Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Wilson Dener Pinto Vieira

Recortes de aplicações de conteúdos matemáticos do Ensino Médio

Belo Horizonte
2024

Wilson Dener Pinto Vieira

RECORTES DE APLICAÇÕES DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Weslley Florentino de Oliveira

Banca Examinadora
Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Fábio José Generoso
Alexandre Botelho Brito

Belo Horizonte
2024

Vieira, Wilson Dener Pinto

W753r Recortes de aplicações de conteúdos matemáticos do ensino médio / Wilson Dener Pinto Vieira. – 2024.

97 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Weslley Florentino de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática – Ensino médio – Teses. 2. Aplicações da matemática – Teses. III. Livros didáticos. I. Oliveira, Weslley Florentino. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 510.07

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

Wilson Dener Pinto Vieira

RECORTES DE APLICAÇÕES DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 19 de setembro de 2024.

Wilson Dener Pinto Vieira

Wilson Dener Pinto Vieira
(Autor)

Weslley Florentino de Oliveira

Weslley Florentino de Oliveira
(Orientador)

Belo Horizonte
2024

Dedico este trabalho à memória de Ordália Pinto Vieira, minha mãe e amiga, que sempre me mostrou seu amor e à minha esposa Valéria Soares Ribeiro Vieira, que esteve sempre me apoiando durante todo o Mestrado.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela presença constante em minha vida, sempre me direcionando.

À minha esposa Valéria, que sempre me apoiou e cuidou muito bem dos nossos filhos durante as muitas viagens que fiz para Belo Horizonte para realizar o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Weslley Florentino de Oliveira, que sempre esteve presente quando precisei, no curso de verão e durante a elaboração deste trabalho.

A toda minha família, que sempre me mostrou seu apoio durante o mestrado.

À direção pedagógica do Colégio Prisma, onde leciono há 22 anos, que possibilitou a organização dos meus horários para que eu tivesse a sexta-feira livre para o mestrado.

A todos os professores do Profmat e ao secretário Pedro Falci pelo incentivo e por acreditarem em nossa capacidade.

Aos meus colegas de mestrado, em especial ao colega Joaquim Lopes Júnior, pelo apoio nos momentos difíceis e pelo companheirismo.

Enfim, a todos que torceram por mim, por mais esta conquista.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

O professor desempenha o importante papel de motivar e de inspirar o interesse do aluno no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo fornecer um material didático com aplicações de alguns conteúdos matemáticos do Ensino Médio para servir de apoio aos docentes durante suas aulas. Mais especificamente a proposta do trabalho é construir um material didático para o professor, que traga um pouco do contexto histórico e que aborde aplicações de conteúdos como a função afim, a função quadrática, a função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas e as matrizes em situações da vida real. O trabalho também tem como objetivo a construção de um capítulo com questões que abordem as aplicações mencionadas em seu desenvolvimento. Sabe-se que a Matemática está presente em muitas situações do nosso dia a dia; e acredita-se que o professor poderá usar o produto deste trabalho como uma fonte de pesquisa para mostrar aos seus alunos a relação entre a Matemática e as situações cotidianas, como também, mostrar aplicações em outras disciplinas. Entende-se que, devido ao tempo disponível para elaboração deste trabalho, ele é apenas um recorte devido às inúmeras aplicações existentes dos conteúdos de matemática abordados no Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Aplicações da Matemática. Ensino Médio.

Abstract

The teacher plays the important role of motivating and inspiring the student's interest in the learning process. In this perspective, the present work aims to provide a teaching material with applications of some mathematical contents from High School to support teachers during their classes. More specifically, the purpose of this work is to create a teaching material for the teacher, which includes some historical context and addresses applications of contents such as linear functions, quadratic functions, exponential functions, logarithmic functions, trigonometric functions, and matrices in real-life situations. The work also aims to create a chapter with questions that explore the applications mentioned in its development. It is known that Mathematics is present in many situations in our daily lives, and it is believed that the teacher can use the product of this work as a research resource to show their students the relationship between Mathematics and everyday situations, as well as applications in other subjects. It is understood that, due to the time available for the preparation of this work, it is only a selection due to the numerous existing applications of the mathematical contents covered in High School.

Keywords: Teaching Mathematics. Applications of Mathematics. High school.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CMRJ - Colégio Mlitar do Rio de Janeiro

EEAR - Escola de Especialistas de Aeronáutica

ENEM – Exame Nacional do ensino Médio

ESA - Escola de Sargentos das Armas

IFPE - Instituto Federal de Pernambuco

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

FAMEMA - Faculdade de Medicina de Marília

FCMSC - Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa

MEC - Ministério da Educação e Cultura

MHS - Movimento Harmônico Simples

MRU - Movimento Retilíneo Uniforme

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PARFOR - Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica

PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PNDL - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

ProEB - Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

UEA - Universidade do Estado do Amazonas

UECE- Universidade Estadual do Ceará.

UEL – Universidade Estadual de Londrina

UEMG- Universidade do Estado de Minas Gerais

UERR - Universidade Estadual de Roraima

UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

UFLA - Universidade Federal de Lavras

UFPR - Universidade Federal do Paraná

UNIFESP - Universidade Federal de São Paulo

UNIMONTES - Universidade Estadual de Montes Claros

UNIPAC - Centro Universitário Presidente Antônio Carlos

UPF - Universidade de Passo Fundo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O processo ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil passou, ao longo do tempo, por várias transformações e é tema de inúmeros debates e trabalhos científicos. A escolha do tema deste trabalho está relacionada com minha vivência como docente de Matemática no Ensino Médio.

Minha formação e experiência reforçam essa escolha. Sou formado em Ciências do 1º Grau, com licenciatura plena em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES) e especialista em Estatística pela Universidade Federal de Lavras (UFLA). Atualmente, atuo como professor do Ensino Médio.

Durante a graduação, comecei a atuar como professor de pré-vestibular e permaneci durante 18 anos, sempre ensinando aos alunos como resolver questões de vestibulares. Também atuei como professor de Matemática Financeira no curso de Administração Pública e de Cálculo no curso de Segurança do Trabalho no Centro Universitário Presidente Antônio Carlos (UNIPAC), na cidade de Montes Claros.

Como professor do Ensino Médio, tive passagem pela rede pública e atuo na rede particular desde o ano de 2001. Como estudante, tive aulas no método tradicional de ensino, que é focado em conteúdo, até o Ensino Superior. Talvez por isso e por sempre ensinar aos alunos como passar nos vestibulares, também fui responsável por usar esse método de ensino em minhas aulas. Com o passar do tempo, percebi como o ensino e a aprendizagem de Matemática modificou-se e, por isso, senti a necessidade de melhorar minhas aulas ou até mesmo ajudar meus colegas de profissão. Durante a pandemia, as dificuldades apresentadas, tanto para professores quanto para alunos, reforçaram essa percepção de que o processo de ensino e de aprendizagem passa por muitos desafios.

Pesquisando sobre o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, sempre havia alguns questionamentos e respostas:

1º - Qual é a situação do ensino e da aprendizagem de Matemática no Brasil?

O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil são avaliados por programas como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Para se ter uma noção da situação da Matemática no Brasil, segundo Oliveira (2015),

> em um levantamento feito pelo Movimento Todos pela Educação (TPE), com base na avaliação dos alunos aferida pela Prova Brasil e pelo SAEB, foi mostrado que somente 9,3% dos estudantes do 3º ano do ensino médio tiveram aprendizado considerado adequado em matemática em 2013, e que esse número é inferior ao de 2011, quando 10,3% atingiram a meta, muito distante da meta de 28,3% proposta pelo TPE. (OLIVEIRA, 2015, p.14)

Mais recentemente, em dezembro de 2023, o Ministério da Educação divulgou, em seu portal eletrônico (www.gov.br/mec), os resultados do PISA 2022. De acordo com o Ministério da Educação:

> As médias brasileiras de 2022 foram praticamente as mesmas de 2018 em Matemática, leitura e ciências. Desde 2009, os resultados são estáveis nas três disciplinas, com pequenas flutuações que, na sua maioria, não são significativas. Apesar da média da OCDE nessa edição do estudo ser a menor de toda a série histórica (desde 2000), os estudantes do Brasil obtiveram pontuação inferior a ela nas três disciplinas. (BRASIL, 2023, s/p)

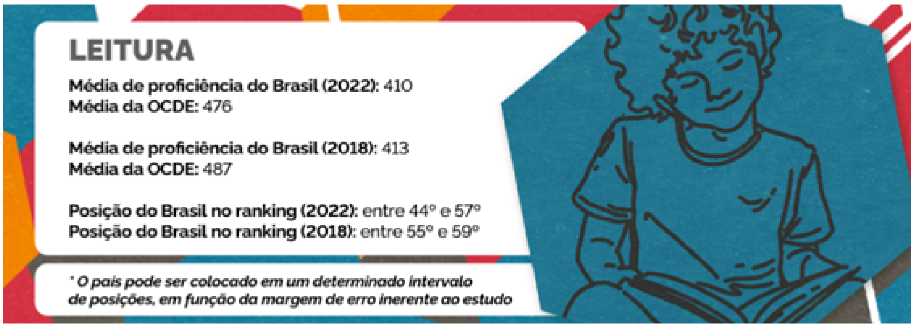
Ainda segundo o Ministério da Educação, em 2022, o desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática foi de 379 pontos, abaixo da média de países como Chile (412), Uruguai (409) e Peru (391). Comparativamente, o Brasil não apresentou diferença estatística significativa em relação à Colômbia (383) e à Argentina (379). A maioria dos estudantes brasileiros, 73%, teve baixo desempenho em Matemática, ficando abaixo do nível 2, o que é considerado o mínimo pela OCDE[1] para o exercício pleno da cidadania. Em contraste, nos países da OCDE, apenas 31% dos estudantes não atingiram esse nível, e somente 1% dos brasileiros alcançou alto desempenho (nível 5 ou superior).

Na figura 1.1, retirada do Portal do Ministério da Educação, é possível perceber a posição do Brasil em 2018 e em 2022. Observa-se uma melhora quando se compara as

[1] A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico, com sede em Paris, França, é uma organização internacional composta por 38 países membros, que reúne as economias mais avançadas do mundo, bem como alguns países emergentes como a Coreia do Sul, o Chile, o México e a Turquia.

posições ocupadas pelo Brasil.

Figura 1.1: Posição do Brasil - Educação



Fonte: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022

2º - O que tem sido feito para melhorar o ensino-aprendizagem de Matemática?

A melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio tem sido foco de diversas iniciativas no Brasil, abordando desde a formação docente até o uso de novas metodologias e tecnologias. Para orientar e consolidar esses esforços, no ano de 2017, foi aprovada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece competências e habilidades que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. A BNCC propõe uma abordagem que busca integrar o ensino de conceitos com a aplicação prática, o que incentiva a resolução de problemas e o pensamento crítico. Para auxiliar os docentes da educação básica, existem programas como:

- Plano Nacional de Formação de Professores (PARFOR), que visa oferecer uma educação superior gratuita e de qualidade para os profissionais do magistério que atuam na rede pública de educação básica.

-Programas de Mestrado Profissional para Qualificação de Professores da Rede Pública de Educação Básica (ProEB) , que tem como o objetivo oferecer uma formação continuada *stricto sensu* para os professores que atuam nas redes públicas de educação básica por meio de Mestrado em rede.

-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional, que visa atender prioritariamente professores de Matemática da educação básica, especialmente da rede pública, mas que recentemente permitiu o ingresso de professores da rede particular.

Para os discentes, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e projetos de pesquisa e de inovação de instituições, como o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) visam melhorar o ensino de Matemática no Brasil.

3º - Como o professor de matemática pode ajudar a melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática?

O professor tem um papel fundamental no ensino e na aprendizagem. Durante as aulas, ele deve fazer uma abordagem contextualizada com situações do cotidiano do aluno, usando exemplos que os ajudem a ver a relevância da Matemática na vida real. O professor deve ter uma formação continuada, participar de cursos de aperfeiçoamento e seminários para se atualizar sobre novas metodologias de ensino. Desse modo, ele pode inovar em sua prática como docente e, assim, incorporar às suas aulas recursos tecnológicos, como plataformas *online* e *softwares* matemáticos, como por exemplo, o GeoGebra e o SciDAVis. Assim, a Matemática se tornaria mais atraente e menos abstrata.

Nesse contexto apresentado sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, este trabalho tem como objetivo contribuir com o professor de Matemática, fornecendo uma fonte de aplicações contextualizadas de alguns conteúdos de Matemática do Ensino Médio e um bloco de questões com gabarito e com resoluções.

Este trabalho está dividido em sete capítulos, sendo que o capítulo 1 corresponde à introdução. No capítulo 2, será apresentada uma breve revisão teórica sobre as dificuldades do ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio e as aplicações de conteúdos de matemática nos livros do Ensino Médio. Já, no capítulo 3, será realizada uma fundamentação teórica dos conteúdos escolhidos, com base em referências de livros de Ensino Médio, como a coleção de Matemática de Manuel Paiva (volumes 1, 2 e 3). Este capítulo oferece uma base teórica que pode ser utilizada pelos professores de Matemática em suas aulas.

O capítulo 4 explora aplicações dos conteúdos matemáticos previamente selecionados. Esse conteúdo é especialmente útil para professores, pois mostra como a Matemática pode ser aplicada em situações cotidianas, evidenciando a interdisciplinaridade com áreas como Química, Física, Biologia e Geografia. No capítulo 5, apresentou-se um bloco de questões contextualizadas para que os professores possam utilizá-las em atividades de classe, até mesmo em suas avaliações. O capítulo 6 apresenta as resoluções das questões do capítulo anterior. Por fim, no capítulo 7, apresentou-se a conclusão acerca do trabalho desenvolvido.

2 Aplicações de conteúdos de Matemática: uma breve revisão teórica

Neste capítulo, apresentaremos os fundamentos teóricos que sustentam o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos com uma discussão sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem de Matemática do Ensino Médio. Em seguida, faremos uma abordagem sobre as aplicações de conteúdos de Matemática nos livros de Ensino Médio, fazendo uma análise sobre os exercícios propostos em alguns capítulos. Analisaremos os seguintes livros didáticos: Matemática, contexto e aplicações,volume 1, de Luiz Roberto Dante e Matemática, ciência e aplicações, volume 2, de Gelson Iezzi.

2.1 Dificuldades do ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio

Ensinar Matemática no Ensino Médio é um grande desafio para os professores nos dias de hoje. Diversas são as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática para os alunos dessa etapa. Dados apresentados em matéria publicada pelo site da CNN Brasil, em 30/11/2022, destacam que: "Apenas 5% dos alunos do Ensino Médio da rede pública têm aprendizado adequado em Matemática. Percentual está abaixo de 2% em quatro estados; dados são do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2021".

Diversos fatores contribuem para a dificuldade de aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Entre eles, destacam-se:

1º) Falta de conhecimento dos conceitos básicos: muitos alunos chegam ao Ensino Médio sem uma compreensão adequada de operações básicas e de conceitos elementares vistos no Ensino Fundamental. Para compreender os conteúdos matemáticos do Ensino Médio, é essencial que os alunos tenham uma base sólida nos conceitos básicos. A ausência dessa base dificulta a assimilação de conteúdos mais avançados, como álgebra, geometria e trigonometria. Nesse sentido, Vidigal (2014) destaca:

> Algumas hipóteses levantadas a partir de minha prática docente apontam que a dificuldade no estudo das funções logarítmicas decorre de certos fatores como, por exemplo:
> - a dificuldade com potenciações,
> - a dificuldade e/ou defasagem no estudo da função exponencial,
> - a dificuldade com o conceito de operações inversas,
> - defasagem de conteúdos da álgebra do ensino fundamental. (VIDIGAL, 2014, P.13)

2º) Falta de professores capacitados: a carência de professores bem preparados contribui para aumentar as dificuldades no ensino-aprendizagem da Matemática. Muitos docentes não conseguem tornar as aulas de Matemática atraentes e interativas, devido à falta de recursos didáticos e tecnológicos. A ausência de uma formação continuada limita a adoção de novas metodologias, como as tecnologias digitais e abordagens baseadas em problemas reais. A utilização de novas tecnologias pode tornar as aulas mais atraentes. Segundo D'Ambrósio (2002) :

> A Matemática é sem dúvida uma das matérias mais temidas pelos alunos em geral, e quanto mais recursos e meios reais forem utilizados numa aula, maior será o aproveitamento da matéria. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado, mas sim ao falar de ciências e tecnologia. (D'AMBRÓSIO, 2002, p.80)

3º) Metodologia de ensino tradicional: muitos professores ainda utilizam metodologias tradicionais, centradas na memorização de fórmulas e na resolução mecânica de exercícios, que frequentemente não trazem uma relação com aplicações práticas dos conteúdos ensinados. Quando os alunos não percebem a aplicação dos conceitos matemáticos em seu cotidiano, tendem a perder o interesse pela disciplina. É importante motivar os alunos. Segundo Piletti (2004):

> A motivação consiste em apresentar a alguém estímulos e incentivos que favoreçam determinado tipo de conduta. Em sentido didático, consiste em oferecer ao aluno os estímulos e incentivos apropriados para tornar a aprendizagem eficaz. (PILETTI, 2004, p. 233)

4º) Falta de contextualização: a contextualização da Matemática, ensinada no Ensino Médio, é uma ferramenta importante para motivar os alunos e para diminuir a falta de interesse nas aulas. Em seu trabalho "Matemática é Realidade: Estratégias de Contextualização na Prática Pedagógica", Michael Douglas (2005) destaca, conforme D'Ambrósio:

> Contextualizar a Matemática é fundamental para todos. Afinal, como podemos deixar de relacionar a adoção da numeração indo-arábica na Europa com o florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? Ou Os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? E não se pode entender Newton descontextualizado. ... Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos. (D'AMBRÓSIO, 2005, p.6)

Percebe-se que as dificuldades no ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Médio resultam de uma combinação de fatores, desde a falta de professores capacitados, passando pela carência de conhecimentos básicos por parte dos alunos, até a maneira como a Matemática é ensinada, que é apresentada muitas vezes de forma abstrata, sem contextualização dos conteúdos e sem relação com o cotidiano dos alunos.

