UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT

Adriano Lourenço da Silva

O volume do paraboloide circular no ensino médio

Maceió

2025

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ADRIANO LOURENÇO DA SILVA

O VOLUME DE PARABOLOIDE CIRCULAR NO ENSINO MÉDIO

Maceió

2025

ADRIANO LOURENÇO DA SILVA

O VOLUME DE PARABOLOIDE CIRCULAR NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió

2025

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586v Silva, Adriano Lourenço da.
O volume do paraboloide circular no ensino médio / Adriano Lourenço da Silva. – 2025.
26 f. : il. color.

Orientador: José Anderson de Lima e Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 26.

1. Cálculo de volumes. 2. Paraboloide. 3. Seções cônicas. I. Título.

CDU: 514.12

ADRIANO LOURENÇO DA SILVA

O VOLUME DE PARABOLOIDE CIRCULAR NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 27 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
JOSE ANDERSON DE LIMA E SILVA
Data: 27/02/2025 12:43:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Orientador

Documento assinado digitalmente
HILARIO ALENCAR DA SILVA
Data: 27/02/2025 12:58:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Examinador

Documento assinado digitalmente
ALCIDES DE CARVALHO JUNIOR
Data: 27/02/2025 13:24:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alcides de Carvalho Júnior
Departamento de Matemática - UFPE
Examinador

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, que iluminou o meu caminho durante toda esta caminhada.

Agradeço aos meus pais, minhas filhas, minha esposa e amigos, que foram fatores essenciais em todos os momentos da minha vida, dando apoio, incentivando e me encorajando quando mais necessitei.

Agradeço à banca examinadora pelas valiosas contribuições e sugestões, que enriqueceram este trabalho e foram essenciais para o meu crescimento acadêmico.

Por fim, um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva, que não mediu esforços em me orientar e me auxiliar nos momentos mais difíceis da produção desta dissertação. Agradeço também a todos aqueles que, de certa forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste projeto tão almejado, que é esta dissertação e a conclusão deste Mestrado.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo demonstrar como calcular o volume de um paraboloide elíptico, utilizando, como exemplo, o cálculo do volume de objetos em forma de paraboloides elípticos, como panelas ou objetos decorativos domésticos. Assim, destaca-se a importância do estudo da Geometria Analítica e suas aplicações no ensino médio, estabelecendo uma relação entre o estudo das cônicas, especialmente a parábola, e sua superfície quadrática geradora, o paraboloide. Para tanto, abordaremos alguns aspectos históricos e analíticos dessas superfícies cônicas e apresentaremos elementos básicos e geométricos importantes para a determinação do volume de tais objetos. Dessa forma, esta dissertação busca auxiliar alunos do ensino médio a calcular, de forma prática e precisa, o volume de sólidos com formato de paraboloides elípticos, sem a necessidade de conhecimento prévio em cálculo diferencial.

Palavras-chave: Parábola; Paraboloide; Seções Cônicas; Superfícies Quadráticas.

Abstract

This dissertation aims to demonstrate how to calculate the volume of an elliptical paraboloid, using as an example the calculation of the volume of objects shaped like elliptical paraboloids, such as pans or decorative household items. It highlights the importance of studying Analytical Geometry and its applications in high school, establishing a connection between the study of conic sections, especially the parabola, and its generating quadratic surface, the paraboloid. To achieve this, we will explore some historical and analytical aspects of these conic surfaces and present key geometric elements important for determining the volume of such objects. In this way, this dissertation seeks to assist high school students in calculating, practically and precisely, the volume of solids shaped like elliptical paraboloids, without requiring prior knowledge of differential calculus.

Keywords: Parable; Paraboloid; Conic Sections; Quadratic Surfaces.

Sumário

Introdução

O estudo dos sólidos geométricos, em particular os relacionados à teoria de volumes, possui grande relevância no desenvolvimento do conhecimento matemático, especialmente no Ensino Médio, onde os alunos são incentivados a compreender conceitos geométricos e algébricos de forma integrada. Entre esses sólidos, destaca-se o paraboloide circular, um sólido de revolução gerado pela rotação de uma parábola em torno de seu próprio eixo. Este objeto geométrico, que possui uma forma assemelhada à de uma taça (Figura 1), não apenas é um exemplo interessante de figuras tridimensionais, mas também estabelece uma conexão com objetos amplamente presentes em nosso cotidiano.

O cálculo do volume de um paraboloide circular, embora pouco abordado no Ensino Médio, constitui uma oportunidade ímpar para a aplicação de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de habilidades analíticas dos estudantes. Esse tipo de sólido está diretamente relacionado ao estudo de volumes, um dos tópicos essenciais no currículo de Geometria e Grandezas e Medidas, e oferece um contexto no qual o aluno pode explorar conceitos fundamentais de cálculo, mesmo sem recorrer diretamente ao cálculo integral, utilizando-se de métodos geométricos.

