



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Paulo André da Silva Sousa

**Propondo uma formação continuada para professores de matemática por meio da
resolução de problemas envolvendo área de figuras planas**

MOSSORÓ – RN

2024

Paulo André da Silva Sousa

**Propondo uma formação continuada para professores de matemática por meio da
resolução de problemas envolvendo área de figuras planas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira

MOSSORÓ - RN

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S719p Sousa, Paulo André da Silva .
Propondo uma formação continuada para
professores de matemática por meio da resolução
de problemas envolvendo área de figuras planas /
Paulo André da Silva Sousa. - 2024.
184 f. : il.

Orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2024.

1. resolução de problemas. 2. formação
continuada de professor. 3. área de figuras planas.
I. Oliveira, Fabricio de Figueredo , orient. II.
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com
AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Paulo André da Silva Sousa

**Propondo uma formação continuada para professores de matemática por meio da
resolução de problemas envolvendo área de figuras planas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido UFERSA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 30 / 08 /2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira (UFERSA)
Presidente

Prof. Dr.^a Luiza Helena Felix de Andrade (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (UVA)
Membro Examinador

A minha vó, Francisca Florença Albuquerque Silva, que sempre me incentivou, apoiou e dedicou toda a sua vida para dar momentos felizes, não só a mim, mas a minha mãe e a meus irmãos.
(In Memoriam)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, ao Espírito Santo, meu consolador, e a Jesus Cristo, meu Salvador, que, em Sua trindade, habita em mim.

Ao Prof. Dr. Fabrício Figueredo Oliveira, pelas orientações semanais fundamentais para a concretização desta dissertação.

À CAPES, pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos.

À minha mãe, Maria Eliete da Silva Sousa, pelo constante incentivo aos meus estudos, e à minha saudosa avó, Francisca Florença de Albuquerque Silva, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos da minha vida e hoje repousa nos céus.

Aos meus colegas de Mestrado, Alan, Wermerson, e Carlos Antônio Marques de Sousa, pelas valiosas trocas de experiências durante nossas viagens de Fortaleza-CE para Mossoró-RN.

Aos meus professores do Mestrado: Prof. Dr. Paulo Cesar Linhares da Silva, Prof. Dr. Tony Kleverton Nogueira, Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues, Prof.^a Dra. Mariana de Brito Maia, Prof. Dr. Kleber Soares Câmara, Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal, Prof. Dr. Fabrício Figueredo Oliveira, Prof.^a Dra. Franceliza Monteiro da Silva Dantas, Prof.^a Dra. Valdenize Lopes Do Nascimento, e Prof.^a Dra. Luiza Helena Felix De Andrade, pelos ensinamentos preciosos.

À coordenadora, Prof.^a Dra. Valdenize Lopes Do Nascimento, pelo suporte pedagógico oferecido e pelos incentivos financeiros que possibilitaram a participação em eventos educacionais.

Aos meus irmãos, Ana Paula (que está nos braços do Pai), Aurilene, Aracélia, Lucas e Luana, por sempre me motivarem nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, Adrielly Yasmin e André Lucas, que são a razão da minha vida.

Aos meus alunos e colegas de profissão, que me incentivaram a escrever este trabalho de conclusão.

Aos membros da banca examinadora, Prof.^a Dra. Luiza Helena Felix de Andrade (UFERSA) e Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho (UVA), pela valiosa contribuição na avaliação desta dissertação.

“A matemática é a rainha das
ciências”.

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

Esta dissertação investiga como a formação continuada pode impactar a prática cotidiana dos professores de Matemática quando pautada na Resolução de Problemas utilizando o software GeoGebra. O objetivo principal é propor formação continuada para professores de Matemática, com foco na Resolução de Problemas de Áreas de Figuras Planas, integrando a metodologia de Polya e o uso do GeoGebra. Para alcançar esse objetivo, a pesquisa busca proporcionar aos professores um conhecimento aprofundado sobre alguns teoremas relacionados às áreas de figuras planas, capacitando-os a identificar e interpretar diferentes tipos de problemas, além de oferecer ferramentas pedagógicas que favorecem a integração entre teoria e prática. Além disso, a dissertação utiliza problemas selecionados da OBMEP, do livro Temas e Problemas Elementares e do PAPMEM, incentivando a aplicação do método de Polya em conjunto com o GeoGebra. A coleta de dados foi realizada por meio de pesquisa documental, selecionando problemas sobre áreas de figuras planas de diversas fontes e desenvolvendo cinco problemas-modelo. Esses problemas-modelo são apresentados por meio de diálogos fictícios entre professor e aluno, bem como entre professor-formador e professor-aluno, demonstrando a aplicabilidade prática da formação continuada proposta. A dissertação pretende contribuir para a melhoria da formação de professores de Matemática, oferecendo uma abordagem inovadora que combina a Resolução de Problemas e ferramentas tecnológicas, promovendo a atualização contínua e a construção coletiva do conhecimento.