2.2 Aplicações de conteúdos de Matemática em livros do Ensino Médio.

No processo de ensino-aprendizagem de Matemática, a metodologia utilizada é um elemento essencial. O método tradicional baseia-se na ideia de que o docente é o único detentor do conhecimento, que é transmitido aos discentes. Nessa abordagem, o conteúdo apresentado tem um caráter mais conteudista e, muitas vezes, carece de conexão com a realidade. Quem aprende acaba não percebendo as aplicações práticas do que é ensinado. Por isso, a Matemática perde significado e não desperta interesse. De acordo com o PCN,

> ...é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 1999, p.40)

Ainda segundo o PCN (BRASIL, 1999), "o livro didático é um dos recursos de mais forte influência na prática de ensino brasileiro". Nesse sentido, no processo de ensino-aprendizagem, o livro didático é uma das ferramentas mais utilizadas nas escolas. Ele fornece informação e conhecimento de cunho científico, histórico e linguístico. Ele traz informações que possibilitam ao aluno compreender e interpretar situações do seu cotidiano. Com essa importância, o livro didático deve desempenhar um papel facilitador no ensino-aprendizagem, capaz de despertar no aluno a vontade de obter conhecimentos. Para isso, ele deve apresentar o conteúdo de forma clara e trazer uma contextualização e aplicações desses conteúdos na vida diária dos alunos. Mas, o que significa contextualizar? Para o professor de cálculo e estatística Dr. Carlos R. Bifi (2023),

> Contextualizar é situar um conceito, um problema ou uma operação matemática em um contexto que faça sentido para o aluno, que esteja de acordo com o seu nível de desenvolvimento cognitivo e que possa ser explorado de forma crítica e reflexiva (...) a contextualização é uma estratégia que busca relacionar conteúdos matemáticos com situações reais ou significativas para tornar o aprendizado mais motivador. (BIFI, 2023, s/p)

Nesse contexto, apresentamos os resultados de uma breve análise sobre a quantidade de questões contextualizadas nos exercícios propostos nos seguintes livros de Matemática do Ensino Médio: Matemática, contexto e aplicações, volume 1, Luiz Roberto Dante (2004) e Matemática, ciência e aplicações, volume 1, Gelson Iezzi (2001 e 2016). Analisou-se se as questões propostas nos livros anteriormente citados apresentam alguma contextualização, alguma aplicação prática do conteúdo, ou se são apenas questões que cobram o conteúdo matemático, sem relação com o mundo real. Analisou-se os capítulos sobre função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica.

Tabela 2.1: Análise dos exercícios propostos

contexto	contextualizadas	não contextualizadas	total
função afim	18 (26,9%)	49 (73,1%)	67 (100%)
função quadrática	10 (10,1%)	89 (89,9%)	99 (100%)
função exponencial	9 (20,9%)	34 (79,1%)	43 (100%)
função logarítmica	4 (4,55%)	84 (95,45%)	88 (100%)

Livro: Matemática - Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, 2001

Tabela 2.2: Análise dos exercícios propostos

contexto	contextualizadas	não contextualizadas	total
função afim	22 (44,9%)	27 (55,1%)	49 (100%)
função quadrática	10 (20%)	40 (80%)	50 (100%)
função exponencial	11 (55%)	9 (45%)	20 (100%)
função logarítmica	12 (25,6%)	35 (74,4%)	47 (100%)

Livro: Matemática - ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, 2016

A análise dos resultados apresentados nas tabelas 2.1 e 2.2 revela que ocorre uma predominância de questões não contextualizadas frente às questões contextualizadas, tanto no livro de 2001 quanto no livro de 2016, ambas as obras de Gelson Iezzi. Nota-se um aumento no número de questões contextualizadas nas duas edições. Ressalta-se a presença de questões contextualizadas na parte testes de vestibulares, presentes na 1ª edição de 2001.

Destaca-se, no livro Matemática - Ciência e Aplicações de 2016, uma parte destinada ao contexto histórico dos assuntos abordados. Por exemplo, na página de número 49, há um texto sobre o desenvolvimento do conceito de função. Também nessa obra de Gelson Iezzi, existe uma parte destinada às aplicações dos conteúdos abordados nos capítulos. Cita-se, por exemplo, na página 69, a aplicação de função no cálculo de velocidade escalar média e a aceleração escalar média.

Tabela 2.3: Análise dos exercícios propostos

contexto	contextualizadas	não contextualizadas	total
função afim	36 (39,6%)	55 (60,4%)	91 (100%)
função quadrática	31 (22,3%)	108 (77,7%)	139 (100%)
função exponencial	13 (13,8%)	81 (86,2%)	94 (100%)
função logarítmica	15 (11,3%)	118(88,7%)	133 (100%)

Livro: Matemática - Matemática, contexto e aplicações,Luiz Roberto Dante (2004)

Na tabela 2.3, foram dispostos os resultados de uma análise no livro de Luiz Roberto Dante, de 2004. Assim como nos livros analisados de Gelson Iezzi, também nota-se uma quantidade maior de questões não contextualizadas. Nessa análise, constata-se uma porcentagem maior de questões contextualizadas, se comparada com a quantidade apresentada nos livros de Gelson Iezzi.

No livro de Luiz Roberto Dante, foram analisadas questões dos exercícios propostos. Na parte de exercícios de revisão, ocorre a presença de questões contextualizadas. Em destaque, é destinada uma parte para aplicação dos conteúdos. Exemplo disso, na página 166, está um texto sobre aplicação de função quadrática em movimento uniformemente variado (MUV).

Diante dos dados apresentados nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3 , nota-se uma predominância para o uso de questões não contextualizadas, em detrimento das questões contextualizadas. Essa abordagem tradicional, focada em problemas abstratos, embora eficiente para fixar as propriedades dos conteúdos, pode limitar a compreensão dos conceitos matemáticos e sua aplicação em situações do mundo real. Exercícios contextualizados, por outro lado, promovem um aprendizado mais significativo, o que conecta a Matemática a problemas cotidianos e a outras disciplinas, e essa estratégia pode aumentar a motivação e o engajamento dos estudantes.

Portanto, é essencial que autores e educadores considerem um equilíbrio mais adequado entre esses tipos de questões. Dessa forma, incorporar mais exercícios contextualizados poderia enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, proporcionando uma compreensão mais prática da Matemática, preparando melhor os estudantes para utilizar o conhecimento matemático de forma criativa e crítica em suas vidas cotidianas. Essa mudança não implica abandonar os exercícios tradicionais, mas integrá-los com atividades que desafiem os alunos a aplicar o raciocínio matemático, de maneira diversa e relevante.

3 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, será apresentado um breve contexto histórico e uma fundamentação teórica para os temas escolhidos. Vale ressaltar que o objetivo principal deste trabalho é apresentar aplicações de conteúdos de Matemática do Ensino Médio. Assim, será feita uma fundamentação teórica baseada em livros de Ensino médio, de modo que, também servirá de fonte de pesquisa para os alunos do Ensino Médio. Para tal a referência a ser usada como referência para essa fundamentação teórica é a coleção de Matemática, de Manuel Paiva, volumes 1, 2 e 3, da editora Moderna.

3.1 Função Afim

3.1.1 Contexto Histórico

Até chegar ao conceito de função que existe hoje, vários matemáticos contribuíram para seu desenvolvimento. Em Matemática ciências e Aplicações, Gelson Iezzi (2016) relata os seguintes fatos históricos para o conceito de funções:

> Na Antiguidade, a ideia de função aparece, implícita, em algumas informações encontradas em tábuas babilônicas. Um importante registro sobre funções aparece, não com este nome, na obra do francês Nicole Oresme (c. 1323-1382), que teve a ideia de construir "um gráfico" ou "uma figura" para representar graficamente uma quantidade variável — no caso, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme teria usado os termos latitude (para representar a velocidade) e longitude (para representar o tempo) no lugar do que hoje chamamos de ordenada e abscissa — era o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.(IEZZI, 2016, p. 49).

Iezzi(2016) ainda destaca que o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu a palavra função, com o mesmo sentido que conhecemos e usamos hoje. Na obra História da Matemática, Boyer destaca a contribuição do matemático suíço Leonard Euler (1707-1783), com notações para função entre outros:

> A designação de lx para logaritmo de x, o uso da letra agora familiar $\sum$ para indicar somatória, e talvez a mais importante de todas, a notação $f(x)$ para uma função de x (usada nos *Commentaries de Petersburgo* de 1734-1734) são outras notações de Euler relacionadas às nossas. (BOYER, 2012, p. 305).

3.1.2 Fundamentação teórica

Definição

Considere os números reais a e b com $a \neq 0$. Toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ é denominada *função afim* ou *função polinomial do 1º grau.* Na função afim $f(x) = ax + b$, o número a é denominado coeficiente angular de x e o número b é chamado de termo constante ou coeficiente linear.

Exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$. $(a = 2, b = 1)$

b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 4$. $(a = -2, b = 4)$

c) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$. $(a = 2, b = 0)$

.

Casos particulares da função afim

1º) Função Linear

Toda função afim do tipo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$, $(b = 0)$, é denominada função linear.

Exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.

b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$.

2º) Função Identidade

A função afim $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, $a = 1$ e $b = 0$, é denominada função identidade.

.

Gráfico de função afim

O gráfico de uma função afim é o conjunto de pontos $(x, f(x))$ determinados pela função $f(x) = ax + b$. A representação desses pontos no plano cartesiano representa uma reta. Desse modo, adotaremos que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Apresentaremos a seguir exemplos de gráficos de função afim. Tem-se da geometria euclidiana que uma reta fica bem determinada por dois pontos distintos quaisquer. Assim, para construir os gráficos dos exemplos seguintes, tomaremos dois valores arbitrários de x.

Exemplos:

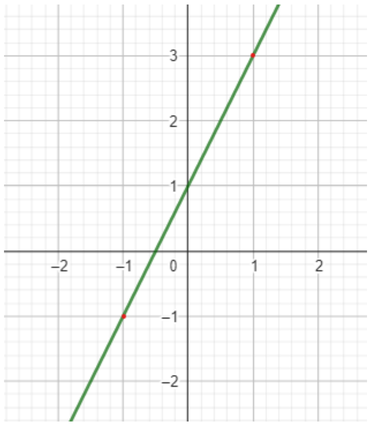
1º) Fazer o esboço do gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$.

Fazendo:

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2.(-1) + 1 = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow (-1, -1)$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2.1 + 1 = 3 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow (1{,}3)$

Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Próprio autor.

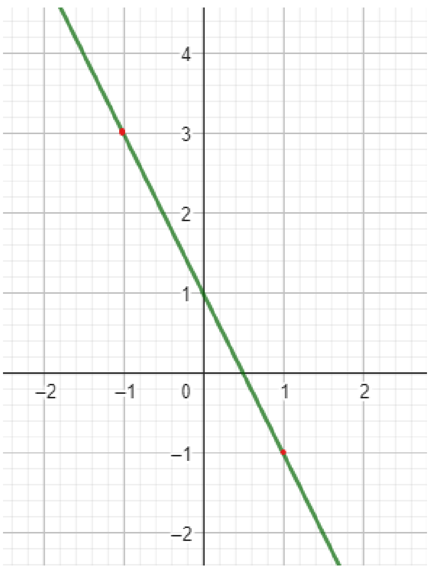
2º) Fazer o esboço do gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 1$.

Fazendo:

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2.(-1) + 1 = 3 \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow (-1{,}3)$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2.1 + 1 = -1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$

Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = -2x + 1$



Fonte: Próprio autor.

Notas importantes:

1ª) Na função afim $f(x) = ax+b$, os coeficientes a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e o coeficiente linear.

2ª) O coeficiente linear b indica o valor no qual o gráfico (reta) intercepta o eixo y. O ponto de interseção entre a reta e o eixo y é o ponto $(0{,}b)$.

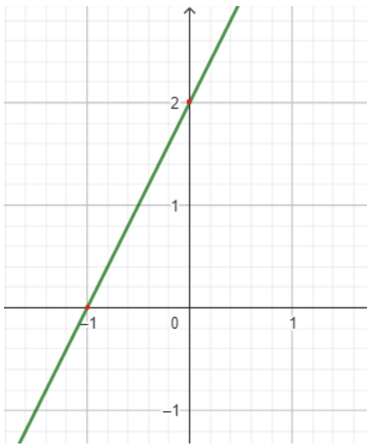
3ª) O valor no qual o gráfico da função linear intercepta o eixo x é chamado de *zero da função* ou *raiz da função*. Esse valor é dado por $x = -b/a$ e o ponto de interseção entre a reta e o eixo x é o ponto $(-b/a{,}0)$.

Exemplo: Fazer o esboço do gráfico da função afim $f(x) = 2x + 2$.

Faremos o gráfico da função $f(x) = 2x + 2$, utilizando os pontos de interseção do gráfico com os eixos x e y.

Como $a = 2$ e $b = 2$, a raiz da função será $x = -1$ e os pontos de interseção entre o gráfico e os eixos x e y serão, respectivamente, $(-1{,}0)$ e $(0{,}2)$.

Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = 2x + 2$



Fonte: Próprio autor.

Crescimento e decrescimento

Seja uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

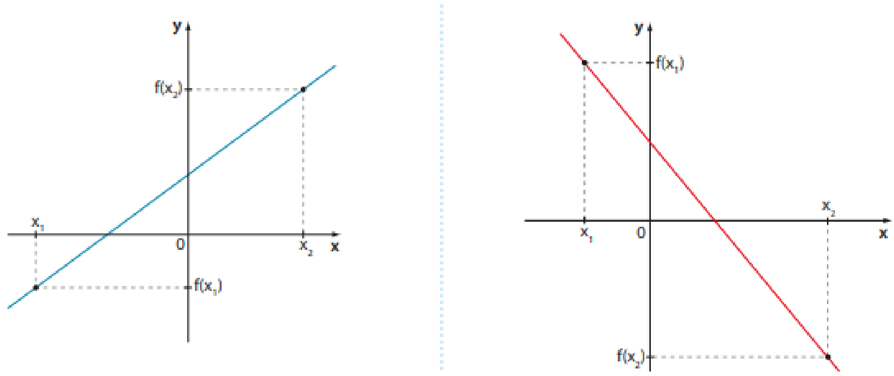
- Se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então $a \cdot x_1 < a \cdot x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 + b < a \cdot x_2 + b$. Logo $f(x_1) < f(x_2)$. A função afim é dita **crescente**.

- Se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então $a \cdot x_1 > a \cdot x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 + b > a \cdot x_2 + b$. Logo $f(x_1) > f(x_2)$. A função afim é dita **decrescente**.

A função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

Os gráficos na figura 3.4 representam funções afim crescente e decrescente, respectivamente.

Figura 3.4: Função afim crescente e decrescente



Fonte: Matemática: Ciências e Aplicações, Gelson Iezzi, 2016.

3.2 Função Quadrática

3.2.1 Contexto Histórico

O estudo da função quadrática evoluiu significativamente ao longo dos séculos, desde as equações resolvidas por babilônios e egípcios até a formalização rigorosa e aplicação em várias disciplinas modernas. De acordo com Silva (2019):

> O estudo da funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. A resolução de problemas que são modelados por uma equação do segundo grau está entre os mais antigos da Matemática. Há vários textos cuneiformes, escritos pelos babilônicos há quase 4000 anos que tratam o tema. (SILVA, 2019, p.15)

Em seu trabalho, Ribeiro (2013) destaca a contribuição do povo hindu para encontrar a resolução de uma equação do segundo grau. Para ela:

> A Matemática hindu era feita a partir de problemas reais, cobrada de forma poética, sem fornecer fórmula para as resoluções e começou a utilizar os números negativos e o zero como um elemento de cálculo. A contribuição hindu para a história da Matemática tem como personagens Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-665), Bhaskara I e Bhaskara II. Sobre a equação quadrática, Brahmagupta estudou a fórmula escrita e alguns anos depois, um aluno seu, conhecido como Bhaskara I (século VI), reescreveu de forma descritiva os versos nela contidos. (RIBEIRO, 2013, p.8)

3.2.2 Fundamentação teórica

Definição

Considere os números reais a, b e c com $a \neq 0$. Toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ é denominada *função quadrática* ou *função polinomial do 2º grau.*

Exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 5x + 6$. $(a = 1, b = 5, c = 6)$

b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x$. $(a = -1, b = 4, c = 0)$

c) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. $(a = 1, b = 0, c = 0)$.

Gráfico de função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é o conjunto de pontos $(x, f(x))$ determinados pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$. A representação desses pontos no plano cartesiano representa uma parábola.

Exemplos:

1º) Fazer o esboço do gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x$.

Fazendo:

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3 \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow (-1{,}3)$

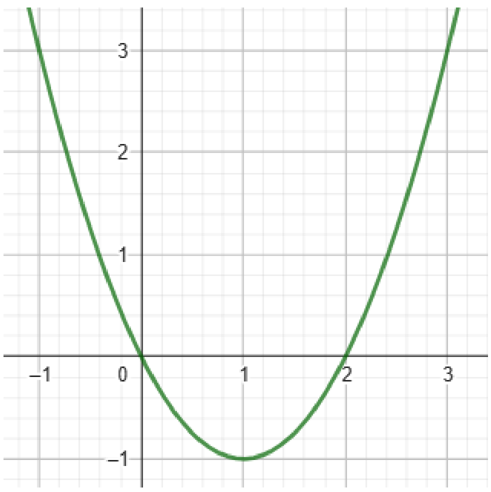
$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0{,}0)$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (2{,}0)$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^2 - 2(3) = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \Rightarrow (3{,}3)$

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x$



Fonte: Próprio autor.

$2^{\underline{o}}$) Fazer o esboço do gráfico da função quadrática

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 2x$.

