

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Beleza da Matemática: Explorando a Sequência
de Fibonacci no Ensino Médio

Welison Miguel Sampaio Vasconcelos



Instituto de Matemática

Maceió, agosto de 2025



PROFMAT

WELISON MIGUEL SAMPAIO VASCONCELOS

**A Beleza da Matemática: Explorando a Sequência de
Fibonacci no Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao Programa de PósGraduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas/UFAL como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Carlos Almeida de Lima

Maceió-AL
2025

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

- V331b Vasconcelos, Welison Miguel Sampaio.
 A beleza da matemática : explorando a sequência de Fibonacci no ensino médio / Welison Miguel Sampaio Vasconcelos. - 2025.
 93 f. : il.
- Orientador: José Carlos Almeida de Lima.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2025.
- Bibliografia: f. 86-87.
Apêndices: f. 88-93.
1. Fibonacci, Números de. 2. Proporção áurea. 3. Ensino médio. 4. Interdisciplinaridade. 5. Atividades didáticas. I. Título.

CDU: 511

Folha de Aprovação

WELISON MIGUEL SAMPAIO VASCONCELOS

A Beleza da Matemática: Explorando a Sequência de Fibonacci no Ensino Médio

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 26 de junho de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 JOSE CARLOS ALMEIDA DE LIMA
Data: 26/08/2025 12:01:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima – UFAL (Presidente)

Documento assinado digitalmente
 JONATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA
Data: 25/08/2025 11:21:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jônathas Douglas Santos de Oliveira-CEFET-MG

Documento assinado digitalmente
 CARLOS GONCALVES DO REI FILHO
Data: 26/08/2025 14:57:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Gonçalves do Rei Filho-UFAL

MACEIÓ - 2025

Dedico esta dissertação aos meus queridos pais, Eliel e Regina.

Por todo o amor, apoio e ensinamentos que me proporcionaram ao longo da vida. Vocês foram a base sólida que me sustentou, a força que me impulsionou nos momentos difíceis e a inspiração constante para buscar sempre o meu melhor.

Este trabalho é fruto do que me ensinaram sobre dedicação, perseverança e o valor do conhecimento. Sou eternamente grato(a) por tudo o que fizeram por mim e por acreditarem nos meus sonhos mesmo quando pareciam distantes.

A vocês, meu amor infinito e minha maior conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por Sua infinita graça, força e sabedoria, que me sustentaram ao longo desta jornada. Sem Sua luz guiando meus passos, esta conquista não seria possível.

Aos meus amados pais, Eliel e Regina por todo o amor, apoio e sacrifícios que me proporcionaram a base sólida para alcançar este momento. Vocês são minha inspiração e minha fortaleza.

Ao meu orientador, Professor Dr. José Carlos, por sua paciência, dedicação e orientação precisa. Sua confiança em meu trabalho e seus ensinamentos foram fundamentais para a conclusão deste projeto.

Aos meus irmãos, Wemerson e Eliel Jr., pela cumplicidade e incentivo em todos os momentos. Vocês sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me motivando a seguir em frente.

Aos colegas de curso, Henrique, Ariel, Caio, Alysson, Thiago, Jamerson, Isabella, Ramon, Adriano, Maciel, Luciano, Herivelton, Zeneilton e Rodolfo, pela troca de conhecimentos, apoio mútuo e momentos compartilhados ao longo desta jornada acadêmica. Cada desafio foi mais leve com a parceria de vocês.

À minha amada esposa, Ana Beatriz, por sua compreensão, carinho e incentivo incondicional. Sua presença foi um alicerce nos momentos mais difíceis, e sua fé em mim tornou esta conquista ainda mais significativa.

À minha cunhada Anny e ao seu noivo Eduardo, pelo apoio, amizade e palavras de encorajamento que tanto contribuíram para que eu perseverasse nesta caminhada.

À minha sogra, Cida, por sua generosidade, carinho e constante motivação, que me fizeram sentir sempre acolhido e apoiado.

A todos os professores do Instituto de Matemática da UFAL, pela excelência no ensino e pela dedicação em formar não apenas profissionais, mas também cidadãos conscientes e comprometidos com o saber.

A cada um de vocês, meu mais sincero e profundo agradecimento.

“A sequência de Fibonacci nos mostra como a matemática está presente nas formas e padrões da natureza, revelando a ordem e a beleza do universo”.

Welison Miguel Sampaio Vasconcelos

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar a sequência de Fibonacci no contexto do Ensino Médio, destacando sua história, propriedades matemáticas, aplicações interdisciplinares e possibilidades didáticas. A pergunta central que orientou este estudo foi: Como a sequência de Fibonacci pode ser utilizada como ferramenta pedagógica para promover uma aprendizagem significativa e interdisciplinar na Educação Básica? A metodologia adotada baseou-se em uma revisão bibliográfica abrangente, contemplando livros, artigos científicos e materiais didáticos, além da análise de documentos curriculares como a BNCC. O estudo inicia com uma contextualização histórica, abordando a vida e obra de Leonardo de Pisa, seguido pela definição formal da sequência, suas propriedades numéricas e a relação com a razão áurea. São discutidas também suas manifestações na natureza, na arte, na arquitetura e em outras áreas do conhecimento. Como produto final, foram elaborados planos de aula interdisciplinares com atividades práticas, voltadas à aplicação desses conteúdos em sala de aula. Acreditamos que este trabalho pode contribuir significativamente para tornar o ensino da matemática mais atrativo, conectando teoria e prática e revelando a beleza presente na estrutura dos números.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Proporção Áurea. Ensino Médio. Interdisciplinaridade. Atividades Didáticas.

ABSTRACT

This study aims to explore the Fibonacci sequence within the context of high school education, highlighting its history, mathematical properties, interdisciplinary applications, and didactic possibilities. The central question guiding this research was: *How can the Fibonacci sequence be used as a pedagogical tool to promote meaningful and interdisciplinary learning in basic education?* The methodology adopted was based on a comprehensive literature review, including books, scientific articles, and educational materials, as well as an analysis of curricular documents such as the BNCC (Brazilian National Common Curricular Base). The study begins with a historical contextualization, addressing the life and work of Leonardo of Pisa, followed by the formal definition of the sequence, its numerical properties, and its relationship with the golden ratio. Its manifestations in nature, art, architecture, and other areas of knowledge are also discussed. As a final product, interdisciplinary lesson plans with practical activities were developed, aimed at applying these concepts in the classroom. We believe this work can significantly contribute to making mathematics teaching more engaging, by connecting theory and practice and revealing the beauty present in the structure of numbers.

Keywords: Fibonacci Sequence; Golden Ratio; High School; Interdisciplinarity; Didactic Activities.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	CONTEXTO HISTÓRICO	13
1.1	O Problema dos Coelhos	13
1.2	A Difusão e a Importância da Sequência de Fibonacci	14
1.3	Influência de Fibonacci nas Ciências Modernas	16
1.3.1	Aplicações na Biologia	16
1.3.2	Aplicações na Computação	16
1.3.3	Aplicações na Física	17
1.3.4	Aplicações na Economia	17
1.3.5	Outras Aplicações	17
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI . .	18
2.1	Sequência de Fibonacci e suas propriedades	18
2.2	Proporção Áurea - Número de Ouro	22
2.3	Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro	24
2.3.1	A Convergência dos Quocientes para a Proporção Áurea	24
2.4	O pentagrama e o número de ouro	26
2.5	A Fórmula de Binet	27
2.6	Demonstração da Fórmula de Binet	28
3	APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	31
3.1	Aplicações na Natureza	31
3.1.1	Nas Plantas: Folhas, Sementes e Escamas	31
3.1.2	Espirais na Natureza	33
3.1.3	Reprodução e Crescimento Animal	34
3.1.4	Proporções no Corpo Humano	36
3.2	A Proporção Áurea na Arte	36
3.2.1	Arquitetura e Design	38
3.3	Aplicações na Computação	39
3.3.1	Algoritmos de Fibonacci	39
3.4	Fibonacci no Mercado de Capitais	40
4	PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE FIBO- NACCI NO ENSINO MÉDIO	42
4.1	Atividade 1 – O Problema dos Coelhos e a Introdução à Sequência de Fibonacci	43
4.2	Atividade 2 – A Sequência de Fibonacci na Natureza	45

4.3	Atividade 3 – Construção da Espiral Áurea com software GeoGebra .	48
4.4	Atividade 4 – A Proporção Áurea no Corpo Humano	60
4.5	Atividade 5 – Construção do Pentagrama no Software GeoGebra . .	62
4.6	Atividade 6 – A Sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras .	67
4.7	Atividade 7 – Explorando a Relação entre a Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal	70
4.8	Atividade 8 – Introduzindo as Propriedades da Sequência de Fibonacci	72
5	ESTUDOS DE CASO E RELATOS DE EXPERIMENTOS SOBRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO	75
5.1	Benefícios Pedagógicos do Ensino da Sequência de Fibonacci . . .	84
	Conclusão	85
	REFERÊNCIAS	86
	APÊNDICE A – ATIVIDADE 1: O PROBLEMA DOS COELHOS E A INTRODUÇÃO À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	88
	APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA NA- TUREZA	89
	APÊNDICE C – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 4	90
	APÊNDICE D – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 6	91
	APÊNDICE E – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 7	92

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Esquema de reprodução dos coelhos segundo o problema de Fibonacci.	14
Figura 2.1 – Segmento de reta dividido na proporção áurea	23
Figura 2.2 – Razão entre termos consecutivos da Sequência de Fibonacci	24
Figura 2.3 – Pentagrama	26
Figura 3.1 – Girassol (<i>Helianthus annuus</i>) são 21 no sentido horário e outras 34 em anti-horário.	31
Figura 3.2 – <i>suculenta</i> (<i>Echevéria</i>)	32
Figura 3.3 – Escamas das pinhas	32
Figura 3.4 – Exemplos da formação da espiral áurea no nautilus	33
Figura 3.5 – Casco do caracol	33
Figura 3.6 – Comparação entre as formas de uma galáxia e a espiral áurea	34
Figura 3.7 – Confrontação entre os formatos de um furacão e da espiral áurea	34
Figura 3.8 – Árvore genealógica de uma zangão	35
Figura 3.9 – Homem Vitruviano	36
Figura 3.10–A Última Ceia	37
Figura 3.11–A sequência de Fibonacci e a Basílica de San Lorenzo.	37
Figura 3.12–Partenon na Grécia	38
Figura 3.13–A Pirâmide de Quéops	38
Figura 3.14–Museu Guggenheim, projetado por Frank Lloyd Wright	39
Figura 3.15–Ciclo das ondas de Elliott	40
Figura 4.1 – Exibindo eixos e malhas	50
Figura 4.2 – Segmento com comprimento 1	51
Figura 4.3 – Construção de um quadrado de lado 1	51
Figura 4.4 – Construindo outro quadrado de lado 1	52
Figura 4.5 – Construindo um quadrado de lado 2	53
Figura 4.6 – Construindo um quadrado de lado 3	53
Figura 4.7 – Construindo um quadrado de lado 5	54
Figura 4.8 – Construindo um quadrado de lado 8	54
Figura 4.9 – Construindo um quadrado de lado 13	55
Figura 4.10–Traçando a espiral no quadrado INOP	56
Figura 4.11–Traçando a espiral no quadrado INOP	56
Figura 4.12–Traçando a espiral no quadrado LMNG	57
Figura 4.13–Traçando a espiral no quadrado LEJK	57
Figura 4.14–Traçando a espiral no quadrado JDHI	58
Figura 4.15–Traçando a espiral no quadrado CFGH	58
Figura 4.16–Traçando a espiral no quadrado AEFB	59
Figura 4.17–Traçando a espiral no quadrado DABC	59

Figura 4.18–Exibindo ferramenta de polígono regular	64
Figura 4.19–Definindo o centro do pentágono.	64
Figura 4.20–Definindo o raio do pentágono.	65
Figura 4.21–5 lados para formar um pentágono regular.	65
Figura 4.22–Pentágono regular.	65
Figura 4.23–Ferramenta segmento	66
Figura 4.24–Diagonal de um pentágono regular.	66
Figura 4.25–As 5 diagonais do pentágono regular.	66
Figura 4.26–Relação diagonal/lado 1,618 no pentágono regular.	67
Figura 5.1 – Estudantes em atividade geométrica sobre o Retângulo de Ouro	77
Figura 5.2 – Trabalho dos alunos realizado durante a atividade.	78
Figura 5.3 – Alunos realizando medições corporais durante a atividade prática	80
Figura 5.4 – Registro dos alunos em grupo durante a atividade prática de crescimento populacional	82
Figura E.1 – Relação entre as diagonais do Triângulo de Pascal e os números de Fibonacci.	92

INTRODUÇÃO

A matemática é frequentemente vista pelos estudantes como uma disciplina abstrata, desvinculada de sua vida cotidiana. No entanto, a sequência de Fibonacci oferece uma oportunidade única para mudar essa percepção. Popularizada pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, no século XIII, essa sequência é uma das mais fascinantes da história da matemática, com aplicações que transcendem fronteiras disciplinares, aparecendo na natureza, na arte, na arquitetura e até mesmo na tecnologia moderna.

No ensino médio, um dos maiores desafios enfrentados pelos professores é captar o interesse dos alunos e demonstrar a aplicabilidade da matemática em contextos reais. A sequência de Fibonacci, com suas conexões naturais e estéticas, permite abordar conceitos matemáticos complexos de forma visual, prática e interativa, proporcionando uma experiência de aprendizagem rica e interdisciplinar.

O objetivo desta dissertação é apresentar a sequência de Fibonacci como uma ferramenta pedagógica no ensino médio, destacando sua relevância histórica, seu impacto nas diferentes áreas do conhecimento e sua aplicabilidade no contexto escolar. Para isso, propõe-se uma abordagem didática que conecta matemática, biologia, arte e tecnologia, utilizando a sequência de Fibonacci como ponto de partida para despertar a curiosidade e o encantamento dos alunos.

Além disso, esta dissertação busca contribuir para construção de uma prática pedagógica efetiva ao oferecer estratégias e atividades que facilitem a introdução do tema nas salas de aula, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da percepção estética dos estudantes.

A estrutura deste trabalho está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo, apresenta-se o contexto histórico e a origem da sequência de Fibonacci; no segundo, são explorados os fundamentos matemáticos da sequência e suas representações; no terceiro, discute-se sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento; no quarto, é proposta uma abordagem pedagógica para o ensino médio; no quinto, apresentam-se estudos de caso e relatos de experiências em sala de aula; e, finalmente, na conclusão, são destacadas as contribuições e os desafios dessa abordagem.

1 CONTEXTO HISTÓRICO

A história da sequência de Fibonacci está intimamente ligada a Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, um dos mais influentes matemáticos da Idade Média. Nascido por volta de 1170, na cidade de Pisa, Itália, Fibonacci era filho de Guglielmo Bonacci, um representante comercial de Pisa estabelecido em Bugia (atualmente Béjaïa, na Argélia). Essa posição proporcionou a Fibonacci uma oportunidade única: conviver com as matemáticas árabe e grega, que, à época, estavam muito mais avançadas do que o conhecimento matemático europeu, ainda preso a métodos romanos arcaicos (Livio, 2006).

Durante suas viagens pelo Mediterrâneo, Fibonacci estudou com diversos mestres árabes que trabalhavam com álgebra, aritmética e métodos de cálculo mais eficientes. Essa experiência formou a base de seu trabalho mais conhecido, o *Liber Abaci* ("Livro do Ábaco"), publicado em 1202. Esse tratado visava não apenas educar a elite mercantil europeia no uso do sistema de numeração indo-arábico, mas também apresentar métodos inovadores para resolver problemas práticos do comércio e da economia (Livio, 2006).

O *Liber Abaci* não foi apenas um compêndio de cálculos; ele representou uma verdadeira revolução cultural e científica, pois abriu caminho para a disseminação do sistema decimal na Europa Ocidental, substituindo gradualmente os complicados cálculos baseados em numerais romanos (Boyer, 2012).

1.1 O Problema dos Coelhos

Dentre os diversos exemplos apresentados no *Liber Abaci*, destaca-se um problema que modela a reprodução de coelhos em condições ideais. A proposta consiste em determinar o número de pares de coelhos após um determinado número de meses, considerando as seguintes regras: (Livio, 2006).

- Inicia-se com um único par de coelhos recém-nascidos;
- A partir do segundo mês de vida, cada par torna-se fértil e gera um novo par por mês;
- Os coelhos nunca morrem;
- Os pares gerados tornam-se férteis a partir do segundo mês de vida.

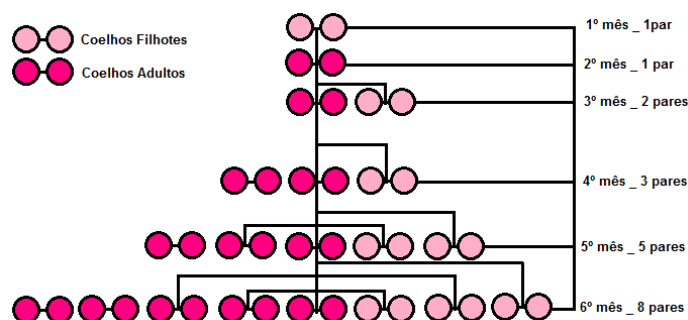
O crescimento da população pode ser visualizado da seguinte forma:

- Mês 1: 1 par (par inicial).
- Mês 2: 1 par (o par inicial, agora maduro, ainda sem descendência).
- Mês 3: 2 pares (o par inicial gera um novo par).

- Mês 4: 3 pares (o par inicial gera outro par; o par do mês 3 ainda não se reproduz).
- Mês 5: 5 pares (o par inicial e o par do mês 3 geram novos pares).

Seguindo essa linha de raciocínio, nos meses seguintes o número de pares será 8, 13, 21, e assim sucessivamente, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1.1 – Esquema de reprodução dos coelhos segundo o problema de Fibonacci.



Fonte: <https://ifmtsaudeebemestar.blogspot.com/2018/07/leonardo-de-pisa-fibonacci.html>

A solução envolve acompanhar o crescimento da população mês a mês, observando que, a partir do terceiro mês, o número de pares em cada etapa é obtido somando-se o total de pares do mês anterior com o número de pares férteis naquele momento (isto é, os que existiam dois meses antes). Esse raciocínio conduz naturalmente a uma relação de recorrência da forma:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Essa fórmula gera a seguinte sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Ao final de 12 meses, portanto, o número de pares de coelhos seria 144. Embora idealizado, esse problema apresenta um padrão de crescimento progressivo e baseado na repetição de etapas anteriores, o que deu origem à sequência que viria a ser conhecida posteriormente como Sequência de Fibonacci.

A importância desse problema está em sua simplicidade aliada à riqueza matemática: ele exemplifica como uma situação cotidiana pode ser representada por meio de uma estrutura algébrica recorrente, servindo como ponto de partida para o estudo de padrões, crescimento exponencial e modelagens em diversos contextos.

1.2 A Difusão e a Importância da Sequência de Fibonacci

Após a publicação do *Liber Abaci*, a sequência de Fibonacci passou a ser estudada por matemáticos medievais e, posteriormente, redescoberta em diversos contextos ao

longo dos séculos. Inicialmente restrita a círculos de estudiosos, a sequência ganhou maior notoriedade durante o Renascimento, um período em que o conhecimento científico e artístico floresceu de maneira intensa na Europa (Livio, 2006).

Matemáticos e pensadores como Luca Pacioli e Johannes Kepler retomaram o interesse pela sequência, impressionados pela sua surpreendente conexão com as proporções harmônicas observadas na natureza e na arte. Pacioli, em seu tratado *De Divina Proportione*, destacou a importância da proporção áurea, que tem relação direta com a sequência de Fibonacci. Já Kepler, ao estudar as órbitas planetárias e o crescimento de plantas, reconheceu que as espirais naturais frequentemente se aproximam de proporções descritas pela sequência (Boyer, 2012; Livio, 2006).

Uma das propriedades mais fascinantes da sequência de Fibonacci é a sua íntima relação com a proporção áurea ($\Phi \approx 1,618$). À medida que se divide um número da sequência pelo seu antecessor, as razões obtidas convergem progressivamente para o valor de Φ . Por exemplo: $13/8 \approx 1,625$ e $21/13 \approx 1,615$ e assim por diante, com aproximações cada vez mais precisas (Livio, 2006).

Essa proporção aparece de forma surpreendente em diversos elementos da arte, da arquitetura e da natureza, como:

- A estrutura do Partenon em Atenas, cujas proporções arquitetônicas sugerem o uso consciente da razão áurea pelos gregos antigos.
- Obras de Leonardo da Vinci, como O Homem Vitruviano e a composição de suas pinturas, que refletem a busca por equilíbrio e perfeição baseados em proporções matemáticas.
- O padrão de crescimento das folhas ao redor de um caule, conhecido como filotaxia, onde o arranjo das folhas muitas vezes segue ângulos relacionados à proporção áurea, otimizando a exposição à luz solar.
- A disposição das pétalas em flores e a organização espiralada das sementes em girassóis, onde o número de elementos frequentemente corresponde a números de Fibonacci consecutivos.

Além dessas manifestações, a sequência de Fibonacci também se faz presente em fenômenos como a formação de conchas, a estrutura de pinhas, a organização de galáxias espirais e em proporções do corpo humano, demonstrando sua onipresença nos sistemas naturais (Boyer, 2012; EVES, 2011).