Sejam a e c números reais, sendo $a, c > 0$. A equação do paraboloide em um ponto $P(x, y, z)$ é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz.$$

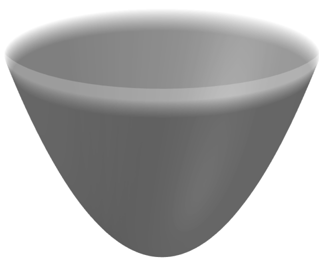


Figura 1. Paraboloide circular.

Este tipo de equação, ao ser analisada no contexto do volume de sólidos, permite que os alunos compreendam as propriedades geométricas e as transformações que ocorrem em figuras tridimensionais. Mais importante ainda, o estudo do volume de sólidos como o paraboloide circular contribui para o desenvolvimento de habilidades de abstração e raciocínio lógico que são cruciais no Ensino Médio.

Historicamente, figuras como o paraboloide circular têm fascinado matemáticos desde a Antiguidade. Arquimedes, por exemplo, embora não tenha utilizado diretamente o cálculo diferencial e integral, foi pioneiro no desenvolvimento de métodos para o cálculo de áreas e volumes, notadamente por meio de aproximações geométricas, utilizando o que ficou conhecido como o método da exaustão. Essa técnica foi essencial para os avanços posteriores no campo do cálculo, influenciando matemáticos como Johannes Kepler, que, no contexto de suas leis planetárias, aplicou métodos geométricos para estimar volumes, como foi o caso de seu estudo sobre o volume de barris de vinho.

Além disso, Bonaventura Cavalieri, matemático italiano, formalizou o método dos indivisíveis, uma das primeiras tentativas sistemáticas de resolver problemas de cálculo de áreas e volumes, propondo que figuras geométricas poderiam ser entendidas como sendo compostas por uma infinidade de partes indivisíveis. Esse método teve grande impacto no desenvolvimento posterior do cálculo, inspirando gerações de matemáticos, inclusive no campo do cálculo integral.

Em continuidade a esses princípios, uma contribuição significativa é encontrada no trabalho de Saraiva, que provou, sem o uso de cálculos integrais, que:

Existe um tetraedro que é Cavalieri equivalente a um elipsóide dado.

Inspirado por esse trabalho e pelo princípio de Cavalieri, provamos em [4] que:

Existe um prisma que é Cavalieri equivalente a um dado paraboloide circular $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz$, *limitado por um plano.*

1 Áreas e Volumes no Contexto da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece as aprendizagens essenciais para a educação básica no Brasil, servindo como um referencial para o desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes ao longo do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Dentro da área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC propõe a integração dos conceitos matemáticos com a realidade dos alunos, destacando a importância do ensino de temas como áreas e volumes, que são essenciais para o estudo de Geometria e Grandezas e Medidas.

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática. (BRASIL, 2018, p. 273).

No Ensino Fundamental, a BNCC organiza a Matemática em áreas de conhecimento interconectadas, como Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. O estudo de áreas e volumes é central nesse processo, pois proporciona o desenvolvimento do pensamento geométrico e algébrico, permitindo que os alunos interpretem, representem e calculem as medidas de diversas figuras geométricas e sólidos. O conceito de volume é abordado de maneira progressiva, iniciando-se com o cálculo de volumes de sólidos simples, como cubos e esferas, e avançando para formas mais complexas, como pirâmides e paraboloides.

> No que se refere a Grandezas e Medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfí cies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos.(BRASIL, 2018, p. 527).

Esse aprendizado é fundamental para que os estudantes consigam aplicar os conceitos matemáticos em situações cotidianas, como o cálculo do volume de objetos do seu cotidiano, como caixas e recipientes. A BNCC visa garantir que os alunos adquiram a habilidade de medir tanto as áreas de superfícies planas quanto os volumes de sólidos geométricos, competências essas que são indispensáveis para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático.

> A BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados

> desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 276).

A BNCC também destaca a relevância do uso de tecnologias no ensino da Matemática. Ferramentas tecnológicas, como calculadoras, softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, são apresentadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e seu uso é ampliado ao longo da trajetória escolar. A utilização dessas tecnologias para o cálculo de áreas e volumes contribui para uma compreensão mais concreta dos conceitos, permitindo que os estudantes explorem diferentes formas geométricas e seus respectivos volumes de maneira interativa e visual.

> Recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BRASIL, 2018, p.276).

O ensino da Geometria, conforme estabelecido na BNCC, está intimamente relacionado à capacidade de representar e transformar figuras utilizando recursos como o plano cartesiano e as transformações geométricas. As habilidades de calcular áreas e volumes são abordadas dentro dessa perspectiva, proporcionando aos alunos uma compreensão mais profunda da relação entre as propriedades dos objetos geométricos e o espaço que ocupam.

No Ensino Médio, a BNCC propõe uma integração mais robusta dos conhecimentos matemáticos, com ênfase na resolução de problemas complexos e no desenvolvimento de modelos matemáticos. Nesse contexto, os conceitos de área e volume continuam a ser tratados de forma central, mas com uma abordagem mais sofisticada. A integração de diferentes campos da Matemática, como Álgebra, Geometria e Grandezas e Medidas, é aprofundada, permitindo que os estudantes desenvolvam um raciocínio matemático mais abrangente e interdisciplinar.