Fazendo:

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) = -3 \Rightarrow f(-1) = -3 \Rightarrow (-1, -3)$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -(0)^2 + 2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0{,}0)$

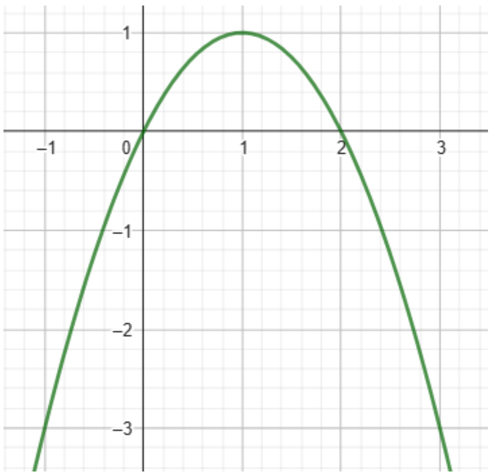
$x = 1 \Rightarrow f(1) = -(1)^2 + 2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow (1{,}1)$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 + 2(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (2{,}0)$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -(3)^2 + 2(3) = 3 \Rightarrow f(3) = -3 \Rightarrow (3, -3)$

O gráfico de $f(x) = -x^2 + 2x$ é:

Figura 3.6: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x$



Fonte: Próprio autor

Nota: quando $a > 0$, a parábola apresenta concavidade para cima e um ponto de mínimo, quando $a < 0$, a parábola apresenta concavidade para baixo e um ponto de máximo. Assim, no $1^{\underline{o}}$ exemplo, a parábola apresenta um valor mínimo para y, $y = -1$ quando $x = 1$. No $2^{\underline{o}}$ exemplo, a parábola apresenta um valor máximo de y, $y = 1$ quando $x = 1$.

Pontos importantes da parábola

Alguns pontos da parábola são importantes, pois facilitam a construção do gráfico. São eles:

- **Ponto de interseção da parábola com o eixo** y

Esse ponto é determinado, fazendo $x = 0$. Temos $f(0) = 0^2 + b.0 + c = c$. Assim, o ponto de interseção da parábola com o eixo y será $(0,c)$.

- **Pontos de interseção da parábola com o eixo x**

Para determinar esse pontos, devemos fazer $y = 0$. em seguida, devemos resolver a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Para isso, usaremos as fórmulas de discriminante $\triangle = b^2 - 4ac$ e a fórmula resolutiva da equação de segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2.a}$. As raízes x_1 e x_2 encontradas representam as abcissas dos pontos de interseção da parábola com o eixo x.

Note que, na equação $ax^2 + bx + c = 0$, se:

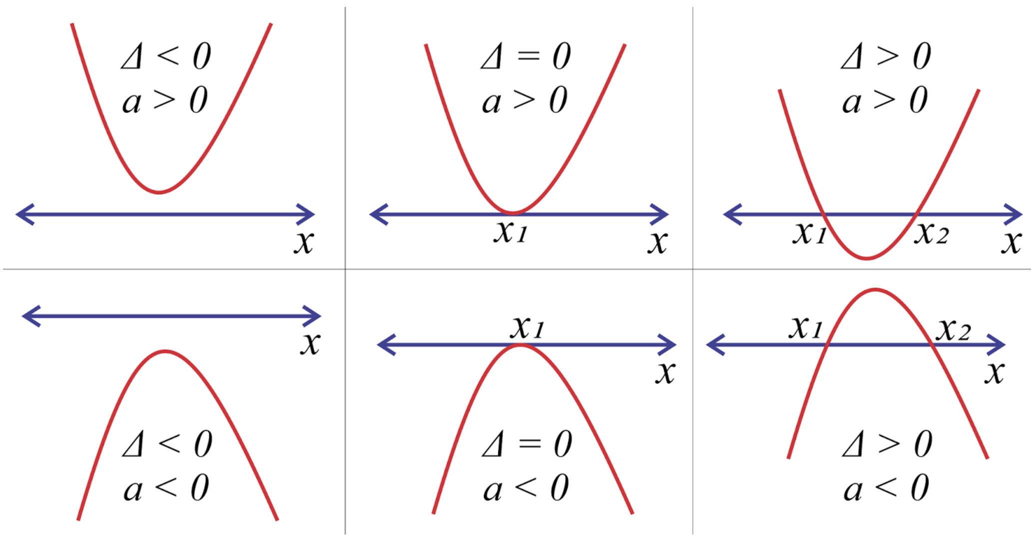
- $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas, $x_1 \neq x_2$. Os pontos interseção da parábola com o eixo x são $(x_1{,}0)$ e $(x_2{,}0)$.

- $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$. O ponto interseção da parábola com o eixo x é $(x_1{,}0)$ ou $(x_2{,}0)$. Neste caso, dizemos que a parábola é tangente ao eixo x.

- $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais. Neste caso, a parábola não interceptará o eixo x.

A figura 3.7 apresenta as situações possíveis para equação do $ax^2 + bx + c = 0$ em relação aos valores de a e discriminante (Δ), indicando o sentido da concavidade da parábola e os pontos de interseção com o eixo x.

Figura 3.7: Posições da parábola



Fonte: https://calculando2016.blogspot.com/p/blog-page-76.html

- **Vértice da parábola**

O ponto vértice da parábola da função $y = ax^2 + bx + c$, indicado por $V(x_v, y_v)$, representa o ponto de máximo da função quadrática (quando $a < 0$) ou o ponto de mínimo (quando $a > 0$). Para calculá-lo, usamos as fórmulas:

$x_v = \frac{-b}{2a}$ para a abcissa do vértice e $y_v = \frac{-\triangle}{4a}$ para a sua ordenada.

Exemplo:

Façamos o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$:

-Os coeficientes são $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$.

-O ponto de interseção da parábola com o eixo y é (0,3).

- Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, temos:

$\triangle = (-4)^2 - 4.1.3 = 4 \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.1}$

$\therefore x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

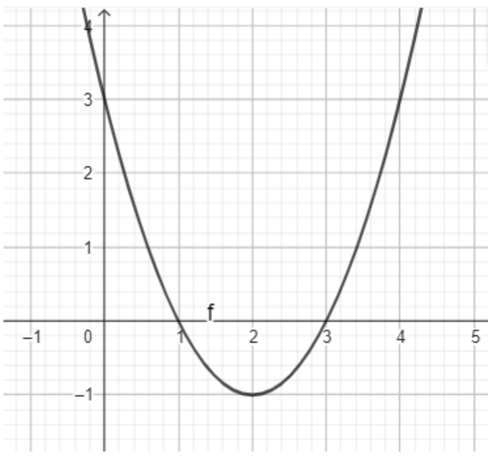
os pontos de interseção da parábola com o eixo x são (1,0) e (3,0).

- Calculando as coordenadas do vértice, temos:

$x_v = \frac{-(-4)}{2.1} = 2$ e $y_v = \frac{-4}{4.1} = -1$

O vértice é o ponto $V = (2, -1)$.

Figura 3.8: Gráfico da função y=x$^2 - 4x + 3$



Fonte: Próprio autor

Na figura 3.8, observa-se que:

- a parábola tem concavidade para cima, pois $a > 0$.

- a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos, pois $\Delta > 0$.

- a parábola apresenta ponto mínimo, pois $a > 0$. Assim, a função apresenta valor mínimo igual $y_v = -1$.
- A imagem da função é $Im = \Big\{ y \in \mathbb{R} | y \geq 1 \Big\}$

Forma Canônica

Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com vértice $V(x_v, y_v)$. A forma $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ é denominada forma canônica da função quadrática.

Demonstração: colocando a em evidência e utilizando a técnica de completar quadrado, tem-se:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$f(x) = a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$

$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b^2}{4a^2})]$

$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

$f(x) = a(x - \frac{-b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Como $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, podemos escrever a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

3.3 Exponencial

3.3.1 Contexto Histórico

O estudo das funções evoluiu ao longo dos séculos, recebendo contribuições de diversos matemáticos, em diferentes períodos históricos. Segundo Júnior (2022),

> Especificamente sobre função exponencial, as pesquisas são também antigas e estudiosos contriburam para nosso conhecimento de hoje. Podemos citar, por exemplo, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnz, Leonhard Euler, Peter Gustav Lejune Dirichet, Arquimedes e Bonaventura Cavalieri. (JÚNIOR, 2022, p.14)

Segundo Santos (2018), o conceito de exponencial como função foi desenvolvido por Bernoulli em 1697, com a obra "*Principia Calculi Exponentialum seu Percurrentium*", na qual ele apresenta diversos cálculos em que a variável da função é o expoente.

Outro matemático que contribuiu para o estudo da função exponencial foi René Descartes, em 1637, quando deixou a notação de potência usada hoje, utilizando numerais como expoente de uma determinada base. O matemático e físico escocês John Napier (1550-1617) dedicou-se ao estudo de logaritmos e funções exponenciais.

3.3.2 Fundamentação teórica

Sabemos que a falta de conhecimento dos conceitos básicos é uma das causas das dificuldades para se compreender os conteúdos do Ensino Médio. Para o estudo da função exponencial e logaritmos, é importante que o aluno compreenda algumas propriedades de potenciação e de radiciação, vistas no Ensino Fundamental.

Potenciação em $\mathbb{R}$

Definições:

1ª)Potência de expoente natural.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ... \cdot a}_{n \ vezes} \text{ , para } a \in \mathbb{R} \text{ , } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Exemplos:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

2ª)Potência de expoente inteiro e negativo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ , para } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Exemplo:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Propriedades das potências de expoentes inteiros

Considerando as condições de existências, tem-se as propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Exemplo: $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$.

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$. Exemplo: $5^3 \div 5^2 = 5^{3-2} = 5^1$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$. Exemplo: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$.

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Exemplo: $(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$.

5. $(a \div b)^m = a^m \div b^m$. Exemplo: $(5 \div 3)^3 = 5^3 \div 2^3$.

Radiciação em $\mathbb{R}$

Definição 1: raiz n-ésima aritmética

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \text{ para } a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+ \text{ e } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplos:

$\sqrt[2]{25} = 5$, pois $5^2 = 25$ e $5 \in \mathbb{R}_+$.

$\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \in \mathbb{R}_+$.

.

Nota

Sendo a um número real positivo, n um número natural ímpar e b um número real, define-se:

$$\sqrt[n]{-a} = b \Leftrightarrow b^n = -a$$

Exemplos:

$\sqrt[3]{-125} = -5$, pois $(-5)^3 = 125$.

$\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$.

.

Definição 2: potencia de expoente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ para } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } m,n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geq 1$$

Exemplos:

$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^1} = 2$

$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125^1} = 5$.

Nota

sendo a um número real positivo, m um número, n um número inteiro positivo e ímpar e b um número real, define:se

$$(-a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(-a)^m}$$

Exemplos:

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{(-8)^1} = -2$

$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-125)^1} = -5$

.

Propriedades dos radicais

Considerando as condições de existência, as seguintes propriedades são válidas para radicandos não negativos.

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Exemplo: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5 \cdot 7} = \sqrt[3]{35}$.
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Exemplo: $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$.
3. $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$. Exemplo: $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5^1}$.
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Exemplo: $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3}$.
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. Exemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$.

Função Exponencial

Definição

Considere o número real e positivo a, $a \neq 1$. Chama-se função exponencial toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$.

b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

c) $f(x) = 3^x$

d) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

Gráfico da função exponencial

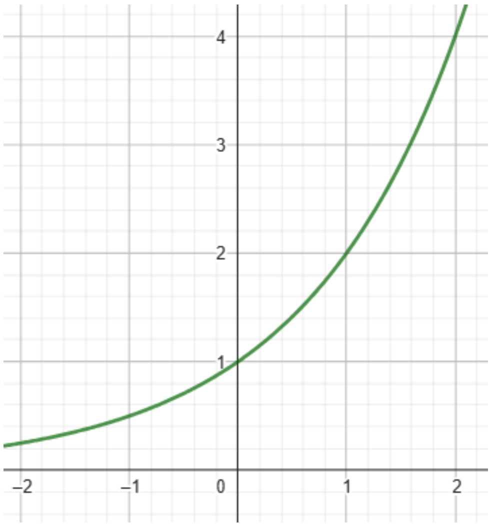
Observe que a base a deve ser positiva e diferente de 1. Neste caso, teremos duas possibilidades: $a > 1$ e $0 < a < 1$. Assim vamos construir os gráficos da funções:$f(x) = 2^x$ e $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Exemplo 1: Fazer o esboço do gráfico da função $f(x) = 2^x$

Usaremos uma tabela para obter o gráfico.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	1/4	1/2	1	2	4

Figura 3.9: Gráfico da função $f(x) = 2^x$



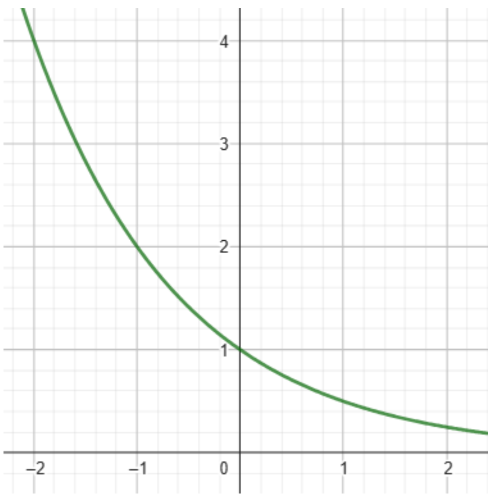
Fonte: Próprio autor.

Exemplo 2: Fazer o esboço do gráfico da função $f(x) = (1/2)^x$

Usaremos uma tabela para obter o gráfico.

x	-2	-1	0	1	2
$y = (1/2)^x$	4	2	1	1/2	1/4

Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = (1/2)^x$



Fonte: Próprio autor.

Crescimento e decrescimento da função exponencial

O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ é uma hipérbole e pode ser crescente ou decrescente.

- Se $a > 1$ e $x_1 < x_2$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$. Logo $f(x_1) < f(x_2)$. A função exponencial é dita **crescente**.

- Se $0 < a < 1$ e $x_1 < x_2$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$. Logo $f(x_1) > f(x_2)$. A função exponencial é dita **decrescente**.

As figuras 3.9 e 3.10 representam, respectivamente, funções exponenciais crescente e decrescente.

3.4 Logarítmos

3.4.1 Contexto Histórico

Atribui-se a descoberta dos logaritmos ao matemático escocês John Napier (1550-1617). Naquela época, os cálculos matemáticos eram feitos manualmente, sendo assim demorados e propensos a erros.

Segundo Boyer (2012), Napier, em 1614, publicou um trabalho intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Tabela de Logaritmos), no qual descrevia sua descoberta. Com os logaritmos, Napier tinha a intensão de simplificar a multiplicação e a divisão, convertendo-as em adições e em subtrações, respectivamente. Isso foi revolucionário, pois reduziu significativamente a quantidade de cálculos necessários. A figura 3.11 representa o frontispício da obra de John Napier sobre os logaritmos, datada de 1614.

Em 1617, o matemático inglês Henry Briggs trabalhou com Napier para expandir os logaritmos, propondo logaritmos na base 10. De acordo com Boyer (2012), Briggs publicou, em 1617, *Logarithmorum Chilias Prima*. Nesse trabalho, ele apresentou uma tabela com logaritmos para os números de 1 a 1000 calculados com base nos logaritmos naturais introduzidos por Napier. E em 1624, Briggs publicou *Arithmetica Logarithmica*, que era uma versão de seu trabalho publicado em 1617 com a inclusão de tabelas para os números de 1 até 20000 com precisão de 14 casas decimais. Os trabalhos de Briggs foram fundamentais para a aceitação dos logaritmos como uma ferramenta matemática essencial.

Deve-se destacar Jobst Bürgi, matemático suíço do século XVI, que fez várias contribuições importantes para o estudo dos logaritmos. Ele é frequentemente creditado por ter desenvolvido os logaritmos independentemente de John Napier, embora Napier tenha sido o primeiro a publicar suas descobertas.

Figura 3.11: Frontispício da obra de John Napier sobre os logaritmos datada de 1614.

Fonte: Matemática: ciências e aplicações, Gelson Iezzi, 2016.

3.4.2 Fundamentação teórica

Definição

Considerando os números reais a e b, sendo $a > 0$ e $0 < b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b, o expoente x ao qual a base b deve ser elevada para encontrarmos como resposta o número a, ou seja, $b^x = a$. Em símbolos matemáticos, escrevemos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Na expressão, $\log_b a = x$, denotamos:

- o número a por logaritmando;
- o número b por base do logaritmo;
- o número x por logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$.

b) $\log_4 64 = 3$, pois $4^3 = 64$.

.

Nota: o logaritmo do número a cuja base é 10, é chamado de logaritmo decimal. Escrevemos apenas $\log a$. (nesse caso, a base 10 fica subentendida.)

Exemplos:

a) $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$.

b) $\log 1000 = 3$, pois $10^3 = 1000$.

.

Propriedades dos logaritmos

Considerando os números reais positivos a, b e c, com $b \neq 1$, são válidas as seguintes propriedades:

1. $\log_b 1 = 0$.

2. $\log_b b = 1$.

3. $\log_b a^m = m \cdot \log_b a$, para todo número real m.

4. $\log_b b^m = m$, para todo número real m.

5. $b^{\log_b a} = a$.

6. $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$.

7. $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$.

8. $\log_b a = \dfrac{\log_k a}{\log_k b}$, sendo k um número real positivo e diferente de 1.

Demonstrações

As propriedades **1** ,**2** , **3** , **4** e **5** decorrem da definição de logaritmo.

1. $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$

.

2. $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$

.

3. $\log_b a^m = m. \log_b a$, para todo número real m.

.

Fazendo $\log_b a = x$ pela definição temos $b^x = a$. nessa última igualdade , elevando ambos os membros a m temos:

$(b^x)^m \Leftrightarrow b^{xm} = a^m$.

