Universidade do Estado do Amazonas - UEA
Escola Normal Superior - ENS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JOILSON ALVES LOPES

DEMONSTRAÇÕES E RESOLUÇÕES SEM PALAVRAS: UMA ABORDAGEM PELO SOFTWARE GEOGEBRA

Manaus
2024

JOILSON ALVES LOPES

DEMONSTRAÇÕES E RESOLUÇÕES SEM PALAVRAS: UMA ABORDAGEM PELO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA

Orientador
Prof. Dr. JOÃO BATISTA PONCIANO

Coorientação
Profa. Dra. KELLY ALVES MARÃES DE ALMEIDA

Banca Examinadora
Prof. Dr. João Batista Ponciano
Profa. Ma. Alexandra Salerno Pinheiro
Prof. Dr. Raul Rabello Mesquita

MANAUS
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

L864d LOPES, Joilson Alves Lopes

DEMONSTRAÇÕES E RESOLUÇÕES SEM PALAVRAS: UMA ABORDAGEM PELO SOFTWARE GEOGEBRA / Joilson Alves Lopes LOPES . Manaus : [s.n], 2024

96 f.: color.; 21,0 cm.

TCC - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2024.

Inclui Bibliografia.

Inclui Apêndice.

Orientador: PONCIANO, João Batista.

Coorientador: DE ALMEIDA, Kelly Alves Marães .

1. GeoGebra. 2. Ensino de Matemática. 3. provas sem palavras. 4. tecnologia educacional. 5. interatividade. I. PONCIANO, João Batista (Orient.) II . DE ALMEIDA, Kelly Alves Marães (Coorient.) III. Universidade do Estado do Amazonas. IV. Título

CDU(1997)51(043.3)

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, do aluno **JOILSON ALVES LOPES,** matrícula nº **2291940005.**

Em 10 de setembro de 2024, às 14h, no Laboratório de Matemática da Escola Normal Superior no Município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Prof. Dr. João Batista Ponciano, Profa. Ma. Alexandra Salerno Pinheiro e Prof. Dr. Raul Rabello Mesquita, o aluno **JOILSON ALVES LOPES** apresentou a defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEA, intitulada: **"Demonstrações e Resoluções sem palavras, uma abordagem pelo Software Geogebra".**

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado ao aluno e aos demais presentes.

Manaus, 10 de setembro de 2024.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PROFMAT
UEA

Orientador

Membro Interno da Banca Avaliadora

Membro Externo da Banca Avaliadora

Joilson Alves Lopes

Mestrando

Meus Pais:

Maria Alves Lopes
Valdenor Mariano Lopes

Minha esposa:

Andrezza Laureen da Costa Costa.

Meus filhos:

Ângelo Mariano da Costa Alves.
Arthur Mariano da Costa Alves.
Achillys dos Santos Alves.
Andrey Mailzon Costa Rodrigues.

Meus irmãos:

Josenil Alves Lopes.
Janilson Alves Lopes.
Valmir Araújo Lopes

Agradecimentos

Nesse momento feliz em minha vida, mais uma grande conquista realizada, venho, em agradecimento, a quem contribuiu imensamente para esta conquista.

Em primeiro plano, agradeço ao Criador pela oportunidade de concluir mais uma etapa da minha vida.

Agora vem uma enorme lista de mortais.

Minha família em geral.

Minha esposa, Andrezza Laureen da Costa Costa, que ao longo de todo o processo esteve ao meu lado sempre me dando força para continuar.

Minha Mãe, Maria Alves Lopes, que sempre me honra e é a pessoa que iniciou esse projeto, com seus ensinamentos. Você é meu orgulho e minha inspiração.

Meu Pai, Valdenor Mariano Lopes, que apesar de já não estar entre nós, com certeza está feliz pela conquista.

A todos os meus professores:

Wanderly José de Deus (Lico), que foi o primeiro a me mostrar como a Matemática é linda e me fez acreditar nisso;

Professora Silvane, que deu sequência sendo um dos melhores da classe e ainda me defendia, porque eu era meio danado em outras aulas;

Professor Roberto Carlos Guilherme Zeferino, com sua boa explicação deixava as coisas mais simples e de fácil entendimento.

Professor Joelson Alves Lima, onde tive a maior identidade e crença de que poderia ir mais longe;

Professor Laércio Luis França, que na época era o diretor da minha Escola, acreditou no meu potencial e dentre tantos outros alunos me escolheu, junto ao Prof: Joelson, para ser o representante da escola em uma feira de ciências. Posso afirmar categoricamente que deu certo. Chegamos a feira Sulamericana com o projeto Máquina de Solda Caseira pela escola Zoraide da Gama Figueiredo.

Já chegando ao Ensino Médio, tenho a honra de ser aluno do professor considerado por muitos o melhor em Matemática da minha cidade (São Luiz-RR), Professor Jeová Silva de Melo, onde pude com ele aprofundar meus conhecimentos e me preparar para um desafio ainda maior, ingressar na Universidade Estadual de Roraima (UERR) em 2006.

Aos professores e colegas da turma de Matemática C (UERR-2006), em especial ao colega Chendo dos Santos Silva e o professor Alfredo Fernandes de Brito Neto.

Aos colegas de São Luiz-RR que, junto comigo, se aventuravam em motos todas as noite para Universidade em Rorainópolis, em especial, meu amigo e hoje cumpadre, Tiago de Oliveira Lima.

Aos Professores e aos colegas do Profmat-UFAM 2017 que, mesmo que eu não tenha concluído, os estudos foram úteis para continuar a jornada.

Aos colegas do Profmat-UEA 2022 que lutamos todos juntos, uma pequena turma de 13 guerreiros sempre unidos.

Aos professores do Profmat-UEA, em especial, meu orientador Prof. Dr. João Batista Ponciano que contribuiu imensamente, não só para meu trabalho mas para todo Curso do ProfMat-UEA.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a implantação deste projeto como a SBM, IMPA, Capes, FAPEAM e UEA.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Deixo aqui meu agradecimento à todos que me ajudaram, de alguma forma, a vencer essa etapa, meu muito obrigado.

Resumo

Este trabalho apresenta como o software de geometria dinâmica GeoGebra pode facilitar o entendimento e a interpretação de teoremas e questões matemáticas.

A pesquisa parte do questionamento central sobre como ferramentas tecnológicas podem tornar o aprendizado da Matemática mais acessível e engajador, especialmente em um cenário onde a abstração dos conceitos e o ensino tradicional contribuem para o desinteresse e a evasão escolar.

Utilizando a abordagem de demonstrações e resoluções sem palavras, o estudo busca a interatividade proporcionada pelo GeoGebra para simplificar a compreensão de teoremas clássicos e problemas matemáticos, que frequentemente, são vistos como complexos e desconectados do âmbito escolar.

O objetivo é melhorar a compreensão dos conteúdos e também aumentar a motivação dos estudantes, tornando o Ensino da Matemática mais atrativo e relevante no contexto educacional.

Serão apresentadas visualizações geradas pelo software GeoGebra que proporcionarão resoluções e demonstrações de teoremas de maneira visual e interativa. Foram criados e disponibilizados, na página do autor, Applets para as vizualizações que podem ser acessados através do código QR.

Palavras-chave: GeoGebra; Ensino de Matemática; provas sem palavras; tecnologia educacional; interatividade.

Abstract

This paper presents how the dynamic geometry software GeoGebra can facilitate the understanding and interpretation of mathematical theorems and questions.

The research is based on the central question of how technological tools can make learning mathematics more accessible and engaging, especially in a scenario where the abstraction of concepts and traditional teaching contribute to disinterest and school dropout.

Using the approach of demonstrations and resolutions without words, the study seeks the interactivity provided by GeoGebra to simplify the understanding of classic theorems and mathematical problems, which are often seen as complex and disconnected from the school environment.

The aim is to improve understanding of the content and also to increase student motivation, making the teaching of mathematics more attractive and relevant in the educational context.

Visualizations generated by the GeoGebra software will be presented which will allow theorems to be solved and demonstrated in a visual and interactive way. Applets for the visualizations have been created and made available on the author's website, which can be accessed using the QR code.

Keywords: : GeoGebra; Mathematics Education; Proofs Without Words; Educational Technology; Interactivity;

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é vista como uma das disciplinas com maior grau de dificuldade na Escola, e na maioria das vezes, apresentada através de fórmulas, teoremas, equações, etc, tornando-a pouco atrativa.

Uma forma de abordagem enriquecedora, tanto para discentes quanto para docentes, é a abordagem, de forma simples, para alguns teoremas clássicos e resolução de problemas através do software de geometria dinâmica GeoGebra.

Esse software é uma ferramenta digital que agrega Geometria, Álgebra e Cálculo, permitindo visualizações e interações com os conceitos matemáticos de maneira dinâmica e intuitiva.

Segundo Arzarello et al. (2012):

> "O GeoGebra tem se destacado como uma ferramenta eficaz para o ensino e a aprendizagem da matemática, pois facilita a visualização de conceitos complexos e promove a interatividade, elementos essenciais para engajar os alunos e facilitar a compreensão."

A técnica de demonstrações e resoluções sem palavras, também conhecida como *"proofs without words"* (PWW), é uma abordagem que apresenta teoremas e soluções matemáticas através de diagramas e visualizações, dispensando a necessidade de explicações verbais ou escritas detalhadas.

Como defende Nelsen (1993):

> "Esse método pode ser extremamente poderoso, pois permite que os alunos compreendam a essência de um conceito ou teorema através de uma visualização direta, que muitas vezes é mais intuitiva do que uma explicação verbal ou textual.

No contexto educacional, essa abordagem tem o potencial de tornar o Ensino da Matemática mais acessível e menos intimidador, especialmente para quem tem dificuldades com a linguagem formal da matemática.

Como observa Stewart (2004):

> "A visualização é uma ferramenta poderosa no ensino da matemática, pois permite que os alunos façam conexões entre os conceitos abstratos e suas representações visuais, facilitando a compreensão e a retenção do conteúdo."

O GeoGebra, é uma plataforma que facilita a implementação dessa técnica, pois permite a criação de diagramas dinâmicos e interativos que podem ser manipulados pelos alunos. A interatividade proporcionada pelo GeoGebra, conforme destaca Hohenwarter et al. (2008):

> "Não apenas facilita a compreensão dos conceitos, mas também promove o engajamento ativo dos alunos no processo de aprendizagem. Ao explorar teoremas e problemas matemáticos através do GeoGebra, os alunos podem experimentar diretamente as relações matemáticas e observar os efeitos de diferentes variáveis em tempo real, o que torna o aprendizado mais concreto e significativo."

Além de abordar conceitos matemáticos, mostraremos resoluções visuais, Provas Sem Palavras (PSP) que auxiliarão na resolução dos problemas e na aplicação dos teoremas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este trabalho fundamenta-se na integração de tecnologias digitais. Como o GeoGebra pode desempenhar um papel facilitador na interpretação de teoremas e problemas matemáticos?

Através da combinação de demonstrações sem palavras e da interatividade proporcionada pelo GeoGebra. A proposta é criar um ambiente de aprendizagem onde os alunos possam explorar e compreender conceitos matemáticos de forma mais profunda e intuitiva. Esta abordagem, além de potencialmente aumentar a motivação dos alunos, pode contribuir para a superação das dificuldades tradicionais do Ensino de Matemática e, consequentemente, para a redução da evasão escolar.

2.1 O Papel das Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática

O avanço das tecnologias digitais nas últimas décadas trouxe novas possibilidades para o Ensino da Matemática. Ferramentas digitais têm se destacado por sua capacidade de integrar diferentes áreas da Matemática (Geometria, Algebra, Cálculo) em uma única plataforma, permitindo a criação de representações dinâmicas e interativas (Hohenwarter & Lavicza, 2008).

Segundo Mishra e Koehler (2006), o uso eficaz de tecnologias no ensino depende de uma integração equilibrada entre conteúdo, pedagogia e tecnologia, conhecida como o modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge).

O GeoGebra, quando integrado de maneira adequada ao currículo, pode auxiliar os professores a criar ambientes de aprendizagem onde os alunos não apenas aprendam Matemática, mas façam Matemática, desenvolvendo suas próprias soluções e entendendo os processos subjacentes de maneira mais profunda.

2.2 Educação Matemática e o Desafio da Abstração

A educação matemática tem enfrentado desafios significativos ao longo dos anos, especialmente em relação à abstração dos conceitos e à maneira tradicional de ensinar.

Como destaca D'Ambrósio (2008):

> "A Matemática, muitas vezes, é apresentada de maneira descontextualizada, o que dificulta a compreensão e desmotiva os alunos. A abstração inerente aos conceitos matemáticos, embora necessária, pode se tornar uma barreira quando não há uma conexão clara com a realidade dos alunos ou quando a metodologia de ensino não facilita a visualização e a experimentação desses conceitos."

A prova sem palavras é uma ferramenta que permite a imaginação da resposta ou demonstração antes mesmo de uma prova real. Nesse sentido, o uso de tecnologias que permitam a visualização dinâmica, como o GeoGebra, torna-se fundamental.

2.3 O Papel da Intuição na Matemática

A intuição é frequentemente vista como uma ferramenta para a descoberta e a compreensão de conceitos. Desempenhando um papel fundamental na produção do conhecimento, especialmente no processo de formulação de conjecturas e na exploração de novos conceitos. A intuição matemática envolve uma compreensão imediata de padrões e relações, frequentemente antes de uma formalização rigorosa.

George Pólya (1945) discute como a intuição desempenha um papel na resolução de problemas matemáticos. Ele sugere que a intuição é um produto da experiência e do conhecimento prévio, e pode ser aprimorada através da prática e do estudo.

Henri Poincaré (1905) também reflete sobre o papel da intuição na Matemática e na Ciência, destacando que muitas descobertas são feitas através de insights intuitivos, onde a intuição é a base da criação de novas teorias e a fonte de inspiração para descobertas. Em seu livro **La science et l'hypothèse**, destacou:

> "A intuição é o que nos permite adivinhar a verdade, ou pelo menos uma parte dela, antes de termos uma demonstração rigorosa. É como uma iluminação súbita que nos guia no processo de descoberta matemática."

As demonstrações visuais, como gráficos, animações ou representações geométricas, podem ilustrar afirmações matemáticas de maneira mais acessível, contribuindo para a desconstrução da percepção de complexidade. Ao tornar visível e tangível o que, de outra forma, seria abstrato, essas demonstrações facilitam a compreensão intuitiva dos conceitos. Por exemplo, a representação visual de um teorema geométrico pode permitir que os alunos “vejam”a verdade por trás da afirmação, sem depender exclusivamente de provas formais. Isso não só reduz a complexidade percebida do conceito, como também, fortalece a intuição matemática, onde o aluno pode associar o conceito abstrato a uma imagem concreta.

2.4 Demonstrações e Resoluções Sem Palavras

No artigo **“Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra”** (MATHIAS, C.; ALENCAR, H; LEIVAS, J.), encontramos uma definição para as “Provas Sem Palavras”(PSP).

Segundo Alsina e Nelsen (2012):

> “Demonstrações visuais ou provas sem palavras (do inglês Proofs Without Words - PWW) são imagens ou esquemas que auxiliam a entender por que uma afirmação matemática específica pode ser verdadeira, e a perceber como começar a provar que tal afirmação é válida”.

A técnica de demonstrações sem palavras *(proofs without words)* é uma abordagem pedagógica que utiliza representações visuais para demonstrar teoremas matemáticos ou resolver problemas sem o uso de explicações verbais ou textuais detalhadas.

Nelsen (1993) argumenta que:

> “As provas sem palavras são poderosas porque permitem que os alunos compreendam a essência de um conceito matemático através de uma imagem ou diagrama, muitas vezes de forma mais intuitiva do que através de uma demonstração algébrica tradicional”.

Esse método é especialmente útil em ambientes de ensino onde os alunos enfrentam dificuldades com a linguagem simbólica da Matemática. As demonstrações sem palavras promovem a aprendizagem visual e exploratória, permitindo que os alunos façam conexões entre diferentes áreas da Matemática e vejam de forma mais concreta (Stewart, 2004).

Quando combinadas com o uso do GeoGebra, essas demonstrações se tornam ainda mais eficazes, pois o software permite a manipulação dos diagramas em tempo real, promovendo uma compreensão mais profunda e dinâmica dos conceitos.

2.5 O GeoGebra

O GeoGebra é um software com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de Matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos. Tornando-se cada vez mais popular no Ensino de Matemática, não apenas por sua versatilidade, mas também por seu potencial de transformar a maneira como os conceitos matemáticos são ensinados e aprendidos.

Como destacam Arzarello et al. (2012):

> "O GeoGebra permite a criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos, onde os alunos podem explorar propriedades geométricas e algébricas simultaneamente, observando como pequenas alterações em um parâmetro podem influenciar o comportamento geral de uma função ou forma."

Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo foi quem idealizou o projeto do software GeoGebra em 2001.

Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial www.geogebra.org e instalado em computadores, tablets e celulares com sistemas operacionais diversos.

Entretanto, apesar das suas vantagens, o uso do GeoGebra também apresenta desafios. A integração eficaz da tecnologia na sala de aula requer não apenas familiaridade com o software, mas também uma mudança na abordagem pedagógica do professor. Segundo Hohenwarter e Lavicza (2008), o sucesso no uso do GeoGebra depende da formação contínua dos professores e da sua disposição para adotar métodos de ensino mais interativos e centrados no aluno.

As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

Estas são as possibilidades que se apresentam no software GeoGebra.

Algumas características importantes de acordo com a Revista do Instituto GeoGebra da Pontifícia Universidade Católica (PUC):

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
- Software gratuito e de código aberto.

2.6 Interface GeoGebra 5

Utilizaremos a versão GeoGebra 5 (Figura 2.1) para as criações.

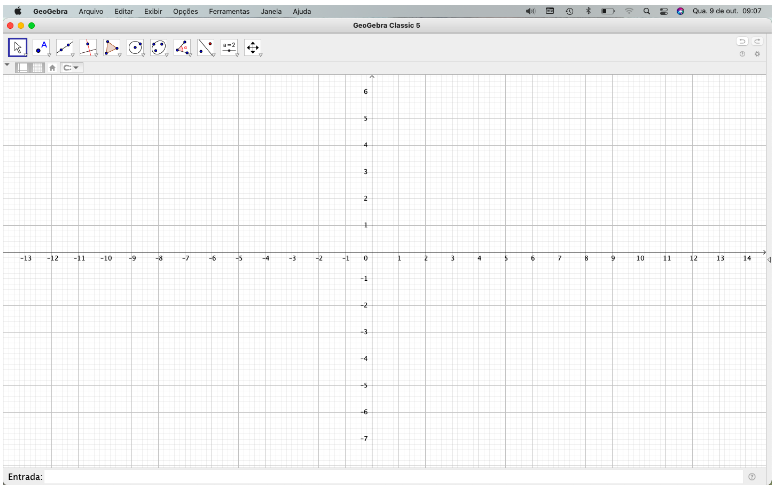


Figura 2.1: Interface padrão do GeoGebra 5

2.7 Página do autor

Todos os Apletes criados para esse trabalhos estão disponíveis na página do autor no ambiente GeoGebra online (Figura 2.2).

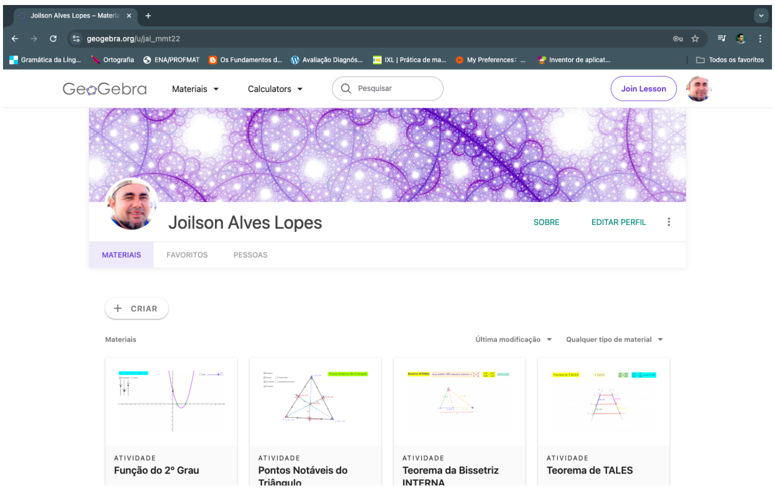


Figura 2.2: Página do autor, GeoGebra
https://www.geogebra.org/u/jal_mmt22

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A Matemática, frequentemente considerada uma das disciplinas mais desafiadoras no ambiente escolar, enfrenta o desafio de engajar os alunos em um aprendizado significativo.

