CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

WASHINGTON RAIMUNDO DA SILVA

ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Belo Horizonte
2024

WASHINGTON RAIMUNDO DA SILVA

ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora
Jane Lage Bretas

Coorientador
Pedro Henrique Pereira Daldegan

Banca Examinadora
Frederico Augusto Menezes Ribeiro
Edney Augusto Jesus de Oliveira

Belo Horizonte
2024

S586e

Silva, Washington Raimundo da

Ensino de frações através de materiais manipuláveis / Washington Raimundo da Silva. – 2024.

79 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Jane Lage Bretas.

Coorientador: Pedro Henrique Pereira Daldegan.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Frações (Ensino médio) – Teses. 2. Manipulativos (Educação) – Teses. 3. Tangram – Teses. I. Bretas, Jane Lage. II. Daldegan, Pedro Henrique Pereira. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 510.07

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

WASHINGTON RAIMUNDO DA SILVA

ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 19 de setembro de 2024.

Washington Raimundo da Silva
(Autor)

Jane Lage Bretas
(Orientadora)

Belo Horizonte
2024

Dedico essa dissertação à minha esposa Andréa e ao meu filho Natan.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu maravilhoso Deus por tudo que Ele fez por mim durante este curso. Ele me concedeu paz, força, segurança, conforto espiritual e sustento para minha vida e minha família. Saúdo ao Espírito Santo por tantas vezes me ensinar o que não sabia e por me fazer lembrar do que sabia. E agradeço ao meu Jesus, que colocou pessoas capazes no meu caminho para me ajudar.

Agradeço também à minha esposa e ao meu filho, que me apoiaram durante este período de dificuldades e problemas. Eles entenderam a minha ausência, ou não entenderam, mas não me abandonaram. Mesmo com o meu estado emocional não tão bom, eles me suportaram, me deram força e ânimo, sendo o meu porto seguro.

Agradeço aos meus orientadores, que tanto me ajudaram, minha gratidão eterna. Sem eles, eu não teria sequer começado o trabalho que realizei. Primeiramente, agradeço ao Gilmer e à professora Fernanda, que foram meus primeiros orientadores, mas que tiveram que se ocupar de outras questões e comunicaram à Coordenação para que pudessem ser substituídos. Agradeço à Jane e ao Pedro, que me acolheram nesta orientação com muito carinho e amor, fornecendo o suporte necessário para que eu pudesse desenvolver todo este trabalho. Apesar das minhas dificuldades com as tecnologias e a escrita, eles tiveram paciência comigo e me ajudaram, com muita calma e sabedoria.

Agradeço também aos meus outros familiares que, de alguma maneira, contribuíram para que eu pudesse prosseguir. Sem a família, realmente, nós não somos ninguém. Agradeço ao PROFMAT e aos meus colegas de curso que estiveram comigo, especialmente aos meus amigos Josevan e Ronaldo, que me ajudaram em vários momentos. Sou muito grato a eles por tudo. Agradeço também aos outros professores que me ajudaram a chegar até aqui.

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma investigação sobre o ensino das frações em sala de aula, principalmente por meio da análise de livros didáticos, com o foco na compreensão das dificuldades que educadores e educandos enfrentam no processo de ensino e aprendizagem. Analisamos os métodos, figuras, exemplos e exercícios dos livros, tomando como referência as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Embora tenhamos observado que os livros analisados são geralmente bem estruturados, frisamos a importância da utilização de materiais manipuláveis para facilitar a compreensão e a consolidação dos conceitos matemáticos, desde uma abordagem mais elementar até a abstração. Durante a pesquisa, também apresentamos parte da história das frações para fundamentar o estudo. Como produto educacional, foi desenvolvido um conjunto de três oficinas sobre frações, com o objetivo de apoiar os docentes no ensino desse conteúdo, destacando a utilização de materiais manipuláveis, especialmente o Tangram, como recurso didático. Ao final do trabalho, são apresentados os relatos das aplicações junto a professores das redes municipais de Contagem (na Escola Professor Domingos Diniz), Betim (na Escola Maria da Conceição Brito) e Belo Horizonte (na Escola Presidente Itamar Franco).

Palavras-chave: Ensino de frações. Materiais manipuláveis. Tangram.

ABSTRACT

In this work, we will present an investigation into the teaching of fractions in the classroom, mainly through the analysis of textbooks, focusing on understanding the difficulties that educators and learners face in the teaching and learning process. We analyzed the methods, figures, examples, and exercises in the books, using the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC) as a reference. Although we observed that the analyzed textbooks are generally well-structured, we emphasize the importance of using manipulatives to facilitate the understanding and consolidation of mathematical concepts, from a more elementary approach to abstraction. During the research, we also presented part of the history of fractions to support the study. As an educational product, a set of three workshops on fractions was created to assist teachers in teaching this content, highlighting the use of manipulatives, especially Tangram, as a teaching resource. This study concludes with the presentation of implementation reports from workshops conducted with teachers from the municipal school networks of Contagem (Professor Domingos Diniz School), Betim (Maria da Conceição Brito School), and Belo Horizonte (Presidente Itamar Franco School).

Keywords: Teaching of fractions. Manipulatives. Tangram.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto da pesquisa

Ao longo do exercício da docência no Ensino Fundamental, por cerca de 34 anos, deparei-me com situações de alunos que apresentavam dificuldades em aprender e realizar contas envolvendo frações. Alguns compreendiam o conteúdo em um momento, realizavam contas com destreza, mas depois não sabiam reproduzi-las.

A princípio, atribuía essa dificuldade à não familiarização e reconhecimento das frações e suas operações em situações reais ou contextualizadas, e isto me inquietou no sentido de estudar formas mais efetivas de ensinar o conteúdo. Comecei a trabalhar frações no sexto ano utilizando material concreto e aproximei minha prática àquela que era praticada no Ensino Fundamental 1. Pensei que isso contribuiria com a adaptação dos estudantes, e diminuiria a tensão comum dessa faixa etária, mas não sabia se seria suficiente, pois a realidade da aprendizagem de frações por parte dos meus alunos ainda se mostrava deficitária.

Esse cenário desafiador me motivou a investigar as causas subjacentes das dificuldades dos estudantes em compreender o assunto de frações, culminando em uma pesquisa que buscou responder às perguntas que ainda me atormentavam: Por que muitos estudantes têm dificuldades para compreender esse assunto? O que os leva a esquecerem como fazer as operações? Como desenvolver atividades para dirimir essas dificuldades? Quais os impactos de abordagens utilizando materiais manipuláveis no ensino de frações?

Para orientar minhas investigações, consultei a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), para identificar quando é sugerido trabalhar os primeiros conceitos de fração. Inicialmente, acreditava que isso poderia começar já no primeiro ano, quando os alunos aprendem a somar parcelas iguais, avançando para multiplicação e, eventualmente, divisão, associando-a à ideia de dividir algo em partes iguais. No entanto, descobri que as frações são abordadas de forma implícita a partir do segundo ano e explicitamente no quarto ano do Ensino Fundamental.

Em seguida, examinei os livros didáticos incluídos no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para embasar minha pesquisa. Inicialmente, concentrei-me na análise desses livros, com base nas competências e habilidades da BNCC, para entender se as abordagens estavam alinhadas com a faixa etária e a maturidade dos estudantes. Perguntava-me se abordagens eram demasiadamente abstratas para a compreensão dos alunos.

Assim, fazendo uma análise dos livros a partir do quarto ano do Ensino Fundamental, pude perceber que as coleções analisadas são organizadas, ilustradas, oferecem uma abordagem contextualizada, indicam o uso de materiais manipuláveis, além de promoverem uma transição do ensino das séries iniciais para as séries finais com bastante cuidado. Fiquei positivamente surpreso ao me deparar com abordagens baseadas nas vivências dos estudantes e com a busca pela abstração dos conceitos de forma sistemática e gradativa.

A partir daí comecei a procurar publicações de livros paradidáticos que falassem do assunto. Nos livros da Luzia Faraco Ramos, "Doces Frações" e "Frações Sem Mistérios", encontrei uma abordagem de frações com material concreto e com atividades que me despertaram muito para o trabalho com materiais manipuláveis.

Esse despertar me levou a pensar no Tangram, que consiste de um quebra-cabeça com peças coloridas. Pensei em utilizá-lo no ensino de frações, e no desenvolvimento de algumas atividades para aplicar com meus alunos e testar sua eficácia. Ao procurar em dissertações e artigos que falassem mais sobre a utilização do Tangram, descobri muitos trabalhos que eram realizados utilizando esse recurso, tais como Santos (2019), Morais (2012) e Facchi (2012).

Assim, pensei em criar uma atividade dividindo o quadrado do Tangram em partes compostas apenas de triângulos e quadrados, para trabalhar frações e só depois utilizar o Tangram tradicional. Ao pesquisar na Internet sobre tipos de Tangram, descobri a existência de vários, e assim comecei a criar materiais manipuláveis, para serem utilizados em sala de aula.

Contudo, no decorrer do desenvolvimento do projeto, julguei mais adequado e abrangente criar um produto voltado para professores de Matemática do Ensino Fundamental. Sendo assim, criei três oficinas para trabalhar com esses professores e apresentar uma maneira alternativa de ensinar frações através de materiais manipuláveis, mais especificamente fazendo uso de Tangrans.

1.2 Organização da dissertação

A dissertação foi organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 é apresentada uma visão sucinta da história das frações, contextualizando sua evolução e importância no desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos. O texto relata como o conceito de frações foi introduzido e ensinado em diferentes culturas e épocas, permitindo uma reflexão crítica sobre as práticas atuais.

No Capítulo 3 é realizada a análise de alguns livros didáticos do PNLD, comumente utilizados em escolas públicas em Minas Gerais, orientadas pelas competências e habilidades da BNCC.

No Capítulo 4 é realizado um estudo sobre materiais manipuláveis, definindo este conceito, e abordando como esses materiais podem ser utilizados no ensino de frações.

No Capítulo 5 há uma sequência de três oficinas sobre o ensino das frações, utilizando materiais manipuláveis. As atividades propostas aos professores visam fornecer um complemento ao ensino tradicional de frações, utilizando materiais manipuláveis. Na sequência, são realizados os relatos das aplicações de cada uma dessas oficinas.

No Capítulo 6 são apresentadas as Considerações Finais.

2 A HISTÓRIA DAS FRAÇÕES

A evolução das frações pode ser comparada à própria evolução da humanidade, pois a Matemática sempre foi usada pelo homem para ajudá-lo a resolver problemas práticos. Tendo como referências principais Boyer (1974), Eves (2011) e Darela (2011), neste capítulo vamos falar resumidamente da história das frações, desde as suas origens na antiguidade, nas regiões da Ásia e África, chegando à Europa e aos povos das Américas, recebendo influência destes povos em diferentes épocas.

2.1 Origem das frações na antiguidade

Diversos autores apontam que não se sabe ao certo qual a origem das frações, visto que o homem só foi capaz de realizar registros escritos por volta de 3500 AEC (Antes da Era Comum). Neste sentido,

> Segundo BOYER (2012), não se pode afirmar nada sobre a origem da matemática, seja aritmética, seja da geometria, afinal, seu princípio é mais antigo do que a arte de escrever. Não se podem apontar épocas e datas exatas pela falta registros das civilizações antigas. Isso não é diferente com as frações. (BOYER *apud* CELESTINO, 2017, p. 8)

Os primeiros registros do uso de frações datam de aproximadamente 2000 AEC no Egito antigo, e chegaram até nós através do Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes). Este consiste de um documento egípcio, em que um escriba de nome Ahmes descreve métodos de multiplicação e divisão, frações, cálculo de área, volumes, dentre outros aspectos da Matemática egípcia. Conforme relata Eves:

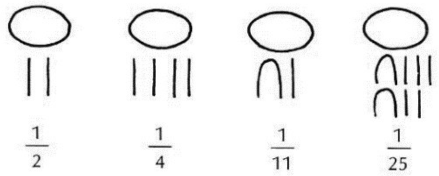
> O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2011, p. 70)

Pode-se mencionar outro documento egípcio de importância relevante para a Matemática, com menos amplitude que o Papiro de Rhind, e do mesmo período. Trata-se do Papiro de Moscou, que tem quase o mesmo comprimento do Papiro de Rhind, mas apenas um quarto de largura. Foi escrito com menos detalhes, por um escriba desconhecido, e possui 25 exemplos de problemas de ordem prática (BOYER, 1974, p. 14).

De acordo com Darela (2011, p. 92), as primeiras referências históricas que temos sobre as frações são advindas das divisões de terra que aconteciam em torno do rio Nilo, no Egito. O rio Nilo subia muito nas cheias e a água derrubava as cercas de pedras feitas pelos donos das terras. Assim, os funcionários, chamados de estiradores de cordas, utilizavam uma corda com nós, em que a distância entre dois nós representava uma unidade, para fazerem uma nova medição do terreno. Nesse processo, era muito difícil as novas medidas serem números inteiros. Esse problema fez com que os egípcios criassem um novo tipo de número, o fracionário (DARELA, 2011, p. 35).

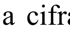
Os egípcios utilizavam quase que exclusivamente frações unitárias (frações de numerador um). Quando tinham que representar outras frações, eles faziam isso através de somas. Assim, a fração 7/8 seria representada pela soma 1/2 + 1/4 + 1/8. Para representar as frações unitárias, eles utilizavam uma figura oval alongada sobre o denominador, conforme representado na Figura 1.

Figura 1: As frações Egípcias



Fonte: História da Matemática (Darela *et al*, 2011, p. 36)

Ainda sobre a utilização das frações pelos egípcios, Boyer relata que

> Os homens da idade da pedra não usavam frações, mas com o advento das culturas mais avançadas durante a idade do bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias - isto é, com o numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. a fração 1/8 aparecia então como um  e 1/20 como . Na notação hierática dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocando sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita no caso do recíproco de um número multidígito).
> [...]
> Passagens como essa indicam que os egípcios tinham alguma percepção de regras gerais e método de alcance mais amplo que o caso específico tratado, e isso representa um passo importante no desenvolvimento da matemática. (BOYER, 1974, pp. 9-11)

Os babilônios, contemporâneos dos egípcios, usavam um sistema de numeração sexagesimal (base 60), que também incluía frações. Eles eram capazes de realizar cálculos complexos com frações, como resolver equações quadráticas. Um exemplo de seu conhecimento matemático pode ser encontrado nas tábuas de argila, onde registravam cálculos de áreas e volumes usando frações sexagesimais (EVES, 2011, p. 60).

Além disso, os babilônios demonstraram grande habilidade na criação de algoritmos para encontrar raízes de equações, bem como em cálculos envolvendo operações aritméticas básicas e tabelas exponenciais. Segundo Boyer (1974), os babilônios também utilizavam tabelas como auxílio para a álgebra avançada da época, como as tabelas de n^2+n^3 para valores inteiros de n. Em relação à álgebra, eles também apresentavam soluções para equações quadráticas usando uma abordagem flexível, que incluía a adição ou multiplicação de um determinado termo em ambos os lados da equação, além de outras técnicas algébricas (BOYER *apud* CHAQUIAM, 2017, pp. 51-52).

Por fim, é importante mencionar que a Babilônia apresentou um maior nível em sua Matemática quando comparada ao Egito antigo. De fato, "Contrariamente à opinião popular, a Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia." (EVES, 2011, p. 67).

2.2 Desenvolvimento na Grécia antiga

Na Grécia antiga, matemáticos como Euclides e Arquimedes contribuíram significativamente para a teoria das frações. Euclides, em seu trabalho "Os Elementos", estabeleceu fundamentos rigorosos para a Matemática que incluíam a manipulação de razões e proporções, conceitos intimamente relacionados às frações. Arquimedes usou frações para aproximar o valor de pi e calcular áreas e volumes de figuras geométricas. Neste sentido,

> O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872. As abordagens de razões e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas. (EVES, 2011, p. 107)

2.3 Contribuições indianas e árabes

A história e desenvolvimento da Matemática indiana carece de registros históricos que possam mensurá-la com precisão. As fontes mais antigas datam de 5.000 anos e são de uma cidade em ruínas, como explica Eves:

> Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática hindu-antiga, em virtude da falta de registros históricos autênticos. A fonte histórica preservada mais antiga são as ruínas de uma cidade de 5.000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão. (EVES, 2011, p. 247)

No decorrer dos anos a Índia foi alvo de invasões diversas, mas isso não impediu o surgimento de matemáticos importantes. O mais relevante dentre eles foi o matemático Aryabhata, cuja obra mais conhecida, chamada Aryabhatyia, falou sobre Astronomia e Matemática (BOYER, 1978, p. 153).

Outros nomes de relevância da história da Matemática hindu são: Brahmagupta, que viveu no século VII e escreveu um trabalho de Astronomia em 21 capítulos; Mahãvíra, que ascendeu em meados de 850 e escreveu sobre Matemática elementar; e Bhaskara, que teve seu trabalho publicado em 1.150, com as partes mais importantes tratando sobre aritmética e álgebra (EVES, 2011, p. 251).

