Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional

Altierre Borges Santos

Teorema de Pick e Aplicação em Jogos Geométricos

Goiânia
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Altierre Borges Santos

3. Título do trabalho

Teorema de Pick e Aplicação em Jogos Geométricos

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/08/2024, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Altierre Borges Santos

Teorema de Pick e Aplicação em Jogos Geométricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Antonio dos Santos

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Altierre Borges
Teorema de Pick e Aplicações em Jogos Geométricos [manuscrito] / Altierre Borges Santos. - 2024.
98 f.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Antonio dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.
Bibliografia. Anexos.
Inclui siglas, símbolos, lista de figuras.

1. Ensino. 2. Geoplano. 3. Jogos. 4. Matemática. 5. Teorema de Pick. I. Santos, Ronaldo Antonio dos , orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **21** da sessão de Defesa de Dissertação de Altierre Borges Santos, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte e nove dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro, a partir das 16:00h, no Auditório do **IME/UFG,** realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Teorema de Pick e Aplicação em Jogos Geométricos"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador Ronaldo Antonio dos Santos, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: o Professor Doutor Ole Peter Smith (IME/UFG) e o membro titular externo; Marcos Roberto Batista (IFG - CAMPUS GOIÂNIA). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ronaldo Antonio dos Santos, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e nove dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/08/2024, às 08:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith**, **Professor do Magistério Superior**, em 31/08/2024, às 10:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Roberto Batista**, **Usuário Externo**, em 03/09/2024, às 10:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4709906** e o código CRC **E5390A4E**.

Referência: Processo nº 23070.037660/2024-01 SEI nº 4709906

Este trabalho é dedicado à minha querida esposa e aos meus amados filhos,
que foram a minha fonte de motivação, e aos meus pais,
Antônio (in memoriam) e Juivane, pelo apoio e dedicação
ao longo de minha vida.

Agradecimentos

Os agradecimentos são direcionados à pessoa do Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos, pela grande paciência e auxílio. À minha querida esposa Fabiana Sousa de Oliveira pela grande paciência e motivação. Aos colegas do PROFMAT, pelo apoio. Aos professores doutores do PROFMAT, que sempre foram solícitos.

Se vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton

Resumo

Esta dissertação explora o potencial do Teorema de Pick e suas extensões para o desenvolvimento de jogos voltados para o ensino de matemática, pois, os jogos, quando utilizados de maneira correta, contribuem para melhorar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos e também para desenvolver suas habilidades de raciocínio, algumas indicadas em documentos oficiais como a BNCC e a DC-GOEM. Com vistas a contribuir nessa direção, iniciamos nossas atividades com o estudo detalhado de Teorema de Pick e algumas de suas extensões. O Teorema de Pick apresenta uma fórmula para o cálculo de áreas sobre uma rede de pontos no plano. Nesse estudo inicial, identificamos possibilidades promissoras para a elaboração de jogos. Também estudamos em detalhes alguns jogos já propostos para o assunto. A proposta de jogos voltados para o ensino deve estar apoiada em sólidas evidências científicas, pois assim, mais que uma diversão para os estudantes, teremos uma poderosa ferramenta para contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Essa preocupação nos levou ao estudo das tendências atuais para jogos no ensino. Estudamos tendências como a formalista-clássica, empírico-ativista, formalista moderna, tecnicista, construtivista e socioetnocultural .Usamos alguns elementos das tendências empírico-ativista e tecnicista combinados para selecionar e elaborar alguns jogos. Sequências didáticas para o uso dos jogos em sala são propostas. Tanto os jogos quanto as sequências didáticas representam contribuições significativas para a melhoria no ensino-aprendizagem de matemática.

Palavras-chave: Ensino, Geoplano, Jogos, Matemática, Teorema de Pick.

Abstract

This research explores the potential of Pick's Theorem and its extensions, applied at game developing for teaching mathematics. Advancing the development of games aimed at teaching, is an action of great relevance, as games, when used correctly, contribute to the improvement of students' understanding of mathematical concepts as well as develops their reasoning skills, some of which are indicated in official documents such as the BNCC and DC-GOEM. With a view to contributing in this direction, we began our activities with a detailed study of Pick's Theorem and some of its extensions. Pick's Theorem presents a formula for calculating areas on a mesh in the plane. In this initial study, we identified promising possibilities for game creation. Moreover, we study in detail some games already proposed on this subject. The proposal of games for teaching must be supported by solid scientific evidence, so that, rather than being fun for the students, we obtain powerful tools contributing to the teaching and learning process. This concern led us to study current trends in games for teaching. We studied trends such as classical formalist, empirical-activist, modern formalist, technicist, constructivist and socio-ethnocultural. We used some elements of the empirical-activist and technicist trends combined to select some games and to design others. Didactic sequences for using games in the classroom are proposed. Both the games and the didactic sequences represented contributions to improve teaching and learning of mathematics.

Keywords: Teaching, Geoboard, Games, Mathematics, Pick's Theorem.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DC-GO	Documento Curricular do Estado de Góias
IME	Instituto de Matemática e Estátistica
UFG	Universidade Federal de Goiás
UARC	Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual

Lista de símbolos

$\mathbb{B}$	Pontos do bordo e/ou fronteiras de um Polígono.
$\mathbb{I}$	Pontos internos de um polígono.
$\in$	Pertence
$\bigcap$	Intercessão
$\bigcup$	União
$\sum$	Somatório

Sumário

1 Introdução

Este estudo investiga o potencial do Teorema de Pick e suas extensões na elaboração de jogos geométricos como ferramentas para incentivar e fortalecer conceitos de geometria e álgebra, além de, desenvolver importantes habilidades nos estudantes. A motivação para este trabalho surge da constatação de que estudos teóricos e demonstrações em matemática são, frequentemente, desvalorizados pelos estudantes. Isso ocorre, em parte, pela forma como a matemática é apresentada. Assim, os métodos alternativos de ensino podem contribuir para o desenvolvimento da fluência matemática, fundamental para alunos.

Há uma demanda crescente por abordagens inovadoras de ensino que possam melhorar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos complexos. Essa necessidade também impõe a elaboração de material voltado aos professores e este estudo tem o potencial de fornecer suporte aos professores sobre como os jogos podem ser efetivamente incorporados ao currículo de matemática.

Nesta perspectiva, o centro da investigação reside na pergunta: "A fórmula de Pick pode melhorar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos?" Para responder essa questão, buscamos explorar de maneira adequada a fórmula de Pick e gerar desses estudos meios para que os estudantes possam avançar seus conhecimentos em matemática.

O objetivo geral é desenvolver as habilidades matemáticas dos estudantes utilizando de jogos matemáticos, promovendo um engajamento mais profundo e uma compreensão prática dos conceitos de geometria e cálculo. Os objetivos específicos incluem a apresentação de diferentes jogos focados na rede e no Teorema de Pick para a determinação da área de polígonos conexos, o desenvolvimento de novas abordagens para a integração de jogos ao currículo e a exploração de estratégias eficazes de ensino.

O uso de fórmulas, teoremas e suas demonstrações passa a ser uma possibilidade e uma fonte para o desenvolvimento de jogos que buscam uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e um aumento no desempenho acadêmico dos alunos.

No início desta investigação, já ciente que os jogos têm sido usados como ferramentas de ensino em várias disciplinas, muitas vezes sem a fundamentação teórica necessária, mas ainda assim com bons resultados, nota-se que essa utilização ainda se dá de forma tímida e os jogos matemáticos no ensino de conceitos matemáticos ainda é uma área pouco explorada.

Para contribuir nessa direção, o Capítulo 1 apresenta a Fórmula de Pick, que permite calcular a área de polígonos em uma grade (rede de pontos) fazendo a contagem de pontos da rede que pertencem ao polígono, e essa fórmula também colabora com ideias para criar jogos em rede de pontos. O Capítulo 2 explora variações do Teorema de Pick, fazendo generalizações e análise sobre polígonos conexos. O Capítulo 3 apresenta as teorias e orientações oficiais que fundamentam e justificam o uso dos jogos no ensino. Entre os documentos oficiais, destacamos importantes habilidades e competências contidas nas orientações da BNCC e do DC-GO. As principais tendências pedagógicas e seus impactos na formulação de jogos também são apresentadas e utilizadas para nortear a elaboração dos jogos deste trabalho. Este capítulo também inclui uma breve apresentação sobre as sequências didáticas, importantes para a elaboração das propostas para a sala de aula. Por fim, o Capítulo 4 apresenta uma série de jogos em rede de pontos; alguns, já utilizados em outros contextos, foram modificados e aprimorados, enquanto outros foram elaborados para melhor aproveitamento no ensino de conceitos geométricos. Após cada jogo é apresentada uma sequência didática, estruturadas para desenvolver habilidades específicas.

Com isso, estruturamos uma proposta que visa contribuir significativamente para a melhoria do ensino de matemática em nível básico.

2 Teorema de Pick

A Fórmula de Pick ou Teorema de Pick trata-se de uma maneira prática para calcularmos áreas de polígonos sobre rede de pontos no plano. Veja LIMA et al.(1991). Neste capítulo faremos a demonstração desse teorema, cujos detalhes contribuem com muitas ideias para o trabalho com estudantes do ensino básico. Nosso principal objeto de estudo são os polígonos, portanto iniciamos definindo esse objeto geométrico.

2.1 Polígonos

Para definirmos adequadamente os polígonos, teremos aqui várias definições começando por segmentos de reta indo até polígono conexo.

Definição 1 (Segmento XY)**.** *Dada uma reta r e dois pontos distintos X e Y em r, um segmento de reta é o conjunto de pontos de r localizados entre X e Y, incluindo esses chamados de extremos do segmento. A medida do segmento XY é denotada por $\overline{XY}$. Ver a Figura 1.*

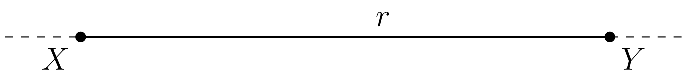


Figura 1 – Segmento.

Definição 2 (Linha Poligonal)**.** *Sejam $X_1, ..., X_n$ pontos distintos e ordenados do plano. Chamamos a união dos segmentos X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, $\ldots$ $X_{n-1}X_n$ de linha poligonal. Se $X_1 = X_n$ temos uma linha poligonal fechada, caso contrario ela é aberta. Uma poligonal é simples se os lados não adjacentes são disjuntos, Ver as Figuras 2 e 3.*

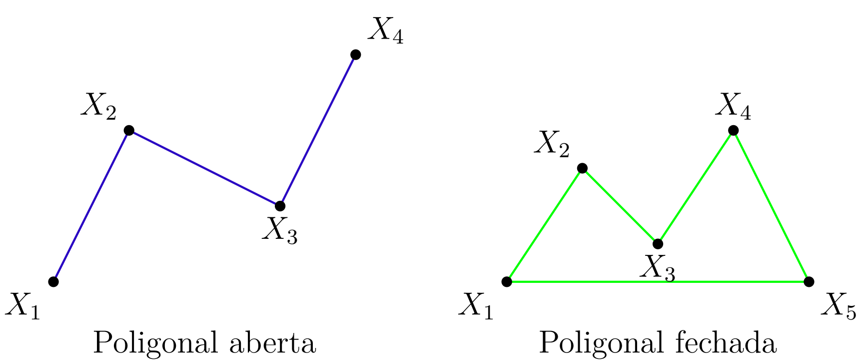


Figura 2 – Exemplo 1 de Poligonal.

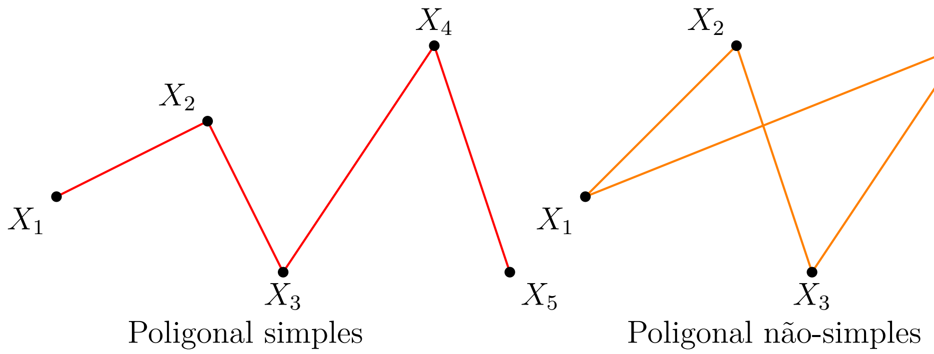


Figura 3 – Exemplo 2 de Poligonal.

Definição 3 (Polígono)**.** *Chamamos de polígono uma linha poligonal simples e fechada. Ver a Figura 4.*

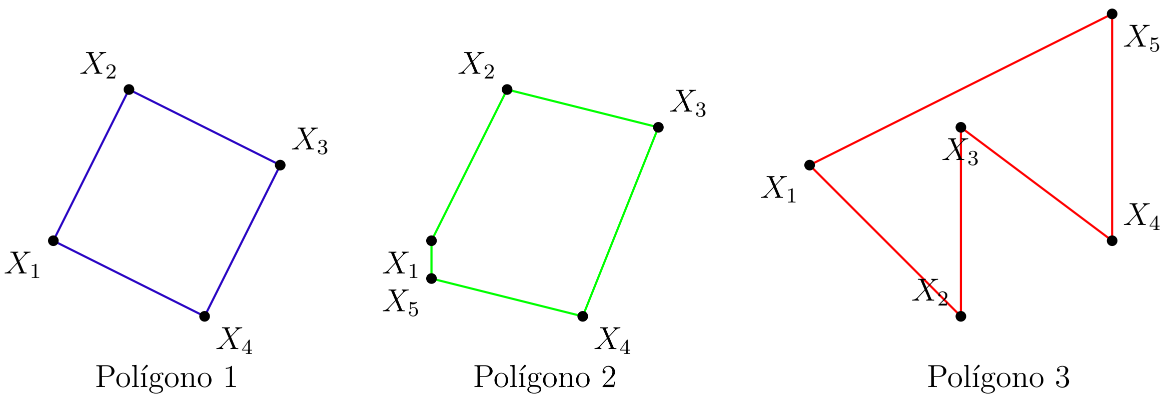


Figura 4 – Polígonos fechados e simples.

Existem alguns tipos especiais de polígonos. Abaixo segue a definição de polígonos convexos e conexos.

Definição 4 (Polígono convexo)**.** *Um polígono é convexo se, para quaisquer dois pontos A e B do polígono, o segmento AB está totalmente contido no polígono. Ver a Figura 5.*

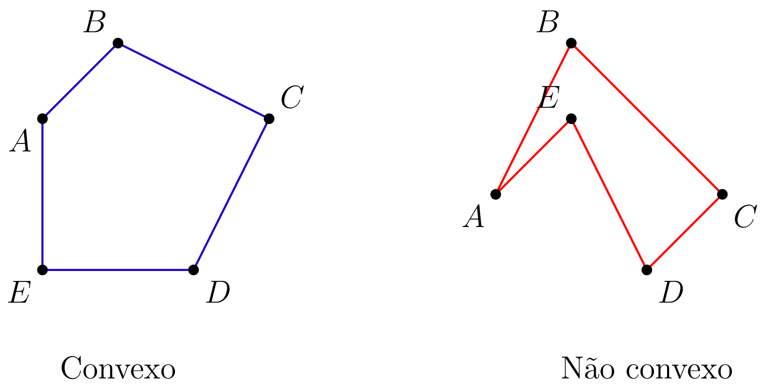


Figura 5 – Convexo e não convexo.

Definição 5 (Polígono Conexo)**.** *Um polígono é dito ser conexo se, para quaisquer dois pontos no interior do polígono, existe um caminho contínuo dentro do polígono que conecta esses pontos. Ver a Figura 6.*

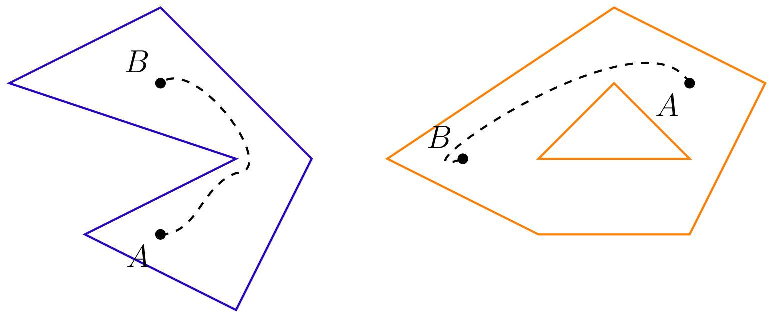


Figura 6 – Polígono conexo.

Em outras palavras, um polígono conexo é um polígono onde qualquer par de pontos pode ser conectado por uma linha curva (caminho) que está completamente contida no polígono.

Nos polígonos, podemos identificar elementos importantes como: ângulos internos e externos, região interior e exterior e fronteira. Limitar uma região utilizando um polígono e medir essa região (calcular a área da região) são atividades comuns no ensino básico. As motivações atuais são muitas, como por exemplo, delimitações de terrenos, cálculo para gastos com materiais na construção, etc., mas calcular é uma tarefa antiga e necessária, já mencionado em problemas que datam mais de 3500 anos.

> Os antigos egípcios e babilônios já possuíam fórmulas para calcular áreas de figuras planas, como quadrados, retângulos e triângulos. Essas fórmulas, embora rudimentares, eram suficientemente precisas para as necessidades práticas da época. A noção de área foi desenvolvida e refinada ao longo dos séculos, culminando nos trabalhos de Euclides, que sistematizou o conhecimento geométrico em sua obra 'Os Elementos'. (BOYER, 1996, p. 26)

Para avançarmos no cálculo de áreas, precisamos de uma definição adequada. Passamos a discutir algumas definições para a área de figuras planas

Segundo DANTE (2009)"Área é a medida de uma superfície". FONSECA (2010) cita "Área é uma medida da extensão de uma superfície. Para calcular a área de um retângulo, por exemplo, multiplicamos a medida da base pela medida da altura". Para ANDRINI (2012) "A área de uma figura plana é a quantidade de espaço que ela ocupa em uma superfície. As unidades de medida de área mais comuns são o metro quadrado (m^2) e o centímetro quadrado (cm^2)."

Segundo GIOVANNI (2015) "Quando falamos em área, estamos nos referindo ao tamanho de uma superfície. A área de formas geométricas básicas como quadrados, retângulos e triângulos pode ser calculada usando fórmulas específicas.".E ainda, DANTE; VIANA (2016), diz: "A área é uma propriedade bidimensional das figuras geométricas e é medida em unidades quadradas. Entender o conceito de área é fundamental para resolver problemas práticos do dia a dia."

Outra maneira comum de definir área é dada a seguir: "Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida", DUTENHEFNER; CADAR (2015, p. 83).

No ensino básico, a maneira natural de calcular ou medir uma área é definir a unidade de medida, que pode ser metros quadrados, centímetros quadrados, etc. e, em seguida, compararmos outras regiões com essa unidade. Por exemplo, na Figura 7, temos:

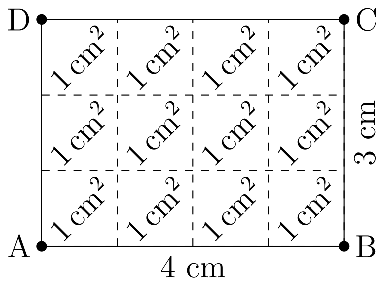


Figura 7 – Retângulo de $b = 4$ cm e $h = 3$ cm dividido em quadrados de 1 cm².

Observe que a contagem dos quadrados corresponde ao produto da medida da base pela altura; logo, $\acute{A}rea = 4 \cdot 3 = 12\,\text{cm}^2$. Entender essa comparação, neste nível de ensino, é muito importante, pois, muitos alunos acabam decorando fórmulas sem o devido entendimento do significado do número obtido.

Também é importante destacar que as definições contidas nos livros didáticos, menos formais e mais intuitivas, se justificam pelo nível ao qual se destinam: estudantes do ensino fundamental. No entanto, definições mais formais e precisas também podem ser trabalhadas em determinados níveis de ensino.

LIMA (1995) , define a área como o número que representa uma porção do plano limitado por uma figura F como área, também o número exprime quantas vezes a figura F contém a unidade de área. De modo mais preciso:

> ... pode associar a cada polígono P um número não-negativo, chamado de área de P, com as seguintes propriedades:
>
> 1) Polígonos congruentes tem áreas iguais.
> 2) Se P é um quadrado com lado unitário, então área de $P = 1$.
> 3) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos P_1, ..., P_n, tais que dois quaisquer deles tem em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.
>
> Segue-se de 3. que se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor do que a área de Q.
>
> Se observamos bem, notaremos que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio,(...) foram todas deduzidas a partir das 3 propriedades. (LIMA, 1995, p. 21, 22, 23)

Em seguida, apresenta uma definição formal da área de uma figura plana. Destaca que área de uma figura plana F, representada por um número não-negativo indicado por $a(F)$, é possível estimar se conhecermos os valores aproximados, por falta ou por excesso. Daí, os valores de $a(F)$ aproximados por falta estão em P(cor laranja) que está contido em F, e os valores aproximados por excesso, em P'(na cor amarelo) que contém F. Veja Figura 8.

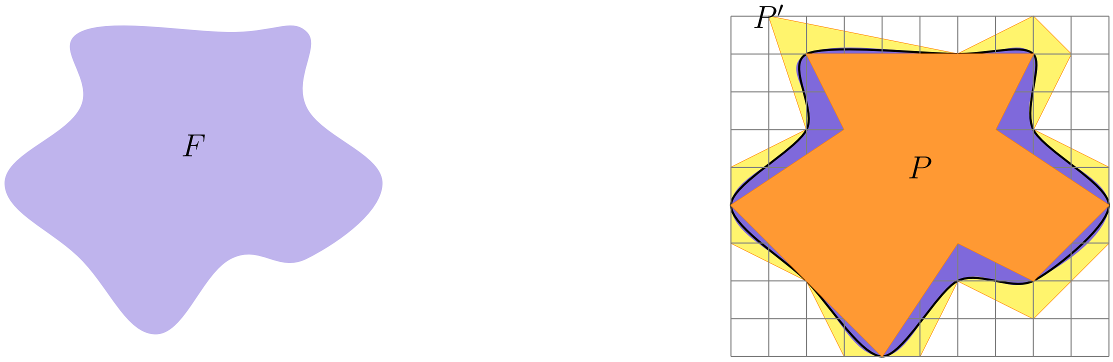


Figura 8 – Região plana F contida em P' contendo P.

Segue que, para quaisquer que sejam P contido em F e P'(contém F) o número de $a(F)$ satisfaz as desigualdades.

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P')$$

Para tornar o cálculo mais simples, limitaremos a nossa atenção para polígonos retangulares. Um **polígono retangular** é a reunião de vários retângulos justapostos, ou seja, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado. A área do polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem. Veja a Figura 9.

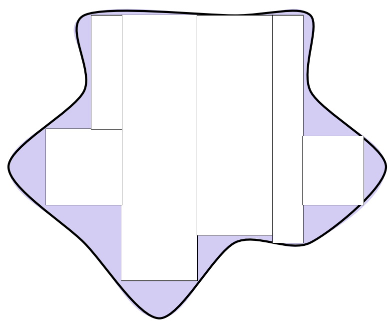


Figura 9 – Polígono retangular.