Palavras-chave: resolução de problemas; formação continuada de professor; área de figuras planas

ABSTRACT

This dissertation investigates how continuing education can impact the daily practice of Mathematics teachers when based on Problem Solving using the GeoGebra software. The main objective is to propose continued training for Mathematics teachers, focusing on Problem Solving Areas of Flat Figures, integrating Polya's methodology and the use of GeoGebra. To achieve this objective, the research seeks to provide teachers with in-depth knowledge about some theorems related to the areas of flat figures, enabling them to identify and interpret different types of problems, in addition to offering pedagogical tools that favor the integration between theory and practice. Furthermore, the dissertation uses problems selected from OBMEP, the book Themes and Problems Elementary and PAPMEM, encouraging the application of Polya's method in conjunction with GeoGebra. Data collection was carried out through documentary research, selecting problems about areas of flat figures from different sources and developing five model problems. These model problems are presented through fictitious dialogues between teacher and student, as well as between teacher-trainer and teacher-student, demonstrating the practical applicability of the proposed continuing education. The dissertation aims to contribute to improving the training of Mathematics teachers, offering an innovative approach that combines Problem Solving and technological tools, promoting continuous updating and the collective construction of knowledge.

Keywords: problem solving; continuing teacher training; area of flat figures

LISTA DE FIGURAS

Figura: 1 - Unidade de área.....	47
Figura: 2 - Área do retângulo.....	47
Figura: 3 - Figura C	48
Figura: 4 - Recorte da figura C	49
Figura: 5 - Tira – parte 1	49
Figura: 6 – Tira - Parte 2.....	49
Figura: 7 - Retângulo $4,8 \times 10/3$	50
Figura: 8 - Quadrado unitário dividido em 225 quadradinhos.....	51
Figura: 9 - Retângulo $72/15 \times 50/15$	51
Figura: 10 - Retângulo $a \times b$	52
Figura: 11 - Paralelogramo ABCD	53
Figura: 12 - Retângulo AECF.....	53
Figura: 13 - Área do paralelogramo ABCD.....	53
Figura: 14 - Área do triângulo ABC	54
Figura: 15 - Área do trapézio ABCD.....	55
Figura: 16 - Propriedade 1	56
Figura: 17 - Propriedade 2	57
Figura: 18 - Triângulo IDE.....	57
Figura: 19 - Cevianas BI e BH.....	58
Figura: 20 - Área do triângulo IDE.....	58
Figura: 21 - Ponto P sobre o lado AC.....	59
Figura: 22 - Mediana PM.....	59
Figura: 23 - Razão entre as áreas de dois triângulos.....	60
Figura: 24 - Triângulos semelhantes ABC e DEF	61
Figura: 25 - Triângulos semelhantes de base a e $3a$	62
Figura: 26 - Razão entre áreas de triângulos semelhantes	63
Figura: 27 - Problema de aplicação prática.....	64
Figura: 28 - Construção com régua e compasso	65
Figura: 29 - Uma propriedade das Medianas de um triângulo.....	65
Figura: 30 - Comprimento da circunferência.....	67
Figura: 31 - Polígonos inscritos e circunscritos a circunferência	67
Figura: 32 - Área do setor na prática	70
Figura: 33 - Polígono amarelo	73
Figura: 34 - Dois triângulos amarelos.....	74
Figura: 35 - Três triângulos amarelos	74
Figura: 36 - Retângulos de lados $3x$ por $4x$	76
Figura: 37 - Trapézio formado pelo movimento rígido – Parte 1.....	76
Figura: 38 - Divisão em dois triângulos.....	77
Figura: 39 - Retângulo IJKL.....	77
Figura: 40 - Triângulos antes do movimento rígido	78
Figura: 41 - Trapézio formado pelo movimento rígido – Parte 2.....	78
Figura: 42 - Círculo de raio unitário – Parte 1	80
Figura: 43 - Círculo de raio unitário – Parte 2.....	80
Figura: 44 - Círculo de raio unitário – Parte 3.....	81
Figura: 45 - Quadrado de lado unitário – Parte 1	81
Figura: 46 - Quadrado de lado unitário – Parte 2	82
Figura: 47 - Quadrado de lado unitário – Parte 3	83
Figura: 48 - Quadrado de lado unitário – Parte 4	83
Figura: 49 - Construção do segmento $\sqrt{2}$ – Parte 1.....	84