A presença recorrente da proporção áurea e dos números de Fibonacci na natureza e nas criações humanas sugere que esses padrões não são meras coincidências, mas revelam uma profunda ligação entre as leis matemáticas e a estrutura do universo. De maneira fascinante, a sequência de Fibonacci transcende o domínio dos números e torna-se

uma chave para compreender princípios fundamentais de equilíbrio, crescimento, harmonia e beleza — tanto no mundo natural quanto no imaginário artístico e cultural da humanidade (Livio, 2006; Boyer, 2012).

Essa ubiquidade contribui para que a sequência de Fibonacci seja amplamente estudada até hoje, não apenas como objeto de interesse matemático, mas também como ferramenta interdisciplinar de ensino, permitindo que alunos e estudiosos explorem as conexões entre matemática, biologia, arte e arquitetura.

1.3 Influência de Fibonacci nas Ciências Modernas

Embora o trabalho de Fibonacci tenha sido escrito no século XIII, a sequência que leva seu nome passou a ser reconhecida como um fenômeno matemático fundamental muito tempo depois. Atualmente, a sequência de Fibonacci é amplamente estudada e aplicada em diversas áreas do conhecimento, como na biologia, na computação, na física, na economia, na engenharia e até mesmo na arte digital (HUNTLEY, 1985; Livio, 2006).

1.3.1 Aplicações na Biologia

Na biologia, a sequência de Fibonacci se revela em padrões de crescimento de plantas, como a disposição das folhas ao redor de um caule (filotaxia), a formação de flores, frutos e sementes. O arranjo das sementes no centro dos girassóis, por exemplo, segue espirais cuja quantidade frequentemente corresponde a números consecutivos da sequência de Fibonacci, permitindo um preenchimento eficiente do espaço e a maximização da captação de luz solar (Livio, 2006; HUNTLEY, 1985).

Além disso, a estrutura de conchas de moluscos, como o náutilo, apresenta espirais logarítmicas que se aproximam das proporções determinadas pela sequência. Padrões semelhantes são encontrados em pinhas, abacaxis, na formação de brácteas de alcachofras e até na distribuição dos ramos de árvores. Estudos recentes sugerem que a sequência também influencia o desenvolvimento de organismos microscópicos e até a organização de estruturas biológicas mais complexas, como o DNA.

1.3.2 Aplicações na Computação

Na computação, a sequência de Fibonacci possui um papel fundamental no desenvolvimento de algoritmos eficientes. Um exemplo clássico é a pesquisa Fibonacci, um método de busca em listas ordenadas que reduz o número de comparações necessárias em relação a métodos tradicionais. A sequência também aparece na análise de complexidade de algoritmos recursivos, no cálculo de estruturas de dados como heaps, em compressão de dados e na geração de sequências pseudoaleatórias usadas em simulações computacionais (KNUTH, DONALD E., 1973).

1.3.3 Aplicações na Física

Na física, a sequência de Fibonacci aparece na estrutura de certos materiais e em fenômenos de organização natural. Por exemplo, o empacotamento de átomos em quasicristais — materiais cuja estrutura possui simetria de ordem alta, mas não periódica — exibe padrões diretamente relacionados aos números de Fibonacci(JAGANNATHAN, ANURADHA, 2021; Livio, 2006). Na dinâmica de ondas e em sistemas quânticos, distribuições baseadas na sequência descrevem a propagação e a interferência de partículas em sistemas não-lineares(LISIECKI, FILIP *et al.*, 2019).

Esses padrões também ajudam a entender fenômenos naturais como a formação de ciclones, a estrutura de galáxias espirais e a movimentação de ondas em diferentes meios físicos(IBRAGIMOV, 2022).

1.3.4 Aplicações na Economia

Na economia, especialmente na análise técnica de mercados financeiros, a sequência de Fibonacci é utilizada para prever movimentos de preços. As chamadas retratações e extensões de Fibonacci são ferramentas populares para identificar níveis de suporte e resistência em gráficos de ações, moedas e commodities. Traders e analistas usam essas relações para estimar pontos de reversão e para definir estratégias de entrada e saída no mercado(MAY, 2019).

Além disso, a sequência também tem sido aplicada em modelos de crescimento econômico, previsão de demandas e otimização de investimentos, mostrando-se útil em áreas como teoria dos jogos e economia comportamental(MAY, 2019; Livio, 2006)

1.3.5 Outras Aplicações

A sequência de Fibonacci também é amplamente utilizada na criptografia moderna, especialmente no desenvolvimento de algoritmos de geração de chaves públicas e privadas, contribuindo para a segurança de dados digitais. Em engenharia, padrões derivados da sequência auxiliam na otimização de designs estruturais, na arquitetura e na modelagem de sistemas complexos, como redes neurais artificiais(SILVA, 2022).

Na arte e na música, a sequência inspira composições visuais e sonoras que buscam reproduzir proporções naturais, promovendo um senso estético de equilíbrio e harmonia. A moderna arte generativa, por exemplo, frequentemente emprega a sequência de Fibonacci para construir padrões visuais dinâmicos que imitam formas orgânicas(Oliveira, 2021).

2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci é uma das construções matemáticas mais simples e, ao mesmo tempo, mais fascinantes. Sua construção é baseada em uma relação de recursividade, onde cada termo subsequente é a soma dos dois termos anteriores. A beleza dessa sequência reside não apenas em sua simplicidade, mas também nas diversas propriedades matemáticas que ela exhibe, muitas das quais se revelam em fenômenos naturais e artísticos (Livio, 2006).

2.1 Sequência de Fibonacci e suas propriedades

Definição 2.1. A sequência de Fibonacci é uma sucessão de números inteiros definidos recursivamente da seguinte forma:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Ou seja, o primeiro termo é 0, o segundo é 1, e a partir daí cada número é a soma dos dois anteriores. Os primeiros termos da sequência são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

A partir do termo $F_2 = 1$, cada número subsequente é obtido pela soma dos dois números anteriores. Por exemplo:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Essa estrutura recursiva torna a sequência de Fibonacci uma das mais estudadas e aplicadas na matemática.

Proposição 2.1. Sejam $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{n-1}, F_n$ os $n + 1$ primeiros termos da sequência de Fibonacci, Se S_n denota a soma desses n termos, então

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

Demonstração: Usaremos a indução finita para provar essa proposição. Nesse sentido, observemos a sequência de Fibonacci é dada por:

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, F_{n-1}, F_n).$$

Dessa forma, temos que:

1. Inicialmente note que:

$$S_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1 \quad \text{e} \quad S_1 = 1 = 0 + 1 = 2 - 1 = F_3 - 1.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para $n = 0$ e $n = 1$.

2. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$, ou seja,

$$S_k = F_{k+2} - 1.$$

Nessas condições, admitindo que a afirmação é verdadeira para $n = k$, precisamos mostrar que a mesma é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$S_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Nesse sentido, temos que:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} \\ &= F_0 + F_1 + \cdots + F_k + F_{k+1} \quad (\text{já que } F_0 = 0) \\ &= S_k + F_{k+1} \\ &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} \\ &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\ &= F_{k+3} - 1 \quad (\text{por definição: } F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a recorrência que define a sequência de Fibonacci.

Portanto, mostramos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$. Ou seja,

$$S_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Dessa forma, usando o processo de indução finita, provamos a proposição.

Proposição 2.2. Sejam

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \dots, \overline{F}_n, \quad \text{onde } \overline{F}_i = F_{2i-1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

os n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices ímpares. Se S_n denota a soma desses n termos, então

$$S_n = F_{2n}.$$

Demonstração: Usaremos a indução finita para provar essa proposição. Nesse sentido, observemos que os termos da sequência de Fibonacci de índice ímpar é dada por:

$$(1, 2, 5, 13, 34, \dots).$$

Dessa forma, temos que:

1. Observemos que:

$$S_1 = F_1 = 1 = F_2 = F_{2 \cdot 1} \text{ e } G_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 = F_4 = F_{2 \cdot 2}$$

Portanto, a afirmação $S_n = F_{2n}$ é verdadeira para $n = 1$ e para $n = 2$.

2. Suponhamos que essa afirmação seja verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ ou seja,

$$S_K = F_{2k}.$$

Nessas condições, admitindo que a afirmação $S_n = F_{2n}$ é verdadeira para $n = k$, precisamos mostra que ela também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$S_{K+1} = F_{2(k+1)}.$$

Nesse sentido, temos que:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \overline{F_1} + \overline{F_2} + \cdots + \overline{F_k} + \overline{F_{k+1}} \\
&= F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2k+1} \\
&= S_k + F_{2k+1} \\
&= F_{2k} + F_{2k+1} \\
&= F_{2k+2} = F_{2(k+1)},
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a recorrência que define a sequência de Fibonacci.

Portanto, mostramos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$. Ou seja,

$$S_{K+1} = F_{2(k+1)}.$$

Dessa forma, usando o processo de indução finita, provamos a proposição. ■

Proposição 2.3. Sejam

$$\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \overline{F_4}, \dots, \overline{F_n}, \quad \text{onde} \quad \overline{F_i} = F_{2i-2}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

os n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices pares. Se S_n denota a soma desses n termos, então

$$S_n = F_{2n-1} - 1.$$

Demonstração: Usaremos a indução finita para provar essa proposição. Nesse sentido, observemos que os termos da sequência de Fibonacci de índice par é dada por:

$$(0, 1, 3, 8, 21, \dots).$$

Dessa forma, temos que:

1. Observemos que:

$$S_1 = 0 = 1 - 1 = F_1 - 1 \quad \text{e} \quad S_2 = 0 + 1 = 2 - 1 = F_3 - 1.$$

Portanto, a afirmação $S_n = F_{2n-1} - 1$ é verdadeira para $n = 1$ e para $n = 2$.

2. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ ou seja,

$$S_k = F_{2k-1} - 1.$$

Nessas condições, admitindo que $S_n = F_{2n-1} - 1$ é verdadeira para $n = k$, precisamos mostra que ela também vale para $n = k + 1$, ou seja, $S_{k+1} = F_{2(k+1)-1} - 1$.

Nesse sentido, temos que:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \overline{F_1} + \overline{F_2} + \cdots + \overline{F_k} + \overline{F_{k+1}} \\
&= S_k + F_{2k} \\
&= F_{2k-1} - 1 + F_{2k} \\
&= F_{2k-1} + F_{2k} - 1 \\
&= F_{2k+1} - 1,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a recorrência que define a sequência de Fibonacci.

Portanto, mostramos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$S_{k+1} = F_{2(k+1)} - 1.$$

Dessa forma, usando o processo de indução finita, provamos a proposição.

Proposição 2.4. Sejam

$$F_0, F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n,$$

os $n + 1$ primeiros termos da sequência de Fibonacci. Então, se $n \geq 1$, os termos F_n e F_{n+1} são primos entre si, ou seja,

$$\text{MDC}(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

Demonstração: Usaremos a indução finita para provar essa proposição. Nessa direção, temos que:

1. Inicialmente, como $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ temos claramente que $\text{MDC}(F_1, F_2) = 1$, ou seja, F_1 e F_2 são primos entre si. Portanto, para $n = 1$ temos que a afirmação de que esses números são primos entre si é verdadeira.

2. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ ou seja,

$$\text{MDC}(F_{i-1}, F_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Nessas condições, precisamos mostra que ela também vale para $n = k + 1$, ou seja,

$$\text{MDC}(F_k, F_{k+1}) = 1.$$

Nesse sentido, usaremos a seguinte propriedade de máximo divisor comum de dois números:

$$\text{Se } a > b, \text{ então } \text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(a - b, b).$$

Antes de mais nada, observe que se $n \geq 2$, os termos

$$F_2, F_3, \dots, F_n,$$

da sequência de Fibonacci forma uma sequência crescente, ou seja, $F_n \leq F_{n+1}$, para $n \geq 2$.

Dessa forma, usando a propriedade de Máximo Divisor Comum descrita acima, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \text{MDC}(F_{k+1}, F_k) &= \text{MDC}(F_{k+1} - F_k, F_k) \\ &= \text{MDC}(F_{k-1}, F_k) = 1, \end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos o fato de $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ e na terceira linha usamos a hipótese de indução.

Portanto, mostramos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$\text{MDC}(F_{k-1}, F_k) = 1.$$

Dessa forma, usando o processo de indução finita, provamos a proposição.

Proposição 2.5. Sejam $F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2, \dots, F_{n-1}^2, F_n^2$ os quadrados dos termos da sequência de Fibonacci, Se S_n denota a soma desses n termos, então

$$S_n = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Demonstração: Usaremos a indução finita para provar essa proposição. Nesse sentido, observemos a sequência de Fibonacci é dada por:

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, F_{n-1}, F_n)$$

Nesse sentido, temos que:

1. Inicialmente note que:

$$S_1 = F_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

2. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$, ou seja,

$$S_{k+1} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}.$$

Nessas condições, admitindo que a afirmação é verdadeira para $n = k$, precisamos mostra que a mesma é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$S_{k+1} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}.$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 \\ &= S_k + F_{k+1}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= (F_k + F_{k+1}) \cdot F_{k+1} \\ &= F_{k+2} \cdot F_{k+1} \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2}, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a recorrência que define a sequência de Fibonacci.

Portanto, mostramos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$S_{k+1} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}.$$

Dessa forma, usando o processo de indução finita, provamos a proposição.

2.2 Proporção Áurea - Número de Ouro

A proporção áurea, também conhecida como número de ouro, secção áurea ou proporção divina, é uma razão numérica histórica associada a ideias de harmonia, beleza e perfeição. Desde a Antiguidade, matemáticos como Euclides de Alexandria (c. 330–270 a.C.) estudaram essa proporção, formalizando-a em seu *Livro VI* dos *Elementos* como a divisão de um segmento em média e extrema razão. O fascínio pela proporção áurea permanece até hoje, pois ela pode ser observada, de maneira aproximada, em diversos fenômenos naturais, incluindo a disposição de sementes e folhas nas plantas, a forma

espiralada de conchas, galáxias e as proporções do corpo humano (ZAHN, 2011; Livio, 2006).

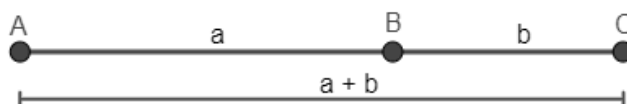
Consequentemente, a proporção áurea é objeto de estudo de diversas áreas do conhecimento, como biologia, arquitetura, artes e design, que buscam entender e aplicar seus princípios de harmonia e estética. O número de ouro, geralmente denotado pela letra grega φ (phi), é um número irracional com valor aproximado de 1,618 (HUNTLEY, 1985).

Geometricamente, a construção do número de ouro pode ser realizada a partir da divisão de um segmento AC em duas partes AB = a e BC = b, com $a > b > 0$, de modo que a razão entre o segmento maior e o segmento menor seja igual à razão entre o segmento total e o maior segmento, isto é,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Observemos essa construção na figura abaixo:

Figura 2.1 – Segmento de reta dividido na proporção áurea



Fonte: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes>

Observando a equação dada acima temos que

$$a = b\varphi \quad \text{e} \quad a^2 = (a+b)b.$$

Dessa forma, substituindo o valor de $a = b\varphi$ na equação $a^2 = (a+b)b$, obtemos a seguinte equação:

$$b^2\varphi^2 = b^2\varphi + b^2.$$

Portanto, como $b \neq 0$; temos que dividindo por b^2 os termos da última equação, obteremos:

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

Consequentemente, o número de ouro é solução da seguinte equação do segundo grau:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

cujas soluções são dadas por:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, como os números a e b são positivos, segue que o número de ouro é positivo. Portanto,

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

2.3 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Considere os termos da sequência de Fibonacci a partir do terceiro termo, ou seja:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Observe abaixo o que acontece quando tomamos o quociente de um desses números pelo seu antecessor.

$$\frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1,6666, \quad \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{21}{13} = 1,61538, \quad \frac{34}{21} = 1,6190.$$

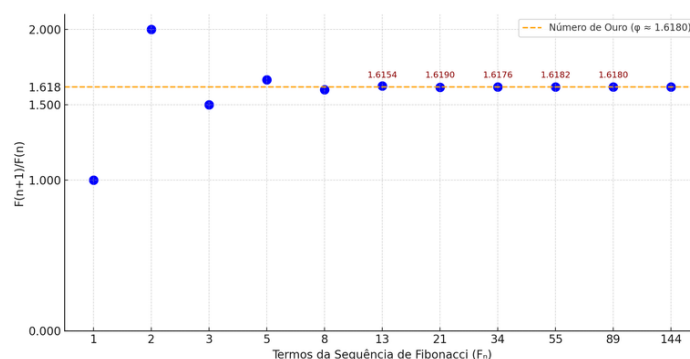
Nos cálculos acima, a medida que avançamos na sequência, é razoável estimar que o quociente entre dois termos consecutivos se aproxima cada vez mais do número de ouro φ . Mais precisamente, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

2.3.1 A Convergência dos Quocientes para a Proporção Áurea

Ferreira (2007) apresenta uma análise visual interessante dos quocientes consecutivos da sequência de Fibonacci. Em seu estudo, o autor elabora um gráfico que mostra como a razão entre dois termos consecutivos da sequência, ou seja, o quociente $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, converge para o valor da proporção áurea φ à medida que n aumenta.

Figura 2.2 – Razão entre termos consecutivos da Sequência de Fibonacci



Fonte: Adaptado de Ferreira (2007, p. 26).

No gráfico de Ferreira (2007), os eixos representam:

- O eixo horizontal indica os números da sequência de Fibonacci F_n .
- O eixo vertical mostra o quociente $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ entre dois números consecutivos da sequência.

À medida que o valor de n cresce, ou seja, conforme avançamos na sequência, os quocientes de Fibonacci se aproximam cada vez mais de $\varphi \approx 1,618$. O gráfico permite observar visualmente essa aproximação e é uma maneira eficaz de ilustrar a convergência da sequência para o valor da proporção áurea.

Aqui está o passo a passo para construir um gráfico semelhante ao de Ferreira (2007):

Calcule a sequência de Fibonacci até um número suficientemente grande (por exemplo, os primeiros 20 termos).

- 1) Calcule os quocientes $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ para cada par de termos consecutivos.
- 2) Plote os pontos no gráfico, com n no eixo horizontal e os quocientes $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ no eixo vertical.
- 3) Conecte os pontos para formar uma curva que mostre a aproximação gradual para o valor de φ .

Aqui está uma tabela exemplificando como os quocientes se comportam para os primeiros 10 termos da sequência de Fibonacci:

Tabela 2.1

n	F_n	F_{n+1}	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	3	1.5
4	3	5	1.666...
5	5	8	1.6
6	8	13	1.625
7	13	21	1.6154
8	21	34	1.6190
9	34	55	1.6176
10	55	89	1.6182

À medida que os valores de n aumentam, o quociente se aproxima de $\varphi \approx 1,6180339...$, como se pode observar.

Esse gráfico, conforme apresentado por Ferreira (2007), é uma excelente ferramenta para visualizar a relação entre a sequência de Fibonacci e a proporção áurea. Ele permite que os alunos:

- Compreendam a convergência dos quocientes para um valor constante, o que ajuda a consolidar a ideia de limite e sequência.
- Desenvolvam uma intuição sobre o crescimento exponencial da sequência e sua relação com o mundo real, onde padrões semelhantes podem ser observados em fenômenos naturais e na arte.
- Apliquem conceitos de gráficos e análise de dados, que são habilidades essenciais no ensino de matemática no nível médio.

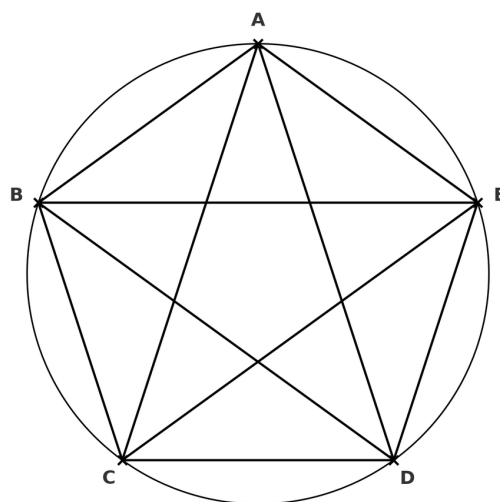
O gráfico de convergência apresentado por (FERREIRA, 2007) mostra de forma clara e visual como a sequência de Fibonacci está profundamente relacionada à proporção áurea. Ao explorar essa visualização, os alunos podem não apenas entender a natureza matemática da sequência, mas também como ela se manifesta em contextos mais amplos, como a arte e a natureza.

2.4 O pentagrama e o número de ouro

Definição 2.4.1 O pentagrama é uma figura geométrica de cinco pontas, obtidas a partir de um pentágono regular quando são traçadas as suas diagonais.

Veja na figura abaixo o pentagrama:

Figura 2.3 – Pentagrama



Fonte: Feita pelo autor.

A construção do pentagrama está associada à razão áurea, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.4.2 Em um pentagrama, a razão entre a diagonal e o lado do pentágono é igual ao número de ouro.

Prova:

No pentagrama da figura acima, consideremos o triângulo ABC. Provaremos que $AC/BC = \varphi$

No triângulo isósceles do pentágono regular com vértice A, temos $AB=BC$ (lados do pentágono) e AC (diagonal). O ângulo $\widehat{BAC}=108^\circ$. Pela lei dos cossenos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 108^\circ = 2 \cdot BC^2 (1 - \cos 108^\circ).$$

Como $\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ$, então

$$\frac{AC^2}{BC^2} = 2(1 + \cos 72^\circ).$$

Usando $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

$$\frac{AC^2}{BC^2} = 2(1 + \cos 72^\circ) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \varphi^2.$$

Como $AC, BC > 0$, conclui-se que $\frac{AC}{BC} = \varphi$.