Agora, tornamos ainda mais simples, com foco apenas nos polígonos retangulares, contido em F considerando apenas os valores aproximados por falta para o número real $a(F)$.

Isso significa que, para todo polígono retangular P, contido F, tem-se

$$a(P) \leq a(F)$$

E, qualquer número $b \leq a(F)$, existe um polígono retangular P, contido em F, tal que

$$b \leq a(P) \leq a(F).$$

Assim, podemos entender a área da região F como o número que limita as áreas dos polígonos retangulares inscritos e que pode ser arbitrariamente aproximado por esses.

2.1.1 Cálculo das áreas de polígonos comuns no ensino básico.

As definições acima permitem um entendimento claro a respeito da área de figuras planas e, em particular, dos polígonos. O estudo da área de polígonos no ensino básico, em geral, é feito utilizando fórmulas diversas. Veja alguns exemplos do que é estudado no ensino básico.

Exemplo 1. *Encontre a área do quadrado, dada a medida dos lados igual a 5 unidades de comprimento (u.c.).*

Solução: Seja a área do quadrado dada pelo lado ao quadrado, ou seja, $A = l^2$. Dado $l = 5$, então $A = 5^2 = 25$ u.a. Veja a Figura 10:

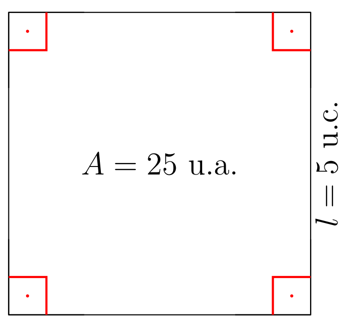


Figura 10 – Área do quadrado.

Neste caso, a medida é feita por comparação direta com a unidade de medida (quadrado de lado 1 u.c., isto é, 1 u.a.).

Exemplo 2. *Encontre a área do triângulo, dada altura $h = 3$ u.c. e base $b = 4$ u.c.*

Solução: A área do triângulo dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, onde b é a base e h é a a altura do triângulo. Daí: $A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 3$ u.a. Veja a Figura 11.

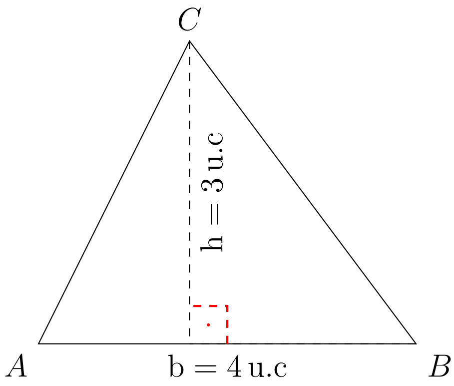


Figura 11 – Área do triângulo.

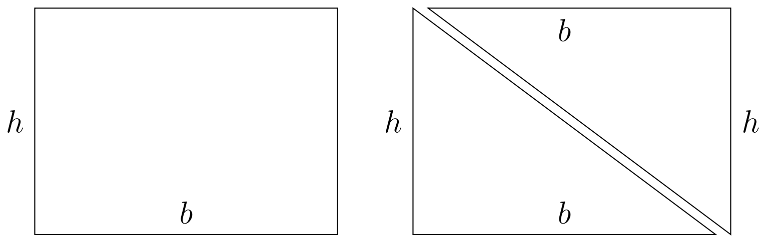


Figura 12 – Área do triângulo é metade da área do retângulo.

Neste caso, observamos que o triângulo está contido em um retângulo de mesma base e altura, ver Figura 12. Utilizamos a decomposição em figuras semelhantes para concluir o cálculo da área.

A mesma estratégia também é muito utilizada para calcular a área de outros polígonos. A ideia é tentar dividir a figura em regiões cujas áreas são conhecidas. Vejamos um exemplo;

Exemplo 3. *Encontre a área do polígono $ABCDEF$, Figura 13, supondo que $AB \parallel FD$ e $AF \parallel BD$.*

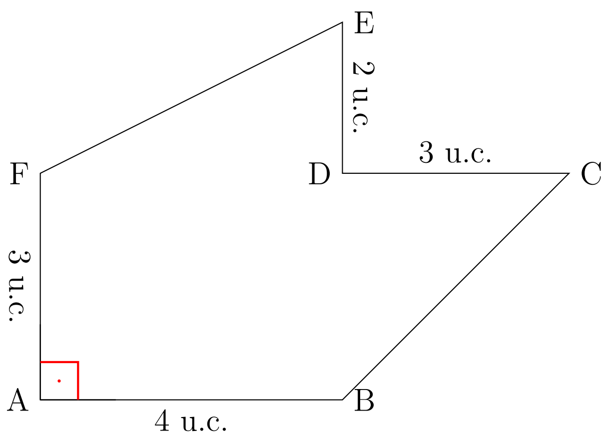


Figura 13 – Polígono não convexo.

Solução: Para calcular a área deste polígono, vamos dividi-lo em outros polígonos cuja área é fácil de se calcular ou a fórmula da área é conhecida. Vamos dividi-lo da forma mostrada na Figura 14.

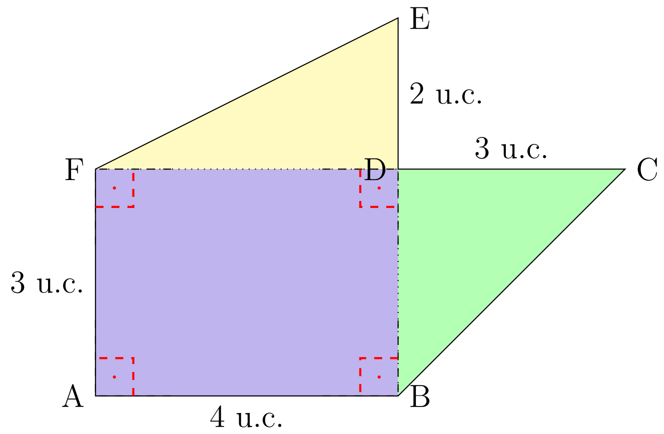


Figura 14 – Dividir em quadrados e triângulos.

Assim, conseguimos dividir o polígono em três partes: um retângulo e dois triângulos. A área do polígono $ABCDEF$ é a soma das áreas desses três polígonos, ou seja:

$$A_{ABCDEF} = A_{ABDF} + A_{BCD} + A_{DEF}$$

Vamos, então, calcular cada uma das áreas:

A área do retângulo $ABDF$ é:

$$A_{ABDF} = 4 \cdot 3 = 12 \quad \text{u.a.}$$

No triângulo BCD, a altura é o lado DC, cuja medida é $\overline{DC} = 3$ u.c. e a base é o lado BD, que tem a mesma medida que o lado AF. Assim, $\overline{BD} = 3$ u.c.

$$A_{BCD} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \quad \text{u.a.}$$

No triângulo DEF, a base é o lado DE, cuja medida é $\overline{DE} = 2$ u.c. e a altura é o lado DF, que tem a mesma medida que o lado AB, assim, $\overline{DF} = 4$ u.c.

$$A_{DEF} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \quad \text{u.a.}$$

Assim, a área total do polígono $ABCDEF$ é:

$$A_{ABCDEF} = 12 + 4 + 4,5 = 20,5 \quad \text{u.a.}$$

Assim, seguindo as propriedades de área propostas por LIMA (1995, p. 20), temos tratamento que conduz o cálculo da área de polígonos no ensino básico.

2.1.2 Cálculo das áreas de polígonos por meio da Fórmula de Pick

O cálculo da área de polígonos desenhados em redes quadrangulares pode realizado utilizando a Fórmula de Pick. Nesta sessão, apresentamos algumas aplicações da Fórmula de Pick. De modo surpreendente, Pick [1] O'CONNOR; ROBERTSON (2005), LIMA et al.(1991) percebeu que o cálculo da área de figuras planas construídas sobre uma rede de pontos no plano pode ser feito diretamente a partir da contagem dos pontos da rede sobre a fronteira e dos pontos do interior de um polígono, desde que os vértices do polígono sejam pontos da rede. Inicialmente, vamos definir o que é uma rede pontos no plano.

Definição 6 (Rede de Pontos)**.** *É um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal e outro na vertical é igual a 1.*

Observação 7. *Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na direção vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m,n) são números inteiros(positivos, negativos, ou zero).*

Na Figura 15 apresentamos um polígono $ABCD$ dentro de uma rede:

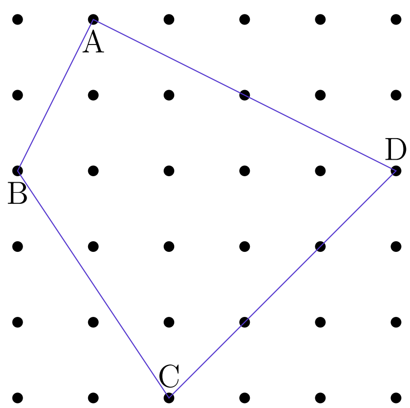


Figura 15 – Rede de pontos e polígono.

Nesta etapa vamos nos dedicar ao estudo de polígonos sobre uma rede de pontos, isto é, polígonos cujos vértices são pontos da rede. Os estudos do matemático tcheco George Alexander Pick demonstraram que a área de tais figuras pode ser calculada através da fórmula apresentada no Teorema a seguir.

Teorema 1 (Fórmula de Pick)**.** *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1,$$

[1] **Georg Alexander Pick** (1859–1942) foi um matemático austríaco de origem judaica que fez contribuições significativas para a matemática. Sua vida foi tragicamente interrompida durante o Holocausto. Foi contemporâneo de **Albert Einstein** e desempenhou um papel crucial ao apresentar ao físico o trabalho dos matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita que ajudando-o posteriormente a formular com sucesso sua teoria da relatividade geral em 1915.

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo (a fronteira) do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono. Ver a Figura 3.

Antes de explorarmos os detalhes da demonstração, vejamos como realizar o cálculo da área de polígonos utilizando a Fórmula de Pick, supondo que os polígonos estejam sobre uma rede.

Em nosso primeiro exemplo, na Figura 10, desenhamos um quadrado Q cujos lados medem $5\,u.c.$.

Exemplo 4. *Encontre a área do quadrado desenhado na Figura 16, cujos lados medem 5 u.c.*

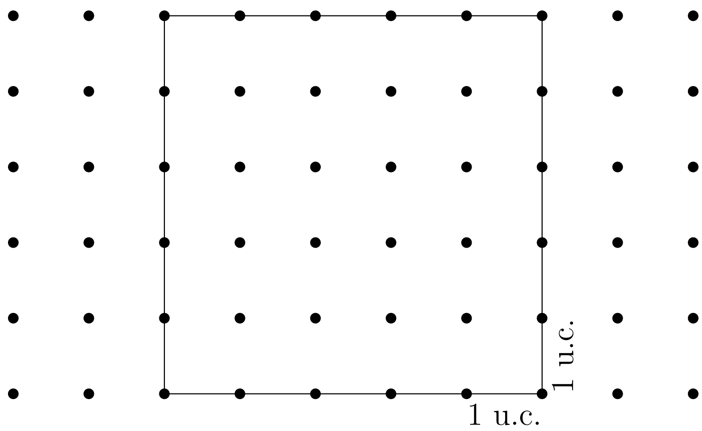


Figura 16 – Quadrado de lado 5 unidades.

Solução: Total de pontos do bordo B é 20, e total de pontos internos I é 16.

$$\begin{aligned} A &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{20}{2} + 16 - 1 \\ &= 10 + 16 - 1 \\ &= 25 \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

Exemplo 5. *Calcular a área do triângulo dado na Figura 17, com altura $h = 3$ u.c. e base $b = 4$ u.c.*

Solução: Total de pontos do bordo $B = 8$ e total de pontos interiores $I = 3$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{8}{2} + 3 - 1 \\ &= 4 + 3 - 1 \\ &= 6 \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

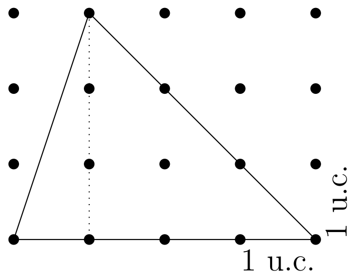


Figura 17 – Triângulo na malha.

Exemplo 6. *Calcular a área do polígono dado na Figura 18.*

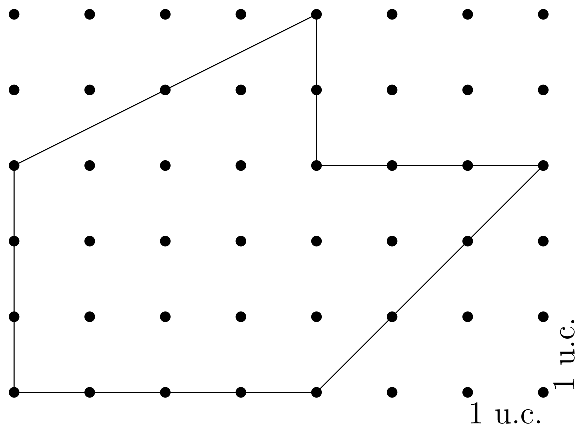


Figura 18 – Polígono não-convexo.

Solução: Total de pontos do bordo $B = 17$ e de pontos interiores $I = 13$. Aplicando a Fórmula de Pick, temos,

$$\begin{aligned} A &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{17}{2} + 13 - 1 \\ &= 8,5 + 13 - 1 \\ &= 20,5 \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

Após apresentarmos a definição de área e explorar alguns dos exemplos de fórmulas utilizadas no ensino básico para calcular áreas e utilizar a Fórmula de Pick para calcular áreas em redes, iniciamos a demonstração da Fórmula de Pick. Seguem alguns resultados necessários para a demonstração. Vamos iniciar discutindo os triângulos e paralelogramos fundamentais.

2.2 Triângulos e Paralelogramos fundamentais

Na geometria plana, o polígono mais simples é o triângulo. Ainda assim, esta figura guarda algumas surpresas. Vamos estudar um pouco da área de triângulos desenhados sobre uma rede de pontos.

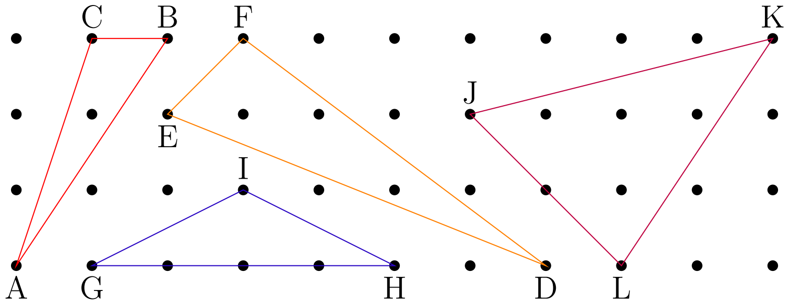


Figura 19 – Variados Triângulos.

Observe que:

- O triângulo ABC tem área $\frac{3}{2}$ u.a;
- O triângulo EFG tem área $\frac{7}{2}$ u.a;
- O triângulo IGH, área $\frac{4}{2}$ u.a.;
- e por fim, JKL, área $\frac{10}{2}$ u.a.

Seria possível desenhar um triângulo na rede com área menor que $\frac{1}{3}$? Qual seria o triângulo na rede de menor área? Que propriedades eles têm?

Um triângulo especial é o que definiremos a seguir, o Triângulo Fundamental.

Definição 8. *Um triângulo é chamado de* ***fundamental*** *quando os únicos pontos da rede sobre o triângulo são os vértices, isto é, nenhum outro ponto da rede está na borda ou no interior do triângulo.*

Veja alguns exemplos de triângulos fundamentais.

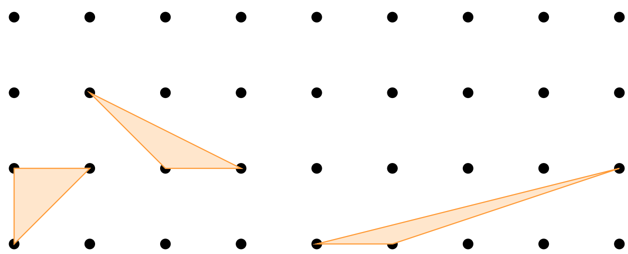


Figura 20 – Triângulos Fundamentais.

Exemplos de triângulos que não são fundamentais.

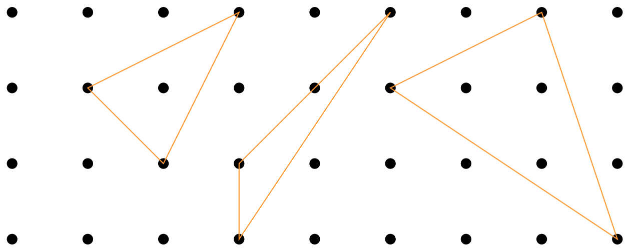


Figura 21 – São triângulos não fundamentais.

Outra figura plana que merece atenção é o paralelogramo fundamental obtido pela justaposição de dois triângulos fundamentais congruentes. Segue a definição:

Definição 9. *Um paralelogramo é chamado de* ***fundamental*** *quando os únicos pontos da rede sobre o paralelogramo são os quatro vértices, isto é, nenhum outro ponto da rede está sobre a borda ou o interior do paralelogramo.*

Observe os exemplos a seguir.

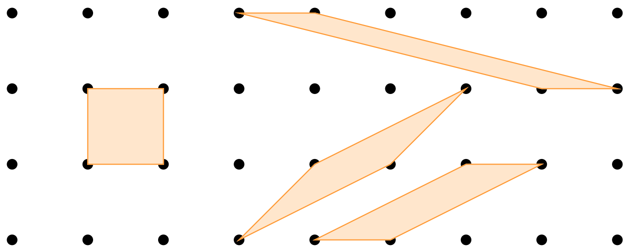


Figura 22 – Paralelogramos Fundamentais.

Veja exemplos de paralelogramos não fundamentais:

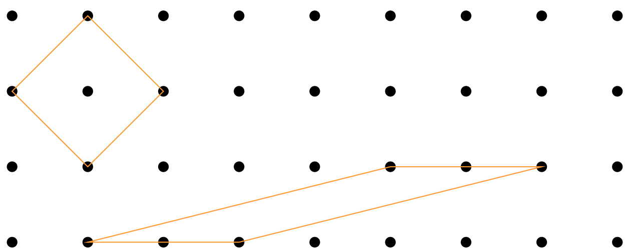


Figura 23 – Paralelogramos não fundamentais.

Note que, qualquer uma das diagonais do paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais, tendo a diagonal como lado em comum.

Por outro lado, dado um triângulo fundamental ABC, pode-se obter um paralelogramo $ABCD$. Para determinar o ponto D, traçamos a partir de B uma reta paralela ao lado AC e passando por C uma reta paralela ao lado AB. A intercessão dessas duas retas é o ponto D procurado. Este é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 2. *Se ABC é triângulo fundamental, então $ABCD$ é um paralelogramo fundamental, sendo D o ponto obtido conforme as instruções acima.*

Demonstração. Introduzindo um sistema de coordenadas na rede, a obtenção de segmentos paralelos fica simplificada, pois, dado um segmento AB, sobre eixos cartesianos, para criar outro segmento CD, tal que seja paralelo a AB, bastando para isso fazer uma translação dos pontos.

Assim, dado um triângulo fundamental, vamos utilizar um sistema de coordenadas que tem o ponto A como origem, isto é, $A(0, 0)$. Segue que os outros dois vértices tem coordenadas $B(m, n)$ e $C(s, t)$.

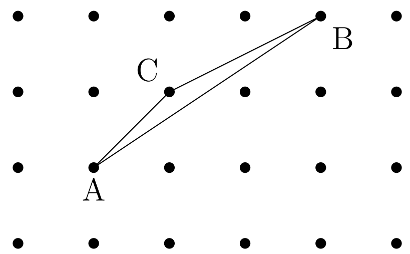


Figura 24 – Triângulo ABC.

O ponto D tem coordenadas de $(m + s, n + t)$. Para concluir que o paralelogramo $ABCD$ é fundamental, observe que, trocando os sinais das coordenadas B e C resulta em $E(-m, -n)$ e $F(-s, -t)$. Assim, o triângulo AEF formado também é fundamental, pois, do contrário, existiria pelo menos um ponto na borda ou no interior de AEF que não é vértice. O oposto desse ponto estaria no triângulo ABC e isso contraria o fato de se tratar de um triângulo fundamental.

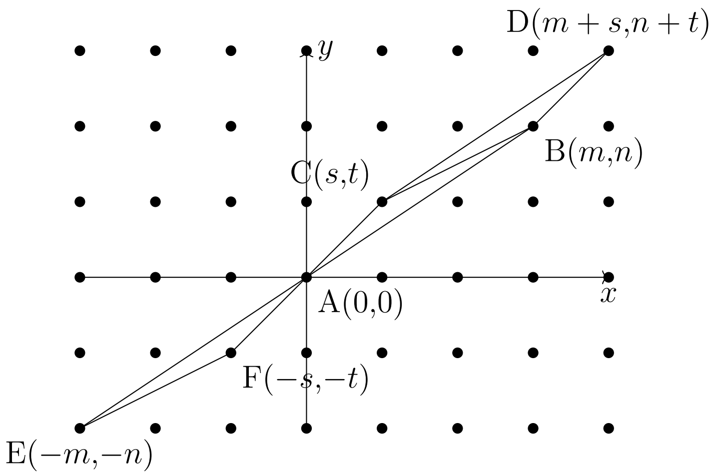


Figura 25 – $ABC \equiv AEF$.

Os triângulos EFA e CBD são congruentes.Assim, cada ponto $P'(x+m+s, y+n+t)$ do triângulo BCD e formado tomando $P(x, y)$ do triângulo AEF, somando $m+s$ à abcissa e $n + t$ a ordenada de P. E assim, se P' tem coordenadas inteiras, P também as terá. Como AEF é um triângulo fundamental, implica que BCD também o é. Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é fundamental. $\square$

Como o paralelogramo $ABCD$ é fundamental, - não tem pontos além dos vértices - podemos traçar retas r_1 e r_2, tais que, $AB \subset r_1$ e $CD \subset r_2$, por exemplo, e formar quantos paralelogramos pudermos e todos serão fundamentais. Neste caso, obtemos duas retas paralelas que não contém pontos da malha entre elas.

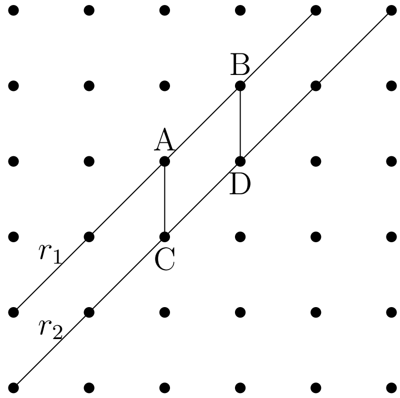


Figura 26 – Paralelogramo fundamental.

Por argumentação inversa, podemos gerar triângulos fundamentais. De fato, seja PQ um segmento de reta que não contém outros pontos da rede além dos dois vértices P e Q. Considere retas paralelas a PQ que contenham os pontos da rede; escolhendo as mais próximas do segmento PQ (uma de cada lado, como na Figura 27). A construção de um triângulo pelos vértices P, Q e qualquer outro ponto (candidato a vértice) das retas próximas gera um triângulo fundamental. Na Figura 27, os triângulos PQR e PQS são exemplos dessa construção.