Pela definição de logaritmo. temos que:

$$b^{m.x} = a^m \Leftrightarrow \log_b a^m = m \cdot x$$

Como $x = \log_b a$, então:

$$\log_b a^m = m \cdot \log_b a.$$

4. $\log_b b^m = m$, para todo número real m.

Pelas propriedades **(3)** e **(1)**, $\log_b b^m = m. \log_b b$ e $\log_b b = 1$, concluímos que:

$$\log_b b^m = m.$$

5. $b^{\log_b a} = a.$

Fazendo $\log_b a = x$, temos $b^x = a$. Nessa última igualdade, substituindo x por $\log_b a$ temos:

$$b^{\log_b a} = a.$$

As propriedades **6**, **7** e **8** precisam de um pouco mais de manipulação algébrica para serem demonstradas.

6. $\log_b(a.c) = \log_b a + \log_b c.$

Fazendo $\log_b a = m$ e $\log_b c = n$, com m e n números reais, temos respectivamente:

$$b^m = a \text{ e } b^n = c.$$

Multiplicando b^m e b^n, temos:

$$b^m \cdot b^n = a.c \Leftrightarrow b^{m+n} = a \cdot c.$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_b(a \cdot c) = m + n$$

Substituindo $m = \log_b a$ e $n = \log_b c$ nessa última igualdade, concluímos que:

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c.$$

7. $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$

A demonstração dessa propriedade é semelhante a anterior.

Fazendo $\log_b a = m$ e $\log_b c = n$, com m e n números reais, temos respectivamente:

$$b^m = a \text{ e } b^n = c.$$

Dividindo b^m e b^n, temos:

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow b^{m-n} = \frac{a}{c}.$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_b(\tfrac{a}{c}) = m - n$$

Substituindo $m = \log_b a$ e $n = \log_b c$ nessa última igualdade, concluímos que:

$$\log_b(\tfrac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c.$$

8. $\log_b a = \dfrac{\log_k a}{\log_k b}$, sendo k um número real positivo e diferente de 1.

Fazendo $\log_b a = m$ e $\log_k a = n$, com m e n números reais, temos respectivamente:

$$b^m = a \text{ e } k^n = a.$$

Pela propriedade transitiva da igualdade, temos:

$$b^m = a \text{ e } k^n = a \Leftrightarrow \mathrm{b}^m = k^n$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$b^m = k^n \Leftrightarrow \mathrm{n} = \log_k b^m$$

Pela propriedade **3**, podemos escrever:

$$n = m \cdot \log_k b$$

Substituindo $m = \log_b a$ e $n = \log_k a$ nessa última igualdade, temos:

$$\log_k a = \log_b a \cdot \log_k b$$

Logo, $\log_b a = \dfrac{\log_k a}{\log_k b}$.

3.5 Matrizes

3.5.1 Contexto Histórico

O estudo das matrizes teve contribuições e evoluiu ao longo dos séculos, passando por várias fases de desenvolvimento significativo. O conceito de matrizes pode ser observado no livro “Os Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática”, de Jiuzhang Suanshu, de 300 a.C. Nessa obra, os matemáticos chineses usaram arranjos retangulares de números para resolver sistemas de equações lineares, um método que pode ser considerado uma forma primitiva de matriz.

No final do século 17, o filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz fez contribuições importantes ao estudo das matrizes ao introduzir o conceito de determinantes em 1693, que são usados para resolver sistemas de equações lineares e analisar propriedades de matrizes. O matemático alemão Carl Friedrich Gauss, conhecido como *princeps mathematicorum* (em latim, o príncipe da Matemática ou o mais notável dos matemáticos) desenvolveu o método de eliminação gaussiana no início do século 19, que é uma técnica para resolver sistemas de equações lineares utilizando operações em matrizes.

Em 1829, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy fez avanços significativos ao formalizar a teoria dos determinantes e introduzir o termo matriz em seu contexto matemático, estabelecendo bases para o desenvolvimento da álgebra linear.

No meio do século 19, o matemático britânico Cayley e o matemático inglês Sylvester foram pioneiros na sistematização do estudo das matrizes. Cayley, em particular, escreveu artigos importantes, incluindo o *A Memoir on the Theory of Matrices* (1858), que foi um marco na formalização da teoria das matrizes. Ele introduziu o conceito de matriz inversa e discutiu propriedades fundamentais das matrizes.

3.5.2 Fundamentação teórica

Toda tabela retangular formada por $m \cdot n$ números e organizada em m linhas e n colunas é chamada de matriz. Denomina-se tipo da matriz a organização $m \times n$. Representamos uma matriz escrevendo os elementos (números) entre parênteses ( ) ou entre colchetes [ ].

Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, temos uma matriz A formada pelos elementos 2, 3, 4 e 5 dispostos em 2 linhas e 2 colunas.

Representações:

- $A_{m\times n}$ representa uma matriz A do tipo $m \times n$.

  Exemplo: $A_{3\times 2}$ representa uma matriz A do tipo 3×2, ou seja, uma matriz formada por $3 \times 2 = 6$ elementos e organizada em 3 linha e 2 colunas.

- a_{ij} representa um elemento da matriz que está localizado na linha i e na coluna j. Exemplo: $a_{12} = 5$ representa o elemento 5 que está localizado na primeira linha e na segunda coluna da matriz.

Exemplo:

$$B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, temos uma matriz B do tipo 2×3 formada pelos elementos $b_{11} = 2$, $b_{12} = 3$, $b_{13} = -2$, $b_{21} = 4$, $b_{22} = 5$ e $b_{32} = -7$.

Matrizes especiais

- Matriz linha: matriz que possui apenas uma linha. **Exemplo**:

$$B_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- Matriz coluna: matriz que possui apenas uma coluna. **Exemplo**:

$$C_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Matriz nula: matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$$D_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz quadrada: matriz que apresenta o número de linhas igual ao número de colunas. Neste caso, a matriz é do tipo $m \times m$ ou $n \times n$. Neste caso, dizemos que a matriz possui ordem n.

  Exemplo:

  $$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

  Observação: os elementos a_{ij} que apresentam $i = j$ formam a diagonal principal e, os elementos a_{ij} que apresentam $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária. No exemplo, temos uma matriz quadrada de ordem $n = 2$. Os elementos da diagonal principal são $a_{11} = 2$ e $a_{22} = 5$. Os elementos da diagonal secundária são $a_{12} = 3$ e $a_{21} = 4$.

- Matriz identidade: matriz que apresenta os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero. Note que toda matriz identidade é também uma matriz quadrada. Uma matriz identidade de ordem n é indicada por $I_{n\times n}$ ou simplesmente por I_n.

  Exemplo:

  $$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matiz transposta

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se matriz transposta da matriz A a matriz $A^t = (b_{ji})_{n\times m}$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$, $\forall i, j$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

A transposta da matriz $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^t_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$.

Observação: note que a linha da primeira matriz torna-se a coluna da segunda, ordenadamente.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais se, e somente se, cada elemento a_{ij} da matriz A for igual ao elemento b_{ij} da matriz B.

Exemplo:

As matrizes $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & x & -2 \\ 4 & y & z \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ são iguais, se e somente se, $x = 3$, $y = 5$ e $z = 7$.

Operações com matrizes

- **Adição de matrizes**

A soma de duas matrizes é possível desde que elas sejam do mesmo tipo. Sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+5 \\ 4+(-2) & 5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

- **Produto de um número real por uma matriz.**

Seja um número k e a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. O produto $k \cdot A$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplos:

1.Sejam o número real $k = 5$ e a matriz $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. O produto $k \cdot A$ é dado por:

$$5.\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2 & 5.1 & 5.(-2) \\ 5.4 & 5.3 & 5.(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 20 & 15 & -20 \end{bmatrix}$$

2. Sejam o número real $k = -1$ e a matriz $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. O produto $k \cdot A$ é dado por:

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 2 & -1 \cdot 1 & -1 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Nota

A matriz $(-1)\cdot A$ é chamada de matriz oposta da matriz A e é indicada por $-A$. No exemplo **2**, a matriz $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz oposta da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

- **Subtração de matrizes**

A subtração de duas matrizes é possível desde que elas sejam do mesmo tipo. Sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a subtração $A - B$ que equivale a matriz $A + (-B)$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & 3+(-5) \\ 4+2 & 5+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Produto de matrizes**

A produto de duas matrizes é possível desde que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

Sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{jk})_{p\times n}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = (c_{ik})_{m\times n}$ tal que c_{ik} é igual ao produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B, ou seja, $c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + a_{i4}\cdot b_{4k} + ... \cdot + a_{in}\cdot b_{nk}$, com $i \in 1,2,...,m$ e $k \in 1,2,...,n$

Exemplo:

Sejam as matrizes $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. A matriz $C = A \times B$ é:

$$C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 3\cdot 5 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 4\cdot 3 + 0\cdot 4 + 5\cdot 5 & 4\cdot 1 + 0\cdot 2 + 5\cdot 4 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz produto é $C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 37 & 24 \end{bmatrix}$.

3.6 Funções Trigonométricas

3.6.1 Contexto Histórico

O desenvolvimento da trigonometria ocorreu devido às necessidades da Astronomia, Agrimensura e Navegações. Esse desenvolvimento ocorreu entre os séculos IV e V a.C através dos egípcios e dos babilônios. A figura 3.12 representa o *Papiro Rhind*, em que é possível encontrar problemas envolvendo a cotangente.

Figura 3.12: Papiro Rhind, Museu de Londres

Fonte:https:http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia-trigonometria.

Entre os nomes importantes na história da trigonometria, destacam-se:

-o astrônomo Hiparco de Nicéia (180 a 125 a.C), chamado de o pai da trigonometria, fez um tratado em doze livros em que criou o que deve ter sido a primeira tabela da trigonometria.

- O matemático Menelau de Alexandria (100 d.C) fez um tratado sobre cordas em um círculo em 6 livros.

- Pitolomeu de Alexandria, o mais influente, com a obra trigonométrica da Antiguidade *Sybtaxis mathematica*, em 13 livros. Esse tratado foi chamado de "o maior".

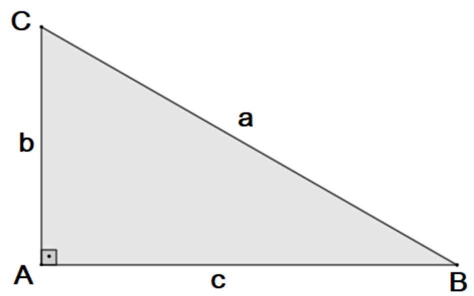
3.6.2 Fundamentação teórica

Alguns conceitos básicos da trigonometria, como razões trigonométricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e ciclo trigonométrico são pré-requisitos para o estudo das funções trigonométricas.

Teorema de Pitágoras

Considere o triângulo retângulo ABC.

Figura 3.13: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Próprio autor

Lados:

$\overline{BC}$ = hipotenusa = a, $\overline{AB}$ = cateto = c e $\overline{AC}$ = cateto = b.

O teorema de Pitágoras afirma que em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Assim, temos que:

$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemplo

Será usado o teorema de Pitágoras para determinar a digonal d de um quadrado em função do lado l.

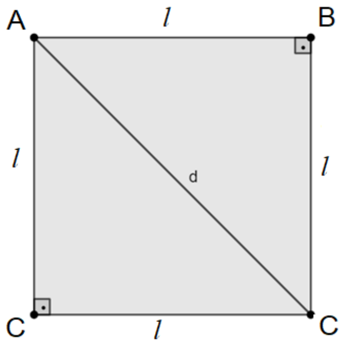
Considere o quadrado abaixo:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo, tem-se:

$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2 \cdot l^2} \Rightarrow d = l\sqrt{2}$

Em um quadrado de lado l, a diagonal d é dada por $d = l\sqrt{2}$.

Figura 3.14: Quadrado de lado l



Fonte: Próprio autor

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considerando um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, define-se as seguintes razões trigonométricas:

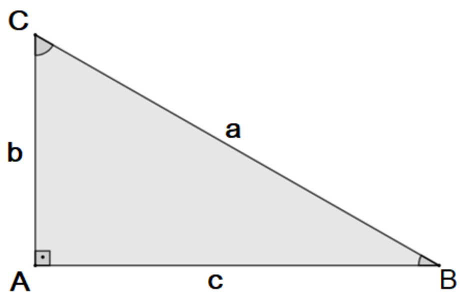
seno : é a razão entre o valor do cateto oposto e o valor da hipotenusa.

cosseno : é a razão entre o valor do cateto adjacente e o valor da hipotenusa.

tangente : é a razão entre o valor do cateto oposto e o valor do cateto adjacente.

Considere o triângulo retângulo abaixo:

Figura 3.15: Triângulo ABC



Fonte: Próprio autor

Sejam os ângulos $\angle ABC = \alpha$ e $\angle ACB = \beta$. As razões trigonométricas são:

- em relação ao ângulo α

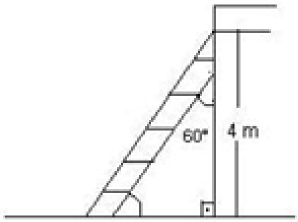
  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$, $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$.

- em relação ao ângulo β

  $\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a}$, $\cos\beta = \frac{b}{a}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b}$.

Exemplo

Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4 metros do solo, forma com essa parede um ângulo de 60°, como mostra a figura abaixo. Qual é o comprimento da escada em metros? (dado: $\cos 60° = \frac{1}{2}$)



Resolução:

Seja y o comprimento da escada. Em relação ao ângulo agudo 60°, temos: cateto adjacente $ca = 4m$ e hipotenusa $hip = y$.

Usando a razão do cosseno, temos:

$\cos 60° = \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 8$

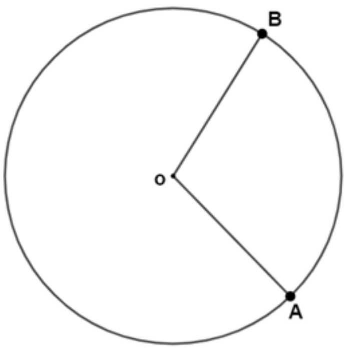
Assim, o comprimento da escada é igual a 8 metros.

Conceitos básicos para compreender o ciclo trigonométricos

- **Arco**

O conjunto de pontos da circunferência entre A e B é denominado de arco. Será considerado o menor arco com extremidades A e B.

Figura 3.16: Arco

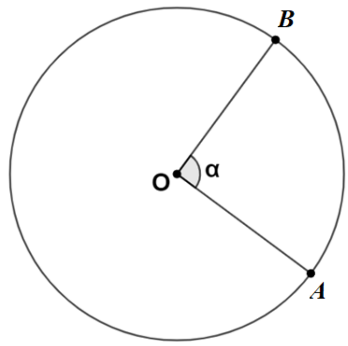


Fonte: Próprio autor

- **Ângulo Central**

  É o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência. A medida do ângulo central é igual à medida do arco por ele compreendido.

Figura 3.17: Ângulo Central

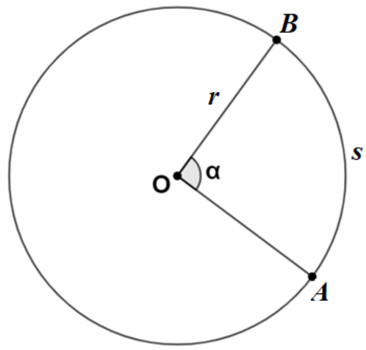


Fonte: Próprio autor

- **Radianos**

  Considere a circunferência de centro O e raio r, com um arco de comprimento s e α o ângulo central do arco.

Figura 3.18: Arco S



Fonte: Próprio autor

Um arco mede um radiano se o seu comprimento for igual à medida do raio da circunferência. Assim, para sabermos a medida de um arco em radianos, devemos calcular quantos raios da circunferência são precisos para se ter o comprimento do arco.

Assim, se um arco tem medida igual a 1 raio, ele mede 1 radiano.

Um arco que mede $2\pi r$, em radianos vale 2π radianos.

Ciclo trigonométrico

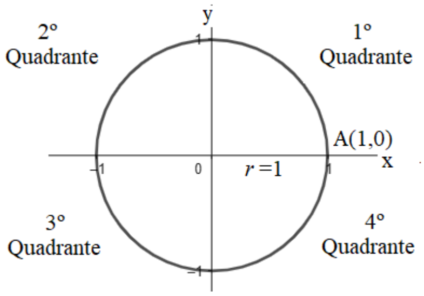
É uma circunferência usada para representar ângulos e relacioná-los com números reais. Na figura 3.19, tem-se um ciclo trigonométrico que apresenta as seguintes características:

-raio unitário, ou seja, $r = 1$.

-ponto $A(1, 0)$ é denominado origem dos arcos e P a extremidade final.

-dividido em 4 partes chamadas de quadrantes e orientadas no sentido anti-horário.

Figura 3.19: Quadrantes do ciclo trigonométrico



Fonte: Próprio autor

Arco orientado

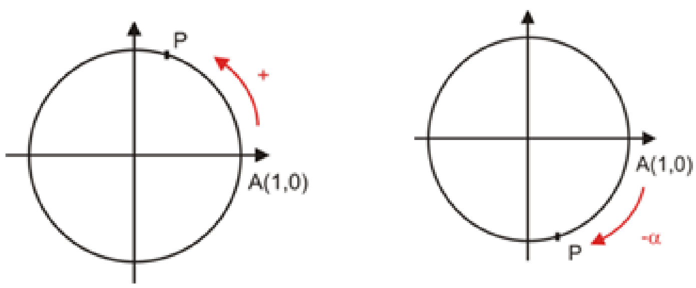
Considere um arco α com início em A e extremidade final em P.

Se $\alpha = 0$, então $P = A$.

Se $\alpha > 0$, realizamos, a partir de A, um percurso de comprimento α no sentido anti-horário e marcamos P no final do percurso.

Se $\alpha < 0$, realizamos, a partir de A, um percurso de comprimento α no sentido horário e marcamos P no final do percurso.

