade, mencionada onde respostas a um questionário, transcrições de entrevistas, documentos, registros de observação representam observações `à espera de um tratamento que lhe dê um sentido que permita que se produza um conhecimento até então não disponível (Luna, 2019, p.19).

Nesse contexto, durante a aplicação desta pesquisa, a coleta de dados foi realizada em etapas que espelham alguns dos nove requisitos citados anteriormente: questionário inicial de sondagem; problemas geradores; problemas de aprofundamento; áudios; vídeos; *slides;* e questionário de *feedback* final sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP). Todos esses instrumentos serviram de suporte para os registros e para a análise das observações relacionadas à metodologia aplicada e às interrogativas a serem respondidas.

Outro ponto importante para tratarmos é o papel do pesquisador que, diante de uma pesquisa pedagógica e qualitativa, deve assumir-se observador, mas também coparticipante de todo processo, sendo um mediador deste. Durante a execução das 10 etapas de aplicação da MEAAMaRP, a participação e o envolvimento docentes tornaram-se fundamentais para o processo, conforme explica Onuchic e Allevato (2021, p. 43):

> A aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situações de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático.

Durante a coleta de dados, foram realizados registros em um diário de bordo, gravação dos diálogos ocorridos entre o professor pesquisador e os estudantes que foram transcritos na análise dos dados além dos registros de fotos durante a execução das plenárias de discussão. No decorrer da intervenção docente, quando essa se fez necessária, ou durante a participação dos estudantes, nas dez etapas da metodologia, ou foram feitas anotações, julgadas pertinentes para a futura análise dos dados, ou surgiu a necessidade de dialogar, de incentivar e de se estabelecer trocas com os participantes da pesquisa. Tal interatividade contínua trouxe riquezas de informação que colaboram para a execução da etapa de coletas de dados e da etapa de análise dos resultados ali obtidos.

5.2 Contexto da pesquisa

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), seguindo as dez etapas de aplicação, conforme o modelo de Onuchic e Allevato (2021), nesta pesquisa, foi desenvolvida em uma turma da 3ª série do Ensino Médio, de uma escola da rede privada de ensino da cidade de Contagem/ Minas Gerais, na qual sou professor há mais de 23 anos. A escola, por meio dos membros da gestão escolar e da equipe pedagógica, aprovou a aplicação desta pesquisa. Houve também a anuência e o consentimento das famílias dos 16 estudantes que colaboraram com a investigação, como também deles próprios. A pesquisa ocorreu no período entre 29 de agosto de 2023 a 17 de outubro de 2023, totalizando 19 aulas de 50 minutos cada, conforme o cronograma apresentado no Quadro 5:

Quadro 5- Cronograma de aplicação da MEAAMaRP

Nº	ATIVIDADE	CONTEÚDO	HABILIDADE BNCC	DATA	Nº HORAS/ AULAS
1	Aplicação do questionário de sondagem QUESTIONÁRIO INICIAL DE SONDAGEM 30.06.23.docx	Sondagem	-------	29/08	1
2	Problema Gerador 1 PROBLEMA GERADOR 1 RP - LUGAR GEOMÉTRICO 08-05-23.docx	Reconhecimento do lugar geométrico (circunferência).	(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT502)	29/08	2
3	Problema de aprofundamento 1.1 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 1 .1 RP - LUGAR GEOMÉTRICO 02-07-23.docx	Reconhecimento do lugar geométrico (mediatriz).		31/08	1

Nº	ATIVIDADE	CONTEÚDO	HABILIDADE BNCC	DATA	Nº HORAS/ AULAS
4	Problema de aprofundamento 1.2 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 1 .2 RP - LUGAR GEOMÉTRICO 02-07-23.docx	Reconhecimento do lugar geométrico (bissetriz) *(Atividade)		05/09	2
5	Problema Gerador 2 PROBLEMA GERADOR 2 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação da circunferência.	(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT502)	12/09	2
6	Problema de aprofundamento 2.1 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 2.3 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação da circunferência.		14/09	1
7	Problema de Aprofundamento 2.2 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 2.1 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação geral da circunferência.		19/09	2

Nº	ATIVIDADE	CONTEÚDO	HABILIDADE BNCC	DATA	Nº HORAS/ AULAS
8	Problema de Aprofundamento 2.3 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 2.2 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação geral da circunferência, centro e raio.		21/09	1
9	Problema de Aprofundamento 2.4 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 2.4 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação da circunferência e posição relativa entre pontos.	(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT502)	26/09	1
10	Problema de Aprofundamento 2.5 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 2.5 RP - EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 08-05-23.docx	Equação geral da circunferência centro e raio. (Atividade de	(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT502	26/09	2
11	Problema Gerador 3 PROBLEMA GERADOR 3 RP .docx	Posição relativa entre circunferências (secante s).		28/09	1

Nº	ATIVIDADE	CONTEÚDO	HABILIDADE BNCC	DATA	Nº HORAS/ AULAS
12	Problema de Aprofundamento 3.1 PROBLEMA APROFUNDAMENTO 3.1 RP - 21-07-23	Posição relativa entre circunferência e reta.	(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT502	03/10	2
13	Aplicação do questionário de *Feedback* QUESTINONÁRIO FINAL DE FEEDBACK 06-10-23	*Feedback* após aplicação dos Problemas.	----------------	17/10	1

Fonte: O autor (2023)

As aulas ministradas para o desenvolvimento da MEAAMaRP ocorreram no mesmo período e turno em que os estudantes estudavam. Foi necessário aguardar um período específico do ano ano letivo de 2023 para que houvesse o alinhamento entre o planejamento anual de matemática (seguindo o desenvolvimento do conteúdo de retas e circunferências, previsto no livro didático do sistema de ensino adotado pela escola) e a proposta investigativa de aplicação da MEAAMaRP. Por esta última, os estudantes deveriam estar estudando o conteúdo proposto pela primeira vez, sem contato anterior algum, trazendo consigo apenas os conhecimentos e os pré-requisitos adquiridos ao longo do seu processo de escolarização, sem que fosse desconsiderado que tais conhecimentos têm causas e efeitos significativos nos processos de ensino e de aprendizagem.

É importante destacar que a escola, no período da pesquisa, possuía apenas uma turma de 3ª série do Ensino Médio e que recentemente passou pelos processos educacionais vivenciados em todo país, no que concerne aos efeitos da Pandemia da Covid 19, que deixaram lacunas na aprendizagem de conteúdos estudados durante o ensino remoto, tal como apontado em pesquisas acadêmicas recentes. Faz-se necessário dizer que, mesmo diante desse cenário, boa parte desse agrupamento de estudantes, participantes da pesquisa, passou por turmas, do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio, em que fui professor deles, destacando os anos de escolarização do 8º ano do Ensino Fundamental II até e do 3ª série do Ensino Médio. Esse dado tem relevância por se tratar de um grupo de estudantes com um perfil conhecido pelo professor em parte significativa da trajetória escolar.

Como dito, foi solicitado a todos os estudantes e a seus respectivos responsáveis o preenchimento do termo de Consentimento e Assentimento (Apêndice A), uma vez que, quase na sua totalidade, o grupo de 16 estudantes, que iniciou a pesquisa, tinha idades entre 16 e 18 anos. Para a aplicação e para o desenvolvimento dos três problemas geradores e dos seis problemas de aprofundamento, os estudantes foram divididos em oito duplas de trabalho para desenvolver a MEAAMaRP, enquanto professor, eu observava e intermediava as ações. Em alguns encontros, que serão relatados mais adiante, houve a necessidade de organizá-los em trios, devido à ausência de alguns estudantes, por motivos diversos e inerentes ao contexto escolar.

Como uma das etapas do levantamento de dados, os estudantes também foram convidados a responder dois questionários. O primeiro, questionário inicial de sondagem (Apêndice B), foi respondido antes da aplicação da MEAAMaRP. O instrumento buscava compreender os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à temática, envolvendo a geometria plana, de forma geral, a circunferência, o círculo e seus elementos. A última etapa do cronograma de atividades, questionário final de *feedback,* presente no Apêndice C, buscava obter as impressões e a avaliação dos estudantes em relação MEAAMaR e a Geometria Analítica estudada até aquele momento, de acordo com a proposta estabelecida. Os questionários continham, em sua maioria, questões abertas, de maneira que os participantes pudessem se expressar livremente. Eles também serviriam de análise para o que prentendíamos desenvolver na pesquisa e suas possíveis respostas associadas aos TRRSs.

Assim, no próximo capítulo, será apresentada, em detalhes, a rotina de trabalho que levou a obtenção de dados, bem como à transformação dos achados da pesquisa em um produto educacional no formato de um *e-book*, presente no Apêndice D, que foi produzido durante a pesquisa de mestrado, contendo os problemas, as soluções, os comentários sobre as etapas da metodologia aplicada e as possibilidades de exploração por parte de professores e de pesquisadores interessados na temática.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo foi dividido em seis seções. A primeira delas foi destinada à análise dos resultados do questionário inicial de sondagem, que buscou traçar um perfil de conhecimento prévio dos estudantes sobre a Geometria, especificamente, sobre circunferências. Na segunda seção, apresentamos os três problemas geradores e os problemas de aprofundamento, utilizados na formalização dos conteúdos trabalhados e construídos ao longo do desenvolvimento das 10 etapas da MEAAMaRP. A terceira seção, por sua vez, foi destinada à análise do desenvolvimento da sequência de atividades e os protocolos das respostas dos estudantes levantados durante as aulas e associadas à luz da MEAAMaRP e da TRRSs. Na quarta seção, analisamos o resultado do questionário final de *feedback,* seguido da quinta seção, em que descrevemos a metodologia desenvolvida e o contexto da pesquisa. Por fim, na sexta seção, apresentamos a estrutura do nosso produto educacional.

Essas seções serviram de base para a discussão e para o levantamento de hipóteses associadas à questão de pesquisa, em que nos propomos investigar:

"**Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações"?**

Durante as análises dos dados coletados, as duplas de estudantes foram nomeadas por meio **D1 (dupla 1), D2 (dupla 2)** e assim por diante até **D8 (dupla 8)**, de maneira que a identidade dos participantes fosse preservada. Os 16 estudantes da turma foram nomeados por **E1 (estudante 1), E2 (estudante 2)** e assim por diante até o **E16 (estudante 16).**

Vale ressaltar que as análises das falas dos estudantes não tiveram, como objetivo, investigar o desenvolvimento pessoal de cada participante da pesquisa, mas, sim, do grupo como um todo. As análises buscaram verificar se os dados coletados e a metodologia utilizada contribuíram para o desenvolvimento da aprendizagem de retas e de circunferências, como também de seus diferentes registros de representação nas interpretações dos problemas e nas soluções apresentadas, de forma coletiva ou individual. Para isso, foram também analisadas as discussões feitas durante os encontros.

Dessa forma, ao longo deste capítulo, serão apresentadas e discutidas as falas diretas das duplas dos estudantes, as quais se encontram em itálico neste texto, e o registro das suas resoluções nos protocolos apresentados e comentários

Os dados analisados e destacados serviram como base para responder à nossa questão de pesquisa que buscou, a partir dos nossos objetivos, destacados na Introdução desta dissertação, construir e desenvolver, em sala de aula, uma sequência de atividades, fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Além disso, elaborar problemas geradores que favorecessem o ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica e que permitissem a construção de conhecimentos específicos por parte dos estudantes. Durante suas etapas, procuramos identificar registros de representação (conversão e tratamento), nas atividades desenvolvidas por tais estudantes, que permitissem verificar como as aprendizagens ocorreram.

Ao perguntarmos como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino da Geometria Analítica, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações e construir conhecimento, estamos expondo a nossa incerteza, a nossa dúvida e o que queremos saber em relação ao modo como os estudantes produzem conhecimento, fundamentados no Referencial Teórico apresentado nesta dissertação. Como destaca Bicudo (2005b, p.9):

> A interrogação é uma pergunta dirigida a algo que se quer saber. É fruto de uma dúvida, de uma incerteza em relação ao que se conhece ou ao que é tido como dado, como certo. Ou ainda pode ser incerteza em relação ao vivido no cotidiano, quando a organização posta ou os acertos mantidos começam a não fazer sentido. O germe da interrogação está no desconforto sentido.

A pergunta, quando formulada, mostra a intenção do pesquisador e aponta caminhos e pistas a serem seguidos, abrindo o campo para a pesquisa e para as reflexões que devem acompanhar o pesquisador durante todo o processo delineado por ele, que deve permitir a ele definir os rumos da investigação desejada.

Através da análise da experiência vivenciada junto aos estudantes em sala de aula, das ações e reações provocadas durante as etapas da MEAAMaRP e dos registros dos sujeitos envolvidos, coube ao professor pesquisador descrever, para o grupo pesquisado, como se deram as etapas da investigação e se as respostas obtidas foram significativas ao ponto de responderem às interrogativas que envolviam a questão de pesquisa ao longo do processo delineado pelo pesquisador.Dessa forma, na próxima seção, será discutida parte importante da metodologia, considerada na elaboração e na aplicação da sequência de atividades através das dez etapas da MEAAMaRP. Primeiramente, com o questionário inicial de sondagem que nos permitiu fazer conexões com os dados gerados após o desenvolvimento dos problemas geradores e de aprofundamento e as respostas iniciais aqui obtidas.

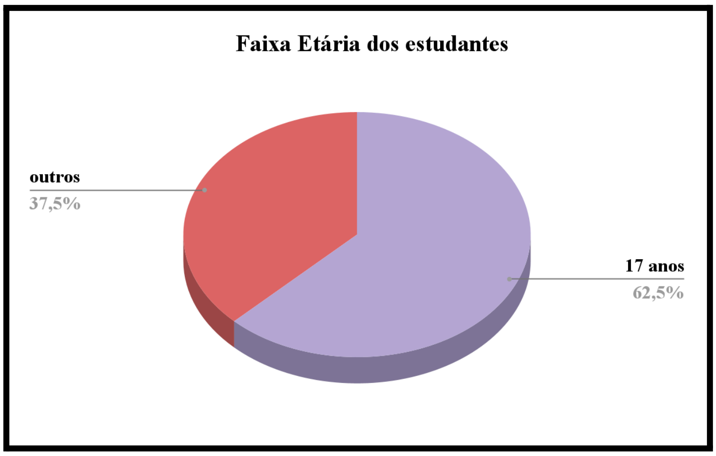
6.1 Questionário inicial de sondagem

Com o objetivo de investigar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre Geometria, mais especificamente relacionados aos conceitos de círculo e circunferência, elaboramos um questionário inicial de sondagem, composto de perguntas fechadas e abertas. Os estudantes foram convidados a responder a ele em sala de aula, em 29 de agosto de 2023 (3ª-feira), tendo sido este o 1º momento do cronograma de atividades referente à pesquisa e à coleta de dados, como também às respostas de todos os estudantes, do **E1** ao **E16.** Entendemos que as respostas eram dados importantes, pois também colaboraram com a pesquisa e principalmente serviram como referência e conexão com os dados coletados na sequência de atividades propostas ao grupo de estudantes.

É importante destacar que o questionário foi dividido em duas partes, sendo que a segunda parte foi entregue somente após a devolutiva da primeira, por haver perguntas nessa segunda parte que poderiam nos fornecer bons elementos de discussão, correlacionadas àquelas obtidas na primeira parte, conforme veremos adiante nas discussões aqui propostas.

O questionário proposto possui quatorze questões relacionadas a como os estudantes reconheciam a Geometria, os principais temas estudados sobre ela, a importância de se estudar Geometria e com mais profundidade, as ideias sobre o que seria uma circunferência e que objetos do cotidiano poderiam representá-la, como também quais seriam os seus principais elementos. O questionário foi estruturado com três questões fechadas e onze questões abertas. Dezesseis estudantes responderam ao questionário, dos quais dez estavam com 17 anos de idade (representando 62,5% da turma) e seis deles com outras idades, acima dos 17 anos (representando 37,5% da turma), conforme mostra a Figura 42:

Figura 42 - Faixa etária dos estudantes

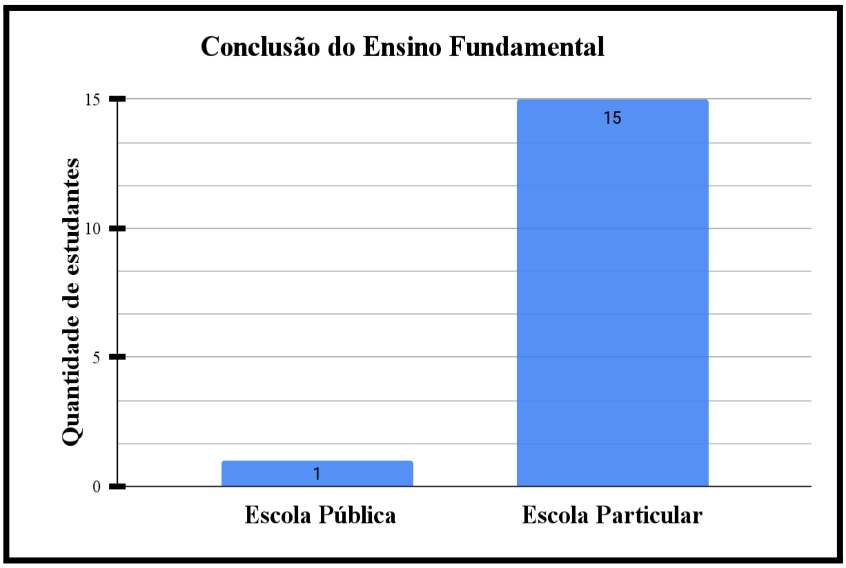


Fonte: o autor, 2023.

Ressaltamos que os estudantes estavam cursando a 3ª série do Ensino Médio e que, por isso, esperávamos que não tivessem idades superiores aos 17 anos. Aqueles estudantes, com idade superior aos 17 anos, em sua maioria, ao menos, provavelmente completaram os 18 anos de idade no meio do ano de 2023.

Quando perguntados sobre a conclusão do Ensino Fundamental II, dos dezesseis estudantes, apenas um concluiu este nível de ensino em uma escola pública; os demais, em uma escola privada de ensino, conforme mostra o gráfico da Figura 43.

Figura 43- Conclusão do Ensino Fundamental II



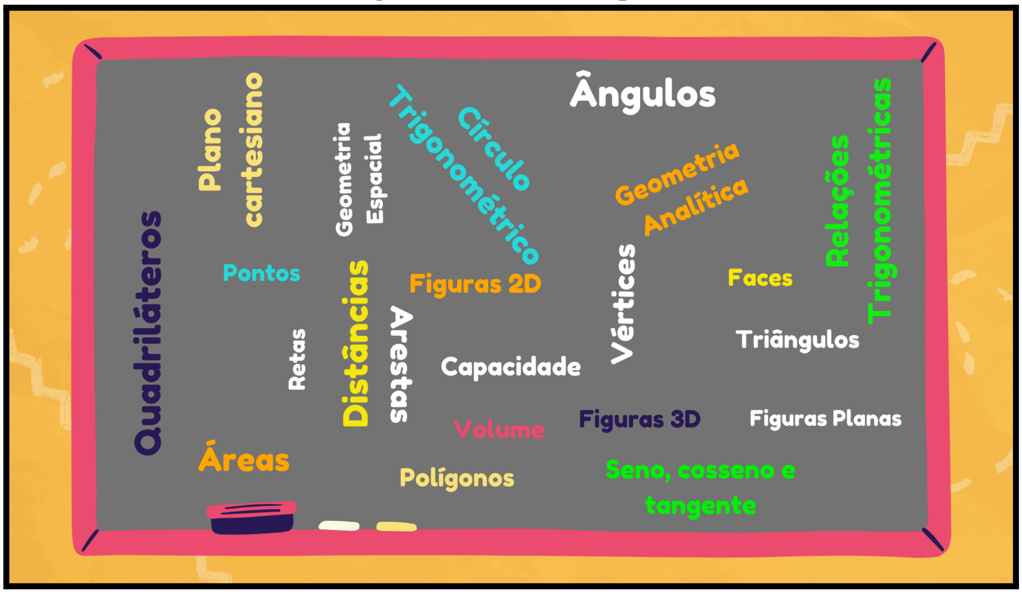
Fonte: o autor, 2023.

Outra questão relevante, em relação aos estudantes terem estudado Geometria em anos anteriores e em relação aos principais tópicos estudados até então, é que apenas um dos 16 dezesseis estudantes, o **E8**, afirmou nunca ter estudado Geometria. Esse dado é importante, uma vez que as lacunas e as possíveis dificuldades desse estudante podem ser significativas, dado que as habilidades relacionadas ao estudo da Geometria, a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental II, são importantes e servem como base para aquelas que serão desenvolvidas ou aprofundadas ao longo do Ensino Médio. Não cabe aqui discorrer a respeito das circunstâncias que, por vezes, originam tal lacuna curricular no nível do Ensino Fundamental II, mas tornam-se imprescindíveis ações e investimentos, no sentido de se assegurar o direito ao acesso, ao conhecimento a todos os estudantes, sejam os das escolas públicas ou privadas.

Mesmo sabendo que o estudante **E8** tenha realizado sua trajetória de encerramento da Educação Básica em uma escola privada, isso não garante que tais lacunas tenham sido resolvidas.

A partir das respostas à pergunta sobre os principais tópicos de Geometria já estudados por eles, foi construída a Figura 44 que traz informações sobre essa questão em uma nuvem de palavras destacando tais tópicos.

Figura 44- Nuvem de palavras

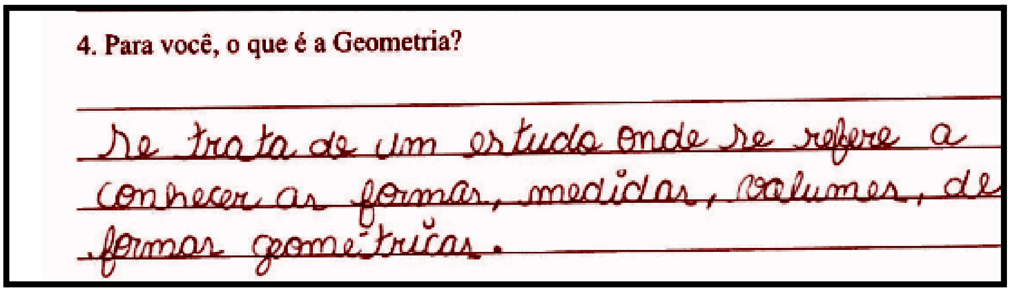


Fonte: o autor, 2023.

Dentre as respostas, destacamos a memória recente dos estudos de trigonometria no triângulo retângulo e das propriedades dos ciclo trigonométrico, além dos demais conteúdos abordados na 2ª série do Ensino Médio, em que a maioria desses estudantes estudou na mesma escola e com o mesmo material didático. Alguns tópicos da Geometria Analítica foram citados, mesmo que de forma mais superficial, e acreditamos que isso ocorreu, por ser esta uma abordagem específica da Geometria com a qual eles ainda estavam se familiarizando.

A pergunta de número 4, sobre o que seria a Geometria, e a de número 5, sobre qual seria a importância de estudá-la, trouxeram respostas interessantes e com definições bastante maduras acerca deste conceito amplo, como exemplificado nos recortes de respostas do estudante **E3** para perguntas 4 e 5, conforme Figuras 45 e 46, e do estudante **E12**, para a pergunta 5 como destacado na Figura 47:

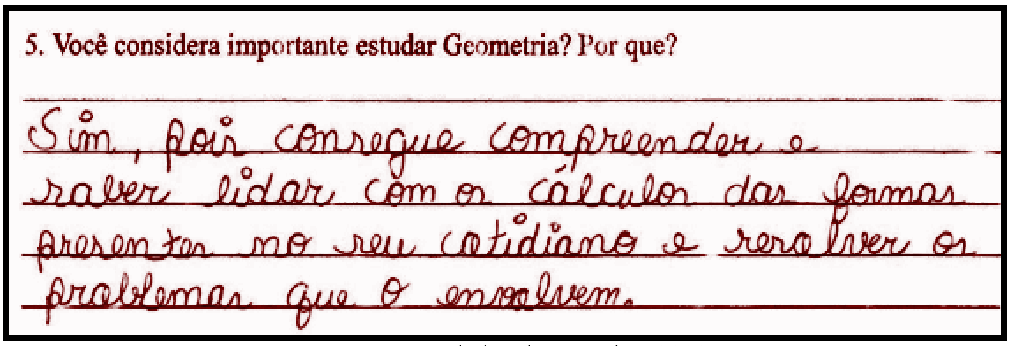
Figura 45 - Resposta do estudante E3 na pergunta 4


4. Para você, o que é a Geometria?

Se trata de um estudo onde se refere a conhecer as formas, medidas, volumes, de formas geométricas.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

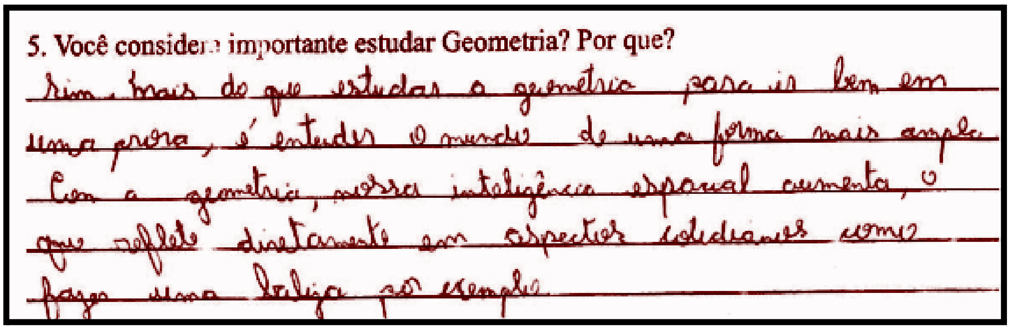
Figura 46 - Respostas do estudante E3 na pergunta 5


5. Você considera importante estudar Geometria? Por que?

Sim, pois consegue compreender e saber lidar com os cálculos das formas presentes no seu cotidiano e resolver os problemas que o envolvem.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 47 - Resposta do estudante E12 na pergunta 5


5. Você considera importante estudar Geometria? Por que?

Sim, mais do que estudar a geometria para ir bem em uma prova, é entender o mundo de uma forma mais ampla. Com a geometria, nossa inteligência espacial aumenta, o que reflete diretamente em aspectos cotidianos como fazer uma baliza por exemplo.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

As respostas anteriores dialogam com a proposta da BNCC (Brasil, 2018), como também com as conexões que podem ser feitas com o cotidiano, principalmente no que se refere à Geometria, uma vez que a BNCC do Ensino Médio (Brasil, 2018), na área de Matemática, expõe que:

> [...] propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018, p.527).

Através do questionário de sondagem, investigamos os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos conceitos de círculo e circunferência, tal como nas questões de número 6, 7 e 8. As perguntas elaboradas tinham como propósito principal cruzar resultados a serem analisados adiante acerca do conceito de circunferência como um lugar geométrico, mas também o propósito de realizar conexões com a ideia geométrica que os estudantes tinham dessas figuras. Essa intencionalidade nos levou a dividir o questionário em duas partes, pois, na segunda delas, fizemos questionamentos sobre as sutilezas matemáticas presentes nesses conceitos, utilizando e solicitando que os estudantes pudessem relacioná-los com a sua ideia geométrica.

Nessa perspectiva, destacamos aqui algumas respostas do estudante **E1** que geraram boas reflexões, conforme mostra a Figura 48:

Figura 48 -Resposta do E1 sobre o conceito de circunferência e círculo

6. Para você, o que é uma circunferência?

A linha ao redor do circulo

7. Para você, o que é um círculo?

O preenchimento ao redor da sircunferencia

Fonte: dados da pesquisa,2023

Observamos pela resposta descrita que o estudante diferencia, de forma correta, os conceitos de circunferência e círculo, uma vez que ele faz uma referência do contorno e do preenchimento interior da figura, o que remete aos conceitos dessas duas Figuras Geométricas. Na Figura 49, destacamos a resposta do estudante **E1** e observamos que a ideia da circunferência como uma fronteira, utilizando a palavra "limite" e diferenciando "interior" de "exterior", foi descrita pelo estudante.

Figura 49 -Resposta do E1 na pergunta 8 do questionário de sondagem

8. Você acha que existe diferença entre círculo e circunferência?

● Sim ○ Não ○ Não sei opinar

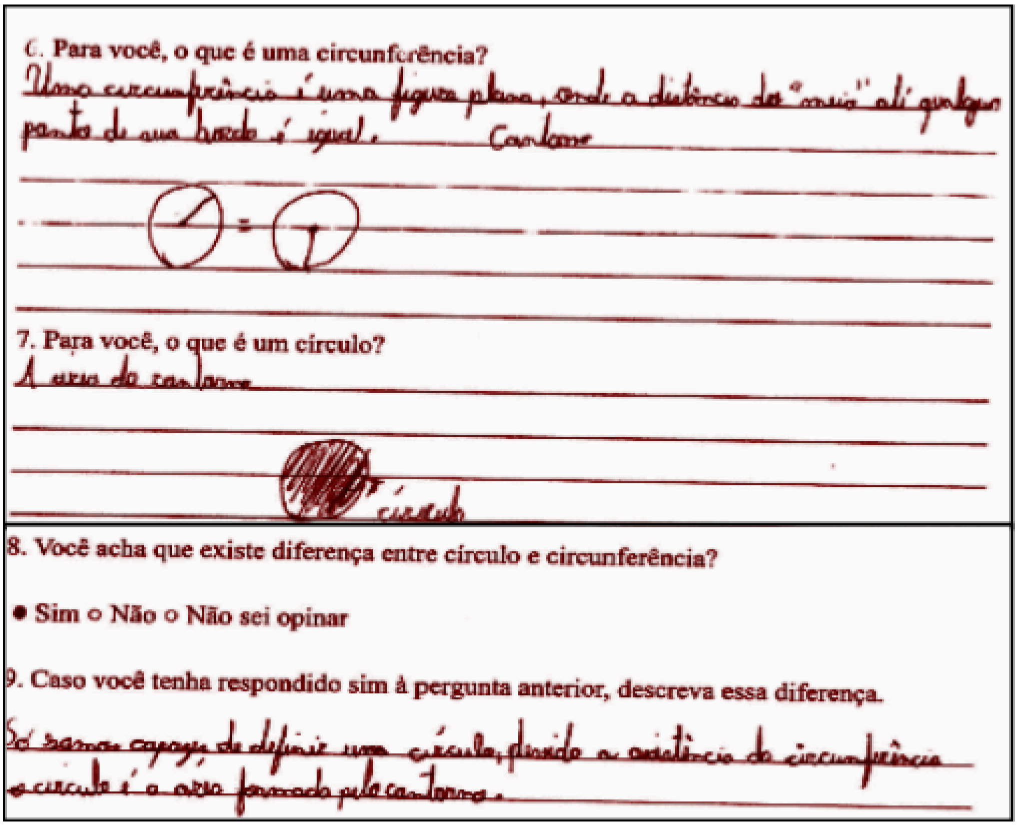
9. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva essa diferença.

Circulo é o que está dentro da circunferência, e a circungerencia é o limite.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Por outro lado, na resposta do estudante **E2,** como destacado na Figura 50, foi perceptível sua ideia sobre circunferência, tida como um lugar geométrico, ideia esta que será debatida na próxima seção e explorada nas respostas das duplas, na resolução do Problema Gerador 1, que objetivava formalizar tal conceito. Além disso, o estudante definiu a circunferência como uma Figura plana, o que demonstra a sua percepção geométrica correta em relação ao conjunto de pontos que são pertencentes a essa região do plano. Podemos ver, ainda, que ele escreveu logo abaixo a palavra contorno e fez um desenho para referenciar sua afirmação.

Figura 50 -Resposta do estudante E2 na pergunta 8


6. Para você, o que é uma circunferência?
Uma circunferência é uma figura plana, onde a distância do "meio" até qualquer ponto de sua borda é igual. Contorno

7. Para você, o que é um círculo?
A área do contorno
círculo

8. Você acha que existe diferença entre círculo e circunferência?

● Sim ○ Não ○ Não sei opinar

9. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva essa diferença.
Só somos capazes de definir um círculo, devido a existência da circunferência o círculo é a área formada pelo contorno.

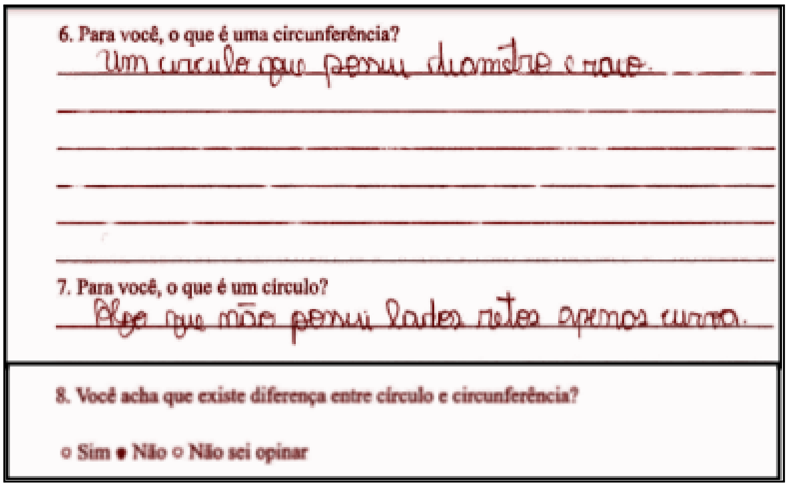
Fonte: dados da pesquisa, 2023

Outras respostas, como as destacadas na Figura 50, mostram que existiam lacunas na construção dos conceitos de circunferência e de círculo. Estas lacunas despertaram nossa atenção para a necessidade de se construírem esses conceitos a partir, por exemplo, das etapas da MEAAMaRP, desenvolvendo atividades em que a prática da internalização incorporasse o conhecimento explícito no conhecimento tácito. O desenvolvimento do pensamento heurístico, associado à capacidade do sujeito de descobrir e inventar, colaboram com essa ideia, segundo Polya (1967 *apud* Onuchic;Allevato, 2021, p. 25): “Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva”.

Aprender fazendo poderia favorecer a construção e o entendimento desses conceitos e, dessa forma, havia a necessidade de utilizarmos atividades de construção geométrica e de reconhecimento de objetos que remetessem aos conceitos de circunferência e de círculo, como na intencionalidade do Problema Gerador 1 que discutiremos na próxima seção

Além disso, as respostas dos estudantes **E5** e **E15,** respectivamente, conforme as Figuras 51 e 52, alertaram-nos para o fato de que, para um desses estudantes, os conceitos e a caracterização de Figura plana e espacial não estavam consolidados. Observemos que o estudante fez referência a uma bola, quando perguntado sobre o que seria uma circunferência, e ainda afirmou que "uma é 3D e a outra não", o que podemos observar ao analisarmos o desenho que ele mesmo construiu, o que se confirma quando ele assinalou, na questão 8, que, para ele, não existe diferença entre as duas Figuras.

Figura 51 - Definições de círculo e circunferência para o E5 perguntas 6, 7 e 8



6. Para você, o que é uma circunferência?

Um circulo que possui diametro e raio.

7. Para você, o que é um circulo?

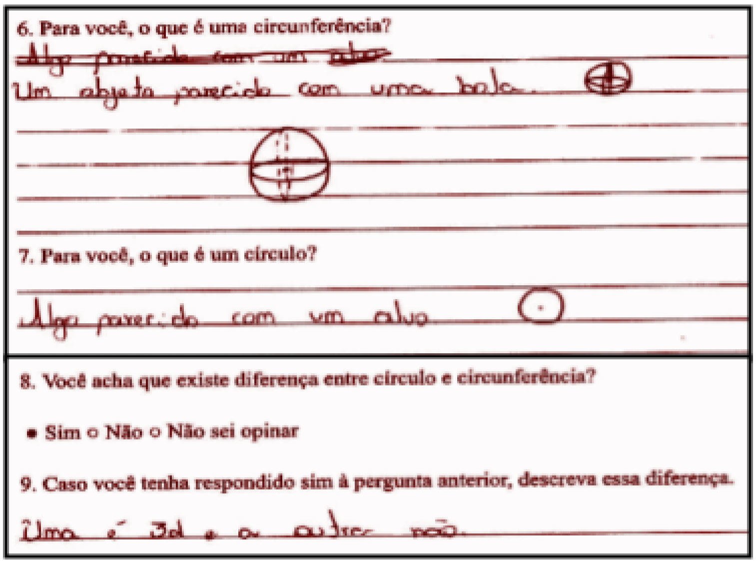
Algo que não possui lados retos apenas curva.

8. Você acha que existe diferença entre círculo e circunferência?

○ Sim ● Não ○ Não sei opinar

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 52 - Definições de círculo e circunferência para o E15 nas perguntas 6, 7 e 8



6. Para você, o que é uma circunferência?

~~Algo parecido com um alvo~~

Um objeto parecido com uma bola.