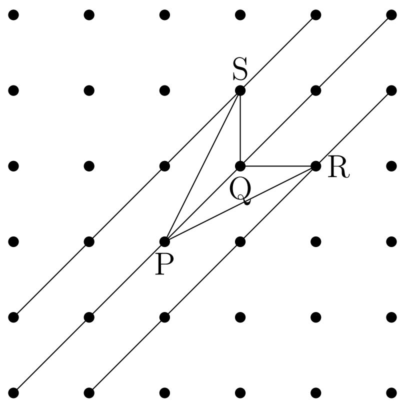


Figura 27 – Outro paralelogramo.

Veja que PQR é um triângulo fundamental, pois, caso contrário, existiria um ponto da rede diferente de P, Q e R, e que pertence a esse triângulo. Daí, existiria uma reta paralela mais próxima de PQ, ao qual o ponto, que esta no triângulo PQR, faz parte.

Então, é necessário que a reta paralela seja a mais próxima possível dos dois vértices escolhidos como lado do triângulo, o que veremos no próximo teorema. Essas informações nos levam a um fato bastante curioso sobre os triângulos fundamentais: todos têm área $\frac{1}{2}$.

Ou seja, o triângulo de menor área que se pode desenhar em uma malha é um triângulo fundamental. Vejamos a seguir a demonstração desse fato.

Teorema 3. *A área de um triângulo fundamental é igual a* $\frac{1}{2}$.

Demonstração. Dada uma rede de pontos, tome $A(0,0)$ e $B(m,n)$, onde $m, n \in \mathbf{Z}^+$, dois dos vértices do triângulo fundamental ABC. Note que m e n são primos entre si; do contrário, seja $d > 1$ um divisor comum de m e n, e existiria um ponto $P(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$, tal que $P \in AB$. Nesse caso, ABC não seria fundamental.

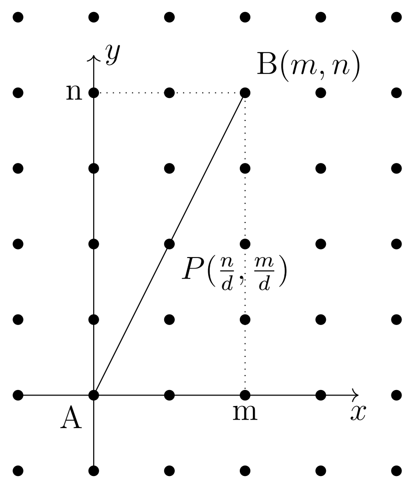


Figura 28 – $P \in AB$, ou seja, $(m,n) \neq 1$.

Para $m \neq 0$, a equação da reta que passa por C e é paralela ao segmento AB é dada por: $y = \frac{n}{m}x + b$. Da discussão sobre paralelogramos fundamentais, sabemos que essa é a reta paralela ao segmento AB que está mais próxima. Vamos calcular a área do triângulo ABC em função de b e, em seguida, determinar o valor de b. A área do triângulo ABC é igual área de ABD, cujo valor é $\frac{b \cdot m}{2}$, onde b é a base AD e m é a altura de ABD.

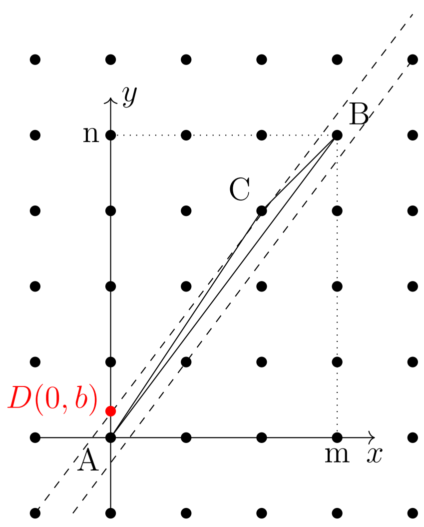


Figura 29 – Inclinação

Finalmente, vamos provar que dentre as várias retas paralelas ao segmento AB, o coeficiente linear daquela que está mais próxima do segmento AB, tem relação direta com m.

De fato, seja $y = \frac{n}{m}x + \beta$ a equação da reta que passa pelos pontos da rede e está mais próxima do segmento AB. Suponha que a reta passa por um ponto (s, t) da rede. Logo $t = \frac{n}{m}s + \beta$ e

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - ns}{m}.$$

Observe que a reta mais próxima é aquela onde $tm - ns$ assume o menor valor possível. O lema a seguir garante que o menor valor inteiro positivo é 1.

Lema 4. *Se os inteiros m, n são primos entre si, então existem inteiros s, t tais que $tm - ns = 1$.*

Demonstração. Podemos usar o algoritmo da divisão de Euclides para mostrar que a equação $mx - ny = mdc(m, n)$ tem solução inteira. Seque que se m e n são primos entre si, então existem coeficientes s e t tais que

$$ms + nt = 1, \tag{2.1}$$

onde $mdc(m, n) = 1$.

Assim, a existência de inteiros s e t tais que $tm - ns = 1$ é demonstrada quando m e n são primos entre si.

□

Portanto, dentre as retas paralelas ao segmento AB, a mais próxima é aquela com $b = \frac{1}{m}$, onde $tm - ns = 1$ é o menor valor inteiro positivo, conforme o lema anterior. Daí, área de ABC é

$$Area(ABC) = \frac{b \cdot m}{2} = \frac{\frac{1}{m} \cdot m}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ $u.a$ unidade de área. Caso $m = 0$, é necessário que $n = \pm 1$ para que ABC seja um triângulo fundamental. Mas nesse caso, trata-se de um triângulo retângulo que é metade de um dos quadrados da rede. Logo, sua área é igual a $\frac{1}{2}$. □

2.3 Decomposição de um polígono em triângulos

Com o objetivo de calcular a área de diferentes polígonos, vamos estudar como podemos decompor um polígono simples (ver Figuras 3 e 4) em uma rede pontos em triângulos fundamentais.Veja a Figura 30.

A decomposição de um polígono convexo de n lados pode ser feita escolhendo um vértice qualquer e traçando $n-3$ diagonais que se ligam aos vértices não-adjacentes. Assim,

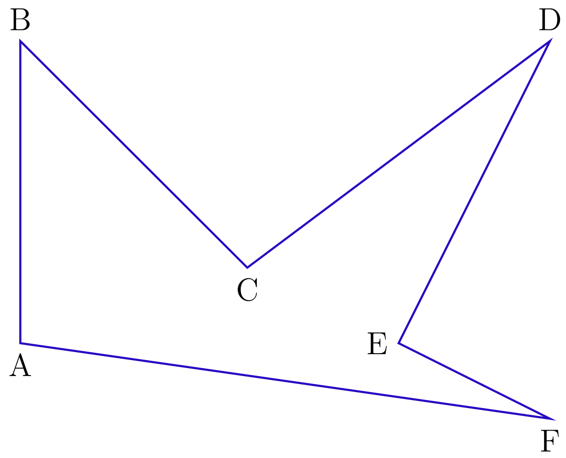


Figura 30 – Polígono simples, sem auto-intercessão.

é possível decompor o polígono convexo em $n-2$ triângulos justapostos, sem acrescentar nenhum novo vértice. Veja a seguir a Figura 31, onde se escolhe um vértice (A) e traça-se diagonais para os vértices não-adjacentes.

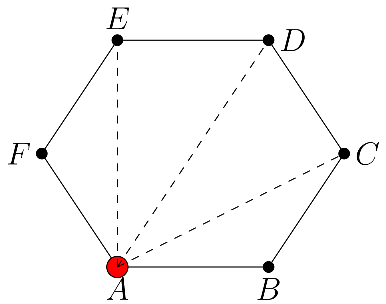


Figura 31 – Polígono convexo.

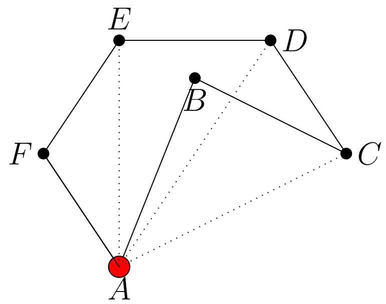


Figura 32 – Polígono não convexo.

Porém, é fácil perceber que esse procedimento não se aplica aos polígonos não-convexos, como mostrado na Figura 32. Portanto, temos a seguinte indagação: a decomposição de polígonos não-convexos é possível? Veremos que a resposta é afirmativa e o teorema a seguir tratará também dos polígonos não-convexos.

Para isso, é importante lembrar de que a soma dos ângulos do polígono é $S = (n-2)\pi$, pois um polígono convexo pode ser decomposto em $n-2$ triângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo é π.

Teorema 5. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto em uma reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são os vértices do polígono dado.*

Demonstração. Suponha, que existam polígonos para os quais o teorema é falso, isto é, polígonos que não podem ser decompostos em triângulos. Dentre esses, seja P um polígono com n lados, sendo n o menor número de lados para um polígono que não se decompõe em triângulos.

Considere o sistema de eixos coordenados ajustado ao polígono, de tal forma que, nenhum dos lados do polígono seja paralelo aos eixos coordenados. Como no plano cartesiano é possível criar infinitas retas (inclinações), então é sempre possível ajustar este plano para que nenhum dos n lados finitos do polígono P seja paralelo aos eixos e assim podemos generalizar.

Seja A o ponto no bordo mais a direita, de maior abcissa. Sabendo que nenhum lado de P é paralelo aos eixos cartesianos, então A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Existem dois casos:

1. O triângulo ABC, formado pelo vértice mais a direita e os outros dois vértices adjacentes, não contém outro vértice de P em seu interior, conforme mostrado na Figura 33. Ao traçar um segmento de reta de B até C, observe que BC está totalmente contido em P, decompondo em ABC e P'. Como P' tem $n-1$ lados, logo é um polígono que pode ser decomposto, e juntando com o triângulo ABC forma polígono P de n lados, contrariando o argumento inicial.

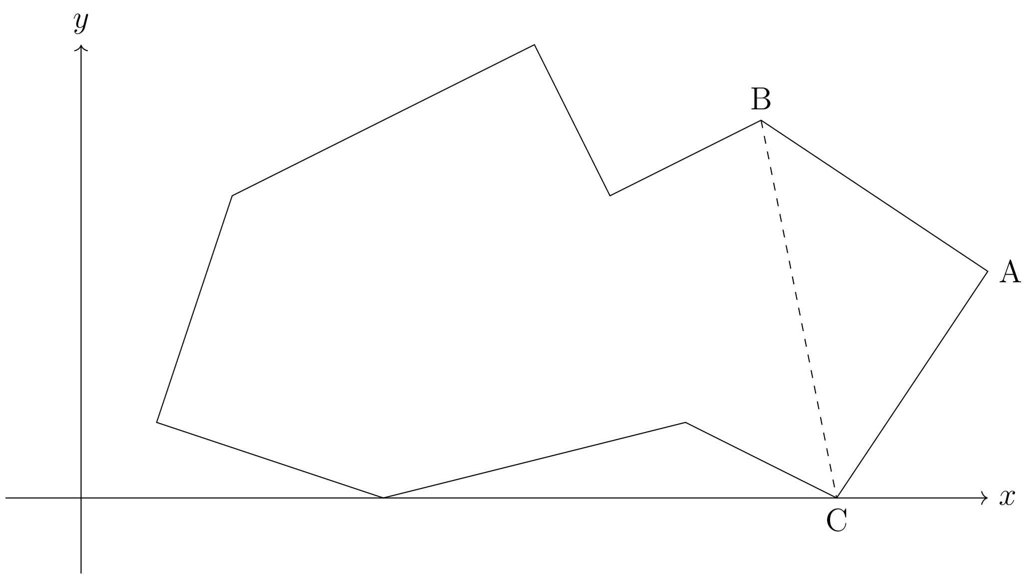


Figura 33 – Polígono com lados não paralelos aos eixos.

2. Dado um ponto A mais a direita, conforme mostrado na Figura 34, existem B e C vértices adjacentes e algum outro vértice de P de modo que, traçando um segmento BC, parte deste segmento fica fora do interior de P. Assim, existe pelo menos um ponto D o mais distante que o segmento BC contido em ABC. Ao invés de traçar BC, é conveniente traçar o segmento AD, formando dois polígonos P' e P'', tais que, a reunião de lados dos polígonos decompostos é $n+2$. Como P' tem $n' \geq 3$ lados e P'' tem $n'' \geq 3$ lados, logo $n' + n'' = n + 2$. Contudo, n' e n'' são menores de que n, e assim P' e P'' podem ser decompostos em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos justapostos, respectivamente. Justapondo as decomposições em AD, temos a decomposição de P, $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$, o que é uma contradição.

$\square$

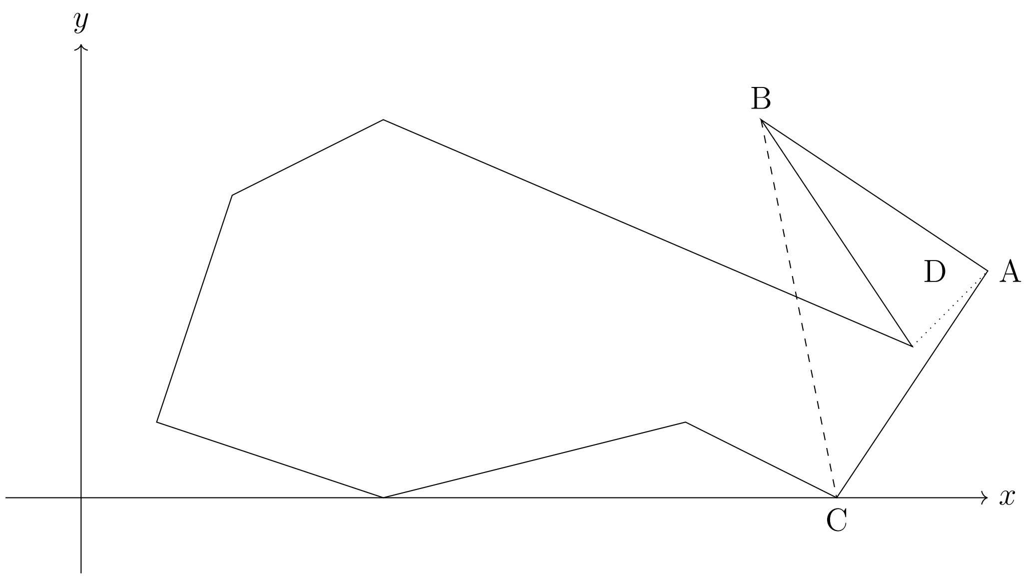


Figura 34 – D ultrapassa o seguinte BC.

Corolário 5.1. *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados (S_n) é igual a $(n-2)\pi$.*

Demonstração. Considere um polígono de n lados. Podemos dividir este polígono em $n-2$ triângulos justapostos. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos (ou 180°).

Como temos $n-2$ triângulos, a soma dos ângulos internos de todos esses triângulos será:

$$S_n = (n-2)\pi$$

Cada ângulo interno do polígono será formado por ângulos dos triângulos em que o polígono foi dividido, como podemos ver no exemplo da Figura 35.

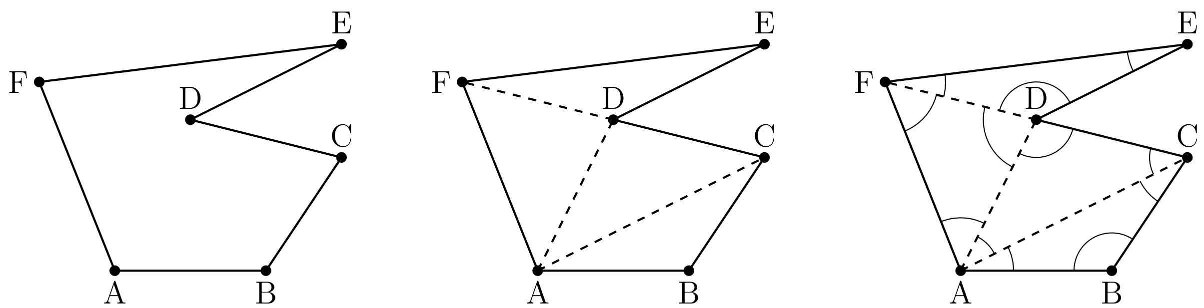


Figura 35 – Soma dos ângulos internos

Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos os triângulos formados pela divisão. Assim, concluímos que:

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2)\pi$ radianos.

□

Observação 10. *Na Figura 36, vemos um hexágono, que é um polígono com seis lados. Esse hexágono é formado pela união de 4 triângulos justapostos, resultando em um total de 12 lados ao considerarmos os lados dos triângulos. Além disso, podemos notar que existem 3 diagonais no hexágono.*

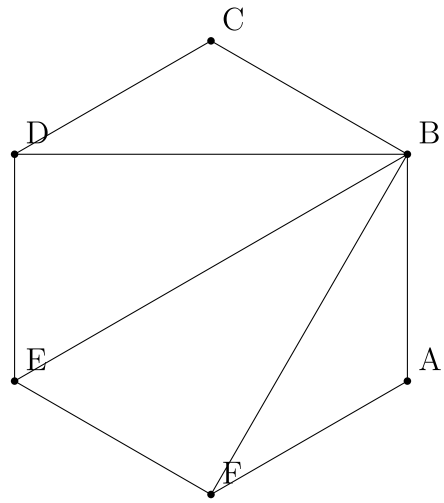


Figura 36 – Hexágono decomposto em triângulo justapostos.

Vamos generalizar essa ideia para qualquer polígono com n lados, onde $n \geq 3$. Quando dividimos um polígono de n lados em triângulos, obtemos $n-2$ triângulos. Como cada triângulo tem 3 lados, então o número total de lados ao considerar todos os triângulos é $3(n-2)$, o que simplifica para $3n-6$.

Para determinar o número de diagonais necessárias para decompor o polígono, devemos considerar que, ao desenhar as diagonais, cada lado do polígono é contado uma vez, enquanto cada diagonal é contada duas vezes (uma vez para cada triângulo que ela forma). Podemos expressar isso na seguinte equação:

$$3n - 6 = n + 2x$$

Aqui, $3n-6$ representa o número total de lados dos triângulos, n é o número de lados do polígono, e $2x$ representa a contagem dupla das diagonais.

Resolvendo essa equação para x, temos:

$$3n - 6 = n + 2x$$

$$2n - 6 = 2x$$

$$x = n - 3$$

Portanto, o número de diagonais necessárias para dividir um polígono de n lados em triângulos justapostos é $n-3$.

Teorema 6. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede de pontos do plano pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração. Para provar esse teorema, vamos considerar um triângulo ABC, tal que, seus vértices pertençam a uma rede de pontos, e contenha n pontos no interior ou no bordo do triângulo. Para decompor em triângulos fundamentais, podemos começar com, um ponto P no interior de ABC (se existir) e traçar segmentos de retas até os vértices de ABC, formando três triângulos. Cada triângulo terá um número de pontos menor do que o número de pontos da rede.

Em outro caso, suponha que existe um ponto sobre um dos lados de ABC, por exemplo, AB. Então, ligamos C ao ponto contido no lado AB, e nesse caso, decompomos em dois triângulos, onde cada triângulo tem uma quantidade inferior de pontos em relação a ABC.

Seguindo essas observações, teremos um número finito de etapas e chegaremos à decomposição de ABC em triângulos fundamentais. Como podemos ver na Figura 37.

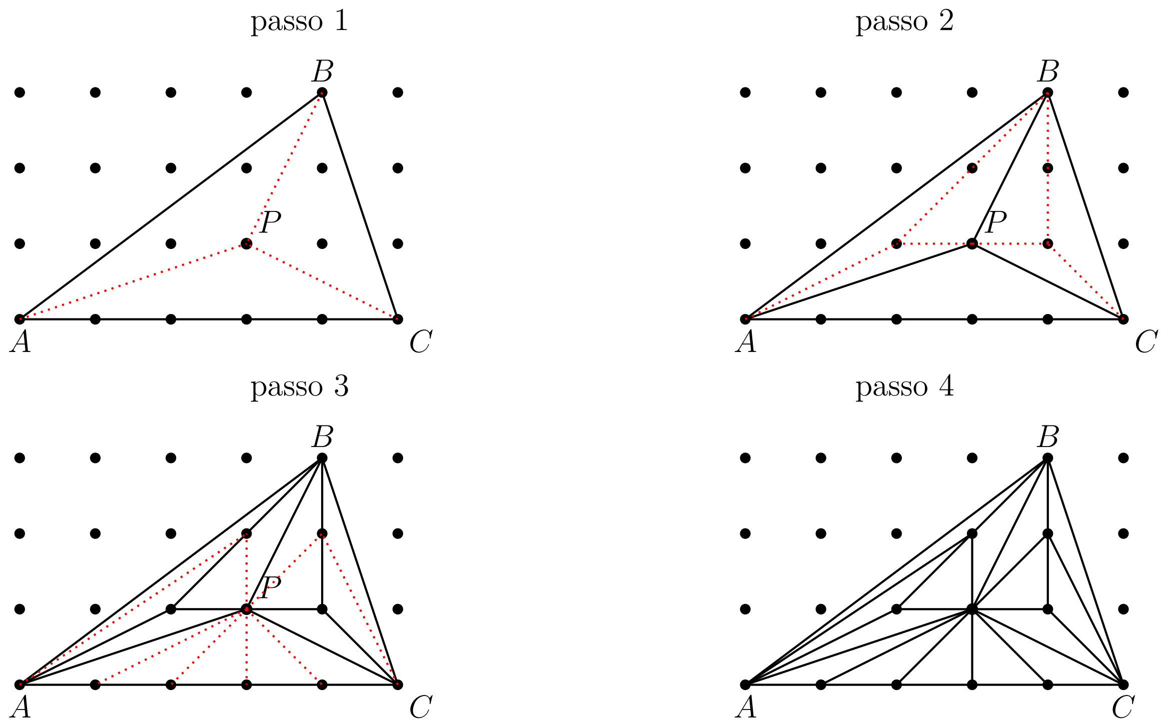


Figura 37 – Divisão do triângulo $\triangle ABC$ em triângulos fundamentais.

$\square$

2.3.1 Demonstração de Fórmula de Pick.

Nesta seção, reuniremos todos os elementos desenvolvidos neste capítulo para apresentar a demostração do teorema de Pick.

O polígono P pertence a uma rede de pontos do plano onde B e I são, respectivamente, o número de pontos do bordo e o número de pontos interiores do polígono P. Denotando por T o número de triângulos fundamentais necessários para decompor P, *segue que a área do polígono é dada por* $A_p = \frac{T}{2}$, *onde* T *é a quantidade de triângulos fundamentais de área* $\frac{1}{2}$, *como dito em Definição 3.*

Vamos calcular a soma dos ângulos internos de triângulos fundamentais que compõem o polígono P. *Podemos ir por dois caminhos.*

1. *Se há* T *triângulos fundamentais, a soma dos seus ângulos internos é* $T \cdot \pi$.

2. *Vamos calcular separadamente:* S_b *definimos como a soma dos ângulos que tem vértice no bordo e* S_i *como a soma dos ângulos cujos vértices estão no interior do polígono* P.

    - *Se* B' *é um número de pontos que são vértices de* P *e* B" *é o número de pontos do bordo que não são vértices, então* $B' + B" = B$, *onde* B *é todos os pontos do bordo. Veja que,* $S_b = (B' - 2) \cdot \pi + B" \cdot \pi$, *pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com cada um dos* B" *pontos do bordo de* P *não são vértices somam um ângulo raso, ou seja,* π. *Daí,*

    $$S_b = (B' - 2) \cdot \pi + B'' \cdot \pi = (B' + B'' - 2) \cdot \pi = (B - 2) \cdot \pi$$

    - *Para cada ponto da rede interior a* P, *a soma dos ângulos internos que têm esse ponto como vértice é* 2π. *Logo,* $S_i = 2 \cdot I \cdot \pi$.