2.5 A Fórmula de Binet

A fórmula de Binet foi desenvolvida pelo matemático francês Jacques Philippe Binet, em 1843. Ela surgiu como uma tentativa de obter uma expressão matemática explícita para calcular os termos da sequência de Fibonacci sem recorrer à definição recursiva. Para isso, Binet utilizou conceitos de equações lineares recorrentes e as raízes da equação característica associada à sequência.

Embora a sequência de Fibonacci tenha sido descrita pela primeira vez em 1202, no livro *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (conhecido como Fibonacci), a formulação fechada para seus termos — dada pela fórmula de Binet — só foi obtida séculos depois. A contribuição de Binet consistiu em aplicar propriedades algébricas das soluções da equação característica da relação de recorrência da sequência, resultando na expressão que hoje leva seu nome.

A fórmula de Binet é dada pela expressão abaixo:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

onde F_n é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci e φ é o número de ouro dado por

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Em resumo, a fórmula de Binet nos dar uma maneira eficiente de calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci a partir do número de ouro e da sua posição na sequência, sem depender da recursão dada na definição da sequência de Fibonacci.

2.6 Demonstração da Fórmula de Binet

A sequência de Fibonacci segue a relação de recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

com as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Nosso objetivo é obter uma fórmula fechada (ou explícita) para F_n , sem necessidade de cálculos iterativos. Isso será feito usando a equação característica associada à recorrência.

A equação característica é uma ferramenta essencial na resolução de relações de recorrência lineares com coeficientes constantes. Ela permite determinar uma fórmula explícita para os termos de uma sequência definida recursivamente, como é o caso da sequência de Fibonacci.

Dada uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes, como:

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \dots + r_k a_{n-k}.$$

A equação característica associada é:

$$x^k - r_1 x^{k-1} - r_2 x^{k-2} - \dots - r_k = 0.$$

As raízes dessa equação ajudam a encontrar a fórmula fechada da sequência

Passo 1: Suposição de Solução Exponencial.

Suponha que a solução da recorrência seja da forma:

$$F_n = r^n.$$

Substituindo na equação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}.$$

Dividindo ambos os lados por r^{n-2} (desde que $r \neq 0$):

$$r^2 = r + 1.$$

Ou seja, a equação característica é:

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Passo 2: Soluções da Equação Característica

A equação quadrática $r^2 - r - 1 = 0$ tem as seguintes soluções, utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, as duas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Passo 3: Solução Geral da Recorrência

A solução geral da equação de recorrência será uma combinação linear dessas duas soluções, ou seja:

$$F_n = A\varphi^n + B\Psi^n.$$

Onde A e B são constantes que vamos determinar usando as condições iniciais.

Passo 4: Determinação das Constantes

Para encontrar A e B, usamos as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Para $F_0 = 0$

$$F_n = A\varphi^0 + B\Psi^0.$$

Isso resulta em:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A.$$

Para $F_1 = 1$:

$$A\varphi^1 + B\Psi^1 = 1.$$

Substituindo $B = -A$:

$$A\varphi - A\Psi = 1.$$

Ou seja:

$$A(\varphi - \Psi) = 1.$$

Como

$$\varphi - \Psi = r_1 - r_2 = \sqrt{5},$$

temos:

$$A\sqrt{5} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Logo,

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Passo 5: Expressão Final

Substituindo A e B na solução geral, obtemos a fórmula :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

onde

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

Sabemos que:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Então:

$$1 - \varphi = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - (1 + \sqrt{5})}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

Assim, ao final, substituiremos $\psi = 1 - \varphi$, deixando a fórmula toda em função de φ .

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}.$$

Essa fórmula permite calcular diretamente qualquer número da sequência de Fibonacci.

Neste capítulo, exploramos a definição formal da sequência de Fibonacci e algumas de suas principais propriedades matemáticas. Abordamos a fórmula de Binet, uma expressão fechada que permite calcular diretamente qualquer termo da sequência, e que ilustra a profundidade algébrica presente em sua estrutura. Discutimos, ainda, a estreita relação entre a sequência de Fibonacci e a proporção áurea, uma constante matemática recorrente em diversos contextos, como na natureza, na arte e na arquitetura. A sequência de Fibonacci, portanto, revela-se não apenas como uma curiosidade matemática, mas como uma ferramenta valiosa que conecta a matemática a fenômenos observáveis no mundo ao nosso redor.

No próximo capítulo, exploraremos as aplicações da sequência de Fibonacci em diferentes áreas do conhecimento, como biologia, arte e computação, mostrando como esse conceito pode ser utilizado para compreender e modelar fenômenos diversos.

3 APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci, além de ser um conteúdo matemático interessante, aparece com frequência surpreendente na natureza. Podemos ver seus padrões em plantas, animais, conchas, tempestades, galáxias e até no corpo humano. Isso acontece porque a sequência ajuda a organizar o crescimento e a distribuição dos elementos de forma eficiente e harmônica.

3.1 Aplicações na Natureza

Uma das manifestações mais notáveis da sequência de Fibonacci é na natureza. Muitos fenômenos biológicos seguem padrões que podem ser descritos matematicamente através da sequência, especialmente quando se trata de crescimento e disposição de formas orgânicas. As aplicações mais visíveis incluem:

3.1.1 Nas Plantas: Folhas, Sementes e Escamas

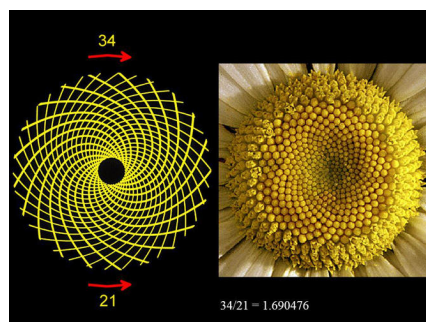
Muitas plantas organizam suas folhas, sementes ou pétalas de maneira que seguem a sequência de Fibonacci. Isso ajuda a planta a aproveitar melhor a luz do sol, o espaço e até a distribuir sementes de forma mais eficiente.

O Ângulo Dourado

Um exemplo curioso é o ângulo de $137,5^\circ$, chamado de ângulo dourado. Ele aparece entre as folhas de várias plantas. Esse ângulo vem da razão áurea (aproximadamente 1,618) e evita que as folhas fiquem uma em cima da outra. Assim, todas conseguem pegar luz do sol para fazer fotossíntese.

- **Girassóis:** No centro da flor do girassol, as sementes crescem formando espirais que seguem a sequência de Fibonacci. Esse padrão ajuda a ocupar o espaço da melhor forma possível. O chamado ângulo dourado faz com que as sementes fiquem bem distribuídas, sem deixar áreas vazias.

Figura 3.1 – Girassol (*Helianthus annuus*) são 21 no sentido horário e outras 34 em anti-horário.



- **Suculentas:** Muitas suculentas, como a Echeveria, apresentam folhas dispostas em espiral seguindo o ângulo dourado. Esse padrão melhora a captação de luz e a eficiência na fotossíntese.

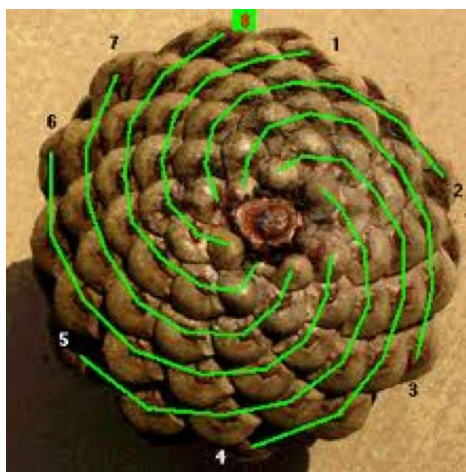
Figura 3.2 – *suculenta(Echevéria)*



Fonte: https://ph.pinterest.com/?show_error=true

- **Pinhas:** As escamas das pinhas também seguem espirais de Fibonacci, com a inclinação baseada no ângulo dourado. Isso permite um arranjo eficiente para o crescimento e dispersão das sementes.

Figura 3.3 – Escamas das pinhas



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mce12/fibo.html>

Esses padrões não são coincidências. Eles surgem porque a planta precisa crescer de maneira equilibrada, aproveitando bem o espaço e os recursos.

3.1.2 Espirais na Natureza

Outro jeito de ver a sequência de Fibonacci na natureza é por meio de espirais. Quando algo cresce em espiral e mantém sua forma, mas aumenta de tamanho, é comum que siga o que chamamos de espiral de Fibonacci ou espiral logarítmica.

- **Conchas (como a do náutilo):** Crescem em espiral, aumentando de tamanho sem mudar de forma. Isso ajuda o animal a crescer de forma proporcional.

Figura 3.4 – Exemplos da formação da espiral áurea no nautilus



Fonte: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes>

- **Caracóis:** Do corpo até a cabeça do caracol, é possível aplicar com perfeição a sequência de Fibonacci. Veja na ilustração abaixo:

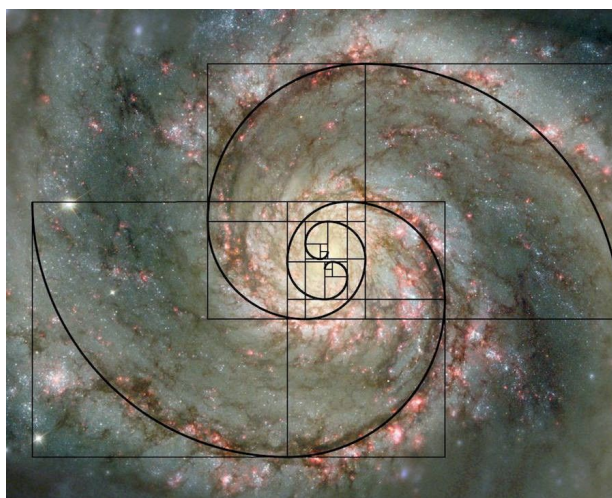
Figura 3.5 – Casco do caracol



Fonte: <https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/>

- **Galáxias:** Muitas galáxias, como a Via Láctea, apresentam braços espirais que seguem uma estrutura logarítmica. Isso se deve às forças gravitacionais e ao movimento rotacional da matéria no disco galáctico.

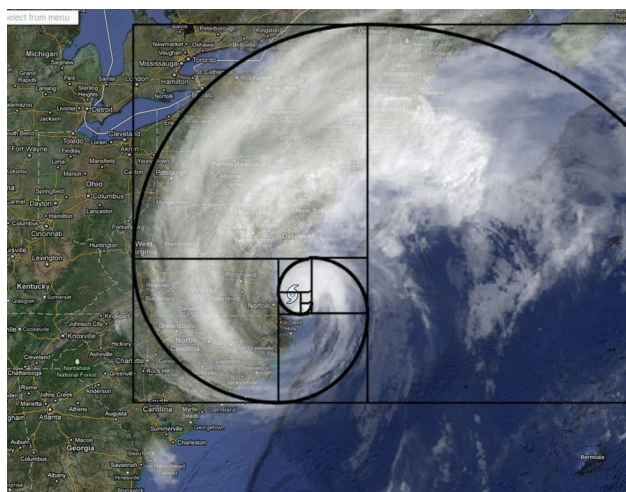
Figura 3.6 – Comparação entre as formas de uma galáxia e a espiral áurea



Fonte: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes>

- **Furacões:** A forma espiral de furacões e ciclones tropicais também segue padrões logarítmicos devido às forças da rotação da Terra (efeito Coriolis) e à organização da convecção de ar quente e úmido em torno do centro da tempestade.

Figura 3.7 – Confrontação entre os formatos de um furacão e da espiral áurea



Fonte: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes>

Essas espirais aparecem porque esse é um jeito eficiente de crescer ou de se organizar na natureza.

3.1.3 Reprodução e Crescimento Animal

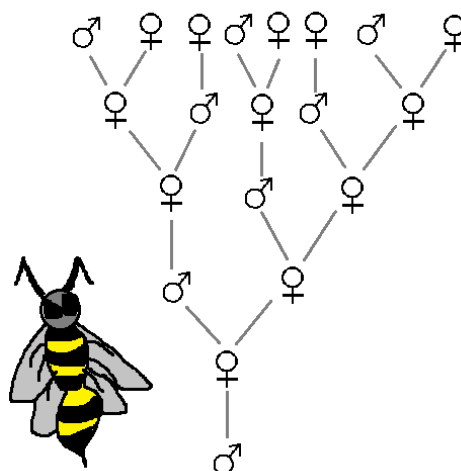
O próprio problema original de Fibonacci sobre a reprodução de coelhos é um exemplo de como a sequência pode ser aplicada para modelar populações. Se considerarmos

que cada par de coelhos gerará outro par, e que os coelhos começam a reproduzir após um mês de vida, o número de coelhos segue a sequência de Fibonacci. Esse modelo simples ilustra como a sequência pode ser usada para entender e prever crescimento populacional em biologia.

Outro exemplo fascinante de crescimento animal que segue padrões matemáticos é o crescimento das colônias de abelhas. As populações de zangões (machos) em uma colmeia seguem diretamente a sequência de Fibonacci, devido ao seu padrão único de reprodução.

Os zangões são produzidos por reprodução partenogenética, ou seja, eles nascem de ovos não fertilizados e, portanto, não têm pai. Já as operárias e as rainhas nascem de ovos fertilizados e têm dois progenitores. Esse sistema gera uma árvore genealógica Fibonacci:

Figura 3.8 – Árvore genealógica de uma zangão



Fonte: <https://algamecode.blogspot.com/2017/05/a-sequencia-de-fibonacci.html>

- 1) Um zangão tem uma mãe (a rainha).
- 2) Sua mãe tem dois pais (rainha e zangão).
- 3) A rainha tem três avós (uma rainha e dois zangões).
- 4) O número de ancestrais em cada geração segue a sequência de Fibonacci.

Matematicamente, se contarmos os ancestrais diretos de um zangão em cada geração, obtemos: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Essa estrutura reflete a organização genética da colônia e pode ser usada para estudar a diversificação genética e a resiliência da colmeia.

Isso mostra que a sequência também está presente na genética e na reprodução de alguns animais.

3.1.4 Proporções no Corpo Humano

O corpo humano também mostra proporções parecidas com a razão áurea. Por isso, muitas pessoas associam essas medidas à beleza e harmonia.

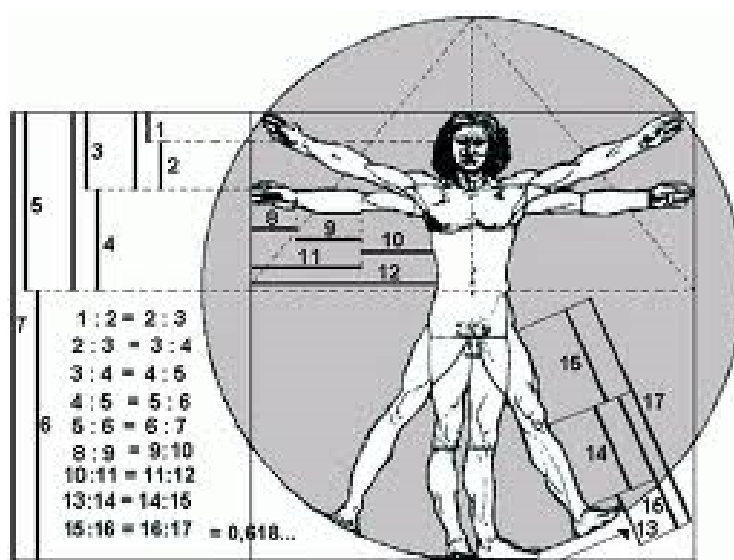
Exemplos:

- A altura até o umbigo comparada à altura total do corpo.
- O comprimento do braço em relação ao antebraço.
- A posição dos olhos, nariz e boca em relação ao rosto.

O Homem Vitruviano

Leonardo da Vinci desenhou o famoso Homem Vitruviano, que mostra como o corpo humano pode ser inscrito num círculo e num quadrado ao mesmo tempo. Esse desenho mostra que o corpo tem proporções muito próximas da razão áurea.

Figura 3.9 – Homem Vitruviano



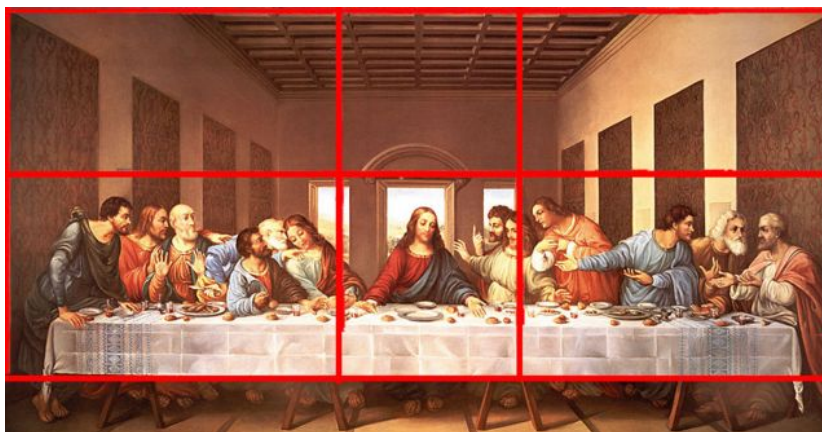
Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/551550285594488449/>

3.2 A Proporção Áurea na Arte

O uso da Proporção Áurea na arte não se limita a regras rígidas, mas é uma ferramenta que, quando aplicada com sensibilidade, contribui para a composição harmoniosa, despertando no observador uma sensação intuitiva de beleza.

A famosa pintura “A Última Ceia” de Leonardo da Vinci, por exemplo, utiliza a proporção áurea em sua composição. O quadro é estruturado de maneira que os elementos importantes da cena, como a mesa e os personagens, estão posicionados de acordo com as proporções derivadas da sequência de Fibonacci.

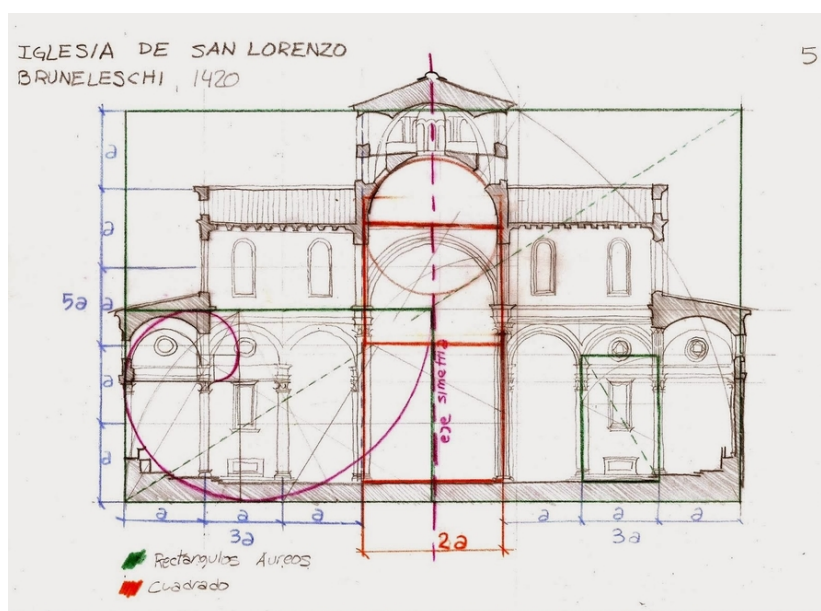
Figura 3.10 – A Última Ceia



Fonte: <https://eldiariony.com/2019/02/23/fibonacci-el-matematico-que-se-puso-a-contar-conejos-y-descubrio-la-secuencia-divina/>

Além da pintura de Da Vinci, o arquiteto Filippo Brunelleschi, durante o Renascimento, também utilizou a proporção áurea em seus projetos arquitetônicos. Ele incorporou a proporção áurea na concepção da Igreja de San Lorenzo, em Florença. O projeto de Brunelleschi para a igreja reflete a busca pela harmonia e equilíbrio por meio da aplicação de princípios geométricos. A simetria e as proporções precisas na estrutura da igreja proporcionam uma sensação de equilíbrio perfeito no espaço, uma característica marcante da arquitetura renascentista.

Figura 3.11 – A sequência de Fibonacci e a Basílica de San Lorenzo.

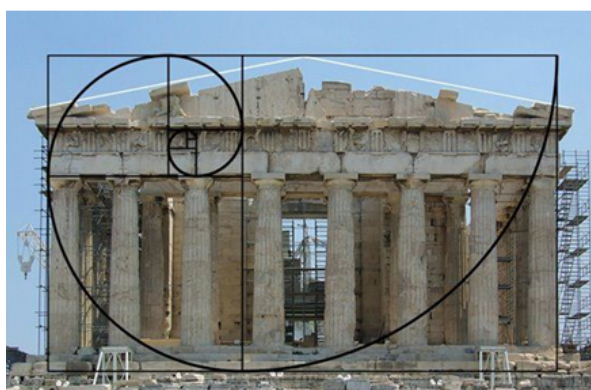


Fonte: <https://alinearte2.blogspot.com/2019/03/la-sucesion-de-fibonacci-y-la-baslica.html>

3.2.1 Arquitetura e Design

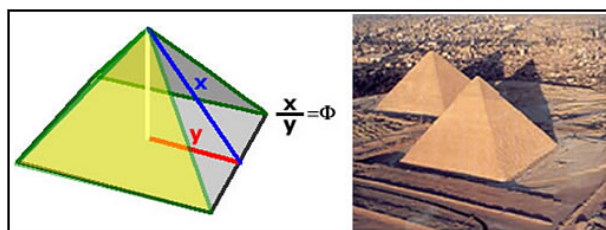
Na arquitetura, muitos edifícios históricos, como o Partenon na Grécia e as pirâmides do Egito, foram projetados utilizando a proporção áurea, que está relacionada à sequência de Fibonacci. Essa proporção oferece uma sensação de harmonia e equilíbrio que é visualmente atraente para o olho humano, e muitos arquitetos modernos também utilizam a sequência e a proporção áurea em seus projetos.