7. Para você, o que é um circulo?

Algo parecido com um alvo

8. Você acha que existe diferença entre circulo e circunferência?

● Sim ○ Não ○ Não sei opinar

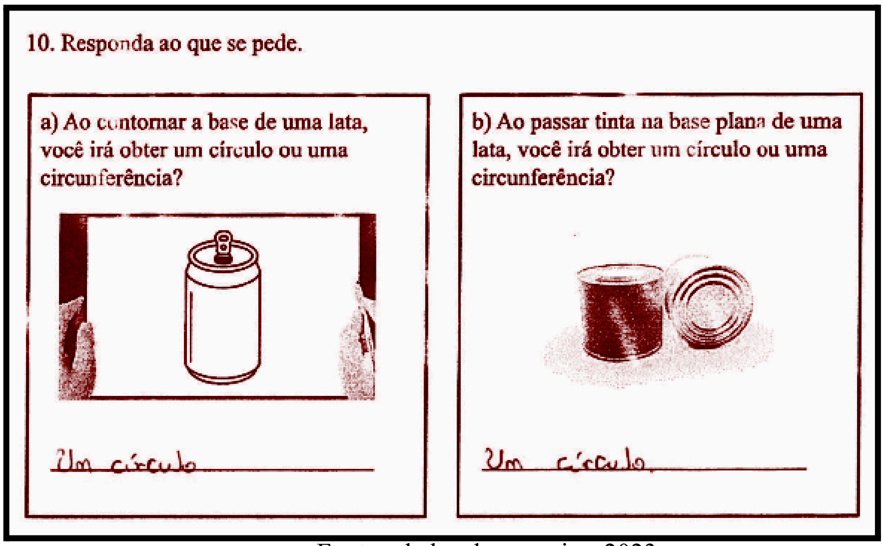
9. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva essa diferença.

Uma é 3d e a outra não.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Comparando as respostas às perguntas 6 e 7 elaboradas pelos estudantes **E5** e **E15,** com as suas respectivas respostas na questão 10, da parte II do questionário de sondagem, observou-se que a definição escrita pelos estudantes diverge da ideia concreta que eles supostamente tinham de circunferência e círculo, o que, mais uma vez, indicou a necessidade de intervenção para a construção desses conceitos, por observarmos registros distintos de um mesmo estudante para um mesmo conceito, tal como destacado nas Figuras 53 e 54:

Figura 53 - Resposta do estudantes E5 na pergunta 10


10. Responda ao que se pede.

a) Ao contornar a base de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?

Um círculo

b) Ao passar tinta na base plana de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?

Um círculo

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 54 - Resposta do estudante E15 na pergunta 10


10. Responda ao que se pede.

a) Ao contornar a base de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?

Circunferencia

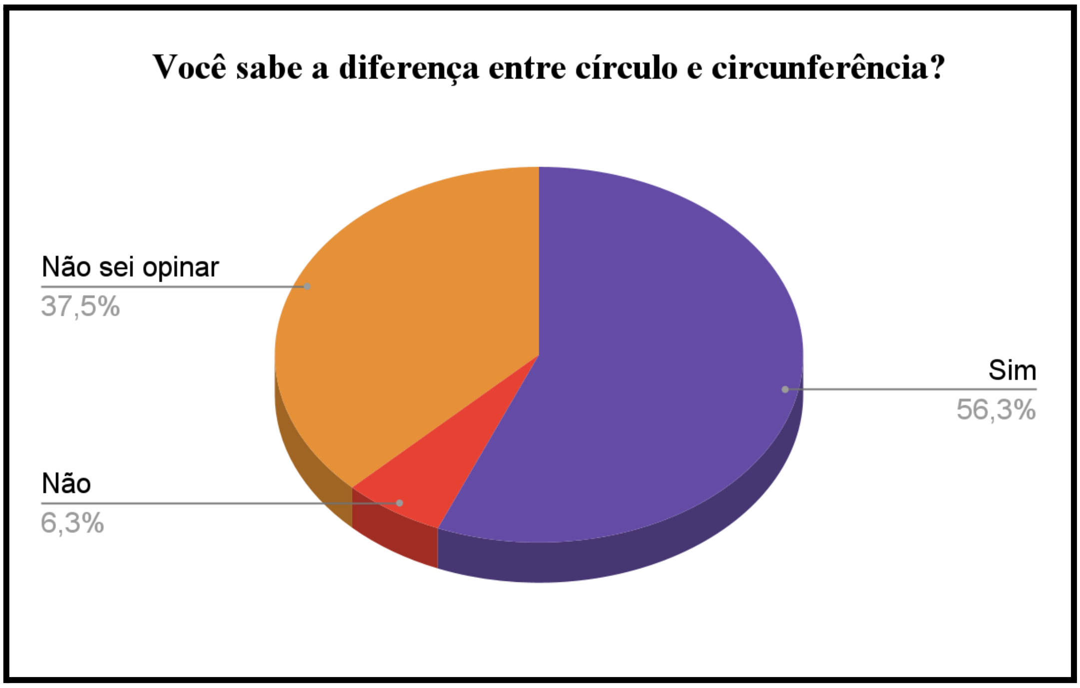
b) Ao passar tinta na base plana de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?

circulo

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Quanto a eles descreverem a diferença entre circunferência e círculo, conforme a questão 8, obtivemos os seguintes resultados, mostrados na Figura 55:

Figura 55 - Você sabe a diferença entre círculo e circunferência?



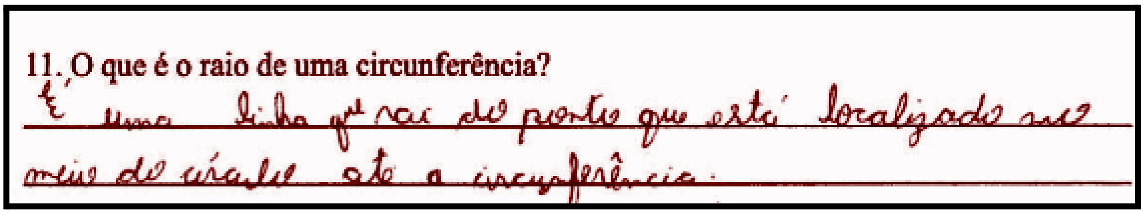
Fonte: o autor, 2023.

Dos dezesseis estudantes que responderam a essa pergunta, consideramos expressivo o resultado daqueles que não souberam opinar sobre a diferença entre circunferência e círculo, sendo que a porcentagem de 37,5%, representou seis estudantes.

Outro ponto interessante das respostas obtidas foi a de que todos os questionários da parte II, respondidos em relação à diferenciação entre círculo e circunferência, como perguntado na questão 10, treze estudantes (81,25%) fizeram a classificação de forma correta e três estudantes, de forma incorreta. Mais uma vez, esse resultado nos indicou que a ideia concreta desses conceitos poderia estar consolidada, porém ainda necessitava de ser formalizada no processo de ensino-aprendizagem .

Para a pergunta 11, que investigava o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de raio de uma circunferência, percebemos, nas respostas destacadas dos estudantes **E12 , E9** e **E11,** respectivamente, que eles descreveram o que era o raio de uma circunferência. Porém o estudante **E12** não soube formalizar o conceito de raio como distância; o estudante **E9** demonstrava saber tal formalização e o estudante **E11** utilizava a ideia de distância, mas não finalizou sua resposta, ao afirmar que a distância a ser definida era do centro a qualquer ponto pertencente à circunferência. Veja as respostas nas Figuras 56 a 58:

Figura 56 - Resposta do estudante E12 na pergunta 11



11. O que é o raio de uma circunferência?

É uma linha q. vai do ponto que está localizado no meio do círculo até a circunferência.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 57 - Resposta do estudante E9 na pergunta 11

11. O que é o raio de uma circunferência?

A distância entre um ponto do círculo e a circunferência

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 58 - Resposta do estudante E11 na pergunta 11

11. O que é o raio de uma circunferência?

A distância do centro até qualquer ponto.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Quando perguntado sobre em quais objetos ou situações do ambiente e do cotidiano a circunferência está presente, tínhamos o objetivo de perceber se, nas respostas dadas, a ideia de associar os conceitos a exemplos de objetos do nosso cotidiano estava presente.

Dessa forma, tivemos respostas bem variadas, mas que trouxeram a diferença entre circunferência e círculo. No Quadro 6, a seguir, temos alguns exemplos de respostas dos estudantes.

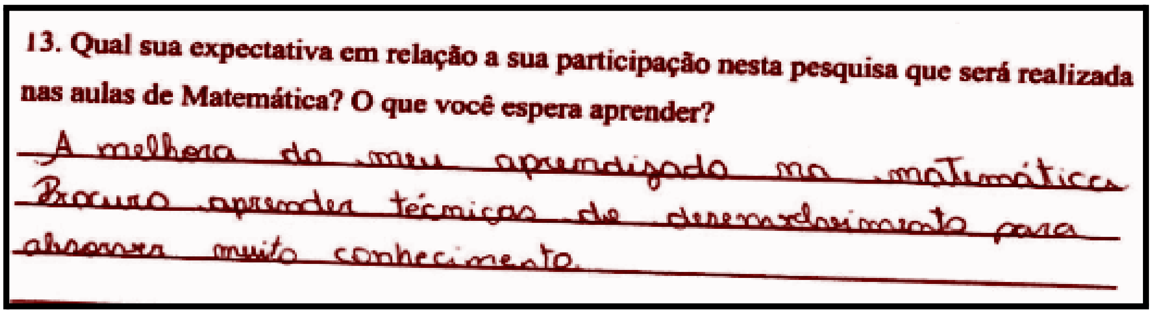
Quadro 6 - Exemplos de circunferência presentes no seu cotidiano

Tampa de garrafa-Contorno de uma garrafa-Aro do chaveiro-Bambolê-Anel-Ao contornar todo círculo-Molde circular de objetos-Ventilador-Roda de Carro-Bola de Futebol.

Fonte: o autor, 2024.

Para fechar a análise inicial do questionário de sondagem, registramos algumas expectativas dos estudantes **E1, E2, E7** e **E12,** nessa ordem, nas Figuras 59 a 62 em relação à participação na pesquisa. Essas respostas foram importantes e significativas, pois, durante as etapas da MEAAMaRP, o processo de engajamento do grupo de estudantes colaborou com um dos seus objetivos que foi aquele de oportunizar um ambiente de aprendizagem dinâmico, em que a participação individual e coletiva favorecessem o processo de ensino-aprendizagem. Neste processo, consideramos: as soluções compartilhadas entre pares e no coletivo; as resoluções apresentadas; as estratégias utilizadas; e as diferentes formas de registro das resoluções dos problemas, fossem estas formas concretizadas no quadro ou no papel.

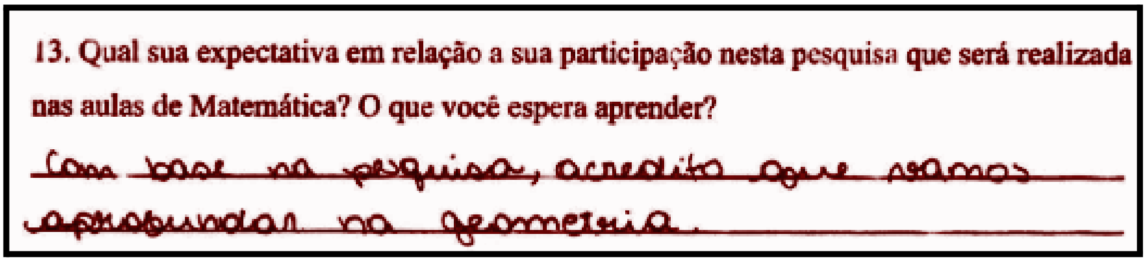
Figura 59 - Expectativa do estudante E1 em relação à pesquisa


13. Qual sua expectativa em relação a sua participação nesta pesquisa que será realizada nas aulas de Matemática? O que você espera aprender?

A melhora do meu aprendizado na matemática. Procuro aprender técnicas de desenvolvimento para absorver muito conhecimento.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

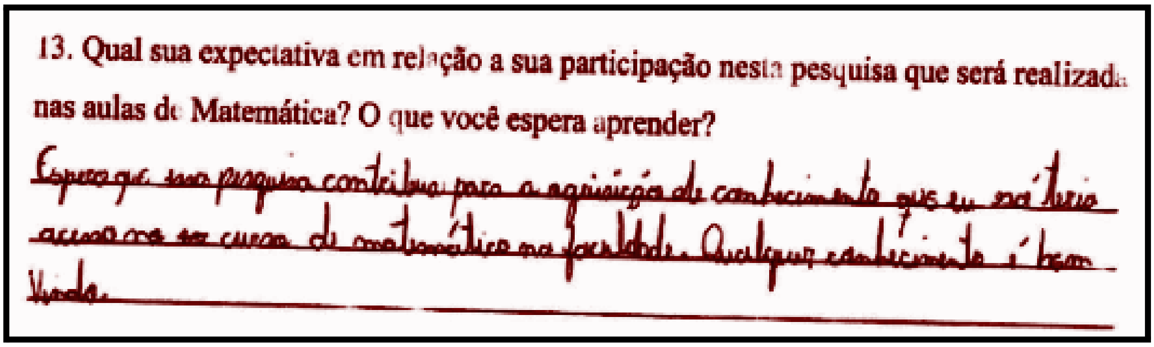
Figura 60 - Expectativa do estudante E2 em relação a pesquisa


13. Qual sua expectativa em relação a sua participação nesta pesquisa que será realizada nas aulas de Matemática? O que você espera aprender?

Com base na pesquisa, acredito que vamos aprofundar na geometria.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

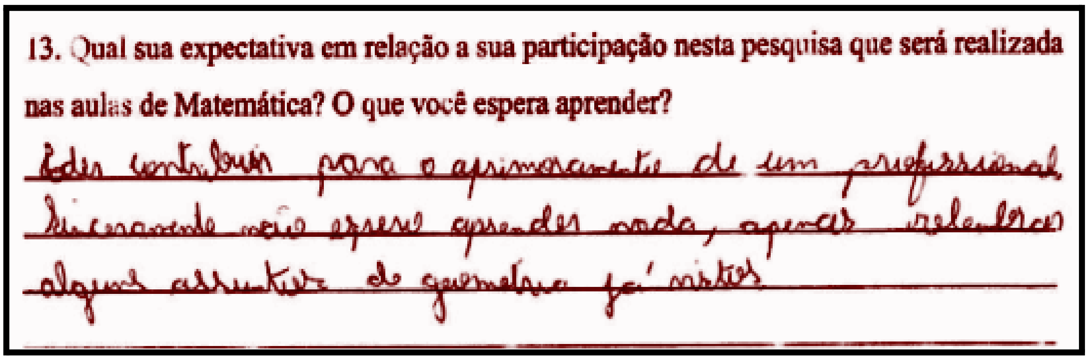
Figura 61 - Expectativa do estudante E7 em relação a pesquisa


13. Qual sua expectativa em relação a sua participação nesta pesquisa que será realizada nas aulas de Matemática? O que você espera aprender?

Espero que essa pesquisa contribua para a aquisição de conhecimento que eu não tive acesso no curso de matemática na faculdade. Qualquer conhecimento é bem vindo.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 62 - Expectativa do estudante E12 em relação a pesquisa


13. Qual sua expectativa em relação a sua participação nesta pesquisa que será realizada nas aulas de Matemática? O que você espera aprender?

Poder contribuir para o aprimoramento de um profissional. Sinceramente não espero aprender nada, apenas relembrar algumas estruturas de geometria já vistas.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

As respostas das questões 13 e 14 mostraram, de forma geral, que havia a expectativa dos estudantes em relação à forma como a metodologia, desenvolvida em sala de aula, poderia contribuir com o aprendizado. Destacamos que os estudantes, em dados momentos, mostraram-se inseguros com as novidades e, principalmente, com algum receio de que cometessem erros. Como professor da turma e pesquisador, procurei orientá-los a agirem da maneira mais natural possível e ressaltei que o trabalho tinha como objetivo principal oportunizar aprendizagens, valorizando toda e qualquer ação de movimento, por parte deles, no processo de resolução do problema, respostas e registros feitos. O acerto e o erro, assim, faziam parte desse processo e deveriam ser vistos de maneira natural. Ainda, por se tratar de uma turma de 3ª série do Ensino Médio, o incentivo e a valorização coletiva e individual que, para mim, enquanto professor e pesquisador, facilitavam a construção do conhecimento no processo de ensino-aprendizagem, fez-se ainda mais necessário e, de uma forma geral, percebi que eles aceitaram bem a ideia de aprender por meio de nova metodologia que nos "tiraria da zona de conforto", na busca da efetiva aprendizagem.

O questionário, por sua vez, permitiu-nos percebermos a necessidade de revermos alguns conceitos da Geometria Plana, tais como: os elementos principais de uma circunferência; a ideia geométrica de círculo; diferenciar ambas as Figuras; e o conceito de Figura plana. Todos eles eram importantes durante o processo de aplicação da metodologia de trabalho e esperava-se que os problemas que ainda seriam utilizados para aprender Geometria Analítica através da resolução de problemas pudessem servir de oportunidade para tais reconstruções.

Dessa forma, nas próximas duas seções, apresentaremos os resultados e as análises do processo que vivenciamos, no desenvolvimento da MEAAMaRP e associamos essa ação aos registros feitos pelas oito duplas de trabalho relacionando-os com a TRRS.

6.2 Os problemas Geradores e de Aprofundamento

Os problemas utilizados ao longo da coleta de dados e de toda a sua estruturação e construção, objetivava desenvolver o ensino-aprendizagem de retas e circunferências no contexto da Geometria Analítica, através da Resolução de Problemas. A finalidade, como mencionado, será a de desenvolver as dez etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em que o problema torna-se o ponto de partida e de orientação para a aprendizagem de novos conceitos e de novos conteúdos matemáticos (Onuchic; Allevato, 2021, p.47). De acordo com as dez etapas apresentadas no capítulo 3, o ensino-aprendizagem, na investigação aqui proposta, partiu de um problema gerador, com a finalidade de promover a construção de um novo conhecimento, sendo que, na 10ª etapa, após a formalização dos conteúdos, foi proposto novo problema, a qual chamamos de problemas de aprofundamento. Segundo Onuchic e Allevato (2021, p.50):

> Após a etapa de formalização, novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos estudantes. Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se conFigura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.

A escolha, a elaboração e adaptação de cada um dos problemas geradores e de aprofundamentos representaram uma ação de muito esforço e cautela por parte do pesquisador, que foi considerada uma das etapas mais complexas da pesquisa. Tal movimento teve como finalidade construir problemas que permitissem a construção do conhecimento por parte dos estudantes e contribuir para sua aprendizagem. Porém, do ponto de vista da pesquisa, ele serviu como um significativo balizador para que fosse possível responder aos nossos questionamentos acerca das aprendizagens sobre a Geometria Analítica, bem como sobre a capacidade dos estudantes de coordenarem, ao menos, dois registros de representação de um mesmo objeto, possibilitando investigar a aprendizagem ao longo das etapas da MEAAMaRP.

Nesta escolha de trabalho, o material didático utilizado, o físico e o digital, pertencia a uma coleção de uma rede de ensino associada à parceria de suporte pedagógico entre a escola e aquela rede. Esse material, além do livro-texto e do caderno extra de atividades, estava integrado a uma plataforma digital, em que todo o material e outras fontes de recursos didáticos poderiam ser utilizados. Especificamente sobre o material de Matemática dessa coleção, havia a resolução de problemas e da sua proposta atrelada ao ensino de Matemática, o que contribuiu muito como fonte de pesquisa de problemas que pudessem servir como geradores ou de aprofundamento. Por isso, problemas desse material didático, utilizado no ano letivo de 2023, na instituição onde foi realizada a presente pesquisa serviram de estudo e inspiração ou foram adaptados para, posteriormente, serem utilizados durante as etapas das MEAAMaRP.

Outra fonte de pesquisa surgiu na procura de itens do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com possibilidades de adaptação de uma questão objetiva para uma questão discursiva e que atendesse à realidade da pesquisa, uma vez que os problemas geradores e de aprofundamento escolhidos para esta investigação exigiam os registros dos estudantes e as estratégias de resolução propostas por eles. Durante muitas etapas desse processo de escolhas, foi possível notar que alguns problemas poderiam fazer o papel de gerador e ou de aprofundamento, o que demandou uma escolha atenta e alinhada aos objetivos do ensino.

Dessa forma, a apresentação de cada um desses problemas, de acordo com o tópico da Geometria Analítica abordada, apresenta-se no formato do Quadro 6, a seguir, e podem ser consultados da forma como foram apresentados aos estudantes em sala de aula. Para consultá-los, na íntegra, basta acessar o *link* compartilhável:
https://drive.google.com/drive/folders/1pCA8HLxdtM8ihOFLTuZojtfkxsxnAn2g?usp=drive_link

Quadro 7 - Organização de cada problema gerador e de aprofundamento

Tipo de problema e sua estrutura
Ano escolar recomendado
Objetivos
Conteúdos abordados
Estratégias para resolução e formalização

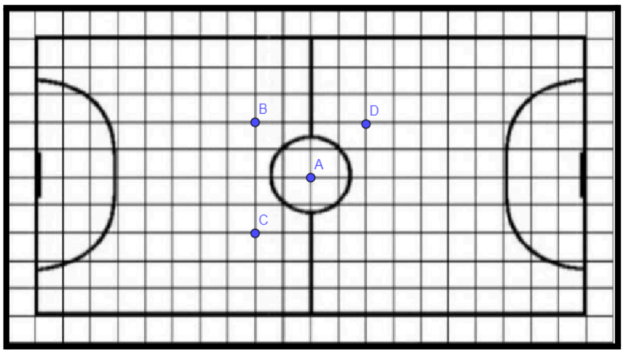
Fonte: o autor,2023.

Essa organização de apresentação de cada problema foi inspirada na proposta apresentada na parte dois do livro “Resolução de Problemas Teoria e Prática”, de Onuchic, Allevato, Noguti e Justulin (2021, pp. 101-202), com as adaptações que se fizeram necessárias para esta investigação. Tal modelo serviu de referência para a construção do produto educacional desta pesquisa, que se configurou na forma de um *e-book* (Cf.: Apêndice D). Para exemplificar essa estrutura de organização de cada problema, apresentamos, como exemplo, o Problema Gerador 1. Os demais problemas e suas resoluções, na mesma perspectiva do Quadro 6, estão presentes no Apêndice E, bem como no Produto Educacional.

Problema Gerador 1:

O esquema da Figura a seguir representa um campo de futebol inserido em uma malha quadriculada em que cada quadrado dessa malha tem 1 unidade de área (u.a.).

Figura 63 - Campo de futebol

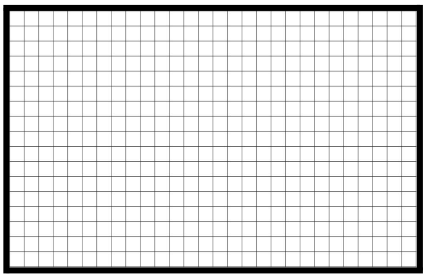


Fonte: o autor, 2023.

Em um determinado momento do jogo, os jogadores Bruno, Carlos e Davi se encontram, respectivamente, nos pontos B, C e D, e o árbitro da partida no ponto A. Baseando-se nessa Figura (63) desenvolva o que se pede:

a) Trace os eixos x e y de um plano cartesiano xoy na malha a seguir, em que cada quadrado, que compõe a malha, tem área igual a 1 u.a. considerando que o centro do meio de campo está no ponto (0,0), posição do árbitro A. Feito isso, marque os pontos B, C e D, que representam as posições de cada um dos três jogadores.

Figura 64 - Malha quadriculada do Problema Gerador 1



Fonte: o autor, 2023

b) Escreva as coordenadas cartesianas dos pontos B,C e D.

c) Determine a distância do árbitro até cada um dos jogadores B, C e D .

d) Comparando as distâncias que você determinou no item anterior, o que você pode concluir?

e) Considere agora um quarto jogador chamado Elano. Ele se movimenta no campo de forma que sua distância até o árbitro é sempre a mesma. Descreva ou desenhe essa situação.

f) Você consegue identificar alguma Figura geométrica onde estão situadas as posições ocupadas por Elano? Em caso afirmativo, que Figura geométrica é essa? Explique.

g) Considere agora que Elano está localizado em um ponto E de coordenadas (x,y) e que a distância desses quatro jogadores até o árbitro é a mesma. Marque um ponto no plano cartesiano construído no item (a) e que represente uma posição de Elano nesse campo de futebol e registre essas coordenadas no espaço a seguir.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: desenvolver o conceito de lugar geométrico, mais especificamente da circunferência a partir da ideia de marcação de pontos, no plano cartesiano, seguido através de um suporte com representação gráfica.

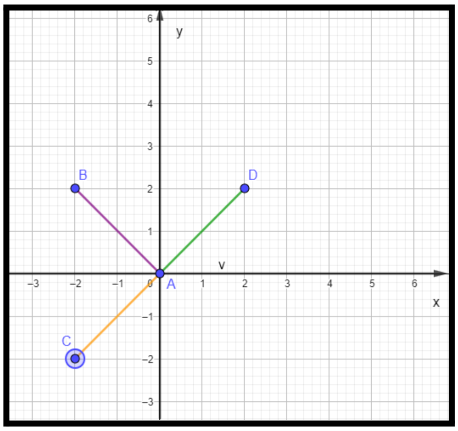
Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, explorar a marcação de um ponto de coordenadas (x,y) qualquer através de uma propriedade comum que os representa.

Estratégias de resolução e formalização: representar graficamente alguns possíveis pontos que atendam as propriedades daquele lugar geométrico e concluir que ele se trata de uma circunferência, calcular a distância desses pontos previamente determinados e mostrar que são equidistantes do árbitro de futebol. Marcar os pontos utilizando um *software* de construção geométrica para realizar comprovações e tirar conclusões sobre o problema proposto.

Resolução proposta :

a) Traçar, de forma conveniente, os eixos cartesianos e representar as coordenadas de cada ponto solicitado, sendo que a Figura suporte do campo de futebol pode servir de referência para tal marcação, fazendo a contagem de quadradinhos da malha quadriculada apresentada.

Figura 65 - Posição dos jogadores



Fonte: o autor, 2023.

b) Após a marcação dos pontos as coordenadas cartesianas são : A(0,0) (posição do árbitro); B(-2,2); C(-2,-2); D(2,2).

c) *Como as coordenadas cartesianas dos pontos são A, B , C e D temos as distâncias*:

$Do\ \acute{a}rbitro\ A\ (0,0)\ e\ Bruno\ B(-\ 2,2) \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(-\ 2\ -\ 0)^2 + (2\ -\ 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$Do\ \acute{a}rbitro\ A\ (0,0)\ e\ Carlos\ C(-\ 2,-\ 2) \Rightarrow d_{AC} = \sqrt{(-\ 2\ -\ 0)^2 + (-\ 2\ -\ 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

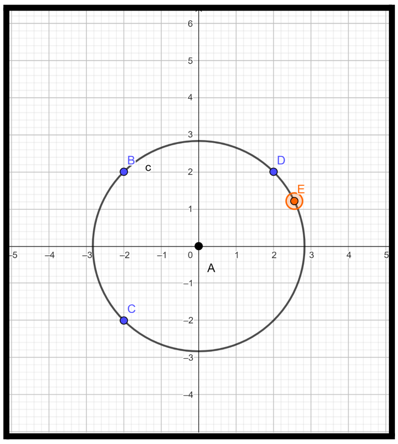
$Do\ \acute{a}rbitro\ A\ (0,0)\ e\ Davi\ \ D(2,2) \Rightarrow d_{AD} = \sqrt{(2\ -\ 0)^2 + (2\ -\ 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$d)\ Podemos\ concluir\ que\ as\ dist\hat{a}ncias\ procuradas\ s\tilde{a}o\ iguais,\ ou\ seja, d_{AB} = d_{AC} = d_{AD}.$

e-f) Assim, o desenho ou descrição será de uma circunferências.

g) Nesse caso existem infinitas possibilidades de marcação para esse ponto uma delas poderia ser o ponto trivial E(-2,2) ou qualquer outro cuja distância até o árbitro em O(0,0) seja igual a $2\sqrt{2}$ *unidades de comprimento.*

Figura 66 - Posição do Jogador Elano



Fonte: o autor, 2023.

Na próxima seção, apresentaremos a análise dos dados coletados durante o desenvolvimento da MEAAMaRP na nossa pesquisa. Os protocolos apresentados aqui pelos estudantes, colaboram com os objetivos específicos relacionados à construção e aplicação da nossa sequência de atividades e, sobretudo, para responder a nossa questão de pesquisa:

“Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações”?

6.3 Análise do desenvolvimento da sequência de atividades e os protocolos das respostas dos estudantes

Conforme destacado na seção anterior, a apresentação dos Problemas Geradores e daqueles de Aprofundamento, utilizando a MEAAMaRP, ocorreu durante 18 aulas, de 50 minutos cada, entre os meses de agosto e outubro de 2023. O problema gerador 1 teve como objeto de estudo a definição de lugar geométrico (l.g) e como ele pode ser caracterizado a partir de um conjunto específico de pontos. Nesse caso, tratamos, no primeiro momento, especificamente, da circunferência. Passada a leitura do problema, de forma individual e, posteriormente, coletiva, ao observar como as duplas estavam desenvolvendo o problema e sua resolução, como previsto na 4ª e 5ª etapas da MEAAMaRP, surgiu a primeira observação em relação ao desenvolvimento da dupla 2 que apresentou dificuldades em escolher uma região, na malha quadriculada fornecida, para marcar os eixos do plano cartesiano. A dupla se questionava se deveria contar todos os quadradinhos da malha e onde, de fato, colocaria o plano cartesiano. Realizei algumas intervenções que pudessem fazer ambos os componentes da dupla refletirem que qualquer posição escolhida da malha, e não necessariamente o seu centro, poderia ser um local para a construção do plano cartesiano. A seguir, apresentamos a transcrição do diálogo com essa dupla:

Dupla D2: *Olha, professor, aqui tem 28 quadradinhos. Tem que marcar o centro no encontro? Ou no meio do quadradinho exato? Teria que marcar o centro no 14º quadradinho? Porque o meio não é um quadradinho exato, pois temos 28. Professor, colocamos o centro no meio do meio, assim fica mais fácil de traçar.*

Observa-se, nesse questionamento inicial da dupla D2, que a dificuldade momentânea em transcrever os pontos do esquema do campo de futebol dado para a malha quadriculada pode estar associada à noção de plano cartesiano e sua representação gráfica, discriminada como um padrão de construção em que os eixos cartesianos precisariam estar sempre no centro do plano do papel para favorecer a marcação da sua origem (0,0).

Essa foi uma ótima oportunidade para fazer uma rápida intervenção com os estudantes no momento de formalização do problema, como veremos adiante. É importante destacar que a discussão em torno da marcação do plano cartesiano e dos pontos das posições de cada jogador foi um momento importante para retomar construções na malha quadriculada.

Seguindo com o problema, outro ponto que mereceu destaque foi uma afirmação feita também pela dupla D2:

Dupla D2: *Professor, na letra C, é para colocar a medida ou a quantidade de quadradinhos que temos para direita e para esquerda? Eu posso colocar, assim, dois quadradinhos para direita horizontal, dois quadradinhos para esquerda horizontal?*

Professor: Como vocês acham que podemos medir distâncias no plano cartesiano?

Dupla D2: *Contando quadradinhos, mas podemos errar? Como vamos escrever isso?*

Professor: Nesse trabalho, não fiquem receosos de cometer erros: faz parte do processo de resolução de vocês. E deixem seus registros, sem essa preocupação.

Dupla D2: *Podemos calcular essas distâncias olhando as coordenadas de cada ponto em relação ao árbitro, mas elas estão à mesma distância do árbitro. Se você parar para pensar, tem uma circunferência aqui ligando eles. Tudo está com valores 2, tudo no 2.*

Professor: Mas, como vocês podem afirmar isso?

Dupla D2: *Porque essa é a pergunta da letra d) que pede para comparar?*

Professor: Mas, como calculamos a distância entre dois pontos? Vocês podem utilizar as ferramentas que já aprendemos. Essa distância está na diagonal, na vertical, na horizontal? Já pensaram sobre isso?

Dupla D2: *É aquela ideia de somar e diminuir, nas coordenadas? Subtraindo os valores?*

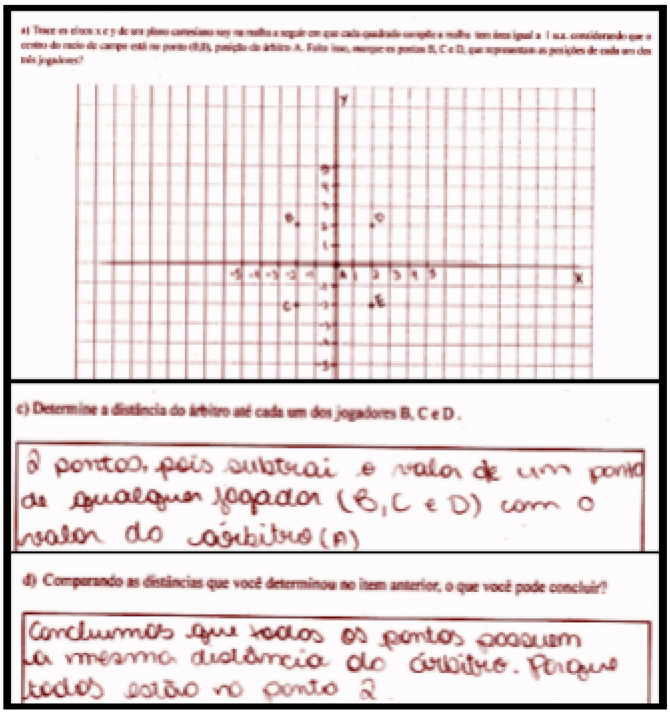
Professor: Isso, vocês podem utilizar a ideia de distância entre dois pontos.

O diálogo descrito anteriormente reforçou a importância do incentivo e da observação, previstos na etapa 5 da MEAAMaRP. Esse momento colocou o professor e os estudantes juntos na discussão de ideias e de possibilidades de resolução daquele problema e permitiu que as reflexões ocorressem durante a resolução, colaborando com o seu desenvolvimento e objetivando atingir a solução; mais do que isso, objetivando que houvesse aprendizagem com esse movimento de tentativas, acertos e erros. Vale ressaltar que, segundo Duval (2009):

> A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino. Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas "traduções" mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la. Porém, quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e atitudes dos alunos (Duval, 2009, p.19).

Como registro dessa discussão e pela resolução apresentada pela dupla D2, conforme a Figura 67, observa-se que, apesar do cálculo direto da distância entre dois pontos não ter sido realizado, houve um registro escrito de como realizar essa ação diante daquilo que foi proposto. O fato de os estudantes terem observado que os pontos estavam equidistantes do ponto A, posição do árbitro, e que os demais jogadores estavam sobre a mesma circunferência em que Elano estava, mostrou que a suposta espontaneidade em se calcular a distância entre cada jogador e o ponto fixo A reforça as ideias de Duval (2009) apresentada anteriormente. Objetivar a exploração das possibilidades que esse problema trouxe para a dupla D2, previstas nas 10 etapas da MEAAMaRP, favoreceu a ideia de realizar as coordenações de passagem de um sistema de representação para outro.

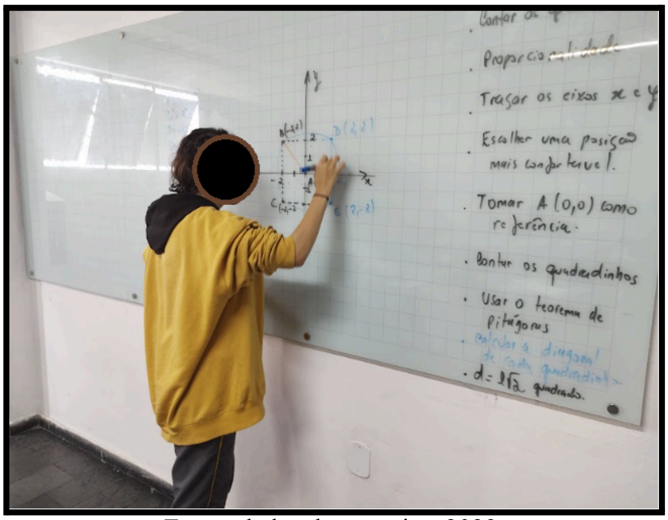
Figura 67 - Resolução da dupla D2 problema gerador 1



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

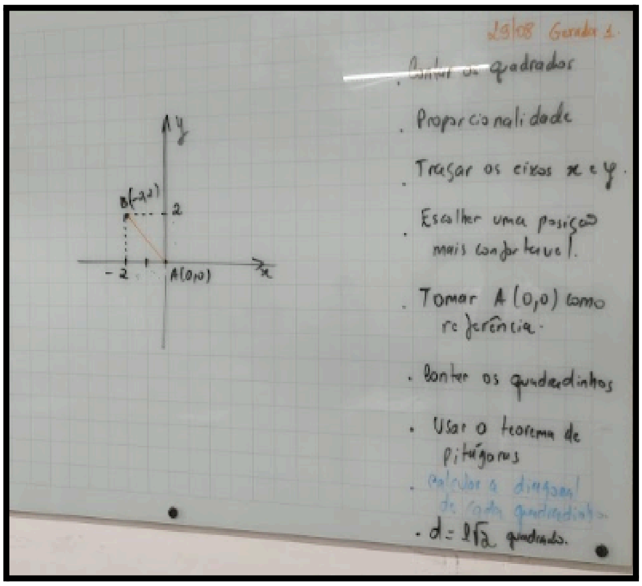
Outro ponto importante a destacar, no desenvolvimento do primeiro problema de aprofundamento, ocorreu na plenária de discussão, onde os estudantes puderam ir ao quadro, após realizarem apontamentos de como resolver cada item do problema gerador 1, conforme destacado nas fotos das Figuras 68 e 69.