O que podemos observar no trabalho dos indianos são aspectos gerais da Matemática, sem uma especificidade direcionada para as frações, mas suas descobertas, principalmente sobre aritmética e álgebra, foram importantes para a evolução da Matemática e de toda a concepção das frações. Essa ausência de profundidade em alguns temas é assim explicada por Boyer:

> Mesmo quando os hindus emprestavam dos gregos, eles adaptavam um material ao seu estilo peculiar. Embora em atitude e interesse estivessem mais em comum com os chineses, não compartilhavam da fascinação que esses tinham por boas aproximações, como as que levaram ao método de Horner. E embora compartilhassem com os mesopotâmicos sua visão preponderantemente algébrica, tendiam a evitar a numeração sexagesimal. Em resumo, os ecléticos matemáticos hindus adotaram e desenvolveram só os aspectos lhes agradaram. (BOYER, 1974, p. 163)

Conforme relata Struik (1992, p. 118), a principal e mais relevante contribuição dos hindus para a história da Matemática é justamente nosso atual sistema de posição decimal. Os matemáticos árabes, como Al-Khwarizmi, que viveu no século IX, foram responsáveis por traduzir e expandir o conhecimento matemático indiano e grego (DARELA, 2011, p. 65).

Al-Khwarizmi, conforme relata o portal IQARA ISLAM (2024), "[…] colocou o trabalho em terra para a álgebra e encontrou métodos para lidar com problemas matemáticos complexos, como raízes quadradas e frações complexas.". Além disso, ele não foi o único matemático árabe a contribuir para o desenvolvimento das frações. Abu Kamil, conhecido como "O Calculador", também fez avanços significativos, especialmente em frações algébricas e irracionais. Sua obra "Álgebra" influenciou fortemente os matemáticos europeus durante a Idade Média (DARELA, 2011).

Boyer (1978, p. 178) menciona que a contribuição árabe para a Matemática foi mais relevante antes de 1436 pois, após esse período, as contribuições árabes foram praticamente irrelevantes e houve uma ascensão da Matemática na Europa.

2.4 Padronização na Europa medieval

Durante a Idade Média, o conhecimento matemático que os árabes construíram antes de 1436 foi introduzido na Europa através de traduções de textos científicos. A obra de Fibonacci, "Liber Abaci" (1202), foi fundamental para disseminar o uso de frações na Europa. Fibonacci apresentou a notação hindu-arábica, que incluía frações decimais, e mostrou como realizar cálculos aritméticos com essas frações (DARELA, 2011).

A padronização das frações na Europa foi um processo gradual. Havia resistência de parte do público e dos clássicos, que não aceitavam a inserção dos números indianos e árabes. A introdução do sistema de numeração hindu-arábico na Europa medieval, através dos árabes, marcou um ponto de virada significativo. Este sistema, que incluía um método posicional e a utilização do zero, facilitou cálculos mais complexos, incluindo frações. A tradução dos trabalhos de Al-Khwarizmi no século XII foi particularmente influente nesse contexto (BOYER, 1974, p. 226-230).

As escolas monásticas e catedrais desempenharam um papel crucial na disseminação e padronização dos conhecimentos matemáticos. Durante este período, a Matemática era parte integrante do *quadrivium*, que consistia das ciências aritmética, geometria, música e astronomia (STRUIK, 1992, p. 134).

A invenção da imprensa no século XV acelerou esse processo de padronização. Obras como "Summa de arithmetica", de Luca Pacioli (1494), tornaram-se amplamente disponíveis e influenciaram profundamente a educação Matemática, sistematizando a aritmética, incluindo frações (STRUIK, 1992, pp. 130-150).

Nos séculos seguintes, matemáticos europeus como Simon Stevin e John Napier continuaram a desenvolver e refinar a notação e os métodos para trabalhar com frações. Stevin, em sua obra "De Thiende" (1585), introduziu o uso sistemático de frações decimais na Europa, argumentando que elas eram mais práticas e eficientes para cálculos matemáticos e científicos. Segundo Struik, a introdução das frações decimais por Stevens foi um passo crucial na evolução da Matemática moderna (STRUIK, 1992, pp. 152-153).

A evolução das frações e a padronização da Matemática na Europa medieval foram processos complexos influenciados por trocas culturais, principalmente com os hindus e árabes. Nós destacamos a importância da disseminação do conhecimento e das tecnologias de impressão na formação da Matemática moderna, com a disseminação de livros para o ocidente, em tradução acessível.

2.5 Frações no ensino moderno

Com a Revolução Científica e a subsequente Era Moderna, as frações se tornaram uma parte essencial da educação Matemática. Livros didáticos passaram a incluir seções dedicadas ao ensino de frações, e métodos pedagógicos foram desenvolvidos para ajudar os alunos a compreender e aplicar frações em diversos contextos.

No século XVI foram grandes os avanços nos estilos de explicação dos fatos naturais e na economia, principalmente na Europa. Os europeus criaram uma série de metas para a educação, sendo a principal delas a criação de uma escola acessível, de um jeito que pudessem responder à nova ordem social e econômica do colonialismo emergente, após a padronização dos números. Essa é a origem da didática moderna (D'AMBROSIO, 2001, p. 64).

No século XX, existe uma busca para a evolução do ensino da Matemática e das frações, com grande apelo aos materiais manipuláveis e jogos educativos. D'Ambrosio (2001) propôs abordagens concretas para o ensino de Matemática e consequentemente de frações, enfatizando a importância de manipular objetos físicos para entender conceitos abstratos. O autor defende que materiais manipuláveis permitem aos alunos experimentar o aprendizado de maneira tangível. Ele argumentava que o uso de materiais manipuláveis ajuda a criar uma ponte entre a experiência concreta e o pensamento abstrato. (D'AMBROSIO, 2001).

Quando se trata da evolução da Matemática e de como o conhecimento pode ser adquirido pelo aprendiz, D'Ambrosio destaca que atualmente a ciência da cognição busca entender os fatores de interação do sujeito com seu ambiente.

> Nos últimos 50 anos nota-se um impressionante desenvolvimento da moderna ciência da cognição, que é um amálgama, dentre outras coisas, psicologia, biologia, inteligência artificial, linguística, filosofia. Vê-se quando comparado a psicologia experimental, há uma atenção excessiva com os processos mentais internos. Hoje a própria ciência da cognição procura entender os fatores que permitem a interação do sujeito com seu ambiente. (D'AMBROSIO, 2001, p. 54)

A partir dessa afirmação do autor, já podemos perceber que a moderna forma de ensino já procura ter uma visão mais profunda, na intenção de que o ensino tenha interação com o indivíduo e seu ambiente.

D'Ambrosio também destaca a quantidade de estilos de aprendizagem, e essa quantidade de estilos necessita de novas metodologias, que necessariamente precisam ter flexibilidade, para selecionar os amplos conteúdos e também propor novas maneiras de ensinar. Neste sentido:

> Igualmente o reconhecimento de uma variedade de estilos de aprendizagem está implícito no apelo ao desenvolvimento de novas metodologias. Essencialmente essas considerações determinam a enorme flexibilidade tanto na seleção de conteúdos quanto na metodologia de ensino. (D'AMBROSIO, 2001, p. 63)

No final do século XX e início do século XXI, a tecnologia começou a desempenhar um papel importante no ensino. *Softwares* educativos, aplicativos móveis e plataformas de aprendizado online foram desenvolvidos para oferecer experiências interativas e personalizadas aos alunos.

Aplicativos como "*Slice Fractions*" e "*Fraction Circles*" permitem que os alunos visualizem e manipulem frações em um ambiente digital, proporcionando uma maneira inovadora de aprendizado.

2.7 Desafios e perspectivas futuras

Apesar dos avanços no ensino de frações, desafios persistem. Muitos alunos ainda encontram dificuldades para entender frações devido à sua natureza abstrata. Pesquisadores continuam a explorar novas metodologias e tecnologias para tornar o aprendizado de frações mais acessível e eficaz. Segundo a pesquisa contínua em educação Matemática é crucial desenvolver práticas pedagógicas que atendam às necessidades de todos os alunos (D'AMBROSIO, 2001). Assim, a colaboração entre educadores, pesquisadores e desenvolvedores de tecnologia é essencial para enfrentar esses desafios.

O que se percebe é que a história das frações é um testemunho da engenhosidade humana na busca por soluções para problemas matemáticos e práticos. Desde as frações unitárias dos egípcios, até a notação decimal moderna, cada avanço na compreensão e utilização das frações representou um passo importante no desenvolvimento da Matemática.

As frações não são apenas um conceito matemático, mas também uma ferramenta indispensável em diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. O seu ensino, através de métodos não tradicionais e inovadores, garantem que futuras gerações possam continuar a usar essa ferramenta com eficácia e compreensão.

No capítulo seguinte, abordaremos como o conteúdo de frações aparece nos livros didáticos e em documentos norteadores nacionais da educação brasileira.

3 ENSINO DE FRAÇÕES

Este capítulo analisa como os livros didáticos de diferentes coleções indicadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) abordam o ensino de frações do 4° ao 7° ano do Ensino Fundamental. A análise inclui estratégias e recursos utilizados para ensinar frações, números racionais, operações e conceitos relacionados presentes nas habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

3.1 Segundo a BNCC, quando ensinar frações?

A BNCC estabelece uma base de competências e habilidades que devem ser trabalhadas com os estudantes em cada nível de ensino, Infantil, Fundamental e Médio, em todo o Brasil. A tabela presente no Apêndice A apresenta as competências e habilidades de Matemática sobre o ensino de frações, distribuídas por ano de ensino conforme especificado a seguir.

No 2° ano do Ensino Fundamental é sugerida a introdução de termos como metade e terça parte, como contraponto à ideia de dobro e triplo, utilizando materiais manipuláveis, para ajudar os estudantes a entender e aplicar estes conceitos.

No 3° ano é sugerido relacionar o resultado de uma divisão exata de um número natural por 2, 3, 4, 5, e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes utilizando medidas de comprimento e de tempo.

No 4° ano é recomendado que os alunos reconheçam as frações unitárias mais usuais como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso para fazer representações e comparações. A representação decimal de um número racional é útil para relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

No 5° ano há um enfoque na associação entre frações e números racionais, bem como sua representação na reta numérica. Através da comparação e ordenação dos números racionais, é proposto trabalhar a noção de equivalência de frações. Seguindo este raciocínio, é sugerido associar o cálculo de porcentagens com representações fracionárias. É também indicado trabalhar com situações-problema envolvendo as quatro operações de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.

No 6° ano os estudantes devem ser capazes de compreender, comparar, ordenar frações e realizar soma e subtração de frações, interpretando-as. Deve-se escrever e relacionar números racionais positivos como frações e utilizar esta teoria na aplicação e interpretação de probabilidade de eventos.

No 7° ano é recomendado que os alunos interpretem as frações obtidas em diversos contextos, utilizem e compreendam a multiplicação e a divisão de números racionais, suas relações e propriedades, com o objetivo de resolverem e elaborarem problemas que as envolvam.

3.2 Análise de livros didáticos

Nesta seção serão apresentadas análises de livros didáticos do PNLD, disponibilizados nas escolas públicas de Minas Gerais no período de 2017 a 2022. Essas análises contemplam o ensino de frações, a fim de buscar algum subsídio para identificar o que leva os estudantes a terem tantas dificuldades acerca deste conteúdo.

Nem todas as coleções apresentam livros para todos os anos do Ensino Fundamental. Por essa razão, analisaremos as coleções e livros indicados na Tabela 1, orientados por cada uma das competências e habilidades da BNCC, referentes ao quarto, quinto, sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental.

Tabela 1: Coleções analisadas

	Coleção	Autor(es)	Ano(s) de Ensino	Publicação
1	A Conquista da Matemática	José R. Giovanni Jr	4° ao 7°	2018
2	Coleções Ápis / Telaris	Luiz Roberto Dante	4° e 5° / 6° e 7°	2017/2018
3	Coleção Desafio Matemática	Ênio da Silveira	4° e 5°	2021
4	Coleção Araribá Mais Matemática	Mara R. Garcia G. e Willian R. Silva	6° e 7°	2018

Fonte: Próprio autor (2024)

No que segue, para facilitar a leitura e consulta, cada ano corresponderá a uma seção.

3.2.1 Ensino de frações no 4° ano

- **Habilidade:** Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.

Figura 2: Representação de frações unitárias

1 Observe esta foto e responda.

a) Em quantas partes iguais a *pizza* foi dividida?

8 partes iguais.

b) Que fração representa 1 fatia desta *pizza*? $\frac{1}{8}$

c) Como se lê essa fração? Um oitavo.

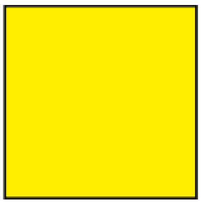
Pizza dividida em partes iguais.

Fonte: Coleção "Ápis", 4° ano (2017, p. 203)

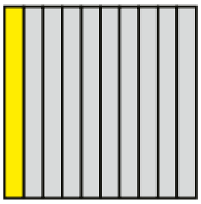
Os autores das Coleções 1, 2 e 3 utilizam estratégias semelhantes para introduzir frações unitárias através da partição de figuras planas e objetos, como pizzas e chocolates. Essa abordagem é acompanhada pela introdução da nomenclatura de numerador e denominador para a leitura das frações. Veja uma dessas representações na Figura 2.

Além disso, as coleções utilizaram elementos que remontam ao material dourado para representar as frações decimais. A Figura 3 apresenta as frações 1/10 e 1/100.

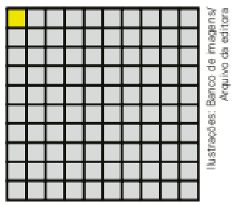
Figura 3: Representação decimal das frações decimais.



1 unidade
ou 1 inteiro.



1 décimo da unidade.
$\frac{1}{10}$ ou 0,1
(A unidade está dividida
em 10 partes iguais.)



1 centésimo da unidade.
$\frac{1}{100}$ ou 0,01
(A unidade está dividida
em 100 partes iguais.)

Um centésimo

Representação fracionária → $\frac{1}{100}$

Representação decimal → **0,01**

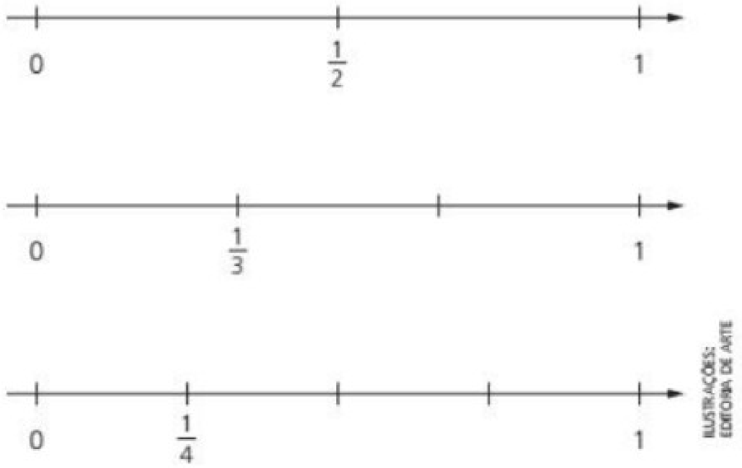
Unidade	Décimo	Centésimo
U,	d	c
0,	0	1

Fonte: Coleção "Ápis", 4° ano (2017, p. 220)

- **Habilidade:** Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

Conforme exemplificado na Figura 4, as Coleções 1, 2 e 3 tomaram um pedaço da reta numerada do 0 até o 1 dividida em partes iguais, para representação e localização das frações unitárias. E, de forma complementar, também apresentaram a noção de frações não unitárias.

Figura 4: Representação de frações na reta numérica



Fonte: Coleção "A Conquista da Matemática", 4° ano (2018, p. 187)

As Coleções 1, 2 e 3 utilizaram as cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro para motivar e contextualizar a representação decimal de um número racional. Para fazer isto, primeiramente associaram as frações decimais, décimos e centésimos, aos números decimais que também representam essas quantidades, ou seja, 1/10 = 0,1 (10 centavos) e 1/100 = 0,01 (1 centavo).

Isto foi feito utilizando material dourado, considerando o cubo como uma unidade, a placa como 1/10 e a barrinha como 1/100. Na sequência, eles consideraram o real como unidade e aplicaram o mesmo raciocínio anterior, concluindo que 1 centavo é a centésima parte do real, 10 centavos são 10 centésimos do real, e assim sucessivamente. A Figura 5 traz um exemplo de como foi abordada esta relação entre frações decimais e a representação do dinheiro que usamos.

Figura 5: Frações decimais na representação do sistema monetário brasileiro

Fonte: Coleção "Ápis", 4° ano (2017, p. 223)

- **Habilidade:** Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada pela contagem dos quadradinhos ou metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

As Coleções 1, 2 e 3 propuseram calcular áreas de polígonos através de uma malha quadriculada, utilizando uma unidade de medida de superfície, em geral um quadrado ou um triângulo. Também propuseram o cálculo da área de uma dada figura e o desenho de outras figuras com a mesma área.

Ainda, na Coleção 3, foi utilizada uma estratégia contextualizada, em que foi apresentada uma parede revestida de azulejos, em que um azulejo é tratado como unidade de medida, para calcular a área total da parede. Isso está retratado na Figura 6.

Figura 6: Azulejo como unidade de área

Fonte: Coleção “Desafio Matemática”, 4° ano (2021, p. 130)

3.2.2 Ensino de frações no 5° ano

- **Habilidade:** Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

As Coleções 1, 2 e 3 relacionaram frações como a divisão de números naturais, representando algumas figuras divididas em partes iguais e selecionaram algumas partes. Foi construída uma fração, em que o numerador correspondeu à quantidade de partes selecionadas e o denominador ao número total de partes da figura base. Frisaram que o resultado obtido pode ser menor do que a unidade, um inteiro ou maior do que a unidade.