Figura 3.12 – Partenon na Grécia



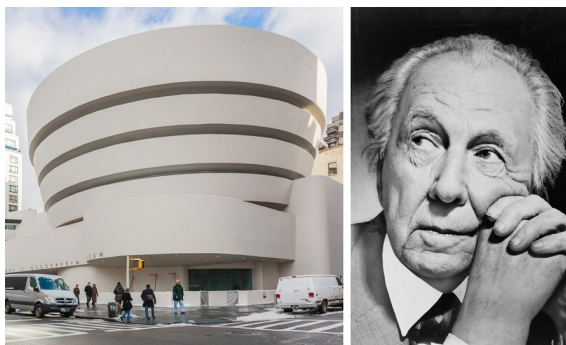
Fonte: <https://www.goldennumber.net/parthenon-phi-golden-ratio/>

Figura 3.13 – A Pirâmide de Quéops



Fonte: <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>

Um exemplo contemporâneo é o Museu Guggenheim, projetado por Frank Lloyd Wright, que possui uma espiral interna que segue o mesmo padrão de crescimento que a sequência de Fibonacci.

Figura 3.14 – Museu Guggenheim, projetado por Frank Lloyd Wright

Fonte: <https://randymorehall.weebly.com/randy-morehall/guggenheim-museum-how-frank-lloyd-wright-brought-his-masterpiece-to-life-in-new-york>

3.3 Aplicações na Computação

A sequência de Fibonacci também tem aplicações práticas na computação, especialmente em áreas como algoritmos e estrutura de dados. A recursão que define a sequência de Fibonacci é um exemplo clássico de como um problema pode ser resolvido de forma simples e elegante em programação.

3.3.1 Algoritmos de Fibonacci

Na área da computação, a sequência de Fibonacci possui aplicação em algoritmos de busca e ordenamento, sendo a Busca Fibonacci um exemplo notável. Trata-se de uma variação da busca binária que, em vez de dividir o intervalo ao meio, utiliza valores da sequência de Fibonacci para determinar os pontos de corte.

Essa técnica pode oferecer vantagens em contextos específicos, tais como:

- Quando o acesso aos elementos do vetor é custoso ou desigual, como em sistemas com hierarquia de memória (RAM e disco);
- Quando a estrutura de dados não permite acesso direto, como em listas ligadas;
- Quando o número de elementos é fixo e conhecido previamente.

A Busca Fibonacci realiza, em média, um número de comparações semelhante ao da busca binária. No entanto, pode apresentar melhor desempenho em termos de acessos físicos à estrutura de dados, especialmente quando o acesso sequencial é mais eficiente do que o acesso aleatório.

Além disso, o algoritmo se beneficia das propriedades matemáticas da sequência, oferecendo uma estratégia eficiente para redução do espaço de busca. Sua implementação destaca como a matemática pura pode influenciar algoritmos aplicados em sistemas computacionais reais.

3.4 Fibonacci no Mercado de Capitais

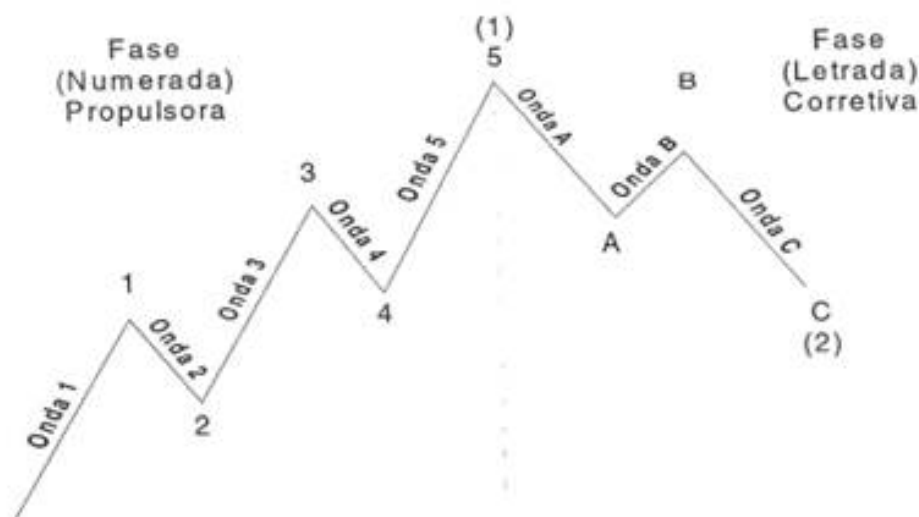
Diante da recorrência da sequência de Fibonacci em padrões naturais e geométricos, surge um questionamento pertinente: seria possível aplicar essa sequência em fenômenos de natureza não linear, como o mercado financeiro?

Embora à primeira vista isso pareça improvável — considerando a volatilidade e a aleatoriedade que caracterizam os mercados —, estudos apontam que padrões relacionados à sequência de Fibonacci também emergem em sistemas complexos.

Um exemplo notório é a Teoria das Ondas de Elliott, proposta por Ralph Nelson Elliott na década de 1930. Segundo essa teoria, os preços dos ativos seguem um padrão cíclico composto por cinco ondas, sendo três (1, 3 e 5) orientadas na direção da tendência principal e duas (2 e 4) caracterizadas como movimentos corretivos. Esses movimentos respeitam proporções aproximadas da razão áurea ($\varphi \approx 1,618$), estabelecendo uma conexão direta entre a teoria de Fibonacci e os ciclos do mercado.

Essas observações ganharam relevância com a análise técnica moderna, especialmente na utilização dos chamados níveis de retração de Fibonacci, aplicados na previsão de suportes e resistências de preços em ações e moedas.

Figura 3.15 – Ciclo das ondas de Elliott



Fonte: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes>

Esse exemplo evidencia que a sequência de Fibonacci transcende domínios puramente matemáticos ou naturais, oferecendo insights também em campos dinâmicos e imprevisíveis como as finanças.

A sequência de Fibonacci, com suas propriedades matemáticas e sua relação com a proporção áurea, vai muito além da matemática pura. Ela se manifesta de maneira fascinante em muitos aspectos da vida, desde a disposição das folhas nas árvores até as grandes obras de arte e arquitetura. Além disso, a sequência tem aplicações práticas em áreas como a computação, onde é utilizada em algoritmos e estruturas de dados.

Este capítulo demonstrou como a sequência de Fibonacci é aplicada em vários campos do conhecimento, ilustrando sua universalidade e importância. No próximo capítulo, abordaremos como a sequência de Fibonacci pode ser utilizada como uma ferramenta pedagógica no ensino médio, tornando o aprendizado de matemática mais envolvente e interdisciplinar.

4 PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo apresenta um conjunto de propostas didáticas voltadas ao ensino da sequência de Fibonacci no Ensino Médio, com foco na contextualização, na interdisciplinaridade e na promoção de aprendizagens significativas. As atividades foram fundamentadas nos princípios da Educação Matemática crítica, da teoria da aprendizagem significativa e nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), compondo um referencial que visa promover um ensino mais reflexivo, conectado e humanizado.

De acordo com Skovsmose (2018), a Educação Matemática Crítica defende que o ensino da Matemática deve extrapolar os limites da técnica e da formalidade, possibilitando aos alunos interpretar, questionar e transformar a realidade por meio do conhecimento matemático. Essa abordagem valoriza a dimensão sociopolítica da Matemática, colocando o estudante como agente ativo do seu processo formativo e incentivando a leitura crítica do mundo por meio de situações significativas.

Nesse mesmo sentido, Ausubel (2003) ressalta que a aprendizagem significativa ocorre quando os novos conhecimentos são integrados à estrutura cognitiva prévia do aluno de forma substancial e não arbitrária. Para isso, é necessário que o conteúdo escolar dialogue com a vivência do estudante, permitindo-lhe construir sentido a partir das novas informações. Assim, atividades contextualizadas e interdisciplinares, como as aqui propostas, favorecem a internalização duradoura dos conceitos matemáticos (AUSUBEL, 2003).

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) orienta o ensino da Matemática a partir de competências que desenvolvam o pensamento computacional, a resolução de problemas, a argumentação lógica, a modelagem matemática e o uso de tecnologias digitais. O documento ressalta a importância de uma abordagem formativa e investigativa, que valorize o protagonismo do aluno e estabeleça pontes entre diferentes áreas do conhecimento (BRASIL, 2018).

Com o objetivo de aproximar o conteúdo matemático da vivência cotidiana, as atividades propostas neste capítulo estimulam o raciocínio lógico, a identificação de padrões, a criatividade e a valorização da Matemática como linguagem para compreender e interpretar o mundo. Ao explorar a sequência de Fibonacci em contextos como a natureza, a arte, o corpo humano e as tecnologias digitais, o material oferece caminhos para integrar diferentes áreas do conhecimento, favorecendo a abordagem interdisciplinar e investigativa.

As propostas são flexíveis, adaptáveis a distintas realidades escolares e foram elaboradas especialmente para o 1º e 2º anos do Ensino Médio, embora possam ser aplicadas em outras séries. Cada atividade é acompanhada de orientações metodológicas, objetivos específicos, conteúdos abordados, tempo estimado, materiais necessários, sugestões de avaliação e indicações de habilidades da BNCC. A maior parte das tarefas foi pensada para o trabalho em grupo, promovendo a cooperação, a socialização do conhecimento e o protagonismo discente (AUSUBEL, 2003; BRASIL, 2018; SKOVSMOSE, 2018).

O recurso não segue uma sequência didática linear e fechada, o que permite ao professor selecionar, combinar ou adaptar as atividades conforme seus objetivos de ensino, o perfil da turma e os recursos disponíveis. Dessa forma, busca-se oferecer uma ferramenta prática e fundamentada que contribua para o desenvolvimento profissional docente, apoiando a construção de uma prática pedagógica mais reflexiva, contextualizada e envolvente.

Além disso, o conjunto de atividades visa dialogar com os desafios enfrentados na escola pública brasileira, incentivando práticas inovadoras e acessíveis, que valorizem o interesse dos alunos e fortaleçam o vínculo entre teoria e prática. Espera-se, assim, colaborar para um ensino de Matemática que vá além da memorização mecânica e promova uma formação integral, crítica e conectada aos desafios contemporâneos (BRASIL, 2018).

4.1 Atividade 1 – O Problema dos Coelhos e a Introdução à Sequência de Fibonacci

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade tem como objetivo introduzir a sequência de Fibonacci a partir de uma situação-problema contextualizada, promovendo a construção coletiva do conceito matemático e o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico, a identificação de padrões e a modelagem matemática.

A proposta fundamenta-se nos princípios da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), segundo os quais novos conhecimentos devem se ancorar em estruturas cognitivas já existentes, e na perspectiva da Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2018), que valoriza a compreensão da matemática como linguagem de leitura e transformação do mundo. Ainda, a atividade se articula com as competências gerais e específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que tange à resolução de problemas, ao trabalho colaborativo e à articulação da matemática com situações reais e históricas.

A proposta também tem forte apelo histórico e investigativo, ao partir de um dos problemas mais conhecidos do *Liber Abaci* (1202), de Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, contribuindo para ampliar a compreensão do estudante sobre o papel da Matemática no desenvolvimento do conhecimento humano.

Conteúdos Abordados

- Sucessões numéricas;
- Relações de recorrência;
- Modelagem e resolução de problemas;
- Origem histórica da sequência de Fibonacci.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

2 aulas de 50 minutos cada.

Modalidade

Trabalho em grupos (preferencialmente de 3 a 4 alunos).

Materiais Necessários

- Impressão da atividade (ver Apêndice A);
- Quadro e pincel atômico (ou giz);
- Papel quadriculado ou caderno;
- Calculadora (opcional).

Conhecimentos Prévios Recomendados

Para melhor aproveitamento da atividade, é desejável que os alunos já tenham sido introduzidos ao conceito de sequências numéricas e compreendam a ideia de formação de termos sucessivos a partir de uma regra. Caso o professor identifique dificuldades nesse aspecto, recomenda-se iniciar a aula com uma breve revisão de exemplos simples, como progressões aritméticas (P.A.) ou geométricas (P.G.).

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula com uma breve contextualização histórica, apresentando quem foi Fibonacci e sua contribuição para a Matemática, com destaque para o *Liber Abaci* (1202), que introduziu o sistema indo-arábico de numeração na Europa e apresentou o célebre “problema dos coelhos”.

Em seguida, apresenta o enunciado do problema de forma oral ou projetada, promovendo a leitura coletiva e estimulando os grupos a discutirem estratégias de resolução com base nas regras propostas:

Situação-Problema:

Em uma fazenda ideal, um criador inicia com um par de coelhos recém-nascidos. Sabemos que:

- Cada par de coelhos torna-se fértil a partir do segundo mês de vida;
- A cada mês, cada par fértil gera um novo par de coelhos;
- Os coelhos nunca morrem;
- Os pares gerados tornam-se férteis a partir do segundo mês.

Quantos pares de coelhos haverá após 1, 2, 3, ..., 12 meses?

Durante o trabalho em grupo, os estudantes devem organizar os dados em uma tabela, com auxílio do professor, observando o crescimento da população de coelhos mês a

mês. A mediação do docente orientará a construção do padrão observado, culminando na formalização da seguinte relação de recorrência:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3$$

A sequência formada pelos números obtidos corresponde à sequência de Fibonacci. Os primeiros termos são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 1441.

Após a socialização dos resultados, sugere-se um fechamento conceitual com a formalização da definição matemática da sequência, destacando sua formação recursiva e discutindo possíveis aplicações em diferentes contextos.

Observação: O modelo impresso da atividade entregue aos alunos encontra-se no Apêndice A, contendo o enunciado, a tabela de preenchimento e questões reflexivas.

Sugestões de Avaliação

A avaliação deve ser formativa e qualitativa, observando:

- Participação e envolvimento dos alunos nas discussões em grupo;
- Clareza na organização das respostas e da tabela de crescimento;
- Capacidade de identificar padrões e justificar raciocínios;
- Interpretação correta da regra de formação da sequência.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT201): Investigar padrões numéricos e representar funções com base em diferentes contextos.
- (EM13MAT301): Resolver e elaborar problemas utilizando raciocínio lógico e linguagem simbólica.
- (EM13CHS101): Analisar fenômenos históricos e culturais, reconhecendo sua importância para o desenvolvimento do conhecimento humano.

4.2 Atividade 2 – A Sequência de Fibonacci na Natureza

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade tem como objetivo estimular os estudantes a observarem e identificarem padrões matemáticos em elementos da natureza, especialmente aqueles relacionados à sequência de Fibonacci. A proposta promove a interdisciplinaridade entre Matemática, Biologia e Arte, ampliando a compreensão dos alunos sobre a presença da Matemática no mundo natural e valorizando sua função como linguagem de leitura da realidade.

Fundamenta-se na perspectiva da Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2018), que defende a Matemática como ferramenta de interpretação do mundo, e na teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), ao propor conexões entre o novo conteúdo e a experiência concreta dos estudantes. Alinha-se também às competências da BNCC, que destacam o uso da Matemática para compreender fenômenos naturais e sociais.

A proposta incentiva a observação empírica, a análise de regularidades, a modelagem matemática e a valorização da estética presente em estruturas naturais.

Conteúdos Abordados

- Sucessões numéricas;
- Observação e análise de padrões;
- Relação entre Fibonacci e filotaxia (arranjos naturais de folhas, sementes, pétalas etc.);
- Modelagem matemática e representação gráfica;
- Interdisciplinaridade entre Matemática, Biologia e Arte.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

2 aulas de 50 minutos cada + tempo adicional de observação (em campo ou em casa).

Modalidade

Trabalho em grupos (preferencialmente de 3 a 5 alunos).

Materiais Necessários

- Câmeras ou celulares com câmera (opcional);
- Lupa ou microscópio simples (opcional);
- Papel A4, lápis de cor, cola;
- Impressões de imagens naturais (girassóis, pinhas, abacaxis, margaridas etc.);
- Folhas, flores ou sementes reais (se possível);
- Quadro ou cartolina para sistematização coletiva.

Conhecimentos Prévios Recomendados

É desejável que os alunos tenham familiaridade com sequências numéricas, contagem, formas geométricas elementares (como espirais, simetria radial) e noções básicas

de proporção e organização biológica, como filotaxia (disposição de folhas e sementes em plantas).

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula contextualizando a presença de padrões numéricos na natureza e destacando que muitos deles seguem a sequência de Fibonacci. Para isso, pode projetar ou distribuir imagens ampliadas de girassóis, pinhas, brócolis romanesco, margaridas, caracóis, folhas e frutos, evidenciando suas estruturas espiraladas ou simétricas.

Cada grupo de alunos recebe uma imagem ou exemplar natural (ou observam em casa) e deve:

- 1) Contar a quantidade de pétalas, espirais, fileiras ou segmentos presentes no objeto;
- 2) Verificar se esses números pertencem à sequência de Fibonacci;
- 3) Registrar os dados coletados em uma tabela padronizada (ver Apêndice B);
- 4) Analisar o padrão observado e apresentar suas conclusões à turma.

Como etapa de sistematização, os alunos podem criar cartazes com representações artísticas baseadas nos elementos observados, evidenciando a simetria, os espirais ou a estética da natureza. O professor orienta uma discussão final sobre a importância da Matemática para interpretar o mundo e sobre como padrões matemáticos ajudam a compreender a organização natural.

Sugestões de Avaliação

A avaliação pode ser formativa e considerar os seguintes aspectos:

- Participação ativa na observação e registro;
- Clareza e organização das tabelas;
- Correta associação entre os dados coletados e a sequência de Fibonacci;
- Capacidade de apresentar justificativas matemáticas;
- Criatividade e comprometimento na representação visual (cartaz ou esquema).

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT201): Investigar padrões numéricos e representar funções a partir de diferentes contextos;
- (EM13MAT402): Utilizar representações gráficas e tabelas para descrever fenômenos naturais;
- (EM13CN02): Reconhecer padrões e estruturas recorrentes na natureza;

- (EM13ART102): Identificar relações entre padrões estéticos da natureza e elementos da linguagem visual.

4.3 Atividade 3 –Construção da Espiral Áurea com software GeoGebra

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade tem como objetivo explorar a espiral áurea por meio da construção geométrica utilizando o software GeoGebra, promovendo a articulação entre tecnologia e conceitos matemáticos. A proposta visa integrar a Matemática ao uso de ferramentas digitais, valorizando a aprendizagem ativa e investigativa dos estudantes. Fundamenta-se nos princípios da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), que defende a valorização dos conhecimentos prévios e a construção de novos saberes com sentido, e da Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2018), que propõe um ensino pautado na reflexão, na criatividade e na leitura crítica da realidade.

A atividade também contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico, da visualização espacial e da compreensão das relações entre grandezas e proporções. Além disso, está alinhada às competências da BNCC, que preconizam o uso de tecnologias digitais para investigar e resolver problemas, bem como a valorização da Matemática como linguagem de representação e interpretação do mundo.

Conteúdos Abordados

- Sequência de Fibonacci e proporção áurea;
- Construção geométrica de espirais;
- Utilização de tecnologias digitais (GeoGebra);
- Relações métricas e proporções;
- Geometria e Arte.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

2 aulas de 50 minutos cada.

Modalidade

Trabalho em duplas ou pequenos grupos (preferencialmente de 2 a 3 alunos), com mediação ativa do professor.

Materiais Necessários

- Computadores ou notebooks com acesso ao software GeoGebra (versão web ou desktop);

- Roteiro com o passo a passo (apresentado abaixo);
- Quadro e pincel atômico;
- Papel milimetrado ou caderno;
- Régua e compasso (para versão alternativa manual).

Conhecimentos Prévios Recomendados

É recomendável que os alunos possuam familiaridade com os conceitos de sequência numérica, espiral e proporção, além de noções básicas sobre construções geométricas. Caso necessário, o professor pode realizar uma breve revisão introdutória sobre o que é a sequência de Fibonacci e sua relação com a proporção áurea.

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula com uma contextualização da presença da espiral áurea na natureza, nas artes e na arquitetura. A seguir, apresenta a proposta de construção da espiral com o apoio do software GeoGebra, explicando os objetivos e mostrando exemplos visuais do que será produzido pelos alunos.

Em seguida, distribui-se o roteiro impresso com o passo a passo da construção digital, disponível no Apêndice C, que os alunos deverão seguir em duplas ou grupos, com o acompanhamento e mediação do professor. O docente poderá projetar o processo em tempo real para auxiliar os alunos ou circular pela sala para apoiar os grupos individualmente.

Durante a construção, os alunos devem explorar o crescimento da espiral e identificar os segmentos que obedecem aos termos da sequência de Fibonacci. O professor poderá questionar os estudantes sobre as medidas utilizadas, os padrões observados e possíveis aplicações da espiral em contextos reais.

Ao final da atividade, sugere-se uma breve socialização dos trabalhos realizados e uma discussão sobre o uso de ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática.

Sugestões de Avaliação

A avaliação será formativa, considerando:

- Participação dos alunos na construção;
- Clareza na execução do roteiro proposto;
- Capacidade de identificar e aplicar os conceitos da sequência de Fibonacci;
- Compreensão da relação entre a espiral construída e a proporção áurea;
- Organização e argumentação durante a socialização.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT201): Investigar padrões numéricos e representar funções a partir de diferentes contextos, analisando regularidades.
- (EM13MAT403): Utilizar tecnologias digitais para construir, analisar e comunicar conhecimentos matemáticos.
- (EM13MAT405): Resolver e elaborar problemas geométricos utilizando raciocínio lógico e representações variadas.