A apresentação tradicional da Matemática, centrada em fórmulas, teoremas e equações, muitas vezes resulta em desinteresse e evasão escolar. Nesse contexto, a utilização de ferramentas tecnológicas, como o software de geometria dinâmica GeoGebra, surge como uma alternativa promissora para transformar a experiência de ensino e aprendizagem.

3.1 Abordagem Metodológica

A pesquisa desenvolvida é classificada como qualitativa, uma vez que busca compreender, interpretar e interagir com o GeoGebra. Essa abordagem permite uma análise mais profunda das percepções e reações em relação ao uso da tecnologia no Ensino da Matemática. Além disso, investigar novas metodologias de ensino que utilizam recursos tecnológicos para abordar teoremas e problemas matemáticos de forma visual e intuitiva.

O uso de "provas sem palavras" é uma estratégia central, permitindo a compreensão de conceitos matemáticos através de visualizações diretas.

O principal objetivo é mostrar como o software de geometria dinâmica GeoGebra pode facilitar a compreensão e a interpretação de teoremas e questões matemáticas, tornando o aprendizado mais acessível e engajador.

Durante a pesquisa, foram criados Applets no GeoGebra que ilustram teoremas e resoluções de problemas. Servindo como ferramentas didáticas para facilitar a aprendizagem.

As criações desenvolvidas durante a pesquisa estarão dispiníveis para consulta na página do autor 2.2 , permitindo que outros tenham acesso aos recursos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Educação Matemática enfrenta desafios significativos, especialmente no que diz respeito à compreensão de conceitos abstratos.

Nesse contexto, a pesquisa propõe uma abordagem inovadora ao utilizar o GeoGebra como uma ferramenta de ensino. Ao integrar a visualização dinâmica e a interatividade, o software não apenas facilita a compreensão de teoremas, mas também transforma a experiência de aprendizagem, tornando-a mais acessível e envolvente.

A seguir, apresentaremos as demonstrações de teoremas clássicos e resoluções de questões de diferentes níveis de ensino, evidenciando a eficácia dessa ferramenta na promoção de um Ensino de Matemática mais atrativo e significativo.

4.1 Teorema de Pitágoras

4.1.1 Um breve histórico

Pitágoras foi um filósofo e matemático grego antigo, famoso por seu teorema, mas sua história vai além disso. Nasceu em Samos por volta de 570 a.C. e fundou uma escola de pensamento em Crotona, na Magna Grécia. Ele acreditava na harmonia do cosmos, ensinando que tudo seguia padrões matemáticos e numéricos. Pitágoras também foi pioneiro em geometria e aritmética, influenciando profundamente o pensamento filosófico e científico ocidental.

Pitágoras é conhecido principalmente pelo teorema que leva seu nome, que estabelece a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Além disso, ele fez contribuições significativas para a teoria dos números, explorando propriedades dos números inteiros, como números primos e números perfeitos. Pitágoras também desenvolveu uma abordagem geométrica para entender as relações entre grandezas numéricas, introduzindo assim o conceito de proporção. Sua escola, conhecida como a Escola Pitagórica, desempenhou um papel crucial na História da Matemática, influenciando gerações posteriores de matemáticos e filósofos.

4.1.2 Proposição 47 do livro I de Euclides (Os Elementos).

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

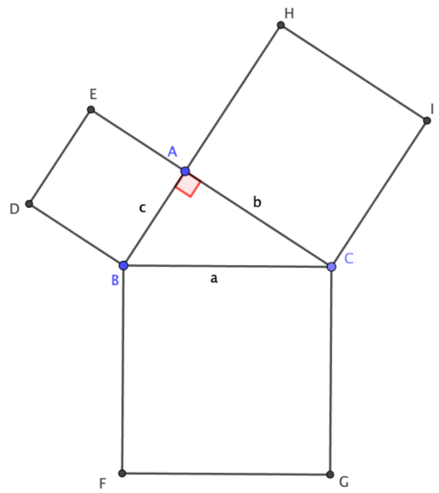


Figura 4.1: Teorema de Pitágoras

Traçando um segmento de reta paralelo a $\overline{BF}$ passando por A, intersecta os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$ nos pontos K e J, respectivamente.

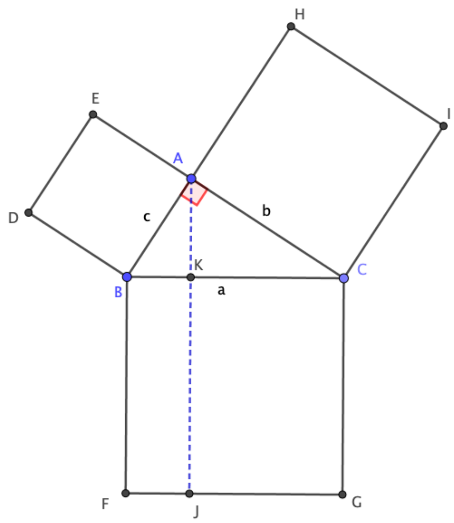


Figura 4.2: Reta paralelo a $\overline{BF}$

Observe que o triângulo BFK tem metade da área do retângulo $BFJK$, perceba também que o triângulo BFA tem a mesma área do triângulo BFK, pois ambos tem a mesma base BF e altura BK, já que $BF \parallel JA$.

Por outro lado, os triângulos DBC e ABF são congruentes pelo caso LAL. pois $DB = AB = c$; $D\hat{B}C = A\hat{B}F = 90 + \beta$; $BF = BC = a$

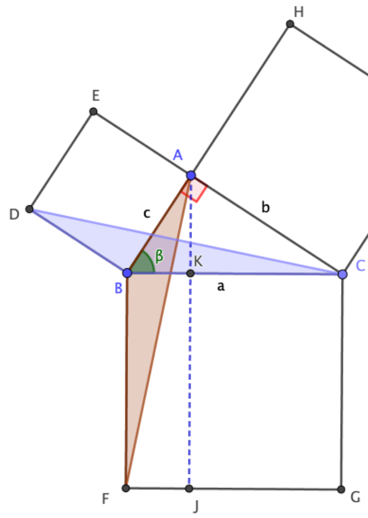


Figura 4.3: Triângulos congruentes

Daí, como são congruentes, os triângulos DBC e ABF tem mesma área.

Temos que, $BD \parallel EC$, com isso os triângulos DBC e DBA tem mesma área, pois ambos tem base BD e altura BA e que o triângulo DBA tem metade da área do quadrado $ABDE$.

Concluímos por transitividade que a metade da área do retângulo $BFJK$ é igual a metade da área do quadrado $ABDE$.

Logo, a área do retângulo $BFJK$ é igual a área do quadrado $ABDE$.

De maneira análoga podemos concluir que a área do retângulo $CGJK$ é igual a área do quadrado $ACHI$.

Portanto o quadrado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

4.1.3 Apresentação do teorema de Pitágoras

Demonstração do teorema baseada no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

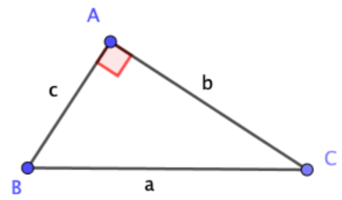


Figura 4.4: Triângulo retângulo

$$a^2 = b^2 + c^2$$

4.1.4 Relações métricas no triângulo retângulo

Utilizaremos as relações métricas no triângulo retângulo para fazer a demonstração. Seja o triângulo ABC retângulo em A:

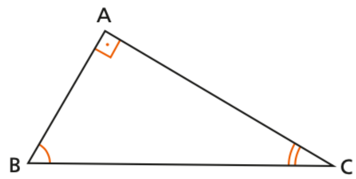


Figura 4.5: Triângulo ABC

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulos ABC.

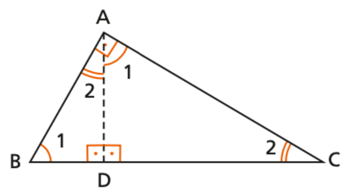


Figura 4.6: Altura relativa à hipotenusa

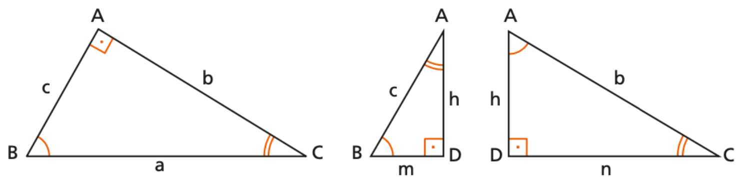
De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na figura 4.6.

$$\hat{B} \equiv\ 1 \text{ (complementos de } \hat{C}) \text{ e } \hat{C} \equiv\ 2 \text{ (complementos de } \hat{B})$$

temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

Com base nas semelhanças dos triângulos citados e com os elementos já caracterizados, temos:



$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \quad \Rightarrow \quad b \cdot c = a \cdot h \\ \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad c^2 = a \cdot m \\ \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad c \cdot h = b \cdot m \end{cases}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a \cdot n \\ \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \quad \Rightarrow \quad b \cdot c = a \cdot h \\ \\ \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \quad \Rightarrow \quad b \cdot h = c \cdot n \end{cases}$$

$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} \quad \Rightarrow \quad b \cdot h = c \cdot n \\ \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} \quad \Rightarrow \quad c \cdot h = b \cdot m \\ \\ \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \quad \Rightarrow \quad h^2 = m \cdot n \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

(1) $b^2 = a \cdot n$ (2) $c^2 = a \cdot m$ (3) $h^2 = m \cdot n$; (4) $b \cdot c = a \cdot h$ (5) $b \cdot h = c \cdot n$ (6) $c \cdot h = b \cdot m$

4.1.5 Prova do teorema de Pitágoras

Faremos a demonstração com base nas relações métricas no triângulo retângulo 4.4.

Temos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= a \cdot n \\ c^2 &= a \cdot m \end{aligned}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n+m)$$

Como $(n+m) = a$, concluimos que:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

4.1.6 Prova sem palavras do teorema de Pitágoras

O link na Figura 4.7 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

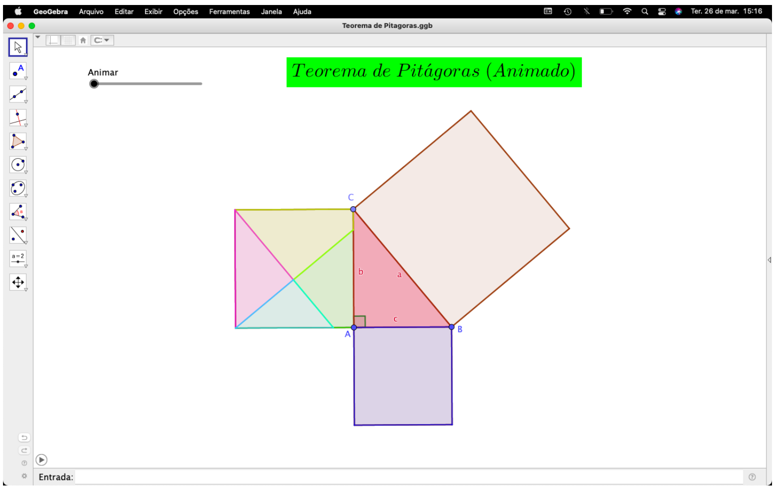


Figura 4.7: Teorema de Pitágoras
https://www.geogebra.org/m/wws8duk7

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante manualmente ajustando os valores;

2. Clicar no ícone play no canto inferior esquerdo:

4.2 Teorema de Tales

Demonstração baseada no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas, é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

$$\begin{array}{lcc} \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{CD} \textit{ são dois segmentos de uma transversal, e} & & \\ \overline{A'B'} \text{ e } \overline{C'D'} \textit{ são os respectivos correspondentes da outra} & \Rightarrow & \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \end{array}$$

4.2.1 Prova do teorema de Tales

Demonstração:

Caso 01: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

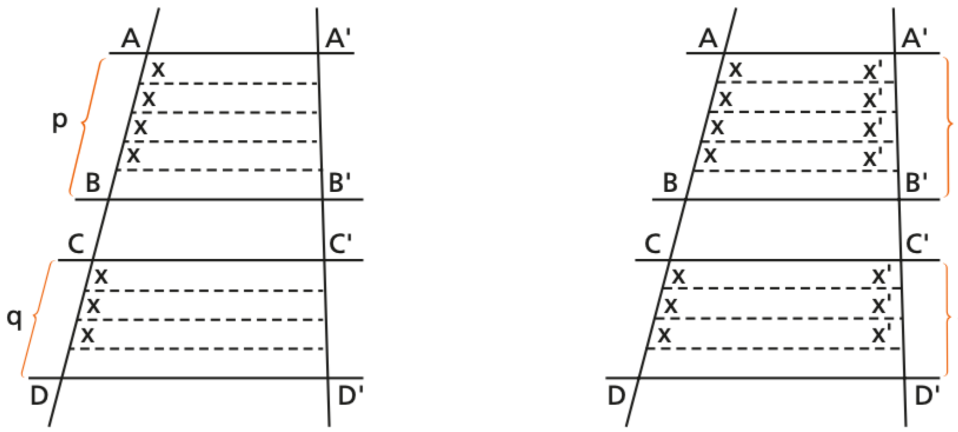


Figura 4.8: segmentos comensuráveis.

Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{AB} & = & px \\ \overline{CD} & = & qx \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \tag{4.1}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (Figura 4.8) e aplicando a propriedade anterior, temos.

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{A'B} & = & px' \\ \overline{C'D'} & = & qx' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D}} = \frac{p}{q} \tag{4.2}$$

Comparando 4.1 e 4.2, temos:

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{CD}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'B'}}}{\overline{\mathbf{C'D'}}}$$

Caso 02: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomamos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um certo número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$

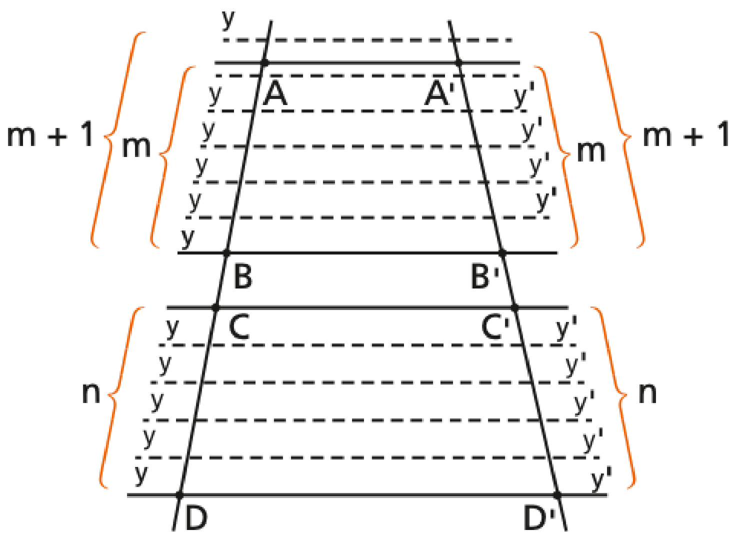


Figura 4.9: Segmentos Incomensuráveis.

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro m de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m+1)y$$

Operando com as relações acima.

$$\left.\begin{array}{lll} m \cdot y < & \overline{AB} < & (m+1)y \\ n \cdot y = & \overline{CD} = & n \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \tag{4.3}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior.

$$\overline{C'D} = n \cdot y'$$

$$m \cdot y < \overline{A'B'} < (m+1)y$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left.\begin{array}{rcl} m \cdot y' < & \overline{A'B'} < & (m+1)y' \\ n \cdot y' = & \overline{CD} = & n \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \tag{4.4}$$

Ora, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (4.3), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4.4).

Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{CD}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'B'}}}{\overline{\mathbf{C'D'}}}$$

4.2.2 Prova sem palavras do teorema de Tales

O link na Figura 4.10 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

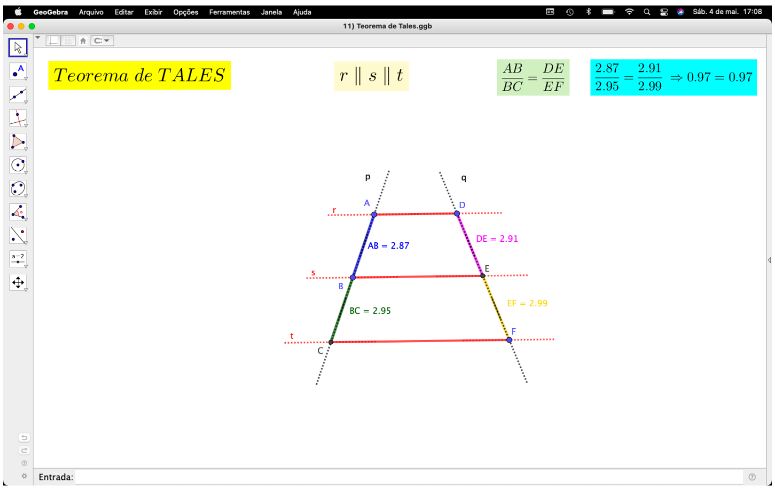


Figura 4.10: Teorema de Tales
https://www.geogebra.org/m/rfbz6buk

Para visualizar a animação:

1. Mover os pontos em **AZUL**, (A), (B), (D), (F) manualmente ajustando os valores;

4.3 Teorema da Bissetriz Interna

Demonstração baseada no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme a Figura 4.11), $DB = x$ e $DC = y$. Temos:

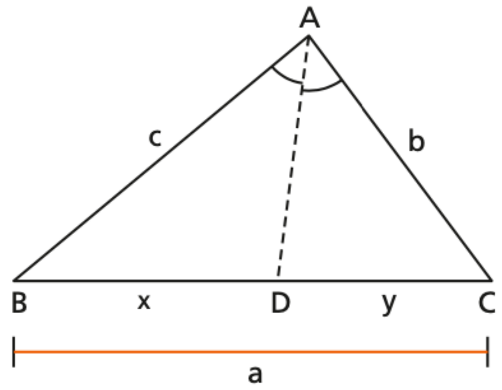
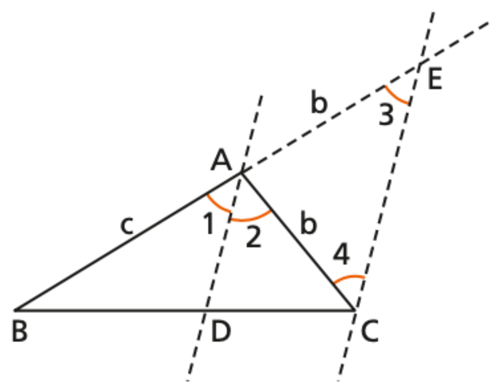


Figura 4.11: Bissetriz Interna

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ \overline{AD} \textit{ bissetriz interna do } \triangle ABC & \Rightarrow & \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b} \end{array}$$

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$)



Fazendo:

$$\begin{cases} B\hat{A}D &= \hat{1} \\ D\hat{A}C &= \hat{2} \\ A\hat{E}C &= \hat{3} \\ A\hat{C}E &= \hat{4} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{3} \\ \text{(correspondentes)} \\ \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{4} \\ \text{(Alternos internos)} \end{array}$$

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$,decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

De $\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow \triangle ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Rightarrow AE \equiv AE = b$

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales 4.2.