Figura 3.20: Arco orientado

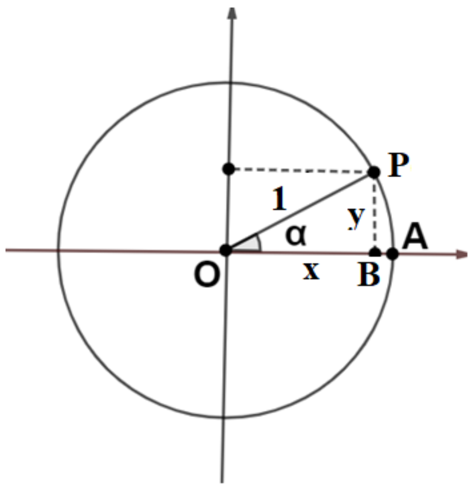


Fonte: Próprio autor

Seno e Cosseno de um arco.

Considere na circunferência trigonométrica o arco AP de medida α, com $0° < \alpha < 90°$.

Figura 3.21: Arco



Fonte: Próprio autor

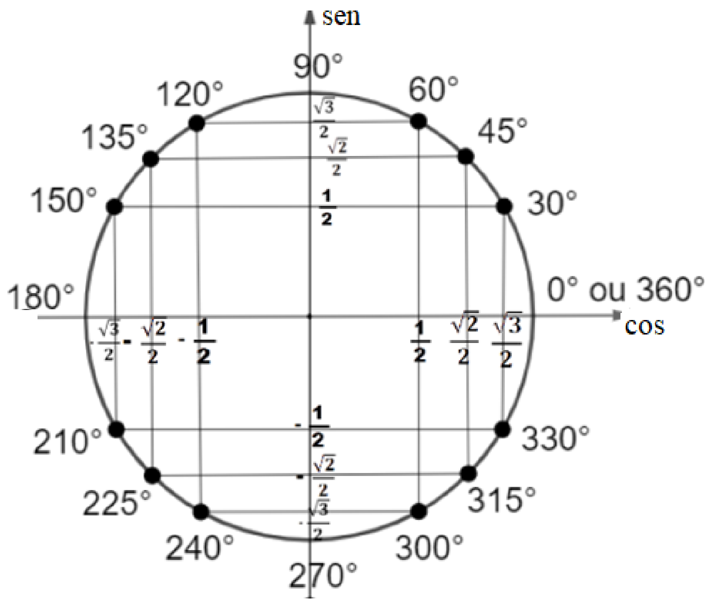
No triângulo retângulo OPB, temos:

$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos\alpha = x$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = y$

Assim, cada ponto $(x{,}y)$ equivale a $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Observe o ciclo abaixo com os valores do seno e cosseno dos principais arcos.

Figura 3.22: Ciclo trigonométrico



Fonte: Próprio autor

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

- **Função Seno**

É toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot x + d)$, com a, b, c e d números reais e $c \neq 0$.

A função definida por $y = 1 + 2 \cdot \text{sen}(3 \cdot x + \pi)$ é um exemplo de função seno com $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ e $d = \pi$.

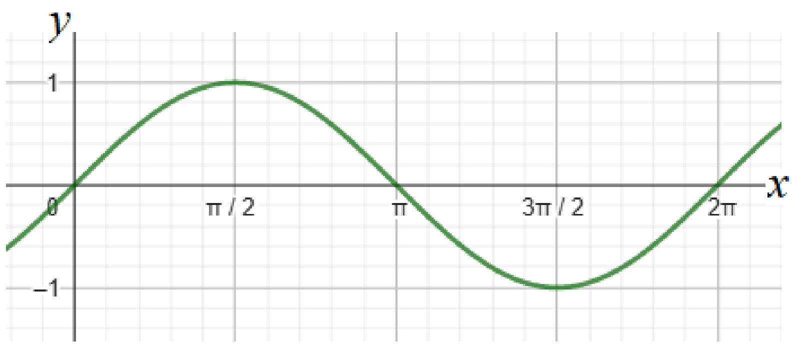
Será feito o gráfico da função seno com $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$, ou seja, a função $y = \text{sen}\, x$.

Para fazermos o gráfico, usaremos a tabela abaixo.

x	$y = \text{sen}\, x$	y
0	$y = \text{sen}\, 0$	0
$\pi/2$	$y = \text{sen}(\pi/2)$	1
π	$y = \text{sen}\, \pi$	0
$3\pi/2$	$y = \text{sen}(3\pi/2)$	-1
2π	$y = \text{sen}\, \pi$	0

Gráfico:

Figura 3.23: Gráfico da função $y = \text{sen}\, x$



Fonte: Próprio autor

Considerações sobre a função $y = \text{sen}\, x$:

-o domínio é $\mathbb{R}$.

-a imagem é o intervalo $[-1{,}1]$, ou seja,$-1 \leq y \leq 1$.

- a função é limitada com $-1 \leq y = \text{sen}\, x \leq 1$.

-o período é $360°$ ou 2π.

- **Função cosseno**

É toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, com a, b, c e d números reais e $c \neq 0$.

A função definida por $y = 2 + 3 \cdot \cos(4 \cdot x - \pi)$ é um exemplo de função cosseno com $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ e $d = \pi$.

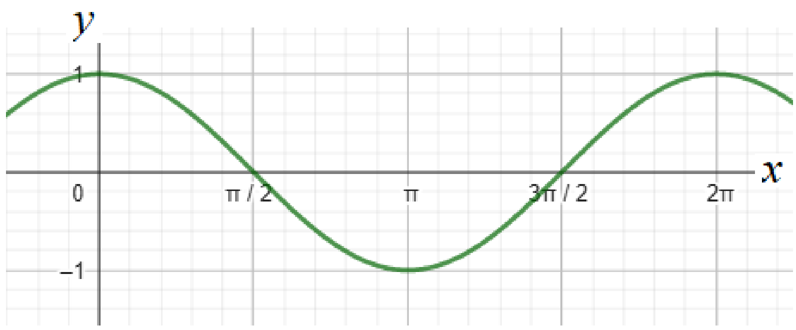
Será feito o gráfico da função cosseno com $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$, ou seja, a função $y = \cos x$.

Para fazer o gráfico, será usada a tabela abaixo.

x	$y = \cos x$	y
0	$y = \cos 0$	1
$\pi/2$	$y = \cos(\pi/2)$	0
π	$y = \cos \pi$	-1
$3\pi/2$	$y = \cos(3\pi/2)$	0
2π	$y = \cos 2\pi$	1

Gráfico:

Figura 3.24: Gráfico da função $y = \cos x$



Fonte: Próprio autor

Considerações sobre a função $y = \cos x$:

-o domínio é $\mathbb{R}$.

-a imagem é o intervalo $[-1,1]$, ou seja,$-1 \leq y \leq 1$.

- a função é limitada com $-1 \leq y = \cos x \leq 1$.

-o período é $360°$ ou 2π.

- **Função Tangente**

  É toda função de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = a + b \cdot \operatorname{tg}(c \cdot x + d)$, com a, b, c e d números reais e $c \neq 0$.

  A função definida por $y = 1 + 2 \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot x)$ é um exemplo de função tangente com $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ e $d = 0$.

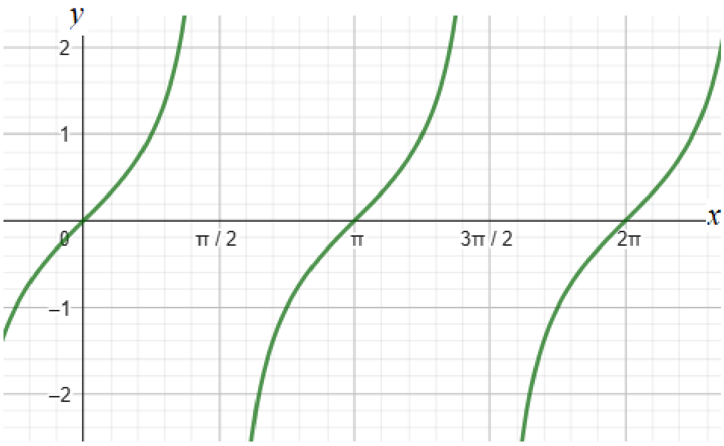
  Será feito o gráfico da função seno com $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$, ou seja, a função $y = \operatorname{tg} x$.

  Para fazer o gráfico, serão usados como auxílio os pontos nos quais os valores da tangente é nulo, indicados na tabela abaixo. Observa-se na figura 3.25 que em cada quadrante, a tangente é crescente.

x	$y = \operatorname{tg} x$	y
0	$y = \operatorname{tg} 0$	0
π	$y = \operatorname{tg} \pi$	0
2π	$y = \operatorname{tg} 2\pi$	0

Gráfico:

Figura 3.25: Gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$



Fonte: Próprio autor

Considerações sobre a função $y = \operatorname{tg} x$:

-o domínio é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

-a imagem é o conjunto $\mathbb{R}$.

- o período é $180°$ ou π radianos.

4 Aplicações

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações de conteúdos de Matemática do Ensino Médio em situações reais. O objetivo é fornecer uma fonte de aplicações para que o professor possa levar ao conhecimento do aluno a importância da Matemática para compreender fenômenos e situações presentes no cotidiano.

4.1 Função Afim e escala termométrica

As escalas termométricas são usadas, geralmente, para medir a temperatura dos corpos. Atualmente as escalas termométricas mais usadas são:

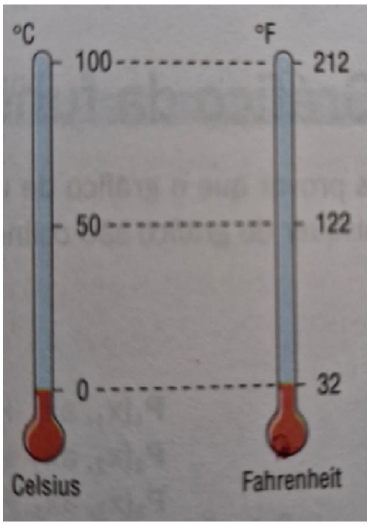
- Escala Fahrenheit: criada pelo físico alemão Daniel Gabriel Fahrenheit, no ano de 1724. A escala Fahrenheit define 32 graus como o ponto de congelamento da água e 212 graus como o ponto de ebulição da água, sob pressão atmosférica padrão. Fahrenheit também desenvolveu o termômetro de mercúrio, que contribuiu para medições mais precisas de temperatura.

- Escala Celsius: criada pelo astrônomo sueco Anders Celsius, em 1742, a escala Celsius define 0 graus como ponto de congelamento da água e 100 graus como o ponto de ebulição da água.

- Escala Kelvin: criada pelo físico e engenheiro britânico William Thomson, também conhecido como Lord Kelvin, no ano de 1848. A escala Kelvin é uma escala termodinâmica absoluta, começando no zero absoluto (0 K), onde todas as partículas cessam movimento. Não utiliza graus, apenas Kelvins (K). O ponto de congelamento da água é 273.15 K, e o ponto de ebulição é 373.15 K.

As escalas Celsius e a Fahrenheit são as mais usadas, sendo essa última mais usada, principalmente, em países como os Estados Unidos e a Inglaterra. Essas escalas foram fundamentais para o desenvolvimento da ciência e da engenharia, permitindo uma medição padronizada e precisa da temperatura. Na figura 4.1, nota-se que, para uma temperatura $50°C$ existe, uma temperatura correspondente $122°F$.

Figura 4.1: Escalas termométricas



Fonte: Matemática: contexto e aplicações, Luiz Roberto Dante, 2004.

Relação entre temperatura Celsius e Fahrenheit

Considere T_c e T_f as temperaturas Celsius e Fahrenheit respectivamente.

Temos a seguinte relação:

$$\frac{T_c - 0}{100 - 0} = \frac{T_f - 32}{180 - 0} \Rightarrow \frac{T_c}{100} = \frac{T_f - 32}{180} \Rightarrow \frac{T_c}{5} = \frac{T_f - 32}{9}$$

Nota: da última igualdade, temos $T_c = \dfrac{5 \cdot T_f - 160}{9}$ que representa uma função afim do tipo $y = ax + b$, sendo $a = 5/9$ e $b = 160/9$.

Exemplo:

Seja a temperatura igual a $50°C$. Essa temperatura em graus Fahrenheit é?

Seja T_f a temperatura Fahrenheit correspondente a $50°C$.

Como $T_c = \dfrac{5 \cdot T_f - 160}{9}$, temos:

$$T_c = \frac{5 \cdot T_f - 160}{9} \Rightarrow 50 = \frac{5 \cdot T_f - 160}{9} \Rightarrow 5 \cdot T_f - 160 = 450 \Rightarrow T_f = 122$$

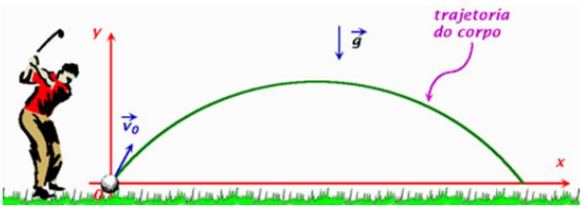
Então, uma temperatura $50°C$ correspondente a $122°F$.

4.2 Função Quadrática e lançamento oblíquo

4.2.1 Lançamento oblíquo

Quando um objeto é lançado na diagonal, ele descreve um lançamento oblíquo. O lançamento oblíquo é um movimento composto por um movimento horizontal e um movimento vertical. Segundo Galileu, se um móvel apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo. Esse é o princípio da Simultaneidade.

Figura 4.2: Lançamento oblíquo



Fonte: https://www.todamateria.com.br/lancamento-obliquo

Quando um corpo é lançado obliquamente, ele descreve um movimento parabólico em relação à Terra.

No movimento na vertical, o projétil descreve um Movimento Uniformemente Variado (MUV), cuja posição vertical em função do tempo é dada pela equação:

$$y = y_o + v_{o_y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Sendo:

- y a posição vertical, medida em metros;
- y_o a posição vertical inicial medida em metros;
- v_{o_y} a componente vertical do vetor velocidade inicial, medida em metros por segundo;
- t o tempo, medido em segundos;
- g a aceleração da gravidade, que vale aproximadamente 9,8m/s^2.

Exemplos

1. (Fcmscsp 2022) Como mostra a imagem, em uma competição de saltos ornamentais, uma atleta salta de uma plataforma e realiza movimentos de rotação. Porém, seu centro de massa, sob ação exclusiva da gravidade, descreve uma trajetória parabólica, após ter sido lançado obliquamente da plataforma.

(https://sites.google.com. Adaptado.)

Considere que a aceleração gravitacional seja igual a $10m/s^2$, que no momento em que a atleta saltou para cima seu centro de massa estava a 11 m da superfície da água e que o centro de massa da saltadora chegou à água 2,0s após o salto. A componente vertical da velocidade do centro de massa dessa atleta no momento em que ela deixou a plataforma era:

a) 4,5m/s.

b) 1,5m/s.

c) 0,5m/s.

d) 2,5m/s.

e) 8,5m/s.

Resolução

Gabarito: letra a.

Considerando o nível da água como referência e orientando a trajetória para cima, temos:

$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 11 + v_{oy} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2$

$2 \cdot v_{oy} = 9$

$v_{oy} = 4{,}5\text{m/s}$

2. Em uma partida de basquete, um jogador arremessa a bola, cuja trajetória é uma parábola representada pela função $y = -x^2 + 3x$, onde y é a altura atingida pela bola (em metros) e x é o alcance (também em metros). Qual a altura máxima atingida pela bola?

   Resolução

   A trajetória da bola descreve uma parábola representada pela função $y = -x^2 + 3x$ e que essa parábola tem concavidade para baixo. Assim, a altura máxima que a bola atinge será determinada pelo vértice da parábola, uma vez que o vértice é o ponto máximo da função. Teremos:

   $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9$
   $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-9}{4 \cdot (-1)}$
   $y_v = 2{,}25$ metros.

4.3 Função Exponencial e crescimento populacional exponencial

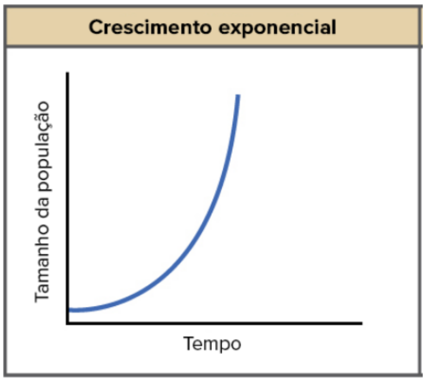
4.3.1 Crescimento populacional exponencial

Crescimento populacional refere-se ao aumento no número de indivíduos em uma população ao longo do tempo. Esse crescimento pode ser influenciado por diversos fatores, incluindo taxas de natalidade, mortalidade, imigração e emigração. Quando falamos de crescimento populacional, especialmente em contextos biológicos ou demográficos, muitas vezes utilizamos modelos matemáticos para descrever e prever como a população muda ao longo do tempo.

Um dos modelos mais comuns para descrever o crescimento populacional é o modelo exponencial. A função exponencial é uma ferramenta matemática poderosa que pode representar o crescimento rápido e contínuo de uma população sob condições ideais.

A figura 4.3 representa um crescimento exponencial de uma população. Observe que a representação do tamanho da população em função do tempo é uma função exponencial.

Figura 4.3: Crescimento exponencial



FONTE: https://pt.khanacademy.org/science/ap-biology/ecology-ap/population-ecology-ap/a/exponential-logistic-growth

Cálculo da população final

No modelo de crescimento populacional exponencial, a população em função do tempo pode ser expressa pela fórmula:

$$P(t) = P_o \cdot e^{rt}$$

Sendo: $P(t)$ a população no tempo t, P_o a população inicial, r a taxa de crescimento populacional, e a base do logaritmo natural (aproximadamente 2.71828) e t o tempo durante o qual a população está crescendo.

