



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**MICHEL AUGUSTO DE MOURA LIMA SEGUNDO**

**ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA: ESTRATÉGIAS E  
ABORDAGENS COM FINALIDADES EFETIVAS**

**BELÉM – PARÁ  
2025**

MICHEL AUGUSTO DE MOURA LIMA SEGUNDO

**ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA: ESTRATÉGIAS E  
ABORDAGENS COM FINALIDADES EFETIVAS**

Dissertação apresentada como requisito básico para obtenção do título de Mestre concedido pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Lênio Fernandes Levy.

BELÉM – PARÁ  
2025


## MICHEL AUGUSTO DE MOURA LIMA SEGUNDO

Dissertação apresentada como requisito básico para obtenção do título de Mestre concedido pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Data da Defesa: 21 / 01 / 2025.


Resultado: Aprovado.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 LENIO FERNANDES LEVY  
Data: 21/04/2025 18:10:11-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Lênio Fernandes Levy  
Faculdade de Matemática – PROFMAT – UFPA  
Orientador

Documento assinado digitalmente  
 PAULO VILHENA DA SILVA  
Data: 22/04/2025 13:09:46-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva  
Faculdade de Matemática – PROFMAT – UFPA

Documento assinado digitalmente  
 JOAO CLAUDIO BRANDEMBERG QUARESMA  
Data: 22/04/2025 16:15:11-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma  
Faculdade de Matemática – PPGECEM – UFPA

Belém – Pará  
2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

S456e Segundo, Michel Augusto de Moura Lima.  
Ensino de progressão aritmética: Estratégias e  
abordagens com finalidades efetivas / Michel Augusto de  
Moura Lima Segundo. — 2025.  
39 f: il.

Orientador(a): Prof. Dr. Lênio Fernandes Levi  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2025.

1. E-book. 2. Sala de aula. 3. Atividades para  
alunos. I. Título.

CDD 515.24

---

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força e por ter me guiado até aqui, ao longo deste caminho árduo e gratificante que foi o meu mestrado.

Agradeço à minha família pelo apoio de sempre, em especial à minha esposa, que sempre esteve ao meu lado e foi meu maior suporte nas diversas vezes em que pensei em desistir, e à minha filha, que é o meu maior combustível e incentivo.

Agradeço também ao meu Orientador, professor Lênio. Muito obrigado pela paciência, pelo suporte e pela confiança. Sem sua ajuda, não teria conseguido.

Agradeço, por fim, aos meus amigos, que, de alguma maneira, ajudaram-me a chegar até aqui.

Obrigado a todos vocês!

## RESUMO

Este trabalho apresenta a aplicação de um *eBook* como ferramenta didática para o ensino de progressão aritmética, com foco em atividades discursivas e objetivas. A proposta visa a facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos, integrando teoria e prática em um ambiente virtual acessível. Através de um conjunto de seis atividades, o *eBook* busca abordar as dificuldades comuns enfrentadas pelos alunos no aprendizado da progressão aritmética, promovendo a contextualização e a aplicação de conteúdos em situações do cotidiano. A pesquisa analisou a eficácia dessa abordagem, considerando variáveis como condição socioeconômica, ambiente escolar e habilidades interpretativas dos alunos. Os resultados indicam que o uso do *eBook*, aliado a atividades diversificadas, pode melhorar o engajamento e a compreensão dos estudantes, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa. Este estudo destaca a importância de estratégias inovadoras no ensino da matemática, evidenciando que recursos digitais podem potencializar o aprendizado e a motivação dos alunos.

**Palavras-chave:** Progressão aritmética. *eBook*. Ensino de matemática. Atividades discursivas. Atividades objetivas. Contextualização. Dificuldades de aprendizagem.

**ABSTRACT**

This work presents the application of an eBook as a teaching tool for the instruction of arithmetic progression, focusing on both discursive and objective activities. The proposal aims to facilitate students' understanding of mathematical concepts by integrating theory and practice in an accessible virtual environment. Through a set of six activities, the eBook seeks to address the common difficulties faced by students in learning arithmetic progression, promoting contextualization and the application of content in everyday situations. The research analyzed the effectiveness of this approach, considering variables such as socioeconomic status, school environment, and students' interpretative skills. The results indicate that the use of the eBook, combined with diverse activities, can enhance student engagement and understanding, contributing to a more meaningful learning experience. This study highlights the importance of innovative strategies in mathematics instruction, emphasizing that digital resources can enhance student learning and motivation.

**Key words:** Arithmetic progression. eBook. Mathematics education. Discursive activities. Objective activities. Contextualization. Learning difficulties.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> .....	9
<b>2</b>	<b>JUSTIFICATIVAS</b> .....	12
<b>3</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	14
<b>3.1</b>	Objetivo geral.....	14
<b>3.2</b>	Objetivos específicos.....	14
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	16
<b>5.</b>	<b>PROGRESSÃO ARITMÉTICA</b> .....	19
5.1.	Definição.....	19
5.2.	Termo geral da progressão aritmética.....	20
5.3.	Notação e cálculo da razão.....	21
5.4.	Elementos da progressão aritmética.....	21
5.5.	Classificação da progressão aritmética.....	22
5.6.	Notações especiais.....	22
5.7.	Interpolação aritmética.....	23
5.8.	Soma dos termos da progressão aritmética.....	23
<b>6.</b>	<b>METODOLOGIA DO TRABALHO</b> .....	24
<b>7</b>	<b>COLETA E ANÁLISE DOS DADOS</b> .....	29
7.1	Erros procedimentais.....	29
7.2	Erros conceituais.....	31
7.3.	Dados dos acertos nas questões objetivas das atividades.....	33
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	36
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	38

## 1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A progressão aritmética (PA) é um dos conceitos fundamentais da matemática, que permeia não apenas o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, mas também outras áreas do conhecimento. Definida como uma sequência de números em que a diferença entre termos consecutivos é constante, a PA é uma ferramenta essencial ao desenvolvimento dos raciocínios lógico e matemático dos estudantes. O ensino eficaz de tal conteúdo é crucial, pois tende a fortalecer habilidades que são utilizadas em matemática avançada (em ciências exatas, de modo geral), em economia e em situações do cotidiano, segundo Pereira (2010).

Vários autores contribuíram para a compreensão do ensino e da aprendizagem da matemática, abordando temas que vão desde a didática até a metodologia utilizada nas salas de aula. Um dos principais teóricos é Freire (2017), que enfatiza a importância da educação como um ato de conhecer e reconhecer a realidade, propondo uma abordagem dialógica no ensino. Moura (2009) afirma que, embora as contribuições de Paulo Freire sejam mais voltadas para a filosofia da educação, suas ideias podem ser extrapoladas para o ensino de matemática, promovendo um aprendizado que considera as vivências e as realidades dos alunos.

Outro importante autor é Piaget (1976), cujas teorias sobre o desenvolvimento cognitivo são fundamentais para entender como as crianças aprendem. Piaget (1976) propôs que o aprendizado ocorre em estágios e sugere que os conceitos matemáticos, como o de PA, só podem ser plenamente compreendidos quando os discentes alcançam um nível adequado de desenvolvimento cognitivo. Tardif (2006), reforçando tal posição, afirma que a prática pedagógica deve ser adaptada ao estágio de desenvolvimento dos educandos, promovendo-se atividades que favoreçam a construção do conhecimento.

Vygotsky (1987), por sua vez, contribuiu significativamente para a didática com sua teoria sociocultural, destacando a importância da interação social no aprendizado. Através da sua ideia de “zona de desenvolvimento proximal”, Vygotsky (1987) argumenta que o aprendizado é otimizado quando os alunos são desafiados a ultrapassar seus limites em cooperação com outros. Essa perspectiva sugere que, no ensino da PA, atividades colaborativas e problemas contextualizados podem facilitar a compreensão dos estudantes.

Ainda na linha da didática da matemática, Bishop (1988) classifica as culturas matemáticas existentes e destaca a importância da cultura do aluno no processo de

ensino-aprendizagem. Sua abordagem indica que o ensino da PA deve não apenas considerar o conteúdo matemático, mas também as diferentes maneiras pelas quais alunos de diversas culturas podem compreender e aplicar esse conhecimento, promovendo-se, assim, um ensino mais inclusivo e efetivo.

D'Ambrosio (1999) também contribui para a didática da matemática com a ideia de educação matemática crítica, enfatizando a relevância da contextualização. Ao aplicar a PA em situações do cotidiano dos estudantes, é possível transformar-se o aprendizado em algo mais significativo e relevante, facilitando-se a conexão entre o conteúdo escolar e a vida real. Essa abordagem alinha-se ao conceito de aprendizagem significativa de Ausubel (1978) o qual sugere que os alunos aprendem melhor quando relacionam novos conhecimentos com os que já sabem.

A compreensão da progressão aritmética é uma das chaves para a aprendizagem de outros conceitos mais complexos na matemática, como funções, álgebra e análise combinatória. D'Ambrosio (1999) enfatiza que o ensino da matemática, mediante correlações de conceitos, deve subsidiar o discente a construir uma base sólida de conhecimentos. A PA serve como um ponto de partida para que os alunos façam conexões com progressões geométricas e séries, expandindo seu entendimento matemático.

As metodologias ativas têm sido cada vez mais reconhecidas como efetivas no ensino de conceitos matemáticos, incluindo a PA. Autores como Perrenoud (1999) e Morin (2000) defendem que o aprendizado deve ser um processo ativo, onde os alunos são protagonistas de sua própria formação. Metodologias como a aprendizagem baseada em problemas, a resolução de questões práticas e o uso de tecnologia são abordagens que podem tornar o ensino da PA mais dinâmico e atraente para os alunos, engajando-os na prática matemática de forma efetiva.

O cotidiano dos educandos está repleto de situações que podem ser modeladas por progressões aritméticas. Por exemplo, contas referentes a finanças, como juros simples, são mais facilmente compreendidas quando os alunos dominam o conceito de PA. Schoenfeld (1992) sugere que a matemática deve ser contextualizada para que os alunos percebam o quanto ela é aplicável. Ensinar a PA dentro de contextos relevantes permite que os estudantes se conectem emocional e intelectualmente ao conteúdo, aumentando a sua motivação e/ou o seu engajamento

Ainda de acordo com Piaget (1976), o ensino da PA é crucial para promover o raciocínio lógico e a abstração nos alunos. Em seu trabalho sobre o desenvolvimento

cognitivo, argumenta que o aprendizado da matemática está intrinsecamente ligado ao desenvolvimento de habilidades cognitivas em diferentes estágios. A PA, sendo um conceito fundamental, ajuda os estudantes a construir relações quantitativas, estimulando um pensamento crítico e analítico.

Dado o referido contexto, esta dissertação explora as diversas estratégias e abordagens voltadas para o ensino da progressão aritmética, com os objetivos de facilitar o processo de aprendizagem discente e de elevar a respectiva autonomia no que tange à construção de conceitos sobre progressão aritmética mostrados no âmbito do 1º ano do ensino médio, em uma escola estadual localizada no bairro do Tapanã, em Belém do Pará.

Os procedimentos, em sala de aula, consistiram em: apresentar o conteúdo mediante explicações, demonstrações das equações e das fórmulas necessárias; além de indicar exemplos e aplicar atividades e exercícios de fixação, individuais e/ou em grupos, contextualizando a temática à realidade dos alunos. Para tanto, houve auxílio do quadro magnético e de materiais didáticos sequenciais, com destaque à utilização do *livro digital* criado (vide produto / PROFMAT), almejando-se auxiliá-los quando das demonstrações e dos trabalhos com equações.

Esta dissertação desdobrou-se em diversos capítulos, abordando-se desde os conceitos fundamentais até as estratégias pedagógicas práticas, sempre interligados aos autores que forneceram a base teórica à construção do conhecimento em progressão aritmética. A proposta foi que, ao final, se conseguisse delinear um panorama abrangente sobre o ensino de PA.

A importância do ensino de progressão aritmética é multifacetada, abrangendo desde o desenvolvimento do pensamento lógico até a conexão com contextos práticos do dia a dia. Autores clássicos e contemporâneos fornecem uma base teórica sólida, que fundamenta a prática pedagógica, ressaltando que PA é um conteúdo essencial à formação de alunos competentes e críticos. A busca por estratégias de ensino que considerem a diversidade e a inclusão é fundamental ao sucesso no aprendizado da matemática, fazendo da progressão aritmética um tema que merece atenção e reflexão contínuas por parte de educadores e instituições educacionais.

## 2. JUSTIFICATIVAS

Historicamente, diversos autores contribuíram para o entendimento e a didática da matemática, sendo referência no desenvolvimento de metodologias e práticas pedagógicas. Vários estudiosos, como Skemp (1976), enfatizaram a diferença entre as aprendizagens 'relacional' e 'instrumental'. A aprendizagem relacional permite que os alunos entendam o 'porquê' por trás das operações matemáticas, enquanto a aprendizagem instrumental foca na aplicação de fórmulas, sem que haja um entendimento profundo. Assim, ao ensinar PA, é imprescindível proporcionar aos estudantes uma visão relacional, com a qual eles possam compreender as propriedades da sequência e a sua aplicabilidade em situações reais.