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \text{ ,ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

4.3.1 PSP do teorema da Bissetriz Interna.

O link na Figura 4.12 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

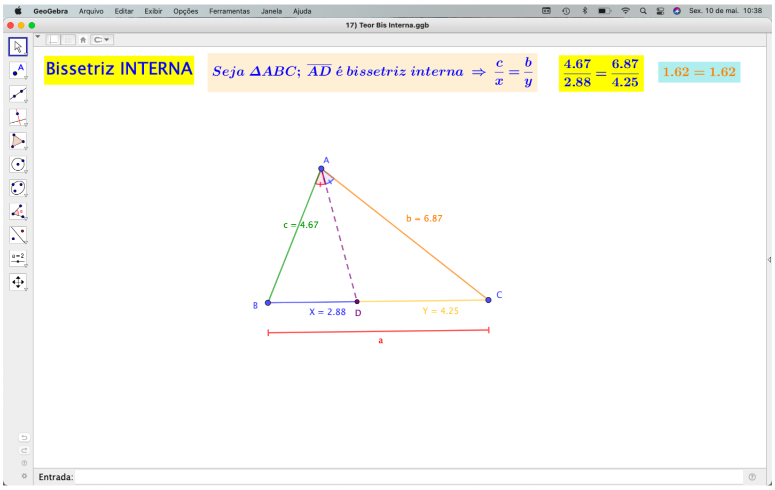


Figura 4.12: Animação do teorema da Bissetriz interna
https://www.geogebra.org/m/rgxcpxsg

Para visualizar a animação:

1. Mover os pontos (A), (B) e (C) manualmente ajustando os valores;
2. Observar a razão $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$;

4.4 Teorema do Ângulo Inscrito na Circunferência

Faremos a resolução da Questão 2 do Exame Nacional de Qualificação do Profmat (ENQ2019.2)

O teorema do ângulo inscrito afirma que se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ correspondente.

Prove o teorema do ângulo inscrito no caso em que o ângulo $\widehat{BAC}$ contém o centro O em seu interior.

4.4.1 Prova do teorema do ângulo inscrito

Caso em que o ângulo $\widehat{BAC}$ contém o centro O em seu interior.

Seja P o de intersecção reta $\overrightarrow{AO}$ com a circunferência.

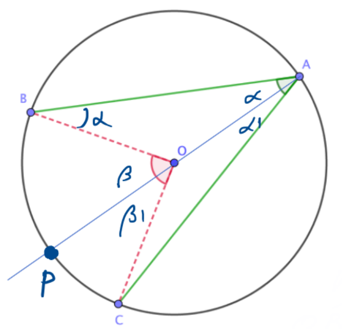


Figura 4.13: Ângulo inscrito na circunferência

Chamamos:

$$\begin{cases} O\widehat{A}B &= \alpha \\ P\widehat{O}B &= \beta \\ O\widehat{A}C &= \alpha_1 \\ P\widehat{O}C &= \beta_1 \end{cases}$$

Temos que $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, logo o triângulo OAB é isósceles. Desse fato $O\widehat{B}A = \alpha$.

Como β é ângulo externo ao triângulo AOB, $\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow 2\alpha$

De maneira análoga podemos concluir que $\beta_1 = 2\alpha_1$, pois o triângulo AOC também é isósceles.

Mas $B\widehat{O}C = \beta + \beta_1 \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha_1 \Rightarrow 2(\alpha + \alpha_1)$

Por outro lado, temos que $B\widehat{A}C = \alpha + \alpha_1$

Então $B\widehat{O}C = 2(B\widehat{A}C)$

Portanto $(B\widehat{A}C) = \dfrac{1}{2}(B\widehat{O}C)$

4.4.2 Prova sem palavras do teorema do ângulo inscrito na circunferência

O link na Figura 4.14 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

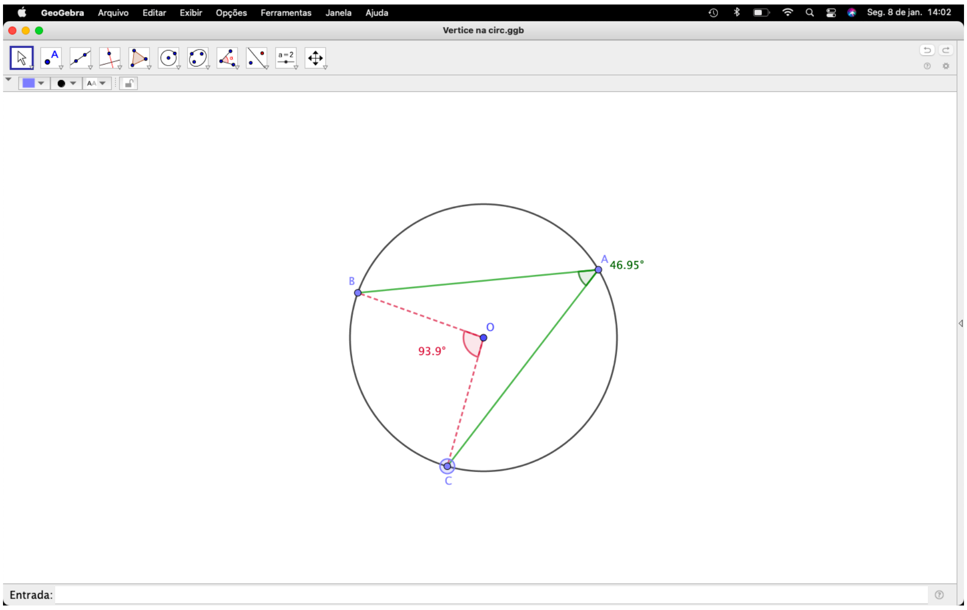


Figura 4.14: Animação do teorema do ângulo inscrito na circunferência https://www.geogebra.org/m/mechg3az

Para visualizar a animação:

1. Mover os pontos (A), (B) e (C) manualmente ajustando os valores;
2. Comparar os valores dos ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{A}C$;

4.5 Base Média do Triângulo

Baseado no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:

1) *Ele é paralelo ao terceiro lado;*

2) *Ele é metade do terceiro lado.*

Seja ABC o triângulo.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ (\overline{AM} \equiv \overline{MB}, \overline{AN} \equiv \overline{NC}) & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} 1)\overline{MN} & \parallel & \overline{BC} \\ 2)\overline{MN} & = & \dfrac{1}{2}\overline{BC} \end{array} \right. \end{array}$$

4.5.1 Demonstração

Conduzimos por C uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e seja D o ponto de interseção com a reta $\overleftrightarrow{MN}$: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, como na Figura 4.15.

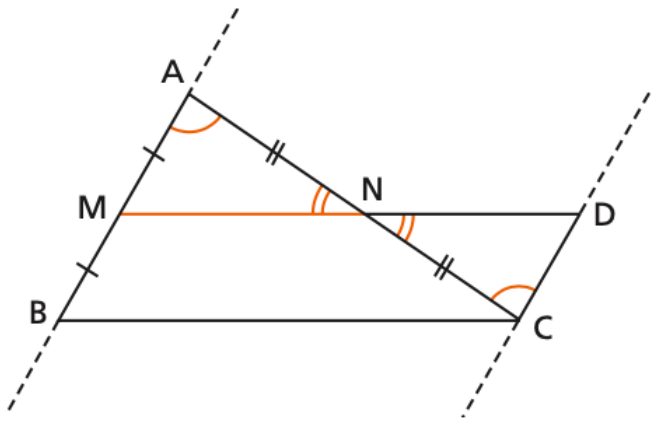


Figura 4.15: Base média do triângulo

De $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}$ pois são alternos internos.

Como $(\hat{C} = \hat{A}, \overline{AN} \equiv \overline{CN}, \hat{N}\ o.p.v) \stackrel{ALA}{\Rightarrow} (\Delta AMN \equiv \Delta CDN)$

Logo $\overline{CD} \equiv \overline{AM} \Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$.

Temos por construção que $\overline{CD} \parallel \overline{MB}$ e como $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$,

Então o quadrilátero $MBCD$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{MD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

E ainda:

$$\left. \begin{array}{rcc} \Delta AMN \equiv \Delta CDN & \Rightarrow & \overline{MN} \equiv \overline{DN} \\ MBCD\ \textit{é paralelogramo} & \Rightarrow & \overline{MD} \parallel \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\overline{MN} = \overline{BC}.$$

$$\text{Portanto } \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

4.5.2 Prova sem palavras da base média do triângulo

O link na Figura 4.16 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

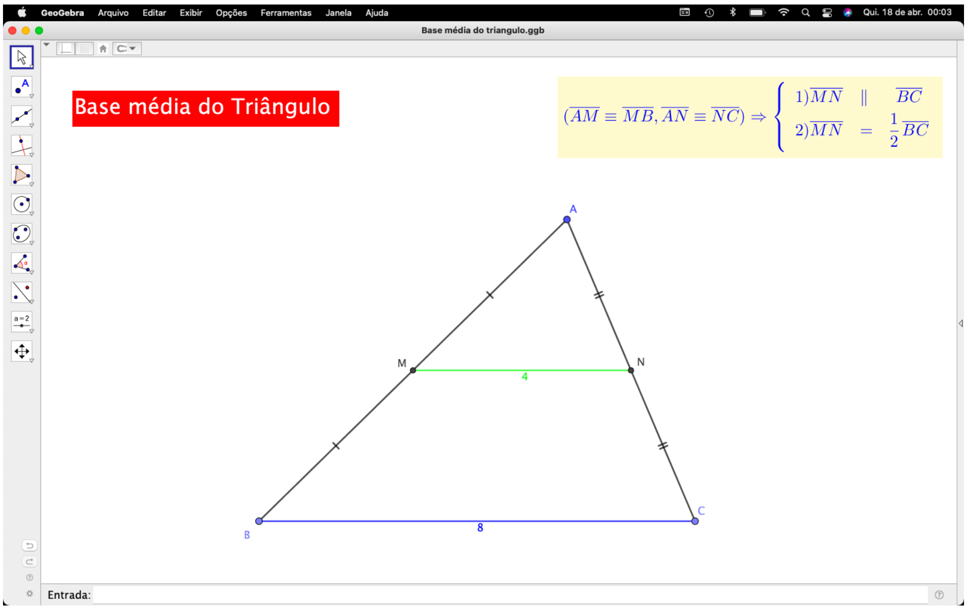


Figura 4.16: Animação da base média do triângulo
https://www.geogebra.org/m/d4v8r3ys

1. Mover o ponto (A) em qualquer direção:
2. Mover os pontos (B) e (C) manualmente na horizontal ajustando os valores;
3. Fazer a análise com o comprimento dos segmentos de reta verde e azul;

4.6 Razão entre áreas de figuras semelhantes

Demonstração baseada no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

4.6.1 Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes

Considere os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ (Figura 4.17).

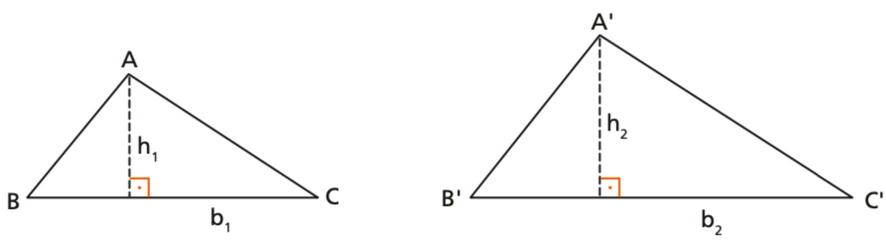


Figura 4.17: Triângulos semelhantes

Chamamos:

$$\begin{cases} \textit{Área do triângulo } \Delta ABC & = S_1 & = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{2} \\ \\ \textit{Área do triângulo } \Delta A'B'C' & = S_2 & = \dfrac{b_2 \cdot h_2}{2} \end{cases}$$

Como: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = k$ (Razão de semelhança)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

4.6.2 Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes

Considere os polígonos $ABCD...MN$ e $A'B'C'D'...M'N'$ (Figura 4.18).

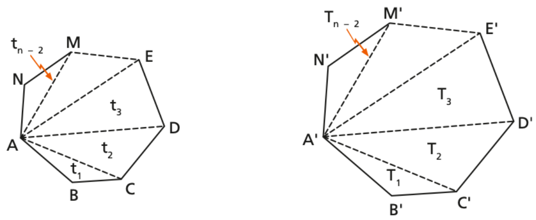


Figura 4.18: Polígonos semelhantes

Sejam:

$$\begin{cases} \text{Área do polígono } ABCD...MN & = & S_1 \\ \text{Área do polígono } A'B'C'D'...M'N' & = & S_2 \end{cases}$$

Como:

$ABCD...MN \sim A'B'C'D'...M'N'$.

Basta fazer triângulos como na (Figura 4.18) e observar que:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ e $\Delta ACD \sim \Delta A'C'D'$ e ... e $\Delta AFG \sim \Delta A'F'G'$ e ... e $\Delta AMN \sim \Delta A'M'N' \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \cdots = \dfrac{MN}{M'N'} = k$ (Razão de semelhança)

Áreas dos triângulos que compõem esses polígonos:

Área $\Delta ABC = t_1$, Área $\Delta ACD = t_2, \cdots$, Área $\Delta AMN = t_{n-2}$

Área $\Delta A'B'C' = T_1$, Área $\Delta A'C'D' = T_2, \cdots$, Área $\Delta A'M'N' = T_{n-2}$

Foi provado no item anterior que:
$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \ \Rightarrow \ t_i = k^2 \cdot T_i$ para $i = 1, 2, 3, \cdots (n-2)$
Então:
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{(n-2)}}{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{(n-2)}}$
Fazendo a substituição. Temos:
$\frac{k^2 \cdot T_1 + k^2 \cdot T_2 + k^2 \cdot T_3 + \cdots + k^2 \cdot T_{(n-2)}}{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{(n-2)}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$
Conclusão: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

4.6.3 PSP entre áreas de polígonos regulares semelhantes

O link na Figura 4.19 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

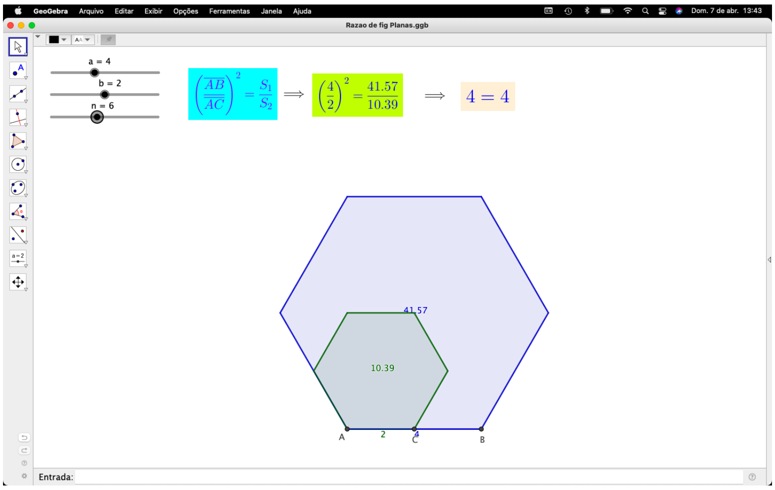


Figura 4.19: Razão entre polígonos semelhantes
https://www.geogebra.org/m/tfvqw5kd

Para visualizar a animação:

1. Manipular o controle deslizante (a) para aumentar ou diminuir o lado do Polígono azul;
2. Manipular o controle deslizante (b) para aumentar ou diminuir o lado do Polígono verde;
3. Manipular o controle deslizante (n) para aumentar ou diminuir o número de lados dos dois Polígonos;

4.7 Pontos Notáveis no Triângulo

4.7.1 Teorema de Ceva

Dado um triângulo ABC, com pontos D, E e F situados nos lados BC, CA e AB respectivamente, as cevianas são concorrentes (ou seja, se encontram em um único ponto) se, e somente se:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

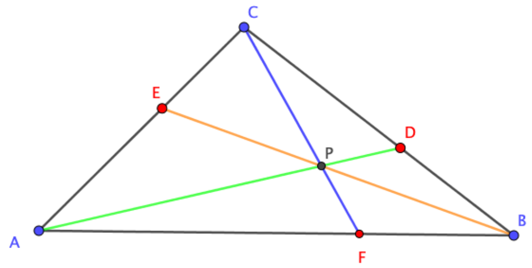


Figura 4.20: Encontro das cevianas

Para a demonstração, vamos assumir que as cevianas AD, BE e CF são concorrentes em um ponto (P).

Utilizaremos as áreas dos subtriângulos que aparecem dentro do triângulo ABC .

A área de um triângulo é proporcional à base e à altura. Assim, as razões das áreas dos subtriângulos com uma mesma altura em relação a um vértice são proporcionais às razões das bases correspondentes. Usaremos este fato para relacionar as áreas.

Seja $[XYZ]$ a área do triângulo XYZ.

A razão das áreas dos triângulos BPD e CPD é:
$$\frac{[BPD]}{[CPD]} = \frac{BD}{DC}$$
A razão das áreas dos triângulos CPE e APE é:
$$\frac{[CPE]}{[APE]} = \frac{CE}{EA}$$
A razão das áreas dos triângulos APF e BPF é:
$$\frac{[APF]}{[BPF]} = \frac{AF}{FB}$$
Agora, multiplicando as razões:
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{[BPD]}{[CPD]} \cdot \frac{[CPE]}{[APE]} \cdot \frac{[APF]}{[BPF]}$$

As áreas se cancelam no produto, resultando em:
$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$
Portanto, mostramos que, se as cevianas são concorrentes, a relação do Teorema de Ceva é satisfeita.

A recíproca pode ser provada de forma análoga, e assim concluímos que as cevianas são concorrentes se, e somente se, a relação $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ for verdadeira.

4.7.2 Baricentro — Medianas

Baseado no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ (\overline{AM}_1, \overline{BM}_2, \overline{CM}_3)\ \textit{são medianas} & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1)\overline{AM}_1 \cap \overline{BM}_2 \cap \overline{CM}_3 = \{G\} \\ 2)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{AG} & = & 2 \cdot \overline{GM}_1 \\ \overline{BG} & = & 2 \cdot \overline{GM}_2 \\ \overline{CG} & = & 2 \cdot \overline{GM}_3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}$$

Demonstração:

Seja X o ponto tal que: $\overline{BM}_2 \cap \overline{CM}_3 = \{X\}$

Considerando os pontos médios D de $\overline{BX}$ e E de $\overline{CX}$, temos o que segue:

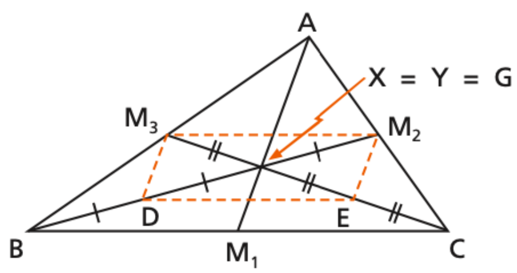


Figura 4.21: Medianas

01) No ΔABC, temos que:

$(\overline{AM}_3 \equiv \overline{BM}_3$ e $\overline{AM}_2 \equiv \overline{CM}_2)$

Pela base média do triângulo 4.5 temos, $\overline{M_2M_3} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{M_2M_3} = \frac{\overline{BC}}{2}$

02) No ΔXBC, temos que:

$(\overline{XD} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{XE} \equiv \overline{CE})$

Temos, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2}$

De 01) e 02) concluimos que $\overline{M_2M_3} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE}$.

Logo M_2M_3DE é um paralelogramo.

Com isso: $\begin{cases} \overline{DX} \equiv \overline{XM_2} & \Rightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} \quad (1) \\ \overline{EX} \equiv \overline{XM_3} & \Rightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} \quad (2) \end{cases}$

Logo, a mediana $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$$

Tomando-se as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y o ponto tal que:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = Y$$

De modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3} \; (3)$$
$$\overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1} \; (4)$$

De (2) e (3), decorre que $X = Y$.

Chamando este ponto $X = Y$ de G e considerando (1), (2) e (4), temos:

$$\begin{cases} \overline{AG} & = & 2 \cdot \overline{GM_1} \\ \overline{BG} & = & 2 \cdot \overline{GM_2} \\ \overline{CG} & = & 2 \cdot \overline{GM_3} \end{cases}$$

4.7.3 Baricentro — definição

O ponto de interseção das três medianas de um triângulo é o baricentro do triângulo.

G é o baricentro do ΔABC.