Exemplos

1. Suponha que uma população de coelhos em um criatório é inicialmente de 100 indivíduos e a taxa de crescimento populacional é de 0,05 ao ano. Qual será a população após 10 anos?

   Resolução

   Substituindo $P_o = 100$, $r = 0{,}05$ e $t = 10$ na fórmula $P(t) = P_o \cdot e^{rt}$, temos:

   $P(10) = 100e^{0{,}05.10} \Rightarrow P(10) \approx 100 \cdot 1{,}64872 \approx 164{,}872$

   Portanto, a população de coelhos será aproximadamente 165 após 10 anos, assumindo um crescimento exponencial contínuo.

2. (Cefet-PR) Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma guerra biológica, pesquisam uma determinada bactéria que cresce segundo a expressão $P(t) = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde t representa o tempo em

horas. Para obter-se uma população de 3125 bactérias será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

a)]0, 2]

b)]2, 4]

c)]4, 6]

d)]6, 8]

e)]8, 10]

Resolução

Como $P(t) = 3125$, então,

$$3125 = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} \Rightarrow 5^5 = \frac{2^8}{5^3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} \Rightarrow \frac{5^8}{2^8} = \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} \Rightarrow t+1 = 8 \Rightarrow t = 7$$

Logo, o tempo necessário será 7h e o gabarito será letra d.

4.4 Logaritmos

4.4.1 PH de uma solução

Uma solução pode ser classificada como ácida, neutra ou básica. A sigla pH é usada como referência ao potencial hidrogeniônico de uma solução. O pH é uma medida da acidez ou basicidade de uma solução e é determinado pela concentração de íons de hidrogênio presentes nela. Saber o pH de uma solução é importante por vários motivos, dos quais podemos ressaltar:

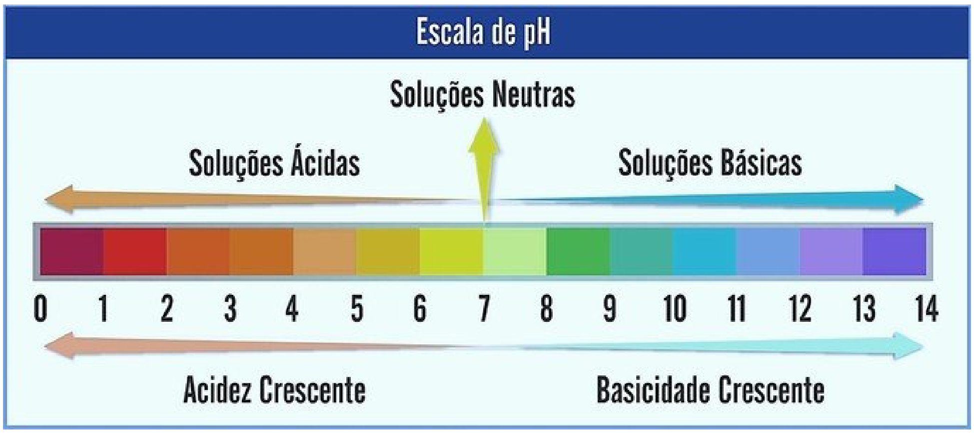
- O processo em reações químicas é afetado pelo pH. Por exemplo, em reações de neutralização, ácidos e bases reagem para formar água e um sal, e o pH é crucial para determinar a rapidez e a eficiência dessas reações.

- Em processos biológicos, o pH desempenha um papel crítico. Por exemplo, o pH do sangue humano normalmente é mantido em torno de 7,4 para garantir o funcionamento adequado das células e das enzimas. Alterações no pH podem levar a condições como acidose ou alcalose, que podem ser graves.

- Na agricultura, o pH do solo afeta a disponibilidade de nutrientes para as plantas. Solos muito ácidos ou muito alcalinos podem prejudicar o crescimento das plantas.

Para medir o pH de uma solução é usada uma escala que varia de varia de 0 até 14, na temperatura de $25°C$. Soluções com pH menor que 7 será ácida, com pH igual a 7 será neutra e, com o pH for maior 7, básica. Assim, quanto mais próximo de zero for o pH, mais ácida será a solução e, quanto mais próximo de 14 for o pH, a solução será mais básica. A figura 4.4 ilustra a escala de pH.

Figura 4.4: Escala de pH



https://www.todamateria.com.br/o-que-e-ph/

Cálculo do pH de uma solução

No início do século XX, em 1909, o cientista dinamarquês Soren Sörensen ($1868 - 1939$) sugeriu que a medida da acidez das soluções, baseada na concentração de íons H^+, fosse expressa por meio de logaritmos para torná-la mais compreensível. Essa relação é representada pela fórmula:

$pH = -\log[H^+]$, sendo $[H^+]$ a concentração de íons H^+.

Exemplo:

Em uma análise, um laboratório determinou que a quantidade de íons H^+ encontrada na amostra de água era igual a $10^{-5}\ mol \cdot L^{-1}$. Determine o pH da água analisada.

Solução:

O pH de uma solução é dado por $pH = -\log[H^+]$.

Como $[H^+] = 10^{-5}$, temos:

$pH = -\log[H^+]$

$pH = -\log 10^{-5}$

$pH = -(-5) \cdot \log 10$

$pH = 5 \cdot \log 10$

$pH = 5 \cdot 1$

$pH = 5$

O pH da solução analisada é 5.

4.5 Matrizes e imagens digitais

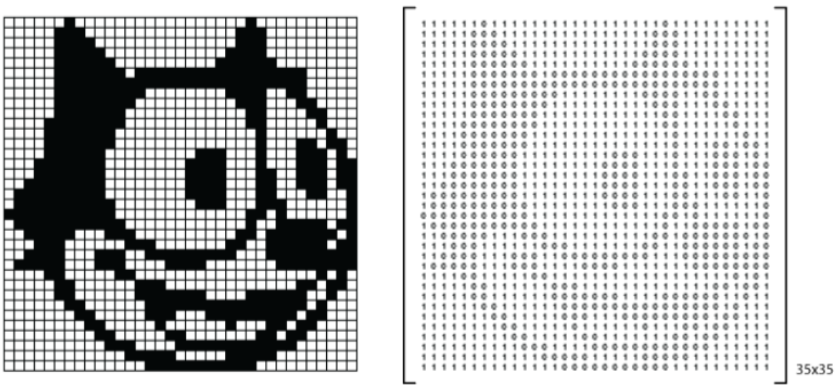
A imagem na tela de um celular ou em um computador é exemplo de imagem digital. Ela é a representação visual de uma cena ou objeto, composta por pequenos elementos chamados pixels, armazenada e manipulada em um formato que pode ser interpretado por dispositivos eletrônicos, como computadores, *smartphones* e câmeras digitais.

Um pixel (abreviação de "*picture element*") é a menor unidade de uma imagem digital. Cada pixel representa um único ponto na imagem e contém informações sobre a cor ou intensidade naquele ponto específico.

Os pixels que formam uma imagem digital são organizados em linhas e colunas, formando uma matriz. Cada elemento da matriz corresponde a um pixel da imagem. Um conjunto com 1.000.000 de pixels é denominado um megapixel. Por exemplo, uma imagem de 2.000 pixels na horizontal e 3.000 pixels na vertical possui um total de 6.000.000 de pixels, ou seja, 6 megapixels.

Na figura 4.5, a imagem do Gato Felix está representado pela matriz 35×35.

Figura 4.5: Gato Felix



Fonte: http://www.cdme.im-uff.mat.br/matrix/matrix-html/matrix-boolean/matrix-boolean-br.html

Deve-se observar que quanto maior o número de pixels, maior será o número de detalhes na imagem digital e a imagem terá uma resolução melhor. A figura 4.6 representa a mesma imagem com resoluções diferentes. Observa-se que a imagem com mais pixels é mais nítida.

Figura 4.6: Resolução da imagem

Fonte:
https://copcentro.com.br/resolucao-de-imagem-para-impressao-entenda-os-formatos/

Para uma imagem em escala de cinza, cada pixel é representado por um valor de intensidade (geralmente entre 0 e 255), onde 0 pode representar o preto, 255 o branco e os valores intermediários, tons de cinza. Essa imagem é, portanto, uma matriz bidimensional, onde cada entrada é um número inteiro que corresponde à intensidade do pixel. A figura 4.7 representa uma imagem em diferentes tons de cinza.

Figura 4.7: Tons de cinza

Fonte: https://www.cin.ufpe.br/ tg/2016-1/rcan.pdf

Exemplo

Um sistema de processamento de imagens utiliza matrizes para manipular a escala de cinza de uma imagem digital em tons de preto e branco. Cada pixel da imagem é representado por um valor entre **0** (preto) e **255** (branco). Abaixo, temos um trecho de uma imagem 3×3, com valores que indicam a intensidade de cada pixel:

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 200 & 80 \\ 150 & 100 & 220 \\ 90 & 180 & 160 \end{pmatrix}$$

Para melhorar o contraste da imagem, deseja-se aplicar um **filtro de aumento de brilho** que adiciona **30 unidades** a cada pixel, sem ultrapassar o valor máximo de 255. A matriz que representa a imagem após a aplicação do filtro é dada por $B = A + C$, onde C é uma matriz 3×3 em que todos os elementos valem **30**. No entanto, se algum valor em B ultrapassar **255**, ele deve ser corrigido para **255**.

Encontre a matriz B resultante após a aplicação do filtro e ajuste os valores, se necessário. Explique como a manipulação de matrizes é útil no processamento de imagens digitais.

Resolução

Note que a matriz C será $C = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \end{pmatrix}$.

Como a matriz B é dada pela soma das matrizes A e C, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 120 & 200 & 80 \\ 150 & 100 & 220 \\ 90 & 180 & 160 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 230 & 110 \\ 180 & 130 & 250 \\ 120 & 210 & 190 \end{pmatrix}$$

Como nenhum valor em B ultrapassa **255**, a matriz resultante é:

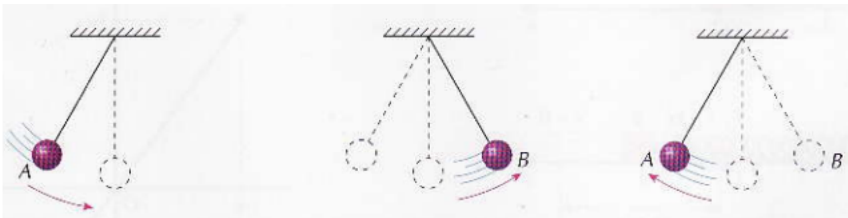
$$B = \begin{pmatrix} 150 & 230 & 110 \\ 180 & 130 & 250 \\ 120 & 210 & 190 \end{pmatrix}$$

Aplicação em imagens digitais: A manipulação de matrizes permite realizar operações como ajuste de brilho, contraste e aplicação de filtros em imagens. Cada pixel da imagem corresponde a um elemento da matriz, e operações matemáticas em matrizes facilitam a implementação de efeitos, correções e aprimoramentos na imagem de forma eficiente e precisa.

4.6 Funções trigonométricas e movimentos periódicos

As funções trigonométricas têm uma relação intrínseca com movimentos periódicos, pois elas descrevem padrões cíclicos que se repetem em intervalos regulares. Segundo Júnior (2001), um movimento é periódico quando se repete identicamente em intervalos de tempo iguais. Ainda segundo Júnior (2001), o período T é o menor intervalo de tempo para a repetição do fenômeno. Ele cita como exemplos o movimento de um pêndulo e o movimento de um bloco preso a uma mola. A figura 4.8 representa o movimento periódico de um pêndulo que tende a retornar às posições A e B.

Figura 4.8: Movimento periódico de um pêndulo



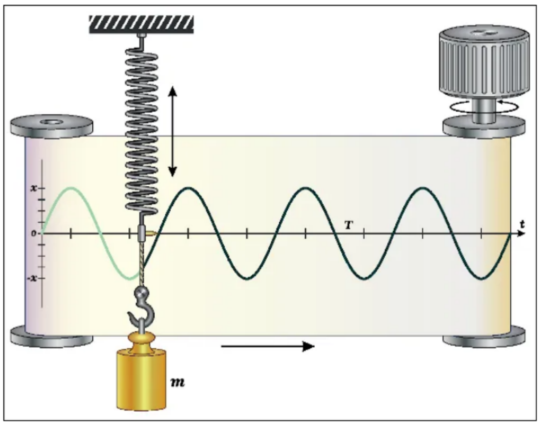
Fonte: Os fundamentos da Física, Júnior,2001, p.382.

O Movimento Harmônico Simples (MHS) é um exemplo de movimento periódico. Segundo Júnior (2001), o termo harmônico é aplicado às expressões matemáticas que contenham as funções trigonométricas seno e cosseno.

O MHS é um tipo de movimento oscilatório encontrado em muitos sistemas físicos, como massas presas em molas, pêndulos e circuitos elétricos. No MHS, o corpo oscila de um ponto de equilíbrio em um padrão repetitivo, sendo regido por forças restauradoras proporcionais ao deslocamento do objeto. A descrição matemática desse movimento utiliza funções trigonométricas como função seno e função cosseno, que são ideais para modelar fenômenos cíclicos e periódicos.

A figura 4.9 representa o movimento harmônico simples descrito por um oscilador massa-mola, em condições ideais. Observa-se um corpo de massa m preso a uma mola.

Figura 4.9: Oscilador massa-mola



Fonte:https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm

Funções Trigonométricas e Movimento Harmônico Simples

No MHS, as fórmulas mais importantes, em função do tempo t, são:

1. **Equação horária da posição**.

   A posição é dada pela fórmula:

   $$x(t) = A \cdot cos(\omega t + \phi_0)$$

   sendo:

   -A é a amplitude do movimento, ou seja, o valor máximo do deslocamento a partir da posição de equilíbrio.

   -ω é a frequência angular, relacionada ao período de oscilação T pela equação $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ela também pode ser expressa em termos da constante k e da massa m: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

   -t é o tempo.

   -ϕ é a fase inicial, que determina a posição do objeto no instante $t = 0$.

2. **Equação da velocidade**.

   A velocidade é dada por:

   $$v(t) = -\omega \cdot A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$$

3. **Equação da aceleração**.

   A aceleração é dada por:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot cos(\omega t + \phi_0)$$

Exemplo

Considere uma massa presa a uma mola que oscila em linha reta, com um **período** de oscilação de 4 segundos e uma **amplitude** de 0,5 metros. No instante $t = 0$, a massa está na posição máxima de deslocamento (posição de amplitude), ou seja, $\phi_0 = 0$. Calcule a frequência angular e a posição da massa no tempo $t = 3$ segundos.

Resolução

Podemos descrever o movimento da massa pela seguinte equação do MHS:

$x(t) = A \cdot cos(\omega t + \phi_0)$

Onde:

- $A = 0$ é a amplitude (deslocamento máximo),
- ω é a frequência angular, que será calculada,
- t é o tempo em segundos,
- $\phi_0 = 0$ é a fase inicial, porque a massa começa no ponto de deslocamento máximo (posição de amplitude).

Passo 1: Calcular a frequência angular.

A frequência angular w está relacionada ao **período** T da oscilação pela fórmula:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Sabemos que o período T é 4 segundos. Então:

$\omega = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s

Passo 2: Determinar a posição no tempo $t = 3$ segundos.

Agora que temos a amplitude $A = 0{,}5$ m e a frequência angular $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s, podemos calcular a posição $x(t)$ da massa no tempo $t = 3$ segundos.

A equação para o deslocamento no tempo t é:

$x(t) = 0{,}5 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$

Agora, calculamos o valor:

$x(3) = 0{,}5 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Sabemos que $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, pois $\frac{3\pi}{2}$ corresponde a um ângulo de 270° no círculo trigonométrico, onde o cosseno é zero.

Portanto:

$x(3) = 0{,}5 \cdot 0 = 0$ metros.

Conclusão

No tempo $t = 3$ segundos, a posição da massa será **0 metros**, ou seja, a massa estará exatamente na **posição de equilíbrio**. Isso faz sentido, pois o corpo está oscilando e, ao passar pelo ponto de equilíbrio, sua posição é zero.

5 Bloco de questões

Neste capítulo, disponibilizamos questões contextualizadas e com aplicações dos conteúdos de matemática abordados anteriormente. O objetivo desse bloco de questões é fornecer aos colegas professores uma fonte de pesquisa para que possam colocar em suas atividades escolares. Reunimos questões de vestibulares. No próximo capítulo, encontra-se uma proposta de resolução para as questões escolhidas.

5.1 Função Afim

1. (Upf 2022) A equação $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ mostra a relação entre a temperatura na escala Celsius, C, e a temperatura na escala Fahrenheit, F. Baseado na equação dada, analise as afirmativas a seguir.

   I. Um aumento na temperatura de 1 grau na escala Fahrenheit equivale a um aumento na temperatura de 59 graus na escala Celsius.

   II. Um aumento na temperatura de 1 grau na escala Celsius equivale a um aumento na temperatura de 1,8 graus na escala Fahrenheit.

   III. Um aumento na temperatura de 59 graus na escala Fahrenheit equivale a um aumento na temperatura de 1 grau na escala Celsius.

   É correto o que se afirma em:

   a) I, II e III.

   b) I e II, apenas.

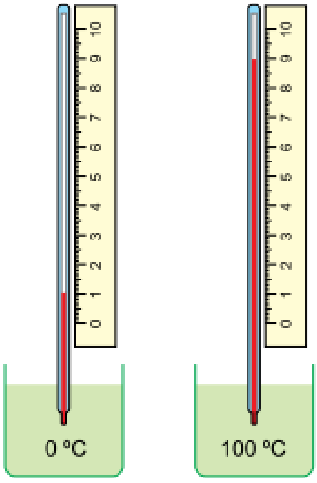
   c) I, apenas.

   d) II, apenas.

   e) III, apenas.