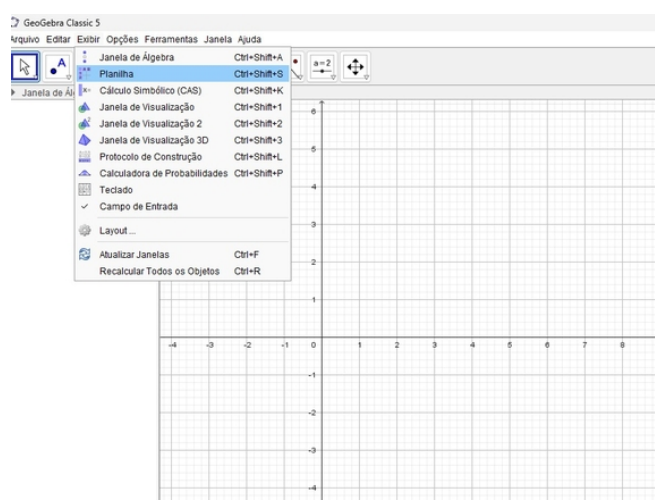
Passo a Passo no GeoGebra

Abrir o GeoGebra:

- Acesse o site do https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT ou abra o software instalado no seu computador.
- Escolha a versão GeoGebra Clássico para facilitar o trabalho com gráficos e construções geométricas.

Para começar, para facilitar o processo de construção, ative as opções “Eixos” e “Malha” no menu “Exibir”. Isso fará com que o sistema de coordenadas cartesianas seja visível, proporcionando uma base de referência para o trabalho no GeoGebra.

Figura 4.1 – Exibindo eixos e malhas



Fonte: feita pelo autor no Geogebra

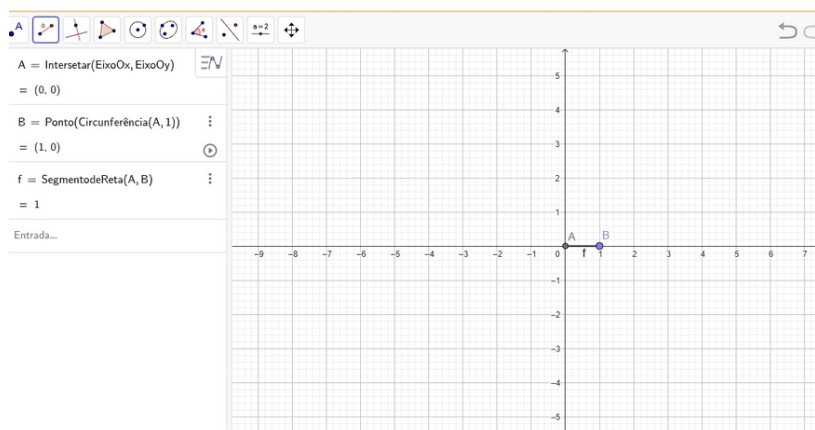
Para construir um quadrado com lados de comprimento 1, siga os passos abaixo:

- Acesse a ferramenta “Retas, segmentos, semirretas e vetores” e selecione “Segmento com comprimento fixo”.
- Clique sobre a origem do sistema de coordenadas (ponto (0,0)).

- Na janela que será exibida, insira o valor 1 e confirme.

Dessa forma, um segmento com comprimento exatamente igual a 1 unidade será criado.

Figura 4.2 – Segmento com comprimento 1

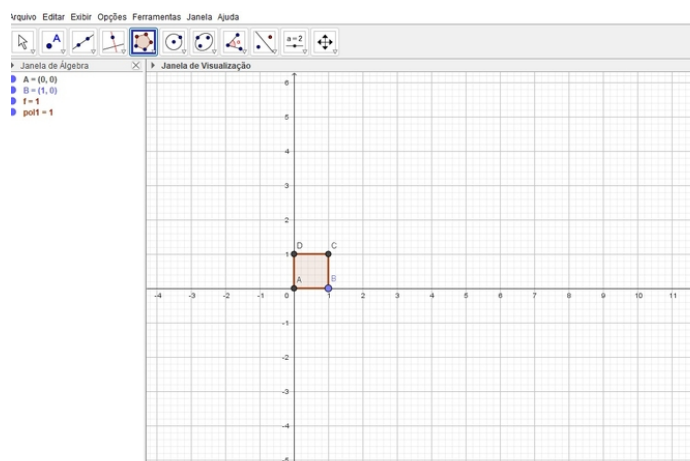


Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Para construir o quadrado, siga os passos:

- Acesse a ferramenta “Polígonos” e selecione “Polígono regular”.
- Clique primeiramente no ponto A e, em seguida, no ponto B.
- Na janela que será exibida, insira o número 4, indicando que deseja formar um quadrilátero regular (um quadrado).
- Após confirmar, o quadrado será construído no plano.

Figura 4.3 – Construção de um quadrado de lado 1



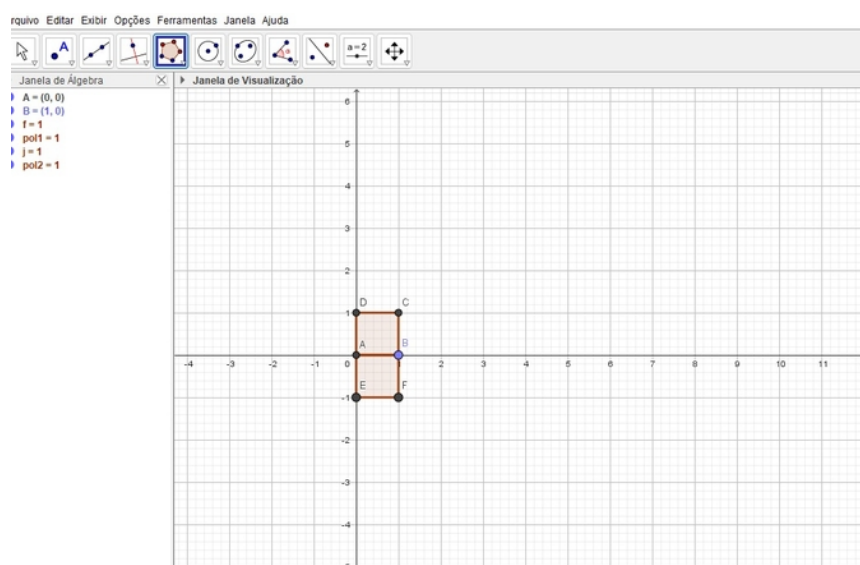
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Vamos construir um novo quadrado, idêntico ao anterior, posicionado abaixo do primeiro.

- Utilize novamente a ferramenta “Polígonos” e selecione “Polígono regular”.
- Clique no ponto B e, em seguida, no ponto A.
- Um novo quadrado surgirá na parte inferior do primeiro.

Com a união dos dois quadrados, formamos um retângulo de dimensões 1×2 .

Figura 4.4 – Construindo outro quadrado de lado 1



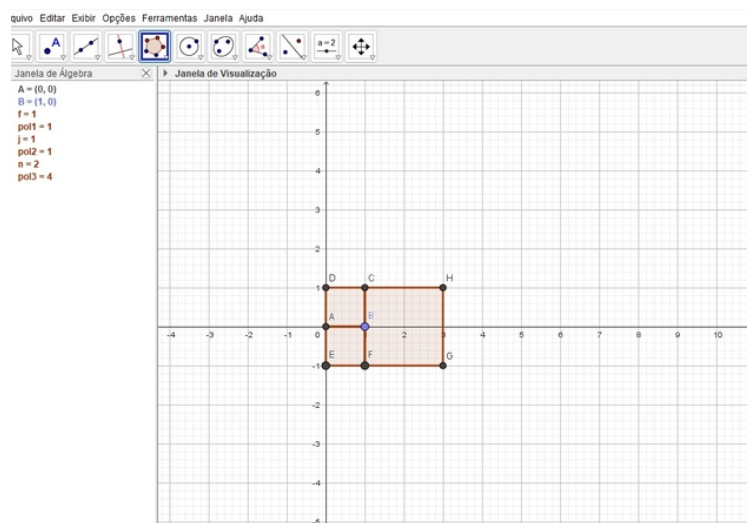
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Agora, construiremos um novo quadrado à direita do retângulo de dimensões 1×2 .

- Utilize novamente a ferramenta “Polígonos” e selecione “Polígono regular”.
- Clique primeiro no ponto C e, em seguida, no ponto F.
- Será gerado um quadrado com lado igual a 2 unidades.

Com a adição desse quadrado, o novo retângulo formado terá dimensões 2×3 .

Figura 4.5 – Construindo um quadrado de lado 2



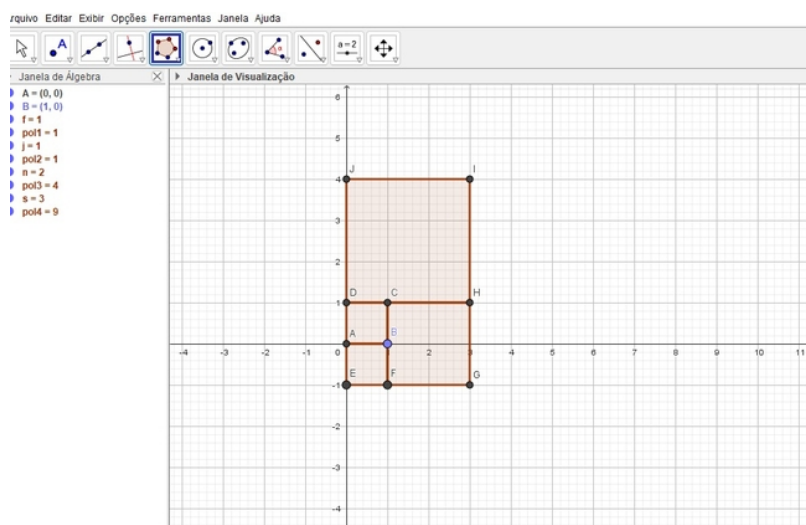
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

A seguir, construiremos um novo quadrado sobre a parte superior do retângulo de dimensões 2×3 .

- Selecione novamente a ferramenta “Polígonos” e escolha “Polígono regular”.
- Clique no ponto D e, em seguida, no ponto H.
- Será criado um quadrado com lado igual a 3 unidades.

Após essa construção, o novo retângulo formado terá dimensões 3×5 .

Figura 4.6 – Construindo um quadrado de lado 3



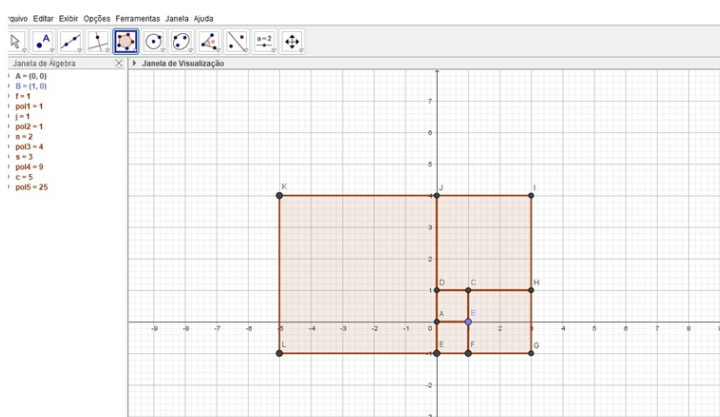
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Em seguida, construiremos um novo quadrado no lado esquerdo do retângulo de dimensões 3×5 .

- Acesse novamente a ferramenta “Polígonos” e selecione “Polígono regular”.
- Clique primeiro no ponto E e depois no ponto J.
- Um quadrado de lado 5 será formado.

Com essa adição, o novo retângulo terá dimensões 5×8 .

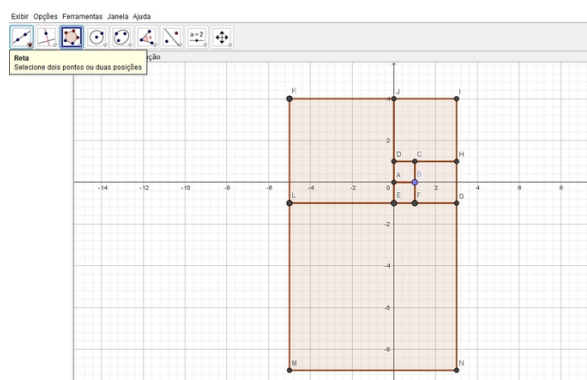
Figura 4.7 – Construindo um quadrado de lado 5



Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Agora, a partir do retângulo de dimensões 5×8 , construiremos, em sua parte inferior, um quadrado com lado 8. Para isso, utilizamos novamente a ferramenta de polígonos mencionada anteriormente, clicando nos pontos E e J. Com essa adição, formamos um novo retângulo com dimensões 8×13 .

Figura 4.8 – Construindo um quadrado de lado 8



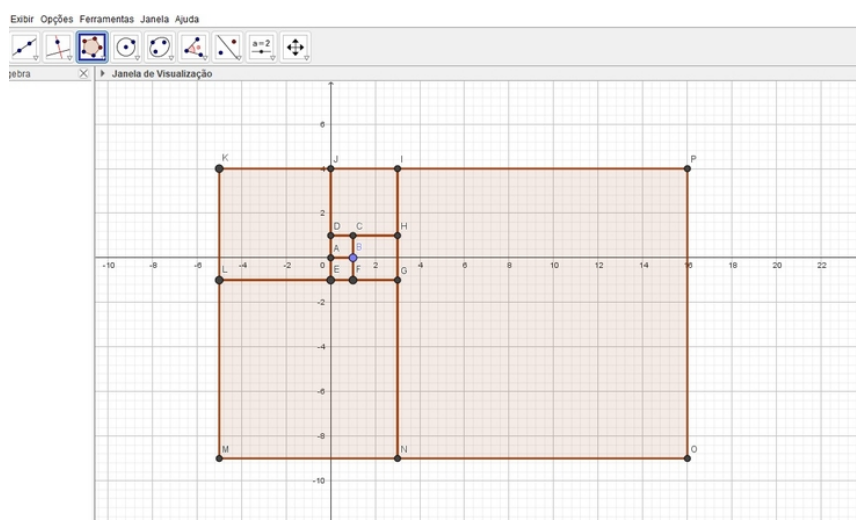
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Dando sequência, construiremos um novo quadrado no lado direito do retângulo de dimensões 8×13 .

- Utilize novamente a ferramenta “Polígonos” e selecione “Polígono regular”.
- Clique primeiro no ponto I e, em seguida, no ponto N.
- Será criado um quadrado com lado igual a 13 unidades.

Com essa adição, o novo retângulo terá dimensões 13×21 . Embora seja possível continuar a construção de novos quadrados, concluiremos a atividade neste ponto.

Figura 4.9 – Construindo um quadrado de lado 13



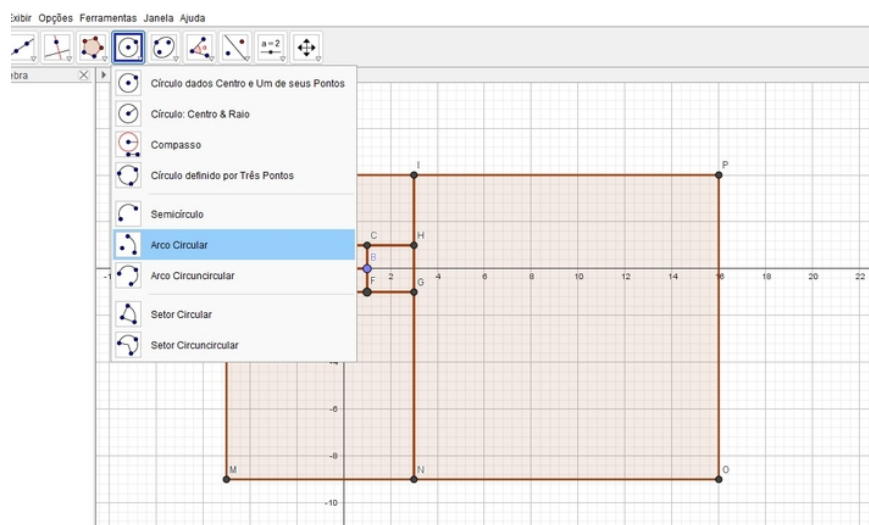
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Em seguida, traçaremos a espiral áurea.

- Acesse a ferramenta “Círculos e arcos” e selecione “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique sucessivamente nos pontos I, N e P do quadrado INOP.

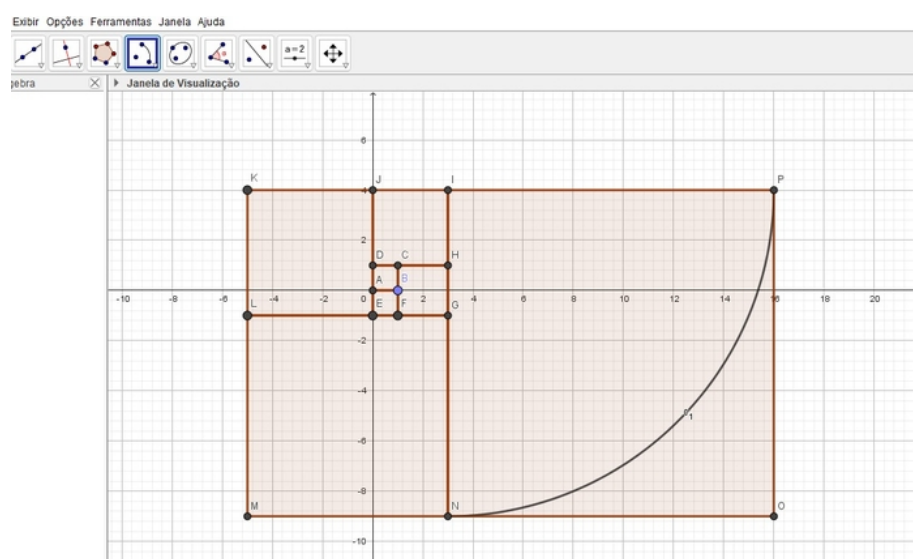
Dessa forma, daremos início à construção da espiral áurea.

Figura 4.10 – Traçando a espiral no quadrado INOP



Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Figura 4.11 – Traçando a espiral no quadrado INOP



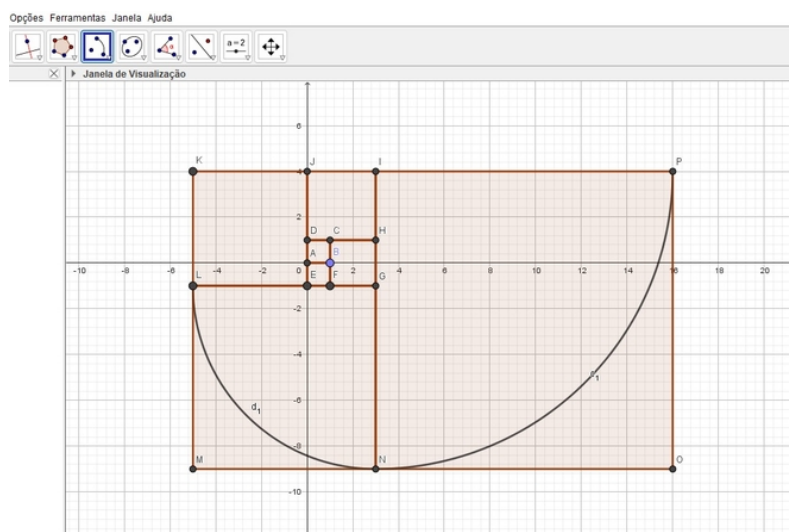
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Dando continuidade à construção da espiral, traçaremos agora um arco no quadrado LMNG.

- Utilize novamente a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique sucessivamente nos pontos G, L e N.

Dessa maneira, avançamos na formação da espiral áurea.

Figura 4.12 – Traçando a espiral no quadrado LMNG



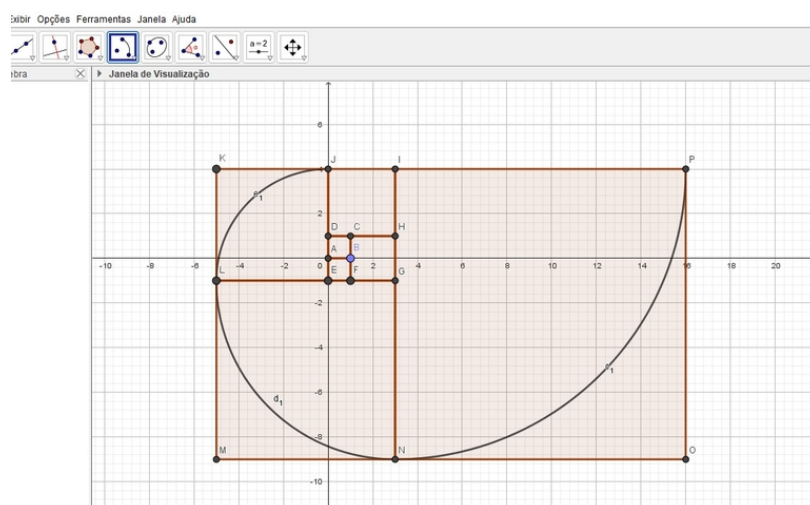
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Dando sequência à espiral, traçaremos agora um arco no quadrado LEJK.

- Utilize a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique sucessivamente nos pontos E, J e L.

Essa etapa prossegue a formação da espiral áurea.