Figura 68 - Plenária de resolução do Problema Gerador 1



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 69 - Sugestões de soluções da plenária

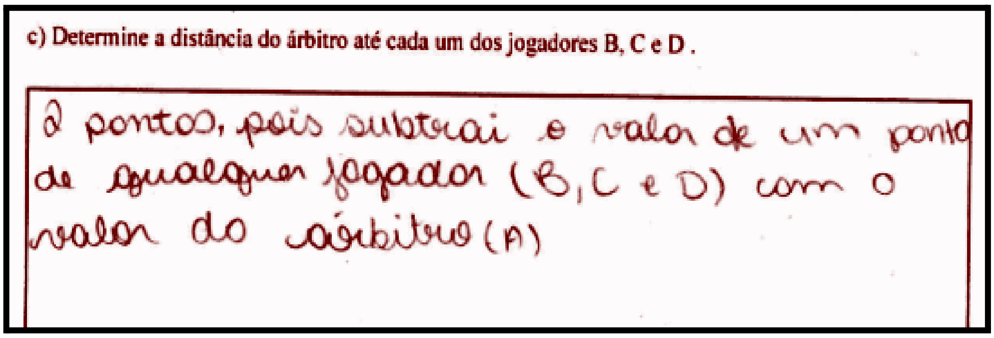


Fonte: dados da pesquisa, 2023.

A plenária de discussões a respeito de possíveis soluções para o problema mostrou muito envolvimento dos estudantes, corroborando com o que Onuchic e Allevato (2021) destacam como o momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevantes construção de conhecimento acerca do conteúdo. Destacamos aqui a participação e a vontade deles para que fossem ao quadro e resolvessem o problema proposto. Foram apontadas formas distintas para que as distâncias entre os jogadores e o árbitro fossem calculadas.

Outra questão importante, na aplicação desse problema, foi que, embora parte das duplas tivesse apresentado dificuldades em calcular ou em perceber que poderia utilizar a "distância entre dois pontos" para dar solução ao problema, como representado na Figura 70, tanto o problema quanto sua ideia central, associados à equidistância, desenrolaram-se, com certa naturalidade, a partir da pergunta sobre as possíveis posições do jogador Elano, como, por exemplo: utilizar o teorema de Pitágoras; utilizar a diagonal do quadrado $d = l\sqrt{2}$ como unidade de medida e, em seguida, a proporcionalidade na contagem dos quadradinhos da malha, além de escolher uma posição para o plano que permitisse a visualização dos pontos com o árbitro na origem, tal como descrito nas resoluções das duplas D2, D6 e D7, conforme mostram as Figuras 70 a 72.

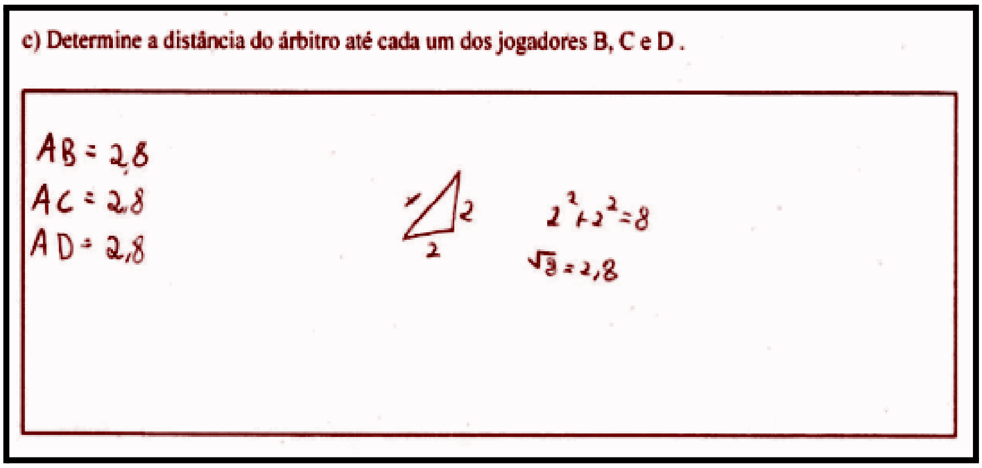
Figura 70 – Distância entre os jogadores e o árbitro resolução da dupla D2


c) Determine a distância do árbitro até cada um dos jogadores B, C e D.

2 pontos, pois subtrai o valor de um ponto de qualquer jogador (B, C e D) com o valor do árbitro (A)

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 71 – Distância entre os jogadores e o árbitro resolução da dupla D6

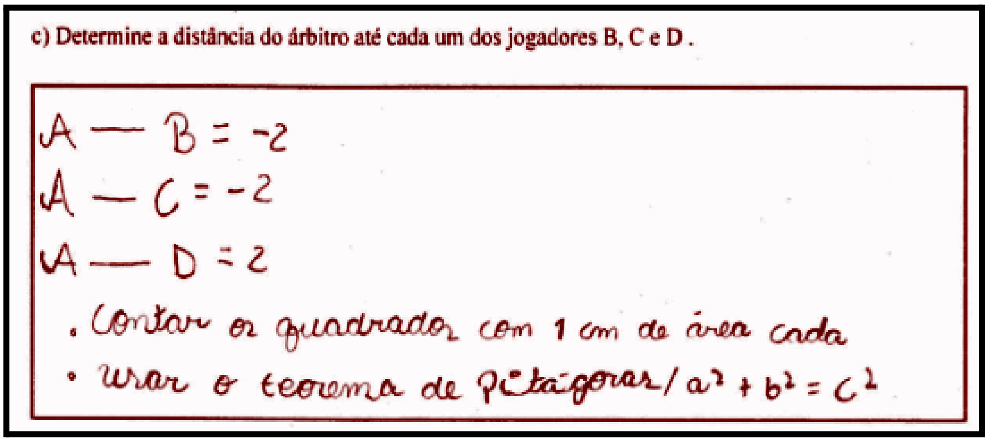

c) Determine a distância do árbitro até cada um dos jogadores B, C e D.

AB = 2,8
AC = 2,8
AD = 2,8

$2^2+2^2=8$
$\sqrt{8}=2,8$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 72 – Distância entre os jogadores e o árbitro resolução da dupla D7


c) Determine a distância do árbitro até cada um dos jogadores B, C e D.

A — B = -2
A — C = -2
A — D = 2

- Contar os quadrados com 1 cm de área cada
- usar o teorema de Pitágoras / $a^2 + b^2 = c^2$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Vale ressaltar que esse movimento de ir ao quadro e mostrar suas ideias e resoluções de problemas ou exercícios fazia parte do cotidiano das aulas de Matemática, uma vez que com esse agrupamento de estudantes realizavam essa ação desde quando estavam na 2ª série do

Ensino Médio, em que foram meus estudantes. E como Cai e Lester (2012, p.156) nos sugerem:

> [...] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo,para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática.Além disso, os professores devem desenvolver a cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula.

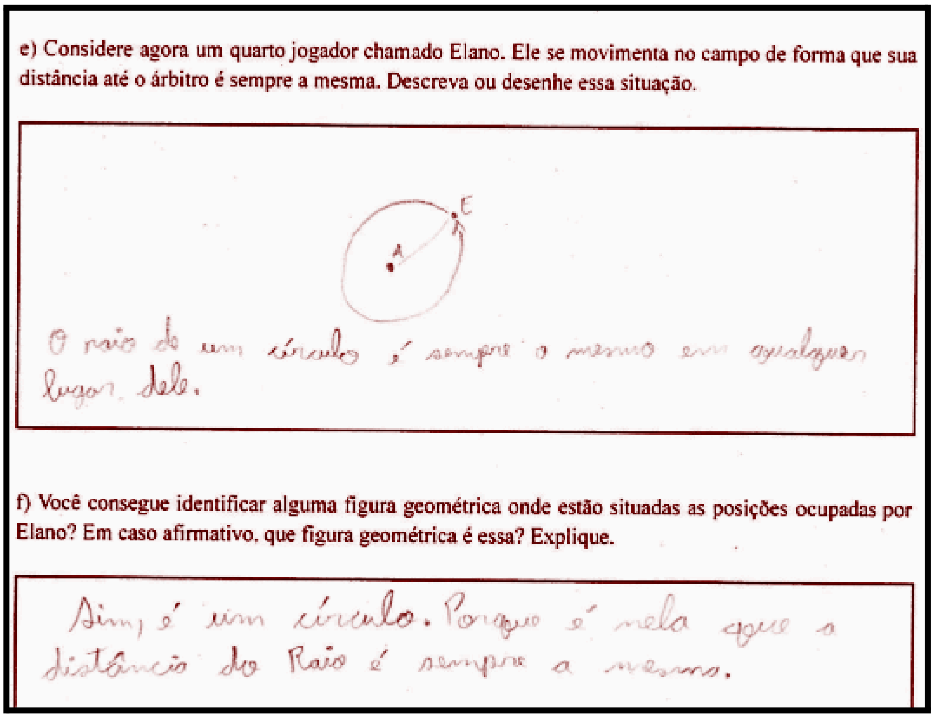
Destacamos aqui que a prática de desenvolver a resolução de um problema em discussões coletivas já fazia parte da minha prática cotidiana como professor e, mesmo não sendo o desenvolvimento da MEAAMaRP e das dez etapas sugeridos por Onuchic e Allevato (2021), dessa forma, o movimento significativo que as plenárias provocam no ambiente de sala de aula enriquecem as trocas coletivas e individuais e fortalecem a confiança e os laços dos estudantes para com o seu fazer individual e coletivo.

Assim, foi perceptível a construção dos conceitos que foram trazidos para a plenária, uma vez que a própria resolução foi feita pelos estudantes. Após a plenária de discussões, foi proposta a formalização do conceito de lugar geométrico, partindo da ideia da circunferência, em que ficou bem estabelecido, pela minha percepção, enquanto professor pesquisador, que eles conseguiram enxergar elementos importantes da circunferência, tais como: seu centro e a ideia de equidistância associada ao raio.

Ainda que boa parte das duplas tenha conseguido identificar que se tratava de uma circunferência, conforme destacado na Figura 73, e embora a utilização do “termo” círculo, no lugar de circunferência, pela dupla D8 tivesse ocorrido para classificar o lugar geométrico estudado, observamos, pela resolução escrita, o conceito que se esperava aprender na aplicação do problema gerador 1.

Nas resoluções propostas pelos estudantes, a ideia de utilização do teorema de Pitágoras para o cálculo da distância entre dois pontos é notada no registro dessa representação, mesmo sem que houvesse a utilização da fórmula direta da distância entre pontos. Além de constatada a ideia, no caso da dupla D7, de utilização da malha na contagem dos quadradinhos, partindo do concreto geométrico, mas sem que se fizesse a conversão para o registro algébrico, como era esperado.

Figura 73 - Posições de Elano dupla D8


e) Considere agora um quarto jogador chamado Elano. Ele se movimenta no campo de forma que sua distância até o árbitro é sempre a mesma. Descreva ou desenhe essa situação.

O raio de um círculo é sempre o mesmo em qualquer lugar dele.

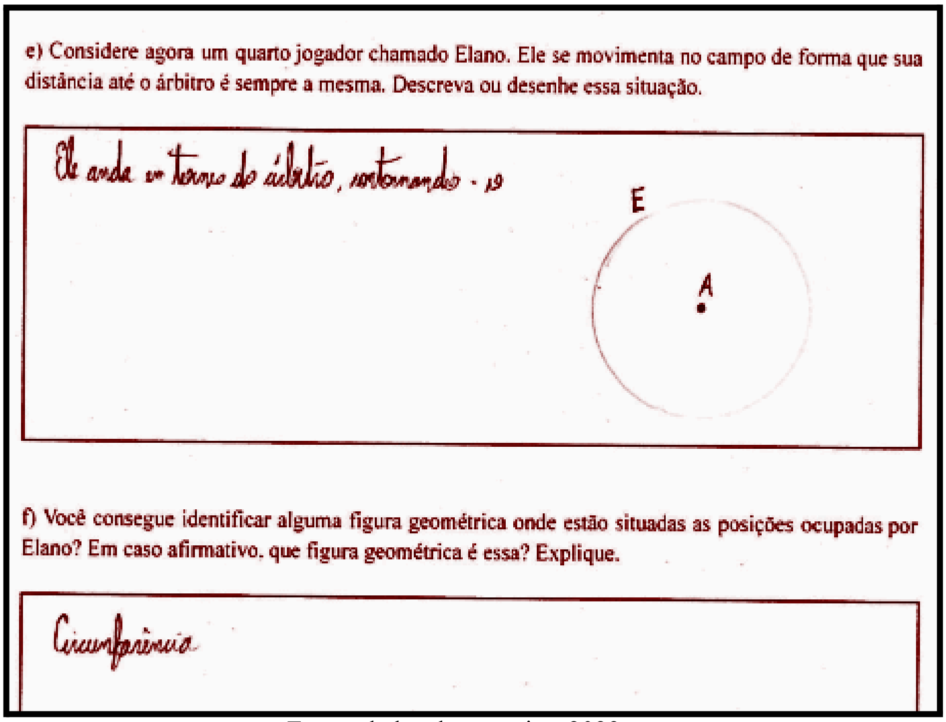
f) Você consegue identificar alguma figura geométrica onde estão situadas as posições ocupadas por Elano? Em caso afirmativo, que figura geométrica é essa? Explique.

Sim, é um círculo. Porque é nela que a distância do Raio é sempre a mesma.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Pelo registro da dupla D1, percebeu-se que a classificação e a referência ao lugar geométrico foram descritas de forma correta, conforme mostra a Figura 74, embora a dupla D8 tenha utilizado a palavra círculo para descrever o l.g.

Figura 74 - Posições de Elano dupla D1


e) Considere agora um quarto jogador chamado Elano. Ele se movimenta no campo de forma que sua distância até o árbitro é sempre a mesma. Descreva ou desenhe essa situação.

Ele anda em torno do árbitro, contornando-o

f) Você consegue identificar alguma figura geométrica onde estão situadas as posições ocupadas por Elano? Em caso afirmativo, que figura geométrica é essa? Explique.

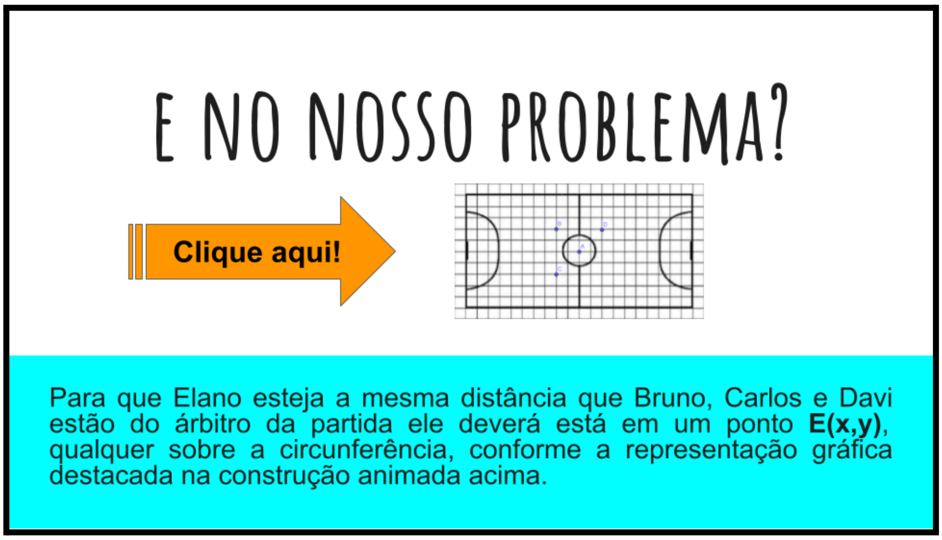
Circunferência

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Outro ponto a destacar foi um questionamento feito pela dupla D2 na plenária. Ao se deparar com a pergunta em que seria necessário descrever as diferentes posições ocupadas pelo jogador Elano, questionaram se a circunferência seria uma Figura geométrica, em razão de ela ser apenas um contorno de pontos. Essa dúvida ou pergunta pode estar associada à ideia do questionário de sondagem, em que foi solicitado aos estudantes que respondessem se eles sabiam identificar a diferença entre círculo e circunferência.

Na plenária, nesse momento, concluíram que se tratava de uma Figura geométrica com infinitos pontos e, a partir da formalização do conceito de lugar geométrico, utilizando como suporte a construção animada feita no Geogebra e disponível no *link* https://www.geogebra.org/classic/tnegqbhc, com as diferentes posições de Elano, foi estabelecida essa formalização. Destacamos aqui que utilizar animações e Figuras como suporte e, especificamente, no caso do estudo de um lugar geométrico, é essencial para ampliar o conceito que se deseja ensinar e, como veremos nos dados apresentados no questionário de *feedback*, esse também foi um dos apontamentos dos estudantes em relação à contribuição e ao favorecimento do entendimento do problema, ao serem desenvolvidas as 10 etapas da MEAAMaRP.

Figura 75 - Formalização do Problema Gerador 1



Fonte: o autor, 2023.

O problema de aprofundamento 1.1, que teve, como objetivo central, o estudo do lugar geométrico, tomando como foco o conceito de reta mediatriz, foi proposto, a partir da definição desse lugar geométrico. O objetivo desse problema foi obter a equação de uma reta mediatriz, dados dois pontos no plano do cartesiano. A aplicação desse problema iniciou-se com a retomada da definição de um lugar geométrico, trazendo como exemplo a ideia da circunferência como um l.g. e seus principais elementos.

Destacamos que esse problema não apresentava um suporte visual e que essa construção dependia da autonomia dos estudantes em utilizarem a malha quadriculada fornecida para que fizessem suas representações gráficas. Devido ao dinamismo do cotidiano escolar, nesse dia, houve a ausência de três duplas, o que exigiu fazer uma reorganização dos grupos de trabalho presentes na ocasião, o que não provocou prejuízos significativos na programação ou na pesquisa como um todo.

No momento da leitura e da discussão nas duplas, ficou notável que houve muita dificuldade dos estudantes para encontrarem a equação da reta determinada pelos pontos A e B e que a ideia de determinar a equação de uma reta, através de uma condição de posição relativa, não estava tão bem-consolidada pela maioria das duplas presentes. Nesse momento, foi possível perceber que, embora algumas duplas soubessem encontrar a equação da reta AB, seria necessário fazer retomadas dos conceitos de equação de reta e das formas de escrever suas equações, como também das condições relacionadas à posição relativa entre retas. Como previsto na MEAAMaRP, relembramos que, em uma das ações presentes no ciclo de etapas que se constrói, está o viés forte e permanente da avaliação e, nesse cenário, onde se observam lacunas presentes no processo de ensino-aprendizagem, faz-se necessário que o professor tenha um olhar cauteloso e sensível para que, junto aos estudantes, possa retomar conceitos ainda não foram consolidados ou que necessitam de amadurecimento e domínio.

Dentre as concepções relacionadas ao tripé ensino-aprendizagem-avaliação, Onuchic e Allevato (2021) afirmam que se constituem de elementos distintos e que não ocorrem necessariamente ao mesmo tempo. Elas reafirmam que a avaliação, como formativa e contínua durante o processo de ensino-aprendizagem, passou a ser repensada e adotada como elemento de destaque e que pode e deve ser utilizada como uma oportunidade para aprender. Nesse sentido, Pironel (2019, p. 281) afirma que

> o feedback realizado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema é sempre no sentido de incentivar o aluno a resolver o problema, num esforço conjunto, com todos os elementos de cada um dos grupos, a fim de resultar a construção de um determinado conceito matemático. Ficou evidente que essa metodologia não procura destacar fracassos, mas realçar a força que o estudante possui e que toda ideia pode ser importante na resolução de um problema.

Além disso, quando Pironel (2019) afirma que a avaliação é mais eficaz quando, através dela, conseguimos refletir sobre o modo como as pessoas aprendem, isso vai de encontro ao que vivenciei como professor pesquisador e também em diversos momentos de reflexão sobre como se dava a avaliação ao longo do processo de ensino-aprendizagem ao desenvolver as dez etapas da MEAAMaRP. O “movimento” provocado pelos problemas, chamados aqui de aprofundamento, que, além de trazerem novos tópicos de ensino da Geometria Analítica, ensinada naquele momento da pesquisa, oportunizaram que eu pudesse avaliar se conceitos ensinados anteriormente estavam consolidados e como os estudantes também lidavam com o novo desafio. Nesse sentido, aprofundar e avaliar eram ações que ocorriam o tempo todo, durante os momentos de retomadas e também de evolução dos estudos em seus registros de aprendizagem. Essas reflexões corroboram com Pagani (2016, p.81) que afirma:

> Entendemos que a avaliação num espaço de aprendizagem deve servir como um processo que busca compreender o significado do erro e do acerto do educando, a fim de estabelecer estratégias de ensino que possam ampliar a aprendizagem dos estudantes. Assim, as tarefas utilizadas no processo de avaliação devem servir tanto para avaliar o desempenho do estudante quanto auxiliar o professor na tomada de decisões educacionais.

É importante destacar que, quando há lacunas no processo de ensino-aprendizagem, a avaliação passa a ter um papel importante nesse processo e deve servir como um momento de sensibilidade do professor, na tomada de decisões, que poderá rever como serão as retomadas nos pontos em que existiu tal demanda e também, como reafirma Pagani (2016) e Pironel (2019), aproveitar esse momento para avaliar sua prática ao utilizar as dificuldades e erros dos estudantes e ou suas respostas e resultados apresentados na resolução de um problemas para construção de aprendizagens.

Assim, no caso específico do problema 1.1, nos deparamos com essa questão, uma vez que as dificuldades em desenvolver a proposta do problema diziam respeito à necessidade de melhor visualização do problema, do ponto de vista mais geométrico. Nesse momento, retomei as atividades do livro texto dos estudantes, com o auxílio do Geogebra nas construções. Julgo que essa estratégia provocou avanços em relação ao entendimento geométrico dos problemas e, sobretudo, no tratamento da equação de retas paralelas e perpendiculares.

Aplicar a MEAAMaRP, nesse momento, abriu um campo das possibilidades de observação e de verificação dessas lacunas, principalmente durante as trocas entre as duplas, na tentativa de os estudantes resolverem o problema e nos momentos de incentivo do professor. As discussões coletivas e em grupo proporcionaram aberturas para essa discussão e para a avaliação das dificuldades apresentadas pelos estudantes, o que, na verdade, é um dos tripés da metodologia aplicada, como reforça Onuchic e Allevato (2021, p.52):

> [...] a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois nessa metodologia o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo, bem como os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas (ditas tradicionais).

Nesse momento de reflexões, como professor pesquisador, adotei uma postura de observação que pudesse, com cautela, não atropelar a sequência de problemas que ainda seriam desenvolvidos, sem a pretensão de obter respostas e desenvolvimentos sempre corretos, mas, sim, que pudessem ser usados para abrir discussões coletivas. Como exemplos dessas reflexões, foram utilizadas as resoluções apresentadas pelas duplas D4 e D6.

No caso da primeira dupla, conforme a Figura 76, observamos que os estudantes utilizam os pontos A e B como pontos da reta mediatriz e obtiveram, na verdade, uma equação de reta determinada por esses dois pontos, utilizando uma ferramenta de condição de alinhamento estudada anteriormente, embora, no plano cartesiano, tenham desenhado a suposta mediatriz.

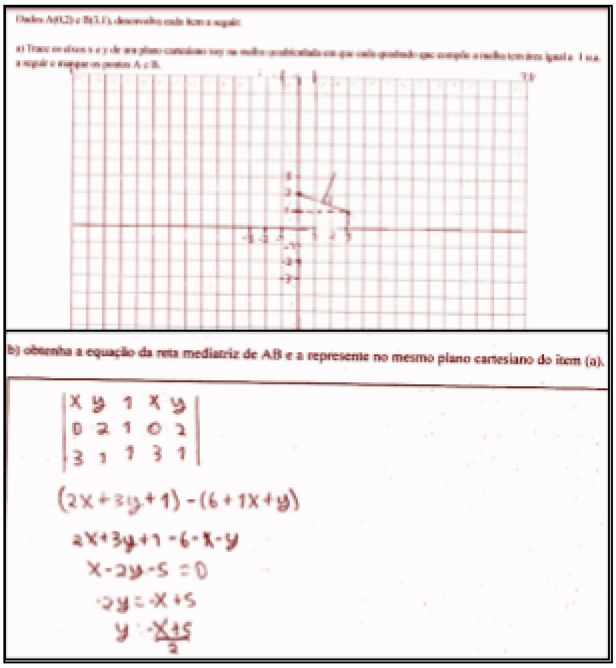
Esses exemplos de resoluções foram trabalhados em sala no quadro com os estudantes, com o objetivo de gerar discussões sobre as soluções apresentadas por eles e serviram como uma ponte para a retomada dos conceitos associadas às retas no $\mathbb{R}^2$, suas construções e as relações entre o seu esboço e os elementos algébricos da sua equação. Esse momento gerou uma discussão rica e de revisão de conteúdos, anteriormente estudados como: as diferentes formas de escrever a equação de uma reta, posição relativa de retas no plano e a relação entre seus coeficientes angulares a fim de trabalhar as lacunas citadas. Utilizar as soluções apresentadas por eles foi importante, pois as duplas puderam expor para os demais colegas como pensaram uma possível solução para o problema, o que gerou reflexões, discussões e ponderações acerca das soluções apresentadas, sendo esse um momento importante em que, como professor, pude também formalizar resultados e discutir as soluções com os estudantes.

A partir dessas lacunas, foi possível vivenciar na prática, e podemos afirmar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem não pode estar dissociada da Avaliação e sim que a Metodologia pode e deve servir para a avaliação do processo de ensino-aprendizagem e para esse momento de nossa pesquisa, ela se apresentou não apenas para avaliar a compreensão matemática sobre um determinado conteúdo, mas principalmente para observar a capacidade dos estudantes de construírem suas soluções, utilizando as diferentes linguagens possíveis daquele problema.Dessa forma, a Avaliação através da Resolução de Problemas, torna-se relevante na construção de conhecimentos, pois permite, além de uma discussão coletiva, observar que os erros e acertos fazem parte do processo de toda Resolução de Problemas.

Descrevendo um pouco mais sobre a resolução apresentada pela dupla D4, na Figura 76, vemos que, ao utilizarem a condição de alinhamento, a dupla procurou determinar a equação de uma das retas que faz parte da resolução do problema, nesse caso, da reta AB, embora o comando do problema proposto, solicitava a equação da reta mediatriz. Esse ponto foi amplamente discutido com os estudantes, apoiando-se na ideia inicialmente correta de determinar tal equação com a necessidade de dar sequência no desenvolvimento da pergunta proposta.

Incentivar os estudantes na busca desta resolução, valorizando a construção inicial da dupla D4, foi importante e permitiu a utilização de recursos visuais como o Geogebra que pode auxiliá-los nas construções e fez parte desse processo de reflexões coletivas, em que destacamos que a utilização dessa ferramenta contribuiu com a exploração de pontos do l.g e assim, poder desenvolver a resolução do item c, do problema de aprofundamento 1.1, que solicitava tal ação. Nossa intencionalidade, ao construir os problemas de aprofundamento, era permitir que esses nos mostrassem se os elementos principais tinham sido consolidados, e aprofundar o conhecimento construído.

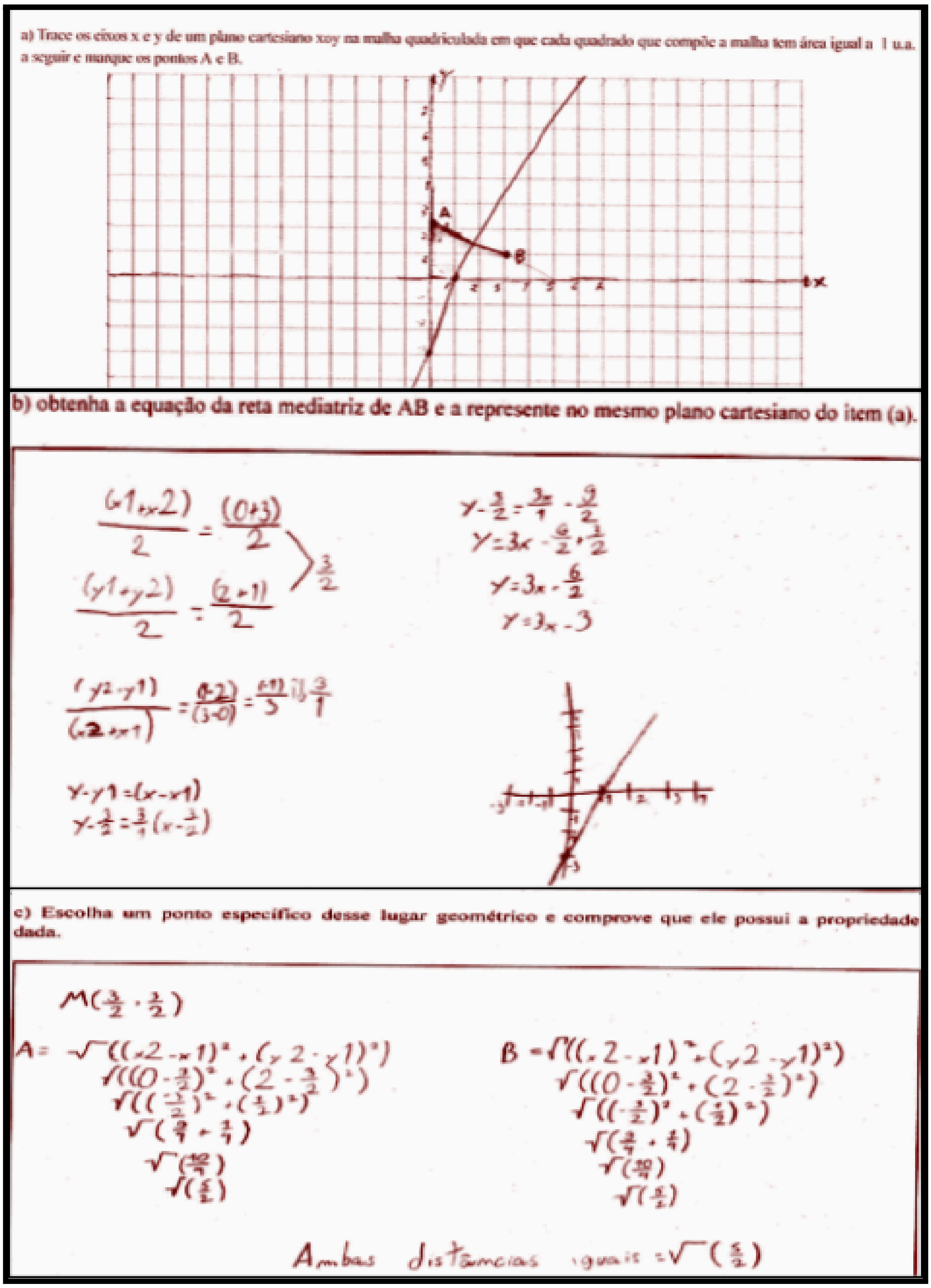
Figura 76 - Resolução da dupla D4 itens a e b do problema de aprofundamento 1.1



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Por outro lado, a dupla D6, conforme registro na Figura 77, desenvolveu uma possível resolução para o problema, dadas as condições definidas pelo l.g. e utilizando o ponto médio de AB.

Figura 77 - Resolução da dupla D6 itens a,b e c do problema de aprofundamento 1.1



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Retomando o trabalho de aplicação de novos problemas, foi aplicado o Problema Gerador 2 e, em sequência, os problemas de aprofundamento 2.1 a 2.4. Essa fase da coleta de dados tinha como objetivo principal desenvolver o ensino-aprendizagem de conceitos relacionados à circunferência e sua equação nas formas reduzida e geral, bem como estudar seus elementos, tais como centro e raio, associados à sua equação. Dessa forma, o Problema Gerador Gerador 2 teve como objetivo geral apresentar e reconhecer a equação da circunferência como um lugar geométrico e utilizar o conceito de equidistância para se obter sua equação algébrica e a relação entre seus elementos geométricos.

Nessa parte da coleta de dados, a nossa questão de pesquisa: "**Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações"?** apresentava-se de uma forma mais latente, uma vez que os registros de representação semiótica, as conversões e os tratamentos mostraram-se mais evidentes, o que nos permitiu fazer reflexões mais pontuais acerca da aplicação da MEAAMaRP e, sobre como essa metodologia, poderia favorecer os RRS como destacado na teoria de Duval (2009).

Dessa forma, demos continuidade à coleta de dados, desenvolvendo o Problema Gerador 2 nas etapas da MEAAMaRP. Este problema teve como objetivo introduzir a representação algébrica da equação de uma circunferência, a partir de uma estrutura inicial, em que um suporte geométrico de um plano cartesiano foi dado e nele representado o ponto referencial chamado de C_1, a ser identificado como centro de uma circunferência. Além disso, esse problema também retomava a ideia de lugar geométrico, tratada anteriormente, porém com o objetivo de retomada no tratamento do seu desenvolvimento. É importante destacar que, por ser um problema adaptado do Enem (2019) e apresentar um suporte visual, os estudantes se mostraram mais envolvidos e desafiados pela proposta, o que colaborou muito como a etapa de incentivo e de observação do desenvolvimento das duplas.

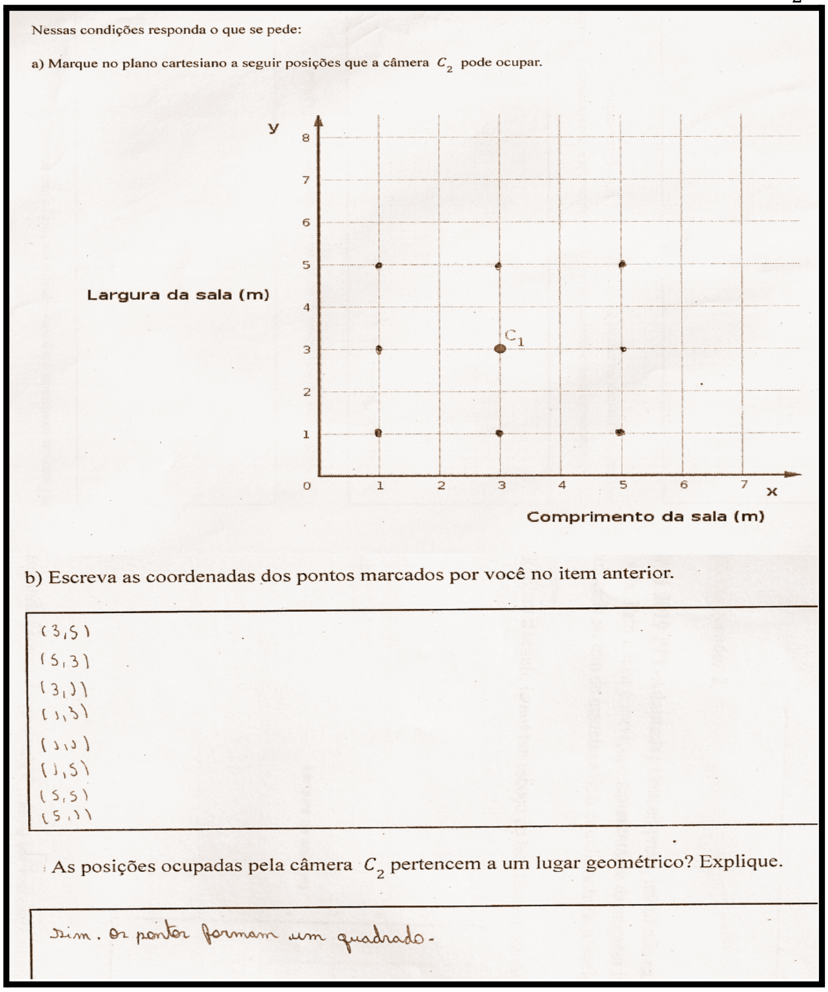
Especificamente tratando do problema e suas etapas, destaca-se que, entre as oito duplas de trabalho, cinco delas identificaram que as diferentes posições para a câmera de segurança C_2, pertenciam a um lugar geométrico, no caso, uma circunferência. Embora algumas duplas tivessem utilizado o termo círculo para essa referência e três duplas, que não fizeram tal identificação, trataram esse lugar geométrico como um quadrado, conforme os registros representados nas Figuras78 e 79, das duplas D5 e D6 respectivamente.Tomando como referência a teoria de registros de representação semiótica, proposta por Duval (1995), dois termos são importantes e de grande valia para as abordagens e interpretações de dados gerados durante o processo de ensino-aprendizagem e que não devem ser confundidos, objeto e representação, tal como evidenciado por Afonso e Saddo (2016, p.467):

> a representação de um objeto e a conversão de representações entre registros, por exemplo,são comuns nas práticas do professor de Matemática em sala de aula, quando este pretende fazer com que os seus alunos compreendam uma determinada noção de difícil entendimento no registro no qual o objeto foi inicialmente apresentado.