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. (BRASIL, 2018, p. 471).

Portanto, o estudo de áreas e volumes na BNCC não deve ser encarado apenas como um exercício abstrato, mas sim como uma ferramenta crucial para o desenvolvimento de competências matemáticas que capacitam os alunos a compreender e atuar de maneira crítica e criativa no mundo ao seu redor. O ensino desses conceitos visa não apenas ao domínio técnico, mas também à promoção do letramento matemático, que contribui para a formação de um pensamento lógico, analítico e capaz de solucionar problemas do cotidiano.

2 Cálculos Básicos

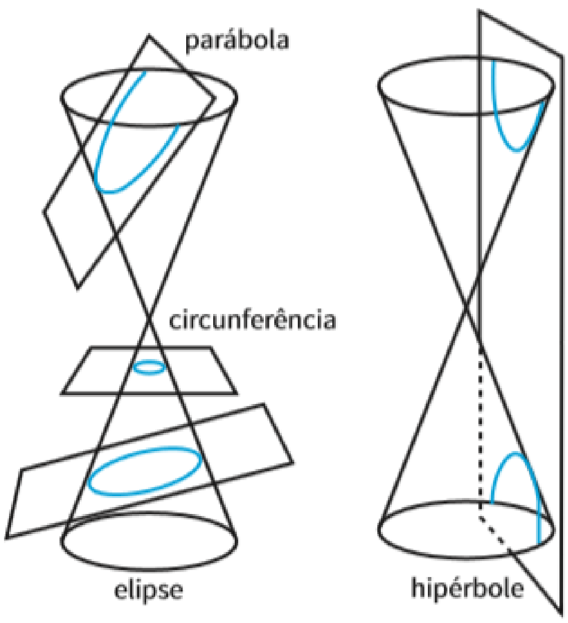
Neste capítulo estabeleceremos noções necessárias a compreensão dos capítulos posteriores.

2.1 Cônicas

As cônicas são parte importante da matemática, em particular da geometria, porque estão vinculadas a resolução dos problemas, desde clássicos das áreas de conhecimento, como a quadratura do círculo, a duplicação do cubo, e a trissecção do ângulo. Também estão vinculadas a problemas de Engenharia e Astronomia entre outras ciências. Além disso, muitas de suas aplicações práticas são palpáveis e estão ao alcance de qualquer estudante do Ensino Médio.

O conceito de cônicas surge ainda na antiguidade, por volta de 300 a.c, ligados aos nomes de Aristeu, o Velho, Menaecmus, Euclides de Alexandria, e Apolônio de Perga, que escreveu "As Cônicas", um tratado de 8 volumes que suplantou tudo que seus predecessores haviam escrito sobre o tema.

As cônicas são curvas obtidas a partir da interseção entre um cone e um plano com mostra a figura abaixo.

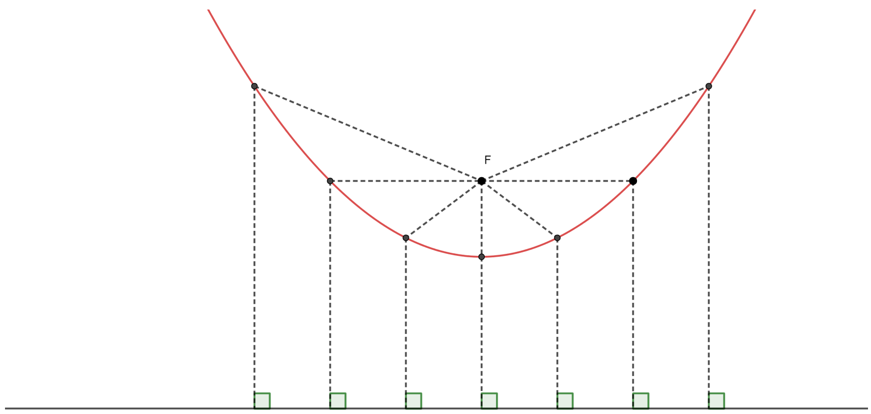


Fonte: [6].

2.2 Parábola

As parábolas são utilizadas no nosso cotidiano em diversos equipamentos e sistemas de muita importância para nossa sociedade. As propriedades refletoras da parábola contribuem para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis, etc. Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos nas invasões de Siracusa (cidade italiana).

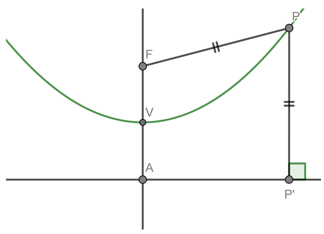
Sendo assim consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencentes a d. Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d.



Fonte: Autor (2025).

Na figura estão assinaladas sete pontos que são equidistantes do ponto F e da reta d.