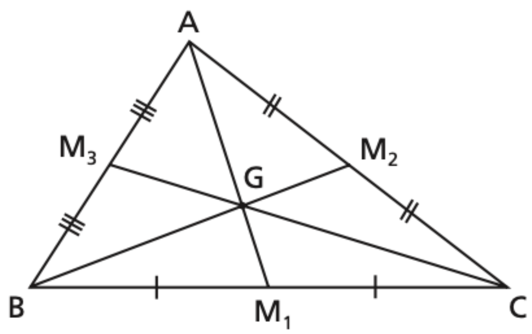


Figura 4.22: Baricentro

$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} \; = \; G$$

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

4.7.4 Incentro—Bissetrizes internas

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

Sendo o ΔABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB}$ =c:

$$\begin{array}{ccc} Hipótese & & Tese \\ (\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3})\ São\ Bisetrizes\ internas & \Rightarrow & \begin{cases} 1)\ \overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} & = \{S\} \\ 2)\ d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c} \end{cases} \end{array}$$

Demonstração:

Seja S o ponto tal que:

$\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ Temos que:

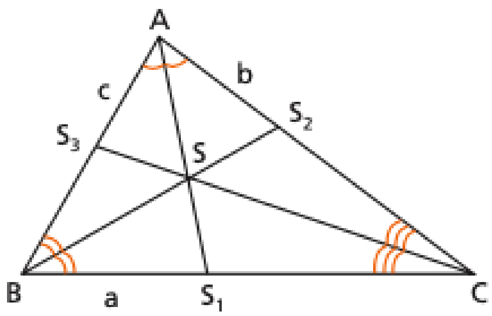


Figura 4.23: Bissetrizes

$$\left.\begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{BS_3} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS_1}$$

Logo:

$$\overline{AS_1} \cap \overline{AS_2} \cap \overline{AS_2} = \{S\} \text{ e } d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$$

4.7.5 Incentro — definição

O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é o incentro do triângulo.

S é o incentro do ΔABC.

$$\overline{AS_1} \cap \overline{AS_2} \cap \overline{AS_2} = \{S\}$$

$$d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$$

O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

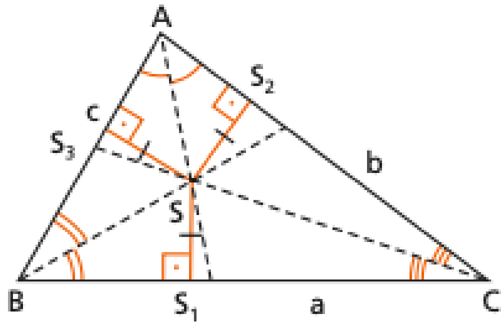


Figura 4.24: Incentro

4.7.6 Circuncentro — Mediatrizes

As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Sendo o ΔABC,

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ m_1, m_2, m_3, \textit{ mediatrizes de } \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB} & \Rightarrow & \begin{cases} 1)\ m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \\ 2)\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \end{cases} \end{array}$$

Demonstração:

$$\left. \begin{array}{l} O \ \in \ m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \ \in \ m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow O \in m_1$$

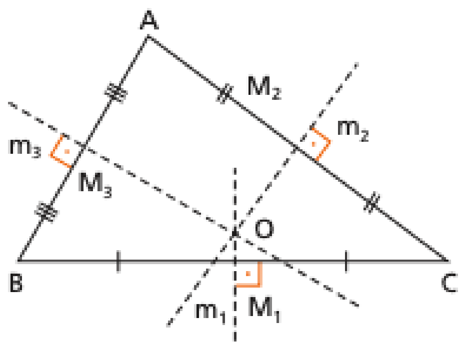


Figura 4.25: Mediatrizes

Logo.

$$m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \text{ e } \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$$

4.7.7 Circuncentro — definição

O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é o circuncentro do triângulo.

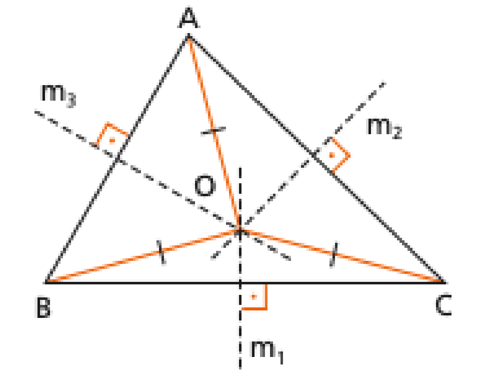


Figura 4.26: Circuncentro

O Circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

4.7.8 Ortocentro—Alturas

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

Sendo o ΔABC de alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$

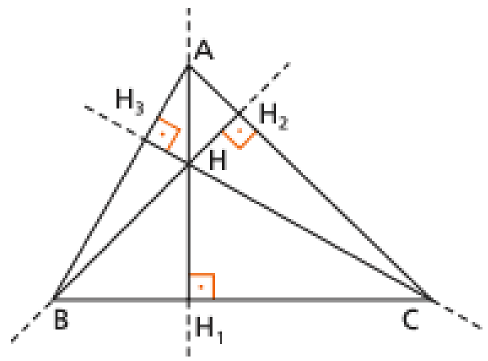


Figura 4.27: Alturas

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ \overleftrightarrow{AH_1}, \overleftrightarrow{BH_2}, \overleftrightarrow{CH_3} \textit{ retas que contêm as alturas} & \Rightarrow & \overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\} \end{array}$$

Demonstração:

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos,(Figura 4.28) obtendo o triângulo MNP.

$$\begin{array}{ccc} A \in \overline{NP} & e & \overline{NP} \parallel \overline{BC} \\ B \in \overline{MP} & e & \overline{MP} \parallel \overline{AC} \\ C \in \overline{MN} & e & \overline{MN} \parallel \overline{AB} \end{array} \quad \left. \begin{array}{lcl} APBC \text{ é paralelogramo} & \Rightarrow & \overline{NP} \parallel \overline{BC}; \\ ABCN \text{ é paralelogramo} & \Rightarrow & \overline{AN} \parallel \overline{BC}; \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ é}$$

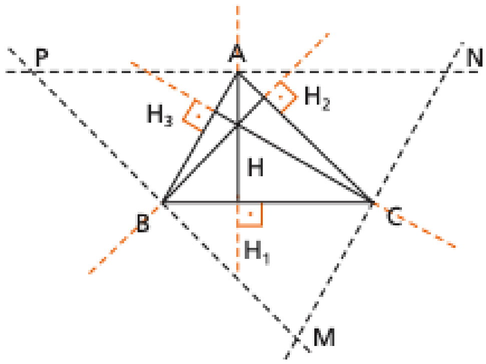


Figura 4.28: Retas paralelas aos lados

ponto médio de $\overline{NP}$ (1)

($\overleftrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC}$, $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$) $\Rightarrow \overleftrightarrow{AH_1}$ é paralelo a $\overline{NP}$ (2)

De (1) e (2), decorre que:

A reta $\overleftrightarrow{AH_1}$ é mediatriz de $\overline{NP}$.

De maneira análoga, podemos concluir que:

A reta $\overleftrightarrow{BH_2}$ é mediatriz de $\overline{MP}$.

A reta $\overleftrightarrow{CH_3}$ é mediatriz de $\overline{MN}$.

Logo, considerando o ΔMNP, as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$, $\overleftrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo interceptam-se no ponto (H).

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \text{H}$$

4.7.9 Ortocentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das retas suportes das alturas de um triângulo é o ortocentro do triângulo.

4.7.10 Ilustração dos pontos notáveis

O link na Figura 4.29 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

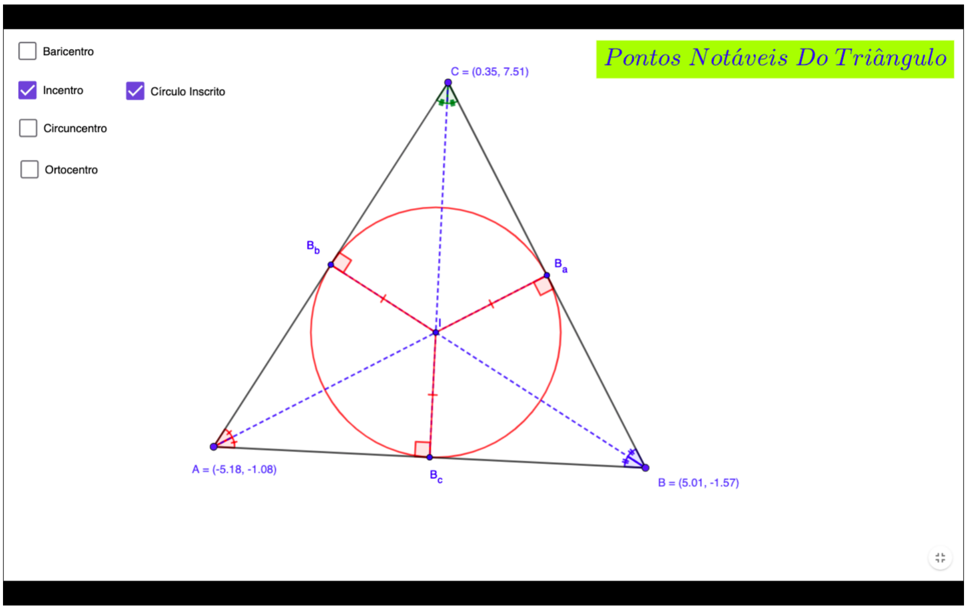


Figura 4.29: Animação dos Pontos Notáveis do Triângulo
https://www.geogebra.org/m/zrkcsfwu

Para visualizar a animação:

1. Habilitar as caixas para exibir os itens;
2. Desabilitar as caixas para exibir os itens;
3. Movimentar os pontos (A), (B) e (C) em qualquer direção;

4.8 Função Quadrática ou Função do $2°$ grau

Baseado no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 1.

Nesse item iremos abordar os pontos notáveis na construção do gráfico da parábola:

a) Zeros da função ou Raízes;

b) Concavidade;

c) Vértice;

d) Intersecção com eixo y.

4.8.1 Definição

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma função polinomial é conhecida como função do $2°$ grau, ou também como função quadrática, quando em sua lei de formação ela possui um polinômio de grau dois, ou seja, $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, em que a, b e c são números reais, e $a \neq 0$

4.8.2 Gráfico da função de $2°$ grau

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = x^2 + x$, atribuímos a **x** alguns valores, calculamos o valor correspondente de **y** para cada valor de **x** e, em seguida, ligamos os pontos obtidos:

x	y = x² + x
−3	6
−2	2
−1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$
2	6

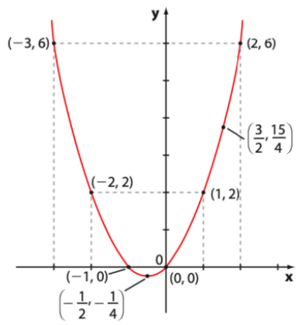


Figura 4.30: Gráfico da função $f(x) = x^2 + x$

2. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = -x^2 + 1$. Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:

x	y = −x² + 1
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8

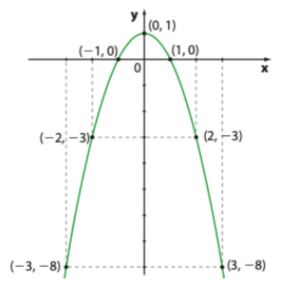


Figura 4.31: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 1$

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 2x + 4$, temos:

x	$y = x^2 - 2x + 4$
−2	12
−1	7
0	4
1	3
2	4
3	7
4	12

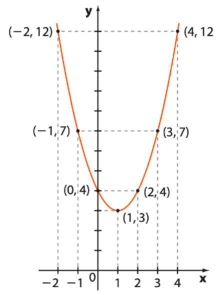


Figura 4.32: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 4$

4.8.3 Raízes ou Zeros da função de 2° grau

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$. Em outras palavras, as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções reais (se existirem) da equação do segundo grau:

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Deduziremos, a seguir, a fórmula que permite obter as raízes de uma função quadrática. Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0.$$

Colocando a em evidência.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Isolando $\frac{c}{a}$ obtém-se $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Completando o quadrado na expressão acima, adicionamos $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os membros,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Logo, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Portanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.5}$$

Essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2° grau. Também conhecida como Fórmula de Bháskara.

Veremos alguns exemplos de resolução:

1. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

   Temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$. Usando a fórmula resolutiva
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2}$
   $$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{cases}$$

2. $Dadaaf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

   Temos $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Usando o mesmo metódo.
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2}$
   $$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{cases}$$

3. $Consideref : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

   Temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$. De mesmo modo.
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$
   $$\begin{cases} x_1 & \notin \mathbb{R} \\ x_2 & \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

4.8.4 Concavidade

A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade (curvatura) voltada para "cima" ou voltada para "baixo".

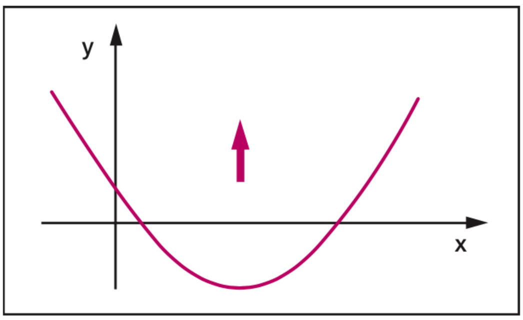


Figura 4.33: Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

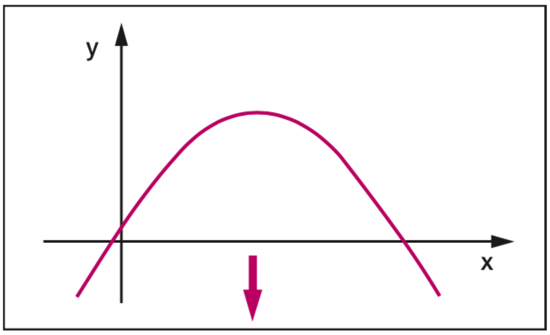


Figura 4.34: Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo

4.8.5 Quantidade de raízes

As raízes de uma função quadrática são os valores de x para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, são as abscissas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.

A quantidade de raízes de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado de discriminante.

- Se $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas:
- Se $\Delta = 0$, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla)
- Se $\Delta < 0$, não há raiz real.

Retornando os exemplos 1, 2 e 3, temos:

O gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ intersecta o eixo x nos pontos $X_1(1{,}0)$ e $X_2(5{,}0)$;

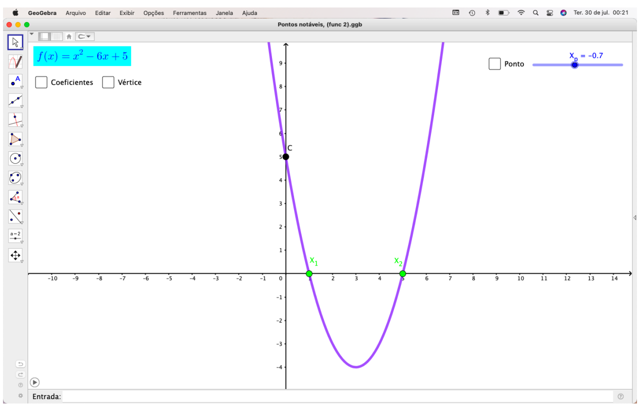


Figura 4.35: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$

O gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tangencia o eixo x no ponto $X_1(1{,}0)$;

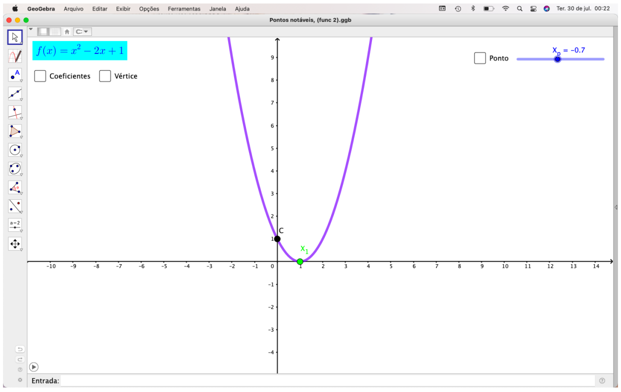


Figura 4.36: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$

O gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 2$ não intersecta o eixo x.

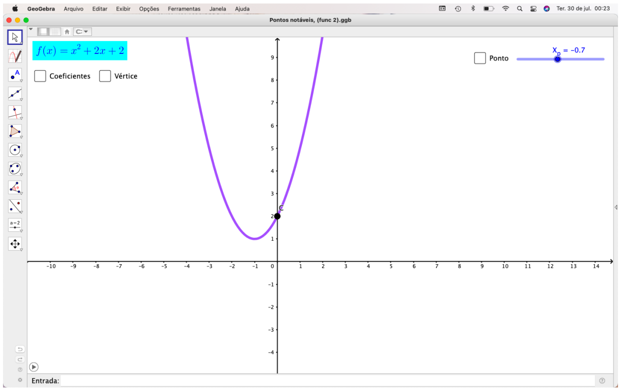


Figura 4.37: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 2$

4.8.6 Coordenadas do vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do vértice da parábola (V).

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e V é ponto de mínimo.

Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e V é ponto de máximo.

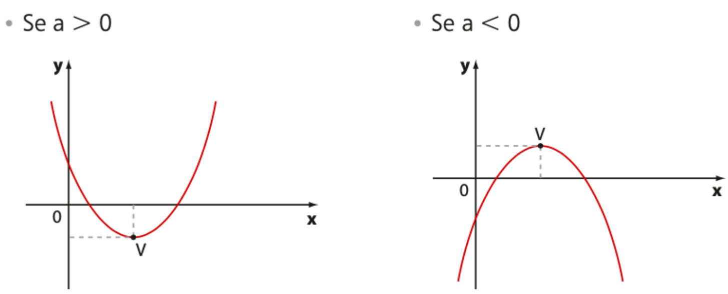


Figura 4.38: Vértice da parábola

Retomando a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$

$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Essa última é denominada **forma canônica** da função quadrática.

Observando a forma canônica, podemos notar que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Portanto,

- Se $a > 0$, então o valor mínimo de y é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior igual ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, se $x = -\frac{b}{2a}$. Nessa situação, o valor mínimo de y será:
  $y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$
- Se $a < 0$, de maneira análoga, concluímos que o valor máximo de y ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$. Nesse caso, o valor máximo de y será:
  $y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$

Concluímos, em ambos os casos, que as coordenadas do ponto V são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

4.8.7 Interseção com eixo y

Fazendo a análise dos gráficos 4.35, 4.36 e 4.37, podemos perceber que a função intersecta o eixo **y** sempre no ponto $C(0,f(0))$.

Aplicando $f(0)$ na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

Temos que $f(0) = c$

Portanto o ponto de intersecção da parábola com o eixo **Y** é o ponto $C(0,c)$.

4.8.8 Elementos notáveis da função quadrática

O link na Figura 4.39 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

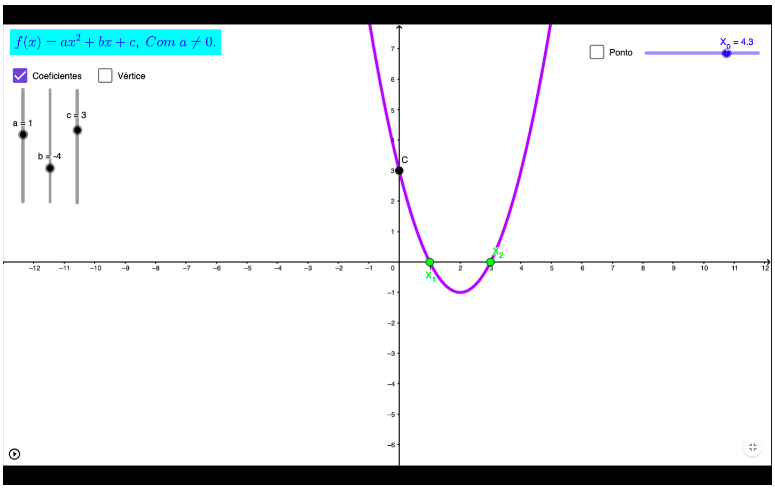


Figura 4.39: Animação da função quadrática
https://www.geogebra.org/m/yjdmn78z

Para visualizar a animação:

1. Habilitar as caixas para mostra os coeficientes, vértice e ponto da parábola;

2. Desabilitar as caixas para mostra os coeficientes, vértice e ponto da parábola;

3. Manipular os parâmetros (A), (B) e (C) de acordo com necessidade;

4.9 Soma dos Ângulos de Polígonos Convexos

Baseado no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9.

4.9.1 Soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo.

A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $(n \geqslant 3)$ é dada por:

$$S_i = (n - 2)180°$$

Dedução:

Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono convexo de n lados. como na Figura 4.40.