Figura: 50 - Construção do segmento $\sqrt{2}$ – Parte 2.....	84
Figura: 51 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 1.....	85
Figura: 52 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 2.....	86
Figura: 53 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 3.....	86
Figura: 54 - Construção do segmento $\sqrt{4}$ – Parte 1.....	87
Figura: 55 - Construção do segmento $\sqrt{4}$ – Parte 2.....	87
Figura: 56 - Construção do segmento $\sqrt{4}$ – Parte 3.....	88
Figura: 57 - Construção do segmento $\sqrt{5}$ – Parte 1.....	88
Figura: 58 - Construção do segmento $\sqrt{5}$ – Parte 2.....	89
Figura: 59 - Construção do segmento $\sqrt{5}$ – Parte 3.....	89
Figura: 60 - Construção do segmento $\sqrt{6}$ – Parte 1.....	90
Figura: 61 - Construção do segmento $\sqrt{6}$ – Parte 2.....	91
Figura: 62 - Construção do segmento $\sqrt{6}$ – Parte 3.....	91
Figura: 63 - Construção do polígono amarelo – Parte 1.....	92
Figura: 64 - Construção do polígono amarelo – Parte 2.....	92
Figura: 65 - Construção do polígono amarelo – Parte 3.....	93
Figura: 66 - Área do polígono ABC e CDE.....	93
Figura: 67 - Triângulo equilátero inscrito na circunferência.....	95
Figura: 68 - Mediatriz que passa por B e D.....	96
Figura: 69 - Encontro das duas mediatrizes.....	97
Figura: 70 - Centro do círculo azul.....	97
Figura: 71 - Triângulo retângulo GHB.....	98
Figura: 72 - Triângulo retângulo BHG.....	99
Figura: 73 - Construção do triângulo equilátero – Parte 1.....	100
Figura: 74 - Construção do triângulo equilátero – Parte 2.....	100
Figura: 75 - Círculo circunscrito ao triângulo equilátero – Parte 1.....	101
Figura: 76 - Círculo circunscrito ao triângulo equilátero – Parte 2.....	101
Figura: 77 - Reta Perpendicular – Parte 1.....	102
Figura: 78 - Reta Perpendicular – Parte 2.....	102
Figura: 79 - Interseções entre o círculo c e a reta perpendicular i – Parte 1.....	103
Figura: 80 - Interseções entre o círculo c e a reta perpendicular i – Parte 2.....	103
Figura: 81 - Construção do segmento r – Parte 1.....	104
Figura: 82 - Construção do segmento r – Parte 2.....	105
Figura: 83 - Círculo de raio r com centro em E – Parte 1.....	105
Figura: 84 - Círculo de raio r com centro em E – Parte 2.....	106
Figura: 85 - Círculo tangente internamente ao círculo c – Parte 1.....	106
Figura: 86 - Círculo tangente internamente ao círculo c – Parte 2.....	107
Figura: 87 - Razão entres as áreas solicitadas – Parte 1.....	107
Figura: 88 - Razão entres as áreas solicitadas – Parte 2.....	108
Figura: 89 - Circunferências que possuem centro D e raios de comprimentos 3 e 5.....	109
Figura: 90 - Triângulos ABD e ADB com altura h.....	111
Figura: 91 - Triângulos ABD e ADB com alturas R e r.....	112
Figura: 92 - Áreas do triângulo ABD + ADC com altura h.....	114
Figura: 93 - Áreas do triângulo ABD + ADC com altura r e R.....	114
Figura: 94 - Área do triângulo ABC – parte 1.....	115
Figura: 95 - Área do triângulo ABC – parte 2.....	115
Figura: 96 - Duas circunferências concêntricas – Parte 1.....	117
Figura: 97 - Duas circunferências concêntricas – Parte 2.....	118