Sendo P' o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta d,



Fonte: Autor (2025).

de acordo com a definição acima, P pertence à parábola se , e somente se : $d(P, F) = d(P, P')$ ou também:

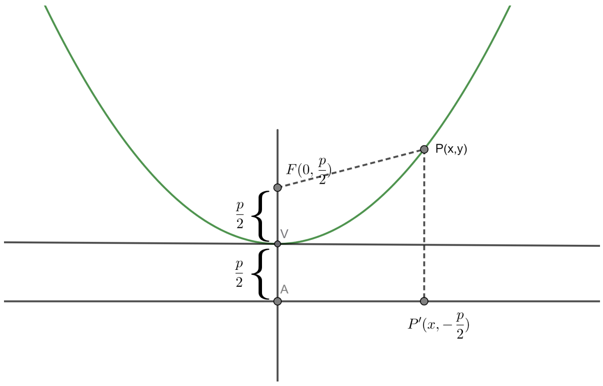
$$|\vec{PF}| = |\vec{PP'}|.$$

A parábola é constituída por foco F, reta diretriz d, o eixo que é a reta que passa pelo foco é perpendicular á diretriz e o vértice V que é a interseção da parábola com o seu eixo.

Com o objetivo de obtermos a equação da parábola, temos que associá-la ao sistemas de eixos cartesianos.

1. o eixo da parábola é o eixo dos y:

   Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(0, \frac{P}{2}\right)$. Da definição de parábola , tem-se $|\vec{PF}| = |\vec{PP'}|$. ou $|\vec{FP}| = |\vec{P'P}|$.



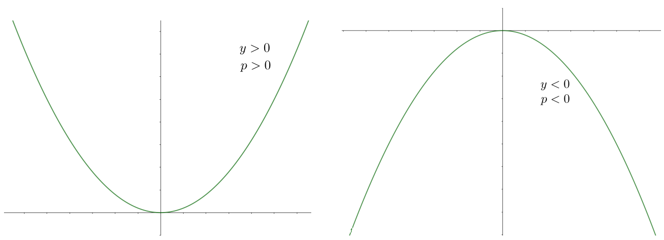
Fonte: Autor (2025).

Como $p'\left(x, \frac{P}{2}\right)$, vem

$$\begin{aligned}
\left|\left(x-0, y-\frac{p}{2}\right)\right| &= \left|\left(x-x, y+\frac{p}{2}\right)\right| \\
\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} \\
x^2+y^2-yp+\frac{p^2}{4} &= y^2+yp+\frac{p^2}{4} \\
x^2 &= yp+yp \\
x^2 &= 2yp.
\end{aligned}$$

Da análise desta equação conclui-se que, tendo em vista ser $2py$ sempre positivo ou nulo (pois é igual a $x^2 \leq 0$), os sinais de p e de y são sempre iguais.

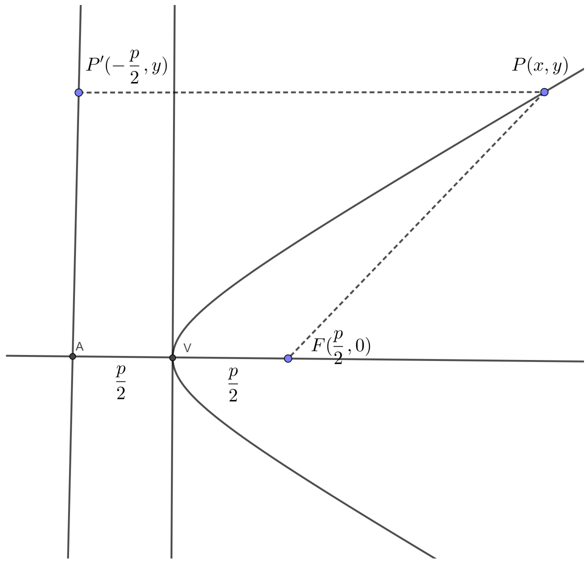
Se $p > 0$ a parábola tem concavidade para cima e, se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo conforme as figuras abaixo.



Fonte: Autor (2025).

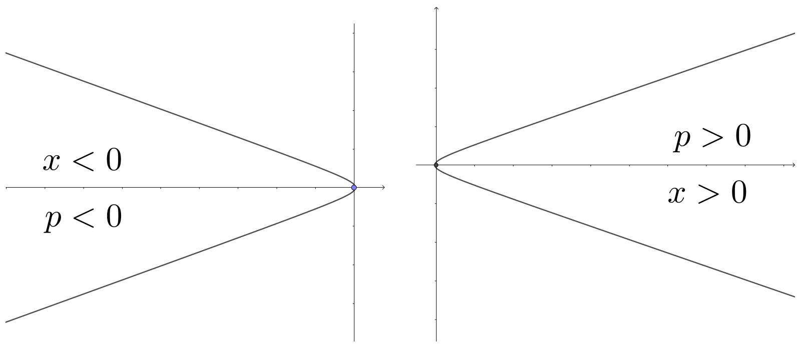
2. O eixo da parábola é o eixo x:

   Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, obtemos a equação reduzida $y^2 = 2px$.



Fonte: Autor (2025).

   Se $p > 0$, a parábola terá concavidade voltada para direita e, se $p < 0$, a parábola terá concavidade voltada para a esquerda como mostra as figuras abaixo.