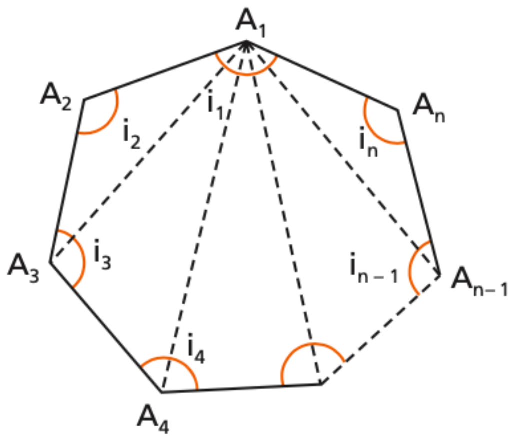


Figura 4.40: Polígono convexo (Ângulos internos)

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.

O polígono fica então dividido em (n - 2) triângulos e a soma S_i dos ângulos internos do polígono.

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$

É igual à soma dos ângulos internos dos $(n-2)$ triângulos.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

$$S_i = (n-2)180°$$

4.9.2 Soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo.

Ângulo externo de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono.

A soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados $(n \geqslant 3)$ é dada por:

$$S_e = 360°$$

Dedução:

Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono convexo de n lados. Como na Figura 4.41.

Considerando os ângulos externos $e_1, e_2, e_3, \cdots e_n$ suplementares adjacentes aos respectivos ângulos internos i_1,i_2,i_3, $\cdots$,i_n

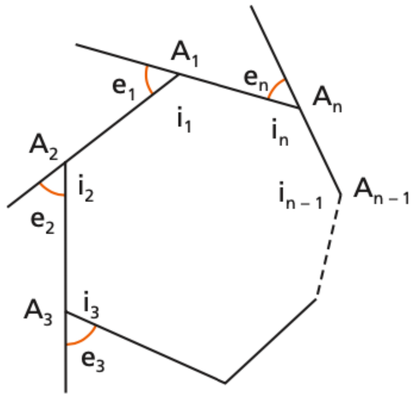


Figura 4.41: Polígono convexo (Ângulos externos)

Temos:

$$\left.\begin{aligned} e_1 + i_1 &= 180 \\ e_2 + i_2 &= 180 \\ e_3 + i_3 &= 180 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ e_n + i_n &= 180 \end{aligned}\right\} \text{somando membro a membro as } n \text{ igualdades}$$

$$\overline{S_e + S_i = n180}$$

Substituindo-se S_i por $(n-2)180°$,

$$S_e + (n-2)180 = n180$$
$$S_e + n180 - 360 = n180$$
$$S_e = 360$$

4.9.3 Expressões do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e) de um polígono regular.

Do fato de o polígono ser regular, logo os ângulos internos são congruentes.

$n.a_i = S_i \Rightarrow na_i = (n-2)180 \Rightarrow a_i = \dfrac{(n-2)180}{n}$

Do fato do polígono regular, logo os ângulos externos são congruentes.

$na_e = S_e \Rightarrow na_e = 360 \Rightarrow a_i = \dfrac{360}{n}$

E também:

$$a_i + a_e = 180$$

4.9.4 Demonstração sem palavras da soma dos ângulos internos (a_i) e dos ângulos externos (a_e) de um polígono regular

O link na Figura 4.42 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

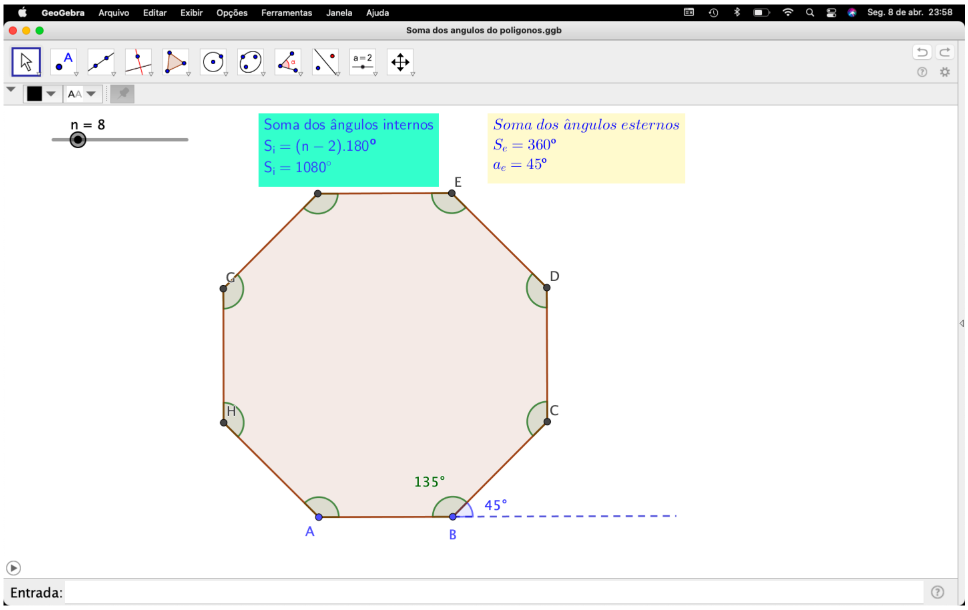


Figura 4.42: Soma dos ângulos de polígonos REGULARES
https://www.geogebra.org/m/xbdz59fw

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (n) manualmente para aumentar ou diminuir o número de lados do polígono
2. Clicar no ícone Play, para fazer animação automática;

4.10 Progressões Aritméticas

Baseada no livro Matemática: ciência e aplicações: ensino médio do autor Gelson IEZZI.

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada razão da P.A. e é indicada por r.

Por exemplo (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...)

4.10.1 Classificação da PA

De acordo com a razão, podemos classificar as progressões aritméticas da seguinte forma:

Se $r > 0$,cada termo é maior que o anterior, isto é $a_n > a_{n-1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **crescente**.

Se $r < 0$,cada termo é menos que o anterior, isto é $a_n < a_{n-1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **decrescente**.

Se $r = 0$, todos os termos da P.A. são iguais. Dizemos, então, que a P.A. é **constante**.

4.10.2 Termo Geral da PA

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo apenas o primeiro termo e a razão.

Seja uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r. Temos:

$$\begin{array}{lll} a_2 - a_1 = r \Rightarrow & a_2 = a_1 + r & \\ a_3 - a_2 = r \Rightarrow & a_3 = a_2 + r \Rightarrow & a_3 = a_1 + 2r \\ a_4 - a_3 = r \Rightarrow & a_4 = a_3 + r \Rightarrow & a_4 = a_1 + 3r \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Essa expressão, conhecida como fórmula do **termo geral da P.A.**, permite-nos expressar qualquer termo da P.A. em função de a_1 e r.

Assim, por exemplo, podemos escrever:

1) $a_4 = a_1 + 3r$ 2) $a_{10} = a_1 + 9r$ 3) $a_{45} = a_1 + 44r$

4.10.3 Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Muitas foram as contribuições do alemão Carl F. Gauss (1777-1855) à ciência e, em particular, à Matemática. Sua incrível vocação para a Matemática se manifestou desde cedo, perto dos dez anos de idade. Conta-se que Gauss surpreendeu seu professor ao responder, em pouquíssimo tempo, o valor da soma (1+2+3+ ... +99+100).

Que ideia Gauss teria tido?

Provavelmente, ele notou que na P.A. (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100) vale a seguinte propriedade:

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_{100} = & 1 + 100 & = 101 \\ a_2 + a_{99} = & 2 + 99 & = 101 \\ a_3 + a_{98} = & 3 + 98 & = 101 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{50} + a_{51} = & 50 + 51 & = 101 \end{array}$$

Assim, Gauss teria agrupado as 100 parcelas da soma em 50 pares de números cuja soma é 101, obtendo como resultado $50 \cdot 101 = 5050$.

Generalizando esse raciocínio para uma P.A. qualquer, mostrando a seguinte propriedade:

A soma dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

De fato, como a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão r, podemos escrevê-la na forma:

$$(a_1, \quad \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \quad \underset{\cdots}{\cdots} \quad \underbrace{a_n - 2r}_{a_{n-2}.}, \quad \underbrace{a_n - r}_{a_{n-1},}, \quad a_n)$$

Calculando a soma dos n primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por S_n.

Um raciocínio equivalente ao usado por Gauss, consiste em escrever, de "trás para frente", a soma $S_n = a_n + a_{n-1} \cdots + a_3 + a_2 + a_1$ e somarmos com a sequencia $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)$, temos:

$$\begin{array}{rl} (1) S_n = & a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \\ (2) S_n = & a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \cdots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \end{array}$$

Somando (1) + (2), temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + (a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \ parcelas}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

4.10.4 Prova sem palavras do termo geral e da soma de termos da P.A.

O link na Figura 4.43 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

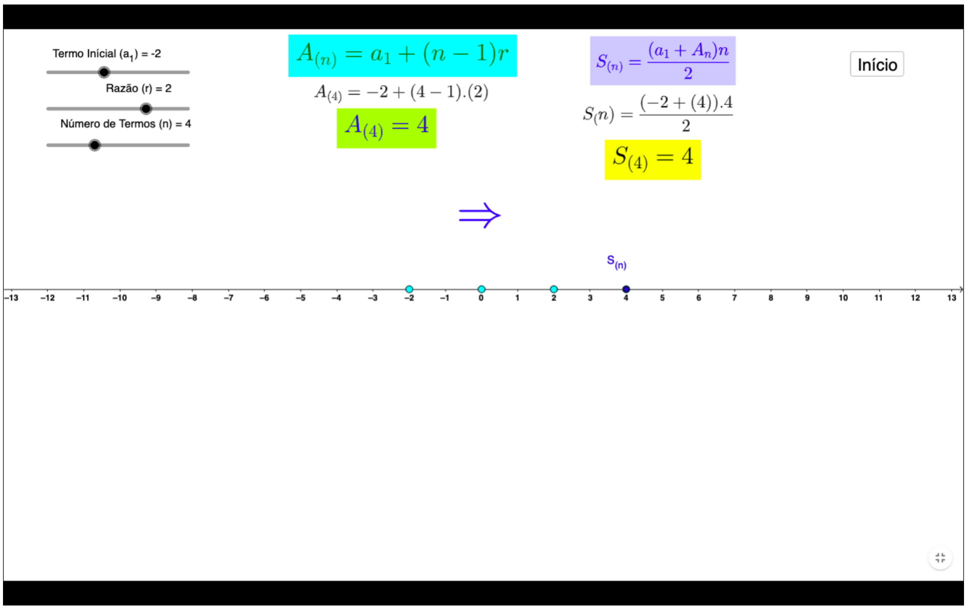


Figura 4.43: Animação dos termos da P.A
https://www.geogebra.org/m/xtmfnmpp

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (a_1) manualmente para determinar o termo inicial;
2. Alterar o valor do controle deslizante (r) manualmente para determinar a razão;
3. Alterar o valor do controle deslizante (n) manualmente para definir o número de termo;
4. Para resetar, basta clicar no botão (INÍCIO) no canto superior direito;

4.11 Exame Nacional de Acesso ao Profmat (ENA2012-Discursiva 1)

Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

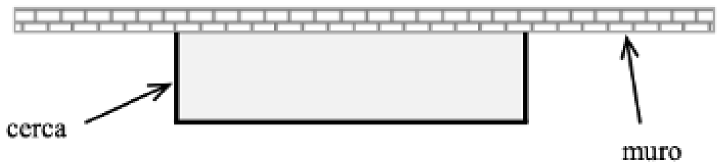


Figura 4.44: Muro e cerca

4.11.1 Resolução usando os conceitos de máximo e mínimo

Seja x o lado perpendicular ao muro, e y o lado paralelo ao muro como ilustrado na Figura 4.44:

$$\text{Temos que:} \begin{cases} 1)2x + y & = & 40 \\ 2)A_r & = & x \cdot y \end{cases}$$

Isolando (y) em 1 e substituindo em 2, temos:

$$A_r = x(-2x + 40) \Longrightarrow 2x^2 + 40x$$

Vamos estudar a equação do segundo grau. $A_r = 2x^2 + 40x$

$$\begin{cases} a & = & -2 \\ b & = & 40 \\ c & = & 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4(-2)0 = 1600$$

Como $a > o$, a parábola tem concavidade para cima, logo o vértice será o ponto de máximo.

$$\text{Temos que } X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(2)} = 10$$

Logo, substituindo em 1, $y = 20$. Portanto em 2, $A_r = 10 \cdot 20 = 200$

Então a área máxima será $200cm^2$

Outra forma de descobrir a área máxima, seria substituir $X_v = 10$ em:

$$A_r = -2x^2 + 40x = -2(10) + 40(10) = 200$$

Dessa forma temos que a área será máxima quando o terreno tiver dimensões:

$$x = 10 \; e \; y = 20$$

4.11.2 Resolução aplicando a derivada

Seja x o lado perpendicular ao muro, e y o lado paralelo ao muro como ilustrado na Figura 4.44.

Temos que:

$$\begin{cases} 1)2x + y &= 40 \\ 2)A_r &= xy \end{cases}$$

Isolando (y) em 1) e substituindo em 2), temos:

$$A_r = x(-2x + 40) \Longrightarrow A_r = -2x^2 + 40x$$

Derivando $A_r(x)$: $A'_r(x) = -4x + 40$. Fazendo $A'_r(x) = 0 \Longrightarrow x = 10$.

Derivando $A'_r(x)$: $A''_r(x) = -4$. Logo $A''_r(10) = -4 < 0$, de onde conclui-se que $x = 10$ é ponto de máximo.

Substituindo $x = 10$ em 1), temos que $y = 20$.

Substituindo $x = 10$ em 2), temos:

$$A_r(10) = -2(10)^2 + 40(10) \Longrightarrow A_r(10) = 200$$

Dessa forma temos que a área será máxima quando o terreno tiver as seguintes dimensões:

$$x = 10 \text{ e } y = 20$$

4.11.3 Resolução sem palavras, da maior área do terreno

O link na Figura 4.45 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (a) manualmente e verificar as dimensões do terreno até encontrar a área máxima;

4.11.4 Resolução sem palavras, análise pela função

O link na Figura 4.46 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (X_1) manualmente e verificar a imagen do ponto;

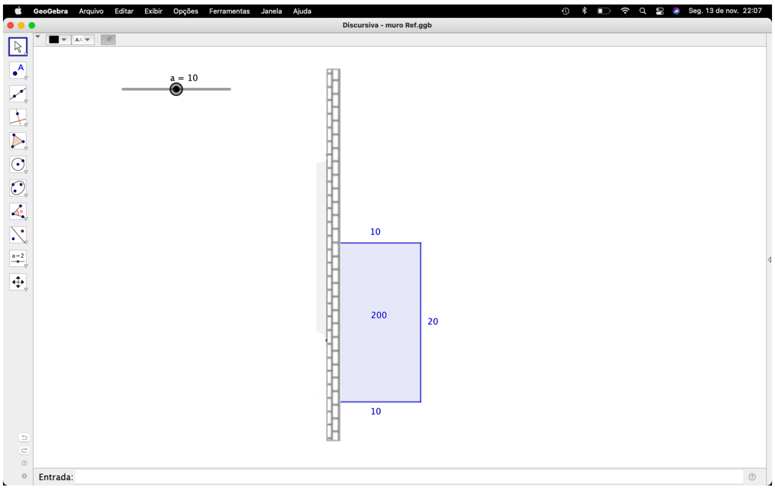


Figura 4.45: Animação de acordo com dimensões do terreno
https://www.geogebra.org/m/cwhazpxh

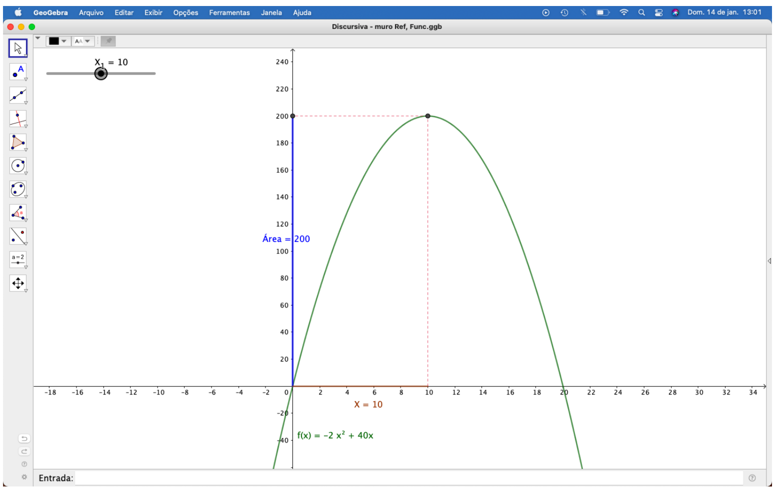


Figura 4.46: Animação de acordo com dimensões do terreno na Função
https://www.geogebra.org/m/d2jvarvs

4.12 Espelho Triangular

Questão do livro - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS: Coleção ProfMat, 1º Edição, do autor Elon Lages lima, p.132.

Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60 cm, 80 cm e 1 metro. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar o trabalho com o corte, pelo menos um lado do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.

4.12.1 Cortes paralelos aos catetos

Fazendo os cortes paralelos aos catetos do triângulo como na Figura 4.47.

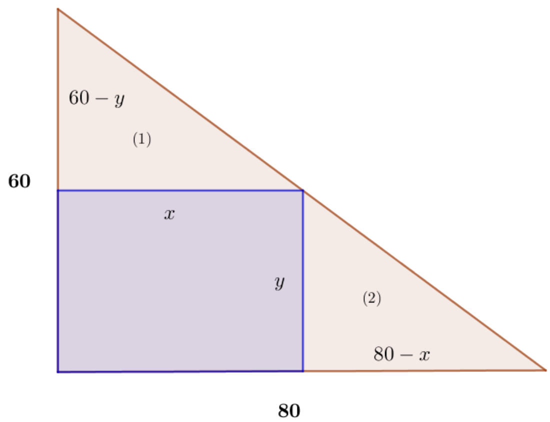


Figura 4.47: Cortes paralelos aos catetos

Temos que a área do retângulo será $A_r = x.y$

Pela semelhança dos triângulos (1) e (2), aplicaremos o teorema de Tales.

$$\frac{x}{80-x} = \frac{60-y}{y}$$

$$xy = (80-x)\cdot(60-y)$$

$$xy = 4800 - 80y - 60x + xy$$

$$80y = -60x + 4800$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 60$$

Como $A_r = x \cdot y$, temos que $A_r = x\left(-\frac{3}{4}x + 60\right)$

Logo $A_r = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$, como $a < 0$, temos que a parábola é côncava para baixo, fazendo o estudo do y_v encontraremos o ponto mais alto que a parábola atinge.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(60^2\right)}{4\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3600}{3} = 1200$$

Portanto a área máxima do espelho será de $1200cm^2$.

4.12.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.48 permite acesso ã construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

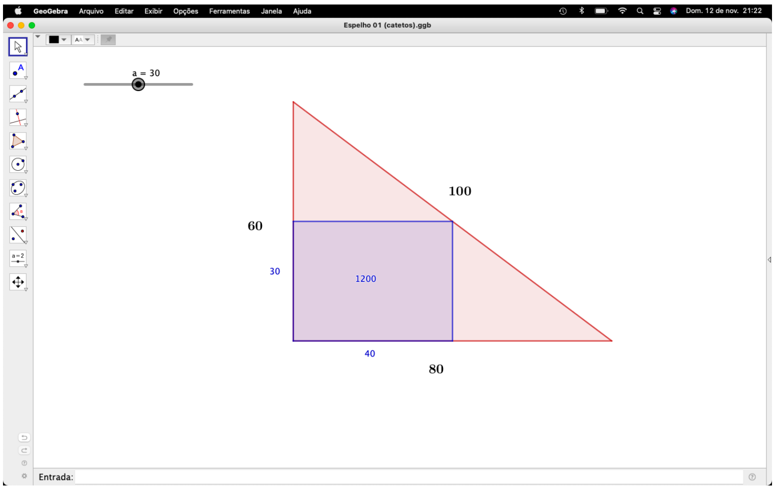


Figura 4.48: Animação de cortes paralelos aos catetos
https://www.geogebra.org/m/z6hwatk4

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (a) manualmente e verificar o retângulo de maior área;

4.12.3 Dois cortes perpendiculares à hipotenusa e um paralelo

Fazendo dois cortes perpendiculares a hipotenusa triângulo e outro paralelo como na Figura 4.49.