Vários métodos inovadores têm sido propostos para o ensino de PA. O uso de jogos matemáticos, por exemplo, pode ser uma estratégia eficaz para trazer a teoria para a prática. Segundo a pesquisa de Nunes (2019), o uso de jogos não apenas engaja os discentes, mas também facilita a compreensão de conceitos difíceis, como a relação entre termos em uma PA. Outro autor importante nesse contexto é Vygotsky (1987), cujo trabalho sobre a ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal) oferece uma base teórica para a construção de estratégias de ensino que promovam a interação social e a colaboração entre os alunos.

Além disso, a utilização de tecnologias digitais é uma tendência crescente na educação contemporânea. Ferramentas como aplicativos e *softwares* educativos, quando integrados ao ensino de PA, podem proporcionar uma abordagem mais dinâmica e interativa, permitindo que os alunos visualizem e manipulem padrões numéricos. Nesse sentido, investigações de autores como Papert (1993), que defendem a aprendizagem através da construção de conhecimento, corroboram a ideia de que a tecnologia pode ser uma aliada poderosa no ensino de conceitos matemáticos.

A diferenciação pedagógica também é um aspecto crucial a ser considerado. Os alunos possuem ritmos e estilos de aprendizagem distintos, o que exige que os educadores adaptem suas metodologias para atender às necessidades específicas de cada grupo. Autores como Gardner (2000), com a teoria das inteligências múltiplas, sugerem que uma abordagem diversificada no ensino pode atender melhor às diferentes formas de apreensão do conhecimento, possibilitando, a nosso ver, que mais alunos consigam conectar-se com a temática da PA.

O problema da desmotivação e do desinteresse em relação à matemática é, sem dúvida, uma barreira que precisa ser vencida. De acordo com o trabalho de Brousseau (1997), criar contextos que sejam significativos e relevantes para os alunos é essencial para engajá-los e facilitar a aprendizagem. A utilização de problemas contextualizados, que envolvam a realidade dos educandos, pode tornar o estudo de PA mais atrativo e relevante.

Por fim, a formação continuada dos professores é uma necessidade latente. Autores como Freire (1996) defendem a educação crítica, em que o docente deve estar constantemente aprendendo e adaptando-se às novas demandas do ensino. Portanto, a capacitação dos professores em novas metodologias e tecnologias é fundamental à implementação eficaz de estratégias de ensino de PA.

Em suma, a escolha do tema “Estratégias de Ensino de Progressão Aritmética” para esta dissertação justifica-se pela necessidade de revitalizar o ensino da matemática nas escolas, atendendo às demandas contemporâneas e às características dos alunos do século XXI. As referências bibliográficas consistem em autores renomados, que apoiam as práticas aqui discutidas, oferecendo uma base teórica sólida para a análise e a proposição de métodos que tornem o aprendizado de PA mais significativo e eficaz.

### 3. OBJETIVOS

O ensino deste tema muitas vezes enfrenta dificuldades, levando a lacunas no aprendizado dos alunos. Diante de tal cenário, torna-se essencial investigá-lo e implementar estratégias didáticas que facilitem a sua compreensão. O presente trabalho tem por objetivo explorar e propor metodologias que visem à melhoria do ensino de progressão aritmética na educação básica, buscando atingir não apenas o domínio do conteúdo, mas também o desenvolvimento dos raciocínios lógico e crítico dos alunos.

#### Objetivo geral

Analisar e propor estratégias didáticas eficazes para o ensino de progressão aritmética (PA) na educação básica, visando a aprimorar a compreensão e o desempenho dos estudantes em matemática.

#### Objetivos específicos

- Identificar os principais desafios enfrentados por estudantes no aprendizado de progressão aritmética.
- Selecionar e analisar estudos anteriores que abordem o ensino da PA e suas abordagens pedagógicas.
- Desenvolver uma proposta de intervenção pedagógica que inclua atividades práticas e contextualizadas.
- Avaliar a eficácia das estratégias propostas (quanto à compreensão e ao desempenho dos estudantes) através de testes de aprendizagem e de *feedbacks* dos alunos.

Os objetivos indicados nesta dissertação direcionam a pesquisa para a busca de soluções práticas e teóricas que visem a transformar o ensino de progressão aritmética em um processo mais eficaz e envolvente. Ao abordarmos tanto a identificação das dificuldades quanto a implementação e a avaliação de novas estratégias pedagógicas, esperamos contribuir significativamente para o aprimoramento das práticas de ensino em matemática.

Esta investigação leva-nos, portanto, ao próximo capítulo, que trata da Fundamentação Teórica, onde são discutidos conceitos fulcrais sobre progressão aritmética, as respectivas teorias de pedagógicas, bem como o papel do docente nesse processo de ensino-aprendizagem.

#### 4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Bertucci e Neves (2018), o ensino de progressão aritmética (PA) destaca-se como um componente essencial na formação matemática dos estudantes, uma vez que oferece ferramentas à compreensão de sequências numéricas e de suas aplicações em diversos contextos e situações-problema.

Em termos de referencial teórico, exploramos o que sustenta as estratégias efetivas do ensino de PA, baseando-se nos princípios de diferentes teorias de aprendizagem, como o construtivismo e o socioconstrutivismo, que enfatizam a importância da construção ativa do conhecimento pelo aluno. Além disso, são analisadas diversas práticas pedagógicas, incluindo o uso de recursos tecnológicos, a resolução de problemas e a contextualização matemática, que visam a tornar o aprendizado de PA mais envolvente e aplicável à realidade dos estudantes, como afirmam Noss e Patrick (2018).

A pesquisa atual aponta para a necessidade de um ensino em que não apenas se transmita o conhecimento de maneira tradicional, mas durante o qual também se promovam a interação, o diálogo e a reflexão crítica, favorecendo-se um aprendizado que se estenda para além das salas de aula. Segundo Freire (2017), a escolha das estratégias didáticas deve, portanto, ser orientada por um entendimento profundo das dificuldades enfrentadas pelos alunos e das situações contextuais que permeiam o processo educativo.

A compreensão da PA permite aos estudantes desenvolverem habilidades críticas em resolução de problemas, em análise de dados e em modelagem de situações da vida real. Para Ribeiro (2017), a PA é uma ponte que conecta o conhecimento aritmético básico a conceitos mais complexos, como funções e gráficos, evidenciando a necessidade de um ensino que estimule essa conexão.

A abordagem construtivista, fundamentada nas obras de Piaget (1976), sustenta que o aprendizado ocorre quando os discentes interagem com o meio e constroem seu próprio conhecimento. No contexto do ensino de PA, essa teoria propõe que os alunos devem ter oportunidades de descobrir, investigar e formular suas próprias regras em relação às sequências aritméticas. Estimular a curiosidade e permitir que os educandos representem visualmente as progressões, através de atividades como a construção de tabelas e gráficos, pode facilitar a compreensão do conceito (GATTI, 2014).

Sintetizando a referida abordagem, o protagonismo do aluno reforça o seu próprio aprendizado. Nesse sentido, o ensino de PA poderia beneficiar-se de atividades que promovam a descoberta e a formulação de conjecturas relativas ao conceito (PIAGET, 1976). Atividades práticas, como jogos que envolvem a identificação de padrões numéricos, podem facilitar a compreensão da PA de maneira lúdica e envolvente.

Complementando o construtivismo, o socioconstrutivismo enfatiza a interação social no processo educativo. Vygotsky (1987) argumenta que o conhecimento é construído em um contexto social, onde a colaboração e a comunicação desempenham papéis cruciais. No ensino de PA, essa abordagem pode ser aplicada por meio de atividades em grupos onde os alunos discutem e resolvem problemas, promovendo-se o aprendizado colaborativo e a troca de ideias.

Completando as práticas anteriormente mencionadas, uma estratégia eficaz ao ensino de PA é o uso de abordagens contextualizadas, que conectam a matemática a situações do cotidiano. A proposta de resolver problemas práticos que envolvem progressões aritméticas, como cálculos relacionados a finanças pessoais, escalas de crescimento ou fenômenos naturais, ajuda a tornar o conteúdo mais significativo e relevante para os alunos (SILVA; SANTOS; ALMEIDA, 2019). Essa prática não apenas facilita a compreensão, mas também estimula a aplicação do conhecimento em contextos reais.

Os alunos são desafiados a resolver situações-problema que envolvem progressões aritméticas, articulando os conhecimentos adquiridos com a prática. Segundo Pizzini e Viana (2015), tal abordagem não apenas estimula o raciocínio lógico, mas igualmente promove a aplicação do conhecimento em contextos reais, aumentando a relevância do que está sendo ensinado.

A resolução de problemas é considerada uma metodologia eficaz para o ensino de matemática, permitindo que alunos se envolvam ativamente na aprendizagem. Por meio de atividades práticas, os estudantes podem explorar, discutir e refletir sobre a PA, consolidando o seu aprendizado.

Apesar da importância da PA, diversos desafios podem ser encontrados no respectivo ensino. Dentre eles, destaca-se a resistência dos educandos em abordar tópicos que parecem abstratos e distantes de sua realidade. Lima (2018) afirma que muitos estudantes apresentam dificuldades em identificar a relação entre os termos

da sequência, fato que pode ser minimizado por meio de estratégias visuais e manipulativas, como o uso de materiais concretos e representações gráficas.

A formação de professores também é um ponto crítico para o sucesso do ensino de PA. Educadores bem preparados, que tenham conhecimento, tanto teórico quanto prático, sobre abordagens pedagógicas e novas práticas de ensino, são fundamentais a que os alunos consigam compreender e aplicar efetivamente a PA. Para que isso ocorra, são necessárias uma formação contínua e uma atualização sobre estratégias didáticas que promovam uma aprendizagem ativa e engajada (GATTI, 2014).

O ensino da progressão aritmética é um componente crucial na educação matemática, pois não só reforça conhecimentos fundamentais, como também prepara os discentes para lidarem com conceitos mais complexos. Pereira e Vieira (2018) afirmam que as estratégias didáticas apresentadas, que incluem abordagens contextualizadas, o uso de tecnologias e a resolução de problemas, são efetivas na promoção de um aprendizado ativo e significativo. No entanto, é necessário que educadores enfrentem os desafios existentes e busquem constantemente inovar suas práticas pedagógicas para garantir que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida sobre os assuntos abordados.

## 5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### 5.1. Definição

A lei de formação de uma sequência é uma fórmula que define explicitamente cada termo em função de sua posição. Por exemplo, a sequência dos números naturais pode ser expressa pela lei de formação  $a_n$ , onde  $n$  é a posição do termo na sequência. Para uma sequência quadrática, por exemplo, como a dos números quadrados, a lei de formação é  $a_n = n^2$ , que permite calcular cada termo diretamente:

$$1; 4; 9; 16; \dots; n^2$$

Por outro lado, a lei de recorrência define cada termo em função de um ou mais termos anteriores. Esta abordagem é especialmente útil para sequências que têm uma relação clara entre seus elementos vizinhos. Um exemplo clássico é a sequência de Fibonacci, onde cada termo é a soma dos dois anteriores:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , com  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 1$ . As leis de recorrência são também importantes em algoritmos de programação, onde a solução de um problema é expressa em termos de soluções de subproblemas.

Ambas as abordagens têm suas vantagens: as leis de formação oferecem uma maneira direta de calcular termos, enquanto as leis de recorrência podem simplificar o raciocínio ou a programação. Muitas vezes, um problema é abordado de ambas as maneiras, dependendo do contexto e das necessidades da resolução.

Dados os termos de uma sequência numérica infinita:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_k ; \dots ; a_n ; \dots$$

Uma progressão aritmética é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante, chamada de razão ( $r$ ).

A progressão aritmética é amplamente utilizada em diversos campos, incluindo:

- a) Finanças (cálculo de juros simples);
- b) Planejamento (distribuição de recursos ao longo do tempo);
- c) Problemas de contagem e sequências, entre outros.

A progressão aritmética é uma das sequências numéricas mais simples e fundamentais, com aplicações práticas em matemática e em diversas disciplinas. Seu estudo permite resolver uma variedade de problemas em análise quantitativa e em planejamento.

## 5.2. Termo geral da progressão aritmética

$$a_2 = a_1 + r \quad (*)$$

$$a_3 = a_2 + r \quad (**)$$

Substituindo (\*) em (\*\*), temos:

$$a_3 = a_1 + 2.r \quad (***)$$

$$a_4 = a_3 + r \quad (****)$$

Substituindo (\*\*\*) em (\*\*\*\*), temos:

$$a_4 = a_1 + 3.r$$

...