É importante destacar que, ao aplicar a MEAAMaRP, o professor tem um papel fundamental nos momentos de incentivo e também no momento da formalização dos conceitos e das definições que cercam o objeto do conhecimento proposto, com a ação de tratar essa etapa mobilizando diferentes registros, em função do objeto que se deseja representar e ensinar. No caso específico do Problema Gerador 2, percebe-se que os possíveis registros de representação de um objeto matemático, língua materna, registro algébrico, registro gráfico, registro numérico e etc., estão representados pelas respostas dadas pelas duplas D5 e D6. Entretanto, podemos destacar que a conversão de uma representação, no caso, a da língua materna para a representação do registro gráfico, associada ao pensamento do objeto em questão, leva-nos a entender e a reforçar a ideia de que o signo (sinal mobilizado) é fruto do pensamento associado ao seu sistema mental e de exclusividade daquele indivíduo, no nosso caso, poderá estar associado a um consenso daquela dupla de trabalho ou de um dos seus membros.

Percebe-se, nesse recorte, que, quando as duplas D5 (Figura 78) e D6 (Figura 79) associaram o lugar geométrico a um quadrado, essa ação estava em consonância com a representação gráfica dada por elas, uma vez que esse raciocínio estava associado ao signo representado por elas, mas não na totalidade que se esperava alcançar na atividade, que era representar e classificar o lugar geométrico em questão, dadas as condições iniciais do problema.

Figura 78 - Resolução da dupla D5 para posições da câmera C_2


Nessas condições responda o que se pede:

a) Marque no plano cartesiano a seguir posições que a câmera C_2 pode ocupar.

b) Escreva as coordenadas dos pontos marcados por você no item anterior.

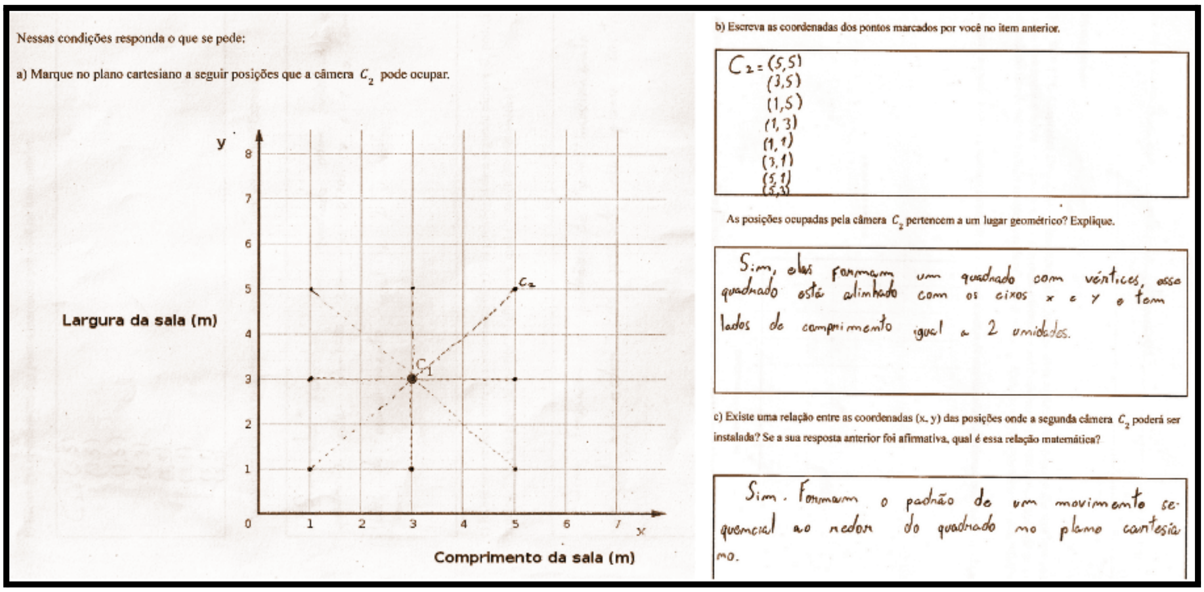
(3,5)
(5,3)
(3,1)
(1,3)
(1,1)
(1,5)
(5,5)
(5,1)

As posições ocupadas pela câmera C_2 pertencem a um lugar geométrico? Explique.

Sim. Os pontos formam um quadrado.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 79 - Resolução da dupla D6 para posições da câmera C_2


Nessas condições responda o que se pede:

a) Marque no plano cartesiano a seguir posições que a câmera C_2 pode ocupar.

b) Escreva as coordenadas dos pontos marcados por você no item anterior.

C_2 = (5,5)
(3,5)
(1,5)
(1,3)
(1,1)
(3,1)
(5,1)
(5,3)

As posições ocupadas pela câmera C_2 pertencem a um lugar geométrico? Explique.

Sim, elas formam um quadrado com vértices, esse quadrado está alinhado com os eixos x e y e tem lados de comprimento igual a 2 unidades.

c) Existe uma relação entre as coordenadas (x, y) das posições onde a segunda câmera C_2 poderá ser instalada? Se a sua resposta anterior foi afirmativa, qual é essa relação matemática?

Sim. Formam o padrão de um movimento sequencial ao redor do quadrado no plano cartesiano.

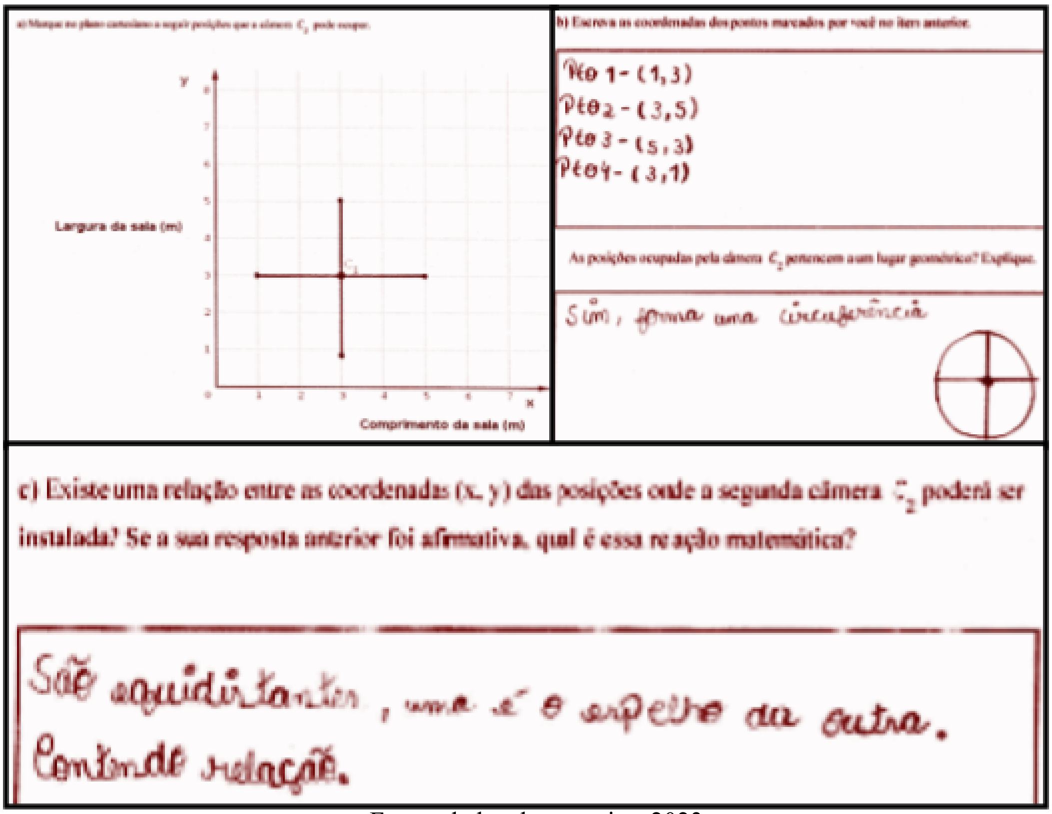
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Destacando ainda as soluções apresentadas pelas duplas D5 e D6, no item c), em que se esperava um registro algébrico do lugar daquele geométrico, dadas as condições de equidistância apresentadas no comando do problema, não obtemos nenhuma resposta por parte da dupla D5 e, como descrito na Figura 78, notamos, na resposta dada pela dupla D6, um registro em língua materna que retrata, de certa forma, a ideia geométrica esperada, com uso da expressão: "padrão de um movimento sequencial ao redor". Essa expressão vem de encontro à afirmação de Afonso e Saddo (2016):

> [...] quando um indivíduo pensa em um objeto (ideia, noção, conceito, etc.), apenas ele tem acesso a esse objeto naquele instante, pois pensar é faculdade do sistema mental.Tornar tal objeto acessível aos outros indivíduos implica evocá-lo, externá-lo por "gestos" ou por meio da sua representação em um registro.Este último é um *sistema estático* dotado de signos, enquanto que a representação ou representações feitas nesse registro são *dinâmicas,* no sentido de que podem sofrer tratamentos no próprio registro ou conversões entre os diferentes registros(Afonso;Saddi, 2016, p.469).

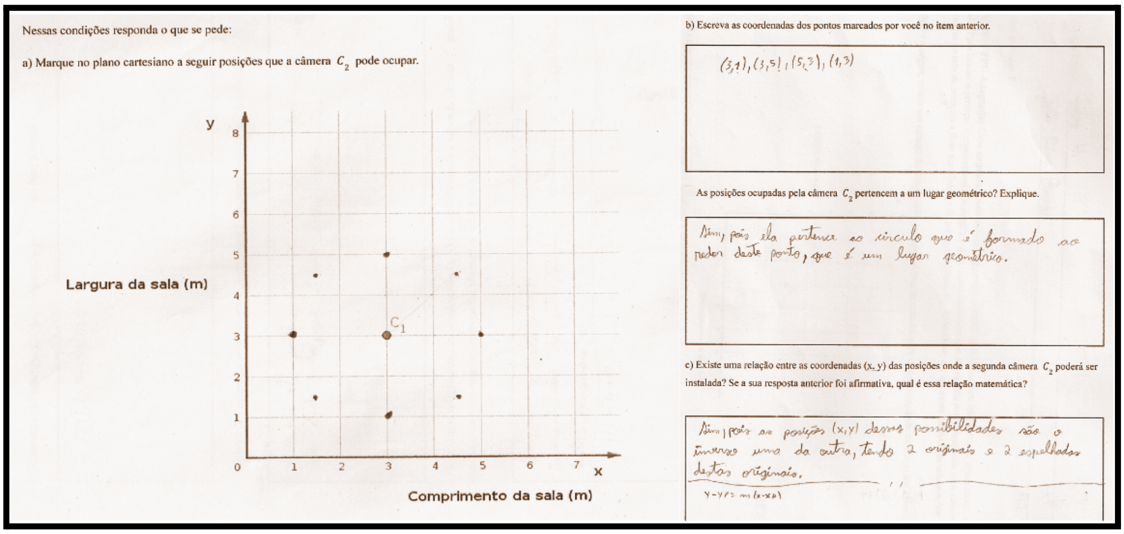
Com relação às soluções apresentadas pelas duplas D7, na Figura 80 e D8 na Figura 81, percebe-se o mesmo padrão de representação, embora o lugar geométrico tenha sido reconhecido de forma correta, sem a coordenação de pelo menos dois registros.

Figura 80 - Soluções apresentadas pela duplas D7 para o Problema Gerador 2



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 81 - Soluções apresentadas pela duplas D8 para o Problema Gerador 2



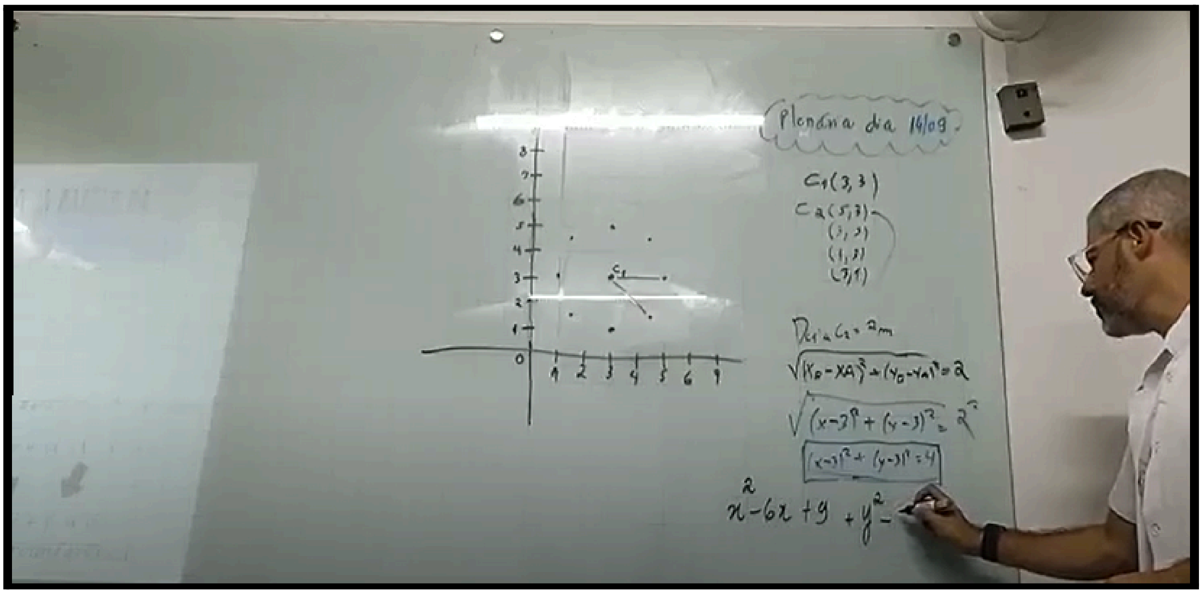
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Para esses casos apresentados, durante a plenária de discussão e de formalização do conceito da equação da circunferência e das possíveis soluções para o problema gerador 2, os registros foram realizados no quadro, com o objetivo de apresentar conversões que destacassem a transformação do registro em representação gráfica, em nova representação com o registro algébrico, com a finalidade de se obter a equação da circunferência.

A Figura 82 destaca essa etapa da MEAAMaRP que, como veremos adiante, nos registros dos problema de aprofundamento relacionados ao problema gerador 2, mostrou resultados importantes no contexto da teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003). Em se tratando de um objeto abstrato, fazem-se necessárias as representações para sua compreensão e apreensão, necessitando, assim, considerar a coordenação de, ao menos, dois registros do mesmo objeto.

Tratando-se de uma Metodologia de ensino em que o estímulo e a construção coletiva são pontos-chave no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, entendemos que a MEAAMaRP realiza um papel importante nessa atividade matemática, associada aos estímulos, sobretudo, com o seu papel de possibilitar o desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, à compreensão e à visualização das conexões internas que também estão presentes na TRRS.

Figura 82 - Plenária e Formalização do Problema Gerador 2



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Após a atividade de formalização da definição da circunferência como um lugar geométrico e de apresentar sua equação, utilizando a representação algébrica na forma reduzida $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$ *sendo a e b as coordenadas do centro e r o raio* e a forma geral $x^2 + y^2 + 2Ax + 2Bx + C = 0$, foi apresentada aos estudantes uma sequência de quatro problemas de aprofundamento, numerados e tratados a partir daqui como aprofundamentos 2.1;2.2; 2.3 e 2.4.

Ao propor a resolução desses quatro problemas para as duplas, seguindo o cronograma de aplicação, tínhamos como objetivos reconhecer e perceber se os estudantes conseguiriam manipular os elementos da circunferência, tais como seu centro e raio, e determinar sua equação a partir de situações-problemas que, ora utilizavam um recurso visual, ora não, partindo de um tipo de registro, fosse ele da língua materna inicialmente, e, posteriormente, o registro geométrico, ou da língua materna para um registro algébrico. Buscávamos, ainda, observar a possibilidade de conversão e a transformação de representações em outro registro. Tudo isto se configurou como a nossa expectativa, alinhada com o auxílio do incentivo e seguindo as etapas da MEAAMaRP.

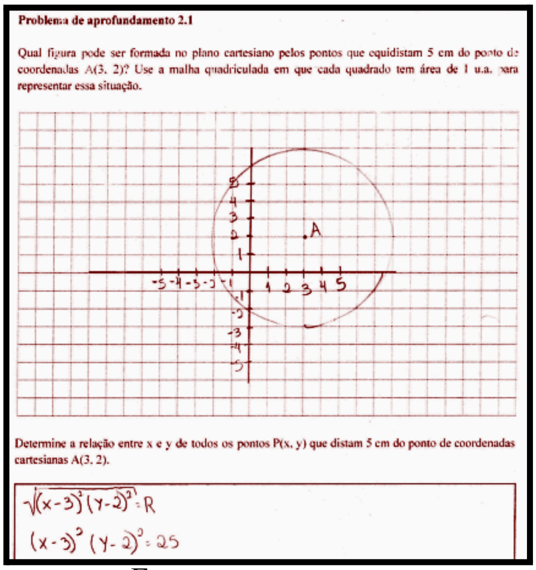
Tomando inicialmente o problema de aprofundamento 2.1, podemos destacar que as duplas se mostraram seguras ao responderem à pergunta inicial proposta, como também ao comando de que determinassem a relação matemática entre todos os pontos x e y que descreviam o lugar geométrico dado, o que foi satisfatório, como podemos perceber nas Figuras de 83 a 86, que apresentam as respostas dadas respectivamente pelas duplas D1, D2, D3 e D8, como amostragem. Percebemos aqui que a MEAAMaRP provocava nas resoluções dos estudantes e seus registros, uma evolução, e que o tripé ensino-aprendizagem-avaliação, enquanto concepção, deve ocorrer simultaneamente e durante a construção do conhecimento pelo estudante, como destaca Onuchic e Allevato (2021). Corroborando com isso, Onuchic (1999, p.203 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2021, p.47) afirma:

> O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas "reflete uma tendência de reação a caracterização passadas como um conjunto de fatos domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido da rotina ou por exercício mental".

Figura 83 - Representações da dupla D1

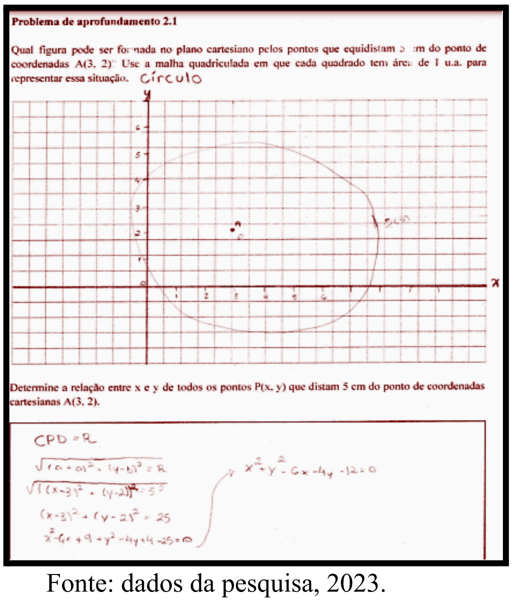
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 84 - Representações da dupla D2



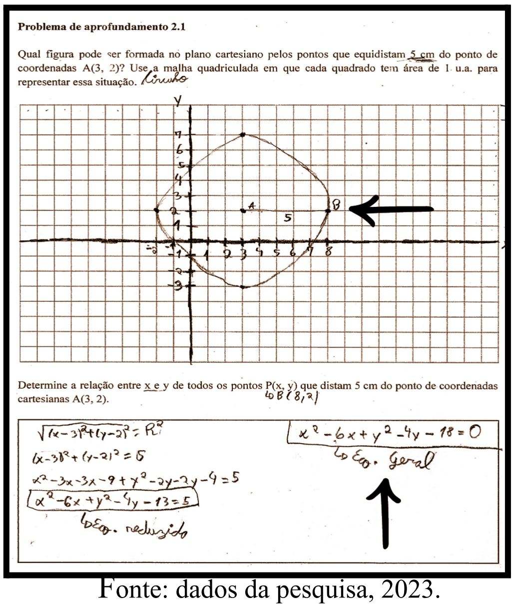
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 85 - Representações da dupla D3



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 86 - Representações da dupla D8



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Um ponto interessante a tratar é que a dupla D8 fez a utilização da equação reduzida com um pequeno erro, elevando o raio R ao quadrado, porém destacou o ponto de coordenadas **(8,2)** na representação gráfica da circunferência e também um suposto ponto de referência para P, conforme observamos no registro realizado à direita e destacado pela seta. Esse destaque nos dá pistas da ideia de utilização das coordenadas para verificar se os pontos marcados estão, de fato, satisfazendo a equação daquele lugar geométrico.

A escolha de um registro de representação adequado, para demonstrar ou descrever o objeto matemático em questão, pode favorecer o tratamento, no entanto, Duval (1995) afirma que dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão. Uma segunda condição é necessária: a coordenação de representações formuladas em registros distintos. Conforme definido por Afonso e Saddo (2016), a coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um objeto, em dois ou mais registros distintos, e ela aparece como condição fundamental para todo tipo de aprendizagem.

Nesse sentido, do Problema de Aprofundamento 2.2, que exigia uma representação gráfica, seguida de uma representação algébrica, esperava-se uma manutenção do tratamento dado à manipulação da expressão, que relacionava a distância entre os focos de incêndio A e B e a posição P de um bombeiro. E, durante a resolução do problema por parte das duplas, alguns diálogos chamaram a atenção, como destacados a seguir:

Dupla D2 : P*rofessor, posso fazer uma escala para marcar A e B? As coordenadas são grandes e não tenho 30 quadradinhos na malha para representar o ponto B(30,0).*

Professor: Vocês podem e devem pensar nessa proposta da escala, porém estamos falando de uma representação gráfica que pode ser feita como forma de esboço.

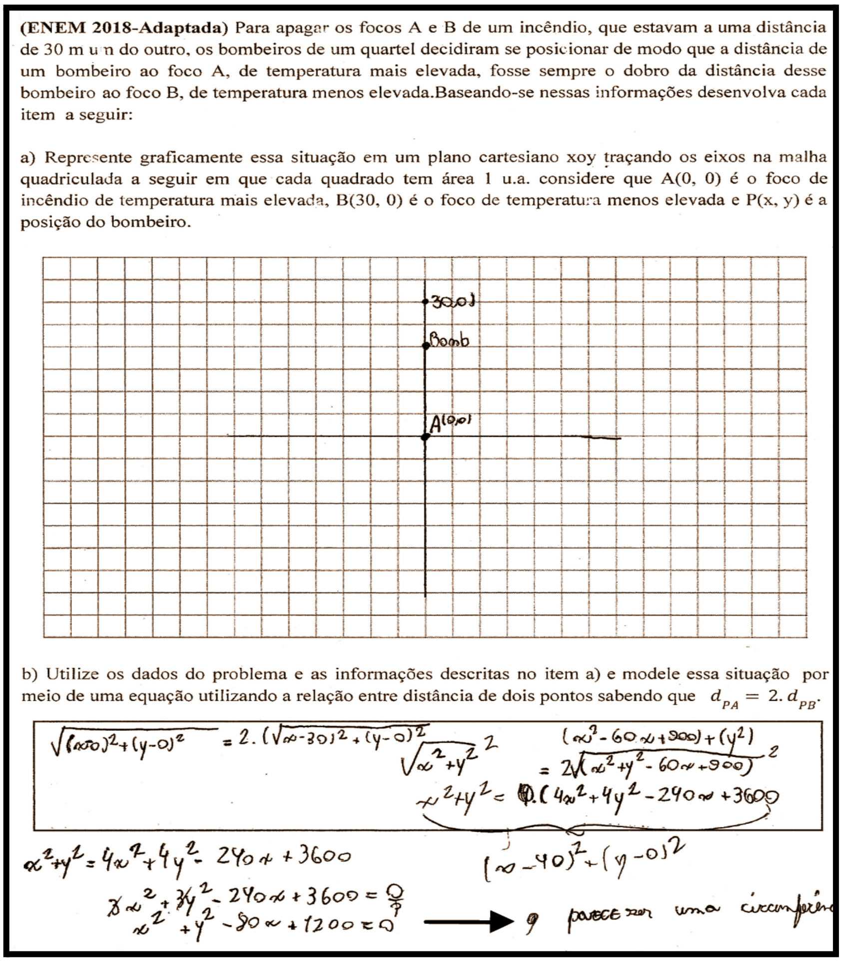
Dupla D8: *Professor, a posição do bombeiro precisa estar localizada no eixo x, uma vez que os demais pontos, A e B, também estão sobre esse eixo?*

Professor: Lembrem-se de que o ponto P tem uma coordenada cartesiana que pode variar. O importante é que ele esteja em uma posição que garanta a condição dada pelo problema. Ficaram atentos a essa informação?

Notamos, nesses diálogos, que a representação gráfica, seguida de um registro geométrico, ainda trazia desafios para os estudantes. O contexto de representação de um ponto genérico, associado a sua ideia abstrata de representação em diferentes posições, ainda precisava ser mais explorado, porém o registro e as conclusões em relação à pergunta feita no item b), em que a afirmação foi parcialmente traduzida, exigiu uma manipulação algébrica e nos mostrou que o reconhecimento dos elementos gráficos dados, como os pontos A e B e ponto genérico P, foram manipulados, como mostram as soluções apresentadas pelas duplas D1, D6 e D8, nas Figuras de 87 a 89, com destaque para os registros da dupla D1 (Figura 87) em que, no desenvolvimento, me fez o seguinte questionamento sobre o item b): *"Professor, como faço essa expressão virar um produto notável?Preciso desse resultado para encontrar o centro e o raio".* Desse questionamento, destacamos novamente a importância das etapas da MEAAMaRP, pois, se fôssemos analisar apenas o registro, não teríamos a noção da verbalização do estudante. Além disso, foi notada a necessidade de se apresentar o método de completar o quadrado, como forma de auxiliar tal manipulação ou de apresentar outro problema que pudesse despertar essa ideia, como será destacado na análise dos resultados do Problema de Aprofundamento 2.3.

Isso deixou evidente o entendimento que se esperava, ao percebermos que a ação necessária, internalizada no seu raciocínio, apenas precisava ser traduzida no seu registro, o que é comprovado a seguir, com a frase "parece uma circunferência", como destacado pela seta na Figura 87.

Figura 87 - Resolução apresentada pela dupla D1 para o problema 2.2



(ENEM 2018-Adaptada) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m u n do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.Baseando-se nessas informações desenvolva cada item a seguir:

a) Represente graficamente essa situação em um plano cartesiano xoy traçando os eixos na malha quadriculada a seguir em que cada quadrado tem área 1 u.a. considere que A(0, 0) é o foco de incêndio de temperatura mais elevada, B(30, 0) é o foco de temperatura menos elevada e P(x, y) é a posição do bombeiro.

b) Utilize os dados do problema e as informações descritas no item a) e modele essa situação por meio de uma equação utilizando a relação entre distância de dois pontos sabendo que $d_{PA} = 2.d_{PB}$.

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 2.(\sqrt{x-30)^2+(y-0)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2}^2 = 2\sqrt{x^2+y^2-60x+900}^2$

$(x^2-60x+900)+(y^2)$

$x^2+y^2 = 4.(4x^2+4y^2-240x+3600$

$x^2+y^2=4x^2+4y^2-240x+3600$

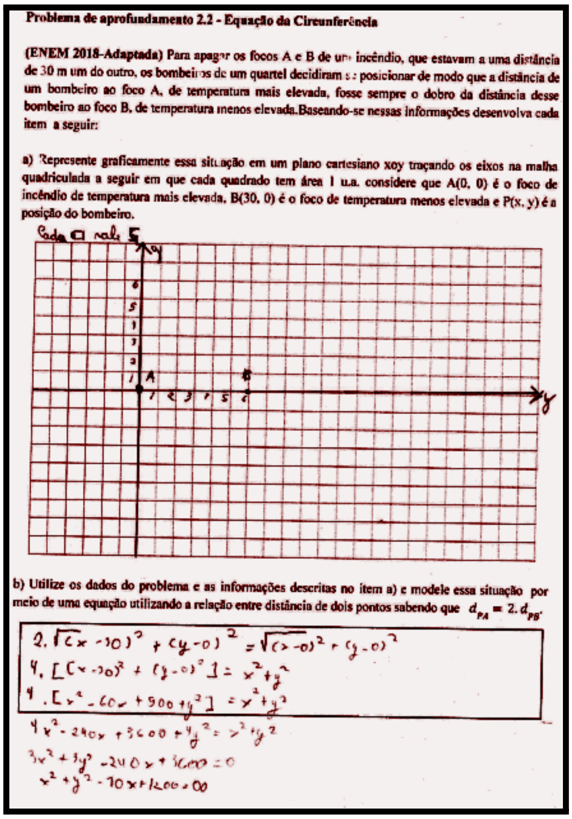
$(x-40)^2+(y-0)^2$

$3x^2+3y^2-240x+3600=0$

$x^2+y^2-80x+1200=0$ $\longrightarrow$? parece ser uma circunferên

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 88 - Resolução da dupla D6


Problema de aprofundamento 2.2 - Equação da Circunferência

(ENEM 2018-Adaptada) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.Baseando-se nessas informações desenvolva cada item a seguir:

a) Represente graficamente essa situação em um plano cartesiano xoy traçando os eixos na malha quadriculada a seguir em que cada quadrado tem área 1 u.a. considere que A(0, 0) é o foco de incêndio de temperatura mais elevada, B(30, 0) é o foco de temperatura menos elevada e P(x, y) é a posição do bombeiro.

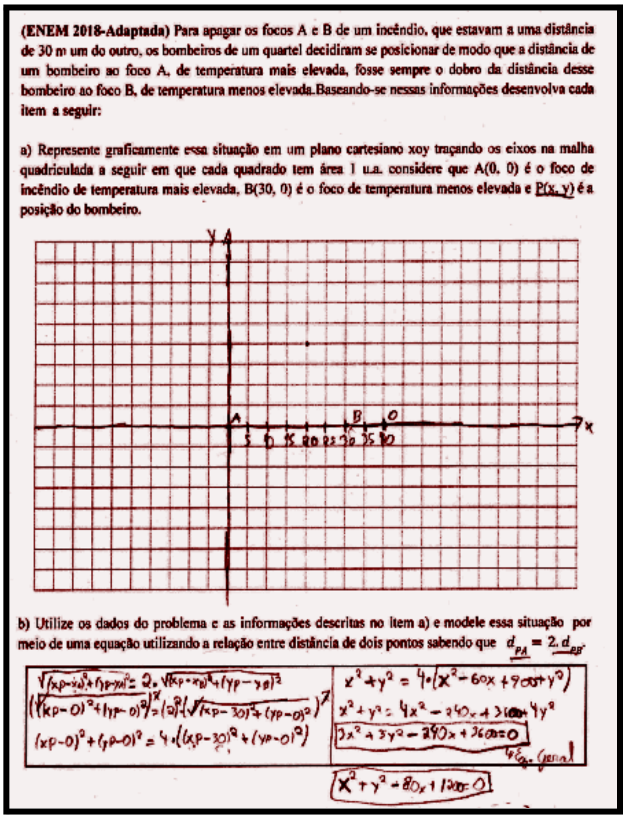
Cada ▫ vale 5

b) Utilize os dados do problema e as informações descritas no item a) e modele essa situação por meio de uma equação utilizando a relação entre distância de dois pontos sabendo que $d_{PA} = 2.d_{PB}$.

$2.\sqrt{(x-30)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$
$4.[(x-30)^2+(y-0)^2] = x^2+y^2$
$4.[x^2-60x+900+y^2] = x^2+y^2$
$4x^2-240x+3600+4y^2 = x^2+y^2$
$3x^2+3y^2-240x+3600=0$
$x^2+y^2-70x+1200=00$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 89 - Resolução da dupla D8


(ENEM 2018-Adaptada) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.Baseando-se nessas informações desenvolva cada item a seguir:

a) Represente graficamente essa situação em um plano cartesiano xoy traçando os eixos na malha quadriculada a seguir em que cada quadrado tem área 1 u.a. considere que A(0, 0) é o foco de incêndio de temperatura mais elevada, B(30, 0) é o foco de temperatura menos elevada e P(x, y) é a posição do bombeiro.

b) Utilize os dados do problema e as informações descritas no item a) e modele essa situação por meio de uma equação utilizando a relação entre distância de dois pontos sabendo que $d_{PA} = 2.d_{PB}$.

$\sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2} = 2.\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2}$
$\left(\sqrt{(x_P-0)^2+(y_P-0)^2}\right)^2 = (2)^2\left(\sqrt{(x_P-30)^2+(y_P-0)^2}\right)^2$
$(x_P-0)^2+(y_P-0)^2 = 4.\left((x_P-30)^2+(y_P-0)^2\right)$
$x^2+y^2 = 4.(x^2-60x+900+y^2)$
$x^2+y^2 = 4x^2-240x+3600+4y^2$
$\boxed{3x^2+3y^2-240x+3600=0}$
Eq. Geral
$\boxed{x^2+y^2-80x+1200=0}$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

O problema de aprofundamento 2.3 trouxe um suporte gráfico não apresentado no problema 2.2 e a ideia de construir uma solução com sequências de perguntas demarcadas para se chegar aos elementos de uma circunferência, a partir da sua equação geral. Tais sequências também deveriam nos mostrar a capacidade de interpretação e de manipulação dos resultados encontrados onde, em toda resolução de problema, que mobiliza um ou outro objeto, no nosso caso, a Geometria Analítica Plana, presente no estudo da equação da circunferência, exigissem a capacidade para produzir, reconhecer e coordenar o registro da expressão algébrica presente.

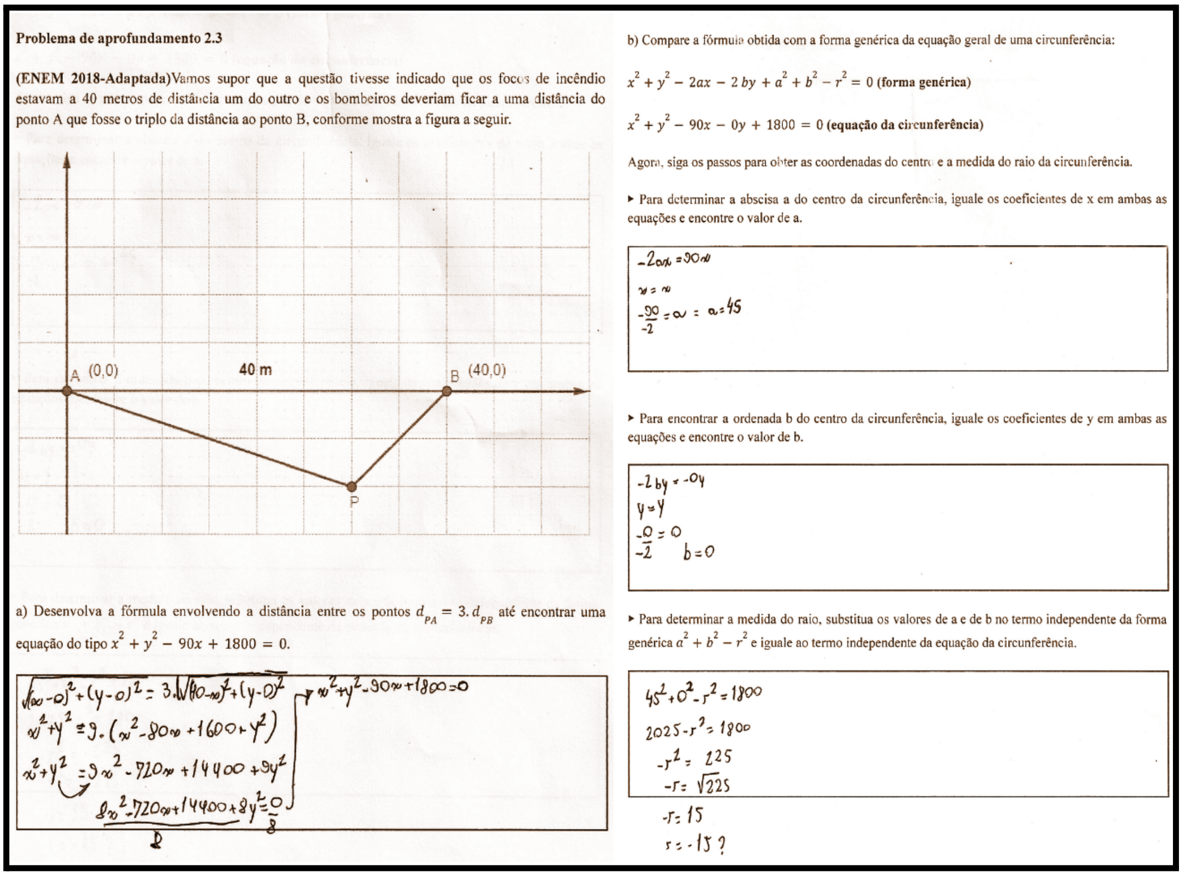
As resoluções propostas pelas duplas D1 e D6 continham resultados interessantes como mostram as Figura 90 e 91, sendo que um registro importante deve aqui ser feito, no qual um dos estudantes da dupla D8 fez o seguinte comentário: *"Professor, por que você não trouxe esse problema antes do anterior? Assim, saberíamos o que fazer na proposta anterior, mas, agora, tudo faz sentido"*.