2. (Uea-sis 2 2024) Os números e a escala impressos no corpo de um antigo termômetro apagaram-se com o tempo. Para continuar usando esse termômetro, seu corpo de

vidro foi colado ao lado de uma régua graduada em centímetros. Mergulhando-se o termômetro em água a 0^{o}C, verifica-se que a coluna líquida do termômetro chega até a marca de 1 cm na régua e, mergulhando-se o termômetro em água a 100^{o}C, verifica-se que a coluna líquida chega até a marca dos 9 cm na régua, como mostram as figuras.



Com essas informações, é possível determinar que a marca de 5 cm na régua corresponde à temperatura de:

a) $40°C$.

b) $45°C$.

c) $50°C$.

d) $55°C$.

e) $60°C$.

3. (G1 - ifpe 2019) A equivalência entre as escalas de temperatura geralmente é obtida por meio de uma função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função da forma $y = ax + b$. Um grupo de estudantes do curso de Química do IFPE desenvolveu uma nova unidade de medida para temperaturas: o grau Otavius.

   A correspondência entre a escala Otavius (°O) e a escala Celsius (°C) é a seguinte:

°O	°C
6	18
60	36

Sabendo que a temperatura de ebulição da água ao nível do mar (pressão atmosférica igual a 1 atm) é 100 $°C$, então, na unidade Otavius, a água ferverá a:

a) 112°.

b) 192°.

c) 252°.

d) 72°.

4. (G1 - cmrj 2018) *"Para que seja possível medir a temperatura de um corpo, foi desenvolvido um aparelho chamado termômetro. O termômetro mais comum é o de mercúrio, que consiste em um vidro graduado com um bulbo de paredes finas, que é ligado a um tubo muito fino, chamado tubo capilar. Quando a temperatura do termômetro aumenta, as moléculas de mercúrio aumentam sua agitação, fazendo com que este se dilate, preenchendo o tubo capilar. Para cada altura atingida pelo mercúrio está associada uma temperatura."*

http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Termometria/escalas.php

As principais escalas termométricas são Kelvin (K), Celsius $°C$ e Fahrenheit $°F$. A escala Celsius é a mais utilizada e se relaciona com as outras através das funções:

$F = \dfrac{9C}{5} + 32$ e $K = C + 273$

Há uma temperatura na qual a soma dos valores numéricos que a representam, nas escalas Celsius e Kelvin, vale 317. Na escala Fahrenheit, essa temperatura é um valor situado no intervalo:

a) (70,71]

b) (71,72]

c) (72,73]

d) (73,74]

e) (74,75]

5.2 Função Quadrática

1. (Provão Paulista 2 2023) Um objeto é lançado para cima, perpendicularmente ao chão, a partir da altura de 1 metro e com velocidade de $5m/s$. Desprezando a resistência do ar e assumindo que a aceleração da gravidade é igual a $10m/s^2$, a altura h do objeto, em metros, é descrita como $h = 1 + 5t - 5t^2$, em que t é o tempo transcorrido, em segundos, desde o lançamento.

   Segundo a expressão apresentada, esse objeto atinge sua altura máxima em:

   a) $10{,}0s$.

   b) $0{,}5s$.

   c) $2{,}0s$.

   d) $1{,}0s$.

   e) $5{,}0s$.

2. (Eear 2022) Uma bola é lançada verticalmente para cima. Se sua altura h, em metros, em relação ao solo, t segundos após o lançamento, considerando $t \in [0{,}4]$, pode ser calculada por $h = -t^2 + 2t + 8$, então a altura máxima, em metros, atingida pela bola é ?

   a) 7

   b) 8

   c) 9

   d) 10

3. (Uece 2022) A trajetória, em um plano, de um projétil lançado do solo fazendo um ângulo α com a direção horizontal é uma parábola. Se a trajetória de um determinado projétil pode ser descrita matematicamente pela equação $y = 0{,}2x - 0{,}000625x^2$ na qual y indica a altura, em unidades de comprimento ($u.c.$), alcançada pelo projétil desde seu lançamento até o ponto de retorno ao solo, pode-se afirmar corretamente que a altura máxima atingida pelo projétil, em $u.c.$, é igual a

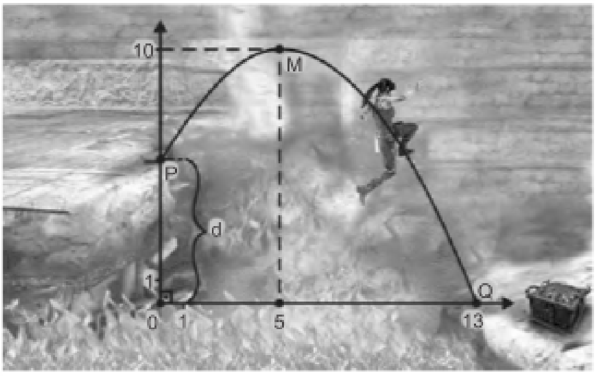
a) 16.

b) 32.

c) 22.

d) 28.

4. (Uel 2022) Lara Croft – a famosa personagem feminina da indústria dos games – é uma arqueóloga que explora tumbas, templos e campos. Em uma de suas missões, para abrir a Caixa de Pandora, realiza um salto entre dois rochedos, com desnível d, separados por um poço em chamas. Ao chegar do outro lado, observa que a Caixa de Pandora está protegida por um encantamento que somente cessa ao se conhecer o valor de d. Para ajudá-la, saiba que o salto coincide com um trecho de parábola, no plano cartesiano, que passa por três pontos: $P = (0,d)$, $M = (5,10)$ e $Q = (13,0)$, onde P marca o início do salto, M é o vértice da parábola, e Q delimita o final do trecho, conforme a figura.



Com base no texto e na figura, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do desnível d.

a) $\frac{191}{32}$

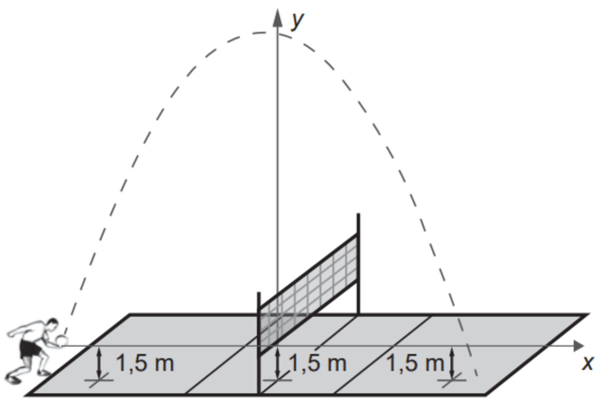
b) $\frac{192}{32}$

c) $\frac{193}{32}$

d) $\frac{194}{32}$

e) $\frac{195}{32}$

5. (Enem 2022) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{7x}{3} + 12$ em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio l: 17m;
- ginásio II: 18m;
- ginásio III: 19m;
- ginásio IV: 21m;
- ginásio V: 40m.

O saque desse atleta foi invalidado

a) apenas no ginásio I.

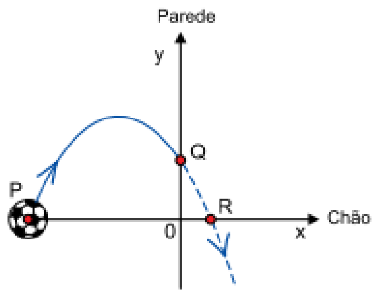
b) apenas nos ginásios I e II.

c) apenas nos ginásios I, II e III.

d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

e) em todos os ginásios.

6. (Famema 2021) A figura representa, no plano cartesiano, a trajetória de uma bola que foi chutada a partir do ponto $P(-5{,}0)$, localizado no chão, e seguiu em trajetória parabólica até bater na parede, no ponto $Q(0{,}2)$. Se não houvesse parede, a bola seguiria sua trajetória até o ponto $R(1{,}0)$ no chão.



Admitindo-se que a trajetória descrita pela bola é modelada pela função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, então $a + b + c$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 0,5.

d) 1,5.

e) –0,5.

5.3 Função exponencial

1. (Uemg 2023) Muitos vírus e bactérias têm crescimento exponencial, isso é uma das causas que os tornam tão perigosos. Supondo o surgimento de um novo vírus com um crescimento exponencial de acordo com a seguinte lei de formação $Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7}$, na qual Q é a quantidade de vírus e t é o tempo em dias. Analisando uma cultura desse vírus, quanto tempo demora para que ele alcance a quantidade de 54.675?

a) 6 dias.

b) 7 dias.

c) 8 dias.

d) 9 dias.

2. (Ufjf-pism 1 2023) Em um experimento, dois microrganismos A e B são colocados em um mesmo ambiente. As colônias destes microrganismos crescem até o momento em que suas populações se igualam e inicia-se um processo de competição entre elas. O número de indivíduos das populações de A e de B, em milhares, do início do experimento (tempo $t = 0$) até o momento em que as populações se igualam, são descritos por $A(t) = 3^{2t} + 7$ e $B(t) = 18 \cdot 3^{t-2} + 10$, respectivamente. Qual é a população (em milhares) do microrganismo A quando se inicia a competição?

   a) 8

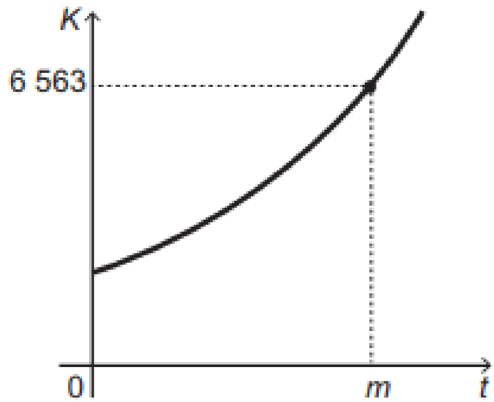
   b) 12

   c) 13

   d) 16

   e) 18

3. (Enem PPL 2021) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{t}{3}} + 2$, em que $K(t)$ indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



   Com base nos dados, o valor de m é?

   a) $\frac{4}{3}$

   b) $\frac{7}{5}$

   c) $\frac{24}{5}$

   d) 12

   e) 81

4. (Enem PPL 2019) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_o \cdot e^{kt}$, em que N_o é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva. Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

   Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

   a) $3N_o$

   b) $15N_o$

   c) $243N_o$

   d) $360N_o$

   e) $729N_o$

5. (Ufjf-pism 1 2022) A desintegração de certa substância é descrita pela lei

$$M(t) = c \cdot 4^{-0{,}125t}$$

   Em que c é uma constante positiva, t representa o tempo, em horas, e M(t) a massa, em gramas, dessa substância no instante t.

   Quanto tempo leva para que uma amostra de 256 g dessa substância seja reduzida a 32 g?

5.4 Logarítmo

1. (Upf 2020) A água do mar e a água com gás têm concentração hidrogeniônica, H^+, a $25°C$ em mol/L de 1.10^{-8} e 1.10^{-4}, respectivamente. Sabendo que o pH é dado por $pH = -log[H^+]$ e que uma solução será neutra quando $pH = 7$, básica quando $pH > 7$ e ácida quando $pH < 7$ é correto afirmar que:

   a) a água do mar tem pH menor do que o da água com gás.

   b) a água do mar tem pH básico.

c) ambas têm pH básico.

d) a água com gás é mais básica do que a água do mar.

e) a água do mar tem $pH = 0{,}8$.

2. (Ufpr 2020) O pH de uma substância é um valor que expressa a concentração de íons de hidrogênio H^+ medida em mol por litro (mol/l) em uma solução aquosa. Para o cálculo do pH de uma substância, usa-se a expressão: $pH = -log[H^+]$.

   a) Sabendo que a água possui $pH = 7$ e que uma bebida energética tem $pH = 3$, quantas vezes a concentração de íons hidrogênio H^+ é maior na bebida energética em relação à concentração na água?

   b) Constatou-se em laboratório que o suco de limão possui uma concentração de íons de hidrogênio $H^+ = 0{,}0072mol/l$ .Supondo que $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule o pH do suco de limão. Dê sua resposta na forma decimal.

5.5 Matrizes

1. (Esa 2023) Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos abaixo:

   1. O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave C;

   2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz da mensagem a ser codificada;

   3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto:

   4. Consideramos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;

   5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;

   6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/-letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$$m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$$

.

Considere as matrizes:

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz M?

a) Brasil

b) Território

c) Pantanal

d) Montanha

e) Guerreiro

2. (Upf 2023) A criptografia é constituída por conjunto de técnicas para proteger, de forma segura, uma informação de modo que apenas o emissor e o receptor consigam compreendê-la. É utilizada em comunicações digitais, como na troca de mensagens ou em pagamentos *online*. Uma das técnicas de se criptografar consiste em identificar cada letra do alfabeto com um determinado número e escrever a mensagem na forma de uma matriz. O remetente codifica essa matriz de mensagem usando uma matriz de codificação, enquanto o destinatário consegue ler a mensagem usando uma matriz de decodificação. Esse processo é validado em razão de que as matrizes de codificação e decodificação são inversas uma da outra. Seja C a matriz de codificação e D a matriz de decodificação, tem-se que $D \cdot C = C \cdot D = I$, onde I é a matriz identidade. Suponha que o remetente codifica uma mensagem com a seguinte matriz de codificação $C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. A matriz de decodificação D que o destinatário deverá usar para ler a mensagem será:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

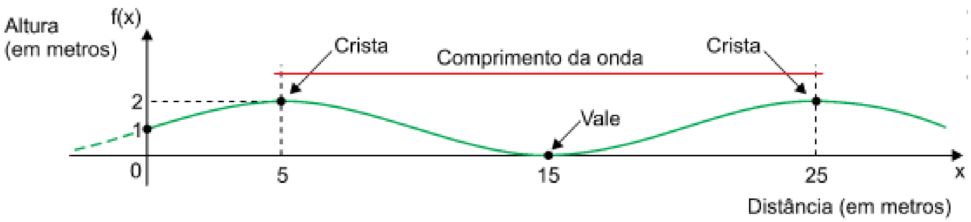
c) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

5.6 Funções Trigonométricas

1. (Unifesp 2023) Cientistas usam os mesmos termos do gráfico da função seno para descrever as ondas marítimas. O período de uma onda marítima é o intervalo de tempo entre uma crista e a seguinte e a distância entre elas é o comprimento da onda. A figura descreve, no plano cartesiano, uma onda marítima, em que o eixo vertical representa a altura das cristas da onda, e o eixo horizontal representa a distância percorrida pela onda.



a) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = m + sen(n \cdot x)$ a função referente ao gráfico apresentado, determine m e n.

b) Uma onda marítima foi modelada por meio da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = 3 + sen\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$. Determine a altura de suas cristas e o comprimento da onda.

2. (Mackenzie 2023) Se a temperatura T (em ^oC) em uma cidade, durante o dia, é dada aproximadamente pela função $T(t) = 5 + 16 \cdot sen\left(\frac{\pi t}{28}\right)$ em que t é o tempo, em horas, então, a temperatura máxima ocorrerá às

a) 14h 30min

b) 14h

c) 13h 30min

d) 13h

e) 12h

3. (Uerr 2023) Por meio de um estudo, verificou-se que a temperatura média mensal em Boa Vista no período de 36 meses, de 2018 a 2020, pode ser modelada pela função $F(t)$ a seguir, com valor em graus Celsius.

   $F(t) = 3sen\left[\frac{\pi}{3}(t-1)\right] + 30$

   Nessa função, t pertence ao intervalo $[1, 36]$, $t = 1$ corresponde ao mês de janeiro de 2018, $t = 2$, ao mês de fevereiro de 2018 e assim sucessivamente. De acordo com esse estudo, a temperatura média mensal em Boa Vista durante o período observado foi

   a) superior a 31^oC em fevereiro de 2019 e inferior a 29^oC em novembro de 2019.

   b) superior a 31^oC em abril de 2018 e inferior a 29^oC em outubro de 2019.

   c) superior a 31^oC em agosto de 2019 e inferior a 29^oC em janeiro de 2020.

   d) superior a 31^oC em junho de 2018 e inferior a 29^oC em outubro de 2019.

   e) superior a 31^oC em julho de 2019 e inferior a 29^oC em dezembro de 2019.

6 Resolução das questões

6.1 Função Afim

1. Gabarito: letra D

   Verificando as alternativas, temos:

   (I) Falsa, pois:

   $F = 0^oF \Rightarrow 0 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = -17{,}78^oC$

   $F = 1^oF \Rightarrow 1 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = -17{,}22^oC$

   Logo, o aumento foi de $0{,}56^oC$

   (II) Verdadeira , pois:

   $C = 0^oC \Rightarrow F = \frac{9}{5} \cdot 0 + 32 \Rightarrow F = 32^oF$

   $C = 1^oC \Rightarrow F = \frac{9}{5} \cdot 1 + 32 \Rightarrow F = 33{,}8^oF$

   Logo, o aumento foi de $1{,}8^oF$

   (III) Falsa, pois:

   $F = 0^oF \Rightarrow 0 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = -17{,}78^oC$

   $F = 59^oF \Rightarrow 59 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = 15^oC$

   Logo, o aumento foi de $32{,}78^oC$

2. Gabarito: letra C

   Analisando o termômetro e marcação na régua, considerando a taxa de variação constantes, temos a seguinte relação:

   $$\frac{9-1}{100-0} = \frac{5-1}{t-0} \Rightarrow \frac{8}{100} = \frac{4}{t} \Rightarrow 8t = 400 \Rightarrow t = 50^oC$$

3. Gabarito: letra C

   A relação entre as escalas é uma função afim do tipo $y = ax+b$, sendo y a temperatura em ^oC e x a temperatura em ^oO. Substituindo as coordenadas dos pontos (6,18) e (60,36) na função $y = ax + b$, temos:

   (6,18) $\Rightarrow 6a + b = 18$ e (60,36) $\Rightarrow 60a + b = 36$. Resolvendo o sistema:

   $$\begin{cases} 6a + b = 18 \\ 60a + b = 36 \end{cases} \Rightarrow a = \tfrac{1}{3}, b = 16.$$

   A relação é $y = \frac{1}{3} \cdot x + 16$.