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Se a PA é formada por uma sequência de termos que começa com um primeiro termo  $a_1$  e possui uma razão  $r$ , então o  $n$ ésimo termo  $a_n$  da PA pode ser definido pela seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \quad \text{ou} \quad a_n = a_k + (n-k).r$$

onde:

$a_n$  é o  $n$ ésimo termo da PA,

$a_k$  é o termo na posição  $k$  da PA,

$a_1$  é o primeiro termo da PA,

$r$  é a razão (a diferença constante entre termos consecutivos),

$n$  representa a posição do termo na sequência (um número natural).

### 5.3. Notação e cálculo da razão

Se temos uma progressão aritmética cuja sequência de termos é denotada por

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

então a razão  $r$  pode ser definida como:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

onde:

$a_n$  é o  $n$ ésimo termo da PA,

$a_{n-1}$  é o termo anterior ao  $n$ ésimo.

Essa relação aplica-se de forma consistente a todos os pares de termos consecutivos na sequência. Assim, em uma PA, a razão é a mesma, não importando qual par de termos você escolha.

Dessa forma, se a razão  $r$  de uma PA é  $-4$ , isso significa que, a cada passo, subtraímos 4 unidades para chegarmos ao próximo termo da sequência.

### 5.4. Elementos da progressão aritmética.

**Primeiro termo ( $a_1$ ):** Este é o primeiro valor da sequência. Por exemplo, se a sequência é 2, 4, 6, 8, o primeiro termo,  $a_1$ , equivale a 2.

**Razão ( $r$ ):** A razão é a diferença constante entre dois termos consecutivos. No exemplo anterior, a razão  $r$  é 2, pois  $4 - 2 = 2$ ,  $6 - 4 = 2$ , e assim por diante.

**Posição de um termo ( $n$ ):** Refere-se à posição que queremos determinar dentro da sequência. Por exemplo, se quisermos encontrar o 5º termo, temos  $n = 5$ .

**Termo na posição  $k$  ( $a_k$ ):** Termo aleatório na sequência, podendo ser o primeiro ou o anterior ao termo que se pretende determinar.

**Termo na posição  $n$  ( $a_n$ ):** Geralmente é o último termo de uma sequência finita ou o termo que se queira determinar.

### 5.5. Classificação da progressão aritmética

A razão é um elemento fundamental da progressão aritmética, pois determina o comportamento da sequência. Dependendo do valor da razão, a PA pode ser:

**a) Crescente:** Quando  $r > 0$ , os termos aumentam à medida que avançamos na sequência.

Exemplo: Considere a seguinte PA: 10, 30, 50, 70, ...

Como a razão  $r$  da PA é 20, isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a aumentar de 20 em 20.

**b) Decrescente:** Quando  $r < 0$ , os termos diminuem à medida que avançamos na sequência.

Considere a seguinte PA: 100, 90, 80, 70, 60, ...

Como  $r = -10$ , isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a diminuir de 10 em 10.

**c) Constante:** Quando  $r = 0$ , os termos mantêm-se à medida que avançamos na sequência.

Considere a seguinte PA: 90, 90, 90, 90, 90, ...

Como a razão  $r$  da PA é 0, isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a não se alterar.

Em resumo, a razão é um parâmetro crucial, que define a estrutura da progressão aritmética e influencia suas aplicações em diversos contextos matemáticos e práticos.

### 5.6. Notações especiais

Podemos representar uma progressão aritmética de maneira genérica, para 3, ou 4, ou 5 termos, da seguinte forma:

a) Para 3 termos:  $(x, x + r, x + 2r)$  ou  $(x - r, x, x + r)$

b) Para 4 termos:  $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$  ou  $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$  em que  $y = \frac{r}{2}$

c) Para 5 termos:  $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$  ou  $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

### 5.7. Interpolação aritmética

Em toda sequência finita  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , o primeiro e o último termos são chamados de extremos; os demais são chamados de meios.

Interpolar  $k$  meios aritméticos entre os números  $a$  e  $b$  significa obter uma PA de extremos  $a_1 = a$  e  $a_n = b$ , com  $n = k + 2$  termos. Para determinar os meios dessa PA é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k + 1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}$$

### 5.8. Soma dos termos de uma progressão aritmética

A soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

onde:

$S_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos.

$a_1$  é o primeiro termo da PA.

$a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da PA.

$n$  é o número de termos da PA.

## 6. METODOLOGIA DO TRABALHO

A metodologia de um projeto de ensino de progressões aritméticas deve ser cuidadosamente planejada para garantir que os objetivos sejam atingidos. Para isso, a presente dissertação baseia-se, também, em pedagogias ativas (além das tradicionais), que dizem respeito a um conjunto de abordagens educacionais buscando envolver os alunos em seu processo de aprendizagem, priorizando a interação, a participação e a construção do conhecimento de forma significativa, de acordo com Pimenta e Lima (2012).

Algumas das características norteadoras das pedagogias ativas possuem aspectos comuns, como a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), que é uma abordagem educacional que se concentra no uso de problemas reais como ponto de partida para o aprendizado de novos conteúdos e habilidades. Essa metodologia destaca-se por promover um ambiente ativo de aprendizagem, onde os discentes trabalham em grupos para investigar, analisar e resolver problemas complexos, desenvolvendo habilidades críticas de resolução de problemas e pensamento crítico. De acordo com Barrows (1996, p. 3), a ABP é “um método que envolve os alunos em um processo de aprendizado que se concentra em resolver problemas reais e práticos”.

A partir dessa perspectiva, a ABP não apenas enfatiza a aquisição de conhecimento, mas também a sua aplicação em cenários do mundo real, o que torna o aprendizado mais relevante e significativo para os alunos. Através da exploração de problemas, os estudantes são encorajados a fazer perguntas, pesquisar, discutir e desenvolver soluções, o que também fortalece a colaboração e a comunicação entre os pares.

A implementação da ABP no ambiente educacional envolve a apresentação de um problema desafiador, que não possui uma solução óbvia, incentivando os alunos a trabalhar em equipe para explorá-lo a fundo. Isso requer que eles utilizem conhecimentos prévios, adquiram informações novas e apliquem conceitos teóricos em situações práticas. Além disso, a ABP fomenta a autonomia dos educandos, promovendo a autoaprendizagem e a responsabilidade sobre o próprio processo educativo (BARROWS, 1996).

Em suma, a Aprendizagem Baseada em Problemas configura-se como uma prática pedagógica poderosa, que não apenas enriquece a experiência de aprendizagem, mas que também prepara os alunos para enfrentarem os desafios do

mundo contemporâneo, capacitando-os a tornarem-se solucionadores de problemas eficazes e criativos.

Concomitantemente, a aplicação deste trabalho utilizou-se da Aprendizagem Cooperativa, uma abordagem educacional que enfatiza a colaboração entre os alunos no processo de aprendizagem, promovendo o aprendizado ativo através do trabalho em grupo. Essa metodologia permite que os estudantes compartilhem conhecimentos, habilidades e experiências, estimulando um ambiente de ensino onde todos são responsáveis pelo aprendizado dos seus colegas.

Para com Johnson e Johnson (1999, p. 2), “a aprendizagem cooperativa é uma prática de ensino e aprendizagem na qual os alunos trabalham juntos em pequenos grupos para atingir objetivos comuns, promovendo a interação e a interdependência”.

Um dos principais objetivos da Aprendizagem Cooperativa é fomentar o desenvolvimento de habilidades sociais, emocionais e de liderança, uma vez que os alunos precisam aprender a comunicar-se, negociar e resolver conflitos durante as atividades em grupo. Essa interação não apenas aumenta a motivação e o engajamento dos estudantes, mas também contribui para a construção de uma comunidade de aprendizado mais coesa e inclusiva, ainda de acordo com Johnson e Johnson (1999).

Adicionalmente, a Aprendizagem Cooperativa está associada ao desenvolvimento de competências essenciais no século XXI, como a colaboração, a criatividade e o pensamento crítico. Ao trabalharem em conjunto para resolver problemas e realizar tarefas, os educandos beneficiam-se do conhecimento coletivo do grupo, o que pode levar a resultados de aprendizagem mais profundos e significativos. Essa abordagem, portanto, não apenas melhora o desempenho acadêmico, mas igualmente prepara os discentes para enfrentarem desafios futuros em suas vidas pessoais e profissionais (JOHNSON; JOHNSON, 1999).

Sendo assim, a Aprendizagem Cooperativa é uma estratégia pedagógica que enriquece a experiência de aprendizagem, promovendo tanto a aquisição de conhecimento quanto o desenvolvimento de habilidades interpessoais fundamentais.

Outra prática pedagógica a ser utilizada, a Aprendizagem Experiencial é uma abordagem que enfoca o aprendizado por meio da experiência direta, permitindo que os alunos integrem teoria e prática em um ciclo contínuo de reflexão. Essa metodologia é fundamentada na premissa de que os indivíduos aprendem de maneira mais eficaz quando estão ativamente envolvidos em sua educação e podem refletir

sobre suas experiências. Kolb (1984, p. 38) explica que “a aprendizagem é um processo em que o conhecimento é criado por meio da transformação da experiência”.

O modelo de Aprendizagem Experiencial de Kolb (1984) compreende quatro etapas fundamentais: (1) Experiência Concreta, onde o aluno participa ativamente de uma atividade; (2) Observação Reflexiva, em que o aluno reflete sobre a experiência vivida; (3) Conceituação Abstrata, onde se formam novos conceitos ou generalizações; e (4) Experimentação Ativa, em que os alunos aplicam o que aprenderam em novas situações. Esse ciclo é iterativo, permitindo que a aprendizagem seja continuamente refinada e expandida à medida que os alunos se envolvem em experiências diversas.

A Aprendizagem Experiencial não apenas facilita a compreensão de conceitos complexos, mas também desenvolve habilidades críticas, como a resolução de problemas, a tomada de decisão e a criatividade. Além disso, ao inserir os discentes em cenários práticos e desafiadores, essa abordagem favorece o engajamento e a motivação, uma vez que os estudantes veem a aplicação direta do conhecimento no mundo real.

Portanto, a Aprendizagem Experiencial é uma metodologia que valoriza a construção do conhecimento através da prática, promovendo um aprendizado mais profundo e significativo, que se traduz em maiores retenção e aplicação do conteúdo.

A adoção de pedagogias ativas é crucial para o desenvolvimento de competências no século XXI, tais como a criatividade, a colaboração, a comunicação e a crítica. Segundo Coccia (2008), a educação contemporânea deve preparar os alunos para um mundo em constante mudança, o que requer habilidades adaptativas e capacidade de resolução de problemas.

A aplicação de questionários a alunos desempenha um papel fundamental na pesquisa educacional, permitindo uma compreensão mais profunda das experiências, das opiniões e das necessidades dos estudantes. Essa ferramenta de coleta de dados oferece informações valiosas, que podem auxiliar em práticas pedagógicas, em políticas educacionais e em melhorias contínuas do ambiente escolar.

Os questionários são uma metodologia majoritariamente quantitativa que possibilita a coleta de dados abrangentes de forma organizada; eles permitem que um grande número de alunos seja alcançado, facilitando a análise estatística e a identificação de padrões e de tendências no comportamento e nas atitudes dos estudantes; além disso, os questionários podem ser projetados para avaliar a

satisfação dos alunos, o aprendizado, a motivação e outros fatores que impactam a experiência educacional (FERRAZ, 2007).

Ao utilizar essa ferramenta, educadores e pesquisadores podem identificar áreas que necessitam de atenção, avaliar a eficácia de intervenções pedagógicas e promover melhorias que resultem em um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e dinâmico (FERRAZ, 2007).

A idade dos estudantes (sujeitos de pesquisa) é um fator crucial, pois as experiências de vida e o nível de desenvolvimento cognitivo e emocional variam amplamente em diferentes faixas etárias. Por exemplo, jovens podem ter um entendimento distinto das tecnologias e dos métodos de ensino em comparação com adultos, refletindo diferentes níveis de familiaridade e de expectativa em relação ao ambiente educacional. Além disso, a maturidade emocional pode impactar na habilidade dos indivíduos em articular suas opiniões e sentimentos sobre temas complexos, como afirma Goleman (1995).

Portanto, ao caracterizar os dados da pesquisa com base na idade dos educandos (sujeitos investigados), é possível obter *insights* valiosos sobre como essas variáveis influenciam as percepções e as experiências dos participantes. Tal análise não apenas enriquece a interpretação dos resultados, mas também auxilia na formulação de estratégias educacionais mais inclusivas e adaptadas às necessidades específicas de diferentes grupos dentro da população estudada.