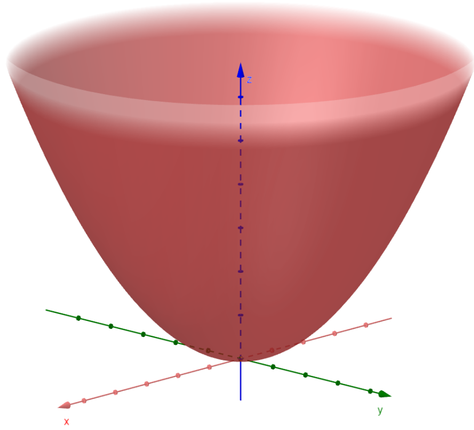


Fonte: Autor (2025).

2.3 Paraboloide

No paraboloide, as parábolas aparecem de forma natural e são as cônicas que mais aparecem como seções planas (paralelas aos planos coordenados). Um parabolóide é denominado elíptico quando suas seções são parábolas ou elipses e é denominado hiperbólico quando suas seções são parábolas e hipérboles.

O parabolóide elíptico possui uma forma semelhante a uma taça e pode possuir um ponto de máximo ou mínimo.

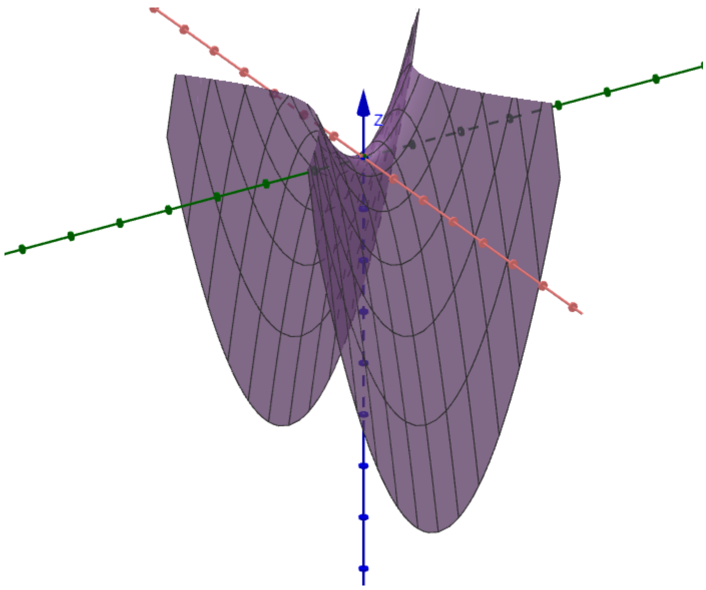


Fonte: Autor (2025).

As equações do paraboloide com eixo Oz são

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= z \longrightarrow \text{paraboloide elíptico} \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= z \longrightarrow \text{paraboloide hiperbólico.} \end{aligned}$$

O paraboloide hiperbólico possui um formato semelhante a uma sela e pode possuir um ponto crítico chamado de “ponto de sela”. Um exemplo do cotidiano de um paraboloide hiperbólico é o formato de uma batata Pringles.



Fonte: Autor (2025).

2.4 Superfícies Quadráticas

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, yez,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0,$$

onde pelo menos os coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero, representa uma superfície quadrática ou simplesmente uma quadrática.

Se a superfície quádrica dada pela equação for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica. A interseção de uma superfície com um plano chamada traço da superfície do plano.

O traço da superfície quadrática no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0,$$

contida no plano $z = 0$, isto é , no plano xOy.

Por outro lado , através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação pode ser transformada em uma das formas

$$ax^2 + by^2 + cx^2 = d.$$

Se nenhum dos coeficientes da equação for nulo , ela pode ser escrita sob uma das formas

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

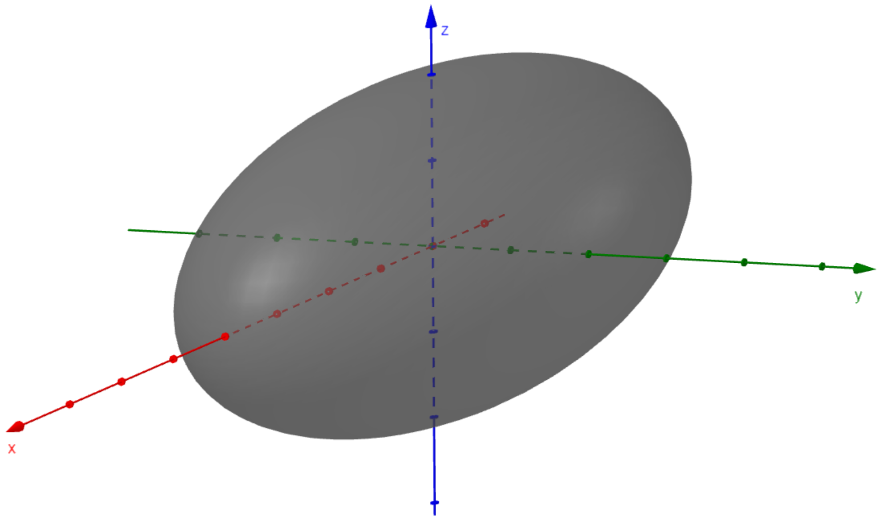
Denominadas, qualquer delas, formas canônicas ou padrão de um superfície quadrática centrada.