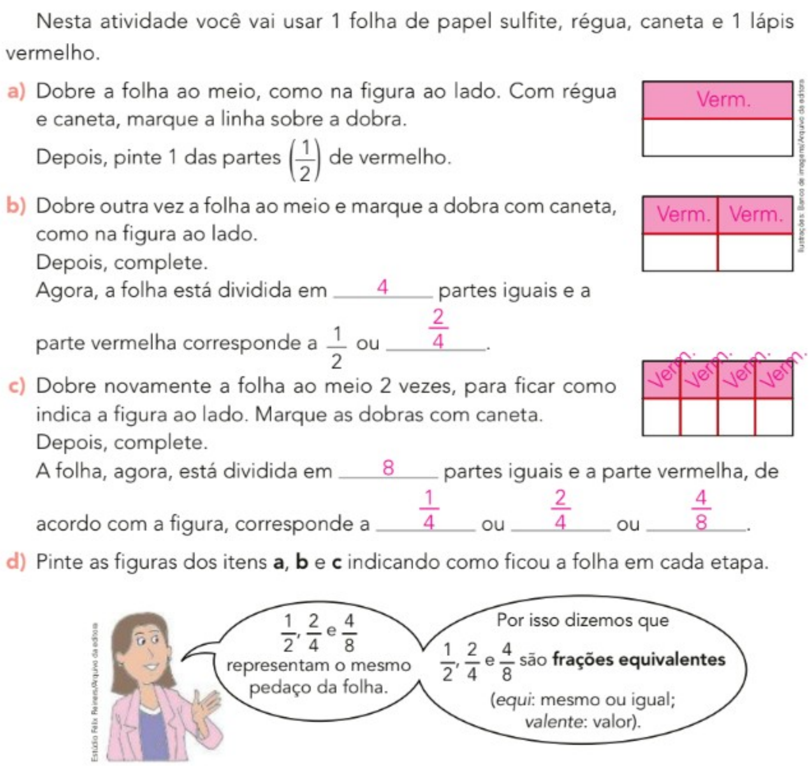
Especificamente para frações maiores que a unidade, os autores apresentaram as frações mistas, exemplificando sua representação como a soma da parte inteira e da parte fracionária. Também mostraram que estas frações mistas podem ser representadas por uma única fração. As Coleções 2 e 3 indicaram a soma das frações mistas, já a Coleção 1 utilizou apenas a representação geométrica para fazer essa indicação.

Todas as coleções localizaram as unidades na reta numérica e dividiram cada intervalo entre elas em “*n*” partes iguais, comparando as frações obtidas com os números naturais mais próximos.

- **Habilidade:** Identificar frações equivalentes.

As Coleções 1, 2 e 3 propuseram divisões de uma mesma figura plana em um número diferente de partes, mas sempre destacando um mesmo pedaço. Assim, os autores apresentaram frações equivalentes entre as partes do pedaço destacado com o número de partes de toda a figura em cada subdivisão. A Figura 7 mostra a situação descrita.

Figura 7: Obtendo frações equivalentes a partir de dobraduras



Nesta atividade você vai usar 1 folha de papel sulfite, régua, caneta e 1 lápis vermelho.

a) Dobre a folha ao meio, como na figura ao lado. Com régua e caneta, marque a linha sobre a dobra.
Depois, pinte 1 das partes $\left(\frac{1}{2}\right)$ de vermelho.

b) Dobre outra vez a folha ao meio e marque a dobra com caneta, como na figura ao lado.
Depois, complete.
Agora, a folha está dividida em 4 partes iguais e a parte vermelha corresponde a $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$.

c) Dobre novamente a folha ao meio 2 vezes, para ficar como indica a figura ao lado. Marque as dobras com caneta.
Depois, complete.
A folha, agora, está dividida em 8 partes iguais e a parte vermelha, de acordo com a figura, corresponde a $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{8}$.

d) Pinte as figuras dos itens **a**, **b** e **c** indicando como ficou a folha em cada etapa.

Fonte: Coleção "Ápis", 5° ano (2017, p. 139)

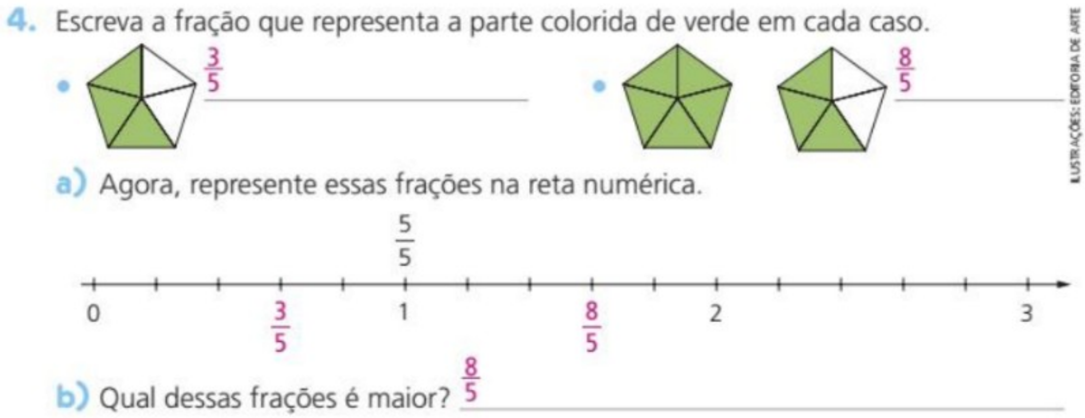
Na sequência, através de vários exemplos, os autores discutiram formas de obtenção de frações equivalentes através da multiplicação ou divisão do numerador e denominador por um mesmo número. Também introduziram o conceito de simplificação de frações e frações irredutíveis.

- **Habilidade:** Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

As Coleções 1, 2 e 3 inicialmente compararam frações de mesmo denominador. Para as frações menores que a unidade, foi proposta a divisão do segmento de reta de 0 até 1 em “*n”* partes iguais. Após isso, foi realizada a comparação de frações da forma “a/*n”*, em que “a” é um número natural entre 0 e “*n”*. Para as frações maiores que a unidade, eles localizaram os números naturais na reta numérica e dividiram cada intervalo entre eles em “*n”* partes iguais, comparando as frações de denominador “*n”*, inclusive com os números naturais.

Para as frações de denominadores diferentes, as Coleções 2 e 3 sugeriram transformar estas frações em outras equivalentes com mesmo denominador, retornando ao caso anterior. Sugeriram também fazer comparação indireta com a metade ou com o inteiro e, ainda, utilizaram problemas práticos, figuras geométricas ou representação na reta numérica para comparar e ordenar frações, como exemplificado na Figura 8.

Figura 8: Identificação e representação de números racionais na reta numérica



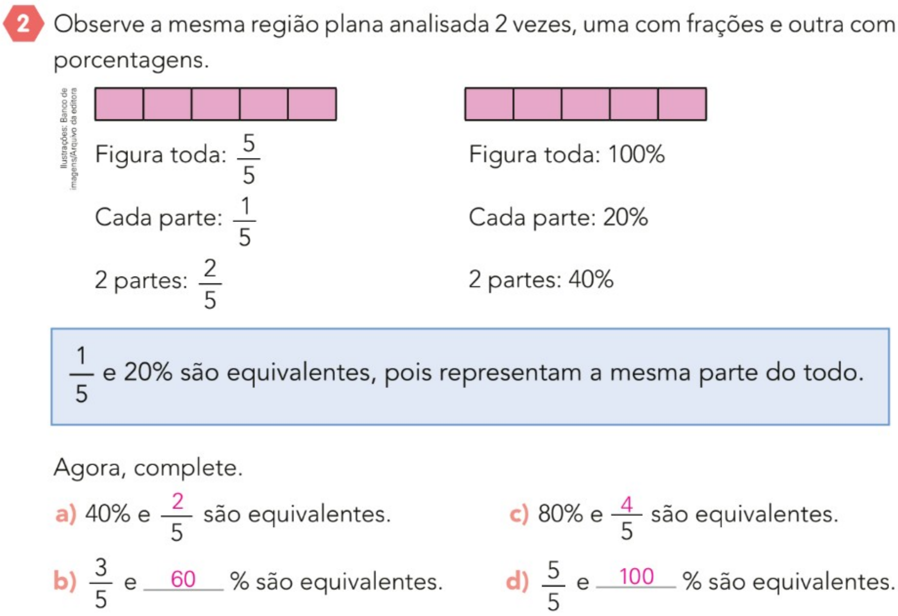
Fonte: Coleção “A Conquista da Matemática”, 5° ano (2018, p. 154)

- **Habilidade:** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

As Coleções 1, 2 e 3 utilizaram a definição de porcentagem como sendo uma fração de denominador 100. Tomando as frações “*n/100”* e fazendo as simplificações, chegaram a frações equivalentes irredutíveis, para conectar o conceito de frações a contextos práticos do cálculo de porcentagem.

A Coleção 1 também propôs exercícios cujas soluções são frações de denominador 10, utilizando frações equivalentes para transformá-las em porcentagens. A Coleção 2, conforme pode ser visto na Figura 9, utilizou a definição de fração como parte de um todo, sendo este todo 100%. Assim, mostrou que 1/5 é igual à quinta parte de 100%, ou seja, 20%, ou que 2/5 é igual a 40%.

Figura 9: Cálculo de porcentagem como parte de uma unidade



2 Observe a mesma região plana analisada 2 vezes, uma com frações e outra com porcentagens.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura toda: $\frac{5}{5}$

Cada parte: $\frac{1}{5}$

2 partes: $\frac{2}{5}$

Figura toda: 100%

Cada parte: 20%

2 partes: 40%

$\frac{1}{5}$ e 20% são equivalentes, pois representam a mesma parte do todo.

Agora, complete.

a) 40% e $\frac{2}{5}$ são equivalentes.

b) $\frac{3}{5}$ e 60 % são equivalentes.

c) 80% e $\frac{4}{5}$ são equivalentes.

d) $\frac{5}{5}$ e 100 % são equivalentes.

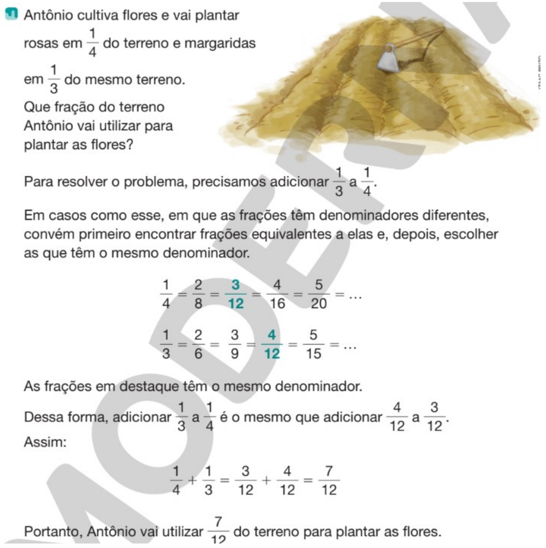
Fonte: Coleção "Ápis", 5° ano (2017, p. 148)

- **Habilidade:** Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Para a soma e subtração de frações de mesmo denominador, as Coleções 1, 2 e 3 representaram duas frações em uma mesma figura e sugeriram operá-las visualmente. Pela observação dessas ilustrações, concluíram que para somar ou subtrair duas frações de mesmo denominador é suficiente operar apenas com os numeradores e conservar o denominador.

Para somar e subtrair frações com denominadores diferentes, conforme a Figura 10, o autor da Coleção 3 utilizou frações equivalentes. A estratégia foi escrever um conjunto de frações equivalentes para cada fração da operação e, após comparações, foram escolhidas as de menor denominador comum para realizar a conta.

Figura 10: Soma e subtração de frações com denominadores diferentes



1 Antônio cultiva flores e vai plantar rosas em $\frac{1}{4}$ do terreno e margaridas em $\frac{1}{3}$ do mesmo terreno. Que fração do terreno Antônio vai utilizar para plantar as flores?

Para resolver o problema, precisamos adicionar $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$.

Em casos como esse, em que as frações têm denominadores diferentes, convém primeiro encontrar frações equivalentes a elas e, depois, escolher as que têm o mesmo denominador.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \ldots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \ldots$$

As frações em destaque têm o mesmo denominador.

Dessa forma, adicionar $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ é o mesmo que adicionar $\frac{4}{12}$ a $\frac{3}{12}$.

Assim:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

Portanto, Antônio vai utilizar $\frac{7}{12}$ do terreno para plantar as flores.

Fonte: Coleção "Desafio Matemática", 5° ano (2021, p. 228)

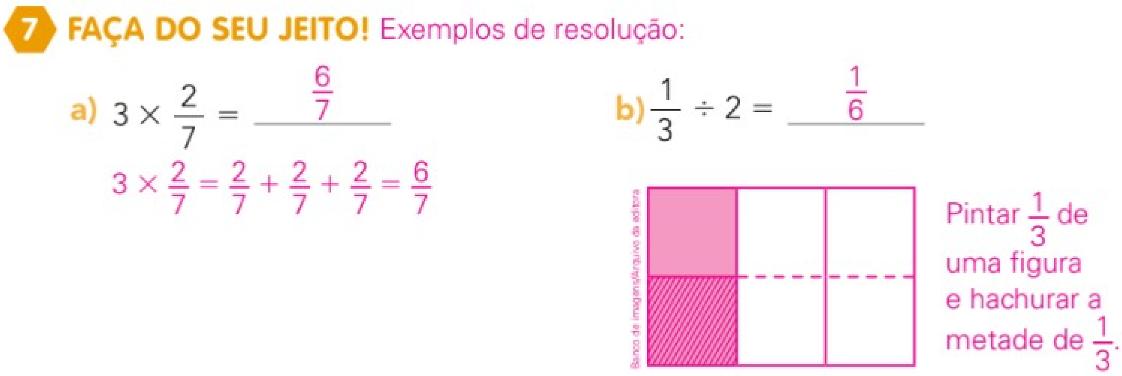
Normalmente os problemas envolvendo essas operações propõem situações em que se utilizam duas frações de uma mesma figura, solicitando a soma ou diferença delas.

- **Habilidade:** Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

A multiplicação de um número natural por uma fração foi tratada algebricamente como soma de frações iguais, podendo ser generalizada como soma de frações.

A divisão de uma fração por um número natural foi abordada de maneira geométrica. Os autores das Coleções 2 e 3 representaram uma fração unitária geometricamente e propuseram dividi-la por um número "*n*". Pela observação da imagem, concluíram que o denominador desta fração fica multiplicado por este número e o numerador continua o mesmo. Veja a Figura 11.

Figura 11: Multiplicação e divisão de uma fração por um número natural



Fonte: Coleção "Ápis", 5° ano (2017, p. 146)

3.2.3 Ensino de frações no 6° ano

- **Habilidade:** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

As Coleções 1, 2 e 4 utilizaram recursos visuais e contextuais, como divisões de pizzas, chocolates e áreas de figuras, dando destaque à ideia de fração como divisão para poderem representar frações maiores que a unidade. Estas são representadas por um número natural, quando o numerador é múltiplo do denominador, e na sequência, por uma fração de numerador maior que o denominador, mas não múltiplo deste.

As frações equivalentes foram utilizadas para comparar e ordenar frações, possibilitando transformar duas frações com denominadores diferentes em outras equivalentes com mesmo denominador. Assim, os autores enfatizaram a importância da compreensão de frações equivalentes para realizar operações como soma, subtração e divisão de frações.

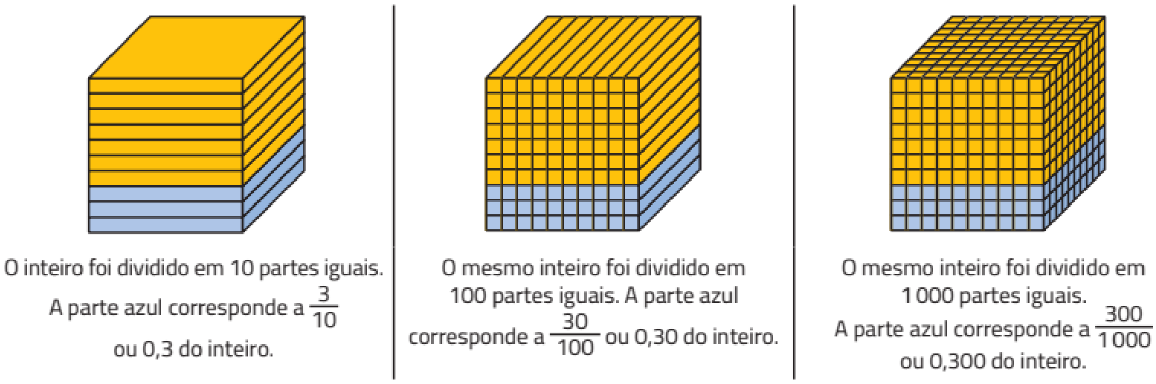
O material dourado foi um recurso comum nas três coleções para abordar a representação decimal de frações e localizar números na reta numérica.

A Coleção 1 se destaca pelo uso histórico e cultural das frações, ligando a Matemática às necessidades cotidianas do antigo Egito.

- **Habilidade:** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

As Coleções 1, 2 e 4 fizeram uso do material dourado (veja a Figura 12), tomando o cubo como unidade. Neste caso, a placa foi considerada igual a 1/10 ou 0,1. A barrinha foi 1/100 ou 0,01 e o cubinho, 1/1000 ou 0,001, assim as frações puderam ser relacionadas diretamente com os números decimais.