Este capítulo apresentou a fundamentação metodológica que orientou a dissertação, destacando as abordagens pedagógicas de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), de Aprendizagem Cooperativa e de Aprendizagem Experimental como pilares da construção do conhecimento. A escolha pela ABP justifica-se pela sua capacidade de provocar o pensamento crítico e a resolução de problemas por meio da investigação de situações reais, promovendo um ambiente de aprendizagem ativo e dinâmico.

A implementação de práticas de Aprendizagem Cooperativa complementa essa abordagem, permitindo que os discentes trabalhem em grupos, troquem experiências e desenvolvam habilidades interpessoais essenciais, como a colaboração, a comunicação e a empatia. Essa interação social não só enriquece o processo de aprendizagem, como também fortalece a construção coletiva do saber, promovendo um ambiente mais inclusivo e participativo.

Ademais, a utilização da Aprendizagem Experimental fortalece a conexão entre teoria e prática, possibilitando que os estudantes vivenciem situações do dia a dia que requerem a aplicação do conhecimento adquirido. A referida abordagem prática não só engaja os alunos, mas igualmente facilita a retenção de informações e a aplicação de conceitos em contextos reais.

Por fim, a aplicação de questionários ao longo da pesquisa foi essencial para coletar dados relevantes e subsidiar a análise das práticas pedagógicas adotadas. Os questionários permitiram uma compreensão aprofundada sobre as percepções dos alunos em relação às metodologias utilizadas, contribuindo para um panorama abrangente acerca da efetividade das estratégias de ensino implementadas.

A interrelação dessas abordagens metodológicas revelou-se crucial ao fortalecimento de um ensino significativo, centrado no aluno e voltado para o desenvolvimento de competências essenciais no século XXI.

Desta forma, a metodologia adotada na dissertação não apenas almeja atender aos objetivos propostos, mas também propõe reflexões sobre a importância de práticas educativas inovadoras que desafiem os alunos a tornarem-se protagonistas de sua própria aprendizagem.

## 7 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, é apresentada uma análise detalhada dos resultados obtidos a partir do teste aplicado aos alunos, focando nas estratégias de ensino de progressão aritmética. O *eBook* foi usado como suporte didático em atividades com um grupo de discentes do 1º ano do ensino médio, objetivando-se avaliar as habilidades matemáticas de tais estudantes, bem como as estratégias de ensino que foram utilizadas em sala de aula.

As atividades foram estruturadas em duas formas: a primeira contemplava questões discursivas e verificava o conhecimento teórico sobre os elementos e os processos básicos que envolvem progressões aritméticas; enquanto a segunda consistia em problemas contextualizados que desafiavam os alunos a aplicar esse conhecimento em situações reais. Eles tiveram 45 minutos para completar cada atividade, e o resultado revelou um panorama interessante acerca das estratégias de ensino e do desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Dos 28 alunos que participaram das atividades, 25% acertaram todas as questões objetivas, enquanto 50% apresentaram um desempenho medianamente satisfatório. Os restantes 25% mostraram dificuldades relevantes, cometendo erros comuns que podem ser categorizados em duas vertentes: conceituais e procedimentais.

### 7.1. Erros procedimentais

Alunos que compreendiam o conceito de progressão aritmética muitas vezes erraram ao realizar os cálculos. Isso pode ser relacionado à falta de prática e ao uso limitado de estratégias de ensino, um fenômeno que Gatti destaca em sua pesquisa sobre as metodologias de ensino em matemática. Para Gatti (2014), a variedade de abordagens didáticas pode contribuir para o desenvolvimento de um entendimento mais sólido.

Na Figura 1, podemos visualizar o passo a passo de um aluno que ouvia atentamente a explicação e entendeu o conceito de termo geral da progressão, realizando seus cálculos sem o uso da formalização. Apresentou, porém, dificuldade na utilização do símbolo de igualdade, que é fundamental para expressar informações matemáticas. Essa experiência serviu como uma lição valiosa, não apenas sobre progressões aritméticas, mas também sobre a importância da notação matemática.

**Exercício 4:** Responda corretamente cada uma das questões a seguir, apresentando sua estratégia de resolução.

**Questão 1:**

Determine o 5º termo geral da PA que começa com 3 e tem razão 5.

$3 + 5 = 8 + 5 = 13 + 5 = 18 + 5 = 23 + 5 = 28$

Figura 1 – Aluno visando a determinar o 5º termo de uma PA.

Na figura 2, a importância da prática e da atenção aos detalhes, especialmente nas operações básicas, é enfatizada na literatura educacional. Segundo Nunes e Bryant (1996), “os alunos precisam desenvolver uma compreensão profunda das operações aritméticas para evitar erros que comprometem a resolução de problemas matemáticos mais complexos”. Isso ressalta que, enquanto o discente demonstrou uma boa compreensão teórica da soma de 10 termos da PA, a execução de operações básicas exigiu mais atenção, onde o equívoco, por parte do aluno, está na soma das parcelas.

**Exercício 5:** Determine a soma dos  $n$  termos corretamente em cada uma das questões a seguir, apresentando sua estratégia de resolução.

**1. Questão 1:**

Calcule a soma dos primeiros 10 termos da PA (2, 5, 8, 11, ...).

Handwritten solution:

$$\begin{array}{r}
 14^{40} + 18^{58} + 22^{76} + \\
 24^{103} + 27^{130} + 30 = 160
 \end{array}$$

Figura 2 – Estratégia utilizada pelo aluno a fim de determinar a soma de termos da PA.

## 7.2 Erros conceituais

Os erros conceituais foram predominantes entre os alunos que apresentaram dificuldade. A maioria demonstrou confusão em relação ao conceito de termo geral de uma progressão aritmética. Muitos confundiram a fórmula da progressão aritmética, aplicando-a de maneira errada ou utilizando a fórmula da progressão geométrica. Essa confusão pode ser relacionada às teorias de Piaget (1976) sobre o desenvolvimento cognitivo, em que o autor aponta que a construção do conhecimento é um processo gradual, que depende do estágio no qual o estudante se encontra. Alunos nesse nível podem não ter desenvolvido ainda a abstração necessária para lidar com diferentes fórmulas matemáticas.

Segundo Pizzini (2002), o entendimento dos sinais, nas operações e nas sequências numéricas, é essencial para que se interpretem coerentemente os

resultados e para que se desenvolva um raciocínio lógico aceitável. Pizzini (2002) enfatiza que a capacidade de identificar sinais positivos e negativos é uma habilidade essencial à resolução de problemas e à análise de dados.

Nas figuras 3 e 4, podemos perceber a dificuldade em determinar corretamente o valor da razão, de acordo com a classificação de uma PA decrescente, de razão menor que 0. O conceito de razão da progressão aritmética ensinado em sala, e apresentado no eBook, não foi aplicado adequadamente pelo aluno.

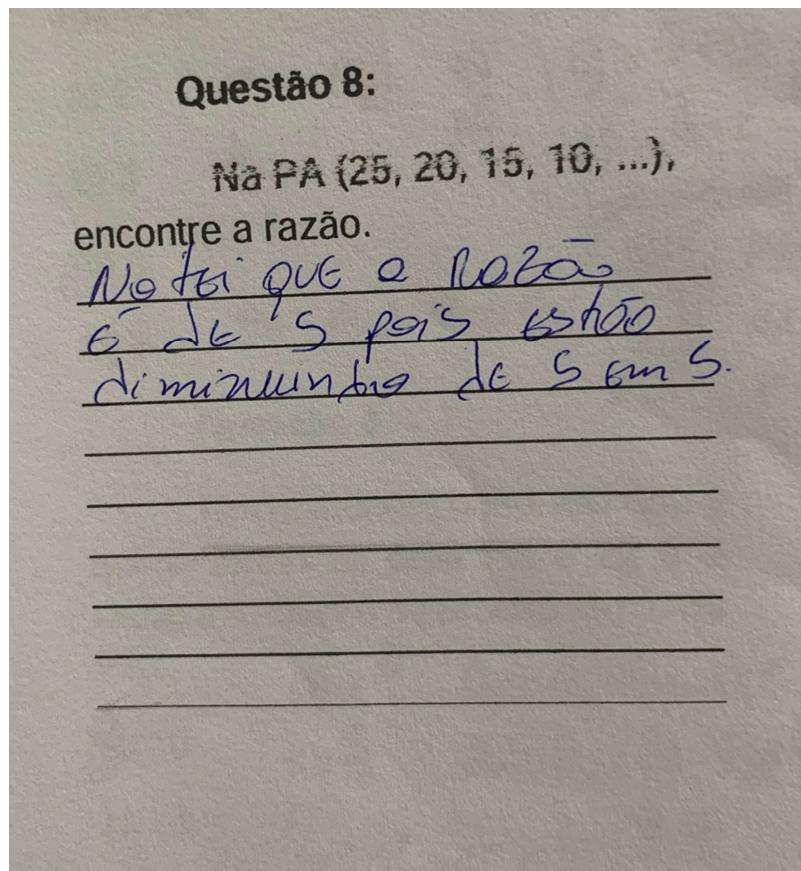


Figura 3 – Erro ao determinar a razão da progressão.

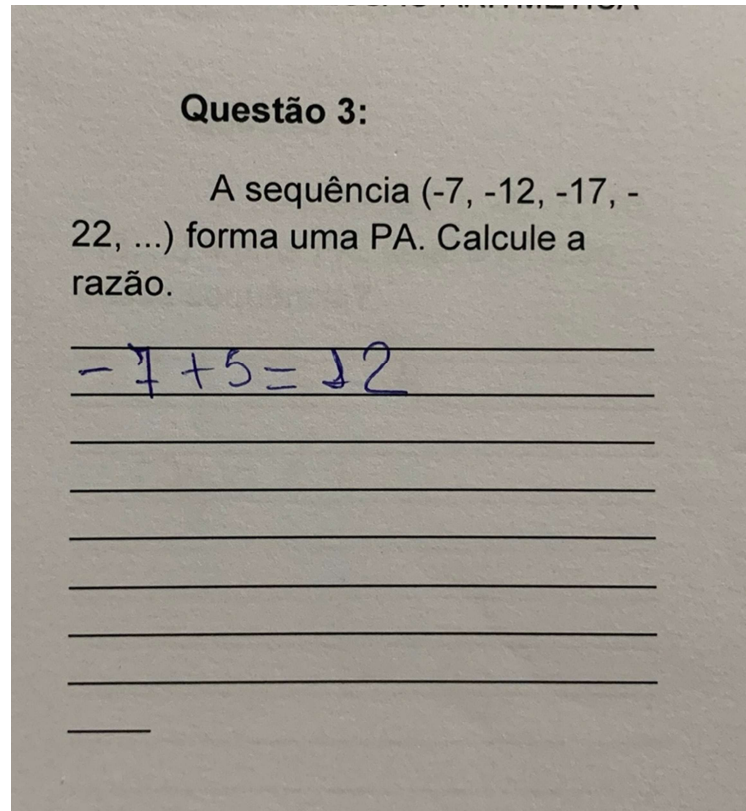


Figura 4 – Erro ao determinar a razão

A relação entre os erros identificados e as estratégias de ensino utilizadas em sala pode ser melhor compreendida à luz das teorias de Barrows (1996), que enfatiza a importância de métodos que estimulem a reflexão crítica no aprendizado. Ao observar os resultados, fica evidente que a aplicação de atividades que incentivem o pensamento reflexivo pode ser um caminho eficaz para reduzir erros conceituais e procedimentais.

### 7.3. Dados dos acertos nas questões objetivas das atividades.

Em relação ao exercício 3, que apresenta questões objetivas e não contextualizadas, percebemos que quanto maior a quantidade de termos da progressão (e se for preciso determiná-los), tanto mais os alunos tendem a errar as respostas. De acordo com Nunes e Bryant (1996), o desenvolvimento das habilidades matemáticas em crianças pode fornecer *insights* sobre as dificuldades que enfrentam em aprender sobre progressões aritméticas, bem como aflorá-las de acordo com o avanço dos alunos nesse assunto.

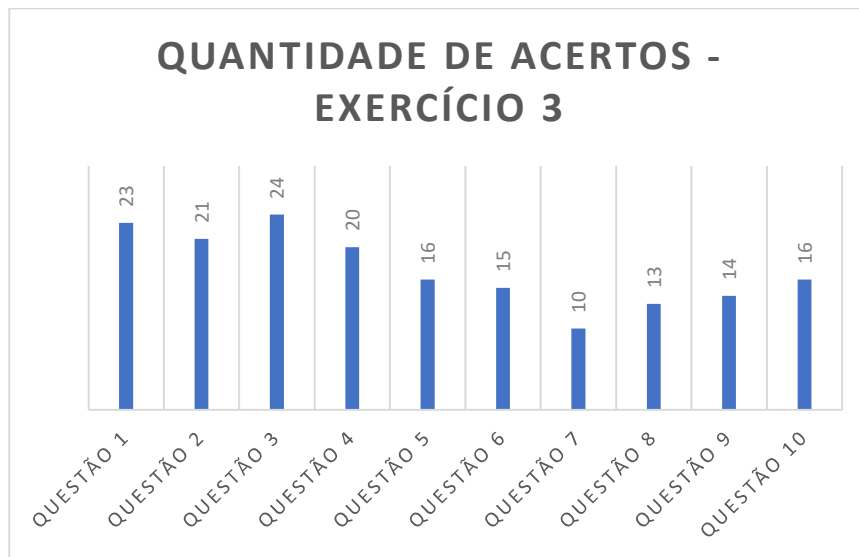


Gráfico 1 – Análise da quantidade de acerto dos alunos no que tange às questões do exercício 3

As questões propostas no exercício 6 são/eram objetivas e contextualizadas, visando a aproximar o discente de supostas situações cotidianas com que ele pode/pudesse se deparar. Para Bennett e Gibbons (2009), práticas pedagógicas e exercícios de progressões aritméticas em contextos reais auxiliam a aprendizagem do aluno e ajudam o professor no processo ensino-aprendizagem.