Portanto, $S_b + S_i = (B-2)\pi + 2 \cdot I\pi = (B + 2I - 2)\pi$. *Igualando* (1) *com* (2), *temos:*

$$T \cdot \pi = (B + 2I - 2)\pi$$

$$T = (B + 2I - 2)$$

Como $A_P = \frac{T}{2}$, *então* $A_p = \frac{B}{2} + I - 1$.

3 Extensões do Teorema de Pick.

Neste capítulo, vamos explorar as extensões do Teorema de Pick para além dos polígonos convexos.

3.1 Polígono com Furos.

Nesta seção, estenderemos 0 Teorema de Pick para polígonos mais gerais, consideramos polígonos com buracos, que chamaremos ***polígonos vazados****. Também abordaremos polígonos formados por linhas poligonais não simples.*

Definição 11. *Um polígono conexo P, com seus vértices sobre os pontos da rede, é chamado polígono* ***vazado****, se é retirado do seu interior um número finito de interiores de polígonos simples, que também tem seus vértices sobre a rede de pontos da rede , sem interseções. Ver a Figura 38.*

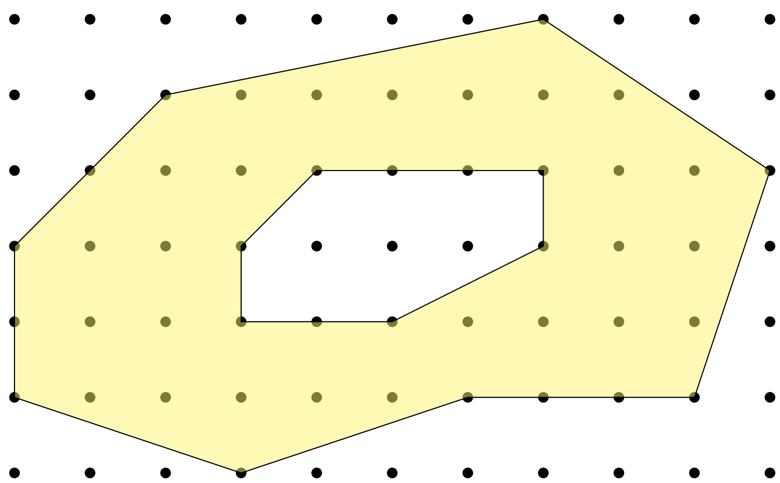


Figura 38 – Polígono Vazado

Cada um dos polígonos retirados é chamado de ***furo****. Observe que o bordo do polígono vazado é a união das fronteiras dos polígonos.*

A Fórmula de Pick para polígono um vazado, que tenha apenas 1 *furo, é apresentada a seguir:*

Proposição 1. *Seja P um polígono vazado do qual é retirado o interior de um polígono Q . Se $\mathbb{B}_1$ é o número de pontos do bordo de P, $\mathbb{I}_1$ é o número de pontos do seu interior e A_p é a sua área, então*

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_1}{2} + \mathbb{I}_1.$$

Demonstração. A área do polígono vazado P, A_p, é dada pela diferença da área do polígono completo A_c e a área do furo A_q, polígono Q, isto é, $A_p = A_c - A_q$. Denote por B e I o número de pontos do bordo e do interior do polígono completo P, respectivamente. Denote por B_1 e I_1 o número de pontos do bordo e do interior do polígono completo Q, respectivamente. Aplicando a Fórmula de Pick, temos,

$$\begin{aligned}
A_p &= A_c - A_q \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 - \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) \\
&= \frac{B}{2} - \frac{B_1}{2} + I - I_1 - 1 + 1 \\
&= \frac{B + B_1}{2} - B_1 + I - I_1 \\
&= \frac{\mathbb{B}_1}{2} + \mathbb{I}_1
\end{aligned}$$

□

Agora vamos repetir o processo para o caso de um polígono vazado com dois furos.

Proposição 2. *Seja P polígono vazado com dois furos, Q e R, retirados de seu interior. Se $\mathbb{B}_2$ é o número de pontos do bordo de P, $\mathbb{I}_2$ é o número de pontos do seu interior e A_p sua área, então*

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_2}{2} + \mathbb{I}_2 + 1.$$

Demonstração. A área do polígono com dois furos é dada pela diferença entre a área do polígono completo P e as áreas dos furos polígono Q e R, isto é,

$$A_p = A_c - A_q - A_r$$

Aplicando a Fórmula de Pick nos polígonos, temos:

$$\begin{aligned}
A_p &= A_c - A_q - A_r \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 - \left(\frac{B_q}{2} + I_q - 1\right) - \left(\frac{B_r}{2} + I_r - 1\right) \\
&= \frac{B}{2} - \frac{B_q}{2} - \frac{B_r}{2} + I - I_q - I_r - 1 + 1 + 1 \\
&= \frac{B}{2} - \frac{B_q}{2} - \frac{B_r}{2} - B_q - B_r + I - I_q - I_r + 1 \\
&= \left(\frac{B + B_q + B_r}{2}\right) + I - (I_q + I_r + B_q + B_r) + 1 \\
&= \frac{\mathbb{B}_2}{2} + \mathbb{I}_2 + 1 \quad ,
\end{aligned}$$

sendo B e I os números de pontos do bordo e do interior do polígono completo P, sendo B_q e I_q o números de pontos do bordo e interior do furo Q e B_r e I_r os números de pontos do bordo e interior do furo R. □

3.1.1 Generalização do Teorema de Pick para polígono conexo vazados

Nesta subseção, vamos generalizar o Teorema de Pick para um polígono vazado com n furos.

Proposição 3. *Seja P um polígono vazado do qual um número finito de polígonos Q_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$, foi retirado do seu interior. Se $\mathbb{B}_n$ é o número de pontos do bordo de P, $\mathbb{I}_n$ é o número de pontos do seu interior e A_p sua área, então*

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_n}{2} + \mathbb{I}_n + (n-1)$$

Demonstração. A área do polígono P com n furos indicado por A_p, é calculada subtraindo de A_c (área do polígono completo) as áreas A_i dos Q_i polígonos, $i = 1...n$. Logo,

$$\begin{aligned}
A_p &= A_c - \sum_{i=1}^{n} A_i \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{2} + I_i - 1\right) \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} B_i - \sum_{i=1}^{n} I_i + n \\
&= \frac{B}{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{2}\right) + I - \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} B_i + n - 1 \\
&= \frac{B}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{2} + I - \sum_{i=1}^{n}(I_i + B_i) + n - 1 \\
&= \frac{\overbrace{B + \sum_{i=1}^{n} B_i}^{\mathbb{B}_n}}{2} + \underbrace{I - \sum_{i=1}^{n}(I_i + B_i)}_{\mathbb{I}_n} + n - 1 \\
&= \frac{\mathbb{B}_n}{2} + \mathbb{I}_n + (n-1)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
A_p &= A_c - A_1 - A_2 - ... - A_i - ... - A_n \\
&= A_c - (A_1 + A_2 + ... + A_i + ... + A_n) \\
&= \frac{B}{2} + I - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) + ... + \left(\frac{B_n}{2} + I_n - 1\right)\right] \\
&= \frac{B + B_1 + B_2 + ... + B_n}{2} + I - (I_1 + I_2 + ... + I_n) - (B_1 + B_2 + ... + B_n) + (n-1) \\
&= \frac{\mathbb{B}_n}{2} + \mathbb{I}_n + (n-1)
\end{aligned}$$

□

Outro modo de provar o resultado é por indução finita, veja a seguir:

Seja P um polígono vazado com n furos. Temos que a área de polígono vazado é a diferença da área de polígono completo P_c e os Q_i furos, $i = 1, ..., n$, com $\cap_{i=1}^{n} Q_i = \varnothing$. Logo,

$$P = P_c \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \quad \forall i = 1, 2, 3, ..., n$$

Sendo

$$\bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_i + ... + A_n$$

e $\forall\ i \neq j \implies A_i \neq A_j$.

Daí,

$$A_p = A_c - \sum_{i=1}^{n} A_i. \tag{3.1}$$

Veja a demostração por indução finita.

Demonstração. Vamos usar a indução finita para provar que a fórmula

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_n}{2} + \mathbb{I}_n + (n - 1),$$

é válida para qualquer polígono com n furos.

Tome, primeiramente, n = 1, temos um polígono com um furo. E daí,

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_1}{2} + \mathbb{I}_1 + (1 - 1) = \frac{\mathbb{B}_1}{2} + \mathbb{I}_1,$$

como na Proposição 1.

Suponha que a fórmula é verdadeira para k furos, isto é, dado um polígono P com k furos, temos que a área:

$$A_p = \frac{\mathbb{B}_k}{2} + \mathbb{I}_k + (k - 1), \tag{3.2}$$

onde $\mathbb{B}_k$ é o total de pontos do bordo, $\mathbb{I}_k$ é o total de pontos do interior de P e A_p é a área do polígono.

Tome agora um polígono P com $k + 1$ furos.

$$\begin{aligned} P =& P_c \backslash \bigcup_{i=1}^{k+1} Q_i \\ =& \left(P_c \backslash \bigcup_{i=1}^{k} Q_i \right) \backslash Q_{k+1} \end{aligned}$$

Para o polígono $P_c \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ podemos aplicar a hipótese indutiva, logo a área de A_p é dado por:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{\mathbb{B}_k}{2} + \mathbb{I}_k + (k-1) - A_{Q'} \\ &= \frac{\mathbb{B}_k}{2} + \mathbb{I}_k + (k-1) - \left(\frac{B_{Q'}}{2} + I_{Q'} - 1\right) \\ &= \frac{\mathbb{B}_k - B_{Q'}}{2} + \mathbb{I}_k - I_{Q'} + (k+1-1) \\ &= \frac{\mathbb{B}_{k+1}}{2} + \mathbb{I}_{k+1} + (k+1-1) \end{aligned}$$

Assim, a fórmula é válida para qualquer polígono conexo com n furos simples. □

Observe que o número de furos possíveis depende do número de pontos no interior do polígono P.

3.2 Polígonos vazado com interseções

*Um polígono conexo P é chamado **polígono vazado com interseções** quando do seu interior é retirado o interior de outro polígono, e este tem pelo menos um ponto do bordo coincidente com o bordo do polígono completo P_c, ou seja, a linha poligonal que define o polígono vazado não é simples. Nesta seção, também estudamos polígonos com furos, mas neste coso, o polígono que define a fronteira tem intercessões. De forma semelhante ao que foi feito na seção anterior, apresentamos resultados para a suas áreas.*

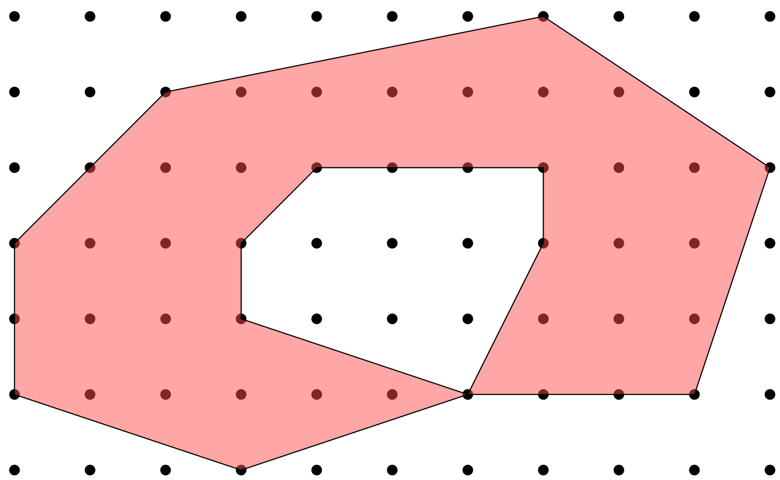


Figura 39 – Polígono Vazado com intercessões

Como O Teorema de Pick, aborda a área de polígonos a partir da contagem dos pontos do bordo e internos sem repetição, precisamos manter a contagem de modo que não tenha pontos contados repetidamente. Vejamos um exemplo:

Exemplo 7. *Observe a área do polígono vazado $P = ABCD$, com furo $Q = DEF$, podemos perceber que temos apenas um ponto em comum com P, veja na Figura 40.*

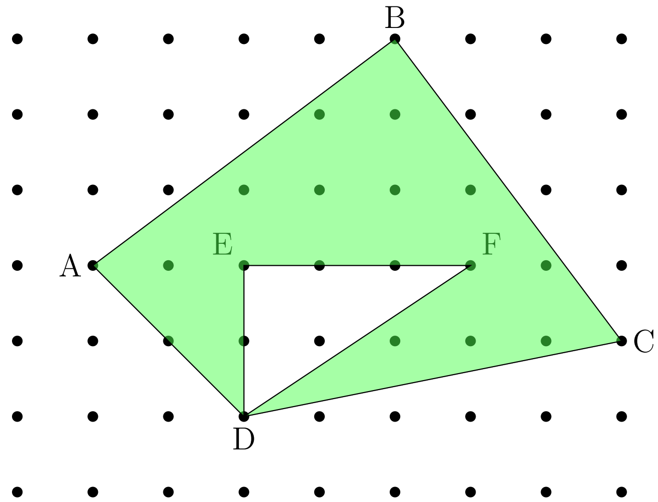


Figura 40 – Polígono $ABCD$.

Neste caso, a fórmula para polígonos vazados com um furo não se aplica diretamente, pois, a área do polígono vazado com interseções é a área do polígono completo $A_c = (\frac{5}{2} + 17 - 1) = 18,5$ retirada a área do furo $A = (\frac{6}{2} + 1 - 1) = 3$, $A_p = A_c - A = 15,5$. A fórmula obtida na Proposição 1 retornaria $A = \frac{10}{2} + 11 = 16$, incorreto.

O problema ocorre exatamente por conta da contagem envolvendo o ponto de interseção.

Definição 12. *Um polígono vazado com interseções P é um polígono vazado no qual a fronteira do polígono completo P_c intercepta a fronteira do furo Q.*

Na proposição abaixo, apresentamos uma fórmula para esses casos.

Proposição 4. *Seja P um polígono vazado com um ponto de interseção, isto é, o bordo com um furo Q tem um ponto em comum com o bordo do polígono completo P_c. Se $\mathbb{B}$ é o número de pontos do bordo do polígono vazado e com interseção e $\mathbb{I}$ o número de pontos do seu interior, então a sua área é dada por:*

$$A = \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Sejam A a área do polígono vazado com interseções, A_c a área do polígono completo e A_q a área do furo Q. Portanto, temos:

$$A = A_c - A_q$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{B_c}{2} + I_c - 1\right) - \left(\frac{B_q}{2} + I_q - 1\right) \\ &= \frac{B_c}{2} - \frac{B_q}{2} + I_c - I_q \\ &= \frac{B_c}{2} + \frac{B_q}{2} - B_q + I_c - I_q \\ &= \frac{B_c + B_q}{2} + I_c - I_q - B_q, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo B_c e I_c o número de pontos do bordo e do interior do polígono completo P_c e B_q e I_q o número de pontos do bordo e do interior do furo Q. Precisamos relacionar com o número de pontos do bordo do polígono vazado $\mathbb{B}$ e de seu interior $\mathbb{I}$.

Ao contarmos os pontos do bordo do polígono completo e do furo, contaremos o ponto de interseção duas vezes, isto é, $B_c + B_q = \mathbb{B} + 1$. Da mesma forma, $\mathbb{I} = I_c - I_q - B_q + 1$.

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{B_c + B_q}{2} + I_c - I_q - B_q, \\ &= \frac{\mathbb{B} + 1}{2} + \mathbb{I} - 1, \\ &= \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

De modo geral, caso um único furo tenha mais pontos de interseção com o bordo do polígono completo, a área será dada conforme a proposição a seguir.

Proposição 5. *Seja P um polígono vazado com n **pontos de interseção**, tal que $n \leq B_c$ onde B_c o número de pontos do bordo do polígono completo P_c. Isto é, o bordo do polígono completo P_c e bordo do furo Q tem n pontos em comum. Logo, a sua área A é dada por:*

$$A = \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{n}{2}$$

Onde, $\mathbb{B}$ é o número de pontos do bordo do polígono vazado com interseção e $\mathbb{I}$ o número de pontos do seu interior, e n é pontos em comum de B_c e B_q.

Demonstração. Seja n a quantidade de interseções dos pontos de fronteira do polígono completo com o polígono em seu interior, chamado de furo, temos que n é limitado aos pontos de fronteira do polígono completo, por isso a condição, $n \leq B_c$. Sabemos que

$$A = A_c - A_q$$

Tomando n interseções, temos $B_c + B_q = \mathbb{B} + n$, e da mesma forma, $\mathbb{I} = I_c - I_q - B_q + n$ e assim,

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{B_c + B_q}{2} + I_c - I_q - B_q \\ &= \frac{\mathbb{B} + n}{2} + \mathbb{I} - n \\ &= \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - n + \frac{n}{2} \\ &= \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

□

Observe que se não há interseção de polígono P com Q, então temos um polígono vazado apenas, pois $B_P \bigcap B_Q = \varnothing$. Portanto, $n = 0$ e $A = \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I}$, ou seja, existe um polígono vazado com um furo pela Proposição 1.

A seguir, teremos uma observação mais geral que as proposições apresentadas até então. O polígono vazado abordado poderá ter interseção ou não. Veja a Proposição 6.

Proposição 6. *Seja P* ***um polígono vazado com ou sem interseção****, a fórmula para calcular sua área é:*

$$A = \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + n - 1,$$

onde $\mathbb{B}$ é o número de pontos de fronteira do polígono, $\mathbb{I}$ é o número de pontos do interior da região interna ao polígono, i os pontos de interseção e n a quantidade de furos.

Veja alguns exemplos:

Exemplo 8. *Supondo que o polígono P não seja vazado, então $i = 0$ e $n = 0$ e, portanto,*

$$\begin{aligned} A =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + n - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{0}{2} + 0 - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - 1 \end{aligned}$$

que é a formúla de Pick como sabemos.

Exemplo 9. *Supondo que o polígono P seja vazado com n furos, então $i = 0$ e, portanto,*

$$\begin{aligned} A =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + n - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{0}{2} + n - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} + n - 1 \end{aligned}$$

como na Proposição 3.

Exemplo 10. *Supondo que o polígono P seja vazado com i interseções, e tenha apenas um furo, então $n = 1$,*

$$\begin{aligned} A =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + n - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + 1 - 1 \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} \quad , \end{aligned}$$

como na Proposição 5.

Observação 13. *Para fim de generalização, os polígonos vazados com interseções são contados como furos.*

Vamos à demonstração da generalização para um polígono vazado com ou sem interseção.

Demonstração. Tome um polígono vazado P com $n-1$ furos e é retirado polígono Q contendo i intercessões com o bordo do polígono vazado P, desde que $i \leq \mathbb{B}$, temos:

$$\begin{aligned} A =& A_P - A_Q \\ A =& \left(\frac{B_P}{2} + I_P + (n-1) - 1\right) - \left(\frac{B_Q}{2} + I_Q - 1\right) \\ =& \frac{B_P}{2} + \frac{B_Q}{2} + I_P - I_Q - B_Q + (n-1) - 1 + 1 \\ =& \frac{B_P + B_Q}{2} + I_P - I_Q - B_Q + (n-1) \end{aligned}$$

como a contagem dos pontos dos bordos faz a contagem das interseções duas vezes, temos que $B_P + B_Q = \mathbb{B} + i$, e para pontos internos temos, $I_P - I_Q + B_Q = \mathbb{I} - i$, pois B_Q tem os pontos de interseção. Disso,

$$\begin{aligned} A =& \frac{\mathbb{B} + i}{2} + \mathbb{I} - i + (n-1) \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - i + \frac{i}{2} + (n-1) \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} + (n-1) \end{aligned}$$

Tomando uma situação diferente da primeira, seja P um polígono vazado com interseção, e é retirado $n-1$ polígonos Q, então:

$$A = \frac{B_p}{2} + I_P - \frac{i}{2} - \sum_{j=1}^{n-1} A_j$$

Então,

$$\begin{aligned} A =& \frac{B_p}{2} + I_P - \frac{i}{2} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{B}{2} + I - 1\right) \\ =& \frac{B_p}{2} + I_P - \frac{i}{2} - \left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{B}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} I - \sum_{j=1}^{n-1} 1\right) \end{aligned}$$

Veja que $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{B}{2} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} B}{2} = \frac{B_t}{2}$, ou seja, a soma de todos os pontos do bordo de cada polígono retirado, $\sum_{j=1}^{n-1} I = I_t$, por sua vez, é o total de pontos interiores de todos os polígonos e $\sum_{j=1}^{n-1} 1 = n-1$. Temos:

$$\begin{aligned} A =& \frac{B_p}{2} + I_P - \frac{i}{2} - \left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{B}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} I - \sum_{j=1}^{n-1} 1\right) \\ =& \frac{B_p}{2} + I_P - \frac{i}{2} - \left(\frac{B_t}{2} + I_t - (n-1)\right) \\ =& \frac{B_p}{2} - \frac{B_t}{2} + I_P - I_t - \frac{i}{2} - (n-1) \\ =& \frac{B_p + B_t}{2} + I_P - I_t - B_t - \frac{i}{2} - (n-1) \\ =& \frac{\mathbb{B}}{2} + \mathbb{I} - \frac{i}{2} - (n-1) \end{aligned}$$

$\square$

Com vistas a buscar inspiração de para jogos em redes, nos limitamos as extensões acima. No entanto, outras extensões ainda podem ser exploradas.

4 Jogos no Ensino de Matemática

A matemática é frequentemente vista como uma disciplina desafiadora e abstrata, contudo a integração de jogos no processo de ensino e aprendizagem pode transformar essa percepção. Jogos matemáticos oferecem uma abordagem lúdica que pode estimular o interesse e a participação dos alunos, pois a aprendizagem é um processo complexo e multifacetado que envolve a aquisição de novas habilidades, conhecimentos, atitudes e valores.

> *Para muitos estudantes, a matemática é percebida como uma das disciplinas mais difíceis e intimidantes. Essa percepção está frequentemente ligada à natureza abstrata dos conceitos matemáticos e à forma como são tradicionalmente ensinados.(BOALER, 2016, p.23)*

A utilização de jogos no ensino de matemática não é uma prática nova, mas tem ganhado destaque como uma ferramenta didática poderosa que promove a aprendizagem ativa e experiencial. Jogos educacionais matemáticos permitem que os alunos aprendam de forma interativa e divertida, estimulando o interesse e a participação ativa. Essa abordagem ativa é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais, como a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a criatividade.

> *Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.(BORIN, 1996, p. 9)*

A importância dos jogos no ensino de matemática também é percebida nos documentos oficiais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular para Goiás (DC-GO) são referências fundamentais que orientam o ensino da matemática no Brasil e em Goiás. A BNCC estabelece diretrizes que promovem uma aprendizagem significativa, conectando os conteúdos matemáticos com situações do cotidiano e outras áreas do conhecimento. Além disso, destaca a importância da resolução de problemas e do uso de tecnologias digitais como ferramentas didáticas. O DC-GO, alinhado às diretrizes da BNCC, adapta essas recomendações ao contexto específico de Goiás. O documento enfatiza a contextualização do ensino, o uso de tecnologias digitais, a educação integral e a inclusão e diversidade. Essas diretrizes promovem um ensino mais flexível, adaptado às necessidades individuais dos alunos, e preparam os estudantes para os desafios do século XXI.