2.5 Elipsóide

O elipsóide é a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Em que todos os coeficientes dos termos do 1º membros da equação são positivos , onde a, bec são reais positivos e representam as medidas dos semi – eixos do elipsóide como mostrada na



Fonte: Autor (2025).

O traço no plano xOy é a elípse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ z = 0.$$

E os traços nos planos xOz e yOz são as elípses

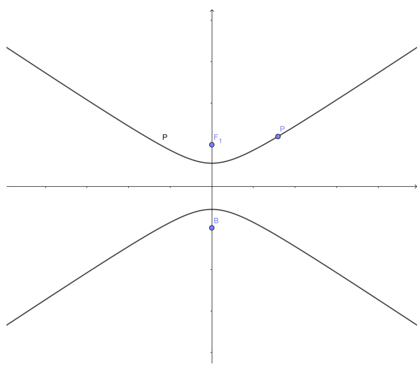
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{z^2} = 1, \ y = 0 \text{ e } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ x = 0.$$

2.6 Hipérbole

A hipérbole é uma cônica, assim como a circunferência, a parábola e a elipse. Dados dois pontos, F_1 e F_2, com distância $2c$ e um número real positivo a, com $a < c$, chamamos de hipérbole o conjunto de pontos P tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

O ponto médio entre os focos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole.



Fonte: Autor (2025).

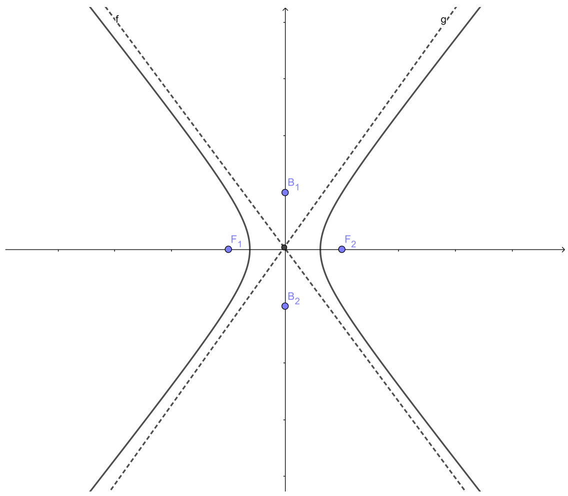
Se os focos F_1 e F_2 estão sob o eixo horizontal, então a equção da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se os focos F_1 e F_2 stão sobre o eixo vertical, então a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A hipérbole é formada por focos F_1 e F_2, vértices A_1 e A_2, segmento focal F_1F_2 com tamanho $2c$, o segmento A_1A_2 é o eixo real e possui medida $2a$, o segmento B_1B_2 é o eixo imaginário (ou conjugado) e possui tamanho $2c$ e as retas pontilhadas são assíntotas da hipérbole.



Fonte: Autor (2025).

3 História da Matemática para Volumes

3.1 Método dos Indivisíveis

Documentos históricos egípcios já apresentavam a cubagem do tronco de pirâmides. Entretando, foi o grego Eudóxio quem primeiro sistematizou um método para cálculos de áreas e volume de sólidos cônicos, o método da Exaustão, que depois de apresentado por Euclides no Elementos foi reformulado por Arquimedes , dando-lhe maior praticidade só melhorada no século XVI pelo astrônomo Johannes Kleper , ao considerar áreas e volumes compostos de uma quantidade “infinita” de retas ou planos, Kleper abandonou as técnicas arquimedianas em troca dos elementos indivisíveis (infinitesimais) de forma já bastante próxima do que hoje usamos nos limites. Galileu Galilei usou a técnica dos infinitesimais na determinação das leis da queda livre dos corpos, em 1683.

Embora Galileu tivesse tentado formalizar os infinitésimos , a tarefa só foi realizada pelo seu discípulo, o matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647). Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalairi (1598 – 1647), que os chamava de método dos indivisíveis, e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro ”Geometria Indivisibilibus”, de 1635. Esse método é muito anterior a Cavalieri . Era conhecido dos gregos, como Demócrito (460 – 370 a.C.) e Arquimedes (287 – 212 a. C.), que o utilizavam para obter volumes de sólidos.

3.2 Princípio de Cavalieri

As figuras abaixo mostram as mesmas moedas empilhadas de duas maneiras diferentes . Que relação existe entre o volume da primeira pilha de moedas e o volume da segunda pilha?

Fonte: (Livro Farias Brito - 2024).