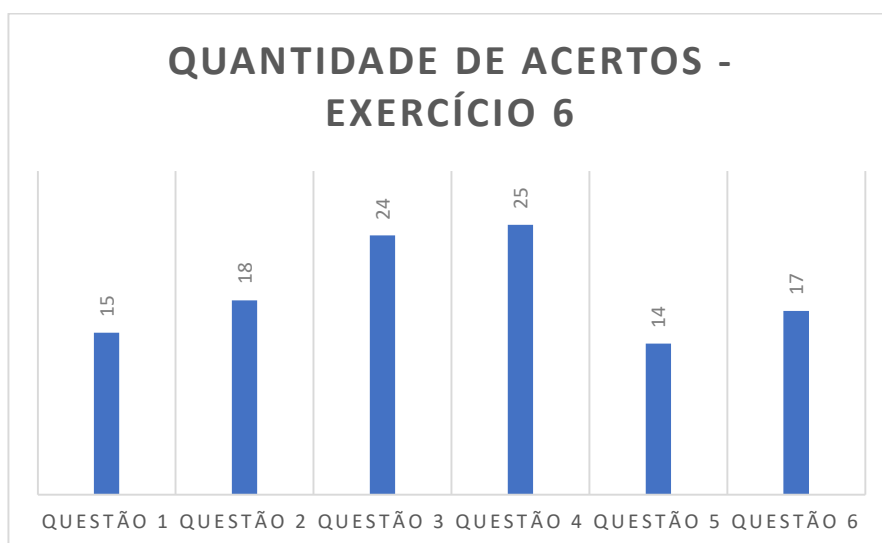


Gráfico 2 – Análise da quantidade de acerto dos alunos o que toca às questões do exercício 6

Santos (2007) discute que muitos alunos costumam cometer erros de interpretação ao tentarem resolver problemas contextualizados. Essas dificuldades podem decorrer da complexidade do enunciado ou da ambiguidade da linguagem. Por exemplo, ao lidar com uma PA que descreve um cenário de crescimento ou diminuição, a habilidade em determinar corretamente a razão e os termos subsequentes pode ser comprometida. Quando os estudantes não conseguem traduzir os dados do contexto para uma configuração matemática, isso resulta em erros que podem prejudicar sua confiança e sua motivação.

A dificuldade com questões contextualizadas sobre progressão aritmética reflete a necessidade de um ensino que conecte teoria e prática de forma significativa. A literatura destaca a importância da contextualização para a aprendizagem, mas também evidencia os desafios que isso representa para os alunos. Com o fito de superar essas barreiras, é essencial promover um ensino que não apenas enfatize a compreensão dos conceitos matemáticos, mas que também ajude os estudantes a desenvolverem as habilidades necessárias para aplicá-los em cenários do mundo real.

Em síntese, a análise dos resultados do teste revela a necessidade de uma abordagem mais holística no ensino da progressão aritmética. Os erros identificados não são meramente falhas dos alunos, mas igualmente reflexos de uma prática pedagógica que pode ser aprimorada. A integração das teorias de aprendizagem de Piaget, Gatti e Pizzini sugere que o ensino deve considerar as etapas de desenvolvimento cognitivo dos aprendizes, promovendo atividades que estimulem a construção de conhecimento através da interação e da experimentação.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação revelou-se uma abordagem eficaz para salientar a complexidade do aprendizado matemático em diferentes contextos. A utilização de questões objetivas e discursivas, alinhadas com a teoria, é uma estratégia que visou não apenas à memorização, mas também a compreensão profunda dos conceitos. No entanto, a eficácia dessa abordagem enfrentou desafios multifacetados relacionados a variáveis externas que influenciam a aprendizagem.

A condição socioeconômica dos alunos é um fator crucial. Jovens pertencentes a contextos menos favorecidos tiveram acesso limitado a recursos, como dispositivos eletrônicos ou *internet*, o que dificultou a utilização do *eBook* de forma eficaz e individual. Portanto, sugerimos que os educadores considerem alternativas que promovam a inclusão digital e garantam que todos tenham as mesmas oportunidades para acessar o material didático.

Além disso, a escola desempenhou papel significativo na aprendizagem. Um ambiente pedagógico que incentive a participação ativa e o engajamento dos estudantes nas dinâmicas matemáticas pode facilitar a assimilação dos conceitos de progressão aritmética. A formação (inicial e continuada) de professores é essencial com vistas a se criar um ambiente de aprendizado inclusivo e estimulante. O domínio e a utilização de estratégias que favorecem a colaboração entre educandos, como trabalhos em grupo e discussões em sala de aula, podem mitigar dificuldades individuais.

Outro aspecto considerado é a dificuldade de interpretação que muitos discentes enfrentam. A desconexão entre a teoria matemática e a aplicação no cotidiano pode causar frustração e falta de motivação. Portanto, é vital que os educadores desenvolvam atividades que conectem os conceitos matemáticos a situações do dia a dia, tornando o aprendizado mais relevante e instigante. Questões contextualizadas e/ou que reflitam cenários do cotidiano dos alunos podem auxiliar na superação das dificuldades interpretativas e na aplicação de raciocínio lógico.

Para tornar o ensino de progressão aritmética mais eficaz, o *eBook* pode ser complementado com vídeos explicativos, animações e recursos interativos que promovam uma aprendizagem dinâmica. Além disso, a criação de um espaço *online* para discussão e esclarecimento de dúvidas tenderia a fomentar o engajamento dos alunos e a colaboração entre eles.

Em suma, a pesquisa evidenciou a complexidade do ensino de progressão aritmética e as múltiplas variáveis que influenciam o aprendizado. A proposta do *eBook*, ao oferecer uma abordagem teórica juntamente com atividades práticas, é um passo valioso na busca por métodos que facilitem a compreensão dos conceitos matemáticos. Contudo, para que essa ideia gere o impacto desejado, é indispensável que sejam consideradas as particularidades dos alunos e do contexto onde estão inseridos, para que a matemática se torne uma ferramenta acessível e significativa na formação acadêmica e social deles. Ademais, a formação continuada dos educadores e a adaptação constante das estratégias de ensino podem garantir que todos os alunos, independentemente de suas condições, tenham a oportunidade de dominar a progressão aritmética e outras áreas da matemática.

A sugestão de futuras intervenções pedagógicas inclui, além do *eBook*, o uso de tecnologias digitais, como *softwares* educativos que ofereçam problemáticas envolvendo progressões aritméticas e que possibilitem a prática em um ambiente virtual. Outrossim, a formação continuada dos docentes deve estar alinhada às novas metodologias de ensino, garantindo-se que eles estejam preparados para tratar de conceitos matemáticos de maneira que respeitem o tempo de aprendizagem de cada aluno.

## 9. REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **Educational psychology**: a cognitive view. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1978.
- BARROWS, H. S. Problem-based learning in medical education. In: **Enhancing learning through problem-based learning**: a comparative study. Springfield, IL: Southern Illinois University School of Medicine, 1996.
- BENNETT, A.; E GIBBONS, W. Understanding real-world mathematics: a guide for teachers. **Teaching Mathematics and Its Applications**, 28(4), 185-194, 2009.
- BERTUCCI, C. C.; NEVES, S. V. **Ensino de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Cena, 2018.
- BISHOP, A. J. **Mathematical enculturation**: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- BROUSSEAU, G. **A didática da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 1997.
- COCCIA, C. Pedagogias ativas e a construção do conhecimento. In: **Educação e formação**: desafios atuais. São Paulo: Moderna, 2008.
- D'AMBROSIO, U. **Educação matemática e a cultura matemática**. São Paulo: Moderna, 1999.
- FERRAZ, T. R. **Métodos e técnicas de pesquisa em educação**. São Paulo: Cortez, 2007.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 50. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017.
- GARDNER, H. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. São Paulo: M. Books do Brasil, 2000.
- GATTI, B. A. **Formação de professores**: desafios e perspectivas. Rio de Janeiro: PUC-RJ, 2014.
- GOLEMAN, D. **Inteligência emocional**: a teoria revolucionária que redefine o que é ser inteligente. Rio de Janeiro: Objetiva, 1995.
- JOHNSON, D. W.; JOHNSON, R. T. **Learning together and alone**: cooperative, competitive, and individualistic learning. Boston: Allyn & Bacon, 1999.
- KOLB, D. A. **Experiential learning**: experience as the source of learning and development. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.

LIMA, E. M. **Dificuldades de aprendizagem em matemática**: um olhar sobre a progressão aritmética. São Paulo: Moderna, 2018.

MORIN, E. **A cabeça bem-feita**: repensar a reforma, reformar o pensar. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

MOURA, M. A. A mediação pedagógica na educação matemática: uma abordagem freiriana. **Educação Matemática em Revista**, vol. 14, n. 2, p. 43-60, 2009.

NOSS, R.; PATRICK, J. Contextualização: um enfoque matemático. In: Pereira, R. F. (Org.). **Matemática e contexto**: histórias e práticas. São Paulo: Moderna, 2018.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Children's mathematical development**. Psychology Press, 1996.

NUNES, T. **Mathematical thinking**: building a new perspective. London: Routledge, 2019.

PAPERT, S. **Mindstorms**: children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books, 1993.

PEREIRA, A. F. **Matemática**: teoria e prática no ensino. São Paulo: Moderna, 2010

PEREIRA, S.; VIEIRA, C. **práticas pedagógicas inovadoras no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: Multifoco, 2018.

PERRENOUD, P. **Construir competências na escola**: uma visão crítica da nova pedagogia. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho. São Paulo: Martins Fontes, 1976.

PIZZINI, E. **Mathematical structure and reasoning**. Educational Resources, 2002.

PIZZINI, A.; VIANA, F. **Metodologia da matemática**: a resolução de problemas como estratégia de ensino. Florianópolis: UFSC, 2015.

PIMENTA, S. G.; LIMA, L. G. **Educação e formação**: leitura da realidade educacional. São Paulo: Cortez, 2012.

RIBEIRO, J. **A matemática na educação básica e suas conexões**. Curitiba: Prismas, 2017.

SANTOS, M. A. Mathematics in context: connecting mathematics to the real world. **Educational Studies in Mathematics**, 64(3), 235-245, 2007.