As tendências didático-pedagógicas contemporâneas, conforme delineadas por autores como FIORENTINI (1995) e enfatizadas por GRANDO (2007) com os jogos matemáticos, *destacam diversas abordagens para o ensino da matemática. Elas são: as tendências formalista-clássica, empírico-ativista, formalista moderna, tecnicista, construtivista e socio-tecnocultural. Cada uma dessas abordagens oferece diferentes perspectivas sobre os objetivos e métodos de ensino da matemática.*

A integração de jogos matemáticos na prática pedagógica pode ser vista através dessas tendências. Por exemplo, a abordagem empírico-ativista, que enfatiza a aprendizagem através da experiência e experimentação, alinha-se bem com o uso de jogos matemáticos. Já a abordagem tecnicista, que valoriza a eficiência e a medição objetiva do progresso, pode ser incorporada através de sistemas de pontuação e níveis nos jogos, GRANDO (2007).

A introdução de jogos matemáticos no ensino, apoiada pelas diretrizes da BNCC e do DC-GO, e fundamentada nas tendências didático-pedagógicas combinadas, representa uma abordagem atrativa para o ensino da matemática. Essa prática não apenas torna o aprendizado mais interessante e envolvente, mas também promove o desenvolvimento mais significativo para os alunos, preparando-os para os desafios do mundo moderno.

Veremos a seguir como a BNCC estrutura o currículo escolar, enfatizando a importância de metodologias inovadoras, como a utilização de jogos matemáticos, para transformar a percepção da matemática e engajar os alunos de maneira mais eficaz.

A BNCC organiza o currículo escolar com o objetivo de transformar a educação, incentivando o uso de metodologias inovadoras, como os jogos matemáticos, para engajar os alunos de forma mais eficaz e significativa. Ela propõe que a matemática seja ensinada de maneira a desenvolver o pensamento crítico, a resolução de problemas e a argumentação, elementos essenciais para a formação integral dos estudantes. Segundo a BNCC, o ensino de matemática deve "favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos"BNCC (2024, p. 266).

Nesse sentido, os jogos matemáticos são uma excelente ferramenta pedagógica, pois permitem que os alunos pratiquem esses aspectos de forma interativa, estimulando o aprendizado de maneira envolvente. A BNCC destaca a importância de um ensino que vá além da simples memorização de fórmulas, incentivando os estudantes a explorarem, investigarem e aplicarem os conceitos matemáticos de forma prática e contextualizada. "O letramento matemático assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo"BNCC (2024, p. 266).

A criação desses jogos deve seguir objetivos bem definidos e estar em consonância com as habilidades e competências previstas pela Base. Além disso, é fundamental que os jogos sejam adequados ao nível de desenvolvimento dos alunos e abordem conteúdos variados, como aritmética, geometria, álgebra e estatística. A BNCC reforça que as aprendizagens essenciais no ensino de matemática devem ser "ampliadas e aprofundadas, de modo inter-relacionado, para que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática"BNCC (2024, p. 511).

A BNCC também valoriza o uso de diferentes formatos para a aplicação de jogos *matemáticos no ensino, que podem ser tanto individuais quanto cooperativos ou competitivos. Esses jogos incentivam a interação social, a colaboração e o compartilhamento de conhecimentos, fatores que são essenciais para o desenvolvimento pleno dos estudantes. A Base enfatiza que o ensino deve "promover o desenvolvimento de competências que favoreçam a colaboração e a participação ativa dos estudantes em práticas sociais"BNCC (2024, p. 270).*

Outro ponto importante destacado pela BNCC é a integração das tecnologias digitais no processo de ensino. Jogos matemáticos digitais oferecem novas possibilidades de engajamento, permitindo que cada aluno aprenda no seu ritmo e promovendo uma educação mais inclusiva e personalizada. De acordo com a BNCC, "as tecnologias digitais devem ser integradas ao processo educativo de modo a potencializar o aprendizado e a personalização do ensino"BNCC (2024, p. 276).

O documento ressalta, ainda, que o letramento matemático vai além de operar com números; ele envolve habilidades como raciocínio, comunicação e argumentação matemática. Isso não só contribui para a solução de problemas em diferentes contextos, mas também para a compreensão do papel da matemática no mundo real, além de destacar o caráter lúdico e intelectual da disciplina. "A matemática, com seu caráter de jogo intelectual, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazerosa"BNCC (2024, p. 266).

Por fim, a BNCC propõe que o ensino de matemática seja significativo e conectado à vida cotidiana, favorecendo a aplicação dos conhecimentos em diversas áreas. A resolução de problemas, o uso de tecnologias digitais e a diversificação das metodologias de ensino são pilares dessa abordagem, que visa uma formação mais completa e integrada dos alunos. "A resolução de problemas é uma competência essencial que desenvolve habilidades como raciocínio lógico, pensamento crítico e criatividade"BNCC (2024, p. 268).

> *A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BNCC, 2024, p. 511)*

A Diretriz Curricular de Goiás (DC-GO) oferece uma estrutura que complementa e enriquece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que se refere ao ensino de matemática. O documento destaca a importância de metodologias inovadoras e ativas, que incentivam a participação dos alunos e tornam o processo de aprendizagem mais significativo e relevante para suas realidades.

Assim como a BNCC, a DC-GO valoriza a aprendizagem significativa, buscando conectar os conceitos matemáticos à vida cotidiana dos estudantes. A introdução de jogos matemáticos é apresentada como uma estratégia eficaz para fortalecer essas conexões, *tornando o aprendizado mais dinâmico e envolvente. Esses jogos permitem que os alunos vivenciem a matemática de forma prática, estimulando o raciocínio lógico e a resolução de problemas de uma maneira que faça sentido para eles.*

O documento estadual também promove metodologias ativas, onde os alunos se tornam protagonistas de seu próprio aprendizado. Nesse contexto, os jogos matemáticos se destacam por oferecer uma forma interativa de explorar os conceitos matemáticos, permitindo que os alunos participem de maneira mais colaborativa e engajada. Como mencionado na DC-GO, "Jogos matemáticos são uma estratégia eficaz para envolver os estudantes de forma dinâmica e interativa"DC-GO (2018, p. 12).

Além disso, a DC-GO está alinhada com a BNCC ao enfatizar o desenvolvimento de competências e habilidades específicas. Através dos jogos matemáticos, os alunos podem trabalhar competências como o raciocínio lógico, a capacidade de análise crítica e a colaboração em grupo. Essa abordagem torna o aprendizado não apenas mais acessível, mas também mais envolvente, adaptando-se às necessidades e ritmos de cada estudante. O documento ressalta que "a prática de atividades lúdicas, como jogos matemáticos, contribui significativamente para o desenvolvimento de competências essenciais"DC-GO (2018, p. 34).

Outro ponto de destaque no DC-GO é o compromisso com a inclusão e diversidade. Os jogos matemáticos podem ser adaptados para diferentes níveis de habilidade, permitindo que todos os alunos participem de maneira inclusiva e avancem conforme suas necessidades individuais. Essa flexibilidade é fundamental para garantir que nenhum aluno fique para trás no processo de aprendizagem.

O uso de tecnologias educacionais também é incentivado pela DC-GO, especialmente com o avanço dos jogos digitais. Esses recursos oferecem novas oportunidades para personalizar o aprendizado e criar ambientes de prática que sejam acessíveis a qualquer momento e lugar. Essa abordagem ajuda a preparar os alunos para o futuro, promovendo não apenas o aprendizado matemático, mas também habilidades digitais e de inovação.

A Diretriz Curricular de Goiás valoriza, ainda, a criatividade e a inovação no ensino, estimulando os professores a utilizarem abordagens que incentivem os alunos a pensarem de maneira criativa e a resolverem problemas de maneiras inovadoras. Além disso, a integração curricular é outro aspecto central, com a proposta de usar jogos matemáticos para conectar a matemática a outras disciplinas, promovendo uma aprendizagem interdisciplinar que enriquece a compreensão dos alunos sobre o mundo.

Por fim, a DC-GO promove a avaliação formativa, uma estratégia que permite aos professores avaliar o progresso dos alunos de forma contínua, fornecendo feedback imediato e oportunizando momentos de autoavaliação para os estudantes.

Esses pontos mostram como a Diretriz Curricular de Goiás detalha a implementação de jogos e práticas lúdicas no ensino de matemática, sempre em consonância com os princípios e objetivos estabelecidos pela BNCC. Ao adotar essas abordagens, a DC-GO *busca proporcionar uma educação mais envolvente, eficaz e adaptada às necessidades dos estudantes, preparando-os melhor para os desafios futuros.*

> *A DC-GO enfatiza a importância de metodologias ativas que promovam o engajamento dos alunos na aprendizagem. Jogos matemáticos são uma estratégia eficaz para envolver os estudantes de forma dinâmica e interativa. (DC-GO, 2018, p. 12)*

As tendências didático-pedagógicas no ensino da matemática refletem diferentes visões sobre o processo de ensino e aprendizagem. A seguir, abordaremos algumas das principais tendências, enfatizando o uso de jogos matemáticos como ferramenta de ensino.

Formalista-Clássica: Esta tendência valoriza o ensino de conceitos e procedimentos matemáticos de maneira sequencial e rigorosa, com ênfase na teoria antes da prática. A visão tradicional da Matemática, influenciada pela filosofia platônica, considera a Matemática como um conjunto de ideias imutáveis, descobertas pela intuição humana. A geometria era especialmente valorizada por sua lógica interna. Segundo FIORENTINI (1995), essa abordagem se concentra no desenvolvimento do raciocínio lógico e na disciplina mental. No entanto, conforme D'AMBROSIO (1993), essa tendência muitas vezes se opõe ao caráter lúdico, visto que os jogos eram considerados apenas um "jogo intelectual", voltado para previsões e demonstrações, afastando-se da diversão e do engajamento natural que os jogos proporcionam.

Empírico-Ativista: Nesta abordagem, o foco é a aprendizagem por meio da experiência direta e da experimentação. Jogos matemáticos são amplamente utilizados, pois oferecem uma forma interativa de aprendizado. A pedagogia ativa coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem, considerando suas particularidades individuais. GRANDO (2007) observa que essa tendência valoriza o aspecto psicológico e a espontaneidade do aluno, destacando a qualidade da aprendizagem sobre a quantidade. O Tangram, por exemplo, é um jogo que permite aos alunos explorar conceitos matemáticos de maneira prática e ativa, conforme explica MACEDO et al. (2015). O aluno descobre novos conceitos à medida que manipula as peças, promovendo um aprendizado investigativo e reflexivo.

Formalista Moderna: Combina a abstração formal com a experimentação prática. Esse movimento surgiu após a Segunda Guerra Mundial, motivado pelo avanço tecnológico e científico, e visa formar especialistas em Matemática. FIORENTINI (1995) comenta que essa abordagem retoma o rigor conceitual, porém com foco na resolução de problemas, não apenas na disciplina mental. GRANDO (2007) destaca que jogos matemáticos nessa perspectiva ajudam a desenvolver o pensamento abstrato e a generalização, aplicando conceitos matemáticos em diferentes contextos. Um exemplo é o jogo "Padrões Numéricos", no qual os alunos identificam e estendem padrões, estimulando a formalização e a abstração.

Tecnicista: Prioriza a eficiência e a objetividade, utilizando ferramentas como avaliações padronizadas para medir o progresso. Segundo FIORENTINI (1995), essa abordagem se concentra no desenvolvimento de habilidades técnicas e na matemática *enquanto técnica, muitas vezes em detrimento do significado mais profundo dos conceitos. Os jogos matemáticos, aqui, são utilizados para treinar habilidades específicas, como o cálculo mental. O "Rapid Math"COQUINHOS (2024), por exemplo, é um jogo que visa desenvolver a agilidade e precisão nos cálculos, enfatizando a prática repetitiva e o treino de algoritmos.*

Construtivista: Esta tendência baseia-se na ideia de que os alunos constroem seu próprio conhecimento por meio da interação com o ambiente. O professor atua como facilitador, orientando o aluno no processo de construção de significados. FIORENTINI (1995) defende que, nessa abordagem, o conhecimento matemático é construído de maneira ativa e reflexiva. GRANDO (2007) complementa que os jogos promovem um ambiente de aprendizagem onde os alunos exploram e experimentam conceitos, desenvolvendo uma compreensão mais profunda e duradoura. Um exemplo é o jogo "Construção de Mapas Topológicos", onde os alunos colaboram para criar mapas, relacionando conceitos topológicos com experiências concretas.

Socioetnocultural: Focada na contextualização da matemática, essa abordagem valoriza as experiências culturais e sociais dos alunos. A Etnomatemática, como descrita por D'AMBROSIO (1993), desafia a visão tradicional da matemática como conhecimento puramente acadêmico, ressaltando a importância de reconhecer e valorizar o conhecimento matemático informal presente em diferentes culturas. Jogos matemáticos tradicionais, como o "Jogo de Mancala", destacado por SMITH; BROWN (2010), promovem a diversidade cultural ao integrar práticas matemáticas utilizadas por diferentes comunidades, permitindo que os alunos explorem matemáticas de outras culturas e reconheçam a riqueza do conhecimento coletivo.

Essas tendências pedagógicas refletem as diferentes maneiras pelas quais a matemática pode ser ensinada, seja por meio de teorias abstratas, experimentações práticas, ou valorização cultural. O uso de jogos matemáticos, dentro dessas abordagens, serve como um recurso valioso para tornar o aprendizado mais engajante e relevante para os alunos.

Essa são as tendências apresentadas neste trabalho, porém a tendência empírico-ativista, a meu ver, tem uma possibilidade de aplicação de jogos em sala interessante, e destaco aqui o que Grando aborda como sete tópicos(momentos) que permite um melhor aproveitamento dos jogos em sala de aula. O fato, é que há professores desconfrontáveis ou sem direção para realizar a aplicação de jogos, sentem inseguros, e não consegue explorar o máximo que o trabalho lúdico; a descrição a seguir pode oferecer um proveito maior e melhor para realização de jogos didáticos, pois com certeza almejamos melhor execução, aproveitamento, abordagem, e análise do trabalho produzido. Então, GRANDO (2007) destaca:

1. *Familiarização com o material do jogo: Neste primeiro momento, os alunos entram em contato com o material do jogo, identificando materiais conhecidos, como: dados,*

peões, tabuleiros e outros, e experimentam o material através de simulações de possíveis jogadas. É comum o estabelecimento de analogias com os jogos já conhecidos.

2. *Reconhecimento das regras: O reconhecimento das regras do jogo, pelos alunos, pode ser realizado de várias formas: explicadas pelo orientador da ação ou lidas ou, ainda, identificadas através da realização de várias partidas-modelo, onde o orientador da ação pode jogar várias partidas seguidas com um dos alunos, que aprendeu previamente o jogo, e os alunos restantes tentam perceber as regularidades nas jogadas e identificam as regras do jogo.*

3. *O "Jogo pelo jogo": jogar para garantir regras: Este é o momento do jogo pelo jogo, do jogo espontâneo simplesmente, em que se possibilita ao aluno jogar para garantir a compreensão das regras. Neste momento, são exploradas as noções matemáticas contidas no jogo. O importante é a internalização das regras, pelos alunos. Joga-se para garantir que as regras tenham sido compreendidas e que vão sendo cumpridas.*

4. *Intervenção pedagógica verbal: Depois dos três momentos anteriores, os alunos passam a jogar agora contando com a intervenção propriamente dita. Trata-se das intervenções que são realizadas verbalmente, pelo orientador da ação, durante o movimento do jogo. Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo orientador da ação a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de "jogadas erradas" realizadas anteriormente, etc.). Neste momento, a atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.*

5. *Registro do jogo: É um momento que pode acontecer, dependendo da natureza do jogo que é trabalhado e dos objetivos que se têm com o registro. O registro dos pontos, ou mesmo dos procedimentos e cálculos utilizados, pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização, através de uma linguagem própria que, no nosso caso, seria a linguagem matemática. É importante que o orientador da ação procure estabelecer estratégias de intervenção que gerem a necessidade do registro escrito do jogo, a fim de que não seja apenas uma exigência, sem sentido para a situação de jogo.O registro é um importante instrumento de que pode dispor o aluno, para a análise de jogadas "erradas" (jogadas que poderiam ser melhores) e construção de estratégias.*

6. *Intervenção escrita: Trata-se da problematização de situações de jogo. Os alunos resolvem situações-problema de jogo, elaboradas pelo orientador da ação ou mesmo propostas por outros sujeitos. A resolução dos problemas de jogo propicia uma análise mais específica sobre o jogo, onde os problemas abordam diferentes aspectos do jogo que podem não ter ocorrido durante as partidas. Além disso, trata-se de um*

momento onde os limites e as possibilidades do jogo são resgatados pelo orientador da ação, direcionando para os conceitos matemáticos a serem trabalhados (aprendizagem matemática). O registro do jogo também está presente, neste momento.

7. *Jogar com "competência": Um último momento representa o retorno à situação real de jogo, considerando todos os aspectos anteriormente analisados (intervenções). É importante que o aluno retorne à ação do jogo para que execute muitas das estratégias definidas e analisadas durante a resolução dos problemas. Afinal, de que adianta ao indivíduo analisar o jogo sem tentar aplicar suas "conclusões" (estratégias) para tentar vencer seus adversários? Optou-se em denominar este momento por "jogar com competência", considerando que o aluno, ao jogar e refletir sobre suas jogadas e jogadas possíveis, adquire uma certa "competência" naquele jogo, ou seja, o jogo passa a ser considerado sob vários aspectos e óticas que inicialmente poderiam não estar sendo considerados.*

A educação contemporânea enfrenta o desafio de engajar os alunos e promover um aprendizado eficaz. Para isso, é possível mesclar características de diferentes tendências didático-pedagógicas, criando abordagens equilibradas e significativas. Entre as muitas tendências, destacam-se a empiricista-ativista e a tecnicista, que oferecem uma combinação rica quando integradas em um contexto de jogo geométrico-matemático.

A tendência empiricista-ativista foca na aprendizagem ativa e experiencial, colocando o aluno no centro do processo. Nesse modelo, a ludicidade desempenha um papel fundamental, oferecendo atividades práticas que envolvem resolução de problemas em contextos reais ou simulados. Um exemplo disso seria a construção de formas geométricas e a aplicação de teoremas matemáticos em projetos. Ao engajar-se com desafios práticos, os alunos têm a oportunidade de experimentar estratégias, testar soluções e refletir sobre suas escolhas, desenvolvendo uma compreensão mais profunda dos conceitos. A abordagem permite que os erros sejam parte do processo de aprendizagem, promovendo uma mentalidade de crescimento, na qual os alunos aprendem com as tentativas e aprimoram suas habilidades ao longo do tempo.

Por outro lado, a tendência tecnicista complementa essa dinâmica ao trazer estrutura e objetividade ao processo educacional. A ênfase na eficiência, medição de progresso e padronização de resultados permite que o aprendizado seja organizado e mensurável. Em um jogo geométrico-matemático, por exemplo, sistemas de pontuação, objetivos claros e avaliações periódicas garantem que os alunos avancem de forma estruturada. Cada nível pode trabalhar competências específicas, como o cálculo de áreas ou o reconhecimento de propriedades de figuras geométricas. A tecnologia avançada, com tutoriais e feedback imediato, torna essa experiência ainda mais atrativa e acessível, promovendo o desenvolvimento contínuo das habilidades dos jogadores.

A integração dessas duas abordagens em um jogo didático cria um ambiente de aprendizado dinâmico e equilibrado. Enquanto a tendência empiricista-ativista envolve os alunos ativamente, a tendência tecnicista fornece uma base sólida e organizada para o progresso, garantindo que o aprendizado seja eficiente e focado. Essa combinação é particularmente eficaz em temas desafiadores, como a geometria, ao unir a aplicação prática de conceitos abstratos com uma estrutura clara de avaliação e avanço.

O ensino da matemática no Brasil tem passado por mudanças significativas, especialmente com a implementação de diretrizes como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular de Goiás (DC-GO). Ambas as normativas incentivam uma abordagem mais dinâmica, inclusiva e contextualizada, alinhando-se às tendências didáticas contemporâneas, que buscam tornar a aprendizagem mais significativa para os alunos.

Essas diretrizes e algumas tendências também estão em sintonia com propostas como a UARC (Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual), um organizador de sequência didática que permite integrar essas tendências de forma estruturada no ensino da matemática. A UARC oferece uma metodologia que articula o desenvolvimento conceitual dos alunos com as práticas pedagógicas sugeridas pela BNCC e pelo DC-GO, promovendo um ensino mais eficaz e significativo.

Ao seguir essas orientações, a educação matemática no Brasil avança para um modelo que não apenas valoriza o raciocínio lógico e a resolução de problemas, mas também se preocupa com o desenvolvimento integral do aluno e a inclusão de todos. A adoção dessas práticas cria um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, dinâmico e conectado à realidade, preparando os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo.

A análise das tendências didático-pedagógicas no ensino da matemática, especialmente focada nas abordagens empírico-ativista e tecnicista, demonstra como essas metodologias podem se complementar para promover uma educação matemática eficaz e envolvente. A tendência empírico-ativista, centrada na aprendizagem ativa e experiencial, incentiva os alunos a participar diretamente do processo educacional, permitindo-lhes explorar conceitos matemáticos por meio da prática e da resolução de problemas em contextos reais ou simulados. Como destaca ZABALA (1999), essa abordagem, que promove o "fazer para aprender", é essencial para que os estudantes se apropriem dos conhecimentos de forma significativa. A ludicidade, presente em jogos matemáticos e materiais manipulativos, torna o processo mais dinâmico e contribui para o engajamento do aluno.

Em contraste, a abordagem tecnicista acrescenta uma estrutura necessária ao processo educacional, enfatizando a eficiência, a objetividade e a mensuração do progresso dos alunos. Elementos como sistemas de pontuação, objetivos claros e avaliações padronizadas ajudam a garantir que o aprendizado seja progressivo e mensurável. Segundo PERRENOUD (1999), a padronização e o controle sobre o processo de ensino garantem que o progresso dos alunos ocorra de forma estruturada, atendendo às necessidades individuais *sem perder de vista os objetivos gerais. Assim, todos os estudantes, independentemente de suas habilidades iniciais, podem avançar de maneira organizada e incremental.*

A integração dessas duas tendências pedagógicas em um contexto de jogos didáticos cria um ambiente de aprendizagem equilibrado, onde a participação ativa dos alunos é combinada com uma estrutura sólida, garantindo um aprendizado eficiente. Jogos geométrico-matemáticos, por exemplo, oferecem um espaço para aplicar conceitos abstratos de maneira prática e desafiadora. Através da resolução de problemas dentro do jogo, os alunos são motivados a aprender fazendo, ao mesmo tempo que encontram uma avaliação contínua e padronizada, que guia o progresso e o aprendizado.

Para viabilizar a implementação dessas abordagens no ensino da matemática, o uso de sequências didáticas desempenha um papel fundamental. Como definido por Zabala (1999), uma sequência didática é um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, conhecido tanto pelo professor quanto pelos alunos". Essas sequências permitem a organização coerente do ensino, promovendo um ensino investigativo e a problematização dos conteúdos. O texto "UARC (Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual): Um Organizador de Sequência Didática na Área de Matemática"explora como a UARC pode organizar essas atividades, permitindo a reconstrução conceitual dos alunos de forma estruturada e integrada ao currículo escolar.