Figura 4.13 – Traçando a espiral no quadrado LEJK



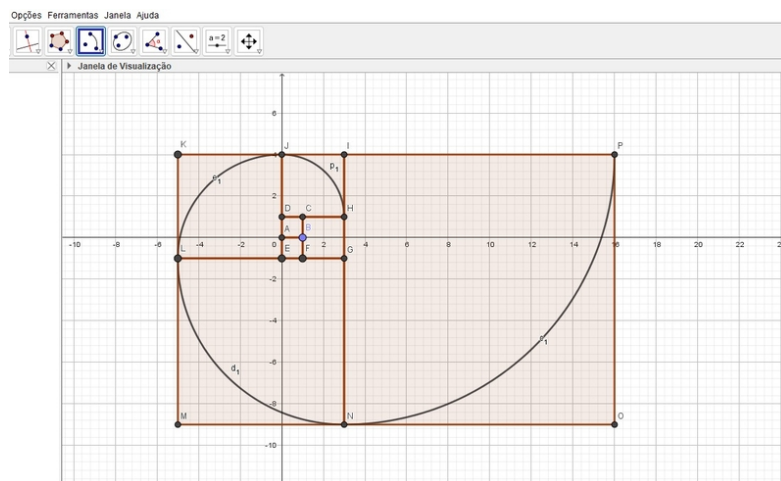
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Em seguida, daremos continuidade à espiral, traçando um arco no quadrado JDHI.

- Utilize a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique nos pontos D, H e J.

Essa etapa prossegue a formação da espiral áurea.

Figura 4.14 – Traçando a espiral no quadrado JDHI



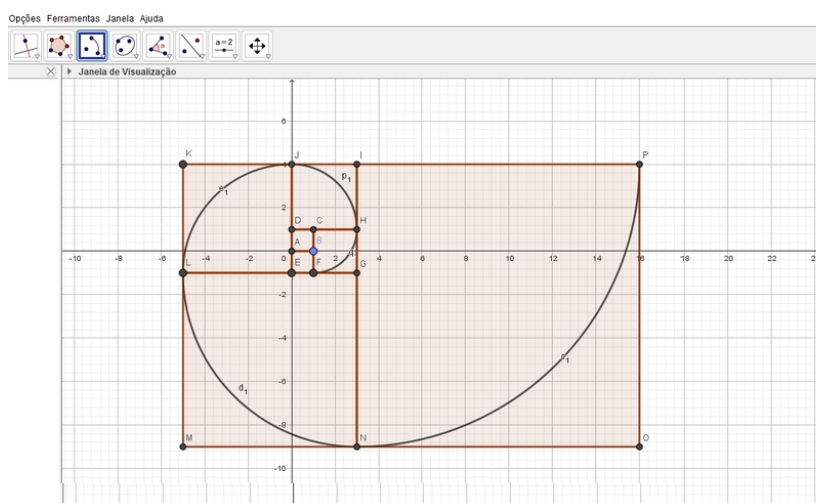
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Dando continuidade à espiral, traçaremos um arco no quadrado CFGH.

- Utilize a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique nos pontos C, F e H.

Com isso, a espiral áurea segue sua formação

Figura 4.15 – Traçando a espiral no quadrado CFGH



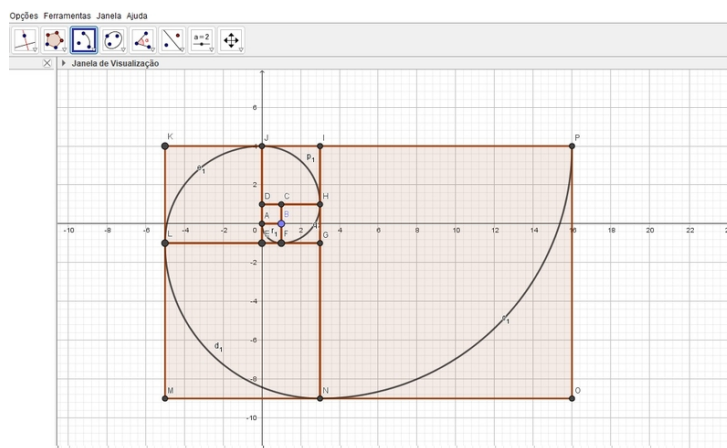
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Dando sequência à espiral, traçaremos um arco no quadrado AEFB.

- Utilize a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique nos pontos B, A e F.

Com essa etapa, continuamos a formação da espiral áurea.

Figura 4.16 – Traçando a espiral no quadrado AEFB



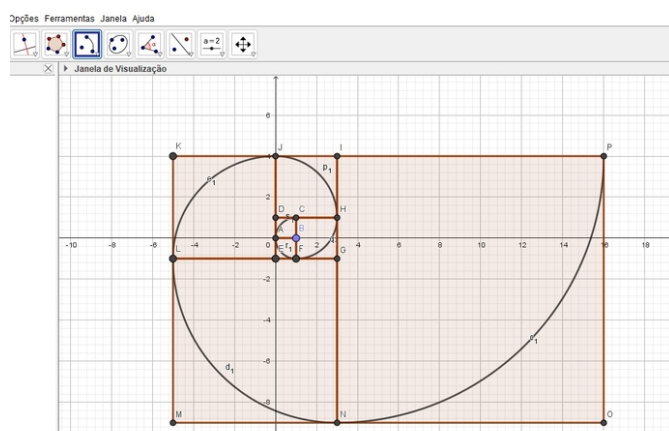
Fonte: feita pelo autor no Geogebra

Para finalizar a espiral, traçaremos um arco no quadrado DABC.

- Utilize a ferramenta “Arco circular dados centro e dois pontos”.
- Clique nos pontos B, C, e A.

Com essa última etapa, a espiral áurea será concluída.

Figura 4.17 – Traçando a espiral no quadrado DABC



Fonte: feita pelo autor no Geogebra

4.4 Atividade 4 – A Proporção Áurea no Corpo Humano

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade propõe investigar a presença da proporção áurea no corpo humano por meio de medições corporais realizadas pelos próprios estudantes. A proposta busca integrar a Matemática à Biologia e à Educação Física, incentivando a observação de proporções corporais e promovendo a reflexão sobre o uso da razão áurea na natureza e em características anatômicas.

A atividade fundamenta-se na aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), pois parte dos conhecimentos prévios e da própria realidade física dos alunos, e também na Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2000), ao estimular a leitura e interpretação de fenômenos naturais por meio da Matemática. Além disso, dialoga com a BNCC ao propor a investigação de padrões e relações matemáticas em contextos reais e interdisciplinares.

Conteúdos Abordados

- Razão áurea;
- Medidas e proporções;
- Aplicações da Matemática à Biologia e ao corpo humano;
- Interpretação e análise de dados.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

1 aula de 50 minutos (mais tempo extra para análise e socialização).

Modalidade

Trabalho em duplas ou pequenos grupos (preferencialmente de 2 a 4 alunos).

Materiais Necessários

- Fita métrica ou régua;
- Calculadora;
- Folha de registro (ver Apêndice C);
- Quadro e pincel atômico;
- Computador ou projetor (opcional, para sistematização dos dados).

Conhecimentos Prévios Recomendados

É importante que os alunos tenham noções básicas sobre proporções, divisão de segmentos e a definição da razão áurea (Φ 1,618). Se necessário, o professor pode

introduzir o tema por meio de uma breve exposição teórica ou com base em exemplos visuais (como o retângulo áureo, esculturas ou pinturas).

Descrição da Atividade

O professor introduz a atividade explicando que a razão áurea está presente em diversos aspectos da natureza, inclusive em proporções corporais humanas, como sugerido por estudos históricos e artísticos (ex: o *Homem Vitruviano* de Leonardo da Vinci).

Em seguida, os alunos são orientados a, em duplas ou trios, realizarem medições corporais uns dos outros, seguindo um roteiro com sugestões de medidas, tais como:

- Altura total / distância do umbigo ao chão;
- Altura da cabeça / comprimento do rosto;
- Altura do braço / distância entre ombro e cotovelo;
- Tamanho da mão / comprimento da falange maior;

Cada razão obtida deve ser calculada e registrada na folha de atividades (Apêndice D). Ao final, os alunos deverão comparar os resultados com o valor da razão áurea, observando em quais proporções corporais ela mais se aproxima.

O professor poderá promover uma discussão coletiva sobre a variabilidade entre os indivíduos, a aproximação dos valores medidos com Φ e o significado da razão áurea no contexto biológico e matemático.

Sugestões de Avaliação

A avaliação será processual e qualitativa, podendo considerar:

- Participação ativa dos alunos nas medições e cálculos;
- Clareza nos registros e na organização dos dados;
- Argumentação dos resultados em relação à razão áurea;
- Reflexões apresentadas durante a discussão coletiva.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT401): Resolver problemas de contagem, medida e geometria utilizando conceitos e procedimentos adequados.
- (EM13MAT402): Utilizar representações gráficas, tabelas e esquemas para descrever relações e proporções.
- (EM13CN02): Reconhecer padrões e estruturas recorrentes em sistemas naturais e anatômicos.
- (EM13EF01): Compreender e aplicar medidas do corpo humano em diferentes contextos.

4.5 Atividade 5 – Construção do Pentagrama no Software GeoGebra

Fundamentação e Objetivos

A Geometria é uma das áreas mais ricas da Matemática em termos de representação visual e de inter-relação com outras áreas do conhecimento. Neste contexto, o estudo do *pentagrama* — estrela de cinco pontas que emerge da construção de um pentágono regular — permite explorar padrões de simetria, proporções e a razão áurea de forma visual e investigativa.

Esta atividade tem como objetivo principal construir um pentagrama regular utilizando o software GeoGebra, promovendo a integração entre conceitos geométricos e o uso de ferramentas tecnológicas no ensino da Matemática. Além disso, busca-se desenvolver a compreensão da razão áurea e sua presença em estruturas geométricas, reforçando a interdisciplinaridade com a Arte, a Arquitetura e os padrões naturais.

A proposta está fundamentada na aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), na medida em que conecta novos conhecimentos às estruturas cognitivas dos alunos por meio da visualização e experimentação, e na Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2000), ao valorizar a leitura do mundo a partir de estruturas matemáticas. Também se alinha às competências da BNCC, ao utilizar recursos digitais e favorecer a análise de relações espaciais e proporções.

Conteúdos Abordados

- Construção de figuras geométricas com tecnologia;
- Polígonos regulares;
- Proporções e razão áurea;
- Simetria e padrões.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

2 aulas de 50 minutos cada.

Modalidade

Trabalho em duplas, com uso de computadores com o software GeoGebra instalado.

Materiais Necessários

- Computadores com acesso ao GeoGebra (versão instalada ou online);
- Roteiro com o passo a passo (apresentado abaixo);
- Régua e compasso (para breve demonstração manual, opcional);

- Quadro branco e projetor (para demonstração inicial do professor).

Conhecimentos Prévios Recomendados

É recomendável que os alunos já tenham noções básicas sobre polígonos regulares, ângulos internos e externos, bem como a definição de razão e proporção. Conhecimento prévio sobre a razão áurea também contribuirá para o aproveitamento da atividade, mas sua introdução pode ser feita durante a construção.

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula com uma breve apresentação do conceito de pentagrama, destacando sua origem histórica, aplicações em obras de arte e arquitetura, e sua relação com a razão áurea. Uma construção rápida com régua e compasso pode ser feita no quadro como introdução manual à figura.

Em seguida, os alunos serão conduzidos a utilizar o software GeoGebra para construir um pentagrama regular. A atividade impressa entregue à turma contém o passo a passo detalhado para realizar a construção no ambiente digital (ver Apêndice E). Durante a atividade, os estudantes serão convidados a observar e registrar:

- A presença de segmentos em proporção áurea;
- A simetria da figura;
- A recorrência do número 1,618 nas razões entre os segmentos do pentagrama.

Ao final da construção, o professor promove uma discussão coletiva sobre os conceitos observados, estimulando os alunos a relacionar a atividade com padrões encontrados na natureza, obras de arte e elementos arquitetônicos.

Sugestões de Avaliação

A avaliação poderá considerar:

- A correta realização da construção no GeoGebra;
- A capacidade de identificar a presença da razão áurea;
- A participação e argumentação durante a discussão;
- A clareza nos registros e nas observações feitas no roteiro.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT405): Utilizar recursos tecnológicos no processo de investigação e resolução de problemas geométricos.
- (EM13MAT403): Analisar figuras planas e espaciais com base em propriedades geométricas e relações métricas.

- (EM13ART104): Explorar elementos visuais e matemáticos presentes em produções artísticas e culturais.
- (EM13CN02): Reconhecer padrões e simetrias em estruturas naturais e artificiais.

Passo a Passo para Construção do Pentagrama no GeoGebra

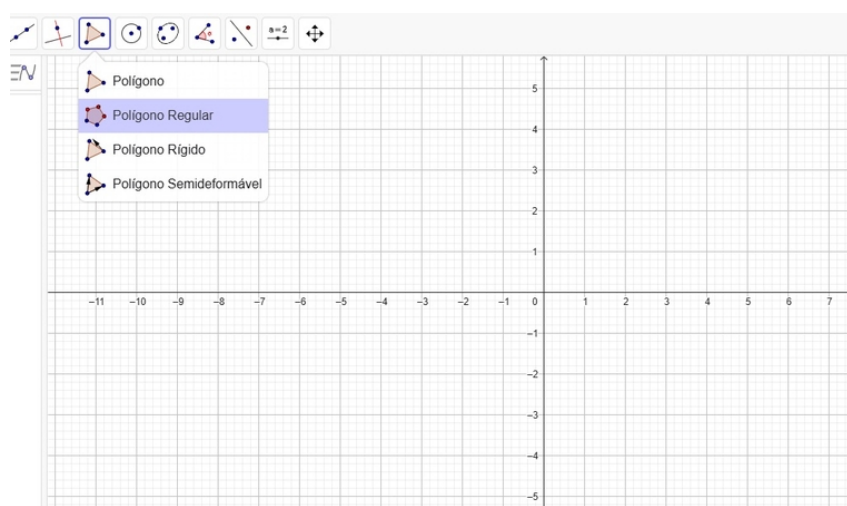
Abra o GeoGebra

- Acesse https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT, ou abra o aplicativo GeoGebra em seu computador ou celular.

Crie o Pentágono Regular

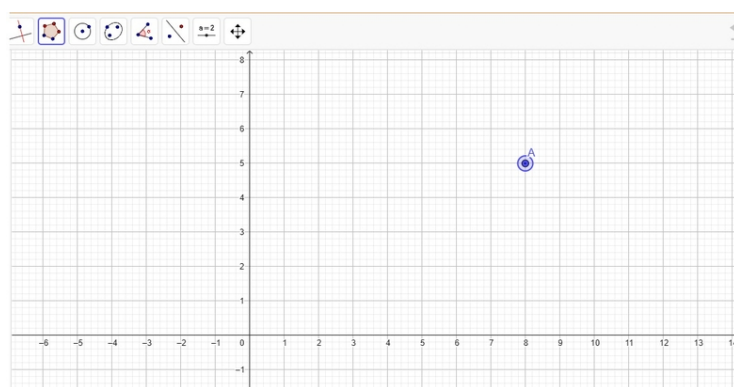
- Selecione a ferramenta Polígono Regular (ícone de um polígono no menu de ferramentas à esquerda).

Figura 4.18 – Exibindo ferramenta de polígono regular



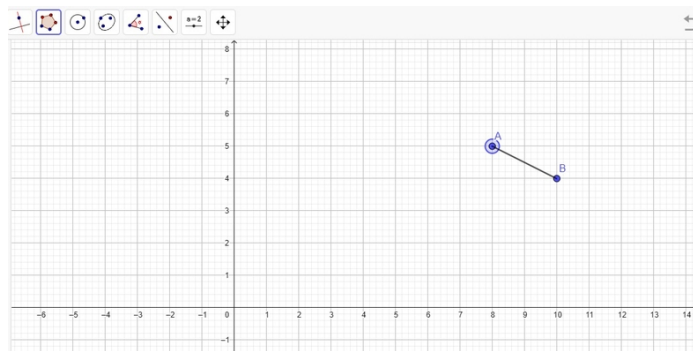
Clique em um ponto da tela para definir o centro do pentágono.

Figura 4.19 – Definindo o centro do pentágono.



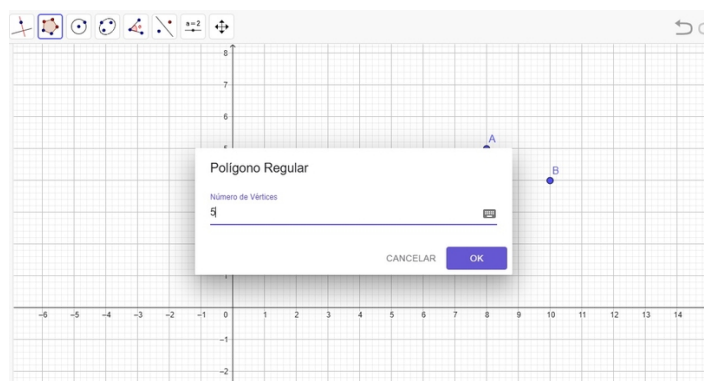
Em seguida, mova o cursor para um ponto qualquer e clique para definir o raio do pentágono.

Figura 4.20 – Definindo o raio do pentágono.



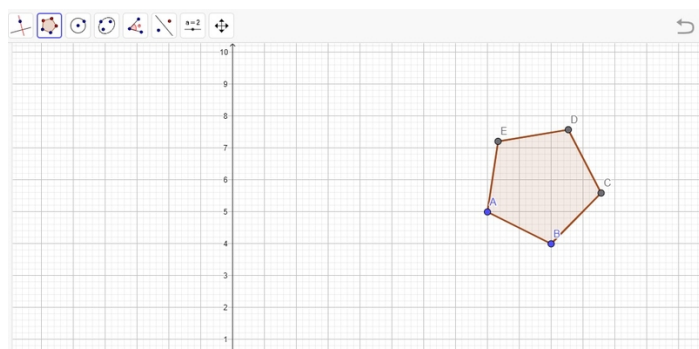
Na janela que aparece, selecione 5 lados para formar um pentágono regular.

Figura 4.21 – 5 lados para formar um pentágono regular.



Clique em “OK” e o pentágono será desenhado.

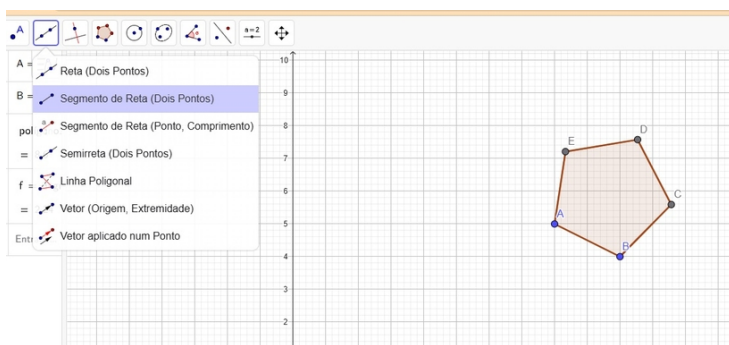
Figura 4.22 – Pentágono regular.



Desenhe as Diagonais do Pentágono

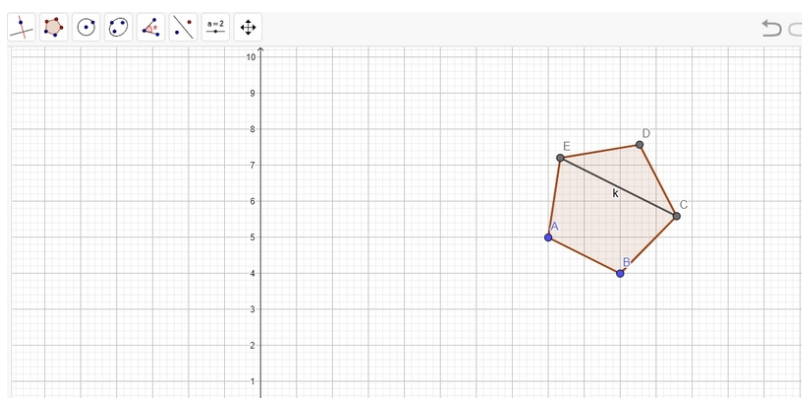
Selecione a ferramenta Segmento (ícone de segmento de reta no menu à esquerda).

Figura 4.23 – Ferramenta segmento



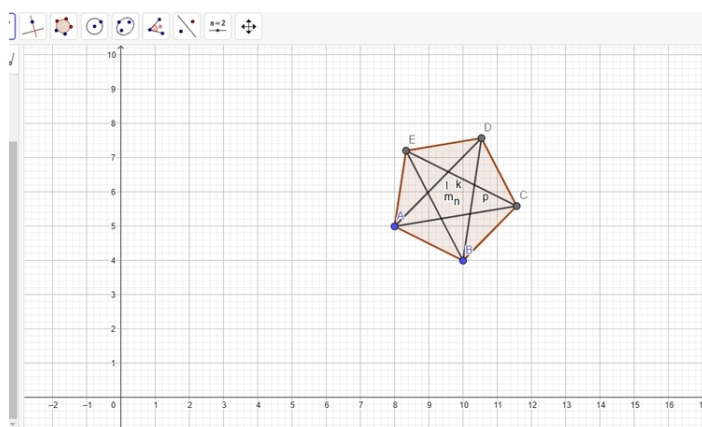
Clique em dois vértices não-adjacentes do pentágono para desenhar a primeira diagonal.

Figura 4.24 – Diagonal de um pentágono regular.