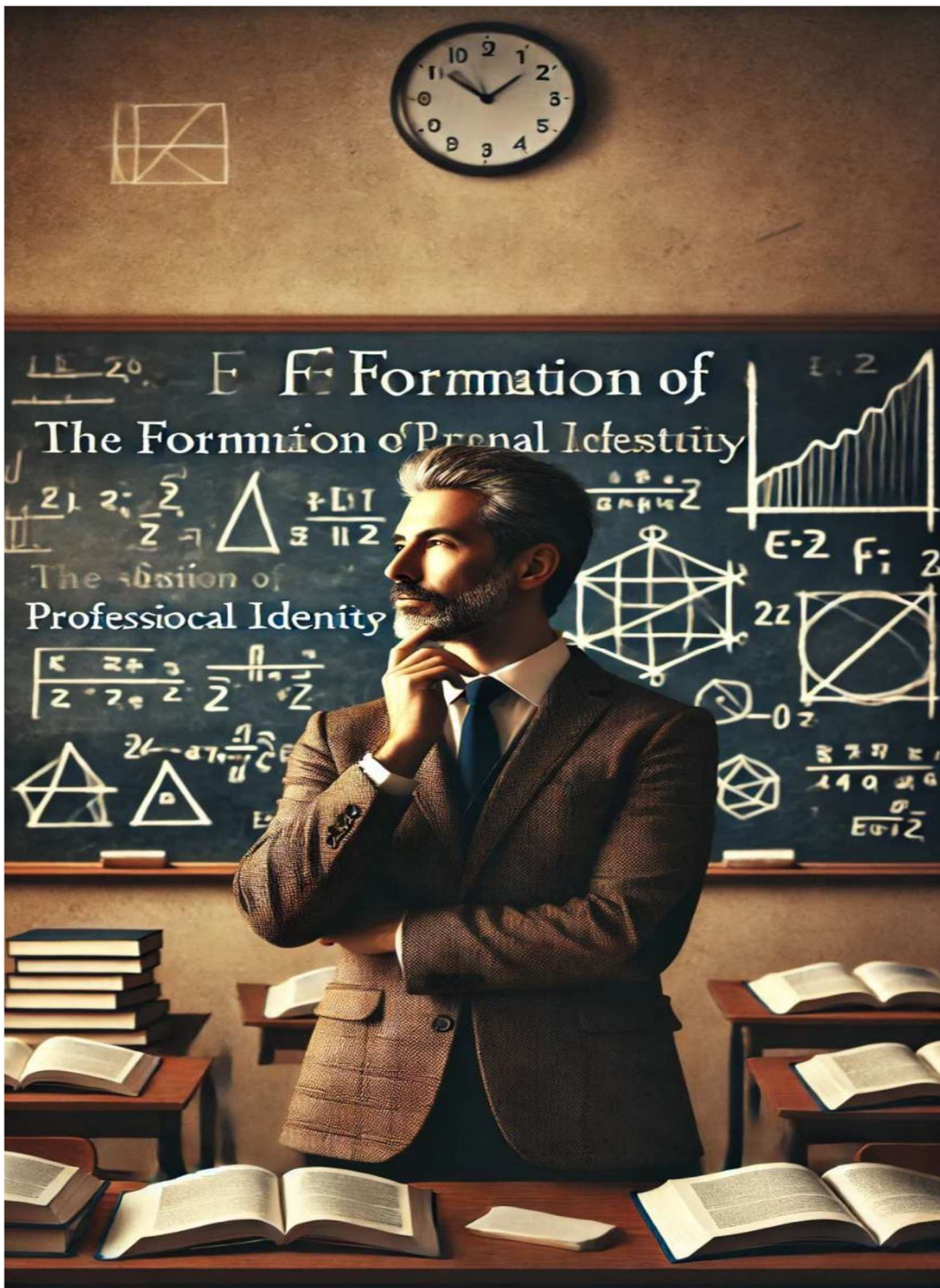
SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and Learning** (p. 834-857). New York: Macmillan, 1992.

SILVA, R.; SANTOS, L.; ALMEIDA, T. **Tecnologia no ensino de matemática: novas possibilidades e desafios**. Belo Horizonte: UFMG, 2019.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **The Mathematics Teacher**, 69(3), 293-303, 1976.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2006.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.



# **ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA: ESTRATÉGIAS E ABORDAGENS COM FINALIDADES EFETIVAS**

**MICHEL AUGUSTO MOURA DE LIMA SEGUNDO**

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	2
<b>2. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS</b> .....	3
<b>3. DEFINIÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA</b> .....	4
3.1. Termo geral da progressão aritmética.....	5
3.2. Notação e cálculo da razão.....	6
3.3. Elementos da progressão aritmética.....	7
3.4. Classificação da progressão aritmética.....	9
3.5. Notações especiais.....	10
3.6. Interpolação aritmética.....	11
3.7. Soma dos termos de uma PA.....	12
<b>4. EXEMPLOS PRÁTICOS DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA</b> .....	13
<b>5. EXEMPLOS ENVOLVENDO FÓRMULAS / CÁLCULOS</b> .....	16
<b>6. ATIVIDADES QUE ENVOLVEM O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA</b> .....	21
<b>7. CONCLUSÃO</b> .....	33
<b>8. BIBLIOGRAFIA</b> .....	34

## 1. INTRODUÇÃO

A educação matemática é um componente essencial da formação acadêmica dos estudantes, uma vez que proporciona habilidades fundamentais para o raciocínio lógico e para a resolução de problemas. Entre os conceitos matemáticos que despertam maior importância no desenvolvimento do aprendizado, destaca-se a progressão aritmética (PA). A PA revela-se não somente um tema central no ensino da matemática, mas também uma ferramenta valiosa para a compreensão de diversas áreas do conhecimento, incluindo ciências exatas, economia e até mesmo assuntos cotidianos. Contudo, o ensino dessa temática pode se transformar em um desafio que demanda fôlego, especialmente em contextos da educação pública. Nesse cenário, muitas vezes nos deparamos com uma carência de recursos didáticos adequados e de estratégias pedagógicas que fomentem o interesse e a compreensão dos alunos.

A proposta de criação deste *ebook* voltado para o ensino de progressão aritmética surge como uma alternativa acessível para enfrentar tal desafio. A utilização de recursos tecnológicos na educação é passível de promover um ambiente de aprendizado mais dinâmico e interativo. O *ebook*, como ferramenta digital, permite uma abordagem flexível e adaptável, capaz de atender às diversas necessidades dos estudantes, especialmente em um mundo cada vez mais digitalizado. Os professores poderão utilizar o *ebook* como um complemento ao currículo, ampliando suas ferramentas didáticas. Isso tenderá a enriquecer o ambiente de sala de aula, favorecendo uma abordagem mais centrada no aluno e incentivando a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento.

Ao abordar a progressão aritmética, o *ebook* busca apresentar o conceito de maneira clara e acessível, utilizando uma linguagem simplificada e contextualizada, que dialoga com a realidade dos alunos. Isso implica não só explicar a definição de PA, mas igualmente oferecer exemplos diretos, práticos e aplicações que sejam relevantes ao cotidiano dos estudantes. Incorporar histórias e situações que fazem parte da cultura local de Belém poderá ser um diferencial importante, ajudando os educandos a perceberem a matemática como uma ferramenta útil e necessária em suas vidas, em vez de um mero conteúdo curricular. Esses recursos são passíveis de facilitar a compreensão dos alunos, permitindo que eles visualizem a progressão dos números de forma gráfica, tornando a aprendizagem mais intuitiva e agradável. A interatividade, além de contribuir para o aprendizado autônomo, realiza uma aproximação com os estudantes, especialmente com aqueles que se sentem mais confortáveis e motivados ao usarem dispositivos digitais.

Por fim, a proposta deste *ebook* é, a nosso ver, um passo importante na busca por uma educação matemática de qualidade no ensino público de Belém do Pará. Ao explorar a progressão aritmética através de recursos digitais, buscamos não apenas facilitar o aprendizado de tal conceito, mas também despertar a curiosidade e o interesse dos alunos pela matemática. A crença é de que, ao tornar o ensino leve e acessível, possamos contribuir para a formação de cidadãos preparados e críticos, capazes de enfrentar os desafios de um futuro que exige cada vez mais habilidades matemáticas e analíticas. Assim, esta iniciativa não se limita a um mero recurso pedagógico, mas representa uma visão de futuro para a educação na região, onde o acesso ao conhecimento de qualidade deve ser uma realidade para todos.

## 2. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Sequências numéricas são conjuntos ordenados de números que seguem um padrão específico. Elas podem ser classificadas em finitas e infinitas. As sequências finitas possuem um número limitado de termos, enquanto as infinitas se estendem indefinidamente, sem um término específico.

As sequências finitas são frequentemente utilizadas em problemas práticos da matemática, como no cálculo de somas e de médias. Um exemplo é a sequência dos números inteiros de 1 a  $n$ , que pode ser expressa como  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . A soma dos elementos de uma sequência finita pode ser facilmente calculada utilizando fórmulas apropriadas, como a soma dos primeiros  $n$  números inteiros, dada por:

$$S = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Por outro lado, as sequências infinitas são de vital importância no campo da análise matemática. Um exemplo clássico é a sequência dos números naturais,  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , que continua indefinidamente. Outra sequência conhecida é a de Fibonacci, onde cada termo é a soma dos dois anteriores:  $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ . Essas sequências podem convergir para um limite, como a sequência dos inversos dos números naturais, que convergirá para zero.

Os conceitos de convergência e divergência são fundamentais em sequências infinitas. Uma sequência converge se seus termos se aproximam de certo valor à medida que seguem para o infinito; caso contrário, diz-se que diverge. O estudo das sequências também está intimamente associado às séries, onde se analisa a soma dos elementos de uma sequência.

A teoria das sequências é suportada por uma vasta literatura. Livros como “Introduction to the theory of numbers”, de Hardy e Wright (2008), e “Principles of mathematical analysis”, de Walter Rudin (1976), abordam em profundidade as propriedades das sequências e as suas aplicações. Livros como “Discrete mathematics and its applications”, de Rosen (2011), também discutem sequências em um contexto mais computacional.

Em suma, as sequências numéricas finitas e infinitas desempenham um papel significativo na matemática, fornecendo ferramentas essenciais ao entendimento de padrões, de cálculos e de análise avançada.

### 3. DEFINIÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

A lei de formação de uma sequência é uma fórmula que define explicitamente cada termo em função de sua posição. Por exemplo, a sequência dos números naturais pode ser expressa pela lei de formação  $a_n$ , onde  $n$  é a posição do termo na sequência. Para uma sequência quadrática, por exemplo, como a dos números quadrados, a lei de formação é  $a_n = n^2$ , que permite calcular cada termo diretamente:

$$1; 4; 9; 16; \dots; n^2$$

Por outro lado, a lei de recorrência define cada termo em função de um ou mais termos anteriores. Esta abordagem é especialmente útil para sequências que têm uma relação clara entre seus elementos vizinhos. Um exemplo clássico é a sequência de Fibonacci, onde cada termo é a soma dos dois anteriores:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , com  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 1$ . As leis de recorrência são também importantes em algoritmos de programação, onde a solução de um problema é expressa em termos de soluções de subproblemas.

Ambas as abordagens têm suas vantagens: as leis de formação oferecem uma maneira direta de calcular termos, enquanto as leis de recorrência podem simplificar o raciocínio ou a programação. Muitas vezes, um problema é abordado de ambas as maneiras, dependendo do contexto e das necessidades da resolução.

Dados os termos de uma sequência numérica infinita:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_k ; \dots ; a_n ; \dots$$

Uma progressão aritmética é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante, chamada de razão ( $r$ ).

A progressão aritmética é amplamente utilizada em diversos campos, incluindo:

- a) Finanças (cálculo de juros simples);
- b) Planejamento (distribuição de recursos ao longo do tempo);
- c) Problemas de contagem e sequências, entre outros.

A progressão aritmética é uma das sequências numéricas mais simples e fundamentais, com aplicações práticas em matemática e em diversas disciplinas. Seu estudo permite resolver uma variedade de problemas em análise quantitativa e em planejamento.

### 3.1. Termo geral da progressão aritmética

$$a_2 = a_1 + r \quad (*)$$

$$a_3 = a_2 + r \quad (**)$$

Substituindo (\*) em (\*\*), temos:

$$a_3 = a_1 + 2.r \quad (***)$$

$$a_4 = a_3 + r \quad (***)$$

Substituindo (\*\*\*) em (\*\*\*\*), temos:

$$a_4 = a_1 + 3.r$$

...

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Se a PA é formada por uma sequência de termos que começa com um primeiro termo,  $a_1$ , e possui uma razão  $r$ , então o  $n$ ésimo termo,  $a_n$ , da PA pode ser definido pela seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1). r \quad \text{ou} \quad a_n = a_k + (n - k). r$$

onde:

$a_n$  é o  $n$ ésimo termo da PA,

$a_k$  é o termo na posição  $k$  da PA,

$a_1$  é o primeiro termo da PA,

$r$  é a razão (a diferença constante entre termos consecutivos),

$n$  representa a posição do termo na sequência (um número natural).

### 3.2. Notação e cálculo da razão

Se temos uma progressão aritmética cuja sequência de termos é denotada por

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

então a razão  $r$  pode ser definida como:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

onde:

$a_n$  é o  $n$ ésimo termo da PA,

$a_{n-1}$  é o termo anterior ao  $n$ ésimo.

Esta relação aplica-se de forma consistente a todos os pares de termos consecutivos na sequência. Assim, em uma PA, a razão é a mesma, não importando qual par de termos você escolha.

#### Exemplo 1

Considere a seguinte PA: 2, 5, 8, 11, 14, ...

Para encontrar a razão:

$$\text{Entre o } 1^\circ \text{ e o } 2^\circ \text{ termo: } 5 - 2 = 3$$

$$\text{Entre o } 2^\circ \text{ e o } 3^\circ \text{ termo: } 8 - 5 = 3$$

$$\text{Entre o } 3^\circ \text{ e o } 4^\circ \text{ termo: } 11 - 8 = 3$$

Dessa forma, a razão  $r$  da PA é 3. Isso significa que, a cada passo, adicionamos 3 para chegar ao próximo termo da sequência.

#### Exemplo 2

Considere a seguinte PA: 13, 9, 5, 1, -3, ...