Figura 12: Material dourado para representação de números decimais



Fonte: Coleção "Teláris", 6° ano (2018, p. 213)

Nas Coleções 1, 2 e 4 os autores transformaram um número decimal em fração, o decompondo em parte inteira, décimos, centésimos e milésimos, e efetuaram a soma destas partes decompostas. Ao final fizeram a simplificação do resultado (Figura 13).

Para transformar um número decimal em fração, as coleções citadas fizeram o processo inverso ao relatado acima.

Figura 13: Transformação de números decimais em frações

- 3,71 (três inteiros e setenta e um centésimos)

$$3{,}71 = 3 + \frac{71}{100} = \frac{300}{100} + \frac{71}{100} = \frac{371}{100} \text{ —— fração irredutível}$$

- 9,007 (nove inteiros e sete milésimos)

$$9{,}007 = 9 + \frac{7}{1.000} = \frac{9.000}{1.000} + \frac{7}{1.000} = \frac{9.007}{1.000} \text{ —— fração irredutível}$$

Fonte: Coleção "Araribá Mais Matemática", 6° ano (2018, p. 186)

- **Habilidade:** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

Nas Coleções 1, 2 e 3 foi utilizada a ideia de fração como operador, inclusive para o cálculo de frações de frutas, dinheiro ou outros produtos.

Esta utilização se deu quando foram estudadas as frações unitárias e não unitárias, como as porcentagens (veja Figura 14).

Figura 14: Porcentagem como operador

1 O comércio Hora da Esfirra, em Alegrete, faz muito sucesso. Em um sábado foram vendidas 500 esfirras. Sabe-se que 27% dessa quantidade era de queijo. Quantas esfirras de queijo foram vendidas nesse sábado?

27% de 500 = 27 × $\underbrace{\text{1\% de 500}}_{500\,:\,100\,=\,5}$

27% de 500 = 27 × 5 = 135

Foram vendidas 135 esfirras de queijo.

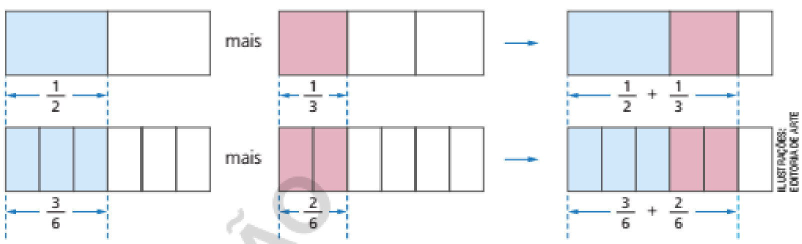
Fonte: Coleção “A Conquista da Matemática”, 6° ano (2018, p. 162)

- **Habilidade:** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

A Coleção 1 introduz a soma e subtração de frações com mesmo denominador de forma semelhante àquela feita nas Coleções 2 e 4, quando foram analisadas a soma de frações, nos livros do 5° ano.

Na sequência é relembrado o conceito de frações equivalentes e o processo de simplificação de frações. Esse conceito foi utilizado para calcular a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes. Para isto foram encontradas outras frações equivalentes às frações dadas e, em seguida, feita a operação com frações de mesmo denominador, conforme Figura 15.

Figura 15: Representação de soma de frações com denominadores diferentes



Fonte: Coleção “A Conquista da Matemática”, 6° ano (2018, p. 150)

- **Habilidade:** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

As Coleções 2 e 4 trabalharam a multiplicação de frações por um número natural, considerando-as como soma de parcelas iguais, e assim recaíram na soma de frações com mesmo denominador.

A Coleção 4 analisou geometricamente a divisão de frações por um número natural, e também analisou quantas vezes esta fração cabe no número natural (veja Figura 16).

Figura 16: Divisão de um número natural por uma fração

Divisão de um número natural por uma fração

Observe a ilustração e responda: quantos copos de $\frac{1}{4}$ de litro são necessários para encher uma jarra de 2 litros?

Para resolver esse problema, usamos a ideia de medida. De acordo com a ilustração, percebemos que são necessários 8 copos de $\frac{1}{4}$ de litro para encher uma jarra de 2 litros.

Poderíamos resolver esse problema calculando quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em 2, o que é equivalente a efetuar $2 : \frac{1}{4}$. Portanto:

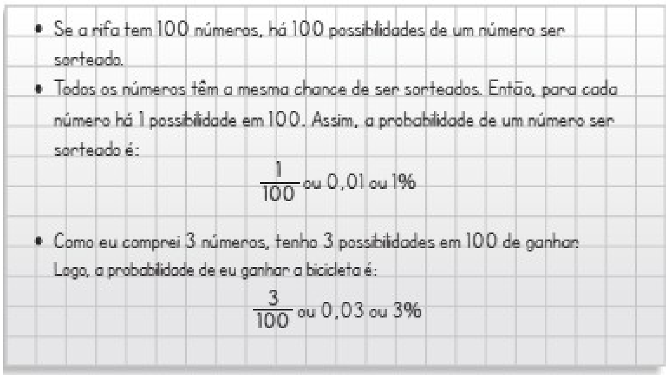
$$2 : \frac{1}{4} = 8$$

Fonte: Coleção "Araribá Mais Matemática", 6° ano (2018, p. 143)

- **Habilidade:** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por um número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos aleatórios.

As Coleções 1, 2 e 4 definiram informalmente probabilidade como o quociente entre o número de possibilidades de um evento ocorrer e o número total de possibilidades. Representaram isso com uma fração, um número decimal ou uma porcentagem (Figura 17).

Figura 17: Representações de uma probabilidade



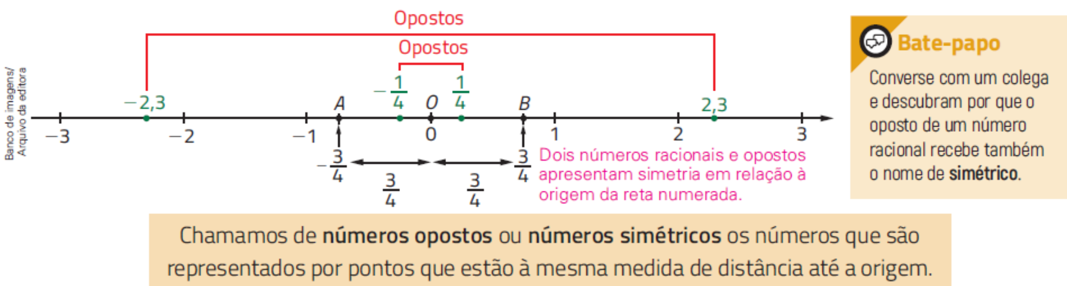
Fonte: Coleção “Araribá Mais Matemática”, 6° ano (2018, p. 245)

3.2.4 Ensino de frações no 7° ano

- **Habilidades:** (1) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (2) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

As Coleções 1, 2 e 4 apresentaram as frações como números racionais. Foram definidos módulo e simétrico para a representação e localização dos números negativos na reta numérica, enfatizando que quanto mais à direita, maior é a fração (Figura 18). Outra questão recorrente foi transformar a fração em número decimal para facilitar a sua localização na reta.

Figura 18: Representação do simétrico na reta



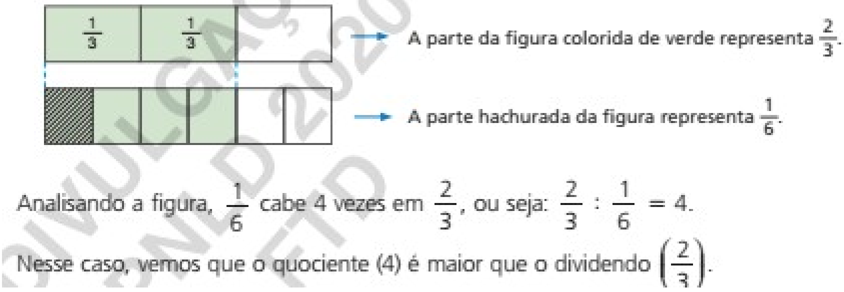
Fonte: Coleção “Teláris”, 7° ano (2018, p. 82)

- **Habilidades:** (1) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (2) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Para introduzir a multiplicação de frações, o autor da Coleção 1 inicialmente analisou a multiplicação de um número natural por uma fração, tratando esta multiplicação como uma soma de frações iguais, para, a partir de recursos algébricos, concluir que bastava multiplicar este número pelo numerador e conservar o denominador.

A seguir ele representou a fração 1/3 num círculo, mas destacou a metade desta, para mostrar geometricamente que a metade de 1/3 é igual a 1/6. Algebricamente, representou esta situação como (1/2).(1/3) = 1/6. A ideia foi destacar que a multiplicação de duas frações não é soma de frações iguais, e sim a determinação de outra fração, sendo esta correspondente ao produto dos numeradores dividido pelo produto dos denominadores das respectivas frações, ou seja, (1/2) x (1/3) = (1x1) : (2x3) = 1/6. Veja a Figura 19.

Figura 19: Divisão de frações



Fonte: Coleção "A Conquista da Matemática", 7° ano (2018. p. 112)

O autor também falou sobre a regra do cancelamento, mostrando que é possível simplificar as frações antes de multiplicá-las e que esta simplificação pode ocorrer entre um numerador de uma fração com um denominador de outra.

Para trabalhar a divisão de frações, o autor relembrou que quando a multiplicação de duas frações tem 1 como resultado, essas frações são ditas inversas. Ele propôs uma divisão de 3/5 de uma pizza em 2 partes. Para isto, cada pedaço deveria ser dividido também em duas partes. Representando esta situação geometricamente, observou que cada parte corresponde à 3/10 da pizza.

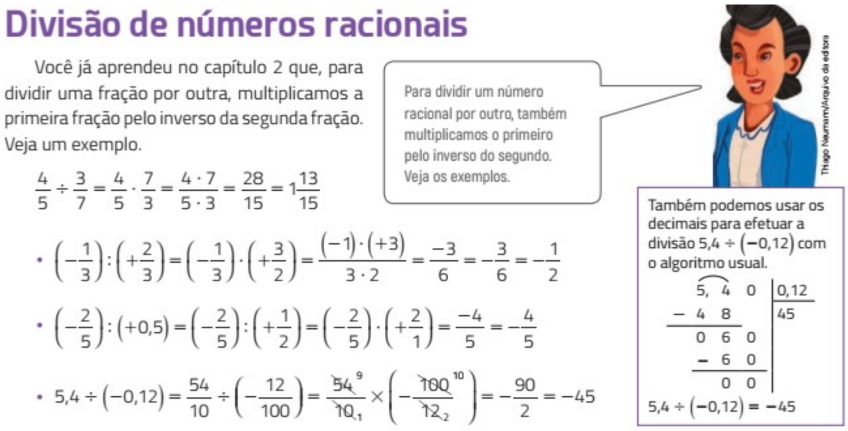
A seguir, ele mostrou algebricamente que (3/5) : 2 = (3/5) x (1/2), isto quer dizer que dividir uma fração por um número natural é igual a multiplicá-la pelo inverso deste número.

Depois ele propôs dividir 4 por 2/5, representando esta situação geometricamente e mostrando que em 4 unidades cabem 10 frações de 2/5.

Para finalizar, ele mostrou em uma ilustração que 1/6 cabe 4 vezes em 2/3, para mostrar que (2/3) : (1/6) = (2/3) x (6/1) = (2x6) : (3x1) = 12/3 = 4. A partir desses exemplos ele chegou ao algoritmo da divisão de frações.

As Coleções 2 e 4 já tinham analisado, de forma similar, este processo. Assim sendo, as Coleções 1, 2 e 4 aproveitaram esses conhecimentos para tratarem da multiplicação e divisão de números racionais, utilizando as mesmas regras de sinais dos números inteiros, utilizando também os algoritmos e as propriedades da multiplicação e divisão de frações, bem como a relação entre divisão e multiplicação (Figura 20).

Figura 20: Divisão de números racionais



Divisão de números racionais

Você já aprendeu no capítulo 2 que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração. Veja um exemplo.

$\frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$

- $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{(-1) \cdot (+3)}{3 \cdot 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+0{,}5) = \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{1}\right) = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$
- $5{,}4 \div (-0{,}12) = \frac{54}{10} \div \left(-\frac{12}{100}\right) = \frac{\cancel{54}^{9}}{\cancel{10}_{1}} \times \left(-\frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{12}_{2}}\right) = -\frac{90}{2} = -45$

Também podemos usar os decimais para efetuar a divisão $5{,}4 \div (-0{,}12)$ com o algoritmo usual.

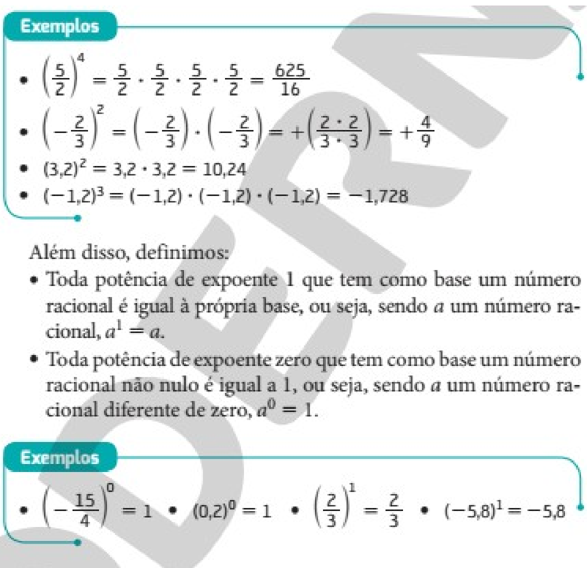
$$\begin{array}{rrr|l} 5, & 4 & 0 & 0{,}12 \\ -\ 4 & 8 & & 45 \\ \hline 0 & 6 & 0 & \\ - & 6 & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

$5{,}4 \div (-0{,}12) = -45$

Fonte: Coleção “Teláris”, 7° ano (2018, p. 87)

As Coleções 1 e 4 trataram da potenciação e radiciação de números racionais utilizando as definições tradicionais e as regras da multiplicação já estudadas (Figura 21).

Figura 21: Potenciação de números racionais



Exemplos

- $\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{625}{16}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}\right) = +\frac{4}{9}$
- $(3{,}2)^2 = 3{,}2 \cdot 3{,}2 = 10{,}24$
- $(-1{,}2)^3 = (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) = -1{,}728$

Além disso, definimos:

- Toda potência de expoente 1 que tem como base um número racional é igual à própria base, ou seja, sendo a um número racional, $a^1 = a$.
- Toda potência de expoente zero que tem como base um número racional não nulo é igual a 1, ou seja, sendo a um número racional diferente de zero, $a^0 = 1$.

Exemplos

- $\left(-\frac{15}{4}\right)^0 = 1$ • $(0{,}2)^0 = 1$ • $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ • $(-5{,}8)^1 = -5{,}8$

Fonte: Coleção “Araribá Mais Matemática”, 7° ano (2018, p. 112)

3.2.4 Considerações finais

Através da análise feita, notamos que as coleções analisadas são bem estruturadas e apresentam, em geral, uma linguagem adequada para os professores e alunos, com diversas figuras que contribuem para a compreensão dos conceitos trabalhados, além de exemplos e exercícios de fixação. Há, por exemplo, sugestões de associações de frações e suas operações com as peças do material dourado, que cumprem o papel de material concreto.

Entretanto, acreditamos que extrapolar as atividades sugeridas pelos autores dos livros, com a utilização de outros materiais manipuláveis, pode agregar à familiarização dos conceitos por parte dos alunos. Neste sentido, no capítulo seguinte definiremos e diferenciaremos materiais concretos de materiais manipuláveis, abordando também a relevância desses materiais no ensino de frações.

4 O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO

Muitos alunos enfrentam dificuldades em Matemática, especialmente quando se deparam com conceitos que podem parecer abstratos, como as frações. Conforme veremos, diversos educadores e pesquisadores têm defendido o uso de materiais manipuláveis como um complemento ao ensino tradicional, que geralmente se baseia apenas em aulas expositivas, no uso do livro didático e na resolução de listas de exercícios. Este capítulo explora a importância e o impacto do uso de materiais manipuláveis no ensino de frações.

Listamos na Tabela 2 alguns trabalhos relevantes, citados ao longo do texto, que exploram o ensino de frações através de materiais manipuláveis, refletindo diversas abordagens e contextos educacionais.

Tabela 2: Trabalhos sobre a utilização de materiais manipuláveis no ensino

	Título do trabalho	**Autor(a)**	**Ano**
1	O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações	Solange Ferreira dos Santos	2019
2	Uma Sequência De Atividades Para O Estudo De Operações Com Frações Com Uso De Materiais Manipuláveis	Vanessa da Silva Chaves de Morais	2012
3	A Importância Do Uso De Materiais Manipuláveis Na Matemática	Maria Gabriela Facchi	2022
4	Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais (Coleção Mathemoteca Livro 3)	Katia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz	2016

Fonte: Próprio autor (2024)

Esses trabalhos foram escolhidos devido às seguintes justificativas: Santos (2019) destaca a aplicação do Tangram tradicional para ajudar os alunos a visualizar e compreender as frações de forma lúdica e interativa; Morais (2012) propõe uma série de atividades direcionadas ao estudo de operações com frações, utilizando materiais manipuláveis para tornar o aprendizado mais concreto e acessível; Facchi (2022) discute a relevância dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática, com um foco especial na facilitação da compreensão de conceitos abstratos como as frações e Smole e Diniz (2016) faz parte de uma coleção que explora diferentes materiais manipuláveis, oferecendo uma visão abrangente de como esses recursos podem ser utilizados para ensinar frações e números decimais de maneira eficaz.