Repita esse processo para desenhar as outras diagonais, conectando vértices não-adjacentes.

Figura 4.25 – As 5 diagonais do pentágono regular.

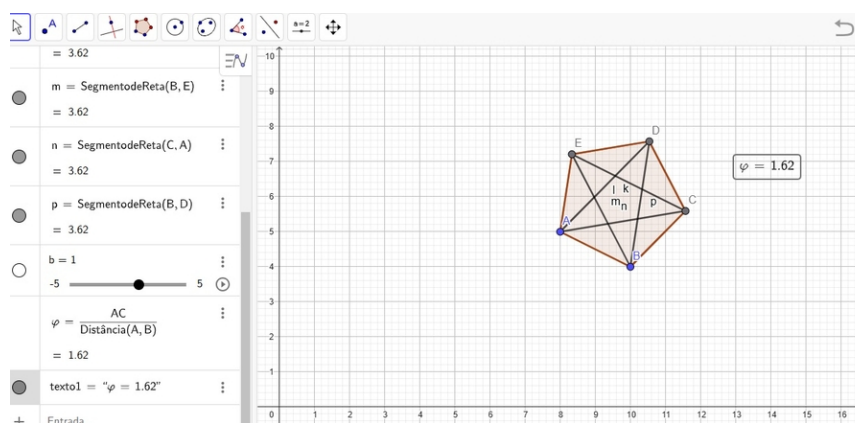


Você deve desenhar 5 diagonais. Elas irão se cruzar no centro do pentágono, formando uma estrela de 5 pontas (pentagrama).

- Use a ferramenta “Distância ou Comprimento”:
 - No GeoGebra, clique no ícone “Distância ou Comprimento”.
 - Clique sobre o segmento AC (diagonal maior).
 - Em seguida, clique sobre o segmento AB (lateral menor).
 - O GeoGebra mostrará os comprimentos dos dois segmentos.
- Divida os valores para encontrar a razão:
 - No campo de entrada (abaixo ou ao lado, dependendo da interface), digite:
 - $\varphi = a / b$

O resultado será aproximadamente 1.618, que é a razão áurea (φ).

Figura 4.26 – Relação diagonal/lado 1,618 no pentágono regular.



4.6 Atividade 6 – A Sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade propõe uma exploração investigativa da relação entre a sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras, a partir da análise da hipotenusa de triângulos retângulos formados por catetos cujas medidas são números consecutivos da sequência. A proposta visa promover o raciocínio lógico, a capacidade de identificar padrões e a construção do conhecimento matemático por meio da indução empírica.

A atividade se fundamenta nos pressupostos da Educação Matemática crítica (Skovsmose, 2000) e da aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), valorizando o protagonismo discente e o uso da matemática como linguagem para compreender estruturas e padrões

presentes na natureza e na própria matemática. Também se articula às competências da BNCC relacionadas ao pensamento algébrico, geométrico e à capacidade investigativa.

Conteúdos Abordados

- Teorema de Pitágoras;
- Sequência de Fibonacci;
- Relações entre álgebra e geometria;
- Observação e formulação de conjecturas.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

1 aula de 50 minutos (podendo ser ampliada para 2 aulas, com aprofundamento da conjectura e justificativa matemática).

Modalidade

Trabalho em duplas ou trios, com discussão orientada pelo professor.

Materiais Necessários

- Papel quadriculado ou caderno;
- Calculadora científica (opcional);
- Impressão da tabela de preenchimento (ver Apêndice D);
- Quadro branco e pincel atômico.

Conhecimentos Prévios Recomendados

É importante que os estudantes já dominem o Teorema de Pitágoras, saibam calcular o quadrado de um número e reconheçam os primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula lembrando com a turma o Teorema de Pitágoras e a definição da sequência de Fibonacci. Em seguida, apresenta a seguinte situação-problema:

“Se construirmos triângulos retângulos cujos catetos sejam dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, será que a hipotenusa ao quadrado resultante também pertence à sequência?”

Para explorar essa questão, os estudantes preencherão uma tabela comparando os catetos, os quadrados de seus valores e a soma obtida. Em seguida, verificarão se o valor corresponde a algum termo da sequência.

Tabela 4.1 – Tabela - Relação entre Catetos de Fibonacci e a Hipotenusa

Cateto 1 (F_n)	Cateto 2 (F_{n+1})	$(F_n)^2$	$(F_{n+1})^2$	Hipotenusa ² ($F_n^2 + F_{n+1}^2$)	Esse número pertence à sequência?
1	1	1	1	2	Sim
1	2	1	4	5	Sim
2	3	4	9	13	Sim
3	5	9	25	34	Sim
5	8	25	64	89	Sim

Os alunos são convidados a preencher uma tabela com os seguintes dados:

Durante a atividade, o professor promove momentos de reflexão coletiva, incentivando os estudantes a observarem padrões e formularem uma conjectura geral:

Proposição: A soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci é um número de Fibonacci, isto é, $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$, para $n \geq 1$.

Caso haja tempo e domínio dos alunos, o professor pode propor uma demonstração por indução matemática ou uma discussão mais formal da identidade.

Sugestões de Avaliação

A avaliação poderá considerar:

- Participação nas discussões em grupo;
- Organização da tabela e precisão nos cálculos;
- Clareza na explicação do padrão identificado;
- Capacidade de formular conjecturas com base na observação dos dados.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- **(EM13MAT201):** Investigar padrões numéricos e representar funções a partir de diferentes contextos.
- **(EM13MAT302):** Resolver problemas envolvendo geometria e relações métricas no triângulo.
- **(EM13MAT301):** Utilizar linguagem simbólica e raciocínio lógico para argumentar matematicamente.

4.7 Atividade 7 – Explorando a Relação entre a Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade visa apresentar aos alunos o Triângulo de Pascal como uma representação numérica rica em padrões e propriedades, incentivando a descoberta de relações com a sequência de Fibonacci. A proposta busca promover a análise combinatória de forma contextualizada, além de desenvolver a capacidade de observação, a construção de conjecturas e a valorização das conexões entre diferentes áreas da Matemática.

A atividade fundamenta-se nos pressupostos da aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), da Educação Matemática crítica (Skovsmose, 2000) e nos objetivos da BNCC, que propõem o desenvolvimento do pensamento algébrico, da análise de padrões e da articulação entre diferentes representações matemáticas.

Conteúdos Abordados

- Triângulo de Pascal e coeficientes binomiais;
- Combinatória e simetria;
- Sequência de Fibonacci;
- Representações numéricas e padrões.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

1 aula de 50 minutos (podendo ser estendida para aprofundamento investigativo).

Modalidade

Trabalho em grupos (de 3 a 4 alunos).

Materiais Necessários

- Impressão do Triângulo de Pascal até a linha 10 (ver Apêndice E);
- Lápis de cor ou marca-texto;
- Papel quadriculado (opcional);
- Quadro branco e pincel atômico.

Conhecimentos Prévios Recomendados

É recomendável que os alunos já tenham visto a ideia de combinação $\binom{n}{k}$, compreendam o conceito de sequência numérica e conheçam os primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula explicando o que é o Triângulo de Pascal, destacando sua construção a partir dos números binomiais:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

O triângulo é então apresentado graficamente (impresso ou projetado). Em seguida, o professor propõe a seguinte investigação:

Você sabia que os números da sequência de Fibonacci também estão escondidos dentro do Triângulo de Pascal?

Os alunos devem:

- 1) Identificar e colorir as diagonais do Triângulo de Pascal (ver Apêndice J).
- 2) Somar os números das diagonais específicas (conforme indicado) e verificar os resultados.
- 3) Comparar os totais obtidos com os termos da sequência de Fibonacci.

Exemplo:

Os alunos deverão registrar essas somas em uma tabela e identificar o padrão gerado, concluindo que os valores somados em diagonais inclinadas correspondem aos números de Fibonacci.

Sugestões de Avaliação

A avaliação será formativa, considerando:

- Participação ativa nas discussões em grupo;
- Capacidade de identificar padrões e regularidades;
- Clareza e organização dos registros;
- Justificativas apresentadas sobre as relações encontradas.

Competências e Habilidades da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT201) Investigar padrões numéricos e representar funções a partir de diferentes contextos.
- (EM13MAT401) Formular e testar conjecturas com base em argumentos lógico-dedutivos.
- (EM13MAT303) Utilizar o raciocínio combinatório para a resolução de problemas.

Material Complementar (Apêndice E)

- Impressão do Triângulo de Pascal até a 10ª linha;
- Roteiro de investigação para guiar os alunos na identificação das diagonais;
- Tabela para preenchimento das somas e comparação com os termos de Fibonacci.

4.8 Atividade 8 – Introduzindo as Propriedades da Sequência de Fibonacci

Fundamentação e Objetivos

Esta atividade tem por objetivo apresentar algumas propriedades importantes da sequência de Fibonacci por meio de uma abordagem investigativa e participativa. Os alunos serão convidados a realizar cálculos, observar padrões e formular conjecturas com base em suas descobertas. A proposta está fundamentada nos princípios da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003) e da Educação Matemática crítica (SKOVSMOSE, 2000), valorizando o protagonismo discente e o raciocínio lógico, conforme as diretrizes da BNCC.

Conteúdos Abordados

- Sequência de Fibonacci;
- Máximo divisor comum (MDC);
- Soma de termos de uma sequência;
- Padrões e propriedades numéricas.

Ano Sugerido

1º e 2º anos do Ensino Médio.

Tempo Estimado

2 aulas de 50 minutos.

Modalidade

Trabalho em grupos com socialização coletiva dos resultados.

Materiais Necessários

- Lápis e borracha;
- Calculadora;
- Atividade impressa (ver Apêndice K);
- Quadro branco ou negro e pincel/giz.

Conhecimentos Prévios Recomendados

- Conhecimento da definição da sequência de Fibonacci;

- Cálculo do máximo divisor comum entre dois números;
- Operações básicas com números inteiros.

Descrição da Atividade

O professor inicia a aula explicando que a atividade visa investigar propriedades matemáticas presentes nos números de Fibonacci. Os alunos serão incentivados a explorar padrões e buscar explicações para os resultados obtidos. Em seguida, a atividade impressa (ver Apêndice K) será distribuída, com tempo definido para discussão e resolução em grupo. Após o trabalho colaborativo, os grupos apresentarão suas observações e hipóteses.

Tarefas propostas:

1) Escreva os 10 primeiros números de Fibonacci, começando de $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

2) Calcule o máximo divisor comum entre os pares consecutivos:

- $\text{MDC}(F_1, F_2), \text{MDC}(F_2, F_3), \dots, \text{MDC}(F_9, F_{10})$.

3. Calcule as somas parciais:

- $F_1 + F_2$
- $F_1 + F_2 + F_3$
- $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$
- ... até $F_1 + F_2 + \dots + F_{10}$.

4. Calcule as somas dos índices ímpares:

- $F_1 + F_3$
- $F_1 + F_3 + F_5$
- $F_1 + F_3 + F_5 + F_7$
- $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9$

5. Calcule as somas dos índices pares:

- $F_2 + F_4$
- $F_2 + F_4 + F_6$
- $F_2 + F_4 + F_6 + F_8$
- $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10}$

Discussão e Sistematização

Com base nos resultados obtidos, os alunos deverão identificar os padrões e propor conjecturas. O professor então apresentará as seguintes propriedades:

- **Propriedade 1:** O máximo divisor comum entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci é 1.

$$\text{MDC}(F_n, F_{n+1}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

- **Propriedade 2:** A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

- **Propriedade 3:** A soma dos n primeiros termos de índices ímpares é:

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Propriedade 4: A soma dos n primeiros termos de índices pares é:

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Sugestões de Avaliação

A avaliação será formativa, considerando:

- Participação nas atividades em grupo;
- Clareza na organização dos cálculos;
- Correlação correta entre os resultados e as propriedades enunciadas;
- Formulação de conjecturas e justificativas.

Competências da BNCC Trabalhadas

- (EM13MAT201) Investigar padrões numéricos e representar funções;
- (EM13MAT301) Resolver problemas utilizando raciocínio lógico e linguagem simbólica;
- (EM13MAT401) Formular e testar conjecturas com base em argumentos dedutivos.

5 ESTUDOS DE CASO E RELATOS DE EXPERIMENTOS SOBRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO

Neste segmento, apresento alguns estudos de caso e relatos de experimentos realizados com turmas do ensino médio, com foco na aplicação da sequência de Fibonacci no contexto educacional. Esses estudos foram desenvolvidos a partir de duas perspectivas: a aplicação pedagógica nas aulas de matemática e o feedback dos estudantes sobre o impacto dessas atividades em seu aprendizado. As experiências relatadas estão fundamentadas nas teorias de ensino-aprendizagem de Piaget (1975), Vygotsky (1991) e Zabala (1998), que defendem a importância do aprendizado ativo, a interdisciplinaridade e a construção do conhecimento a partir de situações significativas.

Estudo de Caso 1: Construção Artística da Espiral de Fibonacci com Papel Quadriculado

Contexto:

Em uma turma do 2º ano do ensino médio do Colégio Contato Maceió, composta por 40 alunos, foi planejada uma aula prática e interdisciplinar entre matemática e arte, com foco na construção da espiral de Fibonacci utilizando materiais simples e também a ferramenta digital GeoGebra, que foi utilizada pelo professor. A atividade foi realizada durante duas aulas de 50 minutos. O objetivo principal da atividade era proporcionar aos alunos uma experiência visual e prática de como a sequência de Fibonacci se manifesta em formas geométricas e artísticas, tanto fisicamente quanto por meio de tecnologia digital.

Objetivos:

- Explorar a sequência de Fibonacci por meio da construção de quadrados proporcionais, de modo a representar a relação entre os números da sequência.
- Visualizar a espiral de Fibonacci utilizando instrumentos simples, como régua e compasso, para criar uma representação prática e concreta do conceito.
- Integrar matemática e arte em uma produção criativa, promovendo uma abordagem interdisciplinar que facilite a compreensão e a fixação do conteúdo matemático.
- Utilizar o GeoGebra como recurso digital para demonstrar a construção da espiral de Fibonacci de forma dinâmica, com o professor guiando a construção digital.

Desenvolvimento da Atividade:

Parte 1: Introdução Conceitual

- O professor apresentou a sequência de Fibonacci e discutiu seu padrão de formação. Essa abordagem seguiu os princípios de (Piaget, 1975), que ressaltam a importância de tornar os conceitos acessíveis por meio de representações concretas.

- Foram exibidas imagens de fenômenos naturais e artísticos que manifestam a espiral de Fibonacci, como conchas, girassóis e galáxias, conectando teoria à realidade e estimulando o interesse dos alunos.
- O professor explicou como a espiral pode ser construída utilizando a soma dos lados dos quadrados que formam a sequência.

Parte 2: Construção Manual da Espiral

- Cada aluno recebeu papel quadriculado, régua e compasso. A tarefa foi desenhar quadrados com lados de 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13 unidades, lado a lado, formando um padrão de crescimento característico da sequência de Fibonacci.
- Com o auxílio do compasso, os alunos desenharam arcos conectando os vértices dos quadrados, formando a espiral.
- Os alunos finalizaram o trabalho personalizando seus desenhos com coloração ou outros elementos artísticos, estimulando a criatividade enquanto consolidavam a aprendizagem matemática.

Parte 3: Uso do GeoGebra para a Construção Digital

- Durante a aula, o professor utilizou o GeoGebra para mostrar aos alunos, de forma interativa, como a espiral de Fibonacci poderia ser desenhada digitalmente. O professor guiou os alunos na visualização da espiral utilizando o software, destacando as propriedades geométricas da sequência.
- O uso do GeoGebra ajudou a tornar a construção mais dinâmica, permitindo uma visualização mais precisa e a exploração de diferentes aspectos da sequência, além de oferecer uma forma digital para a representação do padrão.

Parte 4: Galeria e Discussão

- Os trabalhos foram expostos na sala de aula, e os alunos tiveram a oportunidade de explicar como aplicaram a sequência de Fibonacci em suas produções manuais.
- Em seguida, houve uma discussão em grupo sobre onde os alunos já haviam observado esse padrão na vida real e o que haviam aprendido com a atividade.

Observações sobre o Impacto Pedagógico:

A atividade foi viável em termos de tempo e recursos, pois exigiu apenas materiais escolares básicos e a utilização de um computador com **GeoGebra**. Os alunos foram capazes de visualizar o crescimento da sequência de Fibonacci de maneira concreta, tanto fisicamente quanto digitalmente, facilitando a compreensão do conceito abstrato. A integração com a arte

e a tecnologia contribuiu para a fixação do conteúdo e para a motivação dos alunos, seguindo os princípios de , que defendem a importância da interdisciplinaridade e do uso de projetos práticos significativos no processo de aprendizagem. Além disso, conforme argumentado por (VYGOTSKY, 1991), a interação social e a mediação simbólica desempenham um papel crucial no desenvolvimento cognitivo, o que foi evidenciado na troca de ideias e na explicação das produções dos alunos.

Feedback dos Estudantes:

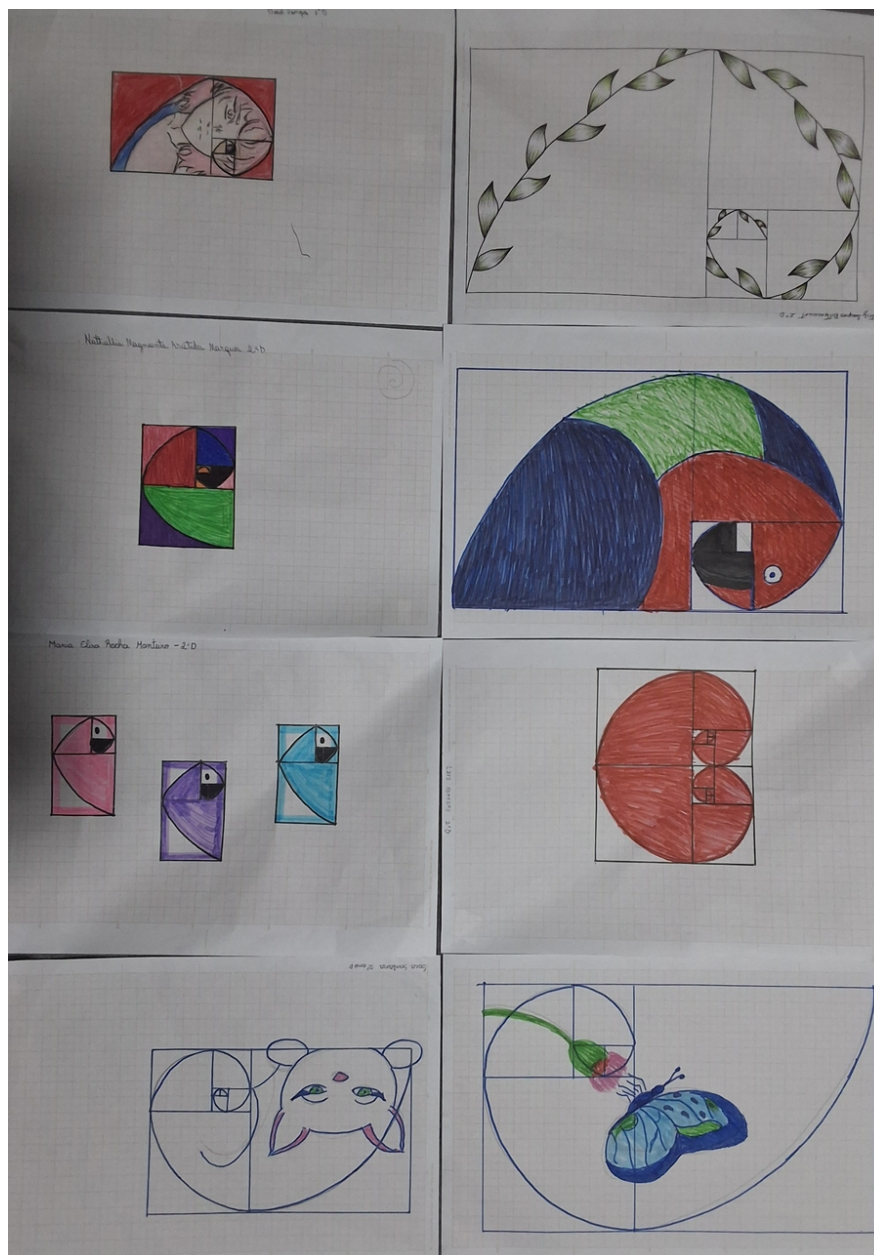
- Lucas (16 anos): “Fazer o desenho me ajudou a entender como a sequência cresce. Antes era só número, agora fez sentido.”
- Bruna (16 anos): “Gostei de usar régua e compasso, parecia arte. Nunca pensei que matemática podia ser tão bonita.”
- Felipe (17 anos): “Eu adorei a parte do GeoGebra! Foi muito legal ver a espiral crescer na tela. A matemática ficou mais divertida.”

Abaixo, seguem as fotos dos trabalhos dos alunos realizados durante a atividade.

Figura 5.1 – Estudantes em atividade geométrica sobre o Retângulo de Ouro



Figura 5.2 – Trabalho dos alunos realizado durante a atividade.



Estudo de Caso 2: Atividade Prática de Medida do Corpo Humano e Sequência de Fibonacci

Contexto:

Em uma turma do 1º ano do ensino médio, composta por 38 alunos, realizou-se uma aula interdisciplinar envolvendo Matemática, Biologia e Educação Física. O objetivo foi investigar se o corpo humano apresenta proporções que se aproximam da razão áurea (φ), derivada da sequência de Fibonacci. A atividade prática teve duração de duas aulas de 50 minutos e consistiu em medir partes do corpo e comparar as razões obtidas com o valor da proporção áurea.