Para encontrar a razão:

$$\text{Entre o } 1^\circ \text{ e o } 2^\circ \text{ termo: } 9 - 13 = -4$$

$$\text{Entre o } 2^\circ \text{ e o } 3^\circ \text{ termo: } 5 - 9 = -4$$

$$\text{Entre o } 3^\circ \text{ e o } 4^\circ \text{ termo: } 1 - 5 = -4$$

$$\text{Entre o } 4^\circ \text{ e o } 5^\circ \text{ termo: } -3 - 1 = -4$$

Dessa forma, a razão  $r$  da PA é -4. Isso significa que, a cada passo, subtraímos 4 para chegar ao próximo termo da sequência.

### 3.3. Elementos da progressão aritmética

*Primeiro Termo ( $a_1$ ):* Este é o primeiro valor da sequência. Por exemplo, se a sequência é 2, 4, 6, 8, o primeiro termo  $a_1$  equivale a 2.

*Razão ( $r$ ):* A razão é a diferença constante entre dois termos consecutivos. No exemplo anterior, a razão  $r$  é 2, pois  $4 - 2 = 2$ ,  $6 - 4 = 2$ , e assim por diante.

*Posição de um termo ( $n$ ):* Refere-se à posição que queremos determinar dentro da sequência. Por exemplo, se quisermos encontrar o 5º termo, temos  $n = 5$ .

*Termo na posição  $k$  ( $a_k$ ):* Termo aleatório na sequência, podendo ser o primeiro ou o anterior ao termo que se pretende determinar.

*Termo na posição  $n$  ( $a_n$ ):* Geralmente é o último termo de uma sequência finita ou o termo que se queira determinar.

#### Exemplo 1

Suponha que temos a PA: 3, 7, 11, 15, ...

O primeiro termo  $a_1 = 3$ .

A razão  $r = 7 - 3 = 4$ .

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos calcular o 5º termo ( $n = 5$ ):

$$a_5 = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_5 = 3 + (5 - 1) \cdot 4$$

$$a_5 = 3 + 4 \cdot 4$$

$$a_5 = 3 + 16$$

$$a_5 = 19$$

Portanto, o 5º termo da PA é 19.

#### Exemplo 2

Suponha que temos a PA: 10, 7, 4, 1, -2, ...

O primeiro termo  $a_1 = 10$ .

A razão  $r = 7 - 10 = -3$ .

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos calcular o 5º termo ( $n = 5$ ):

$$a_5 = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_5 = 10 + (5 - 1) \cdot (-3)$$

$$a_5 = 10 + 4 \cdot (-3)$$

$$a_5 = 10 - 12$$

$$a_5 = -2$$

Portanto, o 5º termo da PA é -2.

### 3.4. Classificação da progressão aritmética

A razão é um elemento fundamental da progressão aritmética, pois determina o comportamento da sequência. Dependendo do valor da razão, a PA pode ser:

a) *Crescente*: Quando  $r > 0$ , os termos aumentam à medida que avançamos na sequência.

Exemplo: Considere a seguinte PA: 10, 30, 50, 70, ...

Como a razão  $r$  da PA é 20, isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a aumentar.

b) *Decrescente*: Quando  $r < 0$ , os termos diminuem à medida que avançamos na sequência.

Considere a seguinte PA: 100, 90, 80, 70, 60, ...

Como a razão  $r$  da PA é -10, isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a diminuir.

c) *Constante*: Quando  $r = 0$ , os termos mantêm-se à medida que avançamos na sequência.

Considere a seguinte PA: 90, 90, 90, 90, 90, ...

Como a razão  $r$  da PA é 0, isso significa que os termos seguintes da sequência tendem a não se alterar.

Em resumo, a razão é um parâmetro crucial, que define a estrutura da progressão aritmética e influencia suas aplicações em diversos contextos matemáticos e práticos.

### 3.5. Notações especiais

Podemos representar uma progressão aritmética de maneira genérica, para 3, ou 4, ou 5 termos, da seguinte forma:

a) Para 3 termos:  $(x, x + r, x + 2r)$  ou  $(x - r, x, x + r)$

b) Para 4 termos:  $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$  ou  $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$  em que  $y = \frac{r}{2}$

c) Para 5 termos:  $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$  ou  $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

#### Exemplo

Determine  $x$  de modo que  $(x, 2x - 1, 5x + 7)$  seja uma PA.

Solução:

Devemos ter  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ , então:

$$(2x - 1) - x = (5x + 7) - (2x + 1)$$

$$x - 1 = 3x + 6$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

### 3.6. Interpolação aritmética

Em toda sequência finita  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , o primeiro termo e o último termo são chamados de extremos; os demais são chamados de meios.

Interpolar  $k$  meios aritméticos entre os números  $a$  e  $b$  significa obter uma PA de extremos  $a_1 = a$  e  $a_n = b$ , com  $n = k + 2$  termos. Para determinar os meios dessa PA, é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k + 1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}$$

#### Exemplo 1

Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

Solução:

Vamos formar uma PA com 7 termos em que  $a_1 = 1$  e  $a_7 = 2$ . Temos:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

Então, a PA é  $(1, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, 2)$ .

#### Exemplo 2

Interpole 5 meios aritméticos entre -2 e 40.

Solução:

Devemos obter a razão da PA com 7 termos (2 extremos e 5 meios) em que

$a_1 = -2$  e  $a_7 = 40$ . Temos:  $a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow 40 = -2 + 6 \cdot r \Rightarrow r = 7$ . Então, a PA é  $(-2, 5, 12, 19, 26, 33, 40)$ .

### 3.7. Soma dos termos de uma PA

A soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

onde:

$S_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos.

$a_1$  é o *primeiro termo* da PA.

$a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da PA.

$n$  é o número de termos da PA.

## 4. EXEMPLOS PRÁTICOS DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### *Utilização da Progressão Aritmética no Cotidiano*

A progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição de uma constante (razão) ao termo anterior. Esse conceito simples pode ser amplamente aplicado em diversas situações cotidianas, oferecendo uma maneira estruturada de entender e resolver problemas relacionados ao crescimento linear e à acumulação de valores. Aqui estão algumas maneiras de utilizar a PA no dia a dia:

#### 1. Planejamento Financeiro

- *Economias Mensais*: Ao decidir economizar uma quantia fixa todo mês, os valores depositados formam uma PA, permitindo calcular a soma total economizada após um determinado período.

- *Aumento Salarial*: Se um funcionário recebe um aumento fixo mensal, sua evolução salarial pode ser prevista utilizando PA.

#### 2. Gestão de Tempo

- *Horas de Estudo*: Alunos que aumentam suas horas de estudo a cada semana (por exemplo, 1 hora a mais por semana) podem usar a PA para calcular quantas horas estudarão após várias semanas.

- *Treinamento Físico*: Atletas que aumentam gradualmente a intensidade ou duração dos treinos de forma constante podem planejar seus treinos usando PA.

#### 3. Deslocamentos e Viagens

- *Viagens de Carro*: Se um carro é capaz de percorrer uma certa distância a mais a cada dia (como 10 km a mais por dia), a distância total pode ser calculada usando PA.

- *Caminhadas e Corridas*: Atletas que aumentam diariamente a distância percorrida (por exemplo, começando com 2 km e aumentando 1 km a cada dia) podem planejar seu progresso fazendo uso de PA.

#### 4. Orçamento

- *Despesas Fixas Mensais*: Ao identificar despesas fixas que aumentam em um valor constante (como aluguel com ajustes anuais), as pessoas podem usar a PA para prever gastos futuros.

- *Compras em Parcelas*: Quando um produto é comprado parceladamente com prestações fixas, a totalidade do pagamento também pode ser representada por uma PA.

## 5. Crescimento Pessoal

- *Leitura*: Se alguém decide ler um número crescente de páginas por semana (ex.: começando com 5 páginas e aumentando 2 a cada semana), a meta de leitura pode ser alcançada rastreando o progresso com uma PA.

- *Habilidades*: Ao aprender uma nova habilidade (como um novo idioma), onde se pretende aumentar o número de palavras ou frases aprendidas semanalmente de maneira constante, a PA pode ajudar a manter um registro.

## 6. Temperaturas e Experimentos

- *Variações de Temperatura*: Em experimentos científicos, onde a temperatura se altera em uma quantidade constante ao longo do tempo, a evolução das temperaturas pode ser modelada com PA, facilitando a análise dos dados experimentais.

## 7. Desenvolvimento de Produtos

- *Aumentos em Produção*: Fábricas que aumentam a produção de um item em uma quantidade fixa a cada mês (ex.: 100 unidades a mais) podem usar PA para prever a produção acumulada ao longo do ano.

- *Vendas*: Negócios que têm um crescimento linear na venda de produtos (ex.: 20 unidades a mais vendidos por mês) podem usar PA para prever vendas futuras.

## 8. Cálculos Estatísticos

- *Análise de Dados*: Em pesquisas, a análise de dados que variam de modo constante pode ser representada através de PA, ajudando a estabelecer tendências ou padrões.

## 9. Financeiro

- *Juros Simples*: Em aplicações financeiras com juros simples, a montante ao longo do tempo pode seguir uma PA, onde a diferença constante representa os juros acumulados.

## 10. Crescimento e Desenvolvimento

- *Crescimento de Plantas*: O crescimento mensal de uma planta que se eleva a uma quantidade fixa pode ser previsto usando o conceito de PA, facilitando o planejamento de cuidados.

- *Desenvolvimentos de Projetos*: Em projetos de construção, quando o progresso é feito em etapas iguais, as métricas de progresso podem ser expressas através de uma PA.

A progressão aritmética oferece uma maneira eficaz de estruturar e entender fenômenos que envolvem variações lineares. Dominar o conceito de PA capacita indivíduos a tomarem decisões informadas em diferentes aspectos do cotidiano, seja em finanças, em planejamento, em

crescimento ou em medições. Esse conhecimento pode ser uma ferramenta valiosa para simplificar cálculos e otimizar o uso do tempo e dos recursos.

## 5. EXEMPLOS ENVOLVENDO FÓRMULAS / CÁLCULOS

### Exemplo 1: Sistema de Pagamento Mensal

Contexto: Um funcionário recebe um aumento de R\$ 200 a cada mês.

- Primeiro mês (salário inicial): R\$ 2.000

- Razão (aumento mensal): R\$ 200

Cálculo:

1. Salário no mês  $n$ :

$$a_n = 2000 + (n - 1) \cdot 200$$

2. Salário no 5º mês:

$$a_n = 2000 + (5 - 1) \cdot 200$$

Resultado: O salário no 5º mês será R\$ 2.800.

### Exemplo 2: Juros Simples

Contexto: Um capital de R\$ 1.000 é aplicado a uma taxa de juros simples de 5% ao mês.

- Primeiro termo: R\$ 1.000

- Razão (juros mensais): R\$ 50 (5% de R\$ 1.000)

Cálculo:

1. Montante no mês  $n$ :

$$m_n = 1000 + (n - 1) \cdot 50$$

2. Montante após 6 meses:

$$m_6 = 1000 + (6 - 1) \cdot 50$$

Resultado: Após 6 meses, o montante será R\$ 1.250.

### **Exemplo 3:** Distância em Viagem

Contexto: Um carro viaja 40 km no primeiro dia e aumenta 10 km em cada dia que se segue.

- Primeiro dia: 40 km

- Razão: 10 km

Cálculo:

1. Distância no dia  $n$ :

$$D_n = 40 + (n - 1) \cdot 10$$

2. Distância percorrida no 7º dia:

$$D_7 = 40 + (7 - 1) \cdot 10$$

Resultado: No 7º dia, o carro percorrerá 100 km.

### **Exemplo 4:** Estudo de Rendimento

Contexto: Um aluno estuda 2 horas na primeira semana e aumenta 1 hora de estudo por semana.

- Primeira semana: 2 horas

- Razão: 1 hora

Cálculo:

1. Horas estudadas na semana  $n$ :

$$h_n = 2 + (n - 1) \cdot 1$$

2. Horas estudadas na 10ª semana:

$$h_n = 2 + (10 - 1) \cdot 1$$

Resultado: Na 10ª semana, o aluno estudará 11 horas.

### **Exemplo 5:** Economia Mensal

Contexto: Uma pessoa decide economizar R\$ 50 no primeiro mês e aumenta sua economia em R\$ 30 a cada mês.

- Primeiro mês: R\$ 50

- Razão: R\$ 30

Cálculo:

1. Economia no mês  $n$ :

$$E_n = 50 + (n - 1) \cdot 30$$

2. Economia no 12º mês:

$$E_{12} = 50 + (12 - 1) \cdot 30$$

Resultado: No 12º mês, a pessoa economizará R\$ 380.

### **Exemplo 6:** Cálculo de Saldo de Conta

Contexto: Um cliente depositou R\$ 500 em uma conta e fará depósitos mensais de R\$ 100.