Traçaremos a altura relativa à hipotenusa, usando as relações métricas no triângulo retângulo $h \cdot a = b \cdot c$. (Figura 4.50).

No triângulo ABC temos:

$$h \cdot 100 = 60 \cdot 80$$
$$h = 48$$

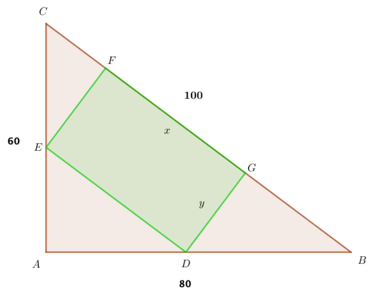


Figura 4.49: Cortes em relação à hipotenusa

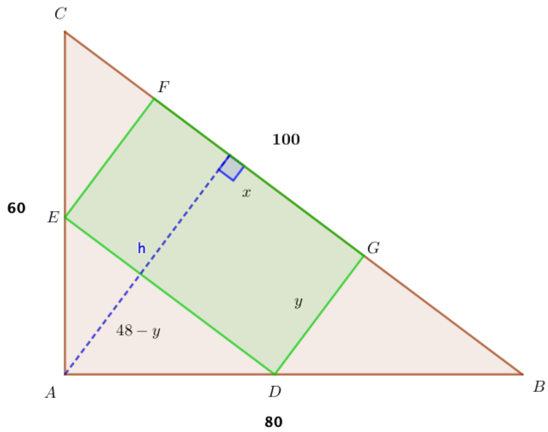


Figura 4.50: Altura relativa à hipotenusa

Temos que $\Delta ADE \cong \Delta ABC$, aplicando o Teorema de Tales.

$$\frac{100}{x} = \frac{48}{48-y}$$

$$48x = 100(48-y)$$

$$48x = 4800 - 100y$$

$$100y = 4800 - 48x$$

$$y = -\frac{12}{25}x + 48$$

Sabendo que a área do retângulo é $A_r = x.y$, substituindo y por $\left(-\frac{12}{25}x + 48\right)$, temos:

$$A_r = x.\left(-\frac{12}{25}x + 48\right)$$

$$A_r = \left(-\frac{12}{25}x^2 + 48x\right)$$

Logo, como $a < 0$, temos que a parábola é côncava para baixo, fazendo o estudo em relação ao y_v do vértice teremos o ponto de máximo que a parábola atinge.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{48^2}{4\left(-\frac{12}{25}\right)} = -\frac{48^2}{\left(-\frac{48}{25}\right)} = \frac{48^2 \cdot 25}{48} = 48 \cdot 25 = 1200$$

Portanto a área máxima do retângulo será $1200cm^2$

4.12.4 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.51 permite acesso á construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

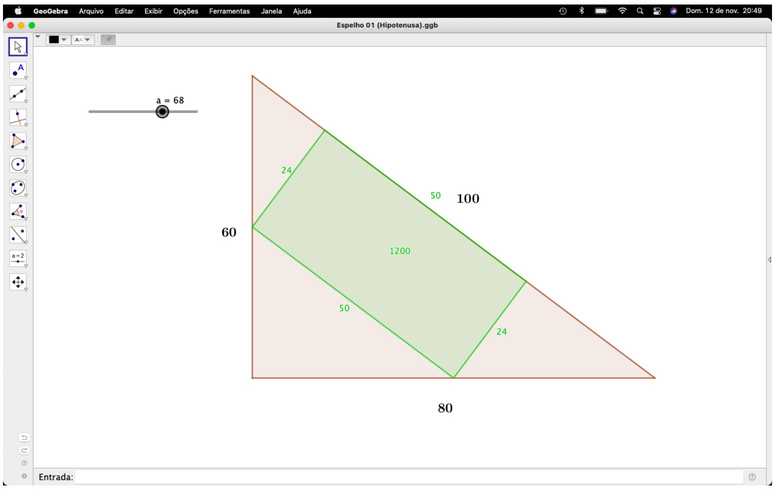


Figura 4.51: Animação de cortes perpendiculares e paralelo à hipotenusa
https://www.geogebra.org/m/jjkdp6db

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (a) manualmente e verifique o retângulo de maior área;

Após as análises das Figuras 4.48 e 4.51. Observar que mesmo com dimensões diferentes os retângulos em ambos os casos possuem mesma área.

4.13 Cortar o arame

Questão do livro - Um curso de Cálculo: Volume 1, do autor Hamilton Luiz Guidorizzi.

Um arame de 36 cm de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado e o outro, a formar um triângulo equilátero. De que modo deverá ser cortado para que a soma das regiões limitadas pelas figuras obtidas seja mínima?

4.13.1 Resolução usando ponto mínimo do vértice

Considere o segmento $\overline{AB} = 36cm$, seja C um ponto em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AB} = x$, e $\overline{CB} = y$. De x construiremos um triângulo equilátero e a partir de y construiremos um quadrado.

Temos:

$$\begin{cases} i)x + y & = & 36 \\ ii)A_m & = & A_t + A_q \end{cases} \text{onde} \begin{cases} A_t & = & \dfrac{(l_t)^2\sqrt{3}}{4} \\ A_q & = & (l_q)^2 \end{cases}$$

Isolando y em $i)$, e substituindo em $ii)$. Temos que:

$$A_m = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \left(\frac{36 - x}{4}\right)^2$$
$$A_m = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{36} + \frac{36^2 - 72x + x^2}{16}$$
$$A_m = \frac{4\sqrt{3}x^2 + 9 \cdot 36^2 - 9 \cdot 72x + 9x^2}{144}$$
$$A_m = \left(\frac{4\sqrt{3} + 9}{144}\right)x^2 - \frac{9x}{2} + 81$$

Como $a > 0$, a parábola é côncava para cima. Fazendo o estudo em relação ao y_v do vértice teremos o valor mínimo que a parábola atinge

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 9}{144}\right) \cdot 81$$
$$\Delta = \frac{81}{4} - 9 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 9}{4}\right)$$
$$\Delta = \frac{81}{4} - \frac{36\sqrt{3}}{4} - \frac{81}{4}$$
$$\Delta = -\frac{36\sqrt{3}}{4} = -9\sqrt{3}$$

Temos que:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$
$$y_v = \frac{-\left(-9\sqrt{3}\right)}{4\left(\dfrac{4\sqrt{3}+9}{144}\right)}$$
$$y_v = \frac{9\sqrt{3}}{\left(\dfrac{4\sqrt{3}+9}{36}\right)}$$
$$y_v = \frac{36 \cdot 9\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}$$
$$y_v = \frac{36 \cdot 9\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9} \cdot \frac{9-4\sqrt{3}}{9-4\sqrt{3}}$$
$$y_v = \frac{2916\sqrt{3}-3888}{33} = \frac{972\sqrt{3}-1296}{11} \Longrightarrow y_v \cong 35{,}2$$

Portanto a área mínima construída pelo triângulo equilátero e pelo quadrado será aproximadamente 35,2 cm^2.

4.13.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.52 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

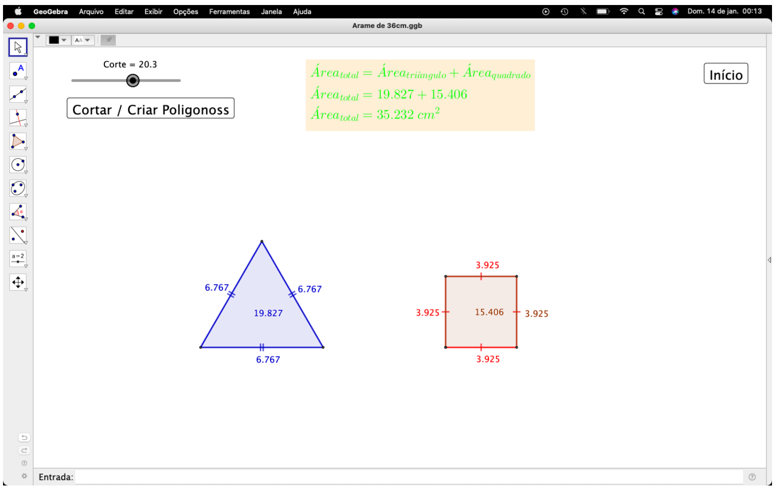


Figura 4.52: Menor área formada pelo triângulo e pelo quadrado
https://www.geogebra.org/m/dbn3gpwb

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante ($Corte$) manualmente, irá separar o arame para fazer cada figuras;

2. Clicar no botão (Cortar/Criar Polígonos), aparecerá o local do corte;

3. Clicar novamente no botão (Cortar/Criar Polígonos), para criar os polígonos;

4. Clicar no botão (Início), para voltar a posição inicial;

5. Mover o controle deslizante ($Corte$) manualmente até encontrar a área mínima;

4.13.3 Resolução sem palavras (Função)

Com o auxilio do App GeoGebra mostraremos também o comportamento do valor da área assumido pela função (Figura 4.53)

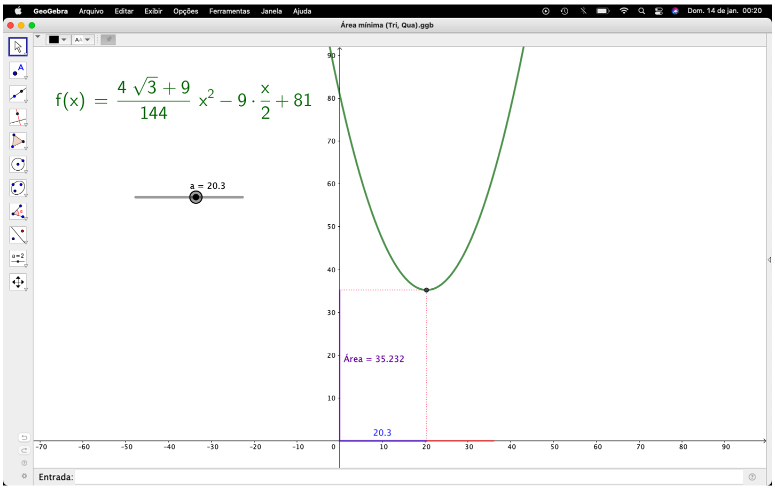


Figura 4.53: Menor área formada pelo triângulo e pelo quadrado
https://www.geogebra.org/m/szyaxkga

O link na Figura 4.53 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante (a) manualmente, observar a imagem do ponto;

2. Mover o controle deslizante (a) manualmente até encontrar a área mínima;

3. Ao encontrar a área mínima, relacionar com o vértice da função:

4.14 Segmentos $\overline{FD} = \overline{FB}$

Questão do livro de Geometria, Coleção Profmat: 1ª Ed., do autor Antonio Caminha Muniz Neto. p. 98.

As cordas AB e CD de uma circunferência são perpendiculares em E, um ponto situado no interior da circunferência. A reta perpendicular ao segmento de reta $\overline{AC}$ passando por E intersecta o segmento de reta $\overline{BD}$ no ponto F. Prove que F é o ponto médio do segmento de reta $\overline{BD}$

4.14.1 Resolução usando as propriedades dos ângulos e arcos

Temos que $\overline{PE}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo AEC.

Com isso, os triângulos AEC, EPC e APE, são semelhantes.

Desse fato, decorre que os ângulos correspondentes são iguais.

Seja : $\begin{cases} \alpha = & C\widehat{A}E = & C\widehat{E}P \\ \theta = & A\widehat{E}P = & A\widehat{C}E \end{cases}$; e que $C\widehat{E}P = D\widehat{E}P$, $A\widehat{E}P = F\widehat{E}B$, pois são opostos pelo vértice $(O.P.V)$

Como ilustrado na Figura 4.54:

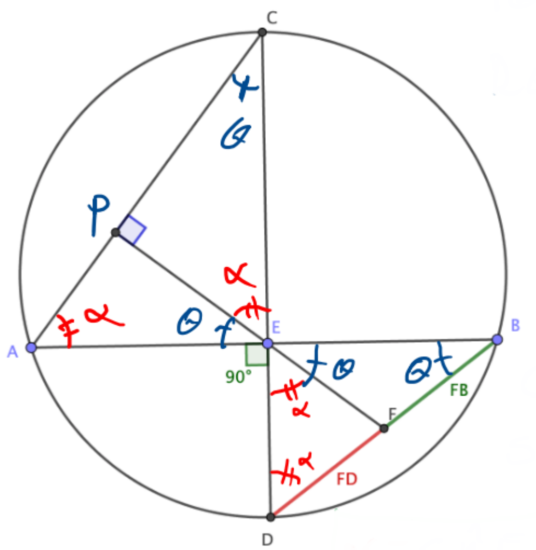


Figura 4.54: Comparação dos ângulos

Aplicando a propriedade do arco capaz. $\begin{cases} i)\widehat{A} = & \widehat{BC} = & \widehat{D} = \alpha \\ ii)\widehat{C} = & \widehat{AD} = & A\widehat{B} = \theta \end{cases}$

Então os triângulos EFD e EFB são isósceles.

Em EFD, temos que $\overline{FE} = \overline{FD}$;

Em EFB, temos que $\overline{FE} = \overline{FB}$;

Por transitividade $\overline{FD} = \overline{FB}$ como queríamos demostrar.

Logo F é ponto médio de $\overline{BD}$.

4.14.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.55 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

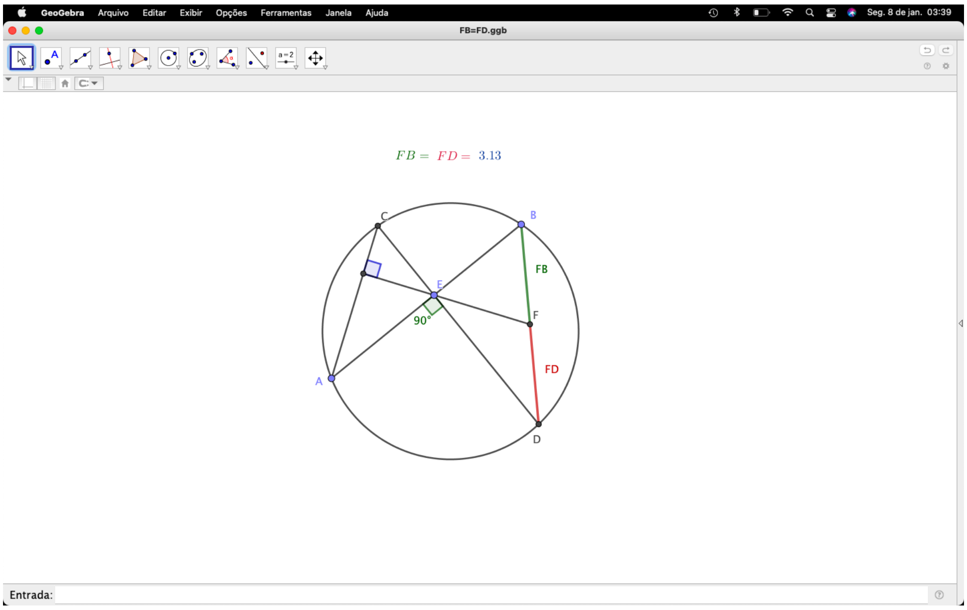


Figura 4.55: $\overline{FD} = \overline{FB}$
https://www.geogebra.org/m/nvtvpcez

Para visualizar a animação:

1. Mover os pontos (A), (B) e (E) manualmente em qualquer direção:

2. Concluir que $\overline{FB} = \overline{FD}$

4.15 Determine o Ângulo.

Questão 23 do Banco de Questões da OBMEP 2013, nível 3.

Nos lados AB e BC de um triângulo equilátero ABC, fixam-se dois pontos D e E, respectivamente, de modo que $AD = BE$. Se os segmentos AE e CD se cortam no ponto P, determine o ângulo $A\widehat{P}C$.

4.15.1 Resolução por congruência de triângulos

Dado, $\overline{AD} = \overline{BE}$.

Seja $A\widehat{P}C = x$

Considerando que D e E não estejam nas extremidades dos segmentos, pois caso D e E sejam extremidades, o caso é trivial, deveríamos olhar para os ângulos internos do triângulo equilátero que é 60°, ou simplesmente observar o ângulo externo do mesmo que é 120°.

Temos que os triângulos ABE e ACD são congruentes pelo caso LAL, pois por definição $\overline{AD} = \overline{BE}$; $\overline{AB} = \overline{CE}$ devido ser equilátero e desse mesmo fato concluímos que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ (Figura 4.56)

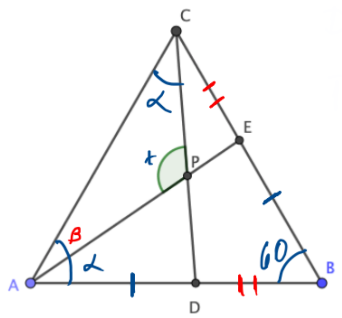


Figura 4.56: Ângulo $\widehat{P}$ formado pelos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$

Do fato de que os triângulos ABE e ACD serem congruentes, os ângulos correspondentes são iguais, logo $E\widehat{A}C = E\widehat{C}A$ e $\widehat{A} = (\alpha + \beta) = 60°$.

Em APC, $\alpha + \beta + x = 180°$.

Como $(\alpha + \beta) = 60$; logo $60 + x = 180 \Rightarrow x = 120°$.

Portanto $A\widehat{P}C = 120°$.

4.15.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.57 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover os parâmetros (AB) e (AD) manualmente;

2. Concluir que $A\hat{P}C = 120$

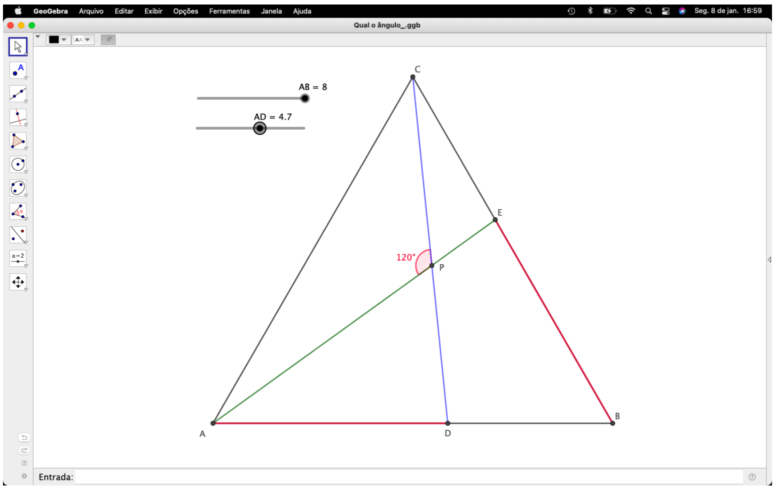


Figura 4.57: Animação do ângulo $\widehat{P}$ formado pelos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ https://www.geogebra.org/m/w5vhsxbe

4.16 José no Acampamento

Resolução da questão do Banco de Questões da OBMEP 2020, p. 31.

José é um pescador que está explorando as proximidades do seu acampamento. Após coletar alimentos na mata, José deseja buscar água no rio e retornar à sua barraca. Abaixo temos a representação da figura, onde José é representado pela letra J, o rio pela letra r e a sua barraca pela letra B. Sendo a distância entre os pés das perpendiculares C e E igual a 180 metros, determine a menor distância que José pode percorrer para ir a sua barraca, indo até o rio como ilustrado na Figura 4.58.