No contexto da Educação Matemática, as sequências didáticas são valiosas, pois permitem a contextualização dos conteúdos matemáticos e sua conexão com o cotidiano dos alunos, tornando o aprendizado mais relevante e significativo. Essa abordagem também facilita a construção gradual do conhecimento, uma vez que os conteúdos são apresentados de maneira progressiva e lógica. O uso de problematizações desafia os alunos a resolverem problemas reais, desenvolvendo habilidades de pensamento crítico e criativo, como reforçado por GRANDO (2007).

Além disso, uma sequência didática típica no ensino da matemática envolve várias etapas interligadas, como a avaliação dos conhecimentos prévios, a definição de objetivos de aprendizagem, a escolha de conteúdos e a seleção de atividades. A condução das atividades inclui jogos, exercícios práticos e metodologias ativas, e a avaliação contínua dos alunos, com feedback imediato e ajustes no planejamento. Essas etapas asseguram que o processo de ensino-aprendizagem ocorra de maneira organizada e eficaz, culminando na revisão e consolidação dos conhecimentos adquiridos.

No próximo capítulo deste trabalho, a sequência didática será utilizada como base para a aplicação de jogos, organização e execução das atividades em sala de aula, com foco em como as abordagens empírico-ativista e tecnicista podem ser implementadas de forma complementar. Seguindo as diretrizes da BNCC e do DC-GO, o ensino da matemática será contextualizado, promovendo uma educação integral que aborde tanto as competências cognitivas quanto as socioemocionais dos estudantes. Dessa forma, as práticas descritas *garantirão que os alunos não apenas se envolvam ativamente no aprendizado, mas também desenvolvam um entendimento profundo e significativo dos conceitos matemáticos.*

5 JOGOS

Neste capítulo, apresentamos uma seleção de jogos em redes (ver a Definição 6) que trabalham diferentes conteúdos e habilidades e são inspirados na Fórmula de Pick e sua demonstração (Ver em seção 2.2). Os primeiros três jogos apresentados são encontrados na literatura em diversos momentos , enquanto os demais foram especialmente elaborados para tratar outros conteúdos e habilidades ligados ao tema. Após a descrição dos jogos, também apresentamos sequências didáticas para sua aplicação em sala de aula.

Seguindo os estudos realizados no capítulo anterior, utilizamos as tendências empírico-ativista e tecnicista para formular atividades que atendam a objetivos educacionais previamente definidos. A seguir, detalhamos cada jogo, incluindo imagens ilustrativas, as potencialidades de seu uso, e os conteúdos e habilidades que podem ser desenvolvidos. Finalizamos com a proposta de uma sequência didática, elaborada e apoiada sobre elementos das tendências empírico-ativista e tecnicista, para maximizar a eficácia do aprendizado.

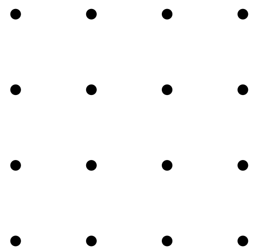
5.1 Jogo 1: Pontos, Segmentos e Quadrados

Este jogo, de origem desconhecida, foi muito popular nas escolas pela facilidade em jogar utilizando diferentes forma de marcação . Em versões mais modernas, na forma de aplicativos, os jogos estão disponíveis online e no celular, conforme indicado em Divertudo (2024)e Coquinhos (2024). Serve como uma ferramenta educativa eficaz para ensinar conceitos de geometria de forma envolvente e interativa. O jogo cria um ambiente de aprendizado lúdico, onde os alunos exploram e consolidam conceitos matemáticos. Durante o jogo, são expostos diferentes formas geométricas como quadrados, triângulos, losangos e trapézios, reforçando noções de cobertura e cálculo de área, além de desenvolverem diferentes estratégias e raciocínios.

5.1.0.1 Descrição

O jogo é realizado em uma rede de pontos, conforme a Definição 6. Neste caso, existem aplicativos que permitem o jogo contra o computador ou outro jogador. Também pode ser jogado com lápis e papel.

Considere a rede:



1. ***Regra:*** *A decisão de quem inicia o jogo pode ser definida por um sorteio.*

2. ***Regra:*** *Uma jogada consiste em fazer um traço (segmento horizontal ou vertical), ligando dois pontos da rede. O segmento não deve conter outros pontos da rede, além de seus extremos (veja Figura 41).*

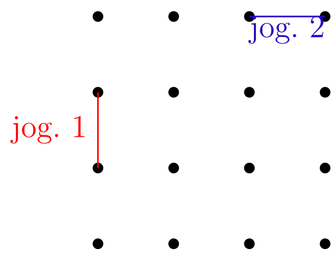


Figura 41 – Exemplos de jogadas.

3. ***Regra:*** *Os jogadores se alternam nas jogadas e cada um, em sua vez, deve fazer uma jogada.*

4. ***Regra:*** *Caso a jogada feche um quadrado (um por um). O jogador deve marcar o quadrado conquistado e é obrigado a fazer uma nova jogada.*

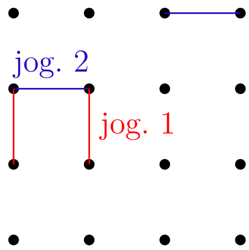


Figura 42 – Exemplo de jogadas 2.

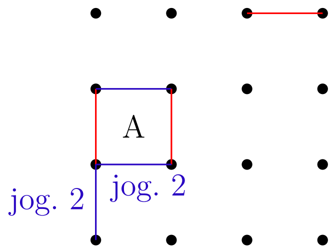


Figura 43 – Conquistando quadrado.

5. ***Regra:*** *O jogo termina quando não houver mais nenhuma jogada possível.*

6. ***Regra:*** *Vence o jogador que, ao final do jogo, tiver conquistado mais quadrados.*

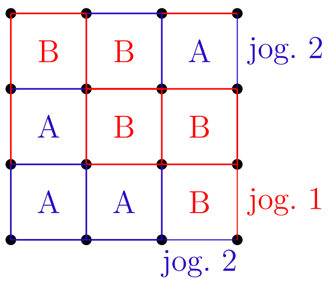


Figura 44 – Fim de jogo!

5.1.0.2 Potencialidades

Este jogo, embora simples, apresenta diferentes possibilidade de uso e colabora para o desenvolvimento de diferentes habilidades, como:

- *(EF07MA32)Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, DC-GO (2018, p. 401).*

- *(EF08MA19)Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras, DC-GO (2018, p. 404).*

*Em relação aos conteúdos que podem ser trabalhados, destacamos o **objeto de Conhecimento**: Área de triângulo; área de quadriláteros; equivalência de áreas de figuras planas DC-GO (2018, p. 401).*

5.1.0.3 Sequência Didática

Nesta seção apresentamos uma sequência de ações estruturadas (Ver seção 4) com o objetivo de desenvolver as habilidades de identificar e calcular a área de diferentes figuras geométricas, partindo do quadrado e, posteriormente do triângulo.

1. *Apresentação inicial.*

   Nesta atividade, os alunos terão a tarefa de se familiarizar com o jogo. Eles podem acessar o material impresso fornecido (ver Anexo B) ou utilizar aplicativos como o DOTS; BOXES (2024). O objetivo desta etapa é que os alunos tenham um primeiro contato com o jogo e compreendam suas regras (ver Seção 4).

   Essa etapa inicial não precisa necessariamente ocorrer em sala de aula; ela pode ser proposta como um dever de casa. O importante é garantir que os alunos se sintam confortáveis e familiarizados com o jogo antes de prosseguirem para as próximas etapas. Este conhecimento prévio permitirá um melhor aproveitamento das atividades subsequentes.

2. *Jogar e internalizar as regras.*

   Nesta etapa, sugerimos realizar uma simulação com os alunos, colocando-os para jogar uma partida. Durante essa atividade, é importante verificar se todos já internalizaram as regras do jogo (ver Seção 4). Esta simulação pode ser realizada nos primeiros 15 a 20 minutos de uma aula, proporcionando uma base sólida para as atividades subsequentes.

3. *Jogo e registro.*

   Agora é o momento do jogo pelo jogo, onde os alunos aplicam as regras e criam suas estratégias. É essencial utilizar um questionário (sugestão) para coletar informações além dos resultados da partida.

   Além disso, forneça feedback e faça perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?".

   Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam durante a atividade. Existe uma sugestão de questionário, Veja Anexo A.

   Essa atividade pode ser realizada nos 30 minutos finais da mesma aula, proporcionando uma oportunidade para os alunos demonstrarem o que aprenderam e refletirem sobre suas estratégias.

4. *Uso dos registros pelo professor.*

   Nesta etapa, vamos levar o aprendizado do jogo para situações-problema reais e interessantes: Imagine aplicar suas habilidades em desafios como a pavimentação de *uma sala com cerâmica ou azulejos, ou a criação de belos mosaicos. Esses exercícios são visualmente estimulantes e se conectam diretamente com a rede de pontos do jogo, tornando a experiência ainda mais sólida. Reserve de 20 a 30 minutos para essa atividade.*

5. *Jogo e avaliações finais.*

   Nesta ultima etapa, promova jogos onde os jogadores possam aplicar suas habilidades e conclusões sobre o jogo, busque a comunicação entre jogadores, ainda mais experientes. Este ultimo momento tem característica como que uma avaliação, tente com que eles forneçam feedback, verifique os conceitos adquiridos já são agora utilizados. O professor estipula a tempo para essa tarefa, conforme as necessidades da turma.

Observação 14 (Variação)**.** *Uma variação imediata deste jogo pode também ser trabalhada. Trata-se de permitir mais um tipo de jogada, a diagonal dos quadrados da rede. Essa variação permite novas jogadas, diferentes tipos de figuras e também possibilita desenvolver diferentes estratégias para vencer.*

- ***Regra extra.*** *Ligar os pontos que determinam a diagonal dos quadrados unitários da rede também é uma jogada permitida. Veja a simulação seguinte:*

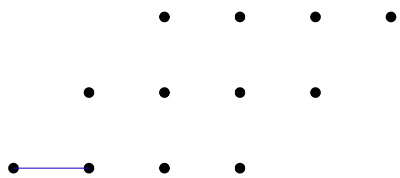


Figura 45 – Simulação jogada 1(jogador de azul).

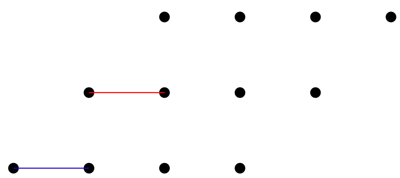


Figura 46 – Simulação jogada 2(jogador de vermelho).

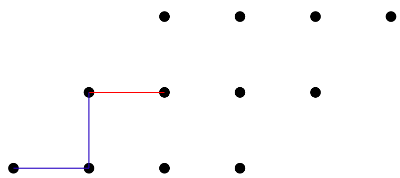


Figura 47 – Simulação jogada 3 (jogador de azul).

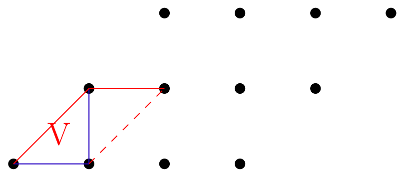


Figura 48 – Simulação jogada 4 (jogador de vermelho).

5.2 Jogo 2: Pontos e Polígonos

Neste Jogo, temos uma variação um pouco mais elaborada do primeiro jogo. Trata-se de uma proposta com potencial para contribuir com a aprendizagem de conceitos de geometria, oferecendo um ambiente lúdico e interativo, semelhante ao primeiro jogo.

5.2.0.1 Descrição

O jogo é realizado em uma grade de pontos dispostos uniformemente na vertical e na horizontal que pode ser realizado com lápis e papel ou acessado via uma aplicação, como mencionado em Math Learning Center (2024). No segundo caso, é possível jogos com dois participantes ou um participante contra o computador.

1. ***Regra:*** *A decisão de quem inicia o jogo pode ser tomada por uma disputa de par ou ímpar.*

2. ***Regra:*** *Uma jogada consiste em fazer um segmento ligando dois pontos, observando que: o segmento* ***pode ter dois pontos da rede, e nenhum outro além dos extremos*** *e também* ***não pode interceptar outro segmento*** *em pontos que não sejam extremos. Ver Figura 49*

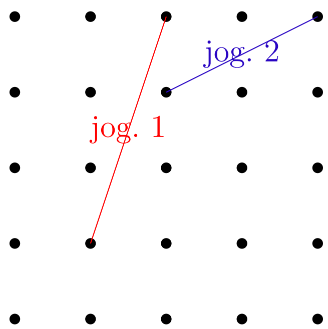


Figura 49 – Exemplo de jogada 1

3. ***Regra:*** *Cada jogador, em sua vez, deve fazer uma jogada. Ver Figura 50*

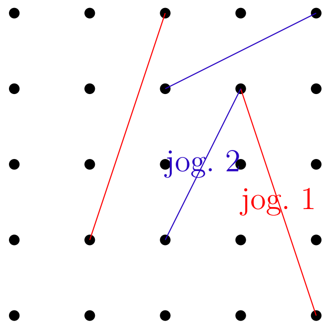


Figura 50 – Exemplo de jogada 2.

4. ***Regra:*** *Caso a jogada feche uma região (triângulo, quadrado, losango, etc). O jogador deve marcar a região conquistada e é obrigado a fazer uma nova jogada. O interior de cada região fechada pode conter ou não pontos da malha. Não se pode fazer jogadas dentro de regiões já conquistadas. Ver Figura 51.*

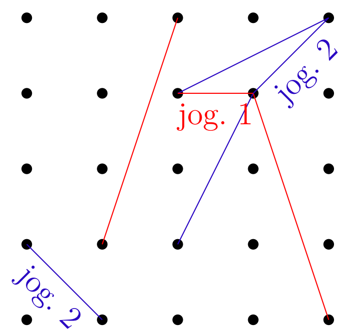


Figura 51 – Exemplo de jogada 3.

5. *O jogo termina quando não houver mais nenhuma jogada possível. Ver Figura 52*

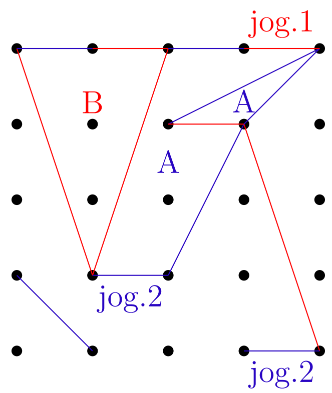


Figura 52 – Exemplo de jogada 4

6. *Vence o jogador que, ao final do jogo, tiver conquistado a maior região.*

5.2.0.2 Potencialidades

Objeto de conhecimento: Área de triângulo; Área de quadriláteros; Equivalência de áreas de figuras planas. Ver DC-GO (2018, p. 401).

- *(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. Ver DC-GO (2018, p. 401).*
- *(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras. Ver DC-GO (2018, p. 404).*

5.2.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação Inicial.*
   - *Após concluir o Jogo 1, o aluno perceberá que ele servirá de base para o Jogo 2. Neste momento, é essencial apresentar as novas regras e destacar as diferenças deste novo jogo. Assim que alguns alunos demonstrarem entendimento das novas regras, forneça o material (ver anexo B) para que possam realizar pequenas simulações. Essas simulações ajudarão a esclarecer dúvidas e a solidificar o entendimento dos demais alunos. Essa atividade terá uma duração de 15 minutos.*
2. *Jogar e internalizar as regras.*
   - *Agora que os alunos assimilaram as regras, proponha uma simulação de jogo com todos, entre seus pares (ver anexo B). Neste momento, é fundamental verificar se todos internalizaram as regras e se desenvolveram estratégias. Aproveite para fornecer feedback, conforme indicado nos itens 3 e 4 de (4). Se surgir a dúvida sobre quem vence o jogo, explique no 4º momento que a maior área é a vencedora, deixando isso claro para todos. Essa atividade terá uma duração de até 25 minutos.*
3. *Jogo e Registro dos jogos*
   - *Agora é o momento do "jogo pelo jogo", quando todos realmente aplicarão as regras e criarão estratégias. Para complementar, é importante aplicar um questionário (sugestão) para coletar informações e resultados das partidas.*

     Além disso, forneça feedback e faça perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?". Existe um questionário, caso necessite, Veja Anexo A.

     Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam *durante a atividade.Essa atividade pode ser realizada nos últimos 30 a 40 minutos da aula.*

4. *Intervenção escrita*

   - *Finalmente, proponha uma solução para determinar os vencedores dos jogos. Explique a possibilidade de usar "triângulos fundamentais"para isso. Além disso, proponha situações-problemas ou listas de exercícios que se relacionem com o Jogo 2, reforçando o aprendizado e a aplicação prática das regras e estratégias discutidas. Duração: Conforme a necessidade da turma.*

5. *Jogar com competências.*

   - *Nesta última etapa, promova jogos onde os alunos possam aplicar suas habilidades e conclusões sobre o jogo. Incentive a comunicação entre os jogadores, especialmente os mais experientes. Este momento terá características de avaliação, onde os alunos fornecerão feedback e você verificará se os conceitos adquiridos estão sendo aplicados corretamente. Duração: Conforme a necessidade da turma.*

5.3 Jogo 3: Dominando Áreas

Neste jogo, a proposta também está ligada ao cálculo de área de figuras construídas em redes. No entanto, essa proposta tem o objetivo de levar o estudante a perceber as relações entre a área das figuras e o número de pontos interiores e no bordo. Assim, o estudante estará mais próximo da Fórmula de Pick.

5.3.0.1 Descrição

Este jogo tem o objetivo de realizar o cálculo de áreas através da contagem de pontos da rede. Pode ser realizado no geoplano Math Learning Center (2024), ou no material impresso (ver Anexo C). Vamos observar as regras:

1. ***Regra:*** *Um número, entre 3 e 49, será sorteado.*

2. ***Regra:*** *Neste jogo cada jogador possui uma malha, na qual fará o seu polígono.*

   a) ***Regra:*** *Cada jogador, em sua própria malha, deve construir um polígono, obedecendo as seguintes condições:*

      - *Os vértices do polígono devem ser pontos da malha.*
      - *Pontos do bordo são os pontos que estão sobre os segmentos que formam a poligonal.*

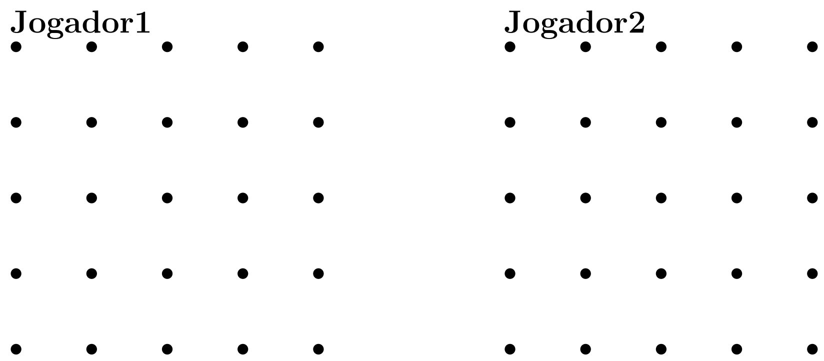


Figura 53 – Simulação de jogo

- *A poligonal, que forma o bordo do polígono, deve ser fechada e não pode ter auto-interseção.*
- *Pontos interiores são os pontos da malha que ficaram contornados pela poligonal.*
- *A soma dos pontos do bordo com os pontos interiores deve ser o número sorteado.*

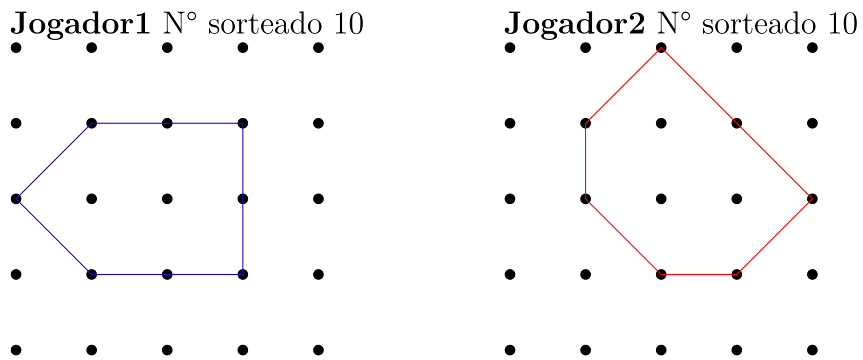


Figura 54 – Exemplo de possível jogada.

3. ***Regra:*** *O jogador que demarca a região de maneira errada perde a área feita.*

4. ***Regra:*** *Vence o competidor que, seguindo as regras, construir o polígono de maior área.*

5.3.0.2 Potencialidades

Este jogo, embora simples, apresenta diferentes possibilidade de uso e colabora para o desenvolvimento de diferentes habilidades, como:

- *(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, DC-GO (2018, p. 401).*

5.3.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação Inicial*

    - *Inicie apresentando os elementos do jogo (material impresso, objetos a serem utilizados) Math Learning Center (2024) e as regras. Dê exemplos para facilitar a assimilação das regras e identifique alunos que as compreenderam facilmente, faça-os monitores, se possível, para ajudar os outros.*

2. *O Jogo e internalizar as regras*

    - *Proponha uma simulação para que os alunos joguem e verifiquem se houve a assimilação das regras. Forme grupos (sugestão: trios ou mais, onde dois jogam e um fiscaliza e registra os resultados). Circule pelos grupos para observar e fornecer feedback, verificando se entenderam as regras. Deixe claro que é uma simulação. Duração: 25 minutos.*

3. *Jogo e Registro*

    - *Agora é o momento do "jogo pelo jogo", onde todos aplicarão as regras e criarão estratégias. Utilize um questionário (sugestão) para coletar informações e resultados das partidas. Além disso, forneça feedback e faça perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?". Existe, como sugestão, um questionário, Ver Anexo A.*

      Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam durante a atividade.Essa atividade pode ser realizada nos 40 minutos finais da mesma aula.

4. *Intervenção Escrita*

    - *Proponha situações-problemas onde os alunos percebam semelhanças com o jogo, fazendo observações sobre polígonos que apareçam, além dos habituais (quadriláteros e triângulos).*

5. *Jogar com Estratégia*

    - *Nesta última etapa, promova jogos onde os jogadores possam aplicar suas habilidades e conclusões sobre o jogo, incentivando a comunicação entre os jogadores, especialmente os mais experientes. Este momento funciona como uma avaliação, onde os alunos fornecem feedback e você verifica se os conceitos adquiridos estão sendo aplicados corretamente.*

5.4 Jogo 4: Duelo de Linhas

Na demonstração da Fórmula de Pick, identificar retas paralelas também é uma habilidade importante. Este jogo é elaborado para dois jogadores; e construído para adquirir ou fortalecer o entendimento do que são retas paralelas e pontos colineares.