- Saldo inicial: R\$ 500

- Razão: R\$ 100

Cálculo:

1. Saldo após  $n$  meses:

$$S_n = 500 + (n - 1) \cdot 100$$

2. Saldo após 6 meses:

$$S_6 = 500 + (6 - 1) \cdot 100$$

Resultado: Após 6 meses, o saldo será R\$ 1.000.

### **Exemplo 7:** Aumento de Temperatura

Contexto: Um experimento começa com uma temperatura de 10 °C e aumenta 1,5 °C a cada hora.

- Temperatura inicial: 10 °C

- Razão: 1,5 °C

Cálculo:

1. Temperatura na hora  $n$ :

$$T_n = 10 + (n - 1) \cdot 1,5$$

2. Temperatura na 8ª hora:

$$T_n = 10 + (8 - 1) \cdot 1,5$$

Resultado: Na 8ª hora, a temperatura será 20,5 °C.

### **Exemplo 8:** Crescimento de Plantas

Contexto: Uma planta cresce 2 cm no primeiro mês e aumenta 1 cm a cada mês subsequente.

- Altura inicial: 2 cm

- Razão: 1 cm

Cálculo:

1. Altura da planta no mês  $n$ :

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 1$$

2. Altura após 12 meses:

$$a_{12} = 2 + (12 - 1) \cdot 1$$

Resultado: Após 12 meses, a planta terá 13 cm de altura.

## 6. ATIVIDADES QUE ENVOLVEM O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

**Exercício 1.** Com suas próprias palavras, conceitue cada um dos itens a seguir, que são elementos básicos de uma progressão aritmética.

a) razão:

---

---

---

---

---

b) 1º termo:

---

---

---

---

---

c)  $n$ -ésimo termo:

---

---

---

---

---

d) soma dos  $n$  termos:

---

---

---

---

---

e) fórmula do termo geral de uma progressão aritmética:

---

---

---

---

---

f) fórmula da soma de  $n$  termos da progressão aritmética:

---

---

---

---

---

**Exercício 2.** Nas questões discursivas abaixo, apresente qual estratégia você obteve para determinar a razão da progressão.

Questão 1:

A sequência numérica (2, 5, 8, 11, ...) é uma PA. Determine a razão dessa progressão.

---

---

---

---

---

Questão 2:

Na PA (10, 14, 18, 22, ...), qual é a razão da sequência?

---

---

---

---

---

Questão 3:

A sequência (-7, -12, -17, -22, ...) forma uma PA. Calcule a razão.

---

---

---

---

---

Questão 4:

Dada a PA (100, 90, 80, 70, ...), encontre a razão dessa sequência.

---

---

---

---

---

Questão 5:

Na PA (15, 18, 21, 24, ...), qual é a razão?

---

---

---

---

---

Questão 6:

Considere a sequência (x, x + 4, x + 8, x + 12, ...). Determine a razão da PA.

---

---

---

---

---

Questão 7:

A sequência (-1, -4, -7, -10, -13, ...) é uma PA. Qual é a razão dessa sequência?

---

---

---

---

---

Questão 8:

Na PA (25, 20, 15, 10, ...), encontre a razão.

---

---

---

---

---

**Exercício 3:** Formem grupos de até 4 pessoas, discutindo estratégias de resolução para as questões objetivas a seguir, marcando a alternativa correta e apresentando a estratégia de resolução que seu grupo seguiu.

Questão 1:

Na PA onde o primeiro termo é 5 e a razão é 2, qual é o terceiro termo?

- A) 9
- B) 10
- C) 11
- D) 12

Resolução:

Questão 2:

Na PA onde o primeiro termo é 12 e a razão é -3, qual é o quinto termo?

- A) 0
- B) -3
- C) -6
- D) -9

Resolução:

Questão 3:

Se o segundo termo de uma PA é 15 e a razão é 5, qual é o primeiro termo?

- A) 5
- B) 10
- C) 20
- D) 25

Resolução:

Questão 4:

Em uma PA, o primeiro termo é 4 e o terceiro termo é 14. Qual é a razão da PA?

- A) 2
- B) 3
- C) 5
- D) 6

Resolução:

Questão 5:

Um estudante observou que o quinto termo de uma PA é 32 e a razão é 4. Qual é o primeiro termo da PA?

- A) 10
- B) 12
- C) 14
- D) 16

Resolução:

Questão 6:

Em uma PA onde o primeiro termo é 20 e a razão é 3, qual é o oitavo termo?

- A) 38
- B) 41
- C) 44
- D) 50

Resolução:

Questão 7:

Na PA onde o primeiro termo é 7 e a razão é 1,5, qual é o quarto termo?

- A) 10
- B) 11,5
- C) 12,5
- D) 13

Resolução:

Questão 8:

Um estudante deseja encontrar o décimo termo de uma PA onde o primeiro termo é 9 e a razão é 2. Qual é esse décimo termo?

- A) 27
- B) 39
- C) 18
- D) 19

Resolução:

Questão 9:

Em uma PA, o terceiro termo é 10 e o sexto termo é 19. Qual é a razão da PA?

- A) 2
- B) 3
- C) 5
- D) 1

Resolução:

Questão 10:

Se o primeiro termo de uma PA é -5 e o quarto termo é 7, qual é a razão?

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6

Resolução:

**Exercício 4:** Responda corretamente a cada uma das questões a seguir, apresentando sua estratégia de resolução.

Questão 1:

Determine o 5º termo da PA que começa com 3 e tem razão 5.

---

---

---

---

---

Questão 2:

Determine o 10º termo da PA (10, 15, 20, 25, ...).

---

---

---

---

---

Questão 3:

Qual é a posição do número 16 em uma PA cuja primeiro termo é 4 e a razão é 2?

---

---

---

---

---

Questão 4:

Para a PA (20, 18, 16, 14, ...), determine o 20º termo.

---

---

---

---

---

Questão 5:

Encontre o 7º termo da PA que tem como primeiro termo 1 e razão -3.

---

---

---

---

---

Questão 6:

Dada a PA (30, 27, 24, ...), qual é o seu 9º termo?

---

---

---

---

---

Questão 7:

Determine a posição do número 38 em uma PA que começa em 8 e possui razão 6.

---

---

---

---

---

Questão 8:

Qual é o 5º termo da PA cujo primeiro termo é 12 e a razão é 0?

---

---

---

---

---

**Exercício 5:** Determine a soma dos  $n$  primeiros termos em cada uma das questões a seguir, apresentando sua estratégia de resolução.

Questão 1:

Calcule a soma dos primeiros 10 termos da PA (2, 5, 8, 11, ...).

---

---

---

---

---

Questão 2:

Determine a soma dos primeiros 8 termos da PA (10, 15, 20, 25, ...).

---

---

---

---

---

Questão 3:

Qual é a soma dos primeiros 5 termos da PA (4, 7, 10, 13, ...)?

---

---

---

---

---

Questão 4:

Encontre a soma dos primeiros 12 termos da PA (30, 28, 26, 24, ...).

---

---

---

---

---

Questão 5:

Calcule a soma dos primeiros 6 termos da PA (1, 4, 7, 10, ...).

---

---

---

---

---

Questão 6:

Determine a soma dos primeiros 15 termos da PA (5, 9, 13, 17, ...).

---

---

---

---

---

Questão 7:

Qual é a soma dos primeiros 9 termos da PA (12, 9, 6, 3, ...)?

---

---

---

---

---

Questão 8:

Encontre a soma dos primeiros 7 termos da PA (0, 3, 6, 9, ...).

---

---

---

---

---

**Exercício 6:** Determine as alternativas corretas de cada item a seguir, apresentando sua estratégia de resolução nos respectivos espaços das questões.

**Questão 1:**

(Enem 2ª aplicação 2014) Em uma determinada estrada, existem dois telefones instalados no acostamento: um no quilômetro 30 e outro no quilômetro 480. Entre eles serão colocados mais 8 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância.

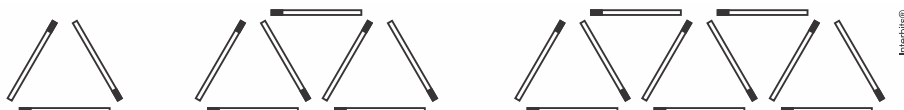
Qual a sequência numérica que corresponde à quilometragem em que os novos telefones serão instalados?

- a) 30, 90, 150, 210, 270, 330, 390, 450
- b) 75, 120, 165, 210, 255, 300, 345, 390
- c) 78, 126, 174, 222, 270, 318, 366, 414
- d) 80, 130, 180, 230, 280, 330, 380, 430
- e) 81, 132, 183, 234, 285, 336, 387, 438

Resolução:

**Questão 2:**

(Enem (Libras) 2017) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.



Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

- a) 30
- b) 39
- c) 40
- d) 43
- e) 57

Resolução:

**Questão 3:**

(Enem 2019) O *slogan* “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015.

Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de



**Questão 6:**

(Enem 2ª aplicação 2014) A cada dia que passa, um aluno resolve 2 exercícios a mais do que resolveu no dia anterior. Ele completou seu 11º dia de estudo e resolveu 22 exercícios. Seu objetivo é resolver, no total, pelo menos 272 exercícios.

Mantendo seu padrão de estudo, de quantos dias ele ainda precisa para atingir sua meta?

- a) 5
- b) 6
- c) 9
- d) 16
- e) 20

Resolução:

## 7. CONCLUSÃO

Concluimos este *ebook* com a firme convicção de que a progressão aritmética é um tema de extraordinária relevância no ensino de matemática. Ao longo de nossa jornada, pudemos perceber como esse conceito se entrelaça com diversas situações do cotidiano, desde a análise de dados financeiros até a compreensão de padrões em fenômenos sociais. A PA não é mais um tema a ser abordado nas salas de aula, e sim uma ferramenta poderosa que capacita nossos alunos a ver e a interpretar o mundo ao seu redor de maneira mais crítica e analítica.

No entanto, temos observado que muitos estudantes enfrentam dificuldades significativas em compreender e aplicar os conceitos de progressão aritmética. Esses desafios, por vezes, surgem da falta de uma base sólida em conceitos matemáticos anteriores, da ansiedade em relação à matemática e da ausência de um ensino que realmente conecte a teoria à prática do dia a dia. Tais dificuldades não só impactam o desempenho acadêmico, mas também podem comprometer a confiança dos alunos em suas habilidades matemáticas.

A criação deste *ebook* foi motivada pela necessidade de oferecer recursos que abordem referidas dificuldades de forma clara e prática. Através de exemplos concretos, exercícios contextualizados e estratégias pedagógicas, buscamos não apenas ensinar a PA, mas igualmente inspirar os educadores a facilitar a compreensão desse importante conceito. Enfatizamos a importância de criar um ambiente de aprendizagem seguro e colaborativo, onde os alunos possam se sentir confortáveis para explorar, errar e aprender.

Ao final, é nosso desejo que os educadores utilizem este material como um suporte valioso em suas práticas pedagógicas, contribuindo para que os aprendizes não simplesmente dominem a progressão aritmética, entendendo-a, outrossim, como uma parte fundamental do seu conhecimento matemático e de sua formação integral. Que cada um de nossos alunos, ao lidar com a PA, possa se sentir empoderado e enfrentar não somente os desafios da matemática, mas também os desafios do mundo real com coragem e determinação.

## 8. BIBLIOGRAFIA

BERTUCCI, C. C.; NEVES, S. V. **Ensino de matemática**: teoria e prática. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

CESAR, I. S.; MORAES, P. A. **Matemática**: informação regional e cotidiana. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GOUVÊA, A. **Matemática na educação básica**: uma abordagem construtivista. 1. ed. São Paulo: Autêntica, 2014.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An introduction to the theory of numbers**. 6th ed. [Tradução não identificada]. Oxford: Oxford University Press, 2008.

HOLLANDA, S. R. **Matemática**: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2015.

LARA, F. M.; SOARES, K. S. **Matemática**: reflexões, práticas e conceitos. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

PEREIRA, R. F.; LOPES, J. L. **Matemática e suas aplicações na vida cotidiana**. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ROSEN, K. H. **Discrete mathematics and its applications**. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

SIMÃO, A. **Progressões aritméticas**: aprendendo com a matemática em recursos educacionais abertos (REA). 1. ed. São Paulo: Novatec, 2011. Disponível em: <<https://www.rea.org.br>>. Acesso em: 10.12.2024.

TRINDADE, G. M. **Ensino de matemática com contexto**: aplicações práticas da matemática na vida diária. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2010.

### Artigos Acadêmicos

Revista Brasileira de Educação Matemática. v. 10, n. 2, 2018. Disponível em: <<https://www.revistabrasileiradeeducacaomatematica.org.br/link-do-artigo>>. Acesso em: 09.12.2024.

### Recursos Online

KHAN ACADEMY. *Site* com vídeos e exercícios interativos sobre PA e outros conceitos matemáticos. Disponível em: <<https://www.khanacademy.org>>. Acesso em: 09.12.2024.