Esse comentário estava atrelado à seguinte reflexão: a coordenação de registros não é espontânea do sujeito que aprende, tornando necessária a realização de ações orientadas, por parte do professor, para que seja possível promover atividades didáticas visando ao ensino e à aprendizagem da Matemática, considerando a mobilização e a coordenação de registros (Duval, 2003).

No desenvolver do trabalho de campo em sala de aula, confesso que não tinha a pretensão de promover tais reflexões ou de avançar em atividades que pudessem me levar a compreender a profundidade dessa reflexão de Duval acerca do comentário destacado. Dessa forma, destaco que a aplicação do problema de aprofundamento 2.3 permitiu eu perceber, enquanto professor, o quanto seria necessário estar com o nosso "termômetro bem calibrado" para saber o momento certo de promover ações que possam levar os estudantes a refletirem de forma madura sobre as práticas desenvolvidas, corroborando com os momentos de avaliação presentes nas etapas da MEAAMaRP.

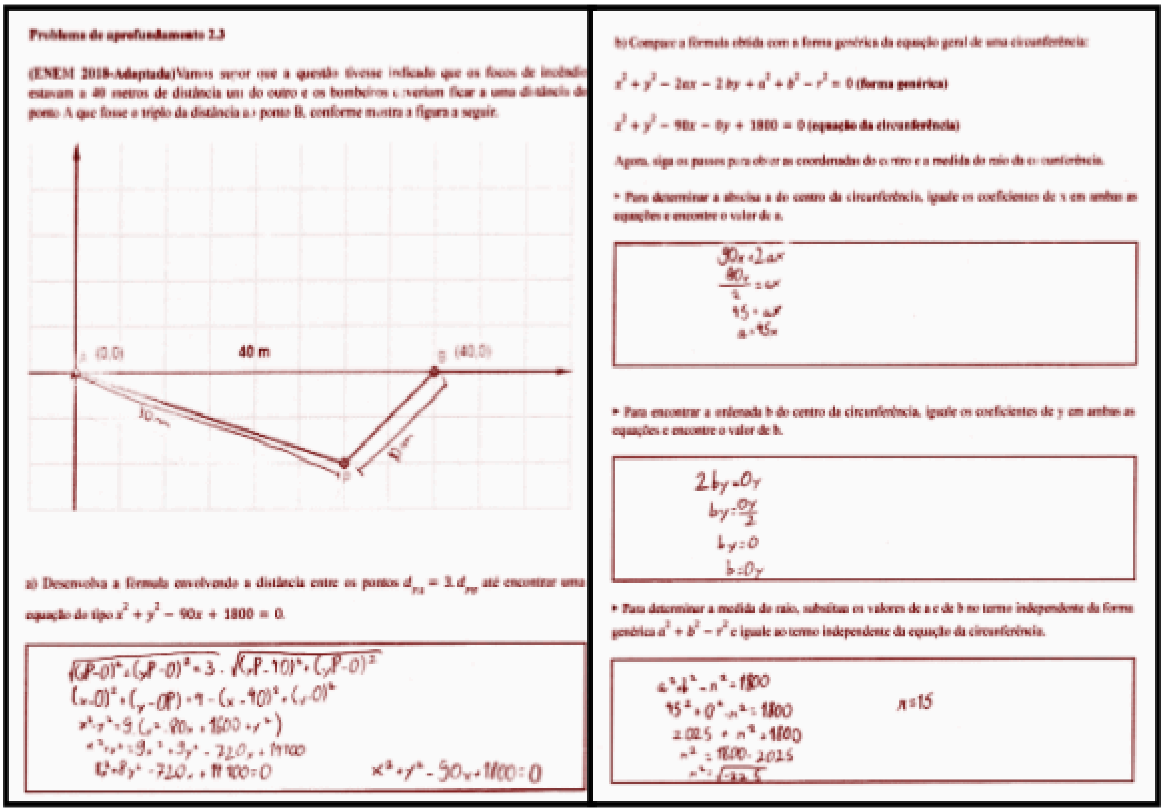
Esse, para mim, foi um momento importante de coleta de dados, pois trouxe reflexões sobre o nosso papel e sobre as nossas inquietudes, enquanto educadores, reflexões estas que nunca podem faltar nesse movimento presente nos processos de ensino-aprendizagem.

Figura 90 - Resolução apresentada pela dupla D1 problema de aprofundamento 2.3



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 91 - Resolução apresentada pela dupla D6 problema de aprofundamento 2.3



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

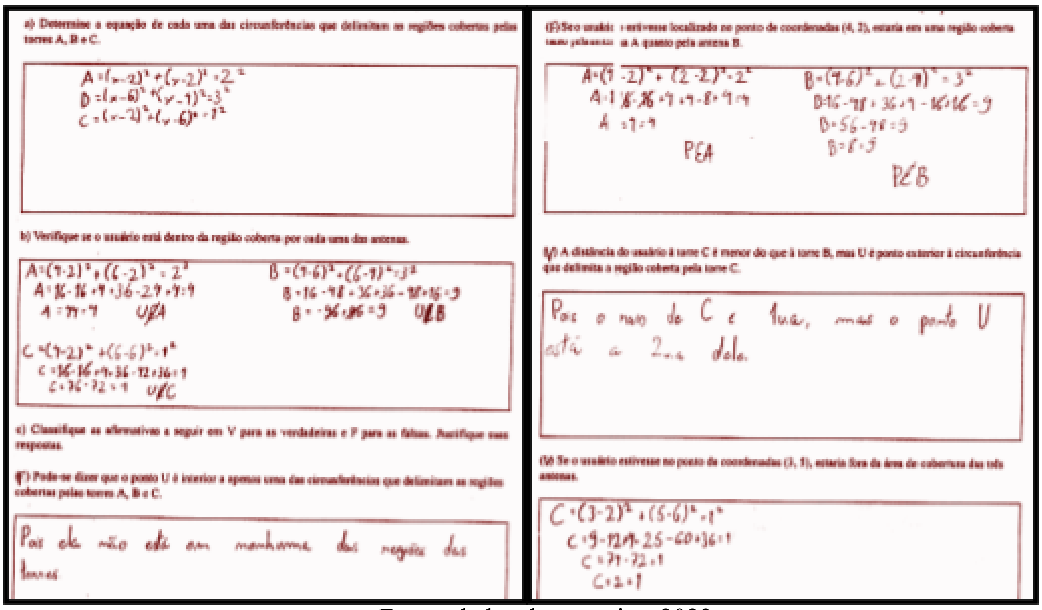
Finalizando a etapa da análise dos problemas de aprofundamento, associados ao problema gerador 2, foi aplicado o problema 2.4 que objetivava verificar a capacidade das duplas de utilizarem o suporte gráfico apresentado, alinhada à capacidade de interpretação do texto de referência contemplando as principais informações do problema em questão.

Por se tratar de um problema, em que os estudantes deveriam classificar cada uma das afirmativas como verdadeira ou falsa, a partir do item c), observei a utilização, por parte da maioria das duplas, da estratégia de fazer o registro geométrico sobre o desenho/a imagem suporte, em que os centros das torres de transmissão foram representados, o que gerou respostas associadas à construção realizada por eles, a fim de justificar a classificação de cada afirmativa em questão.

Ao perguntar às duplas sobre essa utilização, muitas afirmaram que o desenho se tornou uma ferramenta de informações mais compreensível que o enunciado do problema. Isso foi interessante porque, ao fazerem a solução dessa forma, para tentarem identificar se o usuário estava ou não dentro do raio de alcance, observaram o desenho da circunferência construída na imagem apresentada para, posteriormente, terem buscado verificar se o ponto U (localização do usuário) pertencia ou não àquele raio de alcance.

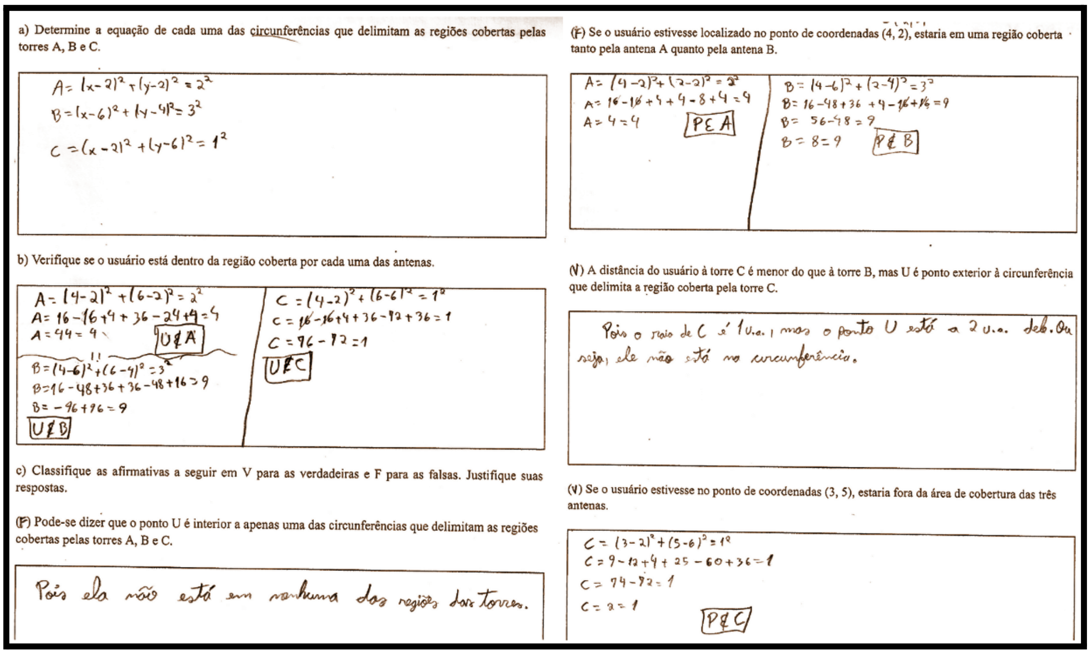
Incentivei os grupos a fazerem essa solução, uma vez que se tratava de uma solução geométrica válida para a construção da resolução do problema. Outro ponto é que uma das duplas utilizou o recurso de fazer a substituição do par ordenado do usuário 1 nas equações das circunferências que foram encontradas para cada uma das torres. Essa estratégia, como descrito na Figura 92 pela dupla D6, e na Figura 93 pela dupla D8, mostra que a percepção de pertencimento existia, porém a verificação da distância até o centro da circunferência não foi realizada para comprovação da posição do ponto.

Figura 92 - Resolução do problema de aprofundamento 2.4 pela dupla D6



Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 93 - Resolução do problema de aprofundamento 2.4 pela dupla D8



a) Determine a equação de cada uma das circunferências que delimitam as regiões cobertas pelas torres A, B e C.

$A = (x-2)^2+(y-2)^2 = 2^2$
$B = (x-6)^2+(y-4)^2 = 3^2$
$C = (x-2)^2+(y-6)^2 = 1^2$

b) Verifique se o usuário está dentro da região coberta por cada uma das antenas.

c) Classifique as afirmativas a seguir em V para as verdadeiras e F para as falsas. Justifique suas respostas.

(F) Pode-se dizer que o ponto U é interior a apenas uma das circunferências que delimitam as regiões cobertas pelas torres A, B e C.

Pois ela não está em nenhuma das regiões das torres.

(F) Se o usuário estivesse localizado no ponto de coordenadas (4, 2), estaria em uma região coberta tanto pela antena A quanto pela antena B.

(V) A distância do usuário à torre C é menor do que à torre B, mas U é ponto exterior à circunferência que delimita a região coberta pela torre C.

Pois o raio de C é 1u.c., mas o ponto U está a 2 u.c. dele. Ou seja, ele não está na circunferência.

(V) Se o usuário estivesse no ponto de coordenadas (3, 5), estaria fora da área de cobertura das três antenas.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Esse problema mostrou que a ideia de se utilizar uma resolução geométrica ainda é algo que está presente naquela de transcrever um suporte, sendo um raciocínio válido para uma construção de resolução e, ao meu ver, legítimo para identificar, de forma direta, a ideia de registro da equação da circunferência na forma reduzida. Alguns dos estudantes perguntaram se era necessário desenvolver o produto notável para obter a equação geral e eu disse que era necessário encontrar a equação da circunferência, fosse ela em qual formato fosse, e deixei livre para que eles pudessem escrever a equação na forma geral, caso quisessem desenvolver o produto notável.

Outro momento importante partiu da dupla de dois estudantes com deficiência que afirmaram que não saberiam como chegar à equação das circunferências solicitadas no item a), mas que saberiam explicar que o alcance do sinal seria resultado de uma circunferência, nesse caso, sugeri que escrevessem o que estavam pensando, como forma de registro. Eles tiveram dificuldades para identificar o raio e a presença desse conceito no enunciado do problema, tendo sido necessário conversar um pouco mais a respeito daquilo que seria a ideia do alcance. Interessante que um desses estudantes, durante esse diálogo, acabou fazendo um movimento com as mãos mostrando, em formato circular, que esse seria o movimento naquele momento. Fiz a intervenção dizendo: “Observe o movimento das suas mãos, que Figura geométrica está se formando?”. Quando fiz essa pergunta, ele concluiu que se tratava de uma circunferência.

Esse momento de troca estava, ao meu ver, associado ao que afirma Duval (1995), no capítulo introdutório escrito por ele no livro: “Aprendizagem em Matemática”, organizado pela autora Silvia Dias Alcântara Machado:

> Ainda que a atividade de pesquisa e a de resolução de problemas sejam importantes tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve por isso subestimar um outro tipo de atividade fundamental: o reconhecimento, isto é, a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais. A característica desse tipo de atividade é que ele deve ser rápido para ser eficaz ou útil. O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de problemas dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. Tarefas de estrito reconhecimento são,então, tão importantes para aprendizagem quanto às tarefas de produção (Duval, 1995, p.28).

Finalizando a etapa de aplicação dos problemas para a coleta de dados, a última fase foi iniciada com a aplicação do problema gerador 3, seguido do problema de aprofundamento 3.1. Esses problemas tinham como objetivo principal desenvolver o ensino-aprendizagem, associado à ideia da equação da circunferência e às posições relativas. A seguir, estão os diálogos que surgiram durante as etapas de incentivo aos estudantes, realizado por mim, e de solução, por parte das duplas, e que julguei importantes no registro das soluções apresentadas pelos estudantes.

Dupla D8: *Professor, encontramos o 1º ponto de interseção entre as circunferências, com facilidade: é o ponto (1,5). Marcamos direto no desenho. Agora, para achar o outro ponto, professor, tem que igualar as equações uma com a outra, não é mesmo?! Tem que fazer um sistema.*

Dupla D2: *Professor, para identificar, no item a), qual é cada circunferência, posso pegar um ponto e substituir na equação? Ou a maior circunferência é aquela que tem os maiores coeficientes?*

Professor: O que para vocês define uma circunferência ser maior ou menor que a outra?

Dupla D2: *Olha, professor, o raio.*

Professor: Vocês podem encontrar o centro e o raio de cada uma delas para determinar essa classificação. Já tentaram isso?!

Dupla D8: *Professor, ao fazer a interseção pelo sistema, chegamos à equação $2x+y=7$.*

Professor: Isso é algo familiar para vocês?

Dupla D8: *O que ela é graficamente, professor?*

Professor: Sim. Como vocês podem usar esse resultado?

Dupla D8: *Como desenhar essa reta? Podemos usar os pontos onde as circunferências estão se encontrando. Um já temos.*

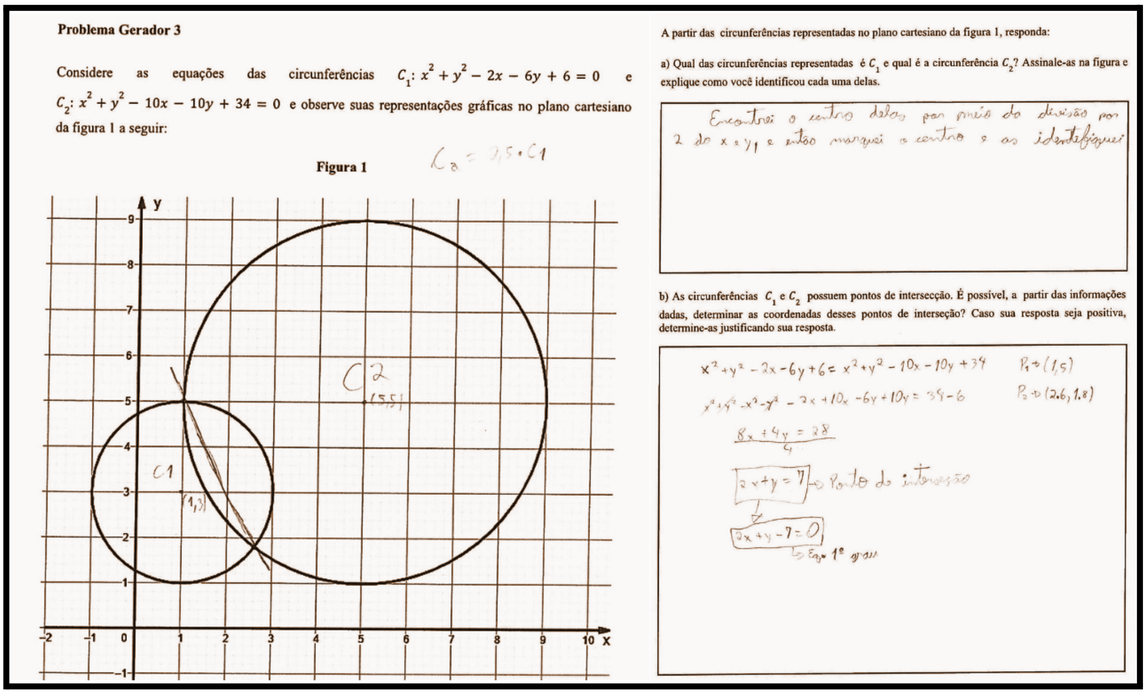
Professor: E como se chama esse processo?

Dupla D8*: Para encontrar o segundo ponto? Igualdade. Podemos igualar nas equações dadas?*

Professor: Isso,vocês podem fazer uma substituição.

Como podemos observar nos diálogos em questão, principalmente em se tratando da dupla D8, houve interpretações corretas do ponto de vista de uma possível solução para o problema proposto, alinhada à ideia de resolver um sistema de equações. Esse problema poderia produzir dados de representações importantes e conversões à luz da TRRS. Assim, seguem alguns recortes que mostram as soluções apresentadas pela dupla 8, presentes na Figura 94 como forma de ilustrar o diálogo.

Figura 94 - Resolução apresentada pela dupla D8 para o Problema Gerador 3


Problema Gerador 3

Considere as equações das circunferências $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$ e observe suas representações gráficas no plano cartesiano da figura 1 a seguir:

Figura 1

$C_2 = 2{,}5 \cdot C_1$

C1

(1,3)

C2

(5,5)

A partir das circunferências representadas no plano cartesiano da figura 1, responda:

a) Qual das circunferências representadas é C_1 e qual é a circunferência C_2? Assinale-as na figura e explique como você identificou cada uma delas.

Encontrei o centro delas por meio da divisão por 2 do x e y, e então marquei o centro e as identifiquei

b) As circunferências C_1 e C_2 possuem pontos de intersecção. É possível, a partir das informações dadas, determinar as coordenadas desses pontos de interseção? Caso sua resposta seja positiva, determine-as justificando sua resposta.

$x^2+y^2-2x-6y+6 = x^2+y^2-10x-10y+34$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}-2x+10x-6y+10y = 34-6$

$\dfrac{8x+4y=28}{4}$

$\boxed{2x+y=7}$ → Ponto de interseção

$\boxed{2x+y-7=0}$

→ Eq. 1º grau

$P_1 \to (1,5)$

$P_2 \to (2.6, 1.8)$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Após essas discussões, durante os momentos de plenária e, posteriormente, formalização do problema, foi possível apresentar a solução do problema gerador 3, como também toda a teoria acerca das relações algébricas e geométricas relacionadas às ideias de interseção entre circunferências e à posição relativa entre elas, conforme a Figura 95, que traz o registro da resolução e da formalização do problema gerador 3.

Figura 95- Plenária e formalização do problema gerador 3

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Finalizada a aplicação do problema gerador 3 e a formalização dos conceitos associadas à posição relativa entre circunferências, o problema de aprofundamento 3.1 foi aplicado. Ele veio com uma narrativa específica, associada à definição de circunferências ortogonais e, pela sua estrutura de apresentação e as possibilidades de solução, demandou dos estudantes uma articulação mais aguda dos conceitos já estudados anteriormente, tais como: posição relativa entre retas; intersecções entre Figuras; teorema de Pitágoras; e o reconhecimento da equação da circunferência a partir da sua representação gráfica e algébrica.

Percebi, durante a aplicação, que os estudantes mostraram envolvimento, ao terem buscado construir uma solução, principalmente, para o item a) que pedia para determinar se C_1 e C_2 eram circunferências ortogonais, porém as duplas ficaram no campo de determinar a intersecção entre as circunferências dadas.

Devido à complexidade de representações e de conversões necessárias para desenvolver a solução do problema, a ideia de procurar interseções mostrou que houve evolução por parte dos registros das duplas, mesmo que com erros, os quais eram aceitáveis no processo de construção de uma solução. Tais dificuldades eram esperadas, uma vez que, como citado por Duval (1995), a maior parte dos problemas de ensino e de aprendizado em geometria é de origem didática e linguística, e a coordenação dos diferentes registros de representação (a escrita algébrica, as Figuras geométricas, o discurso na língua natural), ligados ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo no curso e em um ensino que mobilize essa diversidade de registros.

Além disso, o problema exigia um rigor maior na expectativa de poderem mostrar um resultado mais formal, tal como solicitado no item c), em que eles deveriam fazer articulações com a definição dada no início do problema e tentarem utilizar a ideia de uma prova matemática com um maior rigor.

Nesse momento, o meu papel enquanto docente e pesquisador foi o de fazer uma formalização e de apresentar uma resolução para os estudantes. Após suas tentativas e compartilhamento de resoluções, isso se fez necessário, pois, mais uma vez, ainda que as Figuras formavam um suporte intuitivo importante nos passos da demonstração em Geometria, dando uma visão maior que o enunciado, as dificuldades ainda persistiam. No entanto, nem sempre, facilitam “ver” sobre as Figuras as relações ou propriedades em relação às hipóteses dadas, as quais correspondem à solução procurada (Duval, 1995), porque as estratégias de ensino nem sempre levam em consideração os diferentes registros de representação semiótica em jogo.

Essa reflexão fez-nos pensar na questão de pesquisa e como a MEAAMaRP pode contribuir com tal movimento, o de levar o estudante a fazer conjecturas e demonstrações, pois a escolha de problemas que favoreceram tal efeito, e as possibilidades de discussão desses problemas podem favorecer a atividade de demonstrar ou de formalizar as definições do objeto do conhecimento matemático em estudo. Os diálogos apresentados a seguir e os resultados trazidos pelos estudantes das duplas D2 e D3 e D8, conforme mostra a Figura 96, demonstram um pouco da carência deste trabalho na linha sugerida por Duval (1995), conforme as duas citações anteriores.

Dupla D2: P*rofessor, no ponto* A_2*, também posso afirmar que o ângulo será de 90º, ou seja, o modelo em* A_1 *se repetirá.*

Dupla D3: *Professor, vamos resolver o sistema, porém não tem o plano para representar os pontos, são dois valores para o que vamos encontrar.*

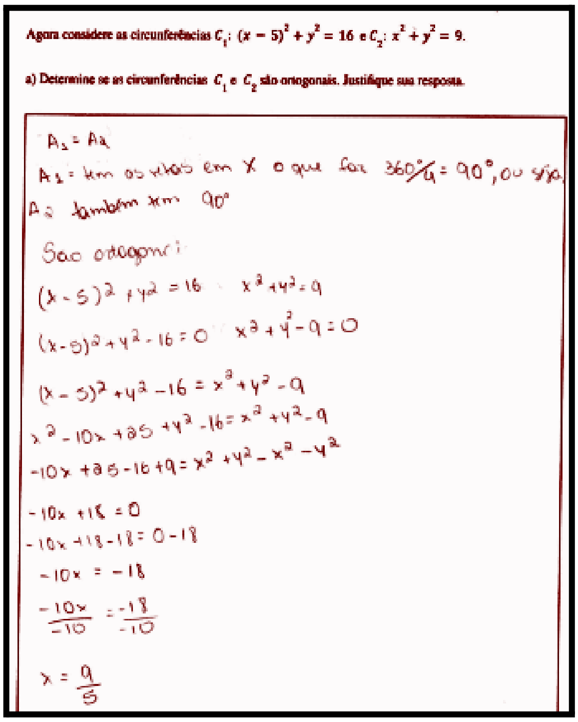
Dupla D8: *Os valores de x são os mesmos para os dois pontos,* A_2 *e* A_1 *eles estão na mesma vertical. Vamos precisar da equação de uma reta.*

As falas dos estudantes colaboram com a ideia de que as Figuras formam um suporte intuitivo importante nos passos da demonstração em geometria. Esse efeito que a imagem inicial do problema provocou e o ambiente criado durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação, ao executar as etapas da MEAAMaRP, contribuíram para esse diálogo. E, na construção do problema, embora as soluções apresentadas, quase que, na sua totalidade, não tenham chegado a respostas que demonstrassem segurança nas representações ou na assertividade.

Esses resultados, de forma alguma, comprometeram a credibilidade daqueles momentos ricos de trocas e de discussões, as quais aconteceram ao longo do processo de aplicação dos problemas geradores ou de aprofundamento, mas, sim, colaboraram com a ideia de que a avaliação e o avanço em novas metodologias de trabalho se fazem necessários para um alcance maior das compreensões e das aprendizagens que possam favorecer as representações seguidas das conversões.

Observamos pelas resoluções apresentadas pelas duplas D2, D3 e D8, tratamento de uma mesma representação, no caso da resolução algébrica proposta pela dupla D2 na Figura 96, e da dupla D3 na Figura 97, podemos destacar a resolução do sistema formado pelas equações das circunferências. No caso da dupla D8, conforme a Figura 98, vemos o sistema e a conclusão da dupla sobre a classificação das circunferências como não ortogonais.

Figura 96- Resolução dupla D2 Problema 3.1


Agora considere as circunferências C_1: $(x-5)^2+y^2=16$ e C_2: $x^2+y^2=9$.

a) Determine se as circunferências C_1 e C_2 são ortogonais. Justifique sua resposta.

$A_1 = A_2$

A_1 = tem os vetos em X o que for $360°/4 = 90°$, ou seja

A_2 também tem $90°$

São ortogonais

$(x-5)^2+y^2=16$ $\quad x^2+y^2=9$

$(x-5)^2+y^2-16=0$ $\quad x^2+y^2-9=0$

$(x-5)^2+y^2-16=x^2+y^2-9$

$x^2-10x+25+y^2-16=x^2+y^2-9$

$-10x+25-16+9=x^2+y^2-x^2-y^2$

$-10x+18=0$

$-10x+18-18=0-18$

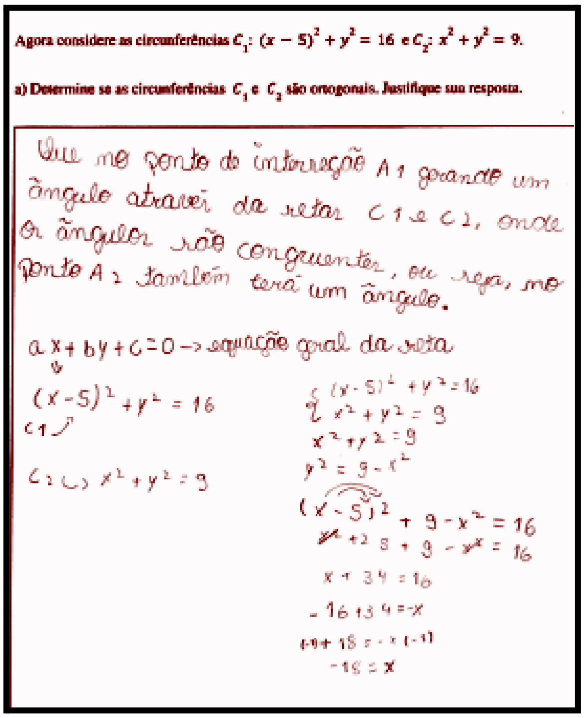
$-10x=-18$

$\frac{-10x}{-10}=\frac{-18}{-10}$

$x=\frac{9}{5}$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 97- Resolução da dupla D3


Agora considere as circunferências C_1: $(x-5)^2+y^2=16$ e C_2: $x^2+y^2=9$.

a) Determine se as circunferências C_1 e C_2 são ortogonais. Justifique sua resposta.

Que no ponto de interseção A 1 gerando um ângulo através da retas C1 e C2, onde o ângulo são congruentes, ou seja, no ponto A 2 também terá um ângulo.

$ax+by+c=0 \rightarrow$ equação geral da reta

$(x-5)^2+y^2=16$ $\quad$ C1

C2 $x^2+y^2=9$

$(x-5)^2+y^2=16$

$x^2+y^2=9$

$y^2=9-x^2$

$(x-5)^2+9-x^2=16$

$x+34=16$

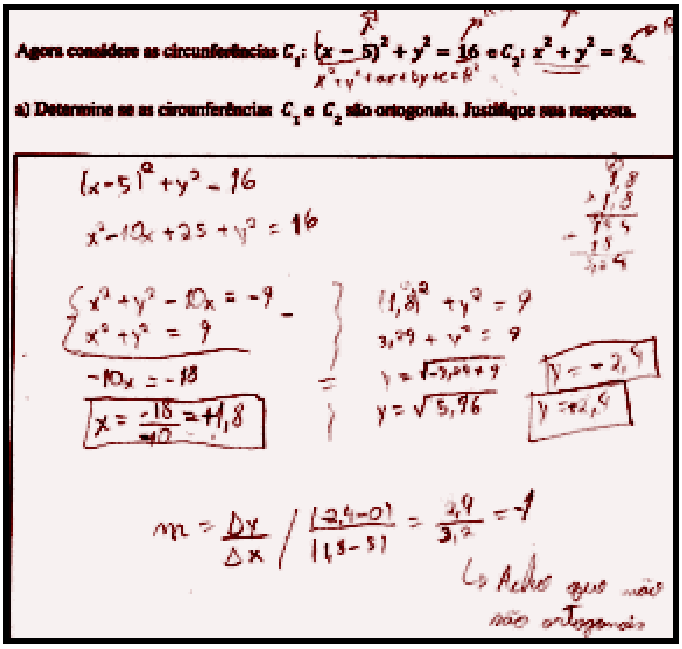
$-16+34=-x$

$18=-x\ (-1)$

$-18=x$

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 98- Resolução do problema de aprofundamento 3.1 dupla D8


Agora considere as circunferências C_1: $(x-5)^2+y^2=16$ e C_2: $x^2+y^2=9$.

a) Determine se as circunferências C_1 e C_2 são ortogonais. Justifique sua resposta.

$(x-5)^2+y^2=16$

$x^2-10x+25+y^2=16$

$x^2+y^2-10x=-9$

$x^2+y^2=9$

$-10x=-18$

$\boxed{x=\frac{-18}{-10}=+1,8}$

$(1,8)^2+y^2=9$

$3,24+y^2=9$

$y=\sqrt{-3,24+9}$

$y=\sqrt{5,76}$

$\boxed{y=-2,4}$ $\quad \boxed{y=+2,4}$

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big/ \frac{|2,4-0|}{|1,8-5|}=\frac{2,4}{3,2}=-1$

Acho que não são ortogonais

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

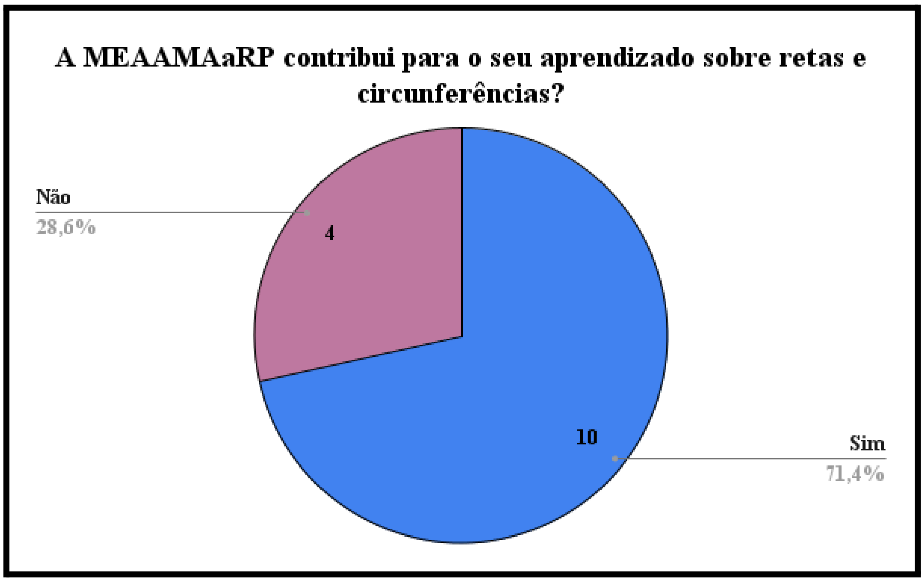
Na próxima seção, apresentaremos os resultados do questionário de *feedback* que trouxeram reflexões importantes acerca da aplicação da MEAAMaRP na visão do estudante.

6.4 Questionário de *feedback*

O questionário de *feedback* foi aplicado em uma aula após o encerramento da aplicação dos problemas associados à MEAAMaRP. No dia da aplicação, estavam presentes quatorze estudantes. O questionário tinha, ao todo, dez perguntas, sendo seis delas com perguntas dissertativas e as demais com perguntas de classificação. As questões dissertativas permitiam que os estudantes pudessem escrever sobre as suas impressões em relação a toda programação de atividades, as quais foram aplicadas ao longo da pesquisa e da coleta de dados. A ideia era que eles pudessem ficar à vontade para expressarem suas impressões e sugestões sobre o trabalho realizado.

Como ponto de partida, foi perguntado aos estudantes se a MEAAMaRP contribuiu para o aprendizado de retas e circunferências, questão esta seguida de um campo de justificativa. Os resultados apresentados no gráfico da Figura 99 mostraram que a maioria dos estudantes identificou-se com a MEAAMaRP e que a contribuição foi positiva, uma vez que algumas justificativas dadas ilustraram esse cenário.

Figura 99 - Resposta da pergunta 1 do questionário de *feedback*

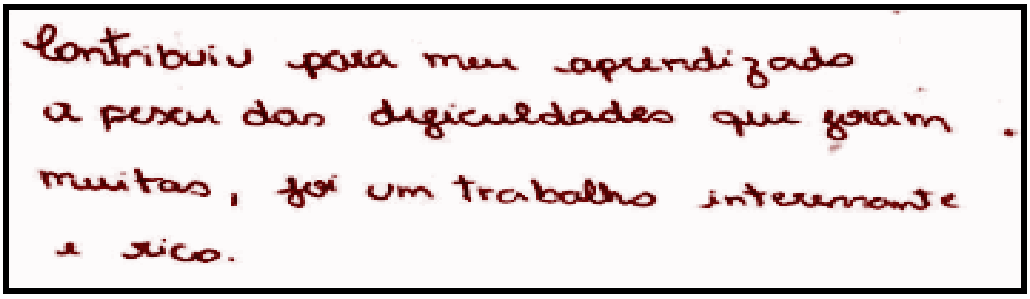


Fonte: o autor, 2023.

Nas Figuras 100 a 103, mostramos as justificativas dos estudantes **E1, E9, E4** e **E2** em relação à primeira pergunta do questionário de *feedback*. Observamos pelas respostas que a Metodologia desenvolvida, mostrou-se positiva para eles. Destacamos o comentário do estudante E2, na Figura 105, em que a se expressar com a frase: “Eu que odeio prestar atenção, pelo fato de ser um amante da Matemática, aprendi.”