Figura: 98 - Tangentes aos círculos	118
Figura: 99 - Segmentos DB e DC	119
Figura: 100 - Dois círculos	120
Figura: 101 - Retas tangentes aos círculos.....	120
Figura: 102 - Omitindo elementos	121
Figura: 103 - Razão DB/DC	121
Figura: 104 - Razão DB/DC - Aproximada	122
Figura: 105 - Problema-modelo.....	122
Figura: 106 - Semicircunferências	123
Figura: 107 - Semicírculos.....	126
Figura: 108 - Área da região em cinza.....	128
Figura: 109 - Construção da reta r	129
Figura: 110 - Sequência de pontos.....	130
Figura: 111 - Construção dos semicírculos – Parte 2	130
Figura: 112 - Construção dos semicírculos – Parte 3	131
Figura: 113 - Área da região sombreada.....	131
Figura: 114 - Área S.....	132
Figura: 115 - Triângulo ABC é retângulo.....	134
Figura: 116 - Raios perpendiculares	135
Figura: 117 - Triângulo ABC tomando os raios com as alturas	135
Figura: 118 - Três triângulos internos ao triângulo ABC	136
Figura: 119 - Área do triângulo do ABC	137
Figura: 120 - Dois círculos tangentes externamente.....	139
Figura: 121 - Interseções com os dois círculos.....	139
Figura: 122 - Construção do triângulo IGH.....	140
Figura: 123 - Raio em função dos lados	141
Figura: 124 - Triângulo ABC dividido em triângulos e trapézio.....	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aproximações de π	68
----------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVAMEC - Ambiente virtual de aprendizagem do Ministério da Educação

BNC- Formação continuada - Base Nacional Comum para a Formação Continuada de Professores da Educação Básica.

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

IES - Instituições de ensino superior

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC - Ministério da Educação

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PAPMEM - Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

RNP - Rede Nacional de Ensino e Pesquisa

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(ABC)$ Área de um triângulo ABC

α Alfa

β Beta

$>$ Maior que

$<$ Menor que

\geq Maior que ou igual

\leq Menor que ou igual

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
2 A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES	22
2.1 PAPMEM.....	24
2.2 PROLÍMPICO.....	25
2.3 AVAMEC.....	26
2.4 CURSO DE GEOGEBRA	26
2.5 PROFMAT.....	27
3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA	30
3.1 Os vários tipos de problemas	31
3.1.1 Exercícios de reconhecimento.....	31
3.1.2 Exercícios de Algoritmos	33
3.1.3 Problemas-padrão.....	34
3.1.4 Problemas-processos ou heurísticos.....	36
3.1.5 Problemas de aplicação	39
3.1.6 Problemas de quebra-cabeça	40
3.2 Como se resolve um problema.....	42
3.3 Área de figuras planas	45
3.3.1 Área do retângulo e do quadrado	46
3.3.2 Área do paralelogramo	52
3.3.3 Área do triângulo.....	54
3.3.4 Área do trapézio	54
3.3.5 Área do círculo	66
3.3.6 Áreas de setores.....	69
4 UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PAUTADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM/DE ÁREA DE FIGURAS PLANA	72
4.1 Resolução comentada de problema modelo 1.....	72
4.2 Resolução comentada de problema modelo 2.....	94
4.3 Resolução comentada de problema modelo 3.....	109
4.4 Resolução comentada de problema modelo 4.....	123
4.5 Resolução comentada de problema modelo 5.....	133
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	143

REFERÊNCIAS	144
ANEXO A - LISTA COM PROBLEMAS DE ÁREAS DE/COM FIGURAS PLANAS..	147

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como foco principal propor uma formação continuada para professores de Matemática, centrada na resolução de problemas envolvendo áreas de figuras planas utilizando o software GeoGebra. Considerando o cenário atual, a formação continuada dos professores de Matemática é essencial para o ensino dessa disciplina, uma vez que é necessário que os educadores se apropriem das novas tecnologias e práticas pedagógicas.

Neste sentido, o GeoGebra é um exemplo de nova tecnologia que se destaca por ser um software dinâmico de matemática adequado para todos os níveis de educação, reunindo em uma única plataforma geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos. No ensino de geometria, o GeoGebra pode ser um grande aliado, pois incentiva professores e alunos a explorarem novas possibilidades de aprendizagem. Pois, muitas vezes, o ensino de geometria é negligenciado em favor de outros conteúdos, e com a integração do GeoGebra, o ensino pode se tornar mais prático, dinâmico e significativo.