4.1 Materiais concretos e materiais manipuláveis

Pode parecer, num primeiro momento, que não haja diferença entre materiais concretos e materiais manipuláveis, ou que todo material concreto é manipulável. Entretanto, Clements e MacMillen (1996), conforme citado por Morais, fazem uma distinção importante:

> Clements e McMillen (1996) questionam as expressões “concreto” e “manipulável”, ao se referirem a materiais que auxiliam a aprendizagem. Segundo eles, “concreto” não pode ser simplesmente igualado a “manipulável”. Não se pode ter certeza de que o aluno vê a mesma coisa que seu professor ao olhar para um material “concreto”, como o material dourado, por exemplo; o professor já sabe quais conceitos matemáticos estão associados ao uso desse recurso. (CLEMENTS e MACMILLEN *apud* MORAIS, 2012, p. 13)

Clements (1999. p. 46) diz que é comum a associação de que os materiais manipuláveis são eficazes porque são concretos, num contexto em que “concreto” geralmente se refere a objetos que os alunos podem agarrar com as mãos. Contudo, destaca que somente o fato de existirem e estarem nas mãos dos alunos não é o bastante para aprenderem Matemática. Ele defende que os alunos devem ser capazes de manipular esses materiais para desenvolver uma compreensão prática dos conceitos, mas para isso a participação do professor é essencial, pois é ele quem traz a intencionalidade e o entendimento mais amplo dos conteúdos abordados na prática.

Clements também apresenta práticas de manipulação de figuras no computador para formação de outras figuras, indicando que no mundo virtual os manipuláveis não são concretos, situação que se inverte no mundo físico, em que tudo que é manipulável é concreto, mas nem todo concreto é manipulável.

Feitas essas considerações, entenderemos materiais manipuláveis da mesma forma que Lorenzato (2006, p. 22-23) define materiais manipuláveis dinâmicos. São materiais concretos que permitem a transformação da sua estrutura física, que vai se modificando através da manipulação pelo educando, possibilitando redescobrir, perceber as propriedades, construir a aprendizagem e refletir sobre o planejado e o alcançado através da manipulação.

4.2 Materiais manipuláveis no ensino

A adoção de materiais manipuláveis no ensino de frações auxilia na aplicação prática dos conceitos e propriedades desse conteúdo, tornando o aprendizado mais concreto e envolvente.

Ao manusearem os materiais e realizarem partições e comparações, as atividades permitem que os alunos interajam diretamente com a construção do conhecimento. Esse contato direto estimula o raciocínio e a criatividade, enriquecendo a experiência de aprendizado. Também possibilita a construção de conceitos matemáticos, a formulação de conjecturas e a realização de generalizações de forma prática e interativa.

Nesse contexto, oficinas com Tangram e outras figuras geométricas particionadas destacam-se como ferramentas valiosas para o ensino das frações. As peças dessas figuras representam proporções entre si, permitindo não apenas a representação de frações do todo, mas também a exploração de semelhanças e outras relações matemáticas ao combinar e sobrepor seus elementos.

Lorenzato (*apud* Facchi, 2022, p. 21) enfatiza a importância dos materiais manipuláveis no ensino de frações. Ele argumenta que esses materiais facilitam a construção dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo para a realidade dos alunos. Quando os estudantes conseguem conectar a Matemática com seu cotidiano, ela deixa de ser um desafio temido e se transforma em algo mais acessível e compreensível. Além disso, Facchi (2022, p. 21) afirma que a manipulação física de objetos ajuda os alunos a reterem melhor os conceitos.

> Deste modo, perspectivamos que o uso de materiais manipuláveis, quando utilizados de modo adequado, pode auxiliar na apropriação de conceitos matemáticos, pois por meio deles os alunos podem manusear e perceber as relações matemáticas presentes e, talvez, despertar o gosto pela Matemática. Possibilitando, assim que o aluno amplie “sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos.” (LORENZATO *apud* SANTOS, 2019, p. 88)

O trabalho com materiais manipuláveis tem se mostrado uma ferramenta eficaz para desmistificar a ideia de que a Matemática é uma área difícil, compreendida apenas por pessoas “muito inteligentes”. Esses materiais auxiliam a desfazer o mito de que algoritmos e relações matemáticas surgem como mágica, mostrando que esses conceitos são construídos a partir de ações práticas e concretas, visando resolver problemas.

4.3 Preparo dos docentes para utilização de materiais manipuláveis

O uso de materiais manipuláveis exige um preparo cuidadoso por parte dos profissionais da educação. É essencial que os educadores saibam integrar esses materiais de forma significativa, para garantir que eles promovam um aprendizado real e duradouro, além de uma aplicabilidade prática da Matemática. Por isso é essencial que o uso desses recursos seja bem planejado pelo professor. Este deve ter objetivos específicos claramente delineados para o processo de ensino-aprendizagem.

Por exemplo, no ensino de frações, muitos alunos acreditam que uma fração só pode ser representada se todas as suas partes forem iguais. Quando as partes são desiguais, eles enfrentam dificuldades para fazer associações corretas. Ao usar um Tangram, os professores esperam que os alunos comparem peças de formatos diferentes e reconheçam que podem representar a mesma fração. Contudo, esse tipo de raciocínio precisa ser orientado pelo professor, destacando a importância da mediação educacional no processo de aprendizagem.

Assim, é importante que o professor compreenda que os alunos estão lidando com algo novo que precisa ser desvendado. À medida que eles se familiarizam com a manipulação dos materiais, eles desenvolvem habilidades de associação e raciocínio. Essa capacidade de perceber a relação entre as peças e o todo se desenvolve gradualmente à medida que eles ganham experiência com o material.

Esses materiais devem provocar a reflexão dos alunos, permitindo que eles atribuam significados às ações que realizam com eles. Caso contrário, o uso ficará limitado à mera manipulação ou manuseio, sem contribuir para a construção conceitual. Portanto, de acordo com Santos (2019, p. 91) é essencial que o uso desses materiais seja acompanhado por uma reflexão pedagógica, considerando não apenas o material em si, mas também os significados que podem ser explorados e construídos a partir dele.

Em contrapartida, também é necessário que os alunos estejam mentalmente engajados e dispostos a se esforçar, interagindo tanto com os materiais quanto com seus colegas e o professor. Eles devem compartilhar suas conclusões, levantar hipóteses, esclarecer dúvidas conceituais, compreender os objetivos propostos pelo professor e trocar dúvidas e certezas entre si, para propiciar um conhecimento efetivo.

Smole e Diniz (*apud* Santos, 2016, p. 193) ressaltam que é importante que o estudante registre suas impressões e conclusões. Isso não só permite que ele transmita suas ideias a terceiros, mas também oferece uma referência para revisar seu processo de construção do conhecimento. Ao registrar, é essencial que o estudante já esteja familiarizado com a linguagem Matemática. Essa linguagem deve ser desenvolvida de forma natural e progressiva, respeitando a linguagem que o aluno construiu em sua cultura, mas também incorporando a terminologia científica. O professor deve incentivar o aluno a se comunicar, pois é por meio dessa comunicação que o docente pode diagnosticar o que o estudante já compreende e identificar as dificuldades que enfrenta. Com essas informações, o professor pode oferecer o apoio necessário para ajudar o aluno a superar seus desafios.

Além disso, de acordo com Tjandra (2023, p. 169), os materiais manipuláveis podem apoiar a aprendizagem de alunos com diferentes estilos de aprendizagem, por exemplo, como aprender com um aluno visual ou com um aluno cinestésico. Foi demonstrado que o uso de materiais manipuláveis aumenta a compreensão dos conceitos matemáticos dos alunos, aumenta seu envolvimento e fortalece suas habilidades de resolução de problemas. Os programas inclusivos são concebidos para proporcionar um ambiente de aprendizagem seguro e de apoio a alunos com diversas capacidades e estilos de aprendizagem, e a utilização de ferramentas manipuláveis pode desempenhar um papel importante no apoio a estes alunos.

No capítulo seguinte apresentaremos uma sequência de atividades sobre frações, utilizando materiais manipuláveis, distribuídas ao longo de três oficinas, que poderão ser reproduzidas por colegas de profissão em suas respectivas salas de aula.

5. PROPOSTA DE OFICINAS

Este capítulo detalha a aplicação de três oficinas práticas que utilizam Tangrans para ensinar frações. Cada oficina é estruturada para proporcionar uma experiência de aprendizado ativa, na qual os alunos podem manipular formas, explorar relações geométricas e realizar operações com frações de forma divertida e significativa. Através dessas atividades, busca-se não apenas ensinar frações, mas também fomentar a curiosidade e o prazer pelo aprendizado da Matemática.

As oficinas foram elaboradas pensando em serem aplicadas a professores do Ensino Fundamental, para que estes possam reproduzi-las com seus alunos. Dessa forma, tivemos a intenção de atingir, indiretamente, o maior número de estudantes. O público-alvo de cada oficina, de forma que ela possa ser integralmente aplicada, está indicado no cabeçalho de cada uma delas. Contudo, há várias partes das oficinas que podem ser utilizadas a partir do 4° ano para trabalhar a intuição dos estudantes a respeito de frações, principalmente geometricamente. Fica a critério do professor adaptá-las aos anos e realidades das turmas em que leciona.

Para implementar as oficinas, utilizamos materiais simples e acessíveis, como papel, lápis/caneta, régua, tesoura, compasso e transferidor. As atividades são projetadas para serem realizadas em duplas, com cada dupla construindo dois Tangrans. Um dos Tangrans será recortado, dividindo-o em seus elementos indicados. Sugere-se que, durante a atividade, os participantes utilizem sobreposições e comparações dos elementos recortados a fim de estabelecer possíveis relações matemáticas. Os objetivos das oficinas estão alinhados com as habilidades da BNCC, garantindo que o aprendizado seja consistente com as expectativas educacionais.

A avaliação da aprendizagem poderá ser realizada por meio da observação de como os participantes executam as atividades, se conseguem resolvê-las de forma autônoma ou se necessitam de ajuda. Finalizadas as atividades propostas, o professor poderá aplicar questões semelhantes, utilizando ou não elementos do Tangram, a fim de avaliar se os alunos conseguem realizar abstrações.

Em cada oficina são trabalhadas apenas algumas frações. Por exemplo, nas oficinas 1 e 3, o enfoque são nas frações cujos denominadores são divisores de 16. Já na Oficina 2, o enfoque são nas frações cujos denominadores são divisores de 12. Assim, é necessário que o professor extrapole as conclusões obtidas para outros tipos de frações.

As oficinas descritas neste capítulo são:

1. **Tangram de triângulos e quadrados,**
2. **Tangram circular e**
3. **Tangram tradicional.**

A seguir apresentamos as oficinas, a forma com que foram organizadas e os relatos de aplicações de cada uma delas. Elas foram aplicadas para um público diverso, detalhado em cada relato. Após a aplicação, foi passado um questionário para os participantes baseado nas experiências vividas, dificuldades encontradas, sugestões de melhoria e reflexões sobre a aplicação dessa metodologia em sala de aula.

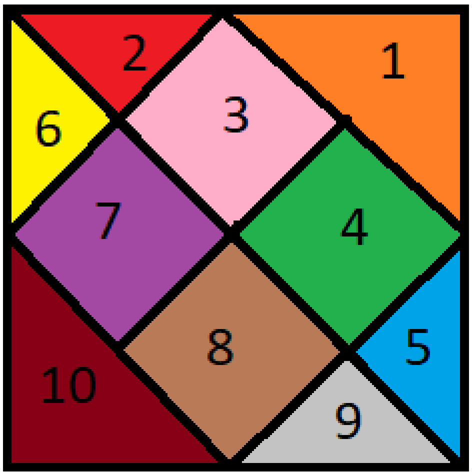
Durante a aplicação das oficinas, ficou claro que a intencionalidade do professor aplicador precisa estar muito bem definida. Os erros e acertos cometidos ao longo das atividades tornaram ainda mais evidente a importância desse planejamento cuidadoso para o sucesso da aplicação.

5.1 Oficinas

Cada oficina é apresentada em três partes principais. Na Parte 1 o foco é a construção das figuras geométricas, em que o professor deverá dividir a turma em duplas, entregar os materiais necessários aos alunos e ditar os comandos a serem seguidos. Havendo dificuldades o professor deverá realizar intervenções. É importante estar atento ao tempo investido nesta parte, para não haver prejuízos nas discussões mais importantes da atividade, que são associar e reconhecer frações e suas operações. Se julgar necessário, o professor poderá entregar o Tangram pronto para os alunos e iniciar a oficina na segunda parte.

Na Parte 2, há uma proposta de atividades utilizando o material construído. Em um primeiro momento, será necessário reconhecer as frações associadas a cada elemento do Tangram. Com essa associação, as peças do Tangram deverão ser manipuladas para auxiliar na visualização e compreensão de relações matemáticas envolvidas. Os elementos do Tangram farão o papel das frações nas operações. Ao fim, é esperado que os alunos tenham condições de identificar, comparar, ordenar e operar com frações.

Na Parte 3 são sugeridas algumas alternativas de soluções para as atividades propostas. Durante a realização das oficinas, é importante que o professor incentive e reflita a respeito de novas ideias propostas pelos alunos.

OFICINA 1 – Tangram de triângulos e quadrados	
Figura 22: Tangram de triângulos e quadrados  Fonte: Próprio autor (2024)	
Duração	2 horas.
Público alvo	Professores e estudantes a partir do 5° ano.
Material	Folha A4, lápis, régua, caneta e tesoura.
Organização	Em duplas (serão construídos dois Tangrans iguais, porém somente um será recortado).
Habilidades trabalhadas	EFO4MA09, EFO4MA21, EFO5MA03, EFO5MA04, EFO5MA05, EFO5MA07, EFO5MA08, EFO6MA07, EFO6MA09, EFO6MA10, EFO7MA08
Objetivos	Identificar, comparar e ordenar as frações unitárias mais usuais. Identificar frações equivalentes. Relacionar a soma algébrica de frações com a sua representação geométrica. Compreender a multiplicação e a divisão de uma fração por um número natural. Relacionar áreas de figuras planas com frações.
PARTE I – Construção do Tangram	
1. Construa o maior quadrado possível utilizando uma folha A4. Recorte-o.	
2. Utilizando régua e caneta, trace uma diagonal do quadrado. Marque o centro dela com caneta.	
3. Sobreponha cada um dos vértices sobre o centro da diagonal e dobre. Marque os quatro	

vincos com caneta.
4. Divida os dois retângulos centrais em quatro quadrados e marque os vincos com caneta.
5. Enumere os elementos obtidos como na Figura 22. Apenas um Tangram da dupla deverá ser recortado, o outro auxiliará na comparação.
PARTE II – Atividades
1) Em relação ao quadrado original, responda: a) Qual fração cada elemento representa? b) Existem elementos diferentes que representam uma mesma fração? Se sim, quais?
2) Compare e ordene as frações correspondentes aos elementos do Tangram.
3) Utilizando os elementos do Tangram, mostre que: a) 1/8 = 2/16 b) 4/16 = 1/4 c) 1/4 = 1/8 + 1/8 d) 1/2 + 1/2 = 1 e) 4 x (1/8) = 1/2 f) (1/4) : 2 = 1/8 g) 2 x (1/16) + 3/8 = 1/2
4) Escreva a fração 1/4 de formas diferentes.
5) Utilizando o Tangram, calcule: a) 2 x (1/8) b) 1/4 - 1/8 c) 1/2 - 1/4 d) 3/4 - 1/2
6) Se a área do quadrado original é 8 unidades de área, qual será a área do quadrado central, formado pelos elementos 3, 4, 7 e 8 do Tangram?
7) Se a área do quadrado original é 32 unidades de área, qual será a área: a) do triângulo de número 2? b) do triângulo de número 10?
8) Se a área do elemento 4 é 1 unidade de área, calcule a área do quadrado original.
PARTE III – Respostas das atividades da Oficina 1
1) a) Os elementos de números 1, 3, 4, 7, 8 e 10 representam a fração 1/8=2/16. Os elementos de números 2, 5, 6 e 9 representam a fração 1/16. b) Sim, conforme já indicado no item anterior.

2) $1 > 1/8 > 1/16$.

3) a) Basta sobrepormos os elementos 2 e 6 sobre o elemento 1.

b) Obtemos 1/4 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal e depois na outra. Agora basta sobrepor os elementos 2, 5, 6 e 9.

c) Obtemos 1/4 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal e depois na outra. Agora basta sobrepor os elementos 1, 2 e 6.

d) Ao sobrepor os quatro vértices do quadrado original sobre seu centro, obtemos um quadrado que corresponde aos elementos 3, 4, 7 e 8. Assim, o quadrado original corresponde a dois quadrados formados pelos elementos 3, 4, 7 e 8.

e) Ao sobrepor os quatro vértices do quadrado original sobre seu centro, obtemos um quadrado que corresponde aos elementos 3, 4, 7 e 8. Por um lado, esse quadrado obtido corresponde à metade do quadrado original. Por outro lado, ele corresponde aos elementos 3, 4, 7 e 8, e cada um desses elementos equivale a 1/8.

f) Obtemos 1/4 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal e depois na outra. Dobrando ao meio, basta sobrepor os elementos 2 e 6.

g) Obtemos 1/2 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal. Agora basta sobrepor os elementos 1, 2, 3, 5 e 7.