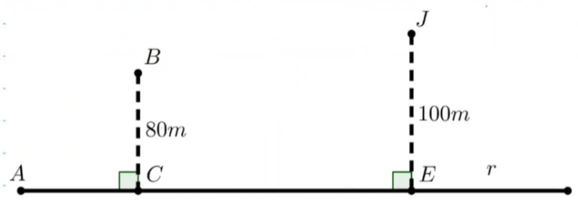


Figura 4.58: José no acampamento

4.16.1 Resolução usando reflexão de ponto, Teoremas de (Tales e Pitágoras).

Marcaremos um ponto P em r, sendo que P é o ponto onde José irá pegar água e depois seguir para a barraca. Partido do princípio de que a menor distância entre dois pontos é o segmento de reta, José fará o caminho $\overline{JP} + \overline{PB}$. (Figura 4.59)

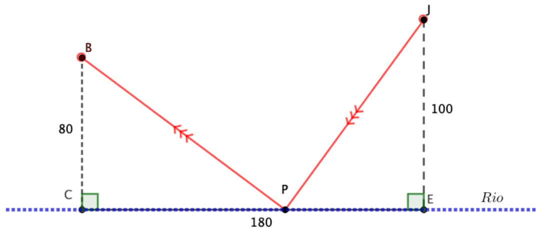


Figura 4.59: Possível caminho percorrido por José

Desprezando a largura do rio, na verdade, para efeito de caso, considere o rio apenas como sendo a reta r, sem perdas de generalidades, faremos a reflexão do ponto J em relação a reta r (Figura 4.60).

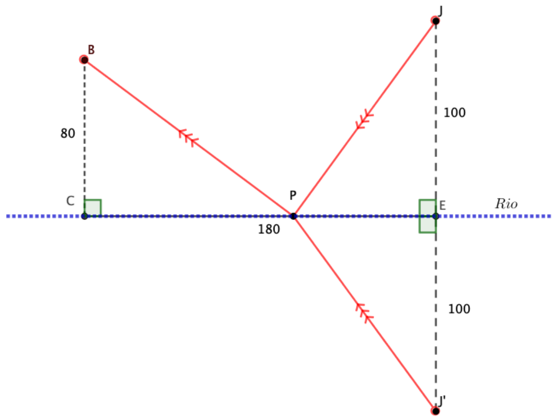


Figura 4.60: Reflexão do ponto J em relação a reta r

Temos que os triângulos JEP e $J'EP$ são congruentes, logo $\overline{JP} = \overline{J'P}$, então nesse caso a menor distância que José percorrerá para ir no rio e voltar para a barraca corresponde a distância do segmento de reta $\overline{J'B}$ (Figura 4.61).

Temos que os triângulos BCP e $J'EP$ são semelhantes, pois $B\widehat{C}P = J'\widehat{E}P = 90$ e $C\widehat{P}B = E\widehat{P}J'$ pois são O.P.V e consequentemente $C\widehat{B}P = E\widehat{J'}P$.

Considere x o segmento $\overline{CP}$.

Aplicando o Teorema de Tales, temos.

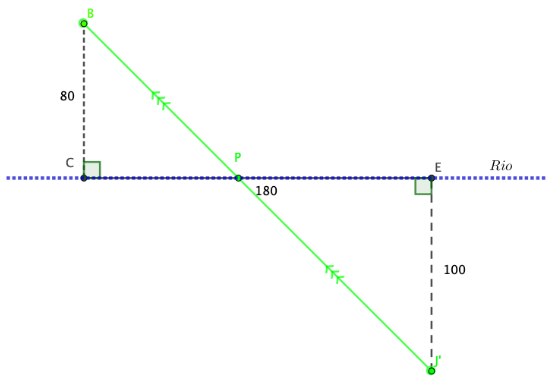


Figura 4.61: Menor distância percorrida por José

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EJ'}} = \frac{x}{180 - x}$$
$$\frac{80}{100} = \frac{x}{180 - x}$$
$$100x = -80x + 80 \cdot 180$$
$$180x = 80 \cdot 180 \Rightarrow x = 80$$

Com isso podemos observar que os triângulos BCP e $J'EP$ são isósceles.

Agora basta aplicar o Teorema de Pitágoras em BCP e $J'EP$.

No triângulo BCP temos que:

$$\left(\overline{BP}\right)^2 = \left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{CP}\right)^2$$
$$\left(\overline{BP}\right)^2 = 80^2 + 80^2$$
$$\left(\overline{BP}\right)^2 = 6400 + 6400 = 12800$$
$$\left(\overline{BP}\right) = \sqrt{12800}$$
$$\left(\overline{BP}\right) \cong 113{,}14\, m$$

No triângulo $J'EP$ temos que:

$$\left(\overline{J'P}\right)^2 = \left(\overline{PE}\right)^2 + \left(\overline{EJ'}\right)^2$$
$$\left(\overline{J'P}\right)^2 = 100^2 + 100^2$$
$$\left(\overline{J'P}\right)^2 = 10000 + 10000 = 20000$$
$$\left(\overline{J'P}\right) = \sqrt{20000}$$
$$\left(\overline{J'P}\right) \cong 141{,}42\, m$$

Como $\overline{J'B} = \overline{J'P} + \overline{PB}$, temos:

$$\overline{J'B} \cong 113{,}13 + 141{,}42$$
$$\overline{J'B} \cong 254{,}56\ m$$

Portanto a menor distância para que José possa ir no rio pegar água e voltar para a barraca é de aproximadamente 254,56 metros.

4.16.2 Resolução usando reflexão de ponto, reta paralela e Teorema de Pitágoras.

Utilizando outra estratégia para resolver o problema, de maneira mais simplificada.

Traçar uma reta paralela a r passando por J', e a projeção de BC, se intersectando em G (Figura 4.62)

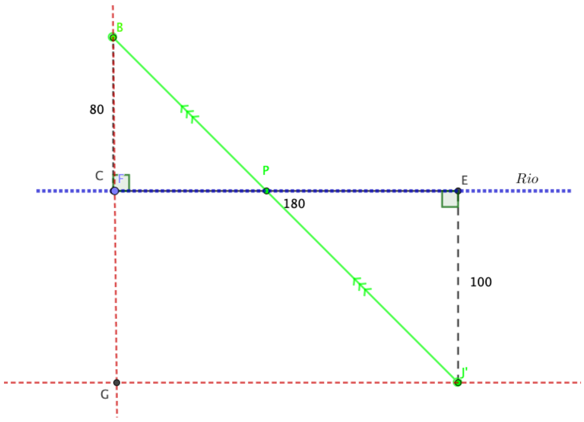


Figura 4.62: Equivalente a distância percorrido por José.

Basta observar que o triângulo BGJ' é retângulo em G e aplicar o teorema de Pitágoras.

No triângulo BGJ' temos que:

$$\left(\overline{J'B}\right)^2 = \left(\overline{BG}\right)^2 + \left(\overline{GJ'}\right)^2$$
$$\left(\overline{J'B}\right)^2 = 180^2 + 180^2$$
$$\left(\overline{J'B}\right)^2 = 32400 + 32400 = 64800$$
$$\left(\overline{J'B}\right) = \sqrt{64800}$$
$$\left(\overline{J'B}\right) \cong 256{,}56\ m$$

4.16.3 Resolução sem palavras.

O link na Figura 4.63 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

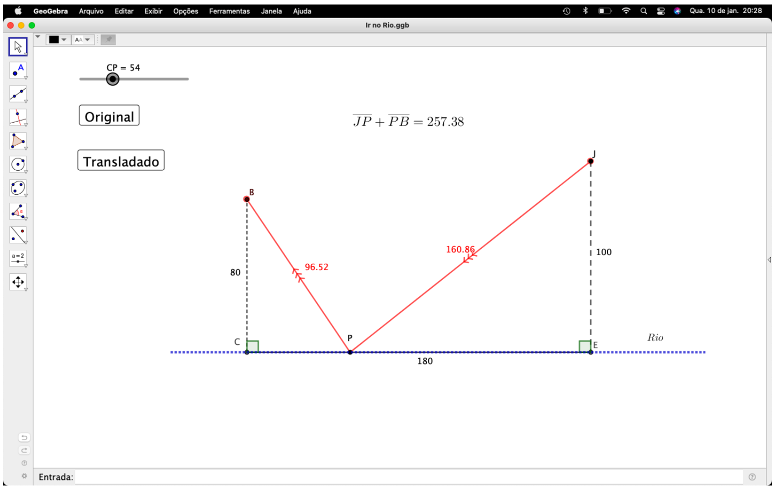


Figura 4.63: Animação das possíveis distâncias percorridas por José https://www.geogebra.org/m/abdabndv

Para visualizar a animação:

1. Mover o parâmetro (CP) manualmente, para os possíveis caminhos de José;
2. Clicar no botão (Original) para manter a estrutura da questão;
3. Clicar no botão (Transladado) para fazer uma reflexão do ponto (J) em relação ao Rio;
4. Mover o parâmetro (CP) manualmente, até encontrar uma reta, como possível caminho de José;
5. Concluir que será o menor caminho possível;

4.17 Exame Nacional de Acesso ao Profmat (ENA2012-Discursiva 2)

4.17.1 Resolução usando as propriedades do retângulo

As figuras a seguir mostram duas circunferências distintas, com centros C_1 e C_2 que se intersectam nos pontos A e B. Uma reta r passa por A, corta a circunferência *da esquerda em P, e a circunferência da direita em Q, e é tal que A, está entre P e Q. Mostre que se r é paralela à reta C_1C_2 o segmento $\overline{PQ}$ é o dobro do segmento $\overline{C_1C_2}$. (Figura 4.64)*

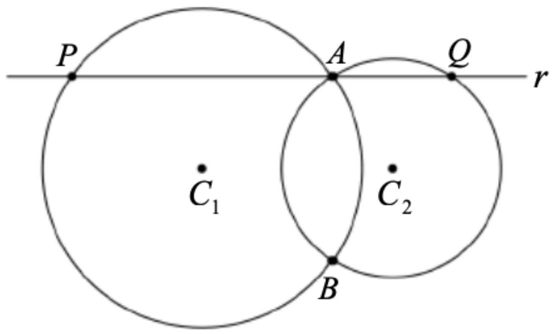


Figura 4.64: Ilustração da questão

Seja M o ponto médio do segmento $\overline{PA}$ e N o ponto médio do segmento $\overline{AQ}$ (Figura 4.65)

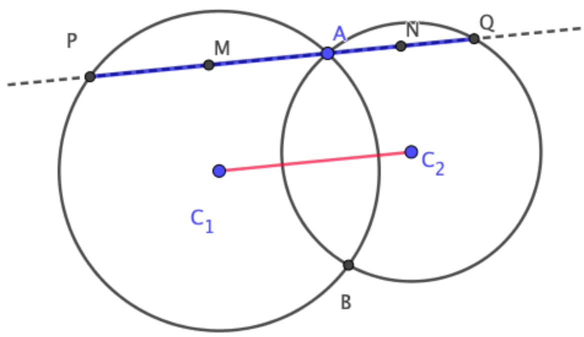


Figura 4.65: Marcação dos respectivos pontos médios

Como $\overline{PA}$ é uma corda da circunferência à esquerda, de centro C_1, então $\overline{C_1M}$ é perpendicular a $\overline{PA}$. Da mesma forma, $\overline{C_2N}$ é perpendicular a $\overline{AQ}$.

Além disso, sendo $\overline{C_1C_2}$ paralelo à reta r, segue que $\overline{C_1C_2}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{C_1M}$ e $\overline{C_2N}$ (Figura 4.66).

Então C_1C_2NM é um retângulo. Disso decorre que $\overline{NM} = \overline{C_1C_2}$ (Figura 4.67).

Temos que $\overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{MA} + \overline{AN} + \overline{NQ}$.

Como $\overline{PM} = \overline{MA}$ e $\overline{AN} = \overline{NQ}$, segue que $\overline{PQ} = 2.(\overline{MA} + \overline{AN})$

Temos também que $\overline{MA} + \overline{AN} = \overline{MN}$ e $\overline{MN} = \overline{C_1C_2}$

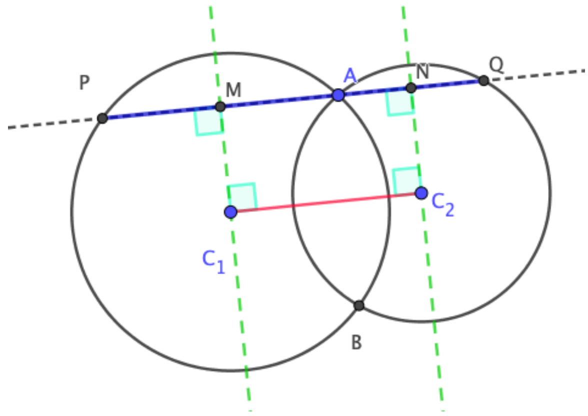


Figura 4.66: Marcação das respectivas perpendiculares

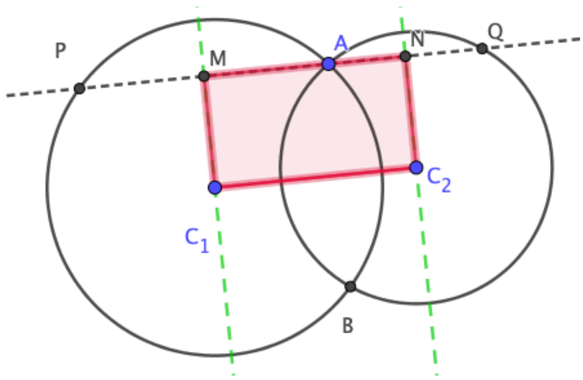


Figura 4.67: Retângulo C_1C_2NM

Logo $\overline{PQ} = 2 \cdot (\overline{C_1C_2})$

4.17.2 Resolução usando a propriedade da base média do triângulo

Traçaremos uma reta $k \parallel r$ passando por B, sendo que $k \parallel \overline{PQ}$ e $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, basta observar que $PABC$ é um retângulo inscrito na circunferência e PB é uma diagonal. Como C_1 é o centro dessa circunferência, logo os pontos P, C_1 e B estão alinhados (Figura 4.68).

Além disso, temos também que C_1 é ponto médio de $\overline{PB}$, pois $\overline{PC_1} = \overline{C_1B} = Raio$.

De maneira análoga, podemos concluir que os pontos Q, C_1 e B também estão alinhados e C_2 é ponto médio de $\overline{BQ}$.

Basta agora visualizar o triângulo PBQ, já sabendo que C_1 é ponto médio de $\overline{PB}$ e C_2 é ponto médio de $\overline{BQ}$ (Figura 4.69)

Pelo Teorema da base média do Triângulo 4.15.

O Segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao

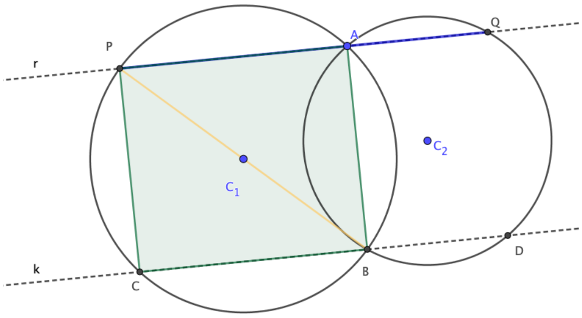


Figura 4.68: Retângulo PABC

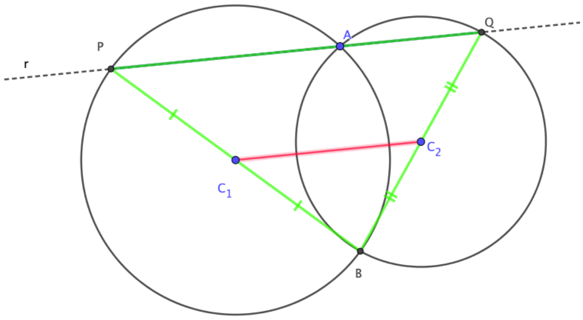


Figura 4.69: Triângulo PQB

terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Portanto $\overline{PQ} = 2 \cdot (\overline{C_1C_2})$, como se queria demonstrar.

4.17.3 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.70 permite acesso ã construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover os pontos (C_1), (C_2) e (A) manualmente para qualquer direção;

2. Clicar no botão (Triângulo), observar o teorema;

3. Concluir que $\overline{PQ} = 2 \cdot (\overline{C_1C_2})$;

4.18 Receita da Orquestra

Abordaremos a questão do livro - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS: Coleção Profmat, 1º Edição, do autor Elon Lages lima, p.133

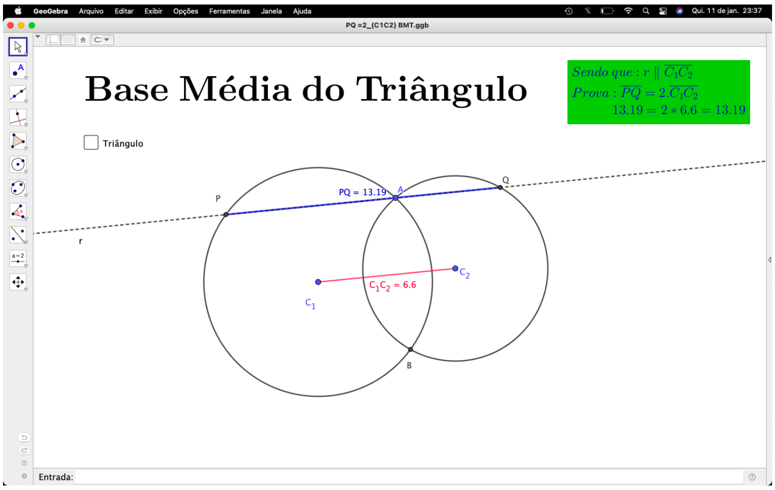


Figura 4.70: Animação usando a Base média do triângulo
https://www.geogebra.org/m/unnbjta2

O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta em 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

4.18.1 Resolução por máximos e mínimos

$$Seja : \begin{cases} R &= \quad Receita \\ P &= \quad Público \\ V &= \quad Valor\ do\ ingesso \end{cases} \Longrightarrow R = PV$$

Como para um real de desconto no preço do ingresso, o número de espectadores aumenta em 100 espectadores.

Faremos alguns casos.

$$R_1 = (P + 100) \cdot (V - 1)$$
$$R_2 = (P + 200) \cdot (V - 2)$$
$$R_3 = (P + 300) \cdot (V - 3)$$
$$\vdots$$

Perceba que quando fazemos n descontos, a quantidade de espectadores aumenta $n100$.

Logo:

$$R_n = (P + n100) \cdot (V - n)$$

Substituindo os casos inicias, temos:

$$R_n = (300 + n100) \cdot (9 - n)$$

Aplicando a propriedade distributiva.

$$R_{(n)} = 2700 - 300n + 900n - 100n^2$$
$$R_{(n)} = -100n^2 + 600n + 2700$$

Temos uma função do segundo grau (Figura 4.71).

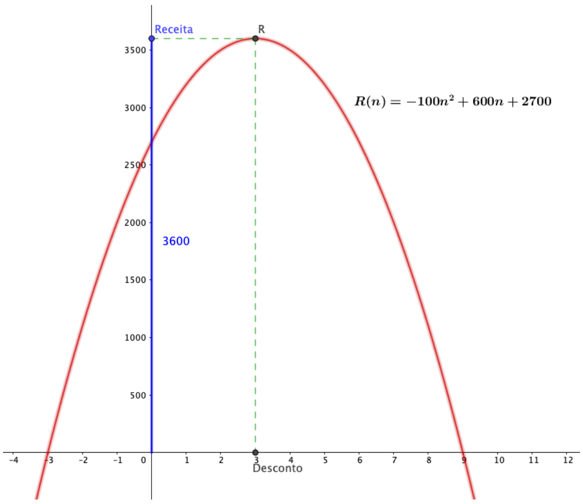


Figura 4.71: Função em relação a Receita da orquestra

Como $a < 0$, temos que a parábola é côncava para baixo, fazendo o estudo em relação ao X_v do vértice, teremos o ponto de máximo que a parábola atinge.

$$X_v = -\frac{b}{2a}$$
$$X_v = -\frac{600}{2(-100)}$$
$$X_v = \frac{600}{200}$$
$$X_v = 3$$

Logo, o desconto que dará a maior renda na orquestra será de R$ 3,00 , como o ingresso custava R$ 9,00 Reais.

Portanto, o ingresso que dará a maior renda para a orquestra custará 6 Reais.