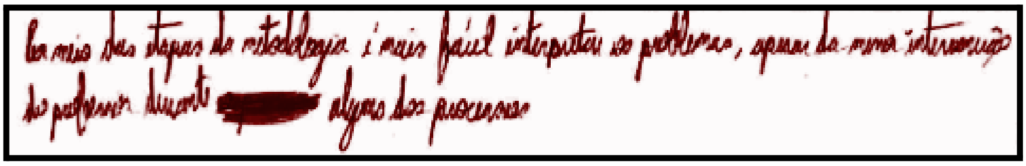
Essa afirmação corrobora com o efeito que a MEAAMaRP provoca em sala de aula, uma vez que desperta no estudante a oportunidade de participação através do processo.

Figura 100 - Justificativas do estudante E1 para pergunta 1


Contribuiu para meu aprendizado a pesar das dificuldades que foram muitas, foi um trabalho interessante e rico.

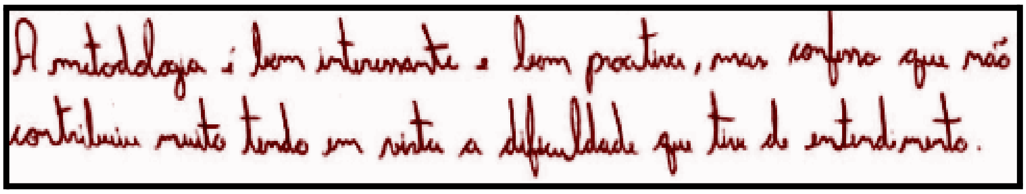
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 101 - Justificativas do estudante E9 para pergunta 1


Em meio das etapas da metodologia é mais fácil interpretar os problemas, apenas da minha intervenção do professor durante [redacted] alguns dos processos

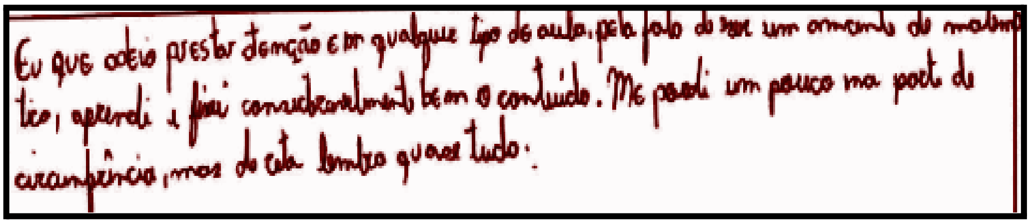
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 102 - Justificativas do estudante E4 para pergunta 1


A metodologia é bem interessante e bem prática, mas confesso que não contribuiu muito tendo em vista a dificuldade que tive de entendimento.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 103 - Justificativas do estudante E2 para pergunta 1


Eu que odeio prestar atenção em qualquer tipo de aula, pelo fato de ser um amante da matemático, aprendi e fui consideravelmente bem o conteúdo. Me perdi um pouco na parte da circunferência, mas de resto lembro quase tudo.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Por se tratar de um movimento novo e com intensidades diferentes do dia a dia dos estudantes, esperava-se também que a adaptação a esse processo não fosse tão natural para alguns e que a demonstração de inseguranças e de dificuldades fosse normal no processo de ensino-aprendizagem que precisa se tornar uma prática diária, com o objetivo de alcançar resultados satisfatórios como aponta Onuchic e Allevato (2021, p.53):

> Ao invés de colocar-se como foco do ensino de Matemática, ao ser considerada como metodologia de ensino, a resolução de problemas faz da compreensão seu foco central e seu objetivo.Com isso não se tira a ênfase dada à resolução de problemas, mas amplia-se seu papel no currículo. Ela passa de uma atividade limitada a engajar os alunos na aplicação do conhecimento, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual o aluno pode aplicar o que previamente havia construído.

Essa citação colabora muito com as justificativas dadas pelos estudantes quanto àquilo que estava relacionado ao engajamento deles e ao protagonismo de cada um. Os processos de interação, que a MEAAMaRP possibilitou, colocaram os estudantes e o professor nesse cenário que, pela prática vivenciada por mim enquanto professor, favoreceu o processo de ensino-aprendizagem-avaliação e também a forma de os estudantes se expressarem, ao mostrarem os registros do seu trabalho desenvolvimento dos problemas.

A segunda pergunta do questionário era mais específica sobre as etapas da MEAAMaRP e solicitava que os estudantes apontassem qual(is) delas contribuiu/contribuíram mais com a aprendizagem.

A capacidade de avaliar "se estou ou não aprendendo" pode ser algo, no primeiro momento, muito subjetivo e distante da maturidade dos estudantes, porém, levando em consideração os momentos de produção conjunta, em que os tempos de fala e as trocas ocorreram de forma processual, aponto que os estudantes nessa faixa etária e nível de escolarização foram e são capazes de fazer uma autoavaliação e se expressarem.

Assim, os resultados apontados em relação a essas contribuições podem ser vistos no Quadro 9. Ao elaborar essa pergunta, procuramos colocar as etapas da MEAAMaRP uma vez que ela foi apresentada aos estudantes para que compreendessem como as aulas seriam realizadas a partir do questionário de sondagem e mais adiante com o desenvolvimento dos Problemas geradores e dos de Aprofundamento.

Quadro 8 - Pergunta 2 e os apontamentos dos estudantes sobre as etapas da MEAAMaRP que contribuíram com a sua aprendizagem.

Etapas da MEAAMaRP	Quantidade de apontamentos
Leitura individual do problema gerador.	3
Leitura coletiva do problema gerador.	4
Discussão e resolução do problema em dupla.	8
Plenária de resolução do problema no quadro.	11
Formalização do conteúdo pelo professor.	4
Resolução do problema de aprofundamento.	2

Fonte: o autor, 2023.

Todas as etapas da MEAAMaRP são igualmente importantes no processo de aplicação, apesar de, em algum momento, uma ficar mais evidente que a outra. No caso desse agrupamento específico de estudantes, ficou evidente que a plenária de resolução de problemas, como demonstram os dados apresentados no Quadro 9, teve seu ponto alto seguido das discussões e da resolução em dupla. Como mencionado, a turma tinha, na sua prática diária, esses momentos de troca e de experimentação e isso pode ter favorecido tais apontamentos. É importante destacar que essa questão vai ao encontro do explicitado por Onuchic e Allevato (2021, p.49):

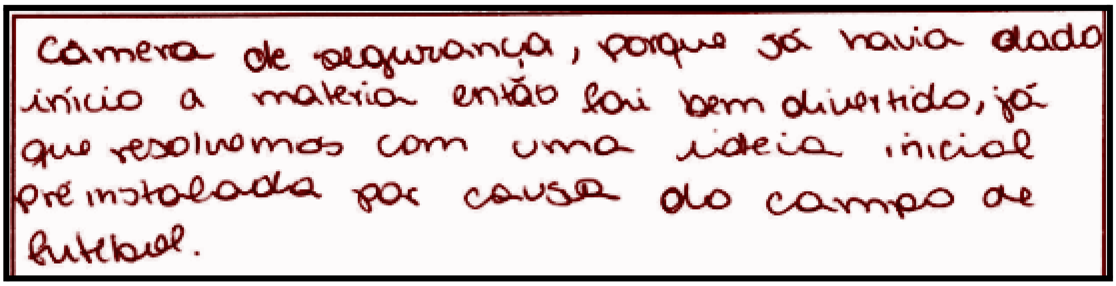
> [...] na quarta etapa (resolução do problema em grupo), a ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas e incentivando a troca de ideias. Auxilia, sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos.

Nesse sentido, nossa questão de pesquisa tem evidências que, durante esse movimento, as diferentes representações de um um mesmo objeto tornam-se latentes e, no caso desta pesquisa, para algumas duplas, as conversões ocorreram. De fato, essas duas etapas da MEAAMaRP servem de pontes para que o professor e os estudantes construam as aprendizagens. Ainda, como afirma Allevatto (2014), a etapa de plenária de discussão é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática, como também relevantes construções de conhecimento acerca do conteúdo.

Em tempo, a etapa de formalização recebeu apontamentos por parte dos estudantes, sendo que nela o professor teve o papel de padronizar os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução de problemas, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, se fosse o caso, como aponta Allevato (2014). Destaco que esse momento foi importante, pois o professor teve esse papel de referência e sua prática, nessa linha de raciocínio, esteve em sintonia com a TRRS.

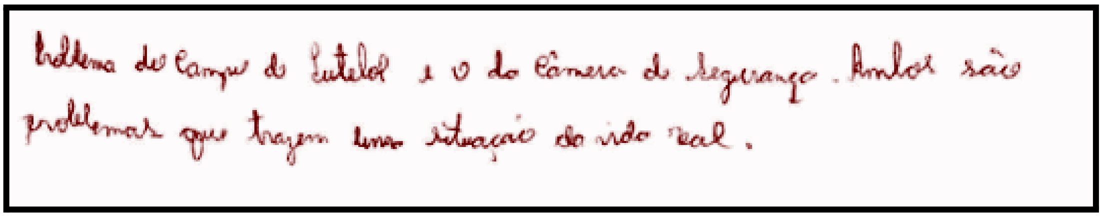
Dando sequência à análise do questionário de *feedback*, foi feita uma pergunta de opinião, referente aos problemas geradores, em que os estudantes deveriam apontar, com uma justificativa, qual dos três problemas geradores foi mais útil para a sua aprendizagem. A seguir, foram destacadas algumas respostas dos estudantes **E7, E12** e **E2,** conforme as Figuras 104 a 106:

Figura 104 - Resposta do estudante E7 para pergunta 3


Camera de segurança, porque já havia dado início a materia então foi bem divertido, já que resolvemos com uma ideia inicial pré instalada por causa do campo de futebol.

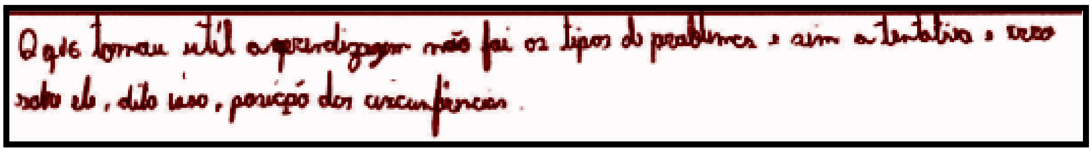
Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 105 - Resposta do estudante E12 para pergunta 3


Problema do Campo de futebol e o da Câmera de Segurança. Ambos são problemas que trazem uma situação da vida real.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Figura 106 - Resposta do estudante E2 para pergunta 3


O que tornou útil a aprendizagem não foi os tipos de problemas e sim a tentativa e erro sobre ele, dito isso, posição das circunferências.

Fonte: dados da pesquisa, 2023.

Atentos às respostas dadas pelos estudantes, podemos inferir que um problema gerador precisa colocar o estudante diante de uma situação em que a organização de ideias, as estratégias de solução e a forma de registro fiquem favorecidas quando procuramos incentivá-los e ensiná-los através da resolução. Como citado por um dos estudantes, a tentativa e o erro são importantes, mas também a escolha de um problema, que retrate uma situação-problema, fornece-nos elementos que exploram o cognitivo. Conforme Duval (2009) afirmou, a teoria piagetiana do desenvolvimento da inteligência articula-se em torno da oposição entre o plano da ação e aquele da representação. Além disso, ele toma a seguinte citação como reforço desta ideia:

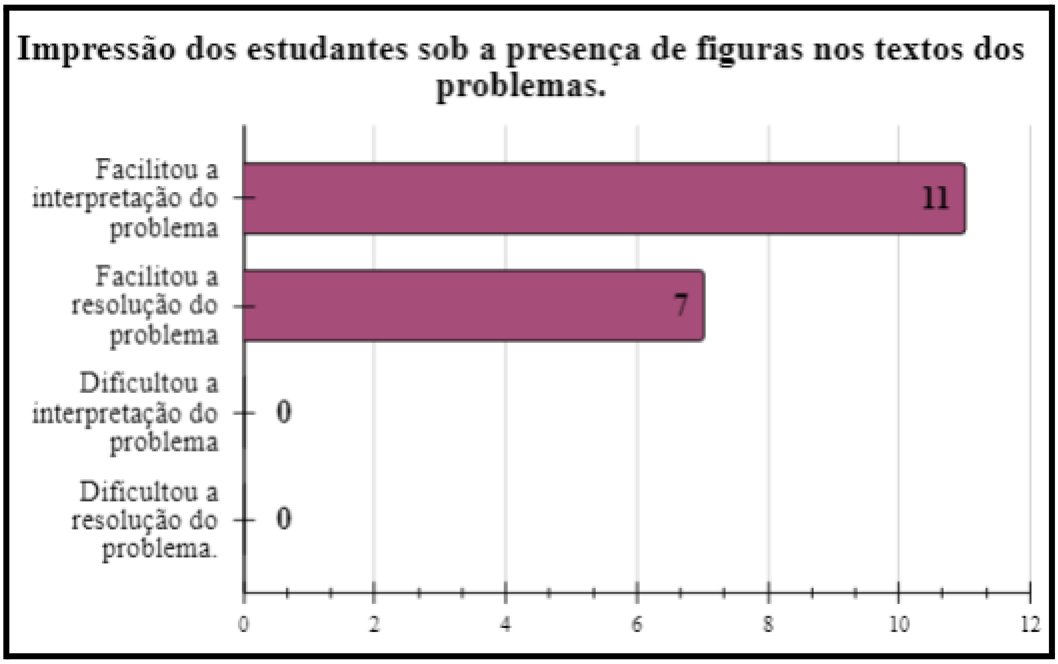
> É preciso tempo para interiorizar as ações em pensamento porque é bem mais difícil se representar o desenrolar de uma ação e dos seus resultados em termos de pensamento do que se limitar à sua execução material. A interiorização das ações supõe também sua reconstrução em um novo plano e essa reconstrução pode passar pelas mesmas fases, porém com uma maior diferença que a reconstrução anterior da própria ação (PIaget, 1969, p.52).

Essa declaração de Piaget (1969), no que tange à ideia de interiorização e às reconstruções anteriores, pode ser ilustrada com a fala do estudante que afirma sua preferência pelo problema da câmera, após ter visto sentido pelo que foi proposto no problema do campo de futebol e que trouxe, assim, um despertar das ideias interiores para a resolução do seu novo problema.

Sobre a fala do estudante que citou a importância do problema que retrata uma situação cotidiana, ela colabora com as afirmações de Cai e Lester (2012) e Allevato e Onuchic (2014) que afirmam que um problema se conFigura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução, ou se ele não está interessado na atividade, ela não será para ele um problema. Para esse estudante, a importância do problema se correlacionar com o seu fazer cotidiano faz tal conexão.

Com relação à presença das imagens, como suporte na apresentação dos enunciados dos problemas, a Figura 107 traz essas informações. Essa pergunta foi colocada no questionário, pois foi perceptível um melhor entendimento do problema e um enriquecimento nas discussões quando esses suportes eram utilizados. Também por eu acreditar que os estímulos gerados pela interpretação das imagens contribuiu/contribui para uma melhor interpretação daquilo que se propôs/propõe apresentar, além de ser uma forma de representação importante, tratando-se da geometria. Assim, podemos inferir, pelos resultados apresentados, que essa prática, na visão dos estudantes, facilitou a interpretação e a solução do problema, o que pode ser comprado ao longo das etapas de aplicação da metodologia de trabalho.

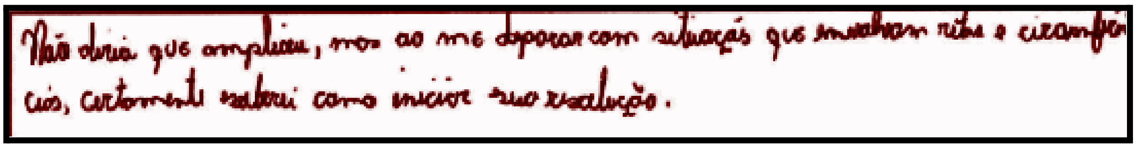
Figura 107- Impressões dos estudantes sobre Figuras nos textos dos problemas.



Fonte: o autor, 2024.

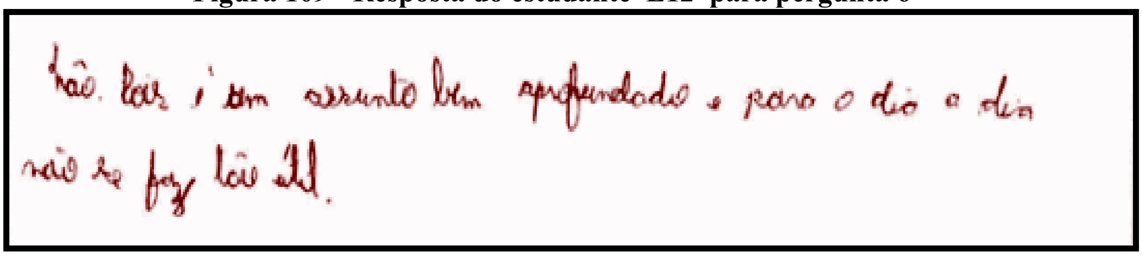
Com relação à pergunta sobre se a MEAAMaRP contribuiu para retomada de conhecimentos anteriormente estudados, não tivemos muitas respostas relevantes, a não ser aquelas de dois estudantes que citaram que revisaram conceitos associados à ideia de função e de resolução de sistemas. Ainda sobre estudar retas e circunferências, na perspectiva da Geometria Analítica e se isso ampliou ou não a compreensão de situações do cotidiano, obtivemos as seguintes respostas, dos estudantes **E2, E12, E5** e **E9**, destacadas nas Figuras de 108 a 111.

Figura 108 - Resposta do estudante E2 para pergunta 6


Não diria que ampliou, mas ao me deparar com situações que envolvam retas e circunferências, certamente saberei como iniciar sua resolução.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 109 - Resposta do estudante E12 para pergunta 6


Não. Pois é um assunto bem aprofundado e para o dia a dia não se faz tão útil.

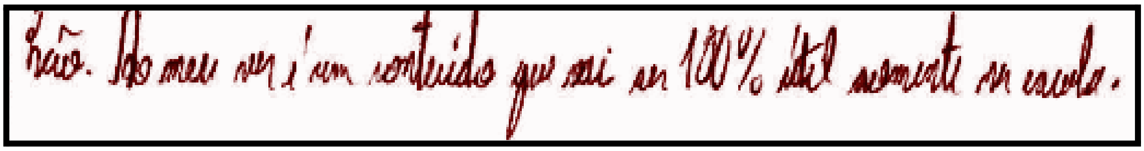
Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 110 - Resposta do estudante E5 para pergunta 6


Sim, pois ajuda a descobrir a localização de objetos em um mapa.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 111 - Resposta do estudante E9 para pergunta 6


Não. Ao meu ver é um conteúdo que vai ser 100% útil somente na escola.

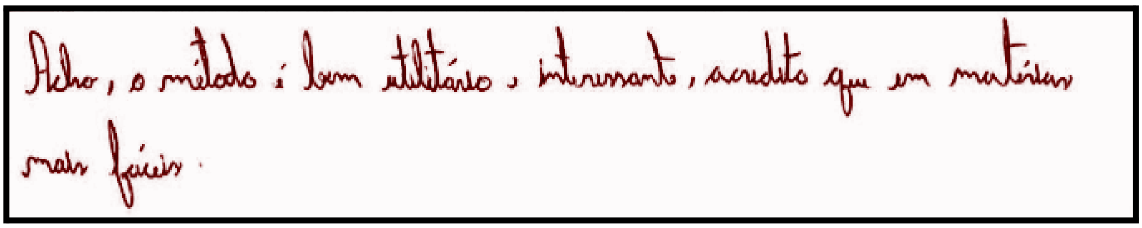
Fonte: dados da pesquisa, 2023

Essas reflexões reforçam a necessidade de se trabalharem objetos de conhecimento, de forma a favorecer e ampliar a visão de mundo do estudante. É claro que esse é um grande desafio do dia a dia do professor, desse modo, faz-se necessário buscar alternativas que contribuam com essa ação, uma vez que, enquanto docentes, tenhamos que ter a sabedoria para entendermos que nem todos irão se interessar por determinados objetos de estudos da matemática, ainda que esta seja uma das principais tarefas do professor, de ser o agente capaz de "quebrar essas rotinas", conforme destacado entre as competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018):

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.(BRASIL, 2018, p.529).

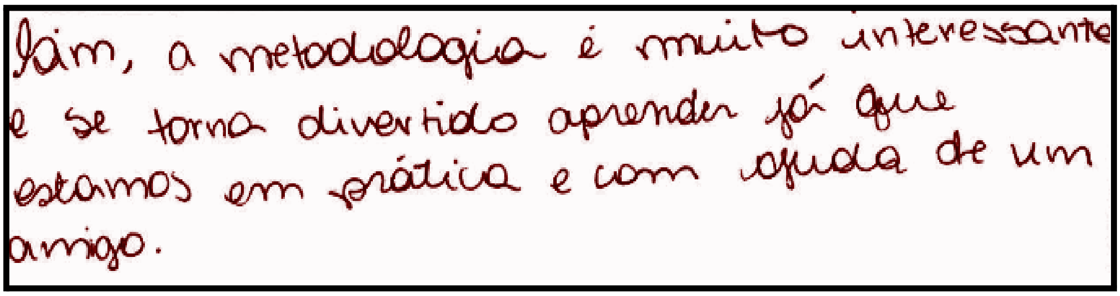
Com relação ao julgamento da importância, por parte dos estudantes, em aprender outros conteúdos de Matemática utilizando a MEAAMaRP, seguem os dados dos estudantes **E4, E7, E2** e **E8**, conforme destacado nas Figuras de 112 a 115:

Figura 112 - Resposta do estudante E4 para pergunta 7


Acho, o método é bem utilitário e interessante, acredito que em matérias mais fáceis.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 113 - Resposta do estudante E7 para pergunta 7


Sim, a metodologia é muito interessante
e se torna divertido aprender já que
estamos em prática e com ajuda de um
amigo.

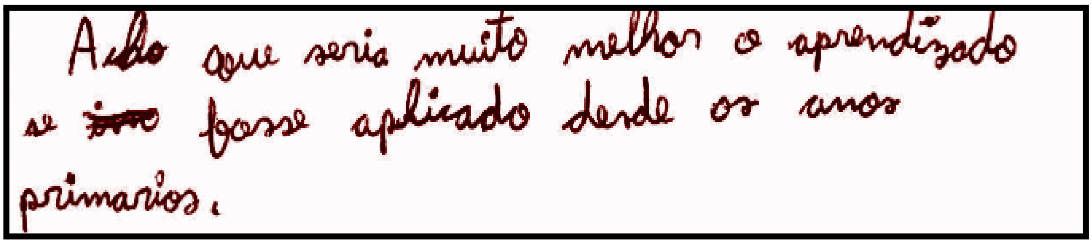
Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 114 - Resposta do estudante E2 para pergunta 7


Claro, na minha opinião facilita e agiliza o aprendizado

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 115 - Resposta do estudante E8 para pergunta 7


Acho que seria muito melhor o aprendizado
se ~~isso~~ fosse aplicado desde os anos
primarios.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Destacamos a última resposta registrada, a qual colabora com a ideia de Onuchic (2021), que destaca que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Tal efeito seria potencializado se, desde as etapas iniciais da educação básica, essa prática fosse utilizada, quando os objetivos poderiam ser alcançados de uma forma mais natural e, talvez, sem grandes dificuldades.

Tomando a pergunta: *"Você compreendeu que o estudo de retas e circunferências, no contexto da Geometria Analítica, é uma outra forma/maneira de analisar e escrever conceitos previamente estudados no estudo da Geometria?",* seguida da pergunta: *"O que caracteriza o estudo de retas e circunferências no contexto da Geometria Analítica?",* das 14 respostas obtidas, 50% responderam não para primeira pergunta e, dos outros 50% que responderam sim, destacamos, da segunda pergunta, os comentários dos estudantes **E2** e **E12**, conforme mostram as Figuras 116 e 117.

Figura 116 - Justificativa do estudantes E2 para pergunta 8

Colocando-os em plano cartesiano, somos capazes de ver as coordenadas e solucionar problemas que não eram possíveis antes.

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Figura 117 - Justificativa do estudantes E12 para pergunta 8

É um estudo mais aprofundado sobre retas e circunferências em que se junta o conhecimento de álgebra e a visão de resolução de problemas de geometria

Fonte: dados da pesquisa, 2023

Esses aspectos evidenciam que trazer o novo para chão da sala de aula, embora seja desafiador e cheio de surpresas, colaboram com o despertar de possibilidades e, sobretudo, nos faz repensar a nossa prática de forma concomitante, trazendo sempre, em um único compasso, o ensino-aprendizagem-avaliação além de colocar o professor como um agente de apoio e referência sendo o estudante o protagonista das suas próprias ações.

Quadro 9 - Aspectos positivos ou negativos sobre a MEAAMaRP nas respostas dos estudantes

Aspectos Positivos	Aspectos Negativos
Discussão das questões em dupla.	Em alguns processos, a baixa interferência do professor.
A novidade como método de ensino.	Pouco tempo para desenvolver cada etapa.
A produtividade e o interesse aumentam com o método.	Grau de dificuldade dos problemas.
Melhorou minha interpretação dos problemas.	Mais plenárias e discussões em grupo.
Interativo e divertido e melhora a fixação.	O professor não poder intervir em todas as etapas.
Melhorou minha aprendizagem.	O método é demorado.

Fonte: o autor, 2024

Na seção a seguir, iremos explicitar nossas considerações sobre o desenvolvimento da coleta de dados, de acordo com nossos referenciais teóricos, apontando reflexões sobre a questão de pesquisa.

6.5 Considerações sobre a metodologia aplicada e a questão de pesquisa

No contexto da MEAAMaRP, apresentados neste trabalho, tivemos cautela ao escolhermos os problemas a serem aplicados.Desde o início da pesquisa, tínhamos uma expectativa acerca das etapas e das potencialidades, em termos de dados e resultados. Tratando-se de um universo de dados relativamente pequeno, foi possível tirar conclusões pontuais em relação à proposta de ensinar matemática através da Resolução de Problemas.

A língua portuguesa, através de uma locução prepositiva constituída de duas palavras que, juntas, têm o valor de preposição, tem-se o sentido de "passar de um lado a outro", "passar ao longo de", "por entre" ou "no decurso de". Nesse sentido, aquele de passar de um lado a outro ou no decurso traz uma sensação de construção e de representação daquilo que deseja ser mostrado. A BNCC (Brasil, 2018) apresenta entre as diversas competências a importante ação de representar, como citado neste texto. Representar pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Foi nessa perspectiva que a questão de pesquisa surgiu: será que, ao utilizarmos uma metodologia de ensino que favoreça o protagonismo e o incentivo individual e coletivo, poderemos colaborar e facilitar tal ação? Daí a nossa questão de pesquisa:

"Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula no ensino de tópicos de Geometria Analítica Plana, permitindo ao estudante transitar por diferentes representações"?

Ao longo da aplicação dos problemas geradores e de aprofundamento, nós nos deparamos com situações em que tais registros de representação e o uso diversificado de linguagens trouxeram avanços no entendimento e, consequentemente, na aprendizagem dos conteúdos presentes no objeto do conhecimento matemático em estudo.

Os estudantes puderam experimentar diferentes formas de apresentação de um problema e nele aplicarem seus conhecimentos prévios, mas também foram capazes de realizar conversões, quando, especificamente, puderam discutir, de forma conjunta com os seus pares, para um consenso de solução, sem ferirem a individualidade e o entendimento intrínseco de cada um.

Entendemos também que as complexidades que cercam a rica TRRS mostraram-se presentes na pesquisa e, como afirma Duval (2004 *apud* Soares, 2007), não é possível separar os distintos registros de representação semiótica da função cognitiva do pensamento humano em que, para ele, não existe noésis (apreensão conceitual de um objeto) sem semiósis (apreensão ou produção de uma representação semiótica), ou seja, não há conceitualização sem o sujeito ter-se apropriado das várias formas de representação de um mesmo objeto. Nesse contexto, o ensino de Matemática deve, na sua concepção, priorizar: a coordenação de registros de sistemas semióticos diferentes; a diversidade de registros; e a capacidade de passagem de um para o outro. Colocar os estudantes em um ambiente de trabalho onde as mobilizações ocorrem, a fim de favorecer a modelagem de situações diversas e, consequentemente, efetivar a comunicação de resultados de uma atividade, foi o nosso objetivo, tendo o papel do professor como um ponto de apoio que favorecesse o protagonismo dos estudantes. Ao temporizar o nosso trabalho, percebemos que os estudantes puderam se expressar de forma espontânea, embora a naturalização do erro não seja algo ainda consolidado por muitos, o que é natural, levando-se em consideração a maturidade deles.

Durante a aplicação da MEAAMaRP, pudemos vivenciar situações em que o movimento provocado por ela nos estudantes permitiu a eles aprender com os erros e com os acertos, com o objetivo de construir o conhecimento. Além disso, os momentos de avaliação e de retomadas, durante as lacunas percebidas, também foram favorecidos. Destacamos que outras análises mais profundas acerca da TRRS não estavam entre os nossos objetivos principais. Porém pretendíamos criar um produto educacional que apresentasse uma sequência de atividades à luz da MEAAMaRP. Ele poderá dar um suporte para o professor ter pistas que o guiem ao ensinar retas e circunferências no contexto da Geometria Analítica Plana e que sobretudo o permita vivenciar os processos de ensino-aprendizagem-avaliação no desenvolvimento das suas aulas de forma a tratar esse “tripé” de forma conectada e que ao longo das etapas da MEAAMaRP, ele possa ser percebido e ajustado a sua realidade de sala de aula.

6.6 Produto Educacional

O produto educacional construído ´é parte desta dissertação, uma vez que foi criado e desenvolvido, a partir das experiências vivenciadas ao longo da aplicação da sequência de problemas desta pesquisa em sala de aula, utilizando as etapas da MEAAMaRP, conforme proposto por Onuchic e Allevato (2021).

O produto educacional tem como um dos seus objetivos principais oferecer e propor para professores de Matemática, estudantes de licenciatura e pesquisadores, que desejam desenvolver metodologias de ensino em suas aulas de Geometria Analítica, ao abordarem o estudo de retas e circunferências, a possibilidade de conhecerem e de aplicarem as dez etapas da MEAAMaRP, como também poderem vivenciarem no cotidiano escolar e perceberem as experiências exitosas que ela poderá proporcionar. Ao construir o produto educacional, tivemos a intencionalidade de trazer um texto mais objetivo e interativo, para que o professor pudesse navegar por ele de forma a abrir "janelas" que lhe chamassem mais a atenção, texto este focado na proposta principal da metodologia que é de ensinar através da resolução de problemas.

Ao fazer o estudo e a utilização desse produto, espera-se que o professor tenha autonomia de escolher quais problemas irá utilizar e também de adaptá-los para a sua realidade e proposta de trabalho. A ideia também é possibilitar que a dissertação desenvolvida aqui sirva de suporte de estudo e consulta para o professor, sempre que houver essa necessidade.

Ao criar esse produto, tentamos trazer algo que acreditamos que desperte o protagonismo dos estudantes em sala de aula, nas suas ações individuais e coletivas, mas que também possa contribuir com as representações algébricas e geométricas presentes na geometria análica que podem favorecer seus registros e as transições de um para o outro registro, quando da aplicação dos problemas propostos pelo professor.

O produto educacional, que ficará disponível em anexo nesta dissertação e também como domínio público, foi estruturado baseando-se nos problemas geradores e de aprofundamento, presentes nesta dissertação e amplamente discutidos no capítulo 6. Dessa forma, a proposta é a de apresentar, no produto educacional, de uma forma mais ampla, o problema gerador 1.1, com comentários sobre as experiências vivenciadas no momento da sua aplicação no contexto da sala de aula. Além disso, apresentar as reflexões acerca dos registros dos estudantes, das aprendizagens e das avaliações ao longo da sua aplicação.

Posteriormente, os demais problemas geradores serão apresentados, com os objetivos e soluções, além de destacarmos, via QR code, "janelas de navegação", onde o professor poderá acessar: artigos, definições e comentários que trazem reflexões sobre o problema aplicado, as etapas da MEAAMaRP e os Registros de Representação Semiótica (RRS). Esperamos que esse produto contribua para o aprimoramento da prática do professor em sala de aula, embora saibamos dos desafios, enquanto professores associados à ideia de colocar em prática ações que demandem mais do nosso trabalho diário, que podem trazer novos desdobramentos, novas reflexões e ações associados ao fazer diário da sala de aula.

Para navegar no nosso Produto Educacional, acesse o link a seguir:

https://drive.google.com/file/d/1MovvupWW5gBU-dsa3gNAz4jUtaCitGHQ/view?usp=drive_link

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As construções realizadas até aqui, nesta dissertação, nasceram de várias inquietudes, que estavam associadas aos diferentes cenários vivenciados na sala de aula como professor, sobretudo, aqueles ligados ao sentimento de busca por novas metodologias de trabalho que permitissem favorecer as aprendizagens, aqui escritas no plural, por eu acreditar que os sujeitos aprendam no seu tempo e com os recursos diversos que podem estar ao alcance deles.

Ao conhecer e aprofundar os estudos sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem -Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e poder desenvolvê-la em sala de aula, foi possível vivenciar, junto aos estudantes, singulares momentos de troca e de experiências novas, todas elas relacionadas ao cotidiano de ensinar e aprender Matemática. E, ao utilizarmos novas metodologias de trabalho, em minhas aulas e nas minhas práticas diárias, como a MEAAMaRP, além de nos colocarmos em um lugar de busca por novas experiências, potencializamos a criticidade e a curiosidade dos estudantes, favorecendo o protagonismo deles, que é denominado por Onuchic (2022) como "aprendizado autogerado".

Ao utilizar a MEAAMaRP como um dos nossos referenciais teóricos, além de ela servir como base desta pesquisa, também proporcionou conhecer os trabalhos exitosos de duas grandes pesquisadoras do cenário educacional brasileiro e internacional. A experiência possibilitou, assim, colocar em prática as metodologias de Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, mudando a minha prática educacional cotidiana e com expectativa de poder promover mudanças também no percurso escolar dos estudantes que colaboraram com esta investigação.

As etapas da Metodologia aplicada comprovaram o seu poder transformador, associado ao papel do professor, que deve ser um agente responsável em promover mudanças e, sobretudo, promover o movimento defendido por Onuchic (2022), em uma entrevista que fez parte da série Perfis ICMC[15], em que ela afirmou:

> Eu não sou terrorista, mas quero uma revolução! A revolução do ensino, a revolução do trabalho de formação do professor. E, para trabalhar a formação do professor, o formador de professores tem que ter boas ideias. A minha revolução pressupõe uma reforma, que depende de todas as minhas investigações, de todas as minhas pesquisas. Tudo o que se faz em educação matemática não é para ficar em uma tese, é para usar" (Onuchic, 2022, p.1).

[15] O Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) é uma unidade de ensino e pesquisa da Universidade de São Paulo (USP), criada em 1971 e situada no campus da USP em São Carlos.

Alinhados ao objetivo de procurar pistas para a questão de pesquisa e como professores de Matemática da Educação Básica, com experiência em diversas redes de ensino e anos de escolaridades distintos, percebemos, pela prática diária em sala de aula, que o processo adotado para o ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica, por vezes, não favorece o trânsito entre abordagens gráficas e algébricas.

Atualmente, esses conteúdos vêm dialogando com competências e habilidades sugeridas e orientadas BNCC (Brasil, 2018), segundo a qual competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana.

Nesse cenário, a questão de pesquisa esteve apoiada na ideia de desenvolver o ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica, envolvendo os conceitos de retas e circunferências a serem desenvolvidos no âmbito da 3ª série do Ensino Médio, valendo-nos da MEAAMaRP, utilizando uma sequência de atividades composta por problemas geradores e de aprofundamentos. Com estes problemas e a partir deles, buscou-se identificar registros de representação (conversão e tratamento) à luz da TRSS, que também se apresentou como um dos referenciais teóricos de estudo, baseando-nos na teorias do renomado pesquisador Raymond Duval, na condição de que, ao analisarmos as atividades desenvolvidas pelos estudantes, fosse possível responder como aplicar a MEAAMaRP e se tais registros se mostrariam mais evidentes e quais os impactos seriam gerados ao aplicarmos as dez etapas dessa metodologia.

Entendemos que as etapas desta pesquisa, que se iniciou com os estudos e revisão dos referenciais teóricos, passando pela construção e pela escolha dos problemas até a sua aplicação em sala de aula, mostrou-nos que a MEAAMaRP e suas etapas colocaram aquele pequeno grupo de estudantes em um cenário de participação e envolvimento, ao vivenciarmos os problemas, sendo que esse movimento promoveu um espaço que favoreceu os registros e os desenvolvimentos apresentados por eles.