Objetivos:

- Explorar a presença da sequência de Fibonacci e da razão áurea no corpo humano.
- Relacionar conceitos matemáticos com biologia e anatomia.
- Desenvolver habilidades de medição, análise de dados e pensamento matemático aplicado.
- Estimular a aprendizagem ativa por meio de investigação prática e contextualizada.

Desenvolvimento da Atividade:

Os alunos foram divididos em duplas e receberam fitas métricas, calculadoras e tabelas para preencher. Mediram diversas partes do corpo, como:

- Altura total e altura do umbigo ao chão
- Comprimento do braço e do antebraço
- Tamanho da mão e do dedo médio
- Altura da cabeça e largura dos ombros

Com esses dados, calcularam a razão entre os pares de medidas e compararam com o valor da razão áurea. As duplas discutiram quais proporções se aproximavam de 1,618 e quais não, considerando variações corporais entre os colegas.

Em seguida, os alunos representaram os resultados em gráficos e esboços corporais anotados com as proporções encontradas.

Tabela 5.1 – Tabela: Medidas Corporais e Razão Áurea

Nome do Aluno	Altura Total (cm)	Altura até o Umbigo (cm)	Razão (Altura total / Umbigo)	Tamanho do Braço (cm)	Tamanho do Antebraço (cm)	Razão (Braço / Antebraço)
Ana	160	99	1,62	56	35	1,60
Bruno	172	106	1,62	61	38	1,61
Camila	158	96	1,65	55	34	1,62
Diego	180	112	1,61	63	39	1,62
Eduarda	165	102	1,62	58	36	1,61
Felipe	170	105	1,62	60	37	1,62

Observações sobre o Impacto Pedagógico:

A atividade despertou grande interesse por parte dos estudantes, pois envolveu seus próprios corpos como objeto de estudo, tornando a matemática mais concreta e envolvente. A proposta contribuiu para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia, ao permitir que os alunos observassem, coletassem e analisassem dados reais.

A prática dialoga com , ao favorecer o desenvolvimento das operações formais por meio da abstração baseada na experiência direta, e com David Ausubel (1980), ao partir de conceitos significativos e experiências próximas do cotidiano dos alunos para promover a aprendizagem significativa.(Piaget, 1975)

Feedback dos Estudantes:

Joana (16 anos): “Achei incrível descobrir que nosso corpo pode ter proporções matemáticas. Medir e comparar com a razão áurea foi uma experiência totalmente nova para mim.”

Lucas (15 anos): “Essa aula foi diferente e legal! Nunca pensei que a matemática estivesse tão conectada com o nosso corpo. E ainda usamos fita métrica de verdade!”

Abaixo, seguem as fotos dos alunos, em duplas, realizando medições corporais para investigar a presença da proporção áurea.

Figura 5.3 – Alunos realizando medições corporais durante a atividade prática



Estudo de Caso 3: Atividade Prática de Crescimento Populacional e Fibonacci **Contexto:**

Em uma turma do 3º ano do ensino médio, composta por 35 alunos, realizou-se uma atividade prática sobre crescimento populacional utilizando a sequência de Fibonacci como modelo. A proposta foi desenvolvida em duas aulas de 50 minutos e teve como finalidade mostrar como a Matemática pode ser aplicada para compreender fenômenos naturais, a

partir do famoso problema de Fibonacci sobre o crescimento de coelhos.

Objetivos:

- Demonstrar como a sequência de Fibonacci pode ser usada para modelar o crescimento populacional.
- Relacionar a sequência de Fibonacci com a biologia e os fenômenos naturais.
- Incentivar o raciocínio lógico e a resolução de problemas matemáticos através de um contexto real.

Desenvolvimento da Atividade:

- Foi apresentado o problema clássico de Fibonacci sobre o crescimento da população de coelhos, onde os alunos deveriam calcular o número de pares de coelhos ao longo de vários meses, aplicando a sequência.
- Em seguida, os estudantes fizeram uma simulação do crescimento populacional em grupos, utilizando gráficos e representações visuais da sequência.

Observações sobre o Impacto Pedagógico: A atividade foi bem recebida, pois possibilitou aos alunos uma compreensão prática de como uma sequência matemática simples pode ser usada para modelar problemas do cotidiano, como o crescimento populacional. O uso de gráficos e representações visuais facilitou o entendimento dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais tangível e acessível. Essa abordagem dialoga com Piaget (1975), ao estimular o desenvolvimento das operações formais, e com (Ausubel; Hanesian; Novak, 1980), ao partir de conceitos significativos para a aprendizagem.

Feedback dos Estudantes: Carlos (15 anos): “Foi muito interessante ver como a matemática pode ser usada para resolver problemas reais, como o crescimento das populações. Nunca imaginei que a sequência de Fibonacci estivesse por trás disso.” Maria (15 anos): “A atividade foi divertida, e o gráfico ficou muito legal! Agora entendo como a sequência de Fibonacci funciona, não apenas como uma fórmula, mas como uma ferramenta para resolver problemas do mundo real.”

Abaixo, seguem as fotos dos alunos em grupo durante a atividade prática de crescimento populacional.

Figura 5.4 – Registro dos alunos em grupo durante a atividade prática de crescimento populacional



Estudo de Caso 4: Sequência de Fibonacci na Natureza

Contexto:

Em uma turma do 3º ano do ensino médio, composta por 32 alunos, realizou-se uma atividade prática ao ar livre, com duração de duas aulas de 50 minutos, cujo objetivo foi identificar a presença da sequência de Fibonacci em elementos naturais, como plantas, árvores e flores no entorno da escola

Objetivos:

- Levar os alunos a observar fenômenos naturais que seguem a sequência de Fibonacci.
- Estimular a exploração ativa da matemática no ambiente natural.
- Conectar a teoria matemática à realidade do mundo físico.

Desenvolvimento da Atividade:

A atividade iniciou-se com uma breve exposição teórica sobre a sequência de Fibonacci e sua ocorrência na natureza, incluindo exemplos como a quantidade de pétalas em flores, a disposição das folhas no caule (filotaxia) e os padrões presentes em frutos.

Na etapa seguinte, os alunos, organizados em grupos, percorreram os arredores da escola observando e registrando padrões encontrados em flores e plantas, verificando a ocorrência de números da sequência. As anotações foram feitas em cadernos e, em alguns casos, acompanhadas de registros fotográficos.

Tabela 5.2 – Observações de padrões da sequência de Fibonacci na natureza

Grupo de Alunos	Planta/Flor Observada	Número de pétalas/espirais	Termo da sequência de Fibonacci	Observações adicionais
Grupo 1	Margarida	34 pétalas	34	Seguiu exatamente um número da sequência
Grupo 2	Girassol	55 espirais	55	Padrão bem visível no centro da flor
Grupo 3	Lírio	3 pétalas	3	Exemplo clássico de Fibonacci
Grupo 4	Rosa (variedade simples)	5 pétalas	5	Fácil de identificar
Grupo 5	Pinha	8 espirais em uma direção e 13 em outra	8 e 13	Mostrou dois termos da sequência
Grupo 6	Abacaxi	8 e 13 espirais diagonais	8 e 13	Visualização clara em diferentes ângulos

Observações sobre o Impacto Pedagógico: A atividade ao ar livre proporcionou aos alunos uma experiência de aprendizado mais dinâmica e interativa. A observação direta da sequência na natureza despertou curiosidade e valorizou o conhecimento científico. De acordo com (Dewey, 1959), a experiência concreta no ambiente real estimula a aprendizagem ativa e contextualizada. A proposta também se alinha ao pensamento de Freire (1996), ao valorizar a investigação e o diálogo com o mundo.

Feedback dos Estudantes: Pedro (16 anos): “Foi incrível ver como a matemática aparece de forma tão clara na natureza. Nunca imaginei que fosse tão fácil encontrar Fibonacci nas plantas ao nosso redor.” Luciana (17 anos): “Eu sempre pensei que a matemática fosse apenas um monte de números, mas agora vejo que ela tem uma ligação direta com a vida. As plantas são como uma obra de arte natural!”

Os relatos de experiências pedagógicas mostraram que a sequência de Fibonacci pode ser uma ferramenta altamente eficaz no ensino médio, não apenas por sua relevância matemática, mas também por sua capacidade de envolver os alunos em atividades interdisciplinares que conectam a matemática com outras áreas do conhecimento, como arte, biologia e ciências naturais. As atividades práticas e a observação direta, como no caso da exploração da natureza e da arte, ajudaram os alunos a perceber a matemática como algo vivo e presente no seu cotidiano, gerando um impacto positivo no seu aprendizado e na percepção da matemática como uma disciplina interessante e útil. As experiências dialogam com uma perspectiva construtivista de ensino, que valoriza a interação, o contexto

e a construção ativa do saber.

5.1 Benefícios Pedagógicos do Ensino da Sequência de Fibonacci

O ensino da sequência de Fibonacci oferece uma série de benefícios pedagógicos, incluindo:

- **Desenvolvimento do Pensamento Lógico:** Os alunos são desafiados a entender o conceito de sequência e a reconhecer padrões, habilidades essenciais no desenvolvimento do raciocínio lógico.
- **Integração de Disciplinas:** A sequência de Fibonacci pode ser conectada a várias áreas, promovendo uma abordagem interdisciplinar no currículo escolar.
- **Estímulo à Criatividade:** As atividades práticas e visuais, como a criação de espirais ou o estudo da arte e arquitetura, ajudam a desenvolver a criatividade dos alunos.
- **Conexão com o Mundo Real:** Ao aplicar a sequência de Fibonacci em fenômenos naturais e no design artístico, os alunos percebem a importância da matemática no mundo ao seu redor.

A sequência de Fibonacci, por sua riqueza matemática e por suas múltiplas conexões com o mundo natural, artístico e científico, revela-se um tema de grande potencial pedagógico para o Ensino Médio. Sua simplicidade estrutural, aliada à profundidade conceitual e à beleza de suas aplicações, permite que ela seja explorada de maneira acessível, interdisciplinar e significativa.

Ao longo deste capítulo, foram apresentadas propostas de introdução ao conceito, atividades práticas e investigativas, estratégias interdisciplinares e sugestões de avaliação. Tais abordagens visam não apenas o desenvolvimento do raciocínio lógico e da habilidade de reconhecer padrões, mas também o estímulo à criatividade, à curiosidade e à valorização da matemática como ferramenta de compreensão do mundo.

A integração da sequência de Fibonacci com áreas como Biologia, Arte, História, Física e Computação evidencia a importância de uma prática docente que ultrapasse os limites tradicionais das disciplinas e que promova um aprendizado contextualizado, colaborativo e crítico. Nesse sentido, a sequência de Fibonacci torna-se um excelente ponto de partida para projetos interdisciplinares, incentivando o protagonismo estudantil e a construção de saberes integrados.

Em tempos em que se busca uma educação mais humanizada, conectada com os desafios contemporâneos e com o cotidiano dos alunos, temas como a sequência de Fibonacci oferecem uma oportunidade ímpar de reinventar o ensino da matemática, tornando-o mais envolvente, relevante e transformador.

CONCLUSÃO

A sequência de Fibonacci, com suas propriedades matemáticas fascinantes e suas diversas aplicações no mundo natural, nas artes e na ciência, se revela como uma ferramenta poderosa para o ensino de matemática, especialmente no contexto do ensino médio. Ao longo desta dissertação, foi possível demonstrar que, além de sua importância teórica, a sequência de Fibonacci possui um valor pedagógico significativo, oferecendo aos estudantes uma forma de conectar conceitos matemáticos abstratos a fenômenos do cotidiano.

Primeiramente, foi discutida a definição da sequência de Fibonacci e suas propriedades, como a recursividade e a relação com a proporção áurea, que explicam a presença da sequência em uma infinidade de processos naturais e estéticos. A exploração das diversas aplicações da sequência, tanto em contextos naturais, como no crescimento das populações ou na disposição das pétalas das flores, quanto nas artes e na arquitetura, permitiu evidenciar a ubiquidade da sequência e como ela serve como modelo para fenômenos de ordem, harmonia e eficiência.

No campo educacional, este trabalho enfatizou a importância de integrar a sequência de Fibonacci ao ensino de matemática no ensino médio. A sequência se apresenta como uma excelente ferramenta para desenvolver habilidades de raciocínio lógico, resolução de problemas e pensamento crítico. A aplicação de atividades práticas e interdisciplinares, como a criação de espirais ou a análise da sequência na natureza, permite que os alunos percebam a matemática não apenas como um conjunto de fórmulas, mas como uma linguagem para compreender o mundo ao seu redor.

Ao integrar a sequência de Fibonacci a outras disciplinas, como arte, biologia, física e computação, o ensino da matemática pode se tornar mais dinâmico e motivador, estimulando a criatividade e o interesse dos alunos. Além disso, a sequência oferece uma rica oportunidade para o desenvolvimento de competências que são essenciais não só para o aprendizado da matemática, mas para a compreensão e solução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

Por fim, fica evidente que a sequência de Fibonacci, com suas múltiplas aplicações e beleza intrínseca, é muito mais do que um simples conceito matemático. Ela é uma chave para a compreensão de padrões que governam a natureza, a arte e até a tecnologia. A inserção dessa sequência no currículo do ensino médio não só enriquece o aprendizado matemático, mas também prepara os alunos para explorar o mundo de maneira mais profunda e criativa. Acredita-se que, com a continuação do estudo e da aplicação de tais conceitos, será possível promover um ensino mais significativo e envolvente para as futuras gerações de estudantes.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. 1. ed. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003. Citado na página 42.
- AUSUBEL, D. P.; HANESIAN, H.; NOVAK, J. D. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. v. 1. Citado na página 81.
- BOYER, C. **História da Matemática**. 4. ed. [S.l.]: Blucher, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 16.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular Educação Educação é a base: Base Nacional Comum Curricular. **Base Nacional Comum Curricular Educação Educação é a base**, Brasília, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- DEWEY, J. **Democracia e educação**. 3. ed. São Paulo: Nacional, 1959. Citado na página 83.
- EVES. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: (ed) da Unicamp, 2011. 843 p. Citado na página 15.
- FERREIRA, R. A. **Seqüência de Fibonacci**. 2007. 36 p. Monografia (Curso de Matemática Bacharelado e Licenciatura do Centro UNIFIEO) — UNIFIEO. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgclefindmkaj/https://incertezaemprincípio.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/07/tc-sequc3aanciadefibonacci.pdf>. Acesso em: 9 abr. 2025. Citado na página 26.
- HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**: a razão áurea na matemática, nas ciências e na arte. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.
- IBRAGIMOV, R. Finding the Fibonacci Spiral Patterns in Atmospheric Equatorial Waves. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, MedCrave Group, Albuquerque, New Mexico, EUA, v. 10, n. 12, Dezembro 2022. Disponível em: <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=122085>. Citado na página 17.
- JAGANNATHAN, ANURADHA. The Fibonacci quasicrystal: Case study of hidden dimensions and multifractality. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 93, n. 4, 11 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.045001>. Citado na página 17.
- KNUTH, DONALD E. **The Art of Computer Programming**. 3. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1973. v. 1. (The Art of Computer Programming, v. 1). Citado na página 16.
- LISIECKI, FILIP *et al.* Magnons in a Quasicrystal: Propagation, Extinction, and Localization of Spin Waves in Fibonacci Structures. **Physical Review Applied**, American Physical Society, College Park, Maryland, EUA, v. 11, n. 5, Maio 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1810.04931>. Citado na página 17.
- LIVIO, M. **Razão áurea**: a história de Φ , um número surpreendente. Marco Shinobu Matsumura. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 18 e 23.

MAY, J. **The Application of Fibonacci Numbers in Financial Markets**. 2019. Disponível em: <https://www.investopedia.com/terms/f/fibonacciretracement.asp>. Citado na página 17.

OLIVEIRA, C. A. R. de. **Composição musical e Fibonacci**: a utilização da música como ferramenta pedagógica. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ). Disponível em: https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat_cap/CLARICE_AUGUSTA_REZENDE_DE_OLIVEIRA.pdf. Acesso em: 9 abr. 2025. Citado na página 17.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 80.

SILVA, S. M. M. **Aplicação da sequência de Fibonacci como método para predição do comportamento de preço das criptomoedas**. 2022. Monografia (Curso de Graduação em Administração da Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade) — Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/77604>. Citado na página 17.

SKOVSMOSE. Educação Matemática Crítica - A questão da democracia. **Perspectivas em Educação Matemática**, Papirus, Campinas, SP, 2018. Citado na página 42.

VYGOTSKY. **Lev S. A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991. Citado na página 77.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011. Citado na página 23.

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1: O PROBLEMA DOS COELHOS E A INTRODUÇÃO À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Nesta atividade, você irá explorar um dos problemas mais famosos da história da Matemática, apresentado por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em seu livro *Liber Abaci* (1202). O objetivo é identificar o padrão de crescimento de uma população de coelhos e descobrir a sequência numérica que surge dessa situação.

Leia atentamente a situação-problema e preencha a tabela com a evolução do número de pares de coelhos mês a mês.

Situação-Problema

Em uma fazenda ideal, um criador inicia com um par de coelhos recém-nascidos. Sabemos que:

1. Cada par de coelhos torna-se fértil a partir do segundo mês de vida;
 2. A cada mês, cada par fértil gera um novo par de coelhos;
 3. Os coelhos nunca morrem;
 4. Os pares gerados tornam-se férteis a partir do segundo mês.
- Quantos pares de coelhos haverá após 1, 2, 3, ..., 12 meses?

Tabela de Crescimento Populacional

Mês	Número de pares de coelhos	Observações
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Questões para Reflexão

1. Qual padrão você observou no crescimento do número de pares de coelhos?
2. Escreva os 12 primeiros termos da sequência obtida.
3. Consegue encontrar uma relação entre cada termo e os dois anteriores?
4. Você conhece outros contextos em que essa sequência possa aparecer?

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA NATUREZA

Nesta atividade, você irá observar elementos da natureza para identificar padrões matemáticos, especialmente os relacionados à sequência de Fibonacci. O objetivo é perceber como a Matemática está presente na organização natural de plantas, flores, sementes e outros elementos.

Descrição da Atividade

- 1) Observe atentamente o objeto ou imagem recebida (girassol, pinha, abacaxi, margarida, caracol, folha, fruto etc.).
2. Conte a quantidade de pétalas, espirais, fileiras ou segmentos visíveis.
3. Verifique se os números encontrados pertencem à sequência de Fibonacci.
4. Registre as observações na tabela abaixo.
5. Analise o padrão identificado e prepare uma breve explicação para compartilhar com a turma.
6. (Opcional) Produza um cartaz ou desenho representando o padrão observado, destacando espirais, simetrias ou proporções.

Tabela de Observação

Objeto observado	Elemento contado	Quantidade	Pertence à sequência? (Sim/Não)	Observações

Questões para Reflexão

- 1) O que você percebeu sobre a relação entre a natureza e a sequência de Fibonacci?
- 2) Por que você acha que esses padrões são tão comuns em plantas e outros elementos naturais?
- 3) A presença desses padrões pode ter alguma utilidade para o crescimento ou sobrevivência das plantas? Explique

APÊNDICE C – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 4

Nome da dupla/grupo: _____

Data: ____ / ____ / ____

Tabela C.1 – Registro das Medidas Corporais

Participante	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Altura Total (cm)				
Umbigo ao Chão (cm)				
Razão (Altura / Umbigo)				
Altura da Cabeça (cm)				
Comprimento do Rosto (cm)				
Razão (Cabeça / Rosto)				
Braço (ombro–punho) (cm)				
Ombro–cotovelo (cm)				
Razão (Braço / Ombro–cotovelo)				
Tamanho da Mão (cm)				
Falange Maior (cm)				
Razão (Mão / Falange)				

APÊNDICE D – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 6

Tabela D.1 – Relação entre catetos consecutivos da sequência de Fibonacci e a hipotenusa resultante pelo Teorema de Pitágoras.

Cateto 1 (F_n)	Cateto 2 (F_{n+1})	$(F_n)^2$	$(F_{n+1})^2$	Hipotenusa ² ($F_n^2 + F_{n+1}^2$)	Esse número pertence à sequência?

APÊNDICE E – FOLHA DE REGISTRO DA ATIVIDADE 7

Figura E.1 – Relação entre as diagonais do Triângulo de Pascal e os números de Fibonacci.

Linha 0	1																			
Linha 1	1	1																		
Linha 2	1	2	1																	
Linha 3	1	3	3	1																
Linha 4	1	4	6	4	1															
Linha 5	1	5	10	10	5	1														
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1													
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1												
Linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1											
Linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
Linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1									
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Roteiro de Investigação

O roteiro de investigação serve para guiar os alunos na identificação de padrões dentro do Triângulo de Pascal:

- 1) Observe a primeira diagonal do triângulo. Que números aparecem?
- 2) Analise a segunda diagonal. Que números ela contém?
- 3) Continue para a terceira diagonal e anote os valores encontrados.
- 4) Compare os números observados nessas diagonais com os primeiros termos da sequência de Fibonacci.
- 5) O que você conclui a partir dessa comparação?

Tabela para Preenchimento

Os alunos deverão preencher uma tabela comparando a soma das diagonais do Triângulo de Pascal com os termos da sequência de Fibonacci:

Tabela E.1 – Legenda

Linha do Triângulo de Pascal	Soma da diagonal correspondente	Termo da sequência de Fibonacci
1ª linha		
2ª linha		
3ª linha		
4ª linha		
5ª linha		
6ª linha		
7ª linha		
8ª linha		
9ª linha		
10ª linha		