4) $1/4 = 1/8 + 1/8 = 4 \times (1/16) = 2 \times (1/16) + 1/8 = 1/2 – 1/4$.

5) a) 1/4: obtemos 1/4 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal e depois na outra. Basta sobrepor agora os elementos 1 e 10.

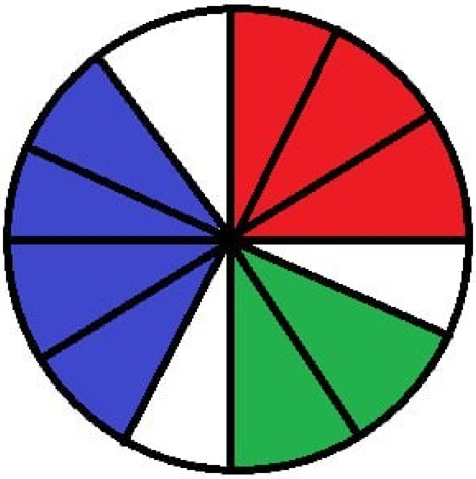
b) 1/8: a junção dos elementos 1 e 10 corresponde a 1/4. Retirando uma delas, temos 1/8.

c) 1/4: obtemos 1/2 ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal. Note que cada metade do triângulo obtido corresponde a 1/4.

d) 1/4: ao dobrarmos o quadrado original em uma diagonal e depois na outra, obtemos um triângulo correspondente à fração 1/4. Consideremos 3 desses triângulos para representarmos a fração 3/4. Como a fração 1/2 corresponde à junção de 2 desses triângulos, subtraindo isso dos 3, obtemos 1 triângulo.

6) Sabemos que a área do quadrado central formado pelos elementos 3, 4, 7 e 8 corresponde

à metade do quadrado original. Assim, a área pedida corresponde a 4 unidades de área.
7) a) Sabemos que o elemento 2 corresponde à fração 1/16 do quadrado original. Logo, sua área é 2 unidades de área. b) Sabemos que o elemento 10 corresponde à fração 1/8 do quadrado original. Logo, sua área é 4 unidades de área.
8) Como o quadrado original pode ser obtido a partir de 8 elementos do tipo 4, então o quadrado original possui 8 unidades de área.

OFICINA 2 – Tangram circular	
Figura 23: Tangram circular  **Fonte: Próprio autor (2024)**	
Duração	2 horas.
Público alvo	Professores e estudantes a partir do 6° ano.
Material	Folha A4 com um círculo de maior diâmetro desenhado, lápis de cor, caneta, régua, transferidor e tesoura.
Organização	Em duplas (serão construídos dois Tangrans iguais, porém somente um será recortado).
Habilidades trabalhadas	EFO4MA09, EFO5MA03, EFO5MA04, EFO5MA07, EFO5MA08, EFO6MA07, EFO6MA10, EFO7MA11, EFO7MA12.
Objetivos	Identificar, comparar e ordenar as frações unitárias mais usuais. Identificar frações equivalentes. Relacionar a soma, subtração, multiplicação e divisão algébrica de frações com a sua representação geométrica. Relacionar áreas de figuras planas com frações. Identificar a importância do MMC.
PARTE I – Construção do Tangram	
1. A partir do círculo da folha A4 entregue, marque o diâmetro com a caneta.	
2. Tomando esse diâmetro como referência, utilize o transferidor para marcar os pontos	

indicadores dos graus: 0°, 30°, 60°, 90°, 120° e 150°.
3. Trace outros cinco diâmetros no círculo passando pelos pontos marcados e colora de acordo com a Figura 23.
PARTE II – Atividades
1) Identifique as frações representadas nas partes coloridas e não coloridas da Figura 23.
2) Ordene as frações obtidas anteriormente da menor para a maior.
3) Quantas vezes 1/12 cabe em cada setor colorido da Figura 23? Represente esta informação algebricamente. Em seguida, calcule: a) (3/12) : (1/12) b) (4/12) : (1/12) c) (2/12) : (1/12)
4) Com ajuda do Tangram circular, responda: a) Quantas vezes 1/6 cabe em 1/2? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/2) : (1/6)? b) Quantas vezes 1/6 cabe em 1/3? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/3) : (1/6)? c) Quantas vezes 1/12 cabe em 1/2? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/2) : (1/12)? d) Quantas vezes 1/12 cabe em 1/3? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/3) : (1/12)?
5) Com ajuda do Tangram circular, responda: a) Quantas vezes 1/6 cabe em 1/4? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/4) : (1/6)? b) Quantas vezes 1/4 cabe em 1/3? Como escrever esta relação algebricamente? Quanto vale (1/3) : (1/4)?
6) Supondo que a fração c/d cabe e/f vezes em a/b, calcule: a) (c/d) x (e/f) b) (a/b) : (c/d)?

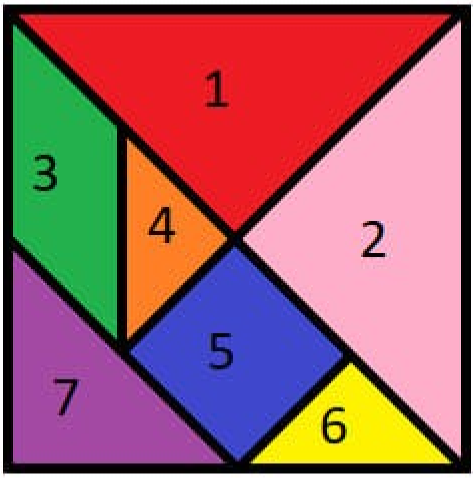
7) Qual é a maior fração que cabe um número inteiro de vezes em 1/2 e 1/3?
8) Utilizando os elementos do Tangram circular, represente e calcule: a) 1/2 + 1/3 b) 2/3 + 1/2 c) 3/2 – 4/3
9) Analisando o Tangram circular, qual é a maior fração que cabe um número inteiro de vezes em 1/3, 1/4 e 1/6?
10) Utilizando, se possível, os elementos do Tangram circular, mostre que as relações a seguir são verdadeiras: a) 1/2 – 1/12 = 1/6 + 1/4 b) 4/12 + 1/6 = 1/2 c) 1/3 + 1/4 + 1/6 = 9/12 = 1 – 1/4 d) 2/3 + 1/4 + 1/12 = 1
11) Utilizando os elementos do Tangram circular, represente e calcule: a) 1/12 + 3/12 b) 1/3 + 1/4 – 1/2 c) 1/3 – 1/4 + 2/6 d) 1/3 + 1/6 e) (1/2) x (1/6) f) (2/3) : 2 g) (1/3) : (1/2) h) (1/2) : (1/3)
PARTE III – Respostas das atividades da Oficina 2
1) O setor azul representa a fração 1/3, o setor vermelho 1/4, o setor verde 1/6 e cada setor branco 1/12.
2) 1 > 1/3 > 1/4 > 1/6 > 1/12.
3) 1/12 cabe 4 vezes no setor azul, assim, 4/12 = 4 x (1/12). Analogamente, 1/12 cabe 3 vezes no setor vermelho, donde obtemos 3/12 = 3 x (1/12), e 1/12 cabe 2 vezes no setor verde, concluindo que 2/12 = 2 x (1/12). a) 3 b) 4 c) 2
4) a) 1/6 cabe 3 vezes em 1/2, ou seja, 1/2 = 3 x (1/6) = 3/6. Assim (1/2) : (1/6) = 3. b) 1/6 cabe 2 vezes em 1/3, ou seja, 1/3 = 2 x (1/6) = 2/6. Assim (1/3) : (1/6) = 2. c) 1/12 cabe 6 vezes em 1/2, ou seja, 1/2 = 6 x (1/12) = 6/12. Assim (1/2) : (1/12) = 6. d) 1/12 cabe 4 vezes em 1/3, quer dizer, 1/3 = 4 x (1/12) = 4/12. Assim, (1/3) : (1/12) = 4.
5) a) 1/6 cabe uma vez e meia em 1/4, assim, 1/4 = (3/2) x (1/6) = 3/12. Logo (1/4) : (1/6) =

3/2. b) 1/4 cabe uma vez e um terço em 1/3, ou seja, (1/3) = (4/3) x (1/4). Logo (1/3) : (1/4) = 4/3.
6) a) como c/d cabe e/f vezes em a/b, podemos concluir que a/b = (e/f) x (c/d). b) se a/b = (e/f) x (c/d), então (a/b) : (c/d) = e/f.
7) Utilizando o Tangram circular podemos constatar que 1/6 cabe 3 vezes em 1/2 e que 1/6 cabe 2 vezes em 1/3. Semelhantemente 1/12 cabe 6 vezes em 1/2 e 4 vezes em 1/3. Assim, a maior fração que cabe um número inteiro de vezes tanto em 1/2 quanto em 1/3 é 1/6.
8) a) Já sabemos que 1/2 = 6/12 e que 1/3 = 4/12, logo, 1/2 + 1/3 = 6/12 + 4/12 = 10/12 = 5/6. b) A maior fração que cabe um número inteiro de vezes em 2/3 e 1/2 é 1/6. Já sabemos que 1/3 é igual a 2 x (1/6), logo 2/3 = 4 x (1/6) = 4/6. Sabemos também que 1/2 é igual a 3 x (1/6) = 3/6, assim, 2/3 + 1/2 = 4/6 + 3/6 = 7/6. c) Sabemos pelo item anterior que a maior fração que cabe um número de partes inteiras em 1/ 2 e 1/3 é 1/6. Assim semelhantemente ao item anterior, 3/2 - 4/3 = 9/6 - 8/6 = 1/6.
9) Para que uma fração caiba um número inteiro de vezes em outra, a fração precisa ser menor. Portanto, as candidatas são 1/6 e 1/12. Sabemos que 1/6 não cabe um número inteiro de vezes em 1/4. Assim, concluímos que a resposta correta é 1/12, pois é a única fração que se encaixa um número inteiro de vezes em 1/4.
10) a) Dobre o Tangram ao meio de maneira que os setores vermelho e verde fiquem em uma das metades. Ao retirar a parte branca, que corresponde a 1/12, desta metade, sobram as partes verdes (1/6) e vermelha (1/4). b) Considere a união das partes azul e verde. c) Considere a união das partes coloridas, vermelho (1/4 = 3/12), verde (1/6 = 2/12) e azul (1/3 = 4/12), que corresponde a 9/12. Por outro lado, subtraia do círculo as partes brancas (3 x (1/12) = 1/4). d) A união dos dois setores bancos adjacentes ao setor verde resulta na fração 1/3, que somada com o setor verde, resulta em 2/3. Como o setor vermelho corresponde a 1/4 e o

único setor branco que sobrou corresponde à fração 1/12, então obtemos 12/12 = 1.
11) a) 1/12 + 3/12 = 4/12 = 1/3. b) A união dos setores azul e vermelho (1/4 + 1/3) resulta na metade do círculo somado com um setor branco (1/2 + 1/12). c) Retirando o setor vermelho do setor azul, restaria um setor branco, e como 2/6 é igual a 1/3, bastaria juntar um setor branco com um azul, que é igual 5/12. Esta operação pode ser representada pela subtração do setor vermelho do setor azul, e união com dois setores brancos. d) Como 1/6 cabe duas vezes em 1/3, então 1/3 = 2/6, então 1/3 + 1/6 é o mesmo que 2/6 + 1/6 = 3/6. Além disso 1/3 + 1/6 é a união de um setor azul com um setor verde é igual à metade do círculo, ou seja, 1/2. Esta operação pode ser representada pela união dos setores vermelho e verde. e) Temos que (1/2) x (1/6) corresponde à metade de 1/6, que é 1/12 (setor branco). f) Dividir por 2 significa repartir algo em duas partes iguais, então (2/3) : 2 é igual à 1/3. g) A pergunta é, “quantas vezes 1/2 cabe em 1/3”. Podemos ver que 1/2 não cabe inteiramente no setor azul, cabe apenas uma fração dele, visualmente cabe apenas 4/6 que é igual a 2/3. h) O setor azul (fração 1/3) cabe uma vez e meia na metade do círculo, ou seja, 1/2 = (3/2) x (1/3). Assim (1/2) : (1/3) = 3/2.

OFICINA 3 – Tangram tradicional

Figura 24: Tangram tradicional



Fonte: Próprio autor (2024)

Duração	2 horas.
Público alvo	Professores e estudantes a partir do 6° ano.
Material	Folha A4, lápis, régua, caneta, tesoura e lápis de cor.
Organização	Em duplas (serão construídos dois Tangrans iguais, porém somente um será recortado).
Habilidades trabalhadas	EFO4MA09, EFO5MA03, EFO5MA04, EFO5MA05, EFO5MA06, EFO5MA07, EFO5MA08, EFO6MA07, EFO6MA09, EFO6MA10, EFO6MA30, EFO7MA08.
Objetivos	Identificar, comparar e ordenar as frações unitárias mais usuais. Identificar frações equivalentes. Relacionar a soma algébrica de frações com a sua representação geométrica. Associar representações fracionárias com cálculos de porcentagens. Identificar fração como parte de um todo e como operador. Representação de probabilidades através de números racionais.

PARTE I – Construção do Tangram

1. Construa o maior quadrado possível a partir de uma folha A4.

2. Trace a diagonal do quadrado.

3. Divida um dos triângulos resultantes ao meio unindo os dois vértices do lado maior.
4. No outro triângulo, marque o ponto médio do lado maior e sobreponha o vértice oposto a ele. Serão obtidos um triângulo e um trapézio.
5. Divida o trapézio resultante ao meio unindo os dois vértices do lado maior, obtendo dois trapézios iguais.
6. Em um dos trapézios obtidos, construa um quadrado e um triângulo.
7. No outro trapézio, construa um paralelogramo unindo o vértice do maior ângulo com seu vértice oposto.
8. Colora cada uma das peças obtidas de cores diferentes.
9. Enumere os elementos como na Figura 24. Apenas um Tangram da dupla deverá ser recortado.
PARTE II – Atividades
1) Em relação ao quadrado original, responda: a) Qual fração cada elemento do Tangram representa? b) Existem elementos diferentes que representam uma mesma fração? Se sim, quais?
2) Compare e ordene as frações correspondentes aos elementos do Tangram.
3) Indique a fração resultante ao se unir os elementos do Tangram indicados pelos números: a) 4 e 6 b) 3 e 4 c) 3 e 7 d) 1, 5 e 7 e) 3, 4 e 5
4) Suponha que o quadrado original tenha 16 unidades de área. Determine quanto é a área de cada elemento do Tangram indicado pelo número: a) 1 b) 7 c) 4 d) 3 e) 5
5) Suponha que o quadrado original tenha 64 unidades de área. Determine qual é a área de cada elemento do Tangram indicado pelo número:

a) 2 b) 7 c) 4 d) 3 e) 5
6) Utilizando os elementos do Tangram, mostre que: a) 2/4 = 1/2 b) 2/16 = 1/8 c) 2/16 + 1/8 = 1/4 *d) 4 x (1/8) = 1/2 e) (1/2) : 4 = 1/8 f) (1/2) : (1/4) = 2*
7) Sabendo que o quadrado original representa a unidade, ou seja, 100%, determine a porcentagem representada por cada elemento do Tangram tradicional e indique que fração corresponde.
8) Se o elemento 4 representa 15%, determine a porcentagem atribuída aos elementos: a) 1 b) 7 c) 2 e 7 juntas d) o quadrado original
9) Se o elemento 1 representa 28%, determine a porcentagem atribuída: a) ao elemento 3 b) ao elemento 5 c) ao quadrado original
Nas próximas questões, considere um paraquedista que pousará em uma região dividida como no Tangram tradicional da Figura 24.
10) É mais provável que ele pouse no elemento 1 ou 6 do Tangram? Por quê?
11) Existem partes do Tangram que você considera igualmente prováveis que ele caia? Quais?
12) Qual a probabilidade de ele pousar na região indicada? Escreva, também, a sua representação fracionária. a) elemento 1 b) elemento 6 c) união dos elementos 3, 4, 5 e 7
13) Sabendo que o paraquedista pousará na região abaixo da diagonal do quadrado original, qual a probabilidade de ele pousar na região indicada? Escreva, também, a sua representação fracionária. a) elemento 3 b) elemento 4 c) elemento 7
PARTE III – Respostas das atividades da Oficina 2