Nesta perspectiva, focar na resolução de problemas com o uso de software é uma alternativa para formação continuada do professor, uma vez que atender à crescente demanda da sociedade por alternativas que melhorem a compreensão dos conceitos matemáticos e torne o ensino mais dinâmico e envolvente. Neste sentido, Polya (2006, p. 4) afirma que:

à resolução de problemas é uma habilidade prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilidade por imitação e prática. Ao tentar nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, ao final, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus, e por fim, aprendemos a resolver problemas resolvendo.

Ainda segundo Polya (apud Dante, 2007, p.7), “a resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o papel de Rhind”. Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) destaca que os alunos devem desenvolver competências e habilidades em Matemática, com ênfase na resolução de problema. Para Onuchic (2014), a resolução de problemas é considerada o “coração” da atividade matemática, atuando como uma força motriz para a construção de novos conhecimentos. Da mesma forma, esses novos conhecimentos possibilitam a formulação e resolução de problemas desafiadores e significativos.

De acordo com Dante (2007, p.11 e seg), a resolução de problemas tem por objetivos:

Fazer o aluno pensar produtivamente. Desenvolver o raciocínio do aluno. Ensinar o aluno pensar produtivamente. Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática. Tornar as aulas de Matemática mais interessante e

desafiadora. Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas. Dar uma boa base matemática às pessoas.

Em conformidade com a (BNC-Formação Continuada) (Brasil, 2020, p.2), em seu artigo 4, no qual afirma que:

A Formação Continuada de Professores da Educação Básica é entendida como componente essencial da sua profissionalização, na condição de agentes formativos de conhecimentos e culturas, bem como orientadores de seus educandos nas trilhas da aprendizagem, para a constituição de competências, visando o complexo desempenho da sua prática social e da qualificação para o trabalho.

Assim, ao integrar os conceitos de resolução de problemas proposta por Polya, Onuchic e Dante, utilizar o software GeoGebra, as diretrizes da BNCC e a (BNC-Formação Continuada) se constitui numa poderosa ferramenta para o desenvolvimento das competências e habilidades dos professores e alunos.

Desta forma, discutir a formação continuada do professor de Matemática justifica-se pela necessidade constante de aprimoramento profissional e pela incorporação de novas tendências e técnicas de ensino. Visto que a qualificação profissional é indispensável para a melhoria das práticas pedagógicas.

Nesse contexto, esta pesquisa estabeleceu como problema de pesquisa: como a formação continuada pode impactar a prática diária do professor de Matemática quando pautada na resolução de problemas com a utilização do software GeoGebra? E como objetivo geral: propor uma Formação Continuada para o Professor de Matemática, centrada na Resolução de Problemas de/com Áreas de Figuras Planas com a utilização do Software GeoGebra. Para alcançar este objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Proporcionar ao professor conhecimentos aprofundados sobre áreas de figuras planas, incluindo conceitos, teoremas e propriedades relevantes.
- Capacitar o professor na identificação e interpretação de problemas que envolvam situações geométricas, promovendo a integração entre teoria e aplicações práticas.
- Fornecer ferramentas pedagógicas e estratégias de ensino que facilitem a transmissão dos conceitos geométricos.
- Estimular o método de resolução de problemas proposto por Polya para promover a construção coletiva do conhecimento.
- Promover a atualização contínua do professor em relação às tendências e inovações do ensino utilizando o software GeoGebra na prática docente.

No objetivo geral, os termos ‘de’ e ‘com’ possuem significados distintos. A expressão ‘Problemas de Áreas de Figuras Planas’ refere-se a situações em que é solicitado diretamente o

cálculo da área da figura plana. Já a expressão ‘Problemas com Áreas de Figuras Planas’ refere-se a questões em que, embora o cálculo de áreas não seja explicitamente mencionado, os conceitos de área são utilizados para a resolução do problema.

A coleta de dados apresentada nesta dissertação foi realizada por meio de pesquisa documental. Foram selecionados problemas relacionados a áreas de figuras planas, extraídos de diferentes fontes: do PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio) de janeiro de 2024, da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) – nível 3, 1ª fase, abrangendo o período de 2005 a 2023 – e do capítulo 5, que trata de áreas, do livro : Lima, Elon Lages,[et al.], **Temas e problemas elementares**, 2ª edição, Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

A estrutura desta dissertação está organizada em capítulos. No Capítulo 1, apresentamos a introdução, delineando a problemática que motivou nossa pesquisa. No Capítulo 2, abordamos a formação continuada do professor de Matemática, destacando sua relevância para o atual cenário do ensino da disciplina. Discutimos diversos programas de formação continuada, como o PAPMEM, PROOLÍMPICO, AVAMEC, Curso de GeoGebra e o PROFMAT. Também mencionamos várias dissertações produzidas por alunos do PROFMAT, minicursos promovidos pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e os livros da Coleção do Professor de Matemática, amplamente reconhecidos como fontes de estudo de alta qualidade. Vale destacar que essas coleções são elaboradas por professores renomados na área de Matemática.