5.4.0.1 Descrição

Neste jogo, a competição é para formar o maior número de linhas colineares na rede (ver Anexo D). O jogador que entender melhor o conceito de colinearidade e usar estratégias mais eficazes vence. As regras são as seguintes:

1. ***Regra:*** *O início do jogo pode ser definido por sorteio.*
2. ***Regra:*** *Uma jogada consiste em marcar um ponto.*
3. ***Regra:*** *Os jogadores jogam alternadamente, escolhendo um ponto, e tentando marcar pontos colineares (por exemplo, jogador 1 usa "O" e jogador 2 usa "X").*

jogador 1: O jogador 2: X

4. ***Regra:*** *Cada linha colinear vale o número de pontos que possui. É permitido marcar pontos na horizontal, vertical e diagonal.*

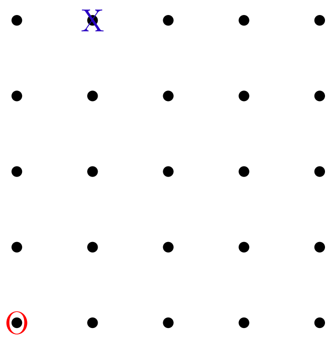


Figura 55 – Jog. O e X.

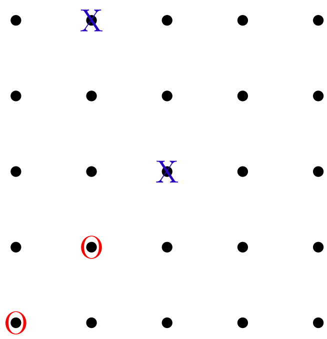


Figura 56 – 2^o jogada.

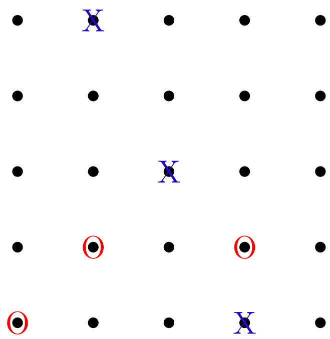


Figura 57 – 3^o jogada.

jogador 1: O jogador 2: X

5. ***Regra:*** *O jogo continua até que todos os pontos sejam marcados ou não haja mais possibilidade de formar novas linhas colineares.*
6. ***Regra:*** *A vitória pode ser combinada de duas formas. O jogador que conseguir formar a linha com mais pontos ou o jogador que tenha mais pontos na soma das linhas colineares.*

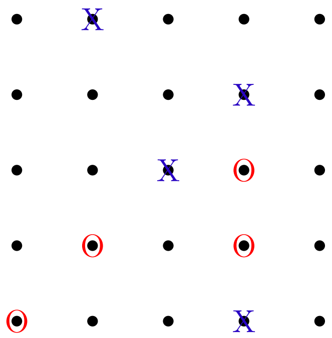


Figura 58 – 4º*jogada*

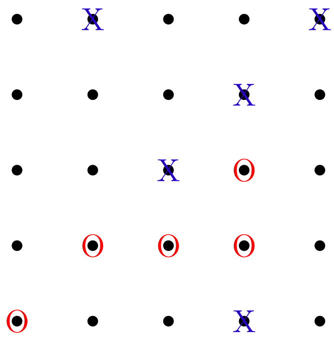


Figura 59 – 5º jogada.

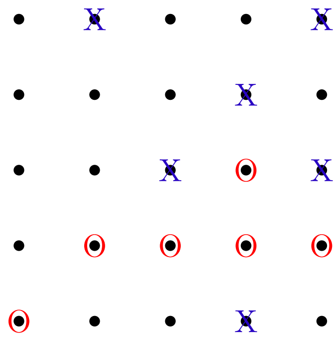


Figura 60 – 6º jogada.

5.4.0.2 Potencialidades

Este jogo, apresenta de possibilidade de uso e colabora para o desenvolvimento de habilidades, como a que tratam de conceitos relacionados a pontos colineares.

- *EF06MA17: Identificar, nomear e classificar ângulos (agudos, retos, obtusos e rasos), retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, ângulos complementares e suplementares. DC-GO (2018, p. 454)*
- *EF07MA20: Representar, construir e analisar formas geométricas planas e espaciais, identificando propriedades de retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, e realizando medições. DC-GO (2018, p. 419-420)*

5.4.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação do jogo e das retas*
    - *No primeiro momento, explicar o sentido de palavra colinear, expor as regras do jogo e apresentar os materiais do jogo, use o material impresso (ver Anexo D). Este jogo pode ser importante ter réguas, caso perceba alunos com dificuldade de entender. (Duração 15 minutos.)*
2. *O jogo e internalizar as regras*
    - *Agora o momento do jogo, tem o objetivo que confirmar se entenderam as regras, observe se alunos podem ser monitores para auxiliar os colegas quanto as regras e executem conscientemente. (Duração 15 minutos).*
3. *Jogo e registros.*
    - *Agora, de posse do necessário para que o jogo flua, as regras e os materiais e questionários. Este momento é de fato o jogo pelo jogo, tente registrar observações para ser discutido no momento seguinte. Além disso, forneça feedback e faça*

perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?".

Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam durante a atividade. (Duração 30 minutos).

4. *Intervenção escrita.*
   - *Proponha situações-problemas relacionados com o tema do jogo, crie uma lista de exercícios que converse com o jogo. Duração: conforme o engajamento da turma.*

5. *jogar com competência.*
   - *Nesta ultima etapa, promova jogos onde os jogadores possam aplicar suas habilidades e conclusões sobre o jogo, busque a comunicação entre jogadores, ainda mais experientes. Este ultimo momento tem característica como que uma avaliação, tente com que eles forneçam feedback, verifique os conceitos adquiridos já são agora utilizados.*

Observação 15. *Uma possibilidade ainda mais interessante seria, ao invés de marcar a linhas de pontos marcasse um ponto por vez, tentando escrever o máximo de pontos colineares, e o que afetaria também a contagem de pontos, onde os pontos isolados (que não tem pontos adjacentes para formar colinearidade) não são computados.*

5.5 Jogo 5: Os Triângulos de Pick

A Fórmula de Pick relaciona a área de polígonos em redes com o número de pontos no interior e no bordo do polígono. Este jogo explora exatamente esse fato.

Observação 16. *Material Necessário: Rede de pontos (material impresso, Ver o Anexo E),lápis e régua, fichas ou marcadores coloridos, ou aplicativos, cartões com desafios de áreas específicas.*

5.5.0.1 Descrição

Neste jogo o objetivo é ensinar o Teorema de Pick através da construção de triângulos e a contagem de pontos na rede do plano.

1. ***Regra:*** *Cada jogador recebe fichas coloridas e um conjunto de cartões de desafios.*

2. ***Regra:*** *Cada jogador escolhe um cartão de desafio, que especifica uma área específica para um triângulo que eles precisam desenhar.*

3. ***Regra:*** *Os jogadores, na sua vez, desenham um triângulo na malha reticular usando lápis e régua, tentando corresponder à área especificada no cartão de desafio.*

4. ***Regra:*** *Após desenhar o triângulo, o jogador conta os pontos de grade internos (I) e nos bordos (B). Usando a fórmula do Teorema de Pick:* $A = I + \frac{B}{2} - 1$ *, o jogador verifica se a área do triângulo corresponde ao desafio.*

5. ***Regra:*** *Se o cálculo da área estiver correto e corresponder ao desafio, o jogador marca pontos.*

6. ***Regra:*** *Os jogadores anotam os cálculos em um papel.*

7. ***Regra:*** *O jogo termina após um número determinado de rodadas ou quando todos os cartões de desafios forem usados.*

8. ***Regra:*** *Ganha o jogador com mais pontos acumulados.*

5.5.0.2 Potencialidades

Este jogo, embora simples, apresenta diferentes possibilidade de uso e colabora para o desenvolvimento de diferentes habilidades, como:

- *Habilidade EF09MA14: Resolver e elaborar problemas envolvendo o cálculo da área de figuras planas (retângulos, quadrados, paralelogramos, trapézios, triângulos e círculos) e a decomposição e composição dessas figuras. BNCC (2024, p. 401) .*

5.5.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação Inicial*

    - *Nesta primeira etapa, presentar a rede de pontos, lápis, régua, fichas coloridas e cartões de desafios. Aplicar a fórmula do Teorema de Pick:* $A = \frac{B}{2} + I - 1$ *fornecendo exemplos práticos para ilustrar como contar os pontos internos* (I) *e nos bordos* (B) *de um triângulo, essa atividade dura em média 15 minutos.*

2. *Jogar e internalizar as regras*

    - *Agora, distribuir fichas coloridas e cartões de desafios a cada aluno, pode formar grupos pequenos para facilitar a interação e o aprendizado. Certificar que cada grupo tenha acesso a lápis, régua e papel para anotações. Cada aluno escolhe um cartão de desafio e desenha um triângulo na rede de pontos e contam os pontos internos e nos bordos, verificando a área usando a fórmula de Pick. É importante, o professor circula entre os grupos, observando e fornecendo feedback e enfatizar que é uma simulação para garantir que todos entendam as regras e o objetivo do jogo, esta etapa pode durar* 15 *minutos.*

3. *Jogo e Registro dos Resultados*

    - *Nesta etapa, iniciar o jogo, onde os alunos jogam várias rodadas, desenhando triângulos e verificando suas áreas conforme os cartões de desafios. Anotar os cálculos e resultados em um papel e, ao final de cada rodada, os jogadores marcam pontos se o cálculo da área estiver correto. Revisar os cálculos e resultados com os alunos, discutindo quaisquer erros ou dificuldades e os alunos preenchem um questionário para coletar informações sobre sua experiência e compreensão do jogo e do Teorema de Pick. Exsite, como sugestão, um questionário, ver em Anexo A. Duração: 30 minutos.*

4. *Uso dos registros*

    - *Revisar os cálculos e resultados com os alunos, discutindo quaisquer erros ou dificuldades. Avaliar o entendimento dos alunos sobre o Teorema de Pick e fornecer feedback. Propor situações-problemas que envolvem o Teorema de Pick, além dos triângulos usuais (ex.: quadriláteros). Discutir a aplicação do teorema em diferentes contextos geométricos. Duração 20 minutos.*

5. *Jogar com "competência"*

    - *Promover a aplicação avançada das habilidades adquiridas e concluir a atividade com uma avaliação. Promover jogos onde os alunos podem aplicar suas habilidades de forma estratégica, comunicando-se entre os jogadores mais experientes. Esta etapa serve como uma avaliação final, onde os alunos fornecem feedback e o professor verifica se os conceitos adquiridos estão sendo aplicados corretamente.*

5.6 Jogo 6: Desafio dos Ângulos

Neste jogo, os alunos devem desenhar linhas em uma rede de pontos, partindo de um ponto de origem, de forma que as linhas formem ângulos específicos.

5.6.0.1 Descrição

O objetivo é praticar o conceito de inclinação e ângulos.

1. ***Regra:*** *Cada aluno ou grupo recebe um papel impresso.*

2. ***Regra:*** *Cada papel impresso deve ter vários pontos de origem marcados, identificados por letras (por exemplo, A, B, C, etc.).*

3. ***Regra:*** *Usando a régua, os alunos devem desenhar uma linha reta a partir do ponto de origem indicado, formando o ângulo especificado (ou mais próximo) em relação à linha horizontal.*

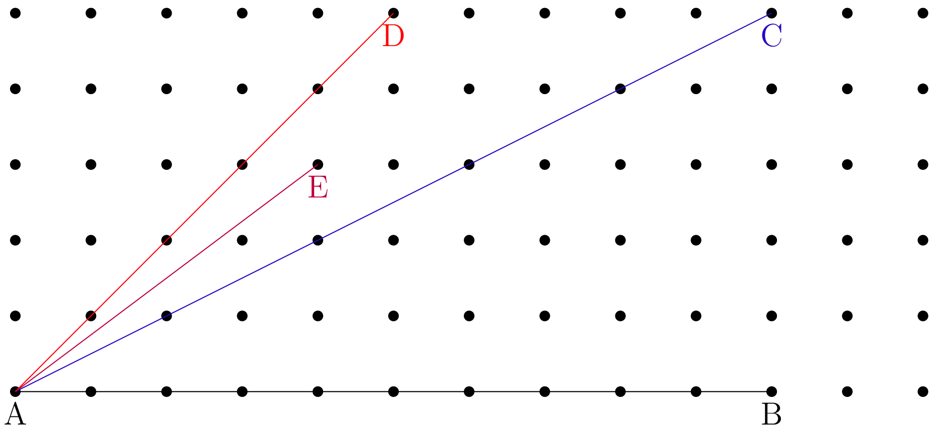


Figura 61 – Qual reta com $\overline{AB}$ tem ângulo de 45^0 ou próximo? Simulação cada cor um aluno.

4. ***Regra:*** *Cada linha deve iniciar e terminar em algum ponto da rede.*

5.6.0.2 Potencialidades

Componente Curricular: Matemática

Competência Específica: Geometria e Medidas

- *(EM13MAT406) Utilizar conceitos e propriedades das figuras geométricas planas e espaciais para representar e resolver situações-problema envolvendo relações métricas (comprimento, área, volume, ângulos e distância) e propriedades de semelhança e congruência. BNCC (2024, p. 514).*
- *(EM13MAT405) Utilizar relações entre as inclinações de retas e as medidas de ângulos, representando-as no plano cartesiano e resolvendo problemas que envolvam essas relações.*

5.6.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação do jogo e regras*
   - *Apresentação dos conceitos de ângulo e inclinação. Explicação sobre a utilização da malha quadriculada para desenhar e medir ângulos. Duração 10 minutos*
2. *Jogo (simulação)*
   - *Permitir que os alunos pratiquem o traçado de linhas em ângulos específicos através de uma simulação guiada. Escolher um ponto de origem na malha quadriculada e traçar uma linha em um ângulo específico, mostrando passo a passo. Orientar e corrigir os alunos durante a atividade prática, esclarecendo dúvidas. Duração 20 minutos.*

3. *Jogo e registros*

    - *Permitir que os alunos joguem o "Desafio dos Ângulos"de forma autônoma e registrem seus resultados. Distribuir uma folha de exercício com pontos de origem e ângulos específicos para cada aluno. Além disso, forneça feedback e faça perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?".*

      Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam durante a atividade. Existe, como sugestão, um que questionário , Ver Anexo A. Duração 15 minutos

4. *Intervenção escrita*

    - *Refletir sobre a atividade realizada, contextualizando o uso dos ângulos na prática e utilizando os registros para revisão e correção. Revisão coletiva dos registros feitos pelos alunos, discutindo erros e acertos. Apresentação de exemplos de aplicação prática dos ângulos (na arquitetura, engenharia, design, etc.). Discussão sobre a importância da precisão na medição e desenho de ângulos. Feedback do professor sobre o desempenho dos alunos. Duração 20 minutos.*

5. *Jogar competência*

    - *Desafiar os alunos a aplicar as habilidades adquiridas em um contexto de competição amigável. Cada aluno ou grupo receberá um conjunto de pontos de origem e ângulos para desenhar. Os grupos devem desenhar os ângulos de forma colaborativa e verificar a precisão. Duração: 20 minutos*

5.7 Jogo 7: Desafio dos Polígonos e Ângulos Internos

Neste jogo os estudantes exploram atividades ligadas à soma dos ângulos internos de um polígono e a importância que a justaposição de triângulos tem nesse processo

5.7.0.1 Descrição

Os alunos devem desenhar diferentes polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos) na rede de pontos, identificar e medir os ângulos internos de cada polígono e verificar se a soma dos ângulos internos se mantém constante para figuras com a mesma quantidade de lados. Material Necessário: Rede de pontos impressa em uma folha de papel, régua, transferidor, lápis e borracha.

1. *Cada aluno ou grupo deve trabalhar no seu próprio material impresso (rede de pontos).*

2. *O participante deve desenhar, sobre a rede de pontos, três diferentes polígonos (indicados pelo professor) com vértices sobre os pontos da rede. Não precisam ser regulares, mas o uso de régua para a construção é recomendado.*

3. *Cada aluno deve medir, usando transferidor e registrar os ângulos internos de cada polígono desenhado.*

4. *Os alunos devem calcular a soma dos ângulos internos para cada polígono.*

5. *Após desenharem os polígonos e medirem os ângulos, os valores obtidos para cada figura serão anotados e comparados com os outros grupos. Para cada tipo de polígono os resultados serão classificados de forma que o primeiro é aquela soma que ficou mais próxima do valor esperado, isto é,* 180^0 *para triângulos,* 360^0 *para quadriláteros,* 540^0 *para pentágonos...*

6. *O primeiro grupo da classificação ganha 10 pontos, o segundo 7, o terceiro 4 e o quarto 1.*

7. *Ganha o jogo e grupo que ao final obtiver maior soma de pontos nas três figuras.*

Veja uma simulação onde cada aluno ou grupo desenhou de diferentes formas quadriláteros.

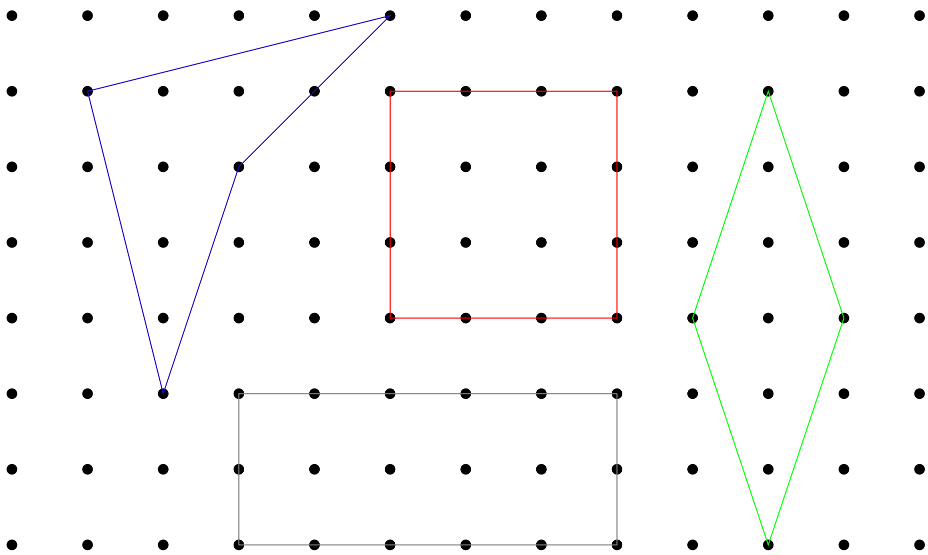


Figura 62 – Qual é a soma dos ângulos internos de cada figura?

5.7.0.2 Potencialidades

Componente Curricular: Matemática
Competência Específica: Geometria e Medidas

- *(EM13MAT406) Resolver e elaborar problemas que envolvam propriedades de figuras geométricas planas (triângulos, quadriláteros, polígonos regulares e irregulares) utilizando relações métricas e propriedades de congruência e semelhança.* DC-GO (2018, p. 222).

- *(EF08MA18) Reconhecer as características de polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.), classificando-os quanto ao número de lados, à medida dos lados e à medida dos ângulos internos.* DC-GO (2018, p. 491)

5.7.0.3 Sequência Didática

1. *Apresentação inicial*

    - *Introduzir os conceitos de polígonos e ângulos internos, além de explicar as regras do jogo "Desafio dos Polígonos e Ângulos Internos". Apresentação dos conceitos de polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos) e suas propriedades. Explicação sobre a utilização da malha quadriculada para desenhar e medir ângulos internos dos polígonos. Demonstração prática de como utilizar a régua e o transferidor para traçar e medir os ângulos internos. Duração: 20 minutos*

2. *Jogo Simulação*

    - *Permitir que os alunos pratiquem o traçado de polígonos e a medição de ângulos internos através de uma simulação guiada. Escolher um ponto de origem na malha quadriculada e desenhar um polígono (triângulo, quadrilátero, pentágono), mostrando passo a passo. Pedir aos alunos que repitam a atividade nos seus papéis, acompanhando a demonstração. Orientar e corrigir os alunos durante a atividade prática, esclarecendo dúvidas. Duração: 20 minutos*

3. *Jogar e Registrar*

    - *Permitir que os alunos joguem o "Desafio dos Polígonos e Ângulos Internos"de forma autônoma e registrem seus resultados.Orientar os alunos a desenharem os polígonos e medirem os ângulos internos, registrando os valores obtidos. Os alunos devem calcular a soma dos ângulos internos para cada polígono desenhado. Coleta dos registros para análise posterior. além disso, forneça feedback e faça perguntas orientadoras, como "Como obter vantagens?" e "Existem estratégias para vencer?".*

      Estimule a reflexão sobre possíveis estratégias e incentive os alunos a pensarem sobre suas jogadas. Registre o progresso do jogo e o que os alunos aprenderam durante a atividade. Existe, como sugestão um questionário, Ver em Anexo A. Duração: 30 minutos

4. *Contextualizar e Usar Registros*

    - *Refletir sobre a atividade realizada, contextualizando o uso dos ângulos internos dos polígonos na prática e utilizando os registros para revisão e correção. Revisão coletiva dos registros feitos pelos alunos, discutindo erros e acertos. Apresentação de exemplos de aplicação prática dos polígonos e ângulos internos em diferentes áreas (arquitetura, engenharia, design, etc.). Duração: 30 minutos*

5. *Jogar com "Competência"*

    - *Desafiar os alunos a aplicar as habilidades adquiridas em um contexto de competição amigável. Dividir os alunos em pequenos grupos. Cada grupo receberá um conjunto de pontos de origem e tipos de polígonos para desenhar. Os grupos devem desenhar os polígonos de forma colaborativa, medir e calcular a soma dos ângulos internos. Duração: 30 minutos*

6 Conclusão

Esta dissertação investigou o uso do Teorema de Pick e de suas extensões na elaboração de jogos voltados ao ensino de matemática, com a questão central : "Como o Teorema de Pick pode contribuir para melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos?". A investigação buscou responder se os jogos, inspirados na Fórmula de Pick, podem ser usados como ferramentas para melhorar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos e desenvolver habilidades.

As hipóteses levantadas neste estudo eram que o uso de jogos geométricos pode resultar em uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e um aumento no desempenho escolar dos alunos. Assim, os estudos focaram, primeiramente, no entendimento do Teorema de Pick e de suas extensões, e a partir disso, pensar em possibilidades para construção de jogos. Os objetivos específicos tinham como alvo o desenvolvimento de diferentes jogos para novas abordagens integradas ao currículo e a exploradas como estratégias eficazes de ensino.

Refletindo sobre o trabalho realizado, é evidente que os jogos têm um papel significativo no ensino de matemática. No entanto, a elaboração de jogos com fundamentação sólida e inspiração retirada de questões teóricas ainda é uma área pouco explorada. Além disso, as dificuldades que muitos educadores e pesquisadores enfrentam em quantificar e medir os resultados dos jogos no aprendizado matemático, podendo limitar a compreensão do real impacto dos jogos. O trabalho contribui, principalmente, para o desenvolvimento da primeira parte, isto é, oferece opções de jogos bem elaborados e ligados a questões teóricas. Pesquisas para entender completamente o impacto desses jogos no aprendizado dos alunos ainda são necessárias e, juntamente com a perspectiva de desenvolver aplicativos para os jogos apresentados, seguem no horizonte de investigação.

Esta dissertação demonstrou que o Teorema de Pick e algumas de suas extensões contribuíram para o desenvolvimento de jogos geométricos. Além disso, o levantamento bibliográfico sobre as matrizes curriculares, as tendências pedagógicas e as sequências didáticas criou um caminho coerente com os propósitos deste trabalho e proporcionou um aproveitamento mais consciente ao propor jogos para estudantes da educação básica. A elaboração de sequências didáticas, que detalham e criam momentos importantes para cada tarefa, baseadas nos estudos das tendências sobre jogos na educação e inspiradas em resultados ligados ao Teorema de Pick, torna o objetivo geral mais possível de ser alcançado.