Os processos cognitivos que envolvem a aprendizagem, após apresentarem uma resposta aos estímulos provocados pela metodologia, vão muito além das respostas apresentadas e os seus registros e precisam ser considerados em um contexto de fala, de gestos e escritas. Entendemos que o papel do professor, como facilitador, e os momentos de trocas, promovidos pelas etapas de discussão em grupo e em plenária, foram colaborativos para estimular e promover as ações de registros.

Podemos perceber, pelos dados apresentados, que a mobilização simultânea de, ao menos dois registros de representação e a troca espontânea de um registro de representação para outro, foi favorecida na aplicação de alguns problemas da pesquisa. E que a MEAAMaRP, principalmente durante a etapa da plenária, favoreceu ações de reflexões, trocas de saberes e, sobretudo, permitiu aos estudantes colaborarem com os seus pares na construção das resoluções, mas, acima de tudo, aprenderem Matemática com a prática da Resolução de Problemas. Além disso, esse momento permitiu que os estudantes pudessem se envolver com as propostas e os objetivos daquelas aulas de uma forma colaborativa e aberta.

Com relação à nossa questão de pesquisa, entendemos que analisando os dados coletados e especialmente as vivências ao longo do desenvolvimento das 10 etapas da MEAAMaRP, contribuíram para que os registros algébricos e geométricos, bem como as conversões pudessem ser explicitados, principalmente nos momentos coletivos e de trocas entre os pares. Nesse momento, as aprendizagens foram explicitadas pelas duplas de trabalho e também de forma individual, ao longo dos diálogos e de trocas com o professor pesquisador. Para nós, a MEAAMaRP contribui para o ensino de retas e circunferências e favoreceu a natureza de registros apresentados pelos estudantes, tornando-se, na nossa visão, uma prática diferenciada e que coloca os estudantes como a principal referência do ensino-aprendizagem.

Dessa forma, vemos que tal estudo demanda mais aprofundamento, tratando-se aqui de uma amostra pequena de dados, mas que dá pistas positivas em relação às inquietudes iniciais apresentadas na nossa questão de pesquisa, e vemos que a MEAAMaRP pode favorecer os processos de ensino-aprendizagem-avaliação nos momentos de trocas de saberes e que influenciam na evolução da aprendizagem até a formalização de conceitos, feitas pelo professor.

Para os professores e interessados em desenvolver a Metodologia em sala de aula e como parte integrante desta dissertação, elaboramos um produto educacional que possa servir de base de estudo para outros educadores e que traz um paralelo e as intersecções entre os dois referenciais teóricos aqui utilizados, com exemplos de problemas que permitam navegar pela aplicação da MEAAMaRP, mas que também permitam realizar processos de avaliação constantes do trabalho do professor e dos retornos dados pelos estudantes, bem como promover novas ações pedagógicas a partir dele.

Por fim, esperamos que este trabalho de pesquisa sirva de base para outros que ainda venham a ser desenvolvidos e para aqueles que se interessem pela metodologia aplicada, alinhada ao referencial teórico estudado, enfim, para todos que, assim como nós, acreditam no seu papel transformador.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

________; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, v. 31, n. 55, p. 133-154, jul./dez. 2009. Disponível em: . Acesso em: 20 maio. 2024.

________;________. Ensino-aprendizagem-avaliação: por que através da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular : **Educação é a Base**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica 2018. 600 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 08 de abr. 2023.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 2000.

BICUDO, M.A.V. Pesquisa Qualitativa; Significados e a Razão que a Sustenta. Revista Pesquisa Qualitativa, São Paulo, Ano 1, n.1, 2005, p. 7-26.

________PCN+Ensino Médio. Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.Brasília,2002.

CAI,J.;LESTER,F.**Porque o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno?**Boletim GEPEM.Rio de Janeiro,n.60,p.241,2012.Tradução de BASTOS,A.S.A.M. e ALLEVATO,N.S.G.

CONSELHO NACIONAL DE SAÚDE. Resolução 466, de 12 de dezembro de 2012. Disponível em: https://conselho.saude.gov.br/resolucoes/2012/Reso466.pdf. Acesso em: 20 maio 2024.

DANTE,L. R.**Matemática contexto & aplicações.**3ªed,3ªreimpr.-São Paulo:Ática,2009.

DELGADO,J.;FRENSEL, k.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica** – Coleção PROFMAT. 1ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.** Tradução Myriam Veja Restrepo. 2. Ed. Colômbia: Peter Lang S.A, 2003.

________.**Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

________.Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução MériclesThadeu Moretti.Revemat.Florianópolis,v.07,n.2,p.266-297,2012.

EVES,H.**Introdução à história da matemática.**Tradução Hygino H. Domingues. 3ª reimpr. Campinas, SP: Editora da Unicamp.2004.

FERREIRA, N. S. A. **As pesquisas denominadas "estado da arte". Educação & Sociedade**. Campinas, Ano XXIII, n. 79, p. 257-272, agosto. 2002.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E.. **Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. Recife, v. 4, n. 2, p. 1-14. 2013.

FREITAS, I.M. **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno.** Tese de Mestrado. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo: 1999.

GODOY, Arilda Schmidt. **Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais.** Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n.3, p, 20-29 mai./jun. 1995. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rae/a/ZX4cTGrqYfVhr7LvVyDBgdb/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 15 maio 2024.

HENRIQUES,A.;ALMOULOUD,S. AG.**Teoria dos registros semióticos em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior:uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple**.Ciênc. Educ, Bauru, v. 22, n.2, p.465-487, 2016.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a função algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2011.

XARIFA, BRUNO DE ASSIS **Lugares geométricos e pontos notáveis do triângulo: uma proposta de atividades na perspectiva do modelo van Hiele** Dissertação(Mestrado) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2020.

LUNA, S. V..**Planejamento de pesquisa:uma introdução.**2ª ed.,4ªreimpr.-São Paulo, Educ,2019.

MACHADO,A. DOS. S.**Algébra Linear e Geometria Analítica.**2ªed.São Paulo:Atual,1982.

MARTINS, R. R. G. et al.**Um mapeamento das produções do PROFMAT que abordam a Resolução de Problemas e Registros de Representações Semióticas: em busca de um diálogo.**.ISiRPEM,Maringá-PR,jul.2021.Disponívelem:https://drive.google.com/drive/folders/1Z5jFK1BS-oAFbijvf1BcLlJCoEzYCsZF. Acesso em: 15 jan. 2024.

MERIEU, P. Aprender... sim, mas como? 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

NEMITZ,V.**Sistema Positivo de Ensino:ensino médio:matemática.V9 e V10** Curitiba:Positivo Soluções Didáticas,2021.

MORETTI, M. T.;THIEL,A.A.**O ensino de matemática hermético:um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica.**Práxis Educativa,Ponta Grossa,v.7,n.2,p.379-396,jul./dez.2012.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-220.

________; ALLEVATO N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

________;________. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. **Bolema,** Rio Claro, ano 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

________.; ________. **As Conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática**. **REnCiMa**, v.10,n,2,p.01-14,2019.

________; ________. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?** In: ONUCHIC, L. R,; ALLEVATO, N.S. G.; NOGUTI, F.C.H.; JUSTILIN, A. M.(Org.). Resolução de Problemas. 1. ed. São Paulo: Paco Editorial, 2021.

PAGANI, E. M. L. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Derivadas no Curso Técnico Integrado ao Médio através da Resolução de Problemas.** Tese de doutorado. UNICSUL, São Paulo, 2016.

PIRONEL,M.**Avaliação para a Aprendizagem: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**.Tese de doutorado. Rio Claro,2019.

POLYA,G.**A arte de resolver problemas.**1ªed. São Paulo: Interciência,1978.

PROBLEMA. Dicionário online Oxford, 15 de abril. 2024.Disponível em <https://www.dicio.com.br/oxford/> . Acesso em 15 abr. 2024.

PROBLEMA.Dicionário online Houaiss, 15 dabril.2024.Disponível em:<https://www.dicio.com.br/houaiss/>. Acesso em 15 abr. 2024.

SILVIA, DIAS ALCÂNTRA MACHADO(org.).**Aprendizagens em Matemática:Registros de representação semiótica.** 8ªed. Campinas:Papirus,2003.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. **Developing and Understanding in Mathematics via Problema Solving**. In: TRAFTON, P. R. ; SHUTLE A. P. (ed.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM,, p. 31-42,1989.

UNIFAP. **Metodologia da pesquisa científica**. Unidade 1: pesquisa em ciências sociais. Tópico 4: pesquisa pedagógica. Disponível em:https://www2.unifap.br/midias/files/2012/03/04.pdf. Acesso em: 10 mar. 2024.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre, Artmed, 2009.

VIEIRA,G.POSSAMAI J. P.; ALLEVATO,N.S.G. **Proposição de problemas e pensamento criativo na aula de Matemátic**a. Zetetiké, Campinas, SP, v31, 2023, pp.1-15.

WAGNER, Eduardo. **Lugares Geométricos I.** Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2020/01/PAPMEM_JAN_2020_LG1-Papmem.pdf. Acesso em: 15, maio 2024

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO E ASSENTIMENTO

Termo de Consentimento e Assentimento

Prezados pais e responsáveis pelos estudantes da 3ª série do ensino médio, várias são as metodologias de ensino e abordagens que hoje são utilizadas com o objetivo de promover aprendizagem de conteúdos e principalmente desenvolver habilidades matemáticas como aquelas propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e muitas pesquisas apontam que as dificuldades em aprender Matemática podem ser amenizadas quando tais metodologias são utilizadas.

Uma dessas metodologias é a reconhecida Metodologia de Resolução de Problemas que pode promover em etapas bem demarcadas um processo de ensino-aprendizagem-avaliação de uma forma bem conectada e com a participação do estudante como principal protagonista do seu processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, nos últimos anos, essa metodologia vem ganhando força e relevância na sociedade, principalmente no que tange a sua abordagem no ambiente escolar e também nos desafios da vida de um forma geral e que pode aprimorar a capacidade de resolver problemas de várias naturezas.

Ensinar Matemática através da resolução de problemas é um dos objetivos traçados para o ensino da Geometria, tendo como recorte a chamada Geometria Analítica que é um dos conteúdos da 3ª série do ensino médio, previsto no planejamento anual e também no material didático .

Assim, o estudante está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado que tem como objetivo investigar como a aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas, no formato proposto por Onuchic e Allevato podem favorecer a aprendizagem e poder ser comprovada através dos registros e representações apresentadas pelos estudantes.. O mestrado é do programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - CEFET/MG, e a pesquisa é de responsabilidade do professor de Matemática, Rodrigo Rafael Gurgel Martins e sua orientadora de mestrado, a professora Dra. Erica Marlúcia Leite Pagani. As atividades a serem realizadas no período de pesquisa são um questionário de sondagem (inicial), um questionário final e quatro encontros remotos com atividades que possuem intuito de aplicar essa Metodologia nas aulas junto com os estudantes.

Essas atividades abordarão temas tais como Geometria Analítica, Lugar Geométrico, estudo da Circunferência e suas representações e relações com outros elementos da geometria como ponto e reta. A aplicação dessa pesquisa e das suas atividades será por meio de 06 encontros presenciais totalizando assim 06 aulas de duração de 50 minutos cada durante os horários de aula de Matemática nas terças e quintas-feiras, sendo 02 aulas na terça e 01 na quinta durante duas semanas. A coordenação pedagógica da escola acompanhará todo o processo e realização destas atividades. Solicitamos a colaboração do estudante interessado e inscrito e a autorização dos responsáveis, para que esse possa participar das atividades.

Esclarecemos e consideramos importante que estejam cientes de que os dados dessa pesquisa serão analisados para a dissertação e publicados em eventos/revistas da área de Ensino e Educação Matemática. Salientamos que NENHUM dos participantes e nem a instituição serão IDENTIFICADOS nas análises. Agradecemos a atenção e desejamos que seja uma experiência importante no processo de formação dos estudantes e para a pesquisa no campo da Educação.

Solicitamos,por gentileza, que realizem o preenchimento deste formulário, que será a confirmação do consentimento da parte dos pais e assentimento da parte do estudante participante.

Cordialmente,

Prof. Rodrigo Rafael Gurgel Marins

1. Assim, considerando que fui informado(a) dos objetivos e procedimentos da pesquisa proposta declaro que:

○ Li e concordo com o termo acima e confirmo participação.
○ Li e não concordo com o termo acima, não participaremos.

2. Nome completo e turma do(a) estudante.

____

3. Contato do estudante.

____

4. Nome completo do responsável e parentesco.

____

5. Contato do responsável.

____

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL DE SONDAGEM

Caro(a) estudante,

Sua participação será muito importante para o desenvolvimento de minha pesquisa de mestrado no âmbito do PROFMAT realizada no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG).

No texto da dissertação e demais trabalhos você não será identificado.

Muito obrigado!

Professor-pesquisador: Rodrigo Rafael Gurgel Martins

Orientadora: Prof.(a): Dra. Érica Marlúcia Leite Pagani

Questionário Inicial de Sondagem

Nome (opcional):____
Série: ____
Data: ____

PARTE I

1. Quantos anos você tem? ○ 15 anos ○ 16 anos ○ 17 anos ○ Outros

2. Você concluiu o Ensino Fundamental II em uma escola:

( ) pública. ( ) particular.

3. Você já estudou Geometria antes? ( ) sim ( ) não

Se sim, quais os conteúdos / tópicos de Geometria você já estudou?

____

____

____

____

____

____

4. Para você, o que é a Geometria?

5. Você considera importante estudar Geometria? Por que?

6. Para você, o que é uma circunferência?

7. Para você, o que é um círculo?

8. Você acha que existe diferença entre círculo e circunferência?

○ Sim ○ Não ○ Não sei opinar

9. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva essa diferença.

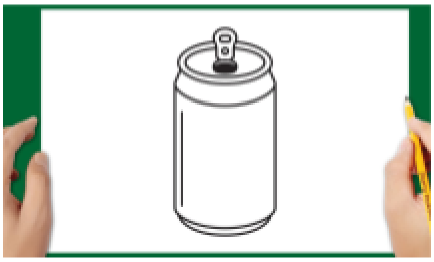
____
____
____
____
____
____

PARTE II

Nome (opcional):____
Série: __________
Data: ________________

10. Responda ao que se pede.

a) Ao contornar a base de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?



____

b) Ao passar tinta na base plana de uma lata, você irá obter um círculo ou uma circunferência?

____

11. O que é o raio de uma circunferência?

____
____
____
____
____
____

12. Observando o ambiente e o seu cotidiano, descreva objetos ou situações onde a circunferência está presente.

13. Qual sua expectativa em relação a sua participação nesta pesquisa que será realizada nas aulas de Matemática? O que você espera aprender?

14. Registre, abaixo, outros aspectos que julgar relevantes sobre este assunto.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL DE FEEDBACK

Prezados estudantes,

Esse questionário tem como objetivo conhecer e entender suas impressões gerais e opiniões sobre o processo de ensino-aprendizagem de retas e circunferências desenvolvidas nas aulas de Matemática durante a aplicação dessa pesquisa. Sua contribuição é de fundamental importância para que possamos, a cada dia, melhorar o ensino, a aprendizagem e a avaliação de Matemática.

Desde já agradecemos sua participação e colaboração!

Professor-pesquisador: Rodrigo Rafael Gurgel Martins.
Orientadora: Profa Dra Érica Marlúcia Leite Pagani

Questionário Final de Feedback

Qual o seu nome?(opcional)
____
Série:
data:

1. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas(MEAAMaRP) contribuiu para o seu aprendizado sobre retas e circunferências?

(   ) sim
(   ) não

Justifique sua resposta

2. A metodologia utilizada estava dividida em algumas etapas importantes, listadas abaixo. Na sua opinião, qual(is) dessa(s) etapa(s) mais contribuem para o aprendizado?

Leitura individual do problema gerador.
Leitura coletiva do problema gerador.
Discussão e resolução do problema em dupla.
Plenária de resolução do problema no quadro.
Formalização do conteúdo pelo professor.
Resolução do problema de aprofundamento.

3. Dentre os três problemas geradores trabalhados em sala de aula (Problema do Campo de Futebol, Problema da Câmera de Segurança e Problema da Posição entre as circunferências), qual(is) você mais gostou e ou achou útil para sua aprendizagem? Justifique sua resposta.

4. Sobre a presença de Figuras nos textos dos problemas, assinale suas impressões.

Facilitou a interpretação do problema.
Facilitou a resolução do problema.
Dificultou a interpretação do problema.
Dificultou a resolução do problema.

5. Em sua opinião, essa metodologia contribuiu para que você retomasse(esclarecesse dúvidas) seus conhecimentos sobre conteúdos anteriormente ensinados? Quais?

6. Em sua opinião, compreender retas e circunferências na perspectiva da Geometria Analítica ampliou sua compreensão de situações do seu cotidiano? Por que? De que forma?

7. Você julga importante aprender outros conteúdos de Matemática através da MEAAMaRP?

8. Você compreendeu que o estudo de retas e circunferências no contexto da Geometria Analítica é uma outra forma/maneira de analisar e escrever conceitos já previamente estudados no estudo da Geometria?

( ) sim
( ) não

Caso você responda sim, escreva, com suas palavras, o que caracteriza o estudo de retas e circunferências no contexto da Geometria Analítica.

9. Em sua opinião, quais são aspectos positivos ou negativos sobre o desenvolvimento do ensino-aprendizagem desses conteúdos através desta metodologia?

10. Escreva aqui alguma outra observação ou sugestão sobre essas aulas que você julgue importante compartilhar.

APÊNDICE D - LINK DE ACESSO AO PRODUTO EDUCACIONAL

Utilize os link's a seguir para ter acesso ao Produto Educacional

https://drive.google.com/file/d/15AvVmcUz5ahXreMP8o4VrtamvPu2cSE5/view?usp=drive_link

APÊNDICE E- PROBLEMAS GERADORES E DE APROFUNDAMENTO

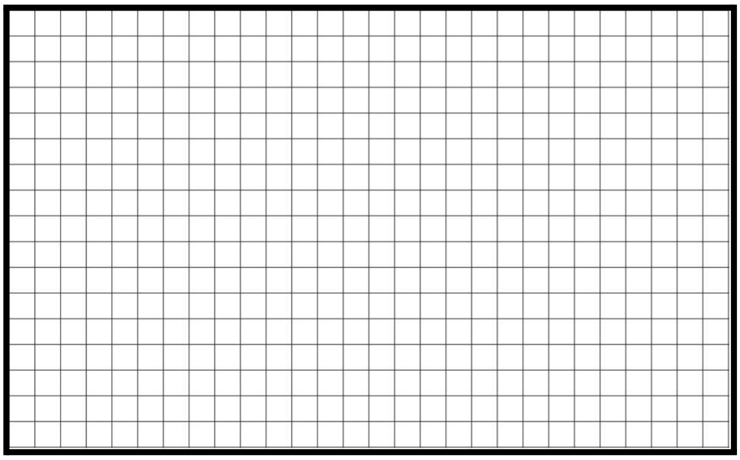
<u>Problema Aprofundamento 1.1:</u> a mediatriz como lugar geométrico

A mediatriz de um segmento AB é uma reta que representa o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de A e B.

Dados A(0,2) e B(3,1), desenvolva cada item a seguir:

a) Trace os eixos x e y de um plano cartesiano xoy na malha quadriculada em que cada quadrado que compõe a malha tem área igual a 1 u.a. a seguir e marque os pontos A e B.

Figura 1: Malha quadriculada do Problema de aprofundamento 1.1



Fonte: o autor, 2023.

b) Obtenha a equação da reta mediatriz de AB e a represente no mesmo plano cartesiano do item (a).
c) Escolha um ponto específico desse lugar geométrico e comprove que ele possui a propriedade dada.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: aprofundar o conceito de lugar geométrico a partir da ideia de marcação de pontos no plano cartesiano seguido a definição apresentada para esse lugar geométrico, associar conceitos de equação de reta e suas posições relativas e utilizar a relação de distâncias entre pontos para comprovação da definição matemática dada.

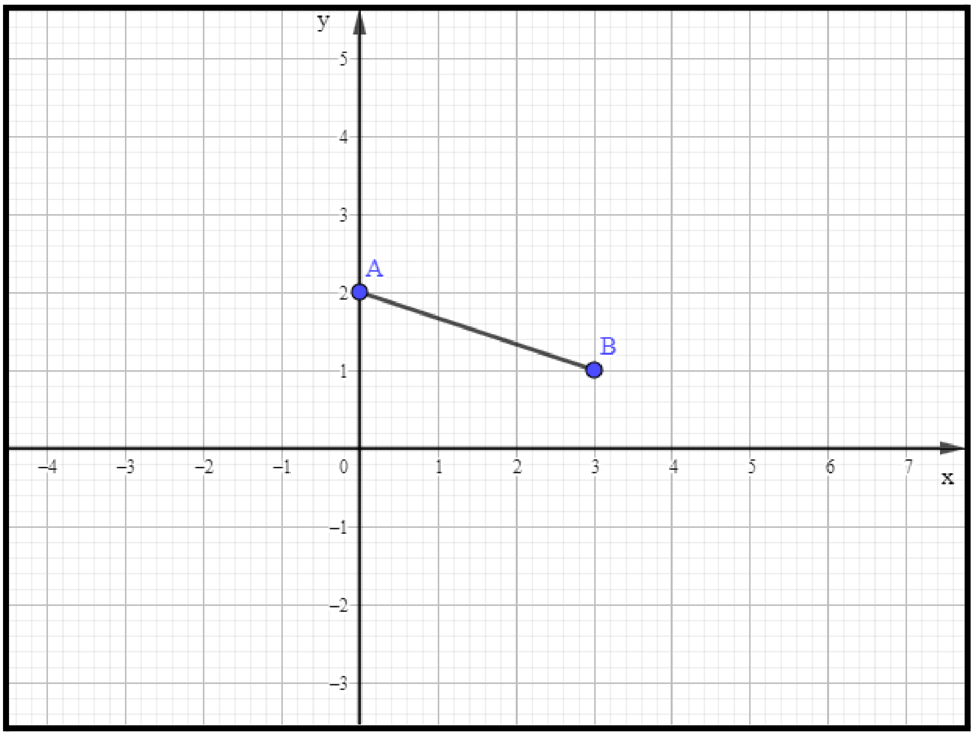
Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano,posição relativa de retas, equação da reta e distância entre dois pontos.

Estratégias de resolução e formalização: a representação gráfica dos pontos A e B dentro da escolha do plano cartesiano xoy é importante na construção da solução inicial desse problema de aprofundamento. Para obter a equação da reta mediatriz, será necessário utilizar a condição matemática envolvendo os coeficientes angulares de ambas as retas, a definida pelos pontos A e B e da reta mediatriz a ser determinada. Será também necessário verificar que o ponto médio entre A e B é um ponto equidistante deles e que a reta mediatriz procurada passará por esse ponto. Finalmente, fazer a verificação que permite garantir que um ponto P(x,y) qualquer da reta mediatriz é equidistante de A e B, pode ser verificada ao utilizar a relação de distância entre pontos. Outro caminho possível seria a verificação de que os pontos A,B e P formam um triângulo de pelo menos dois lados iguais.

Resolução proposta:

a) Traçar de forma conveniente os eixos cartesianos e marcar os pontos A e B conforme representação gráfica na Figura 2, a seguir:

Figura 2 - Posição dos pontos A e B



Fonte: o autor,2023

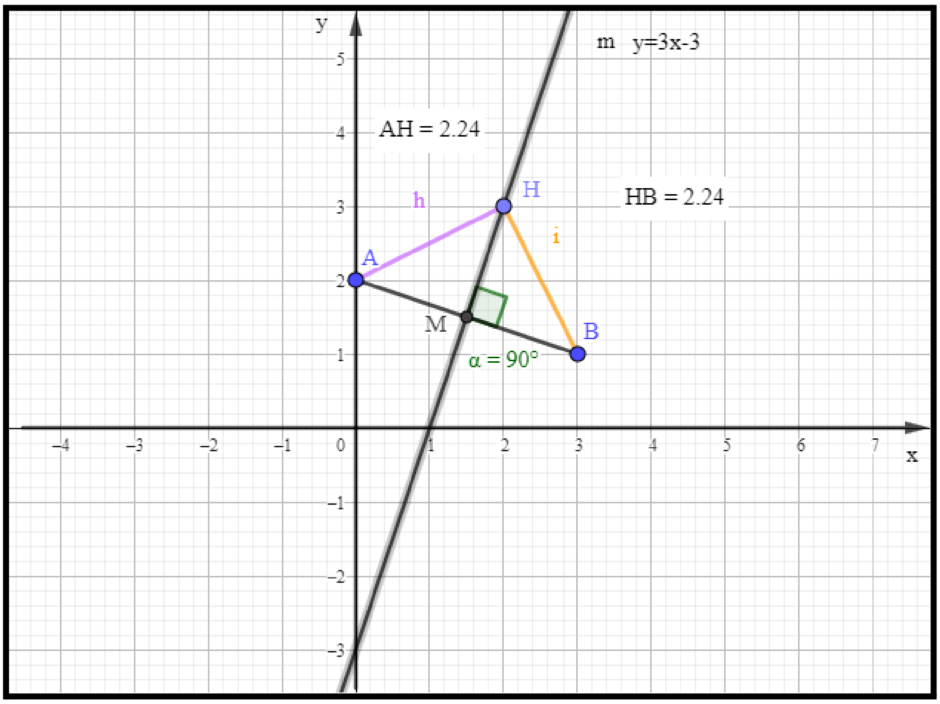
b) Para esse item pode-se determinar o coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos A e B através da relação $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{3-0} = \frac{-1}{3} \Rightarrow m_m = 3$ *pois* $r \perp s$ *. Dessa forma a equação da reta m, mediatriz tem coeficiente angular igual a 3. Utilizando a equação reduzida para determinar uma retas, dada por* $y - y_P = m(x - x_P)$ *sendo P, um* *ponto por onde passa a reta mediatriz m.Como temos P=M (ponto médio de AB), então .sendo M o ponto médio de AB teremos ,*$M=\left(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2}\right)$ *logo,* $M=\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Dessa forma, a equação da reta m procurada é dada por:

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 3(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = 3x - 3.$$

c) toda a solução desse item pode ser realizado com o apoio de um software de construção como o geogebra, porém ao escolher um ponto de forma conveniente H=(2,3), o mesmo pertence a reta mediatriz m, pois y=3.(2)-3=3. Na Figura 3, construída no geogebra, vemos que H é equidistante de A e de B veja:

Figura 3- Lugar Geométrico Problema de Aprofundamento 1.1



Fonte: o autor, 2023.

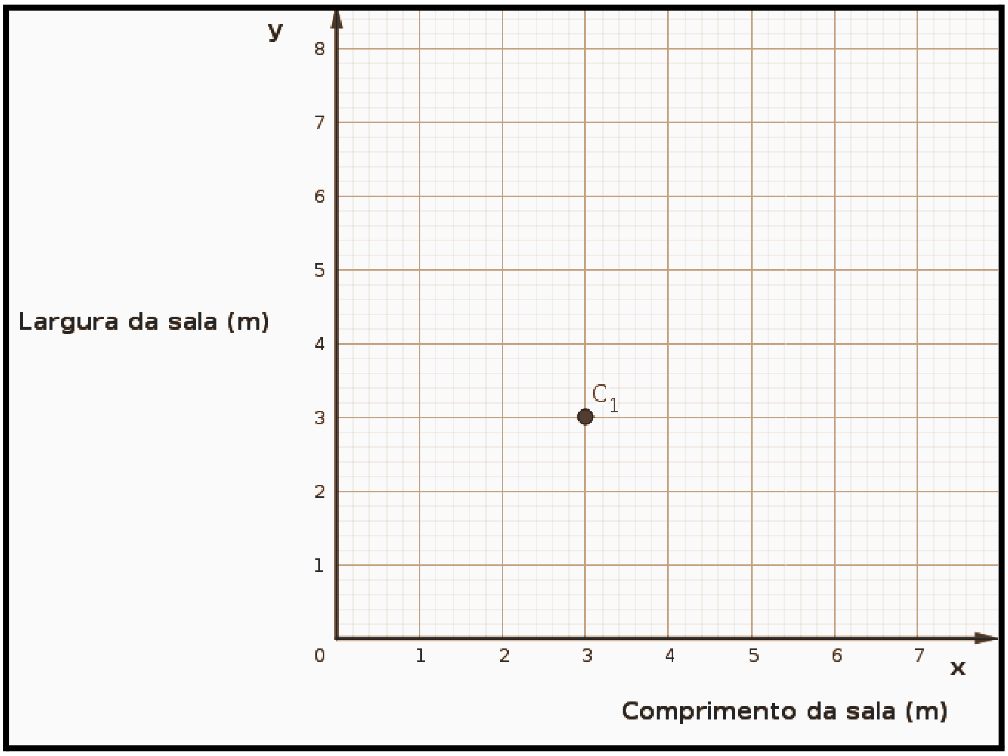
Por outro lado, essa equidistância também poderá ser verificada calculado a distância entre os pontos H e A e H e B, para fins de verificação da propriedade.

<u>Problema Gerador 2:</u> a equação da circunferência.

(ENEM 2019 PPL-Adaptada) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto plano de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já está instalada uma câmera e que essa segunda, deverá ser colocada no teto de maneira a ficar equidistante da primeira câmera C_1. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

(i) Na Figura a seguir, temos um esboço do teto da sala, em um sistema de coordenadas cartesianas, onde está inserida a posição da câmera 1 em C_1.

Figura 4- Posição da Câmera C1

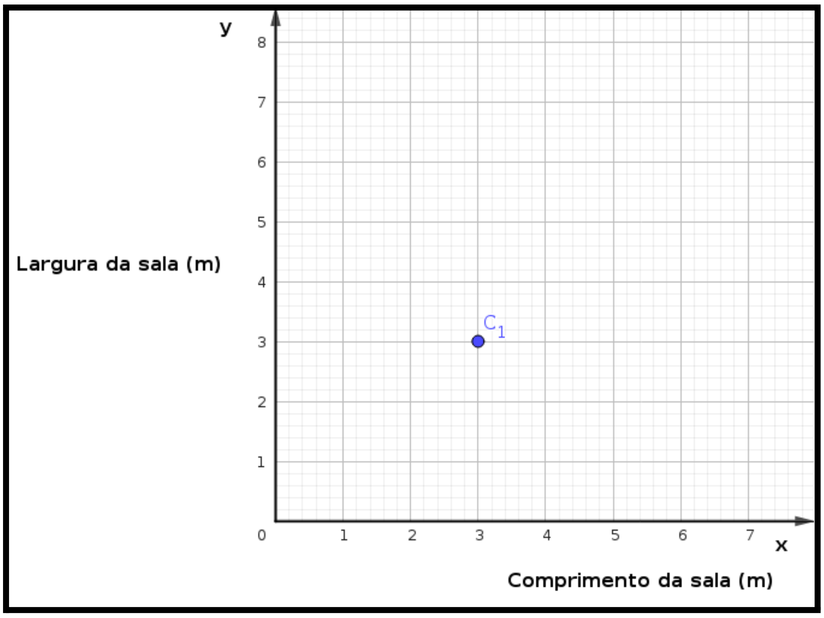


Fonte: o autor, 2023.

(ii) A segunda câmera denominada C_2, deve ser instalada a uma distância de 2 m da primeira câmera denominada C_1.Nessas condições responda o que se pede:

a) Marque no plano cartesiano a seguir posições que a câmera C_2 pode ocupar.

Figura 5 - Plano Cartesiano Problema Gerador 2



Fonte: o autor, 2023.

b) Escreva as coordenadas dos pontos marcados por você no item anterior. As posições ocupadas pela câmera C_2 pertencem a um lugar geométrico? Explique.

c) Existe uma relação entre as coordenadas (x, y) das posições onde a segunda câmera C_2 poderá ser instalada? Se a sua resposta anterior foi afirmativa, qual é essa relação matemática?

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: apresentar e reconhecer a equação de uma circunferência através de um suporte que utiliza a ideia do seu conceito como lugar geométrico a partir da marcação de pontos no plano cartesiano e utilizar a equidistância para chegar até uma equação.

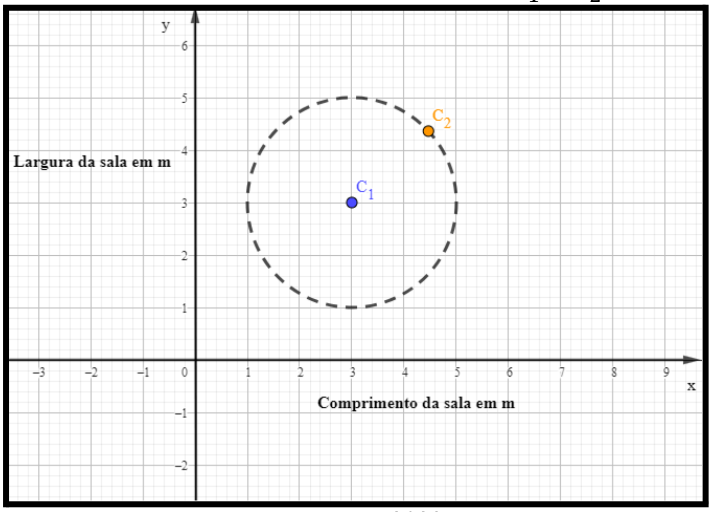
Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, explorar a marcação de um ponto de coordenadas (x,y) qualquer através de um propriedade comum que os representa., distância entre dois pontos e equação de um lugar geométrico nesse caso específico a de uma circunferência.

Estratégias de resolução e formalização: representar graficamente alguns possíveis pontos que atendam as propriedades daquele lugar geométrico e concluir que ele trata-se de uma circunferência,escrever ou determinar a equação de uma circunferência dada a distância entre pontos equidistantes.

Resolução proposta:

a) Nesse item a solução poderá ser determinada com o auxílio de um software de construção geométrica ou a marcação poderá ser feita no próprio plano cartesiano dado. Alguns pontos dessa marcação são notáveis como, por exemplo, os pontos triviais de coordenadas (3,5);(5,3);(1,3) e (3,1). A seguir, a Figura 6 tem o registro da marcação de pontos ao redor da câmera C_1.

Figura 6 -Posição das Câmeras C_1 e C_2



Fonte: o autor, 2023.

b) Essa resposta apresenta infinitas possibilidades, como já descrito no item os pontos triviais podem ser dados como resposta ou a verificação de outros pontos pode ser feita através da verificação da equidistância ou utilizando um software de construção, no caso do geogebra o uso do controle deslizante como ferramenta pode ser uma boa estratégia. Em relação à afirmação as posições ocupadas por C_2, *pertencem ao lugar geométrico de uma circunferência de centro no ponto* C_1*=(3,3) e raio 2.*

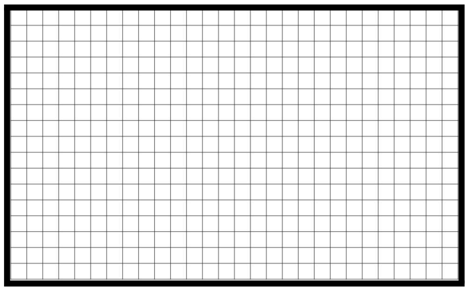
c) Para determinar essa relação pode-se utilizar a distância entre os dois sendo um deles o ponto C_1*=(3,3) posição da câmera de segurança já instalada no teto e* C_2*=(x,y), um ponto genérico qualquer que representa as diferentes posições para a câmera nova que será instalada e finalmente igualar essa distância a 2 m, conforme informação do problema. Essa operação, gera a relação matemática procurada.*

$$d_{C_1C_2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = 2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

Problema Aprofundamento 2.1: a equação da circunferência.

Qual Figura pode ser formada no plano cartesiano pelos pontos que equidistam 5 cm do ponto de coordenadas A(3, 2)? Use a malha quadriculada em que cada quadrado tem área de 1 u.a. para representar essa situação.

Figura 7- Malha quadriculada do Problema de aprofundamento 2.1



Fonte: o autor, 2023.

Determine a relação entre x e y de todos os pontos P(x, y) que distam 5 cm do ponto de coordenadas cartesianas A(3, 2).

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: apresentar e reconhecer a equação de uma circunferência a partir de condições mínimas dadas como seu centro e seu raio.Verificar se o processo de encontrar a equação de uma circunferência conhecendo as condições mínimas de centro e raio, foi consolidado.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, determinar a equação de uma circunferência.

Estratégias de resolução e formalização: representar graficamente alguns possíveis pontos que atendam o comando do enunciado do problema. Marcar o centro dessa circunferência e se possível outros pontos que fazem parte deste mesmo lugar geométrico.