No Capítulo 3, discutimos a resolução de problemas de Geometria Plana. Iniciamos com a definição do conceito de Problema, destacando os diferentes tipos de Problemas apresentados por Luiz Roberto Dante em sua obra: DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2007. Em seguida, exploramos a metodologia de resolução de problemas proposta por George Polya, conforme descrito em sua obra: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Posteriormente, abordamos os conceitos de áreas de figuras planas, apresentando propriedades e teoremas relevantes, alguns dos quais são pouco explorados no contexto escolar. Além disso, utilizamos o software GeoGebra para realizar construções e verificar propriedades e teoremas, fornecendo links para algumas das construções, permitindo uma visualização mais dinâmica.

No Capítulo 4, apresentamos uma proposta de formação continuada baseada na resolução de problemas relacionados às áreas de figuras planas, fundamentada na metodologia de Polya. A quarta fase desse método incorpora o uso do software GeoGebra, que possibilita

tanto a construção quanto a validação das soluções. Para ilustrar a aplicação prática, desenvolvemos cinco problemas-modelo, estruturados em diálogos fictícios que exploram interações entre professor e aluno, bem como entre professor-formador e professor-aluno.

Ao final da quarta etapa da metodologia de Polya, fornecemos a resolução oficial dos problemas-modelo. E logo em seguida, realizamos apontamentos críticos sobre a resolução dos problemas-modelo. É importante destacar que esses problemas são variados, cada um abordando uma especificidade dentro das quatro fases de Polya e da utilização do GeoGebra. Um aspecto crucial para esta dissertação é que, na quarta etapa, ao utilizar o GeoGebra para verificar as respostas por meio da construção das figuras dos problemas-modelo, o processo se torna mais dinâmico e interativo.

A partir da pesquisa documental, além da seleção dos cinco problemas-modelos destinados à formação, organizamos, no Anexo A, uma coletânea de problemas sobre áreas de figuras planas. Essa compilação reúne questões extraídas da OBMEP (2005 a 2023), do capítulo 5 do livro *Temas e Problemas Elementares*, publicado pela SBM, e do PAPMEM de janeiro de 2024, todas acompanhadas de seus respectivos gabaritos.

Assim, esta dissertação pretende contribuir significativamente para a melhoria na formação continuada dos professores de Matemática, promovendo uma abordagem inovadora que integra teoria e prática por meio da Resolução de Problemas proposta por Polya e utilizando ferramentas tecnológicas como o GeoGebra.

2 A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

Neste capítulo, apresentaremos conceitos de diversos autores sobre a importância da formação continuada de professores. Abordando os principais programas de formação continuada para professores de matemática.

Na formação inicial, o professor não adquire todos os conhecimentos necessários para atender às diversas necessidades de uma sala de aula, uma vez que estas variam conforme cada realidade. Por isso, é fundamental que o(a) professor(a) continue estudando, participando de formações continuadas, cursos, programas, capacitações e aperfeiçoamentos. Esse processo contínuo permite que ele(a) (re)aprenda e (re)signifique suas práticas diárias, aprimorando seus conhecimentos e habilidades pedagógicas.

Nesta perspectiva a (BNC-Formação Continuada) (BRASIL,2020, p.6), em seu capítulo IV, afirma que

Art. 13 A Formação Continuada em Serviço deve oferecer aos docentes a oportunidade de aprender, junto com seus colegas de trabalho, com suporte de um formador experiente (mentoria ou tutoria), compartilhando aprendizagens já desenvolvidas, atendendo ao disposto no Parágrafo único do artigo 61 da LDB.

Art. 14 A programação da Formação Continuada em Serviço deve ser articulada com programas e cursos flexíveis e modulados, que permitam a complementação, atualização ou aperfeiçoamento de seu processo de desenvolvimento profissional.

Neste sentido, segundo (IMBERNÓN, 2010), a formação continuada deve integrar o desenvolvimento profissional que ocorre ao longo da carreira docente, possibilitando dar um novo significado à prática pedagógica e ressignificando o trabalho do professor. Trazendo novas questões e buscando compreendê-las sob a perspectiva teórica e prática, permitindo articular novos conhecimentos na construção da docência, em diálogo com todos os envolvidos no processo formativo.