Referências

ANDRINI Álvaro. Fundamentos e Prática (6º ano). *São Paulo: Editora Moderna, 2012. 123 p. Citado na página 21.*

BNCC. Base Nacional Comum Curricular. *Ministério da Educação, 2024. Acesso em: 22 jul. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/educacao-basica/bncc>. Citado 4 vezes nas páginas 53, 54, 77 e 79.*

BOALER, J. Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching. *[S.l.]: Jossey-Bass, 2016. 23 p. Citado na página 52.*

BORIN, J. Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. *São Paulo: IME-USP, 1996. Citado na página 52.*

BOYER, C. B. História da Matemática. *[S.l.]: Editora Edgard Blücher, 1996. 26 p. Citado na página 21.*

Coquinhos. Pontos e Quadrados. *2024. Acesso em: 17 jul. 2024. Disponível em: <https://www.coquinhos.com/pontos-e-quadrados/play/>. Citado na página 64.*

COQUINHOS. RAPID MATH: Cálculos Mentais Matemáticas. *2024. Accessed: 2024-08-03. Disponível em: <https://www.coquinhos.com/calculos-mentais-matematicas/>. Citado na página 57.*

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. Educação matemática em revista*, v. 1, n. 1, p. 5–11, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.*

DANTE, L. R. Tudo é Matemática - 7º Ano do Ensino Fundamental. *[S.l.]: São Paulo, 2009. Citado na página 21.*

DANTE, L. R.; VIANA, F. Projeto Teláris (8º ano). *[S.l.]: Editora Ática, 2016. 296 p. Citado na página 21.*

DC-GO. Documento Curricular para Goiás - Ampliado. *Goiânia, Goiás, 2018. Acesso em: ago. de 2024. Citado 7 vezes nas páginas 55, 56, 65, 70, 72, 75 e 82.*

Divertudo. Desafios Matemáticos. *2024. Acesso em: 17 jul. 2024. Disponível em: <https://www.divertudo.com.br/desafios-matematicos/>. Citado na página 64.*

DOTS; BOXES. Dots and Boxes - The game of dots and boxes, with variations and strategies. *2024. <https://www.dotsandboxes.org>. Acesso em: jul. de 2024. Citado na página 66.*

DUTENHEFNER, F.; CADAR, L. Encontros de geometria: parte 1. Rio de Janeiro*, 2015. Citado na página 22.*

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. Zetetiké*, v. 3, n. 1, p. 1–38, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 52, 56 e 57.*

FONSECA, A. Caderno do Futuro (6º ano)*. [S.l.]: Editora Scipione, 2010. 45 p. Citado na página 21.*

GIOVANNI, J. R. A Conquista da Matemática*. São Paulo: Editora FTD, 2015. 67 p. (Ensino Fundamental, 6º ao 9º Ano). Citado na página 21.*

GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. Revista de Educação Matemática, São Paulo*, v. 10, n. 12, p. 43–50, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 52, 53, 56, 57* e *61.*

LIMA, E. L. Formas e Medidas*. 2. ed. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 1995. 21, 22, 23 p. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 22* e *26.*

LIMA, E. L. et al. Meu Professor de Matemática e outras histórias*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 19* e *27.*

MACEDO, L. d. et al. Intervenção com jogos: estudo sobre o tangram. Psicologia Escolar e Educacional*, SciELO Brasil, v. 19, p. 13–22, 2015. Citado na página 56.*

Math Learning Center. Geoboard - A Math Learning Center App*. 2024. <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>. Acesso em: jul. de 2024. Citado 3 vezes nas páginas 68, 71* e *73.*

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Biography of Georg Alexander Pick*. 2005. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/>. Accessed: 2024-08-03. Citado na página 27.*

PERRENOUD, P. Construir as Competências Desde a Escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999. Citado na página 60.*

SMITH, J.; BROWN, M. Strategic analysis of mancala games. Journal of Game Studies*, v. 45, n. 2, p. 120–135, 2010. Citado na página 57.*

ZABALA, A. Enfoque Globalizador e Pensamento Complexo: Uma Proposta para o Currículo Escolar*. [S.l.]: Artmed, 1999. Citado na página 60.*

Anexos

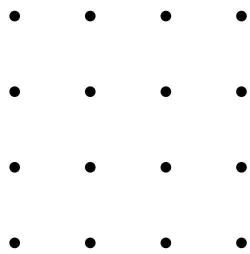
ANEXO A – Questionário

Exercício 1: Pontos, Segmentos e Quadrados

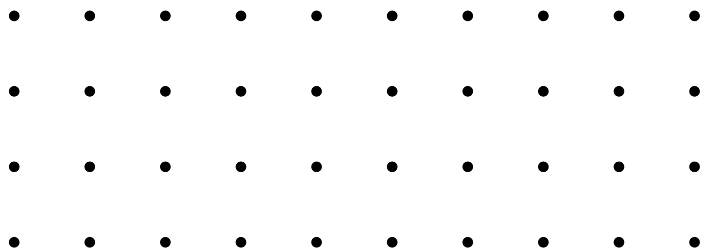
1. *Você achou as regras do jogo claras e fáceis de entender? Justifique sua resposta.*
2. *Teve alguma regra que você considerou confusa ou difícil de aplicar? Se sim, qual e por quê?*
3. *Quais estratégias você desenvolveu ou aprendeu durante o jogo?*
4. *Houve algum momento em que você percebeu uma melhora na sua compreensão dos conceitos de geometria? Descreva.*
5. *O que você mais gostou na atividade?*
6. *O que você menos gostou na atividade?*
7. *Você acha que o jogo poderia ser melhorado de alguma forma? Se sim, como?*
8. *Você consegue pensar em alguma situação real onde os conceitos aprendidos no jogo poderiam ser aplicados? Descreva.*
9. *Dê uma nota de 1 a 5 para sua experiência geral com a atividade (1 = muito ruim, 5 = excelente).*
10. *Explique a razão da nota que você deu.*
11. *Você recomendaria essa atividade para outros alunos? Por quê?*

ANEXO B – Jogo 1 e 2

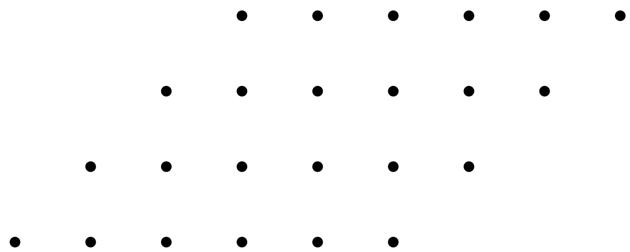
Estudante 1 Estudante 2



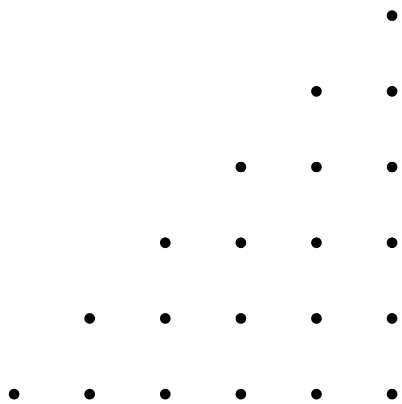
Estudante 1 Estudante 2



Estudante 1 Estudante 2



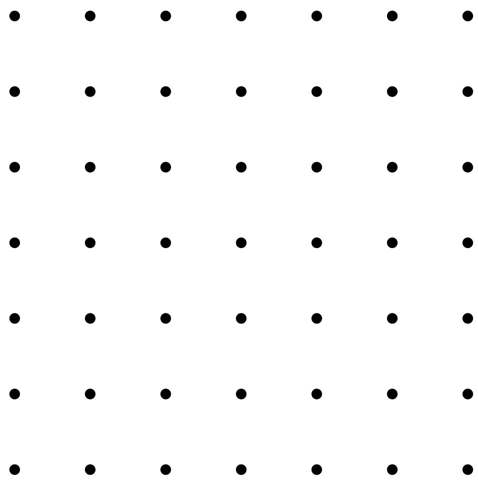
Estudante 1 Estudante 2



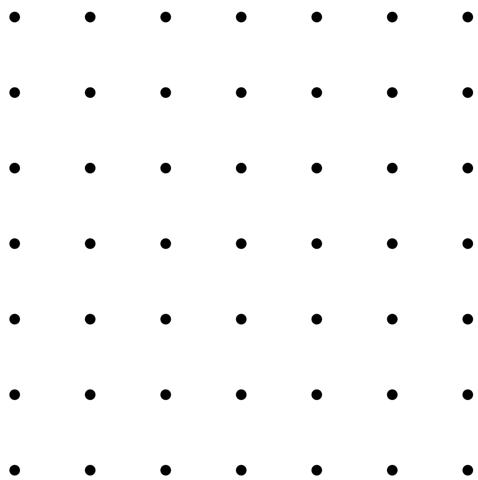
ANEXO C – Jogo 3

Jogo 3: Dominando Áreas

Estudante 1: ______________________

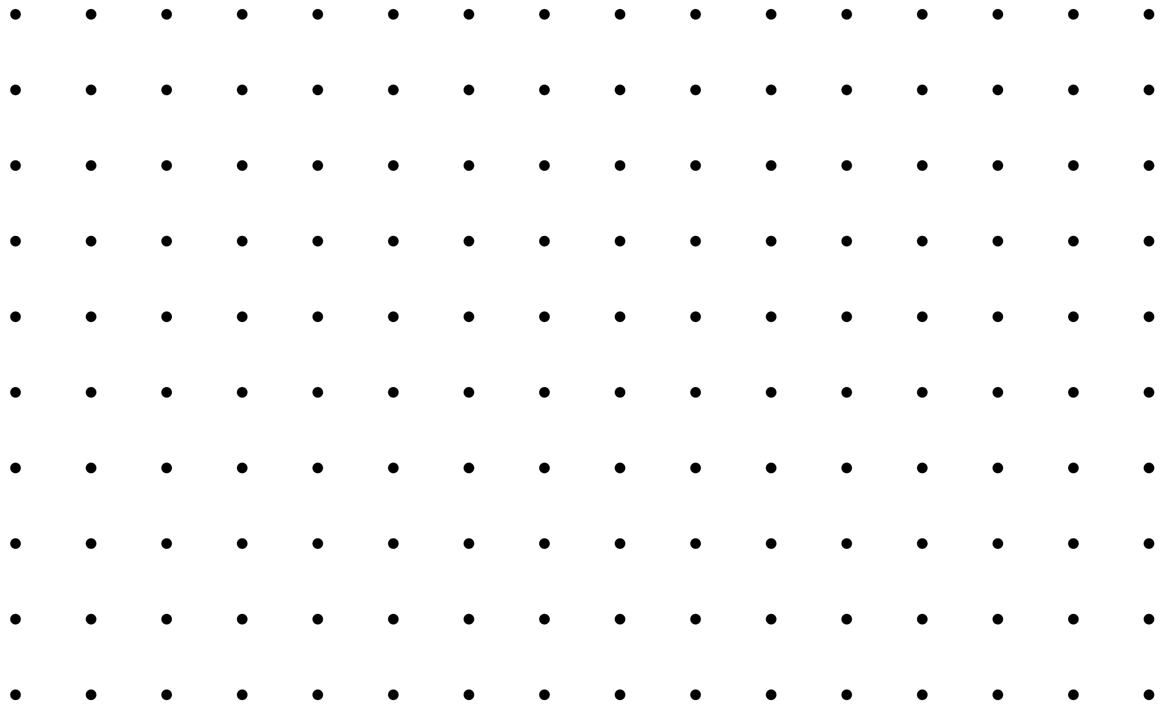


Estudante 2: ______________________



ANEXO D – jogo 4

Jogo: Duelo de Linhas



Estudante 1:_______________ ***Estudante 2:***_______________

ANEXO E – Jogo 5

Jogo: Os triângulos de Pick

Card 1

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (0,0), (4,0), e (2,3).

Card 2

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (1,1), (4,1), e (3, 4).

Card 3

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (1,1), (3,1), e (2,3).

Card 4

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (2,2), (6,2), e (3,5).

Card 5

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (0,0), (3,0), e (2, 3).

Card 6

Descrição: Um triângulo cujos vértices estão nos pontos (2,2), (5,2), e (4,5).

Card 7

Descrição: Um quadrado cujos vértices estão nos pontos (1,1), (4,1), (4,4), e (1,4).

Card 8

Descrição: Um retângulo cujos vértices estão nos pontos (2,2), (6,2), (6,4), e (2,4).

Card 9

Descrição: Um losango cujos vértices estão nos pontos (2,3), (4,1), (6,3), e (4,5).

Card 10

Descrição: Um paralelogramo cujos vértices estão nos pontos (0,0), (4,0), (5,3), e (1,3).

Card 11

Descrição: Um pentágono regular cujos vértices estão nos pontos (2,2), (4,2), (5,4), (3,5), e (1,4).

Card 12

Descrição: Um pentágono irregular cujos vértices estão nos pontos (1,1), (4,1), (5,3), (3,5), e (0,3).

Card 13

Descrição: Um pentágono côncavo cujos vértices estão nos pontos (2,2), (5,2), (4,4), (2,5), e (1,3).

Card 14

Descrição: Um pentágono irregular cujos vértices estão nos pontos (0,0), (3,0), (4,2), (2,4), e (1,2).

Card 15

Descrição: Um pentágono côncavo cujos vértices estão nos pontos (1,1), (4,1), (3,3), (2,3), e (1,2)

Card 16

Descrição: Um pentágono regular cujos vértices estão nos pontos (3,3), (5,4), (4,6), (2,6), e (1,4).

Card 17

Descrição: Um hexágono regular cujos vértices estão nos pontos (2,2), (4,2), (5,3), (4,4), (2,4), e (1,3).

Card 18

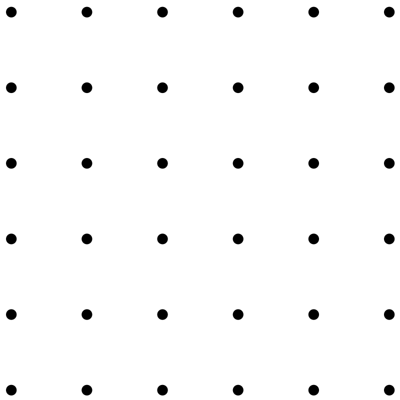
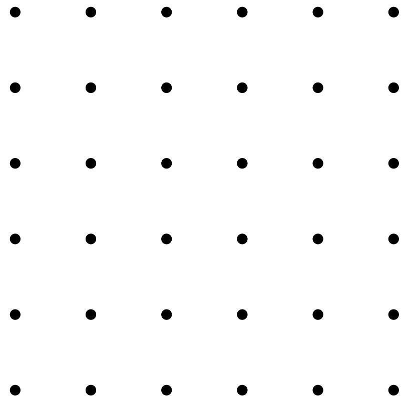
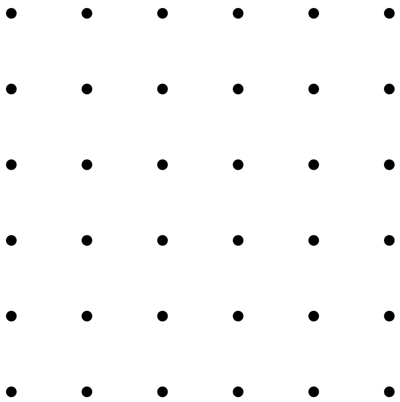
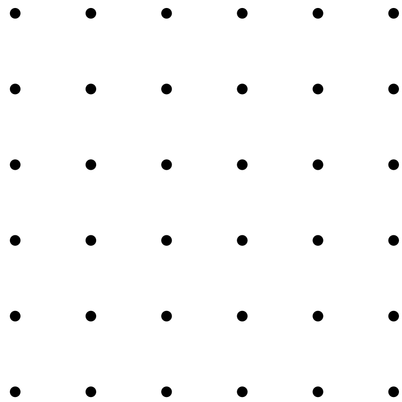
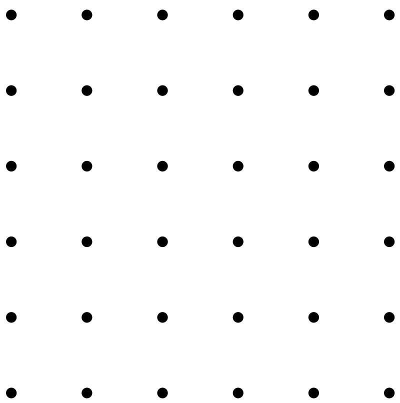
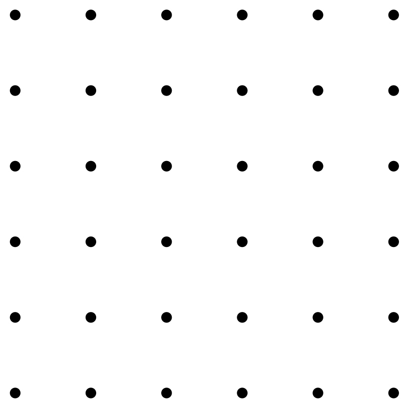
Descrição: Um hexágono irregular cujos vértices estão nos pontos (1,1), (3,1), (4,2), (3,4), (1,4), e (0,2).

Card 19

Descrição: Um hexágono irregular cujos vértices estão nos pontos (0,0), (2,1), (3,3), (2,5), (0,4), e (-1,2).

Card 20

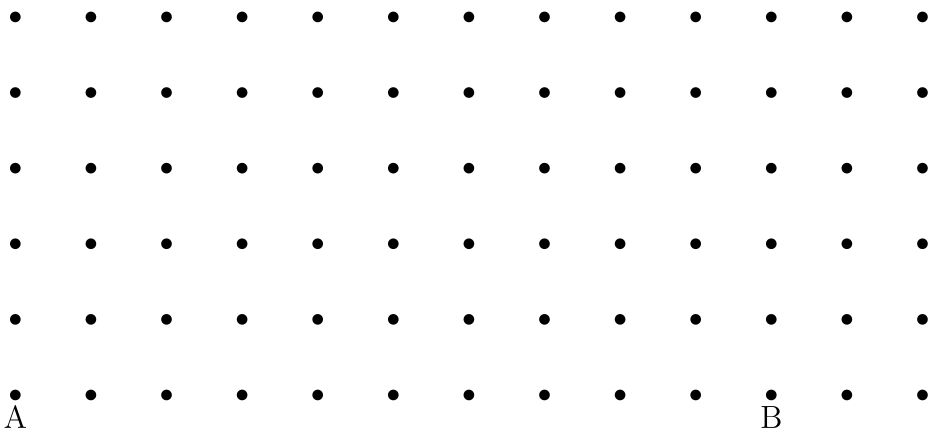
Descrição: Um hexágono côncavo cujos vértices estão nos pontos (1,1), (4,1), (5,3), (3,4), (2,3), e (1,2).

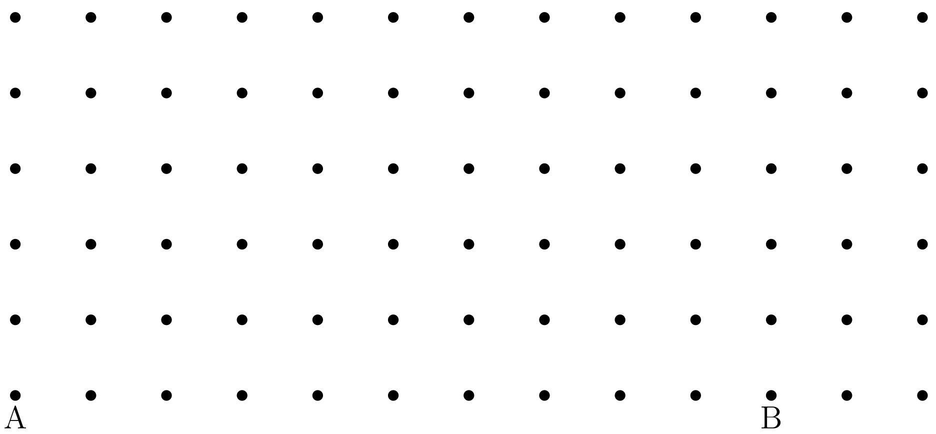
ANEXO F – jogo 6

Jogo 6: Desafio dos Ângulos

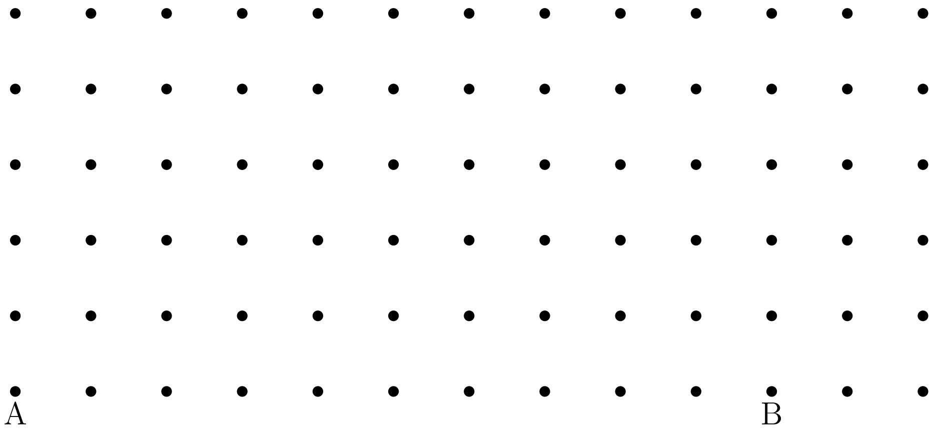
Estudante: ____________________



Estudante: ____________________



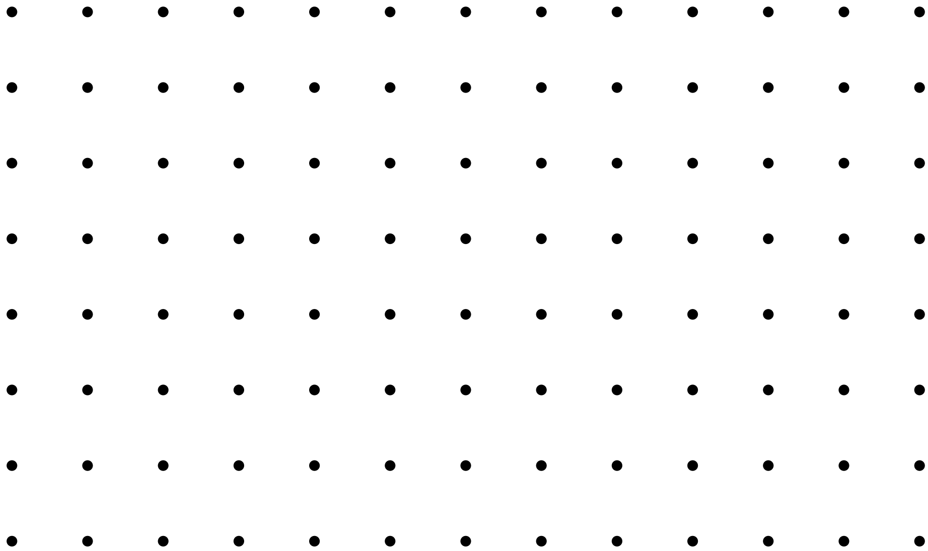
Estudante: ____________________


A
B

ANEXO G – Jogo 7

Jogo 7: Desafio dos Polígonos e Ângulos Internos

Estudante: ____________________



Estudante: ____________________