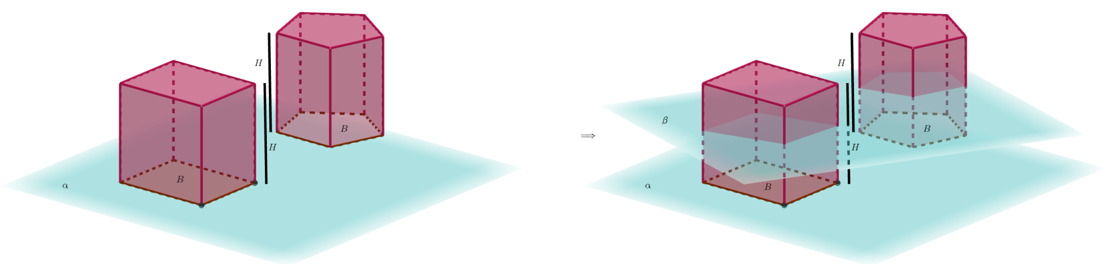
As pilhas têm volumes iguais , pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem , e as duas pilhas são compostas pelas mesmas moedas.

Essa ideia intuitiva foi transformada em uma importante proposição pelo matemático e professor da universidade de Bolonha, Bonaventura Cavalieri. A obra mais importante de Cavalieri, Geometria indivisibilibus Continuorum (Geometria dos indivisíveis contínuos), publicada em 1635, apresenta o princípio, enunciado a seguir, para a comparação de áreas e volumes de dois sólidos geométricos.

1. Sejam R e S figuras planas incluidas entre um par de retas paralelas. Suponha que, para toda reta s paralela ao par de retas dadas, as interseções de R e S com s sejam vazias ou sejam segmentos de comprimentos iguais. Então as áreas de R e S são iguais.

2. Sejam P_1 e P_2 sólidos contidos entre um par de planos. Suponha que qualquer plano β, paralelo aos primeiros planos, que intersecta um dos sólidos também intersecta o outro e determina nesses sólidos secções de mesma área, então P_1 e P_2 tem volumes iguais.

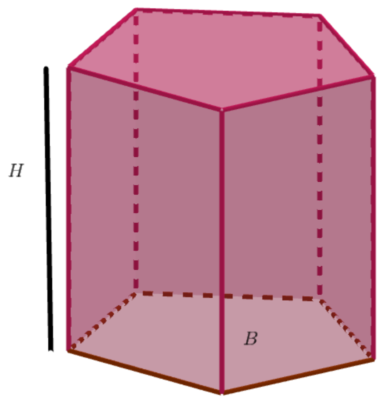
Exemplo 1. Considerando, em semiespaço de origem α, um plano, um paralelepípedo reto–retângulo e um prisma de mesma altura H, cujas bases estão contidas em α e têm a mesma área B. Assim notamos que qualquer plano β, paralelo a α, que intercepte um dos primas também intercepta o outro prisma.



Fonte: Autor (2025).

Sendo assim, como qualquer secção transversal de um prima é congruente às duas bases, temos que qualquer plano β, nas condições anteriores, determina nesses prismas secções de mesma áreas. Assim, o princípio de Cavalieri nos garante que os prismas tem volumes iguais. Sendo m e n as dimensões da base do paralelepípedo , seu volume V é dado por $V = m.n.H$. Como a área B da base desse paralelepípedo é $B = m.n$, temos $V = B.H$, que também é o volume do outro prima.

Assim, concluímos que o volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base por sua altura.



Fonte: Autor (2025).

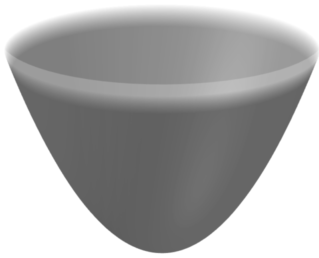
Em particular , o resultado vale para os sólidos que costumam ser estudados no ensino médio, como poliedros, conforme o exemplo acima citado, além de esferas e dos paraboloides elípticos serão o principal objetivo de estudo desta dissertação.

Assim, para demonstração de sólidos mais complexos, precisaremos de uma técnica que permita obter a áreas e consequentemente os volumes de tais sólidos que será fornecida pela teoria de integração de funções reais estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral .

4 O volume do Paraboloide Circular

4.1 Paraboloide Elíptico

O paraboloide elíptico é um sólido de revolução obtido pela rotação da parábola em seu próprio eixo, seu formato se assemelha à uma taça e ele possui um ponto máximo ou mínimo. Sejam a, b números reais positivos e $c \neq 0$, definimos a equação do paraboloide em um ponto $P = (x, y, z)$ por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$.



Fonte: Autor (2025)

Como nosso problema é determinar o volume do paraboloide elíptico em função de suas parábolas e eixos, esse é um problema de cálculos volumétricos, cubagem, que tem muita importância comercial e industrial. Se $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície está inteiramente abaixo destes planos. Assim, o sinal de c coincide com o de z, caso contrário não haverá lugar geométrico.