Segundo Libâneo (2002), o professor atua como mediador entre o aluno e o conhecimento, auxiliando no desenvolvimento do pensamento, das habilidades e das atitudes dos alunos. É fundamental que o professor seja competente no uso de métodos pedagógicos, promovendo o hábito do raciocínio científico e a autonomia do pensamento, tornando seu papel muito importante para o educando

Desta forma, a formação continuada torna-se essencial para complementar e aprofundar a preparação dos docentes. Pois de acordo com Rodrigues e Esteves (1992), a formação de professores não se esgota na formação inicial, pois deve ser um processo contínuo ao longo de toda a carreira, possibilitando a renovação e o aperfeiçoamento profissional".

Segundo Tardif (2008), a formação continuada deve ser vista como uma prática reflexiva que promove o desenvolvimento profissional contínuo. Ele argumenta que os professores constroem seus saberes não apenas nas instituições de ensino superior, mas também através das experiências vividas no cotidiano escolar.

Ainda de acordo com Tardif (2002), a formação contínua dos professores é um processo que deve estar alinhado às necessidades e contextos específicos da prática docente. Com isso, a (BNC-Formação Continuada) (BRASIL,2020, p.13), ressaltar nas suas competências específicas e habilidades da dimensão da prática profissional – institucional que o professor deve:

“2b.2.6 Planejar atividades integradas que levem em consideração as necessidades de desenvolvimento integral dos alunos; e 2b.2.7 Compartilhar suas práticas profissionais, dialogando com os pares sobre assuntos pedagógicos, inclusive com uso de recursos tecnológicos.”

Neste contexto, a formação continuada do professor de matemática é essencial na educação, especialmente com a crescente presença de novas tecnologias na vida dos estudantes. No cenário educacional brasileiro, é crucial que os docentes conheçam os principais programas de formação continuada para professores de matemática, capacitando-os a enfrentar os desafios pedagógicos e tecnológicos do século XXI.

A (BNC – Formação continuada) (Brasil,2020, p.6) destaca no capítulo III como podem ocorrer estes cursos e formações continuadas:

Art. 9º Cursos e programas flexíveis, entre outras ações, mediante atividades formativas diversas, presenciais, a distância, semipresenciais, de forma híbrida, ou por outras estratégias não presenciais, sempre que o processo de ensino assim o recomendar, visando ao desenvolvimento profissional docente, podem ser oferecidos por IES, por organizações especializadas ou pelos órgãos formativos no âmbito da gestão das redes de ensino, como:

I - Cursos de Atualização, com carga horária mínima de 40 (quarenta) horas;

II - Cursos e programas de Extensão, com carga horária variável, conforme respetivos projetos;

III - Cursos de Aperfeiçoamento, com carga horária mínima de 180 (cento e oitenta) horas;

IV - Cursos de pós-graduação *lato sensu* de especialização, com carga horária mínima de 360 (trezentas e sessenta) horas, de acordo com as normas do CNE;

V - Cursos ou programas de Mestrado Acadêmico ou Profissional, e de Doutorado, respeitadas as normas do CNE, bem como da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Neste contexto, apresentamos alguns dos principais cursos de formação continuada para professores de matemática.

2.1 PAPMEM

O Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM consiste em treinamento gratuito para professores de matemática de todo o Brasil. É realizado desde 1990 abordando assuntos relativos ao Ensino Médio. O programa é realizado durante uma semana em tempo integral, nos meses de janeiro e julho, durante o recesso escolar.

O Programa visa aprimorar os conhecimentos dos professores de Matemática do Ensino Médio, mantendo-os atualizados com os novos temas dos currículos e com o uso de tecnologias no ensino.

Na edição de janeiro de 2024, o projeto foi coordenado pelo Prof. Eduardo Wagner e contou com a colaboração de oito palestrantes, todos reconhecidos por sua ampla experiência e dedicação ao ensino. Durante a inscrição, os candidatos puderam optar por uma das duas modalidades:

1. Participação:

Nesta modalidade, o professor acompanha o evento exclusivamente de forma remota. As aulas, realizadas entre 22 e 25 de janeiro, são disponibilizadas no canal do YouTube do IMPA. Diariamente, o participante deve assistir às aulas, resolver os seis exercícios propostos e enviar as respostas por meio de um formulário eletrônico, recebido no e-mail cadastrado no sistema institucional. Ao final da edição, será concedido um certificado de participação, desde que os quatro formulários sejam enviados no prazo estipulado e que o professor alcance pelo menos $2/3$ de acertos nas respostas.