   Se $y = 100$, então $100 = \frac{1}{3} \cdot x + 16 \Rightarrow x = 252^oO$

4. Gabarito: letra B

   Pelo enunciado, temos:

   $C + k = 317 \Rightarrow C + C + 273 = 317 \Rightarrow C = 22$

   Então: $F = \frac{9}{5} \cdot 22 + 32 \Rightarrow F = 71{,}6 \Rightarrow 71 < 71{,}6 \leq 72$

6.2 Função Quadrática

1. Gabarito: letra B

   Como a expressão que calcula a altura é uma função quadrática, então o valor máximo (altura máxima) ocorrerá no vértice da parábola associada a tal função. Assim, o tempo para a altura máxima é:

   $$t_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow t_v = \frac{-(-5)}{2 \cdot 5} \Rightarrow t_v = 0{,}5s$$

2. Gabarito: letra C

   Como a expressão que calcula a altura é uma função quadrática, então o valor máximo da altura ocorrerá no vértice da parábola.

   $$h_{máx} = -\frac{[2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8]}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow h_{máx} = \frac{4 + 32}{4} = 9m.$$

   Logo, a altura máxima será igual a $9m$.

3. Gabarito: letra A

   A altura máxima do projétil é dada pelo y_v da parábola.

$$h_{máx} = -\frac{[0{,}2^2 - 4 \cdot (-0{,}000625) \cdot 0]}{4 \cdot (-0{,}000625)} \Rightarrow h_{máx} = \frac{0{,}04}{0{,}0025} = 16u.c$$

Logo, a altura máxima será igual a $16u.c.$

4. Gabarito: letra E

   Vamos usar a forma canônica da parábola que é $y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$.

   Sabendo que a parábola passa pelos pontos M e Q com M com sendo o vértice, temos:

   $0 = a \cdot (13 - 5)^2 + 10 \Rightarrow a = -\frac{5}{32} \Rightarrow y = -\frac{5}{32} \cdot (x - 5)^2 + 10$

   Logo, a resposta é:

   $f(0) = -\frac{5}{32} \cdot (0 - 5)^2 + 10 = \frac{195}{32}$.

5. Gabarito: letra D

   Vamos usar a forma canônica da parábola:

   $y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow y = -\frac{1}{6} \cdot (x^2 + 14x - 72) \Rightarrow y = \frac{121}{6} - \frac{1}{6}(x + 7)^2$.

   Logo, a altura máxima que o saque pode atingir em relação ao piso é $\frac{121}{6} + \frac{3}{2} = (21 + \frac{2}{3})$, ou seja aproximadamente 21,7 metros.

6. Gabarito: letra A

   A lei da função pode ser escrita por $f(x) = a \cdot (x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2)$, com x_1 e x_2 sendo os zeros da função.

   Sendo $P = (-5{,}0)$ e $R = (1{,}0)$ são os pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas,então $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$ são os zeros da função. Logo, como $Q = (0{,}2)$ pertence à parábola, temos:

   $f(0) = a \cdot (0^2 - (-5 + 1) \cdot 0 + (-5) \cdot 1) = 2 \Rightarrow -5 \cdot a = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$.

   Logo, $f(1) = -\frac{2}{5} \cdot (1^2 - (-5 + 1) \cdot 1 + (-5) \cdot 1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$.

6.3 Função Exponencial

1. Gabarito: letra B

   Sendo $Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7}$ e $Q(t) = 54675$, temos:

   $54675 = 25 \cdot 3^{2t-7} \Rightarrow 2187 = 3^{2t-7} \Rightarrow 3^7 = 3^{2t-7} \Rightarrow 7 = 2t - 7 \Rightarrow t = 7$

   Resposta: 7 dias.

2. Gabarito: letra D

   Para que as quantidades de microrganismos A e B se igualem, devemos ter:

   $A(t) = B(t) \Rightarrow 3^{2t} + 7 = 18 \cdot 3^{t-2} + 10 \Rightarrow 3^{2t} - 2 \cdot 3^t - 3 = 0$

   Resolvendo a última equação, temos:

   $3^t = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow 3^t = 3 \therefore t = 1$ ou $3^t = -1$ (não convém).

   A população A, quando se inicia a competição, será: $A(1) = 3^{2 \cdot 1} + 7 = 16$.

3. Gabarito: letra D

   Sendo $K(m) = 6563$, temos:

   $81 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot m} + 2 = 6563 \Rightarrow 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot m} = 3^8 \Rightarrow^{\frac{1}{3} \cdot m} = 3^4 \Rightarrow m = 12.$

4. Gabarito: letra C

   Segundo o enunciado, $3N_o = N(1)$. Assim, $3N_0 = N_0 e^{k \cdot 1} \Rightarrow e^k = 3$.

   Desse modo,

   $N(5) = N_0 \cdot e^{k \cdot 5} \Rightarrow N(5) = N_0 \cdot (e^k)^5 \Rightarrow N(5) = N_0 \cdot (3)^5 \Rightarrow N(5) = 243N_0.$

5. Resolução: Para $t = 0$, temos:

   $256 = c \cdot 4^{-0{,}125 \cdot 0} \Rightarrow c = 256.$

   como $M(t) = 256 \cdot 4^{-0{,}125 \cdot t}$ e $M(t) = 32$, temos:

   $32 = 256 \cdot 4^{-0{,}125 \cdot t} \Rightarrow \frac{32}{256} = 4^{-0{,}125 \cdot t}$

   $\frac{1}{2^3} = (2^2)^{-0{,}125 \cdot t} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-0{,}25t}$

   $-3 = -0{,}25t \Rightarrow t = 12$

   Resposta: 12 dias.

6.4 Logaritmo

1. Gabarito: letra B

   Calculando pH da água do mar.

   $pH = -log10^{-8} \Rightarrow pH = -(-8) = 8$

   Calculando pH da água com gás:

   $pH = -log10^{-4} \Rightarrow pH = -(-4) = 4$

Observando os valores encontrados, concluímos que a água do mar tem pH básico e a água com gás tem pH ácido.

2. Resolução:

a) Como $pH = -log[H^+]$, temos $[H^+] = 10^{-pH}$.

Fazendo a e b, respectivamente, a concentração de íons de hidrogênio na água e na bebida energética, temos:

$\frac{a}{b} = \frac{10^{-7}}{10^{-3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = 10^{-4} \Rightarrow b = 10^4 \cdot a \Rightarrow b = 10000 \cdot a.$

Logo, a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$ na bebida energética é dez mil vezes maior em relação à concentração na água.

b) Como $[H^+] = 0{,}0072 mol/l$ temos:

$pH = -log0{,}0072 = -log\frac{2^3 \cdot 3^2}{10^4} = -log(2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^{-4}).$

Aplicando as propriedades operatórias de logaritmos, temos:

$pH = -(log2^3 + log3^2 + 10^{-4}) = -(3log2 + 2log3 + (-4)log10)$

$pH = -(3 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}48 - 4 \cdot 1) \Rightarrow pH = 2{,}14$

O pH do suco de limão é 2,14.

6.5 Matriz

1. Gabarito C

Pela equação matricial $MC = P$, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a-b+2c & c \\ d & d+2f-e & f \\ g & g-h+2i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, obtemos:

$(a,b,c,d,e,f,g,h,i) = (15,1,13,19,1,13,1,11,0) = (P,A,N,T,A,N,A,L).$

A mensagem enviada foi PANTANAL.

2. Gabarito E

Pela equação $CD = I$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+y & 2z+w \\ 5x+3y & 5z+3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos:

o sistema $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+3y=0 \end{cases}$ com solução $x = 3$, $y = -5$ e o sistema $\begin{cases} 2z+w=0 \\ 5z+3w=1 \end{cases}$ com solução $z = -1$ e $w = 2$.

Assim, a matriz D será $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

6.6 Funções Trigonométricas

1. Resolução

a) Pelo gráfico, tem-se que $f(0) = 1$. Logo, $m = 1$. Como o período da função seno é 2π e o comprimento da onda mede $25 - 5 = 20$ metros, temos: $20 = \dfrac{2\pi}{|n|} \Rightarrow n = \dfrac{\pi}{10}$, já que $f(5) = 2$.

Logo, $m = 1$ e $n = \dfrac{\pi}{10}$.

b) o valor máximo de f corresponde à altura de uma crista. Logo, como o valor máximo de $sen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ é 1, temos que a resposta é $3 + 1 = 4$ metros.

Como o período da função seno é 2π e que o coeficiente de x é $\dfrac{\pi}{2}$, obtemos que o comprimento da onda mede $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ metros.

2. Gabarito B

A temperatura máxima ocorrera para $sen\left(\frac{\pi t}{28}\right) = 1$. Temos:

$\dfrac{\pi t}{28} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$t = 14 + 28k$. Fazendo $k = 0$, temos $t = 14$ horas.

3. Gabarito A

   Para fevereiro de 2019, temos $t = 2 + 12 = 14$.

   Logo, $F(14) = 3sen\left[\frac{\pi}{3}(14-1)\right] + 30 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 30$

   $F(14) \approx 32{,}55 > 30$.

   Para novembro de 2019, temos $t = 11 + 12 = 23$.

   Logo, $F(23) = 3sen\left[\frac{\pi}{3}(23-1)\right] + 30 = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 30$

   $F(23) \approx 27{,}45 < 30$.

7 Conclusão

O ponto de partida para o desenvolvimento desta pesquisa foi a busca por soluções para um desafio frequente nas salas de aula do Ensino Médio: o baixo interesse dos alunos pelos conteúdos de Matemática. Muitos estudantes têm dificuldade em visualizar a aplicabilidade prática dos conceitos matemáticos. Percebe-se a necessidade de tornar o ensino da disciplina mais atrativo. Nesse contexto, este trabalho se propôs a explorar as aplicações dos conteúdos de Matemática, como função afim, função quadrática, função exponencial, logaritmo, matrizes e funções trigonométricas para que possam ser apresentadas de modo a despertar o interesse dos alunos, conectando o que é aprendido em sala de aula com situações reais.

Dados recentes das avaliações do Governo, como o SAEB, apontam para um baixo desempenho dos estudantes em Matemática do Ensino Médio. Esse baixo rendimento está ligado a fatores como falta de conhecimento dos conceitos básicos por parte dos alunos, falta de professores capacitados e falta de contextualização dos conteúdos ensinados. Analisando alguns livros de Matemática do Ensino Médio, percebe-se o uso predominante de exercícios propostos com questões não contextualizadas.

Esse cenário reforça a necessidade de metodologias como a aplicada neste trabalho, que buscam tornar os conteúdos mais acessíveis e conectados com o mundo real. Observa-se que, em muitos casos, os estudantes apresentam dificuldades em interpretar e aplicar os conceitos matemáticos em contextos práticos, o que pode estar relacionado à forma como o conteúdo é apresentado em sala de aula.

Através de uma abordagem que integra teoria e prática, procurou-se demonstrar como esses conceitos matemáticos estão presentes em diversas áreas do conhecimento e em situações do cotidiano. Inicialmente, apresenta-se um pouco do contexto histórico que envolve tais conteúdos e também uma fundamentação teórica, baseada em livros do Ensino Médio, de cada um dos tópicos apresentados com suas definições e características.

Em seguida, foram apresentadas algumas aplicações dos conteúdos. A função afim e a função quadrática foram contextualizadas através de problemas que envolvem escalas termométricas e projeções parabólicas, respectivamente. Já as funções exponencial e logarítmica foram exploradas em contextos que envolvem crescimento populacional e cálculo de pH de soluções.

A contextualização das matrizes foi feita através de aplicações em processamento de imagens digitais, já as funções trigonométricas foram abordadas em problemas de movimento harmônico simples. Essa diversificação de contextos não apenas enriquece a compreensão dos conteúdos, mas também permite que os alunos percebam a Matemática como uma ferramenta fundamental para a resolução de problemas reais.

O bloco de questões desenvolvido no final do trabalho serve como uma ferramenta prática para consolidar os conhecimentos adquiridos. As resoluções detalhadas de cada questão não apenas reforçaram os conceitos teóricos, mas também proporcionam aos estudantes um exemplo claro de como aplicar essas teorias em problemas específicos. Através dessas atividades, os alunos podem desenvolver habilidades de raciocínio lógico e crítico, além de aprimorar sua capacidade de resolução de problemas.

A contextualização dos conteúdos matemáticos pode ser uma estratégia eficaz que, quando usada pelo professor, torna o aprendizado mais significativo e interessante. Ao relacionar os conceitos matemáticos com situações do cotidiano e com outras áreas do conhecimento, consegue-se despertar o interesse dos alunos e facilitar a compreensão de temas que, à primeira vista, podem parecer abstratos e distantes da realidade. No entanto, também observa-se que essa metodologia exige do professor um planejamento cuidadoso e um conhecimento sólido sobre como aplicar esses conteúdos de forma prática, o que pode ser desafiador, especialmente em turmas heterogêneas, em termos de nível de conhecimento.

O Governo tem implementado algumas iniciativas para apoiar o trabalho do professor de Matemática no ensino médio. Programas como o PNLD e formações continuadas, oferecidas pelo Ministério da Educação (MEC), buscam proporcionar recursos didáticos e pedagógicos para facilitar o trabalho do docente.

De acordo com a BNCC, o ensino de Matemática deve ir além da simples memorização de fórmulas e de algoritmos, incentivando o desenvolvimento de competências que permitam aos alunos aplicar os conceitos matemáticos em situações cotidianas e problemas de diferentes áreas do conhecimento. A BNCC destaca a importância de promover a resolução de problemas e o raciocínio lógico como formas de estimular o pensamento crítico dos alunos, além de incentivar uma aprendizagem contextualizada, que ajude os estudantes a verem a matemática como uma ferramenta útil e relevante para entender e para interagir com o mundo ao seu redor.

Com base nos resultados obtidos e nas percepções adquiridas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foi possível identificar diversas oportunidades para expandir e aprimorar as abordagens apresentadas. Dito isso, um dos próximos passos seria ampliar a quantidade de aplicações dos conteúdos matemáticos, incorporando novos tópicos que também possuem grande relevância e aplicabilidade no cotidiano dos alunos. Pretende-se, em projetos futuros, incluir temas como progressões aritméticas e geométricas, determinantes, sistemas lineares, análise combinatória, geometria sólida e cônicas. Esses tópicos são essenciais tanto para a continuidade dos estudos no ensino superior quanto para a resolução de problemas práticos, reforçando ainda mais a importância da matemática no dia a dia.

Além disso, outro aspecto a ser aprimorado é o bloco de questões. Em uma futura ampliação deste trabalho, planeja-se aumentar o número de questões, incluindo mais problemas de autoria própria que possam englobar os novos conteúdos abordados. Essas questões seguirão o mesmo princípio de contextualização e aplicação prática, visando proporcionar aos alunos mais oportunidades para praticar e aplicar os conceitos aprendidos de forma significativa.

A ideia é criar um material didático cada vez mais diversificado e alinhado com a realidade dos estudantes, reforçando o desenvolvimento de habilidades como raciocínio lógico, pensamento crítico e resolução de problemas. Ao continuar expandindo as aplicações e aumentando o bloco de questões, espera-se contribuir ainda mais para o ensino de uma Matemática que desperte o interesse dos alunos e que os prepare para enfrentar os desafios acadêmicos e profissionais de forma mais confiante e bem fundamentada.

Referências

1. BIFI, Carlos R,DR. **Contextualização no Ensino da Matemática: O que, quando e por quê?** Linkedin. Disponível em: https://pt.linkedin.com/pulse/contextualiza%C3%A7%C3%A3o-ensino-da-matem%C3%A1tica-o-que-quando-e-por-bifi-dr–7tohe. Acesso em 18 de junho de 2024.

2. BOYER, Carl. B. Merzbach,U.C. **História da Matemática**; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

3. BRASIL, Ministério da Educação. PISA: Divulgados os resultados do Pisa 2022. [S.l.], 5 dez. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022. Acesso em: 18 jun. 2024.

4. BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC / SEM, 1999.

5. DANTE, L.R. Matemática: **contexto e aplicações: ensino médio** – volume 1- 3. ed.- São Paulo : Ática, 2004

6. D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. Ed. Papirus, 9ª edição. Campinas, 2002.

7. GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem, volume 2**: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

8. IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**. volume 1. 9. ed. –. São Paulo: Saraiva, 2016.

9. IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**. volume 2. 9. ed. –. São Paulo: Saraiva, 2016.

10. IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**. volume 3. 9. ed. –. São Paulo: Saraiva, 2016.

11. JUNIOR, Francisco Ramalho; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo A. de Toledo. **Os fundamentos da Física- Volume 1**. 7.ed . São Paulo: Editora Moderna, 2001.

12. JUNIOR, Francisco Ramalho; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo A. de Toledo. **Os fundamentos da Física- Volume 2**. 7.ed . São Paulo: Editora Moderna, 2001.

13. JUNIOR, S. D.S.L. **Um Estudo sobre a Função Exponencial: Propostas de Atividades Lúdicas**. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

14. LEITE, M.D.S. **Matemática é realidade: estratégias de contextualização na prática pedagógica**. Revista científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. 2020. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/matematica-e-realidade. Acesso em junho de 2024.

15. OLIVEIRA, D. F. **O Ciclo Trigonométrico Manipulável como Recurso Didático Facilitador do Processo de Ensino-Aprendizagem da Trigonometria***. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, vitória da Conquista, 2015.

16. PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática - volume 1: conceitos e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2002.

17. PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática - volume 2: conceitos e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2002.

18. PILLETI, Claudino. **Didática Geral**. 23 ed. – São Paulo: Ática, 2004.

19. RIBEIRO, D. M. A. A. et al. **Uma abordagem didática para função quadrática**. Mestrado, Universidade Federal do Norte Fluminense-Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2013.

20. SILVA, H. L. **Função quadrática: Investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os**

principais conceitos associados à função quadrática. [Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística], 2019. Disponível em: https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/4835.

21. VIDIGAL, C. E. L. (RE) Significando o conceito de Logaritmo. 2014. 133f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.