1) a) Os elementos 1 e 2 são representados pela fração 1/4; 3, 5 e 7 são representados pela fração 1/8; 4 e 6 são representados pela fração 1/16. b) Sim, conforme indicado na letra a.
2) 1 > 1/4 > 1/8 > 1/16.
3) a) A união dos elementos 4 e 6 resulta no elemento 3. Simbolizamos esta soma como 1/16 + 1/16 = 2/16 = 1/8. b) Como o elemento 3 vale 2/16, então a soma indicada é 2/16 + 1/16 = 3/16. c) Os elementos 3 e 7 são representados pela fração 1/8. Logo, a soma sugerida equivale a 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4. d) Como os elementos 5 e 7 são representados pela mesma fração, e dois elementos 7 formam o elemento 1, a soma sugerida pode ser feita por quatro elementos do tipo 7, ou seja, 4 x (1/8) = 4/8 = 1/2. e) Cada um dos elementos 3 e 5 pode ser substituído por dois elementos do tipo 4. Assim, a soma pode ser expressa por (2 + 1 + 2) x (1/16) = 5/16.
4) a) Sabemos que o elemento 1 corresponde à quarta parte do quadrado original. Assim, a área pedida é 16 x (1/4) = 4 unidades de área. b) Como o elemento 7 corresponde à oitava parte do quadrado original, a área pedida é 16 x (1/8) = 2 unidades de área. c) O elemento 4 corresponde à décima sexta parte do quadrado original. Logo, a área pedida é 16 x (1/16) = 1 unidade de área. d) De forma análoga ao item b, a área pedida é de 2 unidades de área. e) De forma semelhante ao item anterior, a área pedida é de 2 unidades e área.
5) a) Sabemos que o elemento 2 corresponde à quarta parte do quadrado original. Assim, a área pedida é igual a 64 x (1/4) = 16 unidades de área. b) Sabemos que o elemento 7 corresponde à oitava parte do quadrado original. Logo, a área pedida é de 64 x (1/8) = 8 unidades de área. c) Sabemos que o elemento 4 corresponde à décima sexta parte do quadrado original. Assim,

a área pedida é de 64 x (1/16) = 4 unidades de área. d) O elemento 3 possui 1/8 da área do quadrado original. Sendo assim, a área pedida é de 64 x (1/8) = 8 unidades de área. e) O elemento 5 possui 1/8 da área do quadrado original. Sendo assim, a área pedida é de 64 x (1/8) = 8 unidades de área.
6) a) Se dobrarmos o Tangram ao meio pelas suas diagonais, temos duas metades. Analisando a metade superior, ela é composta pelos elementos 1 e 2, ou seja, 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2. b) Sobrepondo os elementos 4 e 6 no elemento 5, fica mostrada a relação sugerida. c) Sobrepondo os elementos 3, 4 e 6 ao elemento 1 ou 2, temos comprovada a relação sugerida. d) Podemos ver que os elementos 3, 4, 5, 6 e 7 cobrem uma metade do Tangram. Os elementos 4 e 6 compõe o elemento 5. Assim, teremos quatro elementos de 1/8 compondo esta metade, comprovando a relação. e) O raciocínio feito no item anterior nos mostrou que a metade do Tangram pode ser dividida em quatro partes iguais de 1/8, o que indica a relação aqui sugerida. f) A divisão proposta equivale a saber quantas vezes 1/4 cabe em 1/2. De acordo com o item a, a resposta é duas vezes, como sugere o item em questão.
7) Tanto o elemento 1 quanto o 2 representam a quarta parte do quadrado original, ou seja, 1/4 de 100% = 25%; os elementos 3, 5 e 7 representam 1/8 do quadrado original, ou seja, 1/8 de 100% = 12,5%; os elementos 4 e 6 representam 1/16 do quadrado original, ou seja, 6,25%.
8) a) Quatro elementos do tipo 4 cobrem o elemento 1. Assim, a porcentagem que representa este elemento é 4 x 15% = 60%. b) Dois elementos do tipo 4 preenchem o elemento 7. Logo, a porcentagem que o representa é 2 x 15% = 30%. c) Como o elemento 7 é representado por 30% e o elemento 2 representa a mesma porcentagem do elemento 1, 60%. Então a soma dos elementos 2 e 7 é representada pela porcentagem 90%.

d) O elemento 4 representa 1/16 do quadrado original. Logo, a porcentagem que representa este quadrado é 16 x 15% = 240%.

9) a) O elemento 3 pode ser formado por dois elementos do tipo 4, justamente a metade do que seria necessário pra preencher o elemento 1. Como a fração 28% representa o elemento 1, a que representa o elemento 3 é a metade de 28%, ou seja, 14%.

b) O item b é feito de forma idêntica ao item anterior.

c) O quadrado original pode ser formado por quatro elementos do tipo 1. Logo, a fração que o representa é 4 x 28% = 112%.

10) É mais provável de ele pousar no elemento 1, porque a área é maior.

11) Sim, como a área dos elementos 1 e 2 são representadas pela mesma fração do Tangram original, eles têm probabilidades iguais entre si. O mesmo ocorre com os elementos 4 e 6. De forma análoga, isto acontece com os elementos 3, 5 e 7. Lembrando que para cada grupo de elementos citados as probabilidades são diferentes.

12) a) Como o elemento 1 tem 1/4 da área do quadrado original, então a probabilidade de ele cair nesta área é justamente 1/4. Utilizando o conceito de frações equivalentes, esta probabilidade é de 25/100 ou 25%.

b) Como o elemento 6 tem área de 1/16 da área do quadrado original, a chance de ele cair nesta área é de 1/16, ou seja, 1/16 de 100% = 6,25%.

c) Para completar a metade inferior do Tangram só faltaria o elemento 6, então a área ocupada por esses elementos é de 1/2 – 1/16 = 8/16 – 1/16 = 7/16 = 43,75%.

13) a) Nesta nova hipótese, os elementos têm o dobro das possibilidades, uma vez que reduziu pela metade o espaço amostral. Assim, o elemento 3 tem probabilidade de 2 x (1/8) = 1/4 = 25%.

b) Seguindo o mesmo raciocínio, o elemento 4 tem probabilidade de 2 x (1/16) = 1/8 = 12,5%.

c) Analogamente, o elemento 7 tem probabilidade de 2 x (1/8) = 1/4 = 25%.

5.2 Relato da aplicação da Oficina 1

A Oficina 1 (Tangram de triângulos e quadrados) foi aplicada para 4 (quatro) professores de Matemática e 2 (dois) professores de outras disciplinas (Artes e Educação Física). A duração da atividade foi de 2 horas.

Na primeira parte, relativa à construção do Tangram, os participantes demonstraram grande interesse e entusiasmo. Cada dupla foi composta por um professor de Matemática e um professor de outra área, este último fazendo o papel de um aluno com menos facilidade no assunto. Os professores participantes da oficina assumiram o papel de alunos e proporcionaram uma visão prática de como os estudantes poderiam reagir às mesmas tarefas em sala de aula.

As discussões e compartilhamento de ideias estiveram presentes em todo o tempo da oficina e as dificuldades foram resolvidas, na maioria das vezes, entre os colegas das duplas, sem a necessidade de intervenção constante do mediador. As soluções propostas pelas duplas foram diversificadas. Na questão 1, as duplas utilizaram o triângulo de tipo 2 como recurso de atribuição de fração a cada elemento do Tangram. Por fim, concluíram que o Tangram pode ser representado por 16 triângulos do tipo 2.

Ao tentar resolver a questão 3 da atividade, uma dupla notou que a união dos quadrados 3, 4, 7 e 8 equivale à união dos triângulos 1, 2, 5, 6, 9 e 10, que, por sua vez, representam juntos a metade do quadrado original.

Na questão 4, as duplas dobraram o Tangram original ao meio duas vezes a fim de analisar diversas representações da fração 1/4. Comparando os pedaços obtidos, encontraram a representação através de 4 triângulos do tipo 2 ou dois triângulos do tipo 1, e associaram as frações desses elementos.

Na questão 5b), ao calcular 1/4 – 1/8, as duplas representaram 1/4 por 4 triângulos do tipo 2 (indicando a equivalência 1/4 = 4/16), 1/8 por 2 triângulos do tipo 2 (indicando a equivalência 1/8= 2/16) e efetuaram a conta através desta representação concreta, obtendo 2/16. Sobrepondo, obtiveram 1/8.

Embora a atividade tenha sido bem recebida, surgiram preocupações quanto à sua aplicabilidade em turmas grandes, especialmente em escolas públicas com elevado número de alunos e falta de engajamento rotineiro deles. No entanto, o objetivo dessa atividade é tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os estudantes.

Alguns comentários dos participantes:

1) Ao invés de trabalhar apenas com números abstratos, a manipulação de formas geométricas concretas tornou o aprendizado de frações mais tangível e acessível.

2) O tempo dedicado ao corte e montagem das figuras reduziu o tempo para discutir outros conceitos.

5.3 Relato da aplicação da Oficina 2

A Oficina 2 (Tangram circular) foi aplicada para 6 (seis) professores de Matemática de Ensino Fundamental II de uma escola da rede municipal de Contagem, sendo que apenas 1 (um) deles participou da Oficina 1. A duração da atividade foi de 2 horas.

A atividade iniciou-se com a construção dos Tangrans pelas duplas através de dobraduras, sem os recursos sugeridos de régua e compasso. Isso impactou em marcações inexatas dos elementos do Tangram e no tempo de realização da atividade. Apesar disso, os professores participantes demonstraram engajamento e interesse.

A variedade de interpretações do material concreto no âmbito da Matemática desviaram a atenção dos objetivos principais desta oficina. Por exemplo, os participantes observaram que, além do ensino de frações, o material também pode ser útil para explorar conceitos de geometria, área, arte e outros. É importante identificar e abordar essas questões para futuras aplicações.

O professor que participou de ambas as oficinas pareceu mais à vontade e esclarecido com a relação das frações e o Tangram. Uma outra professora - que não participou da Oficina 1- sentiu falta de que fossem trabalhadas frações equivalentes nesta oficina, para realizar as atividades propostas com mais segurança.

Na questão 1 da parte 2, alguns participantes esqueceram de incluir a fração total (12/12) na ordenação das frações envolvidas no material concreto.

Alguns comentários dos participantes:

1) Pode ser aplicada em sala de aula, oferecendo uma abordagem prática e envolvente para o ensino de conceitos matemáticos.

2) A atividade, quando realizada em grupos pequenos, é divertida e eficaz, permitindo uma compreensão prática das operações com frações.

Esta oficina foi aplicada uma segunda vez para 6 (seis) professores de Ensino Fundamental II de escolas da rede municipal de Contagem e Betim, sendo 3 (três) de

Matemática e outros 3 (três) de História, Português e Ciências. Apenas 1 (um) deles participou da Oficina 1. A duração da atividade foi de 1 hora e 10 minutos.

A aplicação teve início com a divisão das duplas de modo que houvesse um professor de Matemática em cada. Desta vez, a parte 1 da oficina foi omitida e o material foi entregue pronto para haver mais tempo de discussão dos conceitos principais: relações dos elementos do Tangram e suas manipulações com as frações e suas operações. Após cada orientação de atividade, os participantes tiveram tempo para manipular e discutir para tentar resolver. Na maioria das vezes eles conseguiram resolver sozinhos, mas em alguns casos foi necessáro intervenção para conduzir à resposta.

Na questão 1, uma dupla abordou a resolução de duas maneiras. Inicialmente compararam, através de sobreposição, os setores do círculo e calcularam quantas vezes cada setor cabia no círculo inteiro, chegando à conclusão de que a parte verde correspondia a 1/6, a vermelha a 1/4, a azul a 1/3 e a branca a 1/12. Depois, perceberam que a parte verde consistia de duas partes brancas, ou seja, 2/12. Seguindo uma lógica semelhante, concluíram que o setor vermelho correspondia a 3/12 e o azul a 1/3. Os participantes aproveitaram esta associação dos elementos do Tangram e escreveram a fração correspondente neles. Isto os ajudou a relacionar a escrita das frações equivalentes.

Na questão 2, utilizaram o recurso visual para ordenar as frações, no entanto esqueceram de considerar que o círculo representava uma fração.

Na questão 3, sobre a quantidade de vezes que 1/12 cabe em cada elemento do Tangram, um participante teve dificuldade de compreender o comando, mas a sua dupla o explicou, utilizando a sobreposição do elemento branco (correspondente à fração 1/12) sobre os demais setores.

Na questão 4a), para responder quantas vezes 1/6 cabe em 1/2, todas as duplas dobraram o círculo ao meio, sobrepuseram o setor verde (correspondente à fração 1/6) e contaram quantas vezes este cabia na metade do círculo. Diretamente concluíram que 1/2 dividido por 1/6 é igual a 3. Os outros itens foram realizados de modo análogo. Da forma como resolveram, não foi possível trabalhar com o conceito de multiplicação de uma fração por um número real.

Na questão 5a), a dupla concluiu que o setor verde (correspondente à fração 1/6) cabe uma vez e meia no setor vermelho (de fração 1/4), e relacionou com a divisão de frações 1/4 : 1/6 = 3/2. Para a letra b), entenderam que o setor vermelho (da fração 1/4) cabe uma vez e mais 1/3 dele no setor azul (da fração 1/3), concluindo que 1/3 dividido por 1/ 4 é igual a 4/3.

Da forma como resolveram, não foi possível trabalhar o conceito de multiplicação entre duas frações. Isto gerou dificuldade de interpretação da questão 6.

Para resolver a questão 6, sobre a generalização da multiplicação e divisão de frações, foi necessário voltar nos itens da questão 6, para entender as relações algébricas envolvidas. Os alunos tiveram dificuldades nesta parte e foi necessária intervenção do mediador. Foi a questão que eles mais apresentaram dificuldades.

Na questão 7, os alunos realizaram sobreposições de peças para concluir que a maior fração que cabe um número inteiro de vezes em 1/2 e 1/3 é 1/6. Para isso, sobrepuseram o setor verde (que representa 1/6) sobre o setor azul (que representa 1/3) e também à metade do círculo, representando a fração 1/2. O aplicador chamou a atenção para a fração 1/6, cujo denominador representa o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações dadas na operação, que é útil para somar e subtrair frações utilizando equivalências, como visto na questão 8.

Na questão 8a), na soma $1/2 + 1/3$, as duplas combinaram a metade do Tangram com o setor azul e propuseram a soma equivalente $6/12 + 4/12$, resultando em 10/12. Em seguida, as duplas foram incentivadas a utilizar o setor verde como unidade para as frações, já que, na questão anterior, concluíram que esse setor cabe um número inteiro de vezes nas frações dadas. Ao fazerem isso, perceberam, por sobreposição, que a metade do Tangram corresponde a três setores verdes, ou seja, 3/6, e que o setor azul equivale a dois setores verdes, ou seja, 2/6. Chegaram ao resultado 5/6, concluindo que 10/12 é equivalente a 5/6. Note que 12 também é um múltiplo comum de 2 e 3, mas não é o menor.

Na questão 8c), para a subtração $3/2 - 4/3$, as duplas seguiram a mesma técnica e realizaram $3 \times 1/2 - 4 \times 1/3$. Substituíram a metade do círculo por 6/12 e o setor azul (1/3) por 4/12, ou seja, $3 \times 6/12 - 4 \times 4/12 = 18/12 - 16/12 = 2/12$. De maneira análoga, trabalharam com frações equivalentes com denominador 6, substituíram a metade do círculo por 3/6 e o setor azul (1/3) por 2/6, realizando a operação $3 \times 3/6 - 4 \times 2/6 = 9/6 - 8/6 = 1/6$. Assim, concluíram que 2/12 é equivalente a 1/6.

Na questão 9, novamente utilizaram a sobreposição das peças para concluir que a maior fração é a correspondente ao setor branco (de fração 1/12). Este denominador 12 corresponde ao mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores 3, 4 e 6 envolvidos na soma. Ele é útil para identificar quantidades inteiras (indicadas pelos numeradores das frações equivalentes) para facilitar o cálculo das operações.

Na questão 10, foram feitas dobraduras, sobreposições e junções dos elementos do Tangram para mostrar as igualdades. Por exemplo, no item a), para calcular 1/2 − 1/12 = 1/6 + 1/4, as duplas dobraram o Tangram ao meio e sobrepuseram os setores vermelho e azul sobre ele. Ao fazerem isso, perceberam que o que faltava para completar esta metade era o setor branco, o que comprovou a igualdade proposta. No item c), 1/3 + 1/4 + 1/6 = 9/12 = 1 – 1/4, as duplas utilizaram novamente a sobreposição das peças azul, vermelha e verde sobre o Tangram, percebendo que restaram três setores brancos (3/12) sem sobreposição. Como o Tangram inteiro representa 12/12, a parte sobreposta corresponde a 9/12. A partir dessa construção, foi possível concluir que a parte sem sobreposição representa a parte vermelha, que equivale a 1/4. Como o Tangram inteiro representa a unidade, essa parte destacada equivale a 1−1/4, comprovando a relação sugerida.

Na questao 11, de a) até d), foram utilizadas as frações equivalentes para realizar as contas e manipulação dos elementos para comparar os resultados.

Na questão 11e), (1/2) x (1/6), o mediador lembrou que, na operação de multiplicação de fração, a multiplicação sugere a preposição "de", de modo que 1/2 x 1/6 pode ser entendido como a metade de 1/6. Tomando o setor verde (1/6) e considerando a metade dele, encontramos um setor do mesmo tamanho do setor branco que representa a fração 1/12. Assim, 1/2 x 1/6 = 1/12.

Foi observado que não se deve ter pressa em apresentar algoritmos ou fórmulas de resolução. É importante incentivar a criatividade e o prazer das manipulações, permitindo que os estudantes criem suas próprias soluções e deduzam as propriedades das operações, e, eventualmente, os algoritmos. Também foi observado que, em determinado momento, o professor pode concluir, com base nos exemplos trabalhados, que, para multiplicar frações, basta multiplicar o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador.

Na questão 11f), (2/3) : 2, foi sugerido dividir os dois terços (dois setores azuis) igualmente entre os dois membros da dupla. Nesse caso, cada um ficaria com um setor azul, ou seja, 2/3 : 2 = 1/3. Seguindo as observações propostas na letra "d", é possível deduzir que, para dividir uma fração por um número natural, basta dividir o numerador pelo número e manter o denominador.