2. Participação com Desempenho:

Nesta modalidade, o professor participa de forma híbrida. Entre os dias 22 e 25 de janeiro, deve acessar o canal do YouTube do IMPA para assistir às aulas diárias, resolver os seis exercícios propostos a cada dia e enviar as respostas por meio de um formulário eletrônico, enviado ao e-mail cadastrado no sistema institucional. Além disso, no dia 26 de janeiro (sexta-feira), o professor deve comparecer presencialmente ao local selecionado no momento da inscrição para realizar uma prova final.

A realização da avaliação presencial acontecerá no dia 26/01, das 9h às 10h40, no polo selecionado pelo professor no momento da candidatura. A nota do professor nessa modalidade será composta pela soma dos acertos nas questões diárias (máximo de 24 pontos) com a nota da prova discursiva (máximo de 76 pontos). Caso a pontuação final seja igual ou superior a 60, o professor terá direito ao certificado de participação com desempenho, e sua pontuação será registrada no certificado.

Este programa, idealizado por autores como Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto de Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, resultou na criação de uma série de livros destinados especialmente aos professores de Ensino Médio, publicados na Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Dentre eles, podemos destacar A Matemática do Ensino Médio – vol. 1, vol. 2 e vol. 3, sendo o volume 2 descrito na seguinte referência: Lima, Elon Lages, [et al.], A Matemática do Ensino Médio, 5ª edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998, v. 2. As inscrições podem ser realizadas pelo link, disponível em: <https://institucionalimpa.br/pub/login.action>. Acesso em: 5 de jul. de 2023.

2.2 PROLÍMPICO

O PROLÍMPICO é focado em temas relacionados às olimpíadas de matemática, o programa é dividido em dois níveis independentes, englobando os níveis Fundamental e Médio. Cada edição é realizada em um único módulo, geralmente nos meses de fevereiro e agosto. Critérios para obtenção do certificado: Somente os inscritos que completarem o formulário de avaliação até data marcada receberão o certificado de participação em formato digital.

Níveis Fundamental:

- Nível A: Fundamental 1 (3º ao 5º ano)
- Nível 1: 6º e 7º ano
- Nível 2: 8º e 9º ano

Nível Médio:

- Nível 3: Ensino Médio

Os professores podem se inscrever em um ou mais níveis. Todos os professores inscritos receberão um convite por e-mail para participar das aulas pela plataforma Google Classroom. As aulas de todos os níveis serão disponibilizadas no YouTube do IMPA: Link das aulas, disponível em: <https://www.youtube.com/user/impabr>. Acesso em: 5 de jul. de 2023.

As oficinas de problemas e avaliações dos minicursos ocorrerão na plataforma Google Classroom. Somente os professores que completarem os formulários receberão certificado de participação em formato digital. As inscrições são realizadas pelo link, disponível em: <https://institucionalimpa.br/pub/login.action>. Acesso em: 5 de jul. de 2023

2.3 AVAMEC

O AVAMEC é um ambiente virtual colaborativo de aprendizagem que permite a concepção, administração e desenvolvimento de diversos tipos de ações formativas, como cursos à distância, complemento a cursos presenciais, projetos de pesquisa, projetos colaborativos e diversas outras formas de apoio educacional à distância ao processo ensino-aprendizagem.

É nesta plataforma que os cadernos pedagógicos também estão disponíveis, por meio do CARD “Relação dos Cadernos do Percurso Pedagógico”, cuja utilização estão voltadas para a Capacitação de Professores, Monitores e demais profissionais que irão atuar no Acompanhamento Personalizado das Aprendizagens. As inscrições são realizadas pelo link, disponível em: <https://avamec.mec.gov.br/#/>. Acesso em: 5 de jul. de 2023

2.4 CURSO DE GEOGEBRA

O Curso de GeoGebra é um programa gratuito de difusão de conhecimento, realizado na modalidade a distância e promovido pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Campus de Apucarana. Atualmente, está em sua 22ª edição.

Este programa é voltado ao aperfeiçoamento de professores de Matemática, oferecido na modalidade a distância. O público-alvo inclui estudantes de graduação em Matemática, estudantes de pós-graduação Lato ou Stricto Sensu em Matemática, Ensino de Matemática ou Educação