Um traço no plano $z = k$, $k = 0$ é uma elípse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. Se na equação do paraboloide tivermos $a = b$, a paraboloide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola em torno do eixo do z. Neste caso, o traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

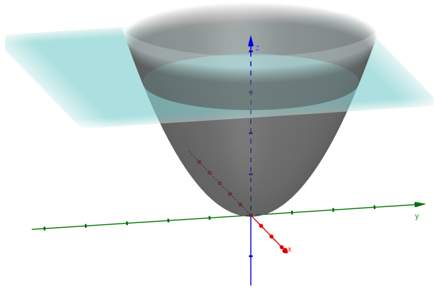
4.2 Resultado Principal

Teorema 1. *Existe um prisma que é Cavalieri equivalente a um dado paraboloide circular* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz$, *limitado por um plano.*

Demonstração. Considere o paraboloide circular de equação

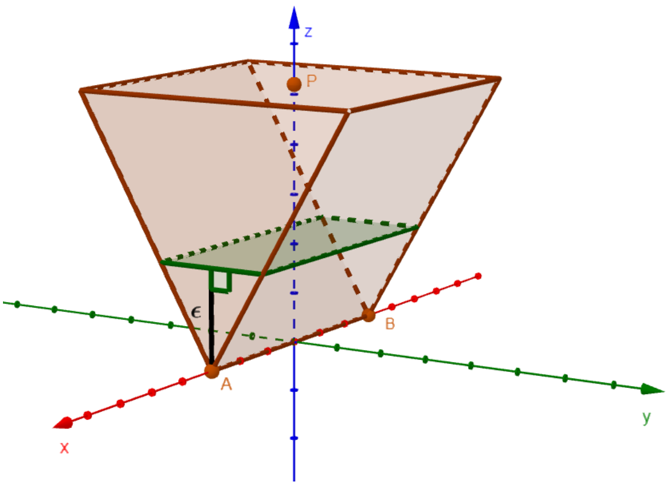
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz,$$

onde a e c são constantes. Considere também o plano $z = k$, onde k é uma constante.



Fonte: Autor (2025)

Tome no plano $z = k$ o quadrado de lado $a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}$, cujos lados são paralelos aos eixos Ox e Oy, e suas diagonais se intersectam no ponto $P(0,0,k)$. Tome também os pontos $A\left(\frac{a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}}{2},0,0\right)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}}{2},0,0\right)$ e considere o segmento $\overline{AB}$. Observe que, ao conectar os vértices do quadrado, cujas coordenadas satisfazem $x > 0$, ao ponto A, e os vértices cujas coordenadas satisfazem $x < 0$ ao ponto B, obtemos um prisma cuja base é um triângulo isósceles. Consulte a seguir a figura .

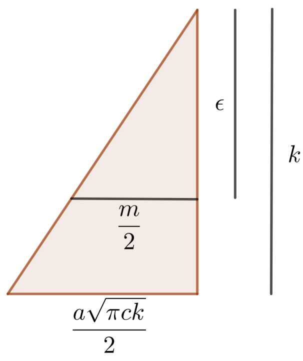


Fonte: Autor (2025).

No nível $\epsilon \in \mathbb{R}, 0 < \epsilon \leq k$, o plano paralelo ao plano xy determina, no paraboloide circular, a secção dada por uma circunferência de raio $a\sqrt{c\epsilon}$, cuja área é dada por:

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \pi(a\sqrt{c\epsilon})^2 \\ &= \pi a^2 c\epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, a secção do prisma pelo mesmo plano é um retângulo de lados de medida $l = a\sqrt{\pi ck}$, paralelo ao segmento $\overline{AB}$, e de medida m, paralelo ao eixo Oy. Por semelhança de triângulos,



Fonte: Autor (2025).

Segue que

$$\frac{k}{\epsilon} = \frac{a\sqrt{\pi ck}}{m},$$

que permite calcular a área da secção retangular, fornecendo

$$\begin{aligned} m.l &= \frac{\epsilon}{k} a\sqrt{\pi ck} \cdot a\sqrt{\pi ck} \\ &= \frac{\epsilon}{k} a^2 \pi ck \\ &= \epsilon a^2 \pi c \\ &= A_\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer nível ϵ vale a igualdade da área do disco com a área do retângulo, que nos permite, pelo segundo princípio de Cavalieri, concluir que o volume do paraboloide circular limitado pelo plano $z = k$ é dado por:

$$\frac{k^2}{2} a^2 c \pi.$$

$\square$

Referências

[1] BRASIL. Base nacional comum curricular: educação infantil e ensino fundamental. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Editora Blucher, 2019.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. Atual, 1993.

[4] LIMA, Anderson; LOURENÇO, Adriano; FERNANDES, Cleisiane. O volume do paraboloide circular no ensino médio. Professor de Matemática Online, Rio de Janeiro, v. 12, n. 4, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1239. Acesso em: 17 abr. 2025.

[5] SARAIVA, José Cloves V. O Volume do Elipsóide no Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, RPM 52, p.21-24, 2003. Disponível em:

http://www.rpm.org.br/cdrpm/52/5.htm. Acesso em: 10 de abril de 2024.

[6] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra linear e geometria analítica. São Paulo: Pearson Education, 2006.

[7] WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. Geometria analítica. Makron Books, São Paulo, 2000.