Na questão 11g), 1/3 : 1/2, inicialmente os participantes se sentiram desafiados a realizar a operação de forma autônoma, mas encontraram dificuldades. Foi necessário relembrar o conceito de divisão, que é a ideia de quantas vezes uma fração cabe em outra.

Os participantes perceberam de imediato que a fração 1/2 não cabia uma vez inteira em 1/3. Alguns tentaram justificar o resultado da operação que já haviam resolvido algebricamente, mas encontraram dificuldade em fazer isso. Às vezes, dentro da mesma dupla, surgiam soluções diferentes.

O ponto comum entre todos foi a sobreposição do setor azul sobre uma metade do Tangram, que foi dobrada ao meio. Uma participante sugeriu que a solução seria dividir 4 pedaços de uma pizza por 6 pessoas, ou seja, 4/6 para cada uma, o que, simplificando, resultaria em 2/3. Outro professor pensou em dividir a metade do Tangram em 3 partes de 2/12 e o setor azul em 2 partes de 2/12, então a solução seria 2/12 divididos por 3/12, ou seja, 2/3. Uma terceira dupla analisou a imagem formada pela sobreposição e percebeu que ela representava a fração 4/6, que, simplificando, também resulta em 2/3.

Na questão 11 h), (1/2) : (1/3), os professores utilizaram a mesma sobreposição anterior para concluírem que o setor azul cabia uma vez e meia na metade do Tangram. Assim, dobraram o setor azul e perceberam que esta metade do Tangram equivalia à três destas metades, ou seja, 3 x 1/2 = 3/2.

5.4 Relato da aplicação da Oficina 3

A Oficina 3 (Tangram tradicional) foi aplicada para 5 (cinco) professores de Ensino Fundamental II de escolas da rede municipal de Contagem e Betim (4 de Matemática e outro de História), sendo que 2 (dois) deles participaram da Oficina 2. A duração da atividade foi de 1 hora e 10 minutos.

Após divisão dos grupos, o material que seria construído na Parte 1 da oficina foi entregue para os participantes, a fim de dar celeridade às discussões e focar no objetivo principal da atividade. As orientações iniciais foram de que cada equipe (dupla e trio) teriam um tempo para manipular e discutir as atividades propostas. Diferentemente das outras aplicações das oficinas, nesta foi possível compartilhar as conjecturas e conclusões no quadro.

Na questão 1, uma equipe mostrou que os elementos 3, 5 e 7 correspondem à união dos elementos 4 e 6. A partir dessa observação, concluíram que a metade do Tangram (formada pelos elementos 3, 4, 5, 6 e 7) é composta por 8 triângulos do tipo 4, ou seja, todo o Tangram corresponde a 16 triângulos do tipo 4, cada um deles correspondendo à fração 1/16. Com isto, os elementos 3, 5 e 7 representam 2 × 1/16 = 2/16. A outra metade do Tangram, formada pelos elementos 1 e 2, é composta por dois triângulos do mesmo tamanho. Isso levou à conclusão de que cada um desses triângulos corresponde à metade da metade, ou seja, 1/4 (equivalentemente 3/12). Também redividiram o Tangram como 4 elementos do tipo 1, ou 8 elementos do tipo 7.

Na questão 2, para ordenar as frações, as equipes compararam os tamanhos dos elementos do Tangram.

Na questão 3, as equipes tomaram como base o triângulo 4 e, contando quantas vezes ele cabe nos elementos da operação, realizaram a soma com o denominador 16. Este denominador em comum é um facilitador para cálculos envolvendo somas e subtrações de frações. Por exemplo, no item b), para indicar a soma das frações dos elementos 3 e 4, as duplas substituíram o elemento 3 por dois elementos do tipo 4 e obtiveram $3 \times 1/16 = 3/16$. Note que 16 é o MMC dos denominadores 8 e 16 correspondentes às frações dos elementos 3 e 4.

Na questão 4, os professores utilizaram o conceito de operador para calcular o valor das áreas, como exemplificado no item a), no qual o elemento 1 representa 1/4 de 16 unidades de área, ou seja, 16 u.a. $\times$ 1/4 = 4 u.a.

Na questão 6f), $1/2 : 1/4 = 2$. O raciocínio foi similar a uma situação já abordada na questão 4 da Oficina 2. Ao aplicar a ideia de quantas vezes 1/4 cabe em 1/2, os participantes da oficina constataram visualmente que os elementos 1 e 2 compõem a metade do Tangram, o que justifica a igualdade.

Na questão 7, para identificar a porcentagem de cada elemento do Tangram, as equipes utilizaram a ideia de operador. Para os elementos 1 e 2, calcularam 1/4 de 100%, o que resulta em 25%. Para os elementos 3, 5 e 7, calcularam 1/8 de 100%, obtendo 12,5%. Já os elementos 4 e 6 foram calculados como 1/16 de 100%, ou seja, 6,25%.

Na questão 8, é dada a informação de que o elemento 4 representa 15% do total. As equipes relembraram quantas vezes o elemento 4 cabe em cada elemento do Tangram e fizeram as devidas somas de porcentagens.

Na questão 9, foi dado que o elemento 1 representa 28% do total do Tangram. Sabe-se que os elementos 3 e 5 representam metade do valor do elemento 1, portanto a porcentagem deles é 14%. O quadrado original equivale a 4 vezes o elemento 1, então sua porcentagem é $4 \times 28\% = 112\%$.

Para responder às questões 10 e 11, as equipes levaram em consideração a área de cada elemento.

Na questão 12 as equipes relacionaram a probabilidade com a fração de cada elemento do Tangram. Por exemplo, o elemento 1 tem probabilidade de 1/4 ou 25%. A união dos elementos 3, 4, 5 e 7 tem probabilidade de 1/8 + 1/16 + 1/8 + 1/8 = 7/16. Além disso, os participantes do trio que perceberam que falta apenas o elemento 6 para completar a metade do Tangram que está abaixo da sua diagonal, ou seja, a fração seria 1/2 – 1/16 = 7/16, o que coincide com o cálculo anterior. Percentualmente, isso equivale a 7/16 de 100%, ou seja, 43,75% (50% - 6,25%).

Na questão 13, as equipes consideraram a região abaixo da diagonal do quadrado como a unidade, ou seja, 100% do Tangram. Com base nessa hipótese, o trio chegou à conclusão de que o Tangram triangular poderia ser composto por 8 elementos dos tipos 4 ou 6. Dessa forma, a fração que representa o elemento 4 é 1/8. A análise foi finalizada com base nesse resultado. Uma das equipes comentou que, em relação à questão anterior, as probabilidades dos elementos é o dobro, uma vez que a área ficou reduzida pela metade.

5.5 Considerações pessoais do autor a respeito das aplicações

- A aplicação das oficinas com professores de diferentes disciplinas foi extremamente gratificante, pois permitiu uma aproximação das dificuldades de aprendizagem dos alunos e suas necessidades. Além disso, a participação de professores de Matemática, tanto os que atuam quanto os que não atuam diretamente em sala de aula, permitiram concluir que as atividades foram bem planejadas e terão um impacto significativo na prática pedagógica desses profissionais.
- Trabalhar com professores ampliou a abrangência do trabalho, tornando-o mais eficaz, já que, ao envolver vários educadores, foi possível atingir um número muito maior de estudantes. Caso o trabalho fosse realizado apenas com uma turma específica, sua influência seria mais limitada.
- Embora não seja possível comprovar de forma definitiva a eficácia do trabalho, os comentários positivos de todos os que participaram possibilitam acreditar que estamos no caminho certo. A receptividade e o interesse demonstrados são um bom indicativo de que as oficinas atingiram seus objetivos.
- A aplicação deste trabalho foi essencial para aprimorá-lo de maneira definitiva. Cada experiência prática permitiu ajustes importantes que contribuíram para a melhoria contínua do projeto.
- Ouvir de vários professores participantes que, se tivessem aprendido Matemática dessa forma, com certeza gostariam mais da disciplina e teriam aprendido mais, é uma recompensa que não tem preço. Saber que o trabalho teve esse impacto emocional e educativo é extremamente gratificante.
- Ver o brilho nos olhos de professores de Matemática, ao descobrirem que têm à disposição um recurso que pode ajudá-los na sua prática diária também foi uma experiência muito enriquecedora. Essa mudança de perspectiva foi um dos momentos mais gratificantes da oficina.
- Ouvir de um professor que, inicialmente, não gostava desse tipo de abordagem, mas que, a partir do contato com o trabalho, começou a mudar de ideia, nos fizeram concluir que todo o esforço e as dificuldades enfrentadas para desenvolver este trabalho valeram a pena.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das análises realizadas em livros didáticos, buscamos atividades que abordassem o ensino de frações de forma concreta e utilizando materiais manipuláveis, e encontramos diversas abordagens interessantes. Educadores utilizam fichas representando partes de figuras, tirinhas de frações e objetos geométricos divididos em partes iguais ou proporcionais, permitindo aos alunos manipular esses materiais. O Tangram também foi explorado não apenas para frações, mas também para áreas, perímetros de figuras e outros conteúdos geométricos e trigonométricos.

Nosso trabalho não pretendeu esgotar o assunto, mas sim incentivar professores interessados a desenvolverem novas abordagens e explorarem outras publicações. Descobrimos diversas utilidades do Tangram tradicional e propusemos “novos tipos” de Tangrans com formas, partições e quantidades de elementos diferentes, visando potencializar seu uso.

Além disso, exploramos o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) através do Tangram, assim como operações entre frações com denominadores não múltiplos, que consiste em uma dificuldade comum entre os alunos e que nossa pesquisa buscou auxiliar a superar. Não nos limitamos ao Tangram, e exploramos também a ideia de frações como medida, razão e operador, utilizando materiais manipuláveis.

O estudo da história das frações revelou informações importantes sobre sua origem e evolução através do trabalho de grandes matemáticos e diferentes povos ao longo das épocas. Reviver essa história nos permite recriar esses passos junto com nossos estudantes, ajudando-os a entender o processo de construção das frações e despertando o interesse por conhecer essa história.

Nosso trabalho incluiu um conjunto de três oficinas, voltadas a auxiliar a prática dos docentes, que exploram frações e suas operações através de materiais manipuláveis. Após perceber a dificuldade que os alunos têm em somar frações, por exemplo, criamos atividades que fazem uma ponte entre a aritmética envolvida e a visualização concreta do processo e resultado.

As oficinas foram aplicadas para professores das escolas municipais de Ensino Fundamental das redes de Contagem (Escola Professor Domingos Diniz), Betim (Escola

Maria da Conceição Brito) e Belo Horizonte (Escola Presidente Itamar Franco). As aplicações mostraram a importância das atividades propostas para engajar e auxiliar os professores na apresentação do conteúdo de frações. Ainda, ficou notável o preparo necessário para a aplicação, sem improvisos, de forma a abarcar todos os tópicos num grau de dificuldade ascendente.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edição da universidade de São Paulo. São Paulo-SP: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974

BRASIL - MEC. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. 2018. 280–297 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_ versaofinal_site.pdf>. acesso em 07 jul. 2024.

CELESTINO. K.G. **As frações em algumas civilizações antigas**. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2017, Cáscavel. Anais: UNIOESTE, 2017.

CHAQUIAM, M. **Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula** / Miguel Chaquiam. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CLEMENTS, D. H. (1999). **Concrete manipulatives, concrete ideas. Contemporary Issues in Early Childhood**, 1(1), 47-60. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/250150009_'Concrete'_Manipulatives_Concrete_Ideas>. Acesso em: 13 ago. 2024.

CLEMENTS, D. H. and MCMILLEN S. **Rethinking “Concrete” Manipulatives.** Teaching Children Mathematics, Vol. 2, No. 5 (January 1996), pp. 270-279. National Council of Teachers of Mathematics Stable. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/281973684_Rethinking_concrete_Manipulatives/links/560051f308ae07629e52aa08/Rethinking-concrete-Manipulatives.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2024.

Conheça a obra de al-Khwārizmī, o Pai da Álgebra. **IQARA ISLAM**, 2024. Disponível em: <https://iqaraislam.com/conheca-a-obra-de-al-khwarizmi-o-pai-da-algebra>. Acesso em: 17 jul. 2024.

EVES, H. **Introdução à história da matemática,** tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre as Tradições e a Modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica. 2001.

D’AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. O. **Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos**. 1. ed. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2015. 288 p.

D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. 12. ed. Campinas-SP: Papirus, 2005. 120 p. Citado 4 vezes nas páginas 27, 72, 75 e 101.

DANTE, L. R. **Ápis: Matemática**, 4° e 5° anos: ensino fundamental, anos iniciais – 3 ed - São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, L. R. **Teláris: Matemática**, 6º e 7° anos: ensino fundamental, anos finais – 3. ed. – São Paulo: Ática, 2018.

DARELA, E. **História da matemática: livro didático** / Eliane Darela, Marleide Coan Cardoso, Rosana Camilo da Rosa ; revisão e atualização de conteúdo Marleide Coan Cardoso, Rosana Camilo da Rosa ; design instrucional [Karla Leonora Dahse Nunes], Roseli Rocha Moterle. – 3. ed. – Palhoça : UnisulVirtual, 2011. Disponível em:

<ttps://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstreams/6beb85b2-bc6f-4c3a-acec-fc44bb95f1c8/download>. Acesso em: 16 de agosto de 2024.

FACCHI, M.G. **A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática**. 2012. f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria. 2012**.**

GARCIA GAY, M. R; SILVA, W. R. **Araribá mais: matemática**: manual do professor / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editores responsáveis, Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva – Obra em 4 v. do 6° e 7° anos, 1. ed. –São Paulo : Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**: 4° e 5° anos: Componente curricular matemática: ensino fundamental: anos iniciais /. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 6° e 7° anos: ensino fundamental : anos finais – 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

MORAIS, V. S. C. F. **Uma sequência de atividades para o estudo de operações com frações com uso de materiais manipuláveis**. 2012. f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria. 2012 Disponível em: http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/bitstream/UFN-BDTD/406/1/Vanessa%20da%20Silva%20Chaves%20de%20Morais.pdf. Acesso em: 13 de agosto de 2024.

SANTOS, S. F. **O uso do Tangram como proposta no ensino de frações**. 2019. f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás (UFG), Jataí. 2019.

SILVEIRA, E. **Coleção desafio matemática:** 4° e 5º anos ensino fundamental: anos iniciais: manual do professor / Ênio Silveira. – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2021.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. – 2. ed. rev. at. – Lisboa: Gradiva, 1992.

TJANDRA. C. **Eficácia do uso de manipulativos do ensino de Matemática em programas de educação inclusiva em uma escola inicial** jun. 2023. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/371665896_EFFECTIVENESS_OF_USING_MANIPULATIVES_IN_MATHEMATICS_TEACHING_IN_INCLUSIVE_EDUCATION_PROGRAMS_IN_AN_ELEMENTARY_SCHOOL>. Acesso em: 26 jul. 2024.

APÊNDICE A

Competências e habilidades da BNCC a respeito de frações

Objeto de conhecimento	Habilidade BNCC	Ensino
Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.	2° ano
Significado de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5, e 10 às ideias de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.	3° ano
Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100).	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.	4° ano
Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro).	(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.	4° ano
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada pela contagem dos quadradinhos ou metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.	4° ano
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica.	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.	5° ano
Comparação e ordenação de números racionais na representação fracionária e decimal utilizando a noção de equivalência.	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.	5° ano
Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.	(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.	5° ano
Cálculo de porcentagens e representação fracionária.	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.	5° ano

Situações-problema: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.	(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	5° ano
Situações-problema: multiplicação e divisão envolvendo números naturais e racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	5° ano
Frações: significados (parte/todo quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.	6° ano
Frações: significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.	6° ano
Frações: significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.	6° ano
Frações: significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.	6° ano
Frações: significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.	6° ano
Cálculo de probabilidade como a razão entre o	(EFO6MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por um número racional (forma	6° ano

número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral […].	fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos aleatórios.	
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	7° ano
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.	7° ano
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	7° ano
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.	7° ano
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	7° ano

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o(a) professor(a) ____,
da escola ____,
a participar da pesquisa de dissertação de mestrado do PROFMAT no CEFET-MG do professor pesquisador Washington Raimundo da Silva.

A atividade de pesquisa consiste na aplicação de oficinas com o intuito de apresentar uma maneira alternativa de trabalhar o ensino de frações através de materiais manipuláveis, mais especificamente o Tangram. O professor pesquisador observará o comportamento e desempenho dos participantes diante das atividades e fará uma análise descritiva, levando em consideração também as respostas dos participantes a um formulário posterior, contendo os seguintes questionamentos:

1. O que você gostaria de contar sobre sua experiência na(s) Oficina(s)?
2. O que você aprendeu com essa experiência?
3. Houve alguma dificuldade durante a execução?
4. Elenque pontos positivos e negativos.
5. Você gostaria de apresentar alguma sugestão de melhoria?
6. Você pretende aplicar alguma das Oficinas? Por quê?
7. Em sua prática docente, você tem o costume de utilizar materiais manipuláveis? Se sim, de que maneira e para ensinar qual conteúdo?

A participação é voluntária e, mediante a concordância deste termo, os resultados da análise serão publicados na dissertação de mestrado de forma anônima. O material obtido será utilizado unicamente para esta pesquisa e será guardado por, no máximo, um ano após o seu término.

Eu li este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e gostaria de participar da pesquisa.

______________________________, _____ de ______________ de 202__.

____

Assinatura do(a) participante