4.18.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.72 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

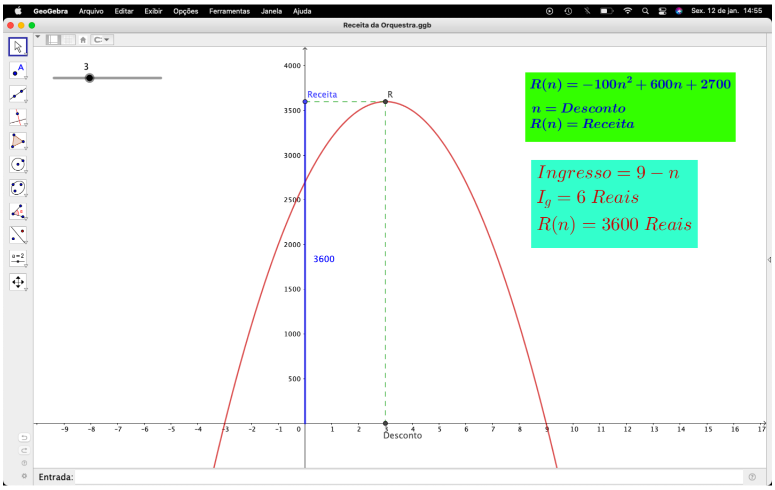


Figura 4.72: Comportamento da receita da orquestra em relação ao valor do ingresso
https://www.geogebra.org/m/qrkx4yny

Para visualizar a animação:

1. Mover o controle deslizante e observar a variação da imagem do ponto;

2. Ao encontrar a maior receita, relacionar com o vértice da parábola;

4.19 Exame Nacional de Acesso ao Profmat (ENA 2011-Q12)

A base AB do triângulo ABC mede 8 cm e está situada sobre a reta r. O segmento DE, também sobre r, mede 5 cm. Pelos pontos D e E traçamos paralelas a AC e a BC respectivamente, as quais se cortam no ponto F formando o triângulo DEF ilustrado na Fígura 4.73.

$$\text{A } raz\tilde{a}o = \frac{\acute{a}rea(ABC)}{\acute{a}rea(DEF)}\text{ ; Vale:}$$

(A) 1,25 (B) 1,60 (C) 3,20 (D) 2,32 (E) 2.56

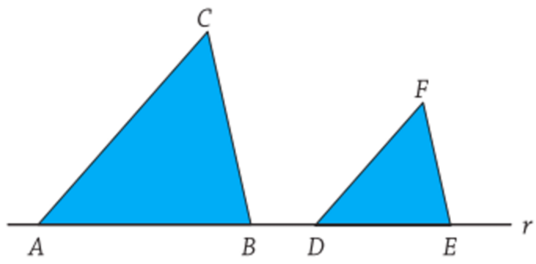


Figura 4.73: Triângulos ABC e DEF

4.19.1 Resolução por razão de semelhança entre figuras planas semelhantes

Nessa questão devemos observar que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Como $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ pertencem a reta r e $\overline{AC} \| \overline{DF}$, concluímos que $\hat{A} = \hat{D}$. Da mesma forma, como $\overline{BC} \| \overline{EF}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e consequentemente $\hat{C} = \hat{F}$, logo os triângulos são semelhantes pelo caso A.A.A.

Aplicando a propriedade de razão de semelhança (Teorema 4.6.1), que diz:

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

$$R_{azão} = \frac{Á_{rea}ABC}{Á_{rea}DEF} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\right)^2$$
$$R_{azão} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$$
$$R_{azão} = (1{,}6)^2$$
$$R_{azão} = 2{,}56$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E)

4.19.2 Resolução sem palavras

O link na Figura 4.74 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

Para visualizar a animação:

1. Mover os controles deslizantes (a) e (b) de acordo com que se pede na questão;

2. Mover o ponto em qualquer direção;

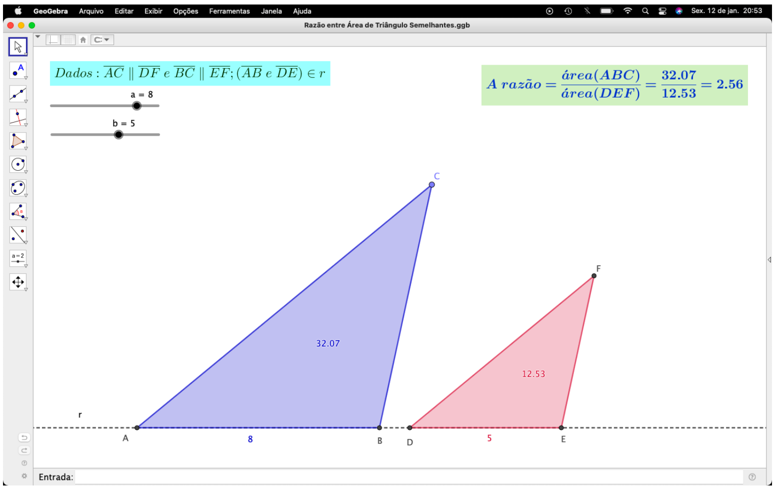


Figura 4.74: A razão entre as áreas de triângulos semelhantes
https://www.geogebra.org/m/ud37aujd

3. Observar que a razão não se altera;

4.20 Polígono Regular de Maior Área

Usando um comprimento 420 *cm de um barbante, uma criança deseja fazer um figura no chão de modo que seja um polígono regular. Qual deve ser a quantidade de lados pra que a criança consiga a maior área possível?*

Neste tema faremos análise em relação a área de polígonos regulares de n lados.

Então, vamos analisar alguns casos, onde temos fórmulas bastante conhecidas.

1. Triângulo Equilátero

   Como o barbante mede 420 cm. Logo o lado do triângulo é 140 cm

   Aplicando em $A_t = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

   $A_t = \dfrac{140^2\sqrt{3}}{4} \cong 8487{,}05\ cm^2$

2. Quadrado

   Do fato da figura ser um quadrado e o barbante ter 420 cm. Então o lado desse quadrado será de 105 cm.

   Como a área do quadrado é dada por: $A_q = l^2 \Rightarrow 105^2 = 11025\ cm^2$

3. Hexágono Regular

   Sabemos que o hexágono regular é composto por 6 triângulos equiláteros. e o lado do hexágono será de 70 cm

Aplicando em $A_t = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$6.A_t = \dfrac{70^2\sqrt{3}}{4} \cong 12730{,}57\ cm^2$

Polígono	Nº de lados	Área
Triângulo	3	8487,05
Quadrado	4	11205
Hexágono	6	12730,57

Após essas primeiras análises, podemos imaginar que quanto maior a quantidade de lados do polígono, maior será sua área.

Então, vamos fazer estudos mais aprofundados em relação aos polígonos regulares.

4.20.1 Definição de Polígonos Regulares

Um polígono convexo é dito regular, quando possui todos os lados e ângulos com mesma medida. Por isso um polígono regular é equilátero, pois todos os lados são de mesmo comprimento, e equiângulo, visto que todos os ângulos possuem a mesma medida.

Exemplos (Figura 4.75) de polígonos regulares:

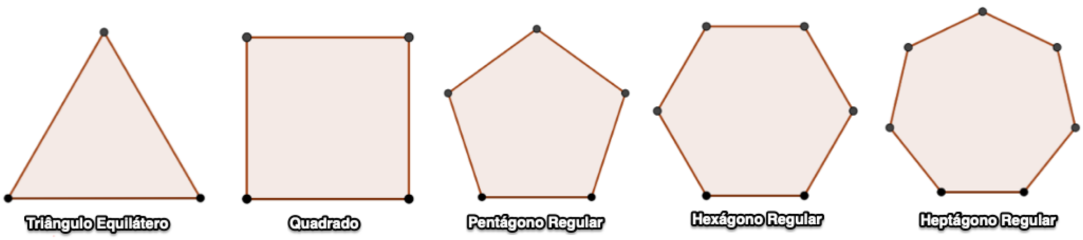


Figura 4.75: Polígonos Regulares

Outra característica de um polígono regular é o fato de ser inscritível e circunscritível.

4.20.2 Perímetro de um Polígono regular

O perímetro de um polígono regular é a soma das medidas de todos os lados. Sabendo o comprimento do lado e a quantidade de lados, para encontrar o perímetro (P) desse polígono, como todos os lados são iguais, basta fazer o produto do números de lados (n) pelo comprimento do lado (L).

Logo:

$$P = n \cdot L$$

4.20.3 Ângulos de Polígonos Regulares

A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $(n \geqslant 3)$ é dada por:

$$S_i = (n-2)180$$

O ângulo interno de um polígono regular é:

$$a_i = \frac{360}{n}$$

demonstrado aqui neste trabalho (4.9).

4.20.4 Apótema de um Polígono regular

O apótema é o segmento de um polígono que liga o centro ao ponto médio dos lados, formando um ângulo de 90°. O apótema também é igual à medida do raio da circunferência inscrita no polígono.

Alguns exemplos: (Figura 4.76)

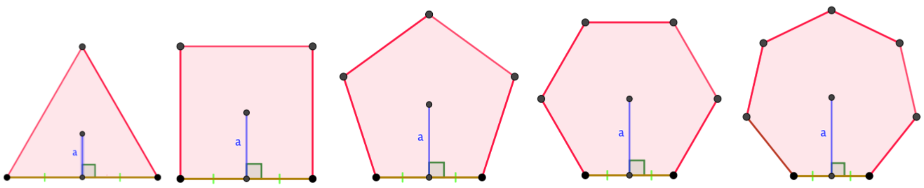


Figura 4.76: Apótema

4.20.5 Comprimento do apótema de um Polígono Regular

Considere o polígono regular: (Figura 4.77)

Fazendo a análise na Figura 4.77, temos que o triângulo $BM_{a,b}C$ é retângulo. Desse modo,

$t_g(\beta) = \dfrac{\overline{M_{a,b}B}}{\overline{M_{a,b}C}} \Rightarrow t_g(\beta) = \dfrac{\frac{L}{2}}{a}$, onde L é o lado do polígono. Pela soma dos ângulos internos de polígonos, $\beta = \dfrac{360}{2 \cdot n} \Rightarrow \beta = \dfrac{180}{n}$.

Logo, o comprimento do apótema pode ser calculado por:

$$a = \frac{L}{2 \cdot t_g\left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

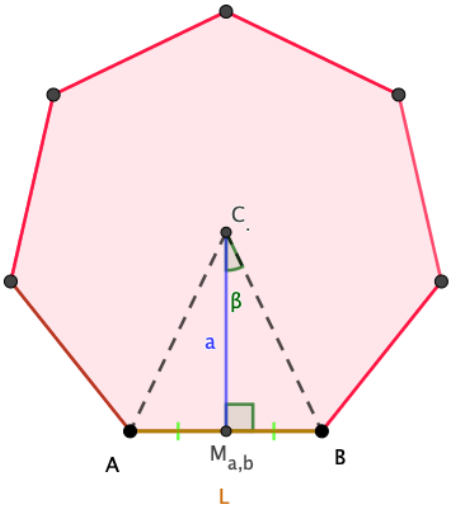


Figura 4.77: Comprimento do apótema

4.20.6 Área de um Polígono Regular

Qualquer polígono **regular** pode ser fatiado em n triângulos de mesma área como na Figura 4.78.

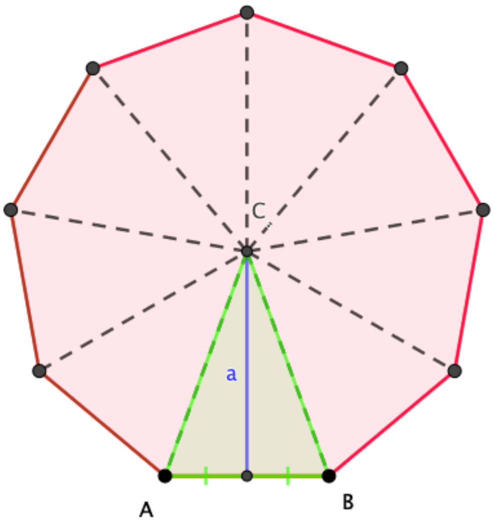


Figura 4.78: Área do polígono

$$Dados \begin{cases} P &= \text{Prerímetro} \\ L &= \text{Comprimento do lado} \\ a &= \text{Apótema} \\ n &= \text{Número de lados} \end{cases} ; \text{com } n \geqslant 3$$

Temos então que a área do triângulo é dada por: $A_t = \dfrac{B \cdot h}{2}$

No triângulo ABC, temos:

$$A_t = \frac{\overline{AB} \cdot a}{2}.$$

Sendo $\overline{AB}$ o lado do polígono, então:

$$A_t = \frac{L \cdot a}{2}.$$

Como o polígono tem n triângulos, sua a área é dada por:

$$A_{pol} = n \cdot A_t$$

Dos resultados acima obtemos uma maneira de encontrar área do polígono:

$$A_{pol} = \frac{P}{L} \cdot \frac{L \cdot a}{2} \Rightarrow A_{pol} = \frac{P}{2} \cdot a$$

Sendo o perímetro P fixo.

Portanto, o polígono terá maior área quando tiver o maior valor do apótema, que por sua vez terá valor máximo quando o polígono tiver a maior quantidade de lados possíveis.

Por outro lado, em $A_{pol} = n \cdot A_t$, substituindo A_t por $\dfrac{L \cdot a}{2}$ e substituindo a por $\dfrac{L}{2 \cdot t_g \left(\dfrac{180}{n}\right)}$ temos:

$$A_{pol} = n \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2 \cdot t_g \left(\dfrac{180}{n}\right)} = \frac{n \cdot L^2}{4 \cdot t_g \left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

Em $P = n.L$, isolando L e elevando ambos membros ao quadrado, segue:

$$L^2 = \left(\frac{P}{n}\right)^2$$

Fazendo novamente a substituição:

Substituindo o valor de L^2 na expressão da área do polígono,

$$A_{pol} = \frac{n\left(\dfrac{P}{n}\right)^2}{4 \cdot t_g\left(\dfrac{180}{n}\right)} \Rightarrow \frac{\dfrac{P^2}{n}}{4 \cdot t_g\left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

Portanto uma maneira de calcular a área de um polígono regular é dada por:

$$A_{pol} = \frac{P^2}{n \cdot 4 \cdot t_g\left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

Onde (P) é o perímetro e (n) o número de lados do polígono.

4.20.7 PSP da área de um polígono regular

O link na Figura 4.79 permite acesso à construção mencionada, na página do autor no ambiente GGB online.

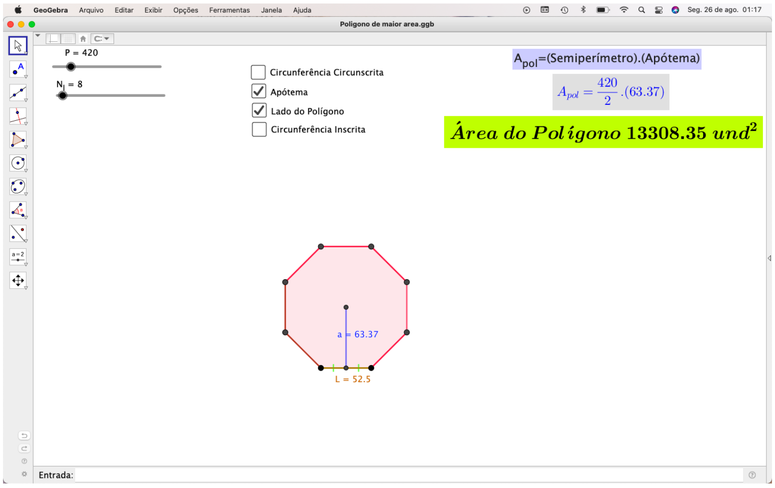


Figura 4.79: Animação da área do polígono Regular
https://www.geogebra.org/m/amdpbmcq

Para visualizar a animação:

1. Mover os controle deslizantes para variar P = Perímetro.
2. Marcar as Caixas para **exibir** as circunferências (inscrita e circunscrita) ao polígono;
3. Desmarcar as Caixas para **esconder** as circunferências (inscrita e circunscrita) ao polígono;
4. Marcar as Caixas para **exibir** lado e apótema do polígono;
5. Desmarcar as Caixas para **esconder** lado e apótema do polígono;

6. Mover os controle deslizantes N_l= Número de lados para aumentar ou diminuir o a quantidade de lados.

7. Observar que para P fixo, quanto maior o N_l= Número de lados, maior será a área.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A visualização direta, possibilitada pelo software, permite a interação com representações gráficas, facilitando a assimilação de ideias que, de outra forma, poderiam ser abstratas.

A integração de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, não apenas facilita a compreensão de conceitos matemáticos complexos, mas também transforma a dinâmica da sala de aula, tornando-a mais interativa e motivadora. Como afirmam Hohenwarter et al. (2008), a interatividade proporcionada por softwares educacionais é fundamental para o desenvolvimento de um aprendizado ativo, onde os alunos se tornam protagonistas de sua própria formação.

A abordagem de "provas sem palavras" se destaca como uma estratégia poderosa para estimular o raciocínio crítico e a criatividade. Ao desafiar os estudantes a interpretar e resolver problemas sem o auxílio de explicações verbais, promove-se um ambiente de aprendizagem que valoriza a autonomia e a capacidade de análise. Nelsen (1993) ressalta que a visualização direta de conceitos matemáticos pode ser mais intuitiva do que as explicações tradicionais, corroborando a eficácia dessa Metodologia.

Esta abordagem abre caminho para futuras investigações que exploram as aplicações de recursos tecnológicos em diferentes níveis de ensino, bem como a análise de seu impacto a longo prazo na aprendizagem. A Educação Matemática, ao incorporar tecnologias inovadoras, pode se tornar um campo mais dinâmico e acessível, contribuindo para a formação de cidadãos críticos e preparados para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo. Assim, conclui-se que a adoção de metodologias que utilizem o GeoGebra não é apenas uma tendência, mas uma necessidade premente para a evolução do Ensino da Matemática.

Referências

ALENCAR, H. CÂNDIDO L., FARIAS M. **Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da Educação Básica:** Revista do Professor de Matemática Online, v.7, n.1, 2019, pp.1-19.

ALSINA, Claudi; NELSEN, Roger B. **Um convite a provas sem palavras:** ComCiência, n. 143 (2012).

ARZARELLO, F., FERRARA, F., ROBUTTI, O. **Mathematical modelling with technology:** The role of dynamic representations. Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA, 31(3), 123-136, (2012).

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática.** Papirus Editora, 2008.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar.** 9: geometria plana. Atual, 1993.

ENA2012. **Discursiva 1.** Exame Nacional de Acesso PROFMAT, 2012.

ENA2012. **Discursiva 2a.** Exame Nacional de Acesso PROFMAT, 2012.

ENQ2019.2. **Questão 2.** Exame Nacional de Qualificação PROFMAT, 2019.2.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GUIDORIiZZI, Hamilton Luiz. **Cálculo - Um curso de Cálculo Volume 1.** 5ª Edição. Capítulo 2.1 - Ex. 40. Rio de Janeiro (2013)

HOHENWARTER, M. **Matemática Dinâmica com GeoGebra.:** Anais da Conferência Internacional sobre Tecnologia no Ensino de Matemática, et al. (2008).

HOHENWARTER, M., LAVICZA, Z. **The strength of the community:** How GeoGebra can inspire technology integration in mathematics teaching. ZDM, 40, 1-7, (2008).

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações:** ensino médio, volume 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva.(2016).

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar:** 1: conjuntos, funções, 9. ed. São Paulo : Atual, 2013.

IMPA/OBMEP. **Banco de Questões 2013:** questão 23, nível 3, p. 31, Rio de Janeiro, IMPA, (2013).

IMPA/OBMEP. **Banco de Questões 2020:** questão 10, nível 2, p. 31, Rio de Janeiro, IMPA, (2020).

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais:** Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MATHIAS, Carmen V.; ALENCAR, Hilário Alencar; LEIVAS, José Carlos Pinto **Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra:** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words:** Exercises in Visual Thinking. The Mathematical Association of America, (1993).

MISHRA, Punya; KOEHLER, Matthew J. **Technological pedagogical content knowledge:** A framework for teacher knowledge. Teachers college record, (2006).

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Geometria:** Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT: SBM, v. 216, (2015).

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Matemática discreta:** Coleção PROFMAT. Rio De Janeiro: SBM, 1o Edição, v. 6, 2013.

PÓLYA, George; CONWAY, John Horton. **How to solve it:** A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1957.

POINCARÉ, Henri. **La Science et l'hypothèse:** Paris: Flammarion, 1902. .

PUC-SP. **Revista do Instituto GeoGebra:** https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em 1 de agosto de 2024..

STEWART, I. **Nature's Numbers:** The Unreal Reality of Mathematical Imagination. Basic Books. (2004).