Resolução proposta:

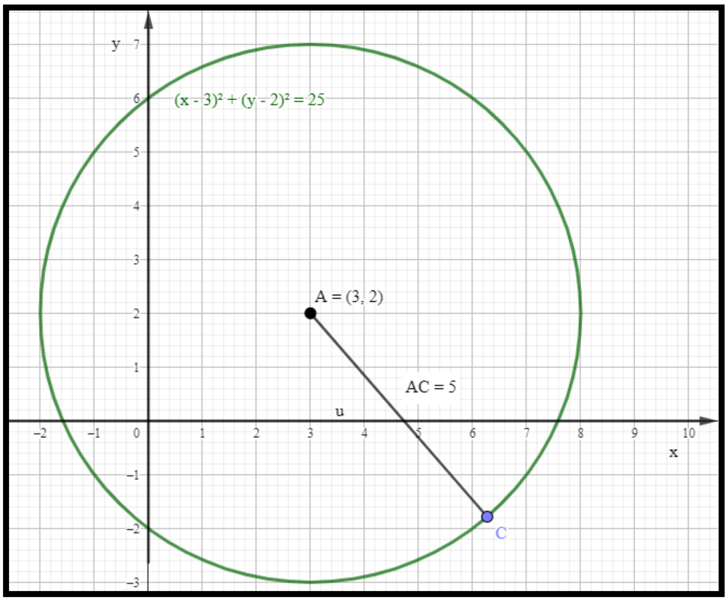
A Figura formada é uma circunferência de raio 5 e centro em A=(3,2) cuja a relação solicitada pode ser obtida utilizando a ideia da equidistância tomando C=(x,y),um ponto de coordenadas genérica, que está a 5 unidades de distância de A, ou através da fórmula da equação reduzida de uma circunferência como descrito a seguir:

$$d_{CA} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 5 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Pela definição da equação reduzida, bastando substituir o centro C_1*=A(3,2)* $\Rightarrow a = 3 \; e \; b = 2 \; e \; r = 5.$

$$P(x, y) \in C_1 \Leftrightarrow d_{PC} = r \Leftrightarrow d_{PC}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Figura 8- Representação da Circunferência Problema de Aprofundamento 2,1



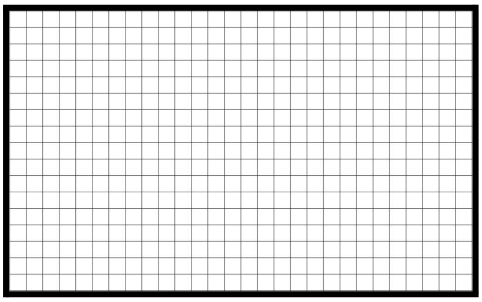
Fonte: o autor, 2023.

<u>Problema Aprofundamento 2.2:</u> a equação da circunferência.

(ENEM 2018-Adaptada) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.Baseando-se nessas informações desenvolva cada item a seguir:

a) Represente graficamente essa situação em um plano cartesiano xoy traçando os eixos na malha quadriculada a seguir em que cada quadrado tem área 1 u.a. considere que A(0, 0) é o foco de incêndio de temperatura mais elevada, B(30, 0) é o foco de temperatura menos elevada e P(x, y) é a posição do bombeiro.

Figura 9 -Malha quadriculada do Problema de aprofundamento 2.2



Fonte: o autor, 2023.

b) Utilize os dados do problema e as informações descritas no item a) e modele essa situação por meio de uma equação utilizando a relação entre distância de dois pontos sabendo que $d_{PA} = 2.d_{PB}$.

c) Qual a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles ?

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: apresentar e reconhecer a equação de uma circunferência através de um suporte que utiliza a ideia do seu conceito como lugar geométrico a partir da marcação de pontos no plano cartesiano e utilizar a relação de distância entre pontos para chegar até uma equação. Perceber que as coordenadas de um ponto satisfazem a equação de uma circunferência e realizar manipulações algébricas,como por exemplo o método de completar o quadrado, que permitam obter a equação reduzida de uma circunferência ou a necessidade de conhecê-la para fazer inferências sobre a posição de pontos pertencentes a ela.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, explorar a marcação de um ponto de coordenadas (x,y) qualquer, através de um propriedade comum que os representa, distância entre dois pontos e a equação de um lugar geométrico ,nesse caso específico, uma circunferência.Transformar a equação de um formato para outro.

Estratégias de resolução e formalização: utilizar o recurso gráfico para analisar uma possível solução para o problema, testar pontos que satisfazem a relação de distância dada, utilizar a equação da circunferência para obter informações geométricas sobre os seus pontos.Esse problema também pode ser explorado com auxílio do geogebra e manipulação das suas ferramentas de construção para responder às interrogativas do problema.

Resolução proposta:

a) Esse item pode ser resolvido ao representar graficamente os pontos dados. É importante destacar que o ponto P(x, y), posição do bombeiro ainda não está determinada e que ao variar os valores dessas coordenadas sua posição se altera, mas deve-se respeitar a propriedade $d_{PA} = 2.d_{PB}$.

b) Ao utilizarmos a relação $d_{PA} = 2.d_{PB}$ obtemos que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-30)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4[x^2 - 60x + 900 + y^2] \Rightarrow x^2 + y^2 - 80x + 1200 = 0$$

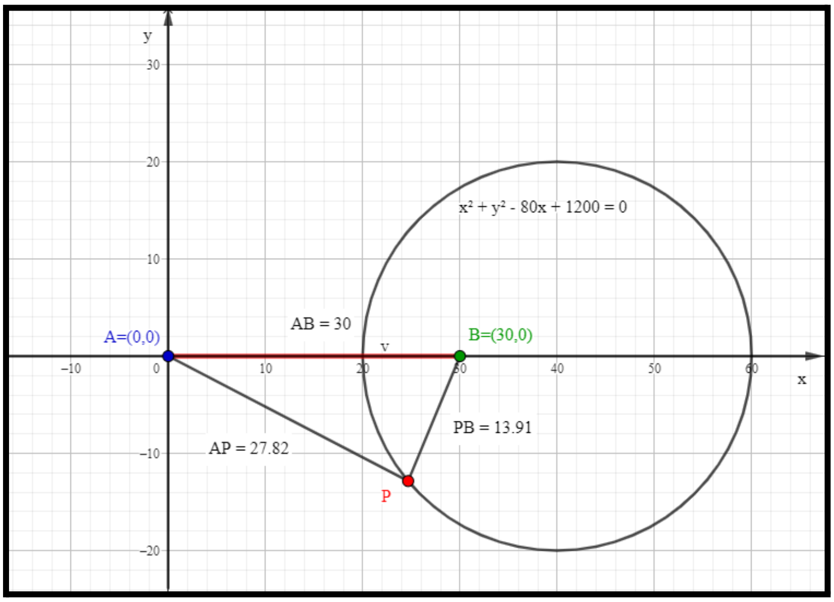
Essa equação geral de uma circunferência modela a relação, logo a posição de cada bombeiro, pertence a esse lugar geométrico de pontos.

c) A maior distância em metros que podemos obter entre dois bombeiros P, ou seja, que satisfazem a equação da circunferência obtida no item b) é dado pelo diâmetro dessa circunferência. Para isso, basta encontrar seu centro e seu raio que podem ser obtidos *transformando a equação do formato geral para o reduzido. Fazendo isso, obtemos a equação:*

$(x - 40)^2 + y^2 - 1600 + 1200 = 0 \Rightarrow (x - 40)^2 + y^2 = 400.$

Logo, seu centro é (40,0) e seu raio igual a 20. Veja a construção na Figura 10 a seguir:

Figura 10 - Resolução Geométrica do Problema de aprofundamento 2.2

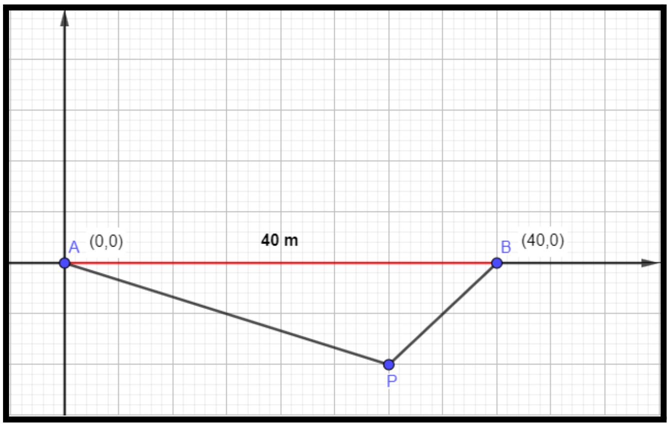


Fonte: o autor, 2023.

<u>Problema Aprofundamento 2.3:</u> a equação reduzida e geral da circunferência

(ENEM 2018-Adaptada) Vamos supor que a questão tivesse indicado que os focos de incêndio estavam a 40 metros de distância um do outro e os bombeiros deveriam ficar a uma distância do ponto A que fosse o triplo da distância ao ponto B, conforme mostra a Figura 11 a seguir.

Figura 11- Posição P do bombeiro e os focos de incêndio



Fonte: o autor, 2023.

a) Desenvolva a fórmula envolvendo a distância entre os pontos $d_{PA} = 3.d_{PB}$ até encontrar uma equação do tipo $x^2 + y^2 - 90x + 1800 = 0$.

b) Compare a fórmula obtida com a forma genérica da equação geral de uma circunferência:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ **(forma genérica).**

$x^2 + y^2 - 90x - 0y + 1800 = 0$ **(equação da circunferência).**

Agora, siga os passos para obter as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência.

▸ Para determinar a abscissa a do centro da circunferência, iguale os coeficientes de x em ambas as equações e encontre o valor de a.

▸ Para encontrar a ordenada b do centro da circunferência, iguale os coeficientes de y em ambas as equações e encontre o valor de b.

▸ Para determinar a medida do raio, substitua os valores de a e de b no termo independente da forma genérica $a^2 + b^2 - r^2$ e iguale ao termo independente da equação da circunferência.

c) Escreva a equação reduzida da circunferência na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: apresentar e reconhecer a equação de uma circunferência através de um suporte que utiliza a ideia do seu conceito como lugar geométrico a partir da marcação de pontos no plano cartesiano e utilizar a relação de distância entre pontos para chegar até uma equação. Perceber que as coordenadas de um ponto satisfazem a equação de uma circunferência e realizar manipulações algébricas. Definir a equação de uma circunferência através de expressões algébricas dadas seguindo um roteiro de construção. Provocar a percepção das relações entre as manipulações algébricas a partir de um dado geométrico e perceber os registros de representação realizadas e suas respectivas conversões.Verificar que a partir da equação geral da circunferência pode-se obter o seu centro e raio manipulando os coeficientes e a relação entre eles com cada um dos elementos principais de uma circunferência.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, explorar a marcação de um ponto de coordenadas (x,y) qualquer, através de um propriedade comum que os representa, distância entre dois pontos e a equação de um lugar geométrico ,nesse caso específico, uma circunferência.Transformar a equação de um formato para outro.

Estratégias de resolução e formalização: utilizar o recurso gráfico para analisar uma possível solução para o problema,testar pontos que satisfazem a relação de distância dada, utilizar a equação da circunferência para obter informações geométricas sobre os seus pontos.Esse problema também pode ser explorado com auxílio do geogebra e manipulação das suas ferramentas de construção para responder às interrogativas do problema.

Resolução proposta:

a) Ao utilizarmos a relação $d_{PA} = 3.d_{PB}$ obtemos que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{(x - 40)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9[x^2 - 80x + 1600 + y^2]$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 90x + 1800 = 0$

Essa equação geral de uma circunferência modela a relação, logo a posição de cada bombeiro, pertence a esse lugar geométrico de pontos.

b) Neste item basta fazer -2a=-90; -2b=0 e obter assim a=45 e b=0. Após essa equivalência, utilizar a relação $a^2 + b^2 - r^2$ *para obter o raio r da circunferência, como a seguir e obter a equação reduzida. Nota-se que nesse caso, obtemos as coordenadas do seu centro O, dada por O=(45,0).*

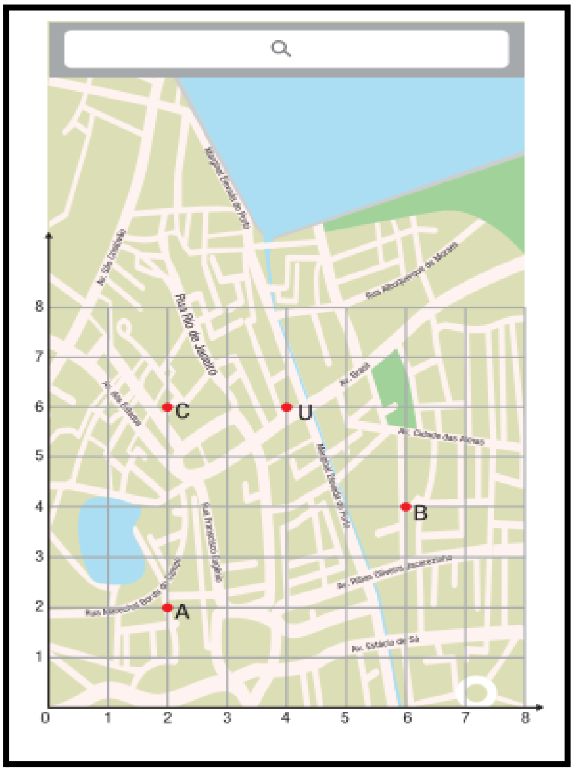
$$a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow 45^2 + 0^2 - r^2 = 1800 \Rightarrow 2025 - r^2 = 1800 \Rightarrow r^2 = 225 \Rightarrow r = 15.$$

c) Basta escrever a equação da circunferência no formato reduzido

Problema Aprofundamento 2.4: a equação reduzida e geral da circunferência

(Coleção Sistema Positivo de Ensino 2021 Livro 10) No âmbito da tecnologia de comunicação, um dos segmentos mais prósperos é o do desenvolvimento e produção de aplicativos para smartphones dotados de sistema operacional capaz de rodar programas desenvolvidos com as mais variadas finalidades. Um aplicativo surgido recentemente promete ajudar a lidar com um dos maiores problemas enfrentados pelos usuários: estar em um lugar em que não haja sinal de telefonia celular e, portanto, ficar incomunicável. O programa mostra na tela do aparelho as localizações das torres de diferentes operadoras presentes nas redondezas. Em certa ocasião, o programa forneceu ao usuário a tela a seguir onde estão representados os pontos A, B, C e U. Observe o desenho dessa tela.

Figura 12 - Torres de Operadoras de telefonia no plano cartesiano



Fonte:Sistema Positivo de Ensino,2021.

No mapa, a torre da operadora A tem o raio de alcance de 2 unidades, o da operadora B de 3 unidades e o da operadora C de 1 unidade. O ponto U corresponde à localização do usuário. Utilizando essa tela e o plano cartesiano representado nela, responda cada item que segue.

a) Determine a equação de cada uma das circunferências que delimitam as regiões cobertas pelas torres A, B e C.

b) Verifique se o usuário está dentro da região coberta por cada uma das antenas.

c) Classifique as afirmativas a seguir em V para as verdadeiras e F para as falsas. Justifique suas respostas.

( ) Pode-se dizer que o ponto U é interior a apenas uma das circunferências que delimitam as regiões cobertas pelas torres A, B e C.

( ) Se o usuário estivesse localizado no ponto de coordenadas (4, 2), estaria em uma região coberta tanto pela antena A quanto pela antena B.

( ) A distância do usuário à torre C é menor do que à torre B, mas U é ponto exterior à circunferência que delimita a região coberta pela torre C.

( ) Se o usuário estivesse no ponto de coordenadas (3, 5), estaria fora da área de cobertura das três antenas.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: apresentar e reconhecer a equação de uma circunferência através de um suporte que utiliza a ideia do seu conceito como lugar geométrico a partir da marcação de pontos no plano cartesiano e utilizar a relação de distância entre pontos para chegar até a equação de uma circunferência. Trabalhar com a ideia de posição relativa entre pontos e circunferências e as relações de pertencimento para essas duas Figuras geométricas.Explorar a percepção de localização de pontos no plano cartesiano utilizando a representação gráfica ou a algébrica, realizando manipulação ou troca de registros entre elas.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, explorar a marcação de um ponto de coordenadas (x,y) qualquer, através de um propriedade comum que os representa, distância entre dois pontos e a equação de um lugar geométrico ,nesse caso específico, uma circunferência.Posição relativa entre ponto e circunferência.

Estratégias de resolução e formalização: utilizar o recurso gráfico para analisar uma possível solução para cada afirmativa,testar pontos que satisfazem a relação de distância dada, utilizar a equação da circunferência para obter informações geométricas sobre os seus pontos.Esse problema também pode ser explorado com auxílio do geogebra e manipulação das suas ferramentas de construção para responder às interrogativas do problema.

Resolução proposta:

a) Para obter cada uma dessas equações basta utilizar a forma reduzida da equação da circunferência para cada torre, uma vez que, a posição de cada uma delas na Figura representa é o centro de cada circunferência e raio é dado pela alcance de cada uma delas.Assim, segue que:

Para torre A

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Para torre B

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Para torre C

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 1^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 1.$$

b) Neste item pode ser feita a substituição das coordenadas do usuário U_1=(4,6) em cada uma das três equações definidas no item a) com o objetivo de verificar se o mesmo pertence ao lugar geométrico definido por cada uma delas. Uma outra boa estratégia é fazer a representação gráfica de cada circunferência e verificar a posição do usuário em relação a cada uma delas. Além disso, a ideia de calcular a distância do centro de cada uma delas até *o usuário, permite verificar sua posição em relação à área de cobertura. Assim seguem as soluções:*

Usuário U_1 *em relação a torre A*

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (4 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow 20 \neq 4.$$

Logo, U_1 *não está sobre a borda da circunferência e após a área de cobertura pois* $\sqrt{20} > 2$.

Usuário U_1 *em relação a torre B*

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9 \Rightarrow (4 - 6)^2 + (6 - 4)^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow 8 \neq 9.$$

Logo, U não está sobre a borda da circunferência e dentro da área de cobertura pois $\sqrt{8} < 3$.

Usuário U_1 *em relação a torre C*

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 1 \Rightarrow (4 - 2)^2 + (6 - 6)^2 = 4 + 0 = 4 \Rightarrow 4 \neq 1.$$

Logo, U_1 *não está sobre a borda da circunferência e após a área de cobertura pois* $2 > 1$.

c) Para responder a cada um desses itens, pode-se basear nos resultados obtidos no item b) desta forma teremos a sequência de respostas:

Item I- *Verdadeiro - apenas a área da torre B .*

Item II *- Verdadeiro - para ambas as torres A e B.*

Nesse caso é necessário fazer a substituição considerando a nova posição do usuário U_2*=(4,2) para as torres A e B assim segue que:*

Usuário U_2 *em relação a torre A*

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (4 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 4 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4.$$

Logo, U_2 *está sobre a borda da circunferência e dentro da área de cobertura pois* $\sqrt{4} = 2$.

Usuário U_2 *em relação a torre B*

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9 \Rightarrow (4 - 6)^2 + (2 - 4)^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow 8 \neq 9.$$

Logo, U_2 *não está sobre a borda da circunferência e dentro da área de cobertura pois* $\sqrt{8} < 3$.

Item III*- Verdadeiro - pois* $2 < \sqrt{2}$ *resultados já calculados no item a).*

Item IV- *Verdadeiro - basta calcular as distâncias de* U_3*=(3,5) até os respectivos centros de A,B e C.*

Nesse caso é necessário fazer a substituição considerando a nova posição do usuário U_3*=(3,5) para as torres A ,B e C assim segue que:*

Usuário U_3 em relação a torre A

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (3 - 2)^2 + (5 - 2)^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow 10 \neq 4.$$

Logo, U_3 não está sobre a borda da circunferência e fora da área de cobertura pois $\sqrt{10} > 2$.

Usuário U_3 em relação a torre B

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9 \Rightarrow (3 - 6)^2 + (5 - 4)^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow 10 \neq 9.$$

Logo, U_3 não está sobre a borda da circunferência e fora da área de cobertura pois $10 > 3$.

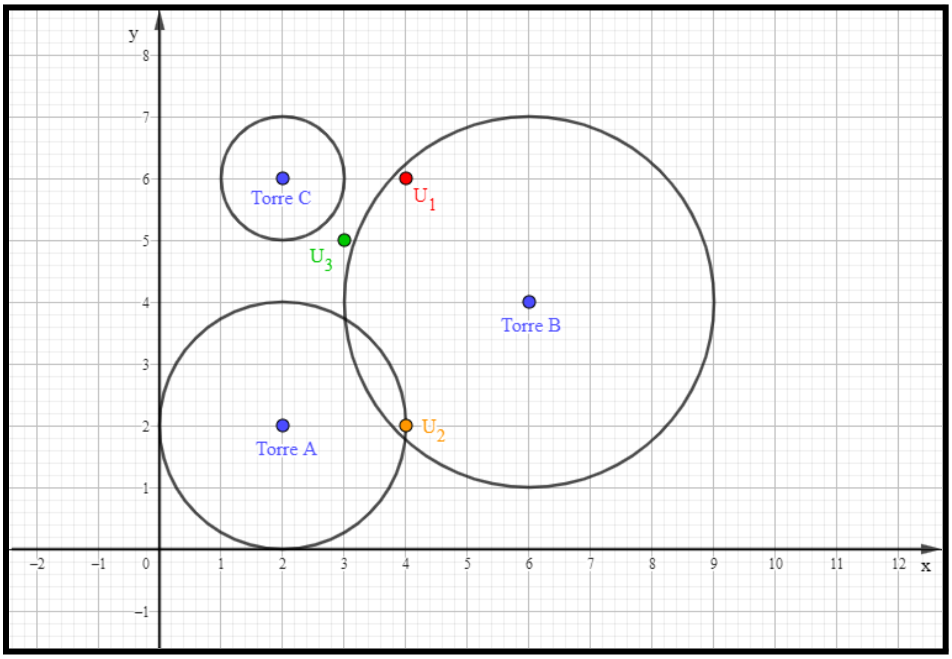
Usuário U_3 em relação a torre C

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 1 \Rightarrow (3 - 2)^2 + (5 - 6)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \neq 1.$$

Logo, U_3 não está sobre a borda da circunferência e fora da área de cobertura pois $2 > 1$.

Uma solução alternativa seria desenhar as áreas de coberturas das três torres e observar as diferentes posições para o usuário.Conforme a Figura 13 a seguir:

Figura 13 - Representação do alcance do sinal das torres de tranmissão



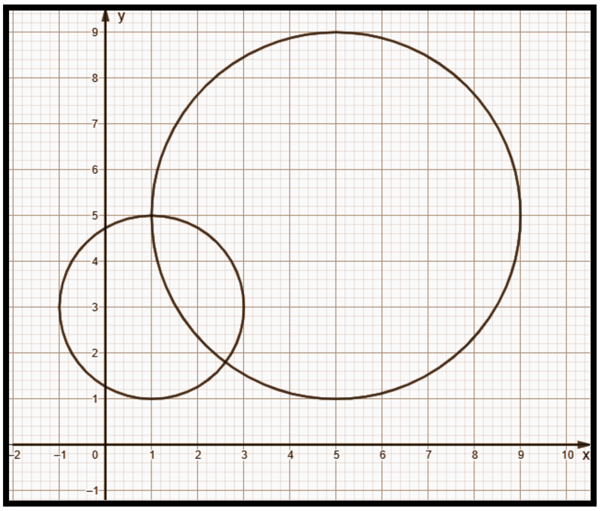
Fonte:o autor, 2023.

<u>Problema Gerador 3:</u> posição relativa entre circunferências

Considere as equações das circunferências

C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ e C_2: $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$ e observe suas representações gráficas no plano cartesiano da Figura 14 a seguir:

Figura 14 - Problema Gerador 3



Fonte: o autor, 2023

A partir das circunferências representadas no plano cartesiano da Figura 1, responda:

a) Qual das circunferências representadas é C_1 e qual é a circunferência C_2? Assinale-as na Figura e explique como você identificou cada uma delas.

b) As circunferências C_1 e C_2 possuem pontos de intersecção. É possível, a partir das informações dadas, determinar as coordenadas desses pontos de interseção? Caso sua resposta seja positiva, determine-as justificando sua resposta.

c) Encontre a equação da reta determinada por esses dois pontos de interseção. Em seguida, represente graficamente essa reta na Figura 1.

d) Mostre que a interseção da reta determinada no item c) com C_1 e com C_2 são os pontos de interseção entre essas duas circunferências.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: reconhecer os elementos de uma circunferência através da sua equação e fazer sua a interpretação gráfica.Associar a intersecção entre duas circunferências a solução de um sistemas de equações e reconhecer suas possíveis soluções como pontos de interseção entre essas Figuras. Representar graficamente e determinar a equação de uma reta, dados dois pontos de seus e correlacionar a interseção de uma reta e uma circunferência com um sistema de equações formado pelas suas equações. Estudar as diferentes posições relativas entre circunferências e retas no plano cartesiano.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, posição relativa entre circunferências e sistemas de equações.

Estratégias de resolução e formalização: definir e representar cada elemento das circunferências dadas através de suas equações, resolver o sistema de equações formado e definir as intersecções procuradas. Escrever a equação de cada circunferência em um software de construção geométrica e utilizar as ferramentas de intersecção entre objetos e verificar os pontos procurados além de representar graficamente a reta a ser determinada.

Resolução proposta:

a) Para identificar as circunferências C_1 e C_2, pode-se encontrar o centro e raio de cada uma delas a fim de classificá-las na Figura dada como suporte. Assim, temos:

Para C_1:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 1 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Logo, o centro de C_1 é o ponto $O_1 = (1, 3)$ e seu raio é igual a 2.

Para C_2:

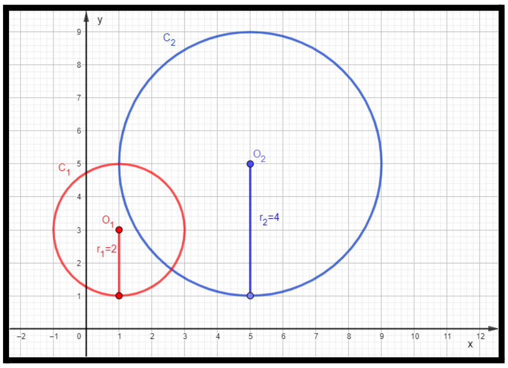
$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 - 10y + 25 - 25 + 34 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 - 25 - 25 + 34 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 16.$$

Logo, o centro de C_2 é o ponto $O_2 = (5, 5)$ e seu raio é igual a 4. Então a partir dessas informações é possível determinar qual é cada uma das circunferências representadas na Figura 59 suporte, definido conforme a seguir:

Figura 15 - Representação gráfica das circunferências problema de aprofundamento 3



Fonte: o autor, 2023.

b) As intersecções podem ser obtidas ao resolver o sistema de equações formado por elas. Vale destacar que os pontos de interseção podem ser obtidos realizando estimativas que posteriormente podem ser verificadas nas equações dadas ao substituir suas coordenadas. Assim, resolvendo esse sistema temos que:

$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$
$Fazendo\ C_1 - C_2 \Rightarrow 8x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \{H, G\} \Rightarrow C_1 - C_2\ gera\ uma$
$equação\ de\ reta\ que\ é\ determinada\ por\ H\ e\ G.$

Como a equação dada por 8x+4y-28=0 pode ser simplificada e reescrita como 2x+y-7=0 temo que fazer a intersecção entre essa reta e uma das circunferências, C_1 *e* C_2 *.*

Fazendo isso temos:

y=-2x+7

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + (-2x + 7)^2 - 2x - 6(-2x + 7) + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 28x + 49 - 2x + 12x - 42 + 6 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 18x + 13 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau formada temos:

$$5x^2 - 18x + 13 = 0$$
$$\Delta = (-18)^2 - 4.5.13$$
$$\Delta = 324 - 260$$
$$\Delta = 64.$$

Logo, $x = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2.5} = \frac{18 \pm 8}{10} \Rightarrow$ *x=2,6 ou x=1.*

Substituindo ambos os possíveis valores para x em y=-2x+7 temos que:

para x=2,6 ⇒ y=1,8 e para x=1 ⇒ y=5.

Logo, os pontos de interseção H e G serão (1,5) e (2,6;1,8) solução do sistema formado pelas circunferências C_1 *e* C_2*.-+.*

c) A reta h determinada pelo pontos H e G, será da forma:

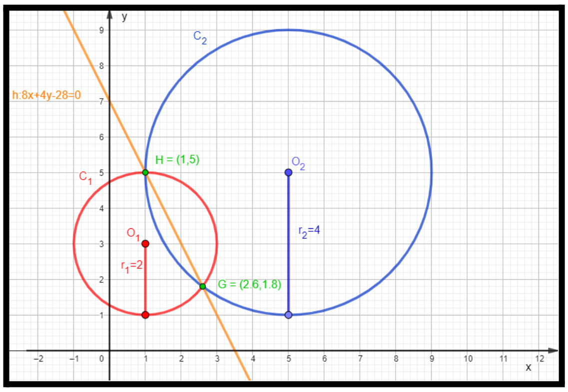
$$y - y_H = m_h.(x - x_H) \Rightarrow y - 5 = m_h.(x - 1).$$

Como o coeficiente angular da reta h é dado por $m_h = \frac{y_G - y_H}{x_G - x_H} = \frac{1,8-5}{2,6-1} = \frac{-3,2}{1,6} = -2 \Rightarrow$

$y - 5 = -2.(x - 1) \Rightarrow y - 5 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 7$ *equação da reta h.*

d) Para mostrar tal propriedade basta resolver o sistema determinada por cada uma das equações C_1 *e* C_2 *e pela reta h . Esse resultado, pode ser descrito pela Figura 16 a seguir:*

Figura 16 - Representação Gráfica da Solução do problema gerador 3



Fonte: o autor, 2023.

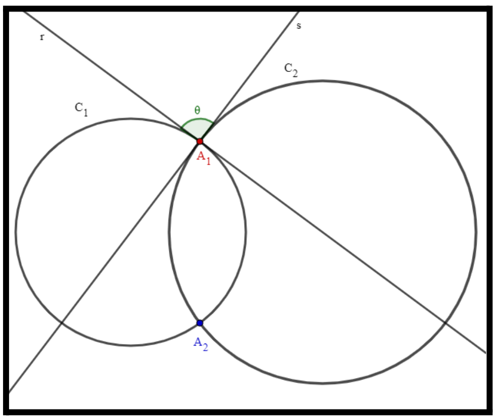
<u>Problema Aprofundamento 3.1:</u> posição relativa entre circunferências

Leia a definição e em seguida faça o que se pede.

Definição - Considere duas circunferências, C_1 e C_2, que se intersectam em dois pontos, A_1 e A_2. Sejam r e s retas que tangenciam, respectivamente, C_1 e C_2 no ponto A_1. O ângulo θ formado por C_1 e C_2 no ponto A_1 é o ângulo formado por r e s no ponto A_1. Se θ for 90°, dizemos que C_1 e C_2 são **circunferências ortogonais**.

Disponível em:http://www.benditamatematica.com/2016/07/circunferencias-ortogonais.html Acesso:24, SET. ,2023.

Figura 17 - Circunferências ortogonais



Fonte: o autor, 2023

Agora considere as circunferências C_1: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ e C_2: $x^2 + y^2 = 9$.

a) Determine se as circunferências C_1 e C_2 são ortogonais. Justifique sua resposta.

b) Considere r_1 e r_2 os raios das circunferências C_1 e C_2, respectivamente, e d a distância entre seus centros. Verifique que $r_1^2 + r_2^2 = d^2$.

c) Considerando quaisquer duas circunferências ortogonais, C_3 e C_4, cujos os raios são r_3 e r_4, respectivamente e d a distância entre os seus centros, é correto afirmar $r_3^2 + r_4^2 = d^2$? Justifique sua resposta.

Ano escolar recomendado: 3ª série do Ensino Médio.

Objetivos: reconhecer os elementos de uma circunferência através da sua equação e fazer sua a interpretação gráfica.Associar a intersecção entre duas circunferências a solução de um sistemas de equações e reconhecer suas possíveis soluções como pontos de interseção entre essas Figuras. Estudar as diferentes posições relativas entre circunferências e retas no plano cartesiano.

Conteúdos abordados: representação gráfica de pontos no plano cartesiano, elementos de uma circunferência, posição relativa entre circunferências e sistemas de equações.

Estratégias de resolução e formalização: definir e representar cada elemento das circunferências através de suas equações, resolver o sistema de equações formado e definir as intersecções procuradas. Escrever a equação de cada circunferência em um software de construção geométrica e utilizar as ferramentas de intersecção entre objetos e verificar os pontos procurados, além de representar graficamente as retas a serem determinadas.

Resolução proposta:

a) Usando a definição dada temos que por etapas determinar os pontos de intersecção A_1 e A_2 determinado pelo sistema de equações a seguir:

C_1: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$

C_2: $x^2 + y^2 = 9$

Fazendo $C_1 - C_2$: $(x - 5)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 16 - 9 \Rightarrow (x - 5)^2 - x^2 = 7.$

Logo, temos a seguinte equação para resolver:

$$(x - 5)^2 - x^2 = 7$$
$$x^2 - 10x + 25 - x^2 = 7$$
$$-10x = 7 - 25 \Rightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Substituindo $x = \frac{9}{5}$ *em* C_2: $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \frac{81}{25} + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{81}{25}.$

$\Rightarrow y^2 = \frac{25.9 - 81}{25}$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{9.(25-9)}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9.(16)}{25}} = \pm\frac{12}{5}.$

São respectivamentes os pontos $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ *e* $\left(\frac{9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$.

Após resolver a equação do 2ºgrau anterior, que possui duas soluções reais, teremos dois pontos de intersecção, o que garante que as circunferências C_1 e C_2 são secantes.

Para determinar a posição relativa entre a retas r e s que passam por $A_1=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$ *, vamos determinar os centros de* C_1 *e* C_2. *Como as equações estão no formato reduzido os centros são respectivamente iguais a:*

$\Rightarrow O_1=(5,0)$ *e* $O_2=(0,0)$.

Dessa forma a reta r é determinada pelos pontos $A_1=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$ *e* $O_2=(0,0)$ *e a segunda reta s é determinada pelos pontos* $A_1=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$ *e* $O_1=(5,0)$ *pois r e s são retas que tangenciam, respectivamente,* C_1 *e* C_2 *no ponto* A_1 *e por consequência passam pelos centros dados.*

Portanto se o produto dos coeficientes angulares das retas r e s for igual a -1, $r \perp s$.

$\Rightarrow m_r . m_s = -1.$

$\Rightarrow m_r = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{12}{9} = \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow m_s = \frac{\frac{-12}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{-12}{16} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{-4}{3} = -1$

Logos, r e s são retas perpendiculares e o ângulo θ formado por C_1 *e* C_2 *no ponto* A_1 *é o ângulo formado por r e s no ponto* $A_1 \Rightarrow \theta = 90°$.

Assim, C_1 *e* C_2 *forma um par de circunferências ortogonais.*

b) Para responder esse item será necessário definir os raios de C_1 *e* C_2 *e distância d entre seus centros então:*

$\Rightarrow r_1 = 4$ *e* $r_2 = 3$.

$\Rightarrow O_1$ *e* O_2 *respectivamentes iguais a* $O_1=(5,0)$ *e* $O_2=(0,0)$.

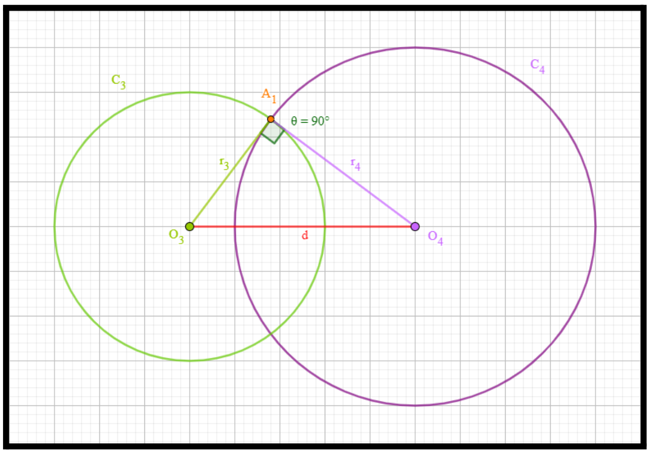
$$\Rightarrow d_{O_1O_2} = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5 \Rightarrow d = 5.$$

Portanto, $r_1^2 + r_2^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = d^2$. *Logo, a relação vale para* C_1 *e* C_2.

c) Como C_3 *e* C_4 *são* ***circunferências ortogonais*** *então o ângulo* α *entre as retas que passam pela intersecção entre elas é de 90°. Como no ponto de tangência entre a reta e a circunferência o raio forma ângulo reto, teremos esse resultado válido para as retas r e s tangentes respectivamente a* C_3 *e* C_4.

Assim, observando a Figura 18 a seguir temos que os raios r_3 e r_4, são os catetos do triângulo retângulo $\triangle\, O_3 O_4 A_1$ *, então a distância d, entre os centros* O_3 *e* O_4*, é a hipotenusa desse triângulo retângulo. Valendo a relação* $r_1^2 + r_2^2 = d^2$.

Figura 18 - Ângulo reto entre as circunferências ortogonais



Fonte: o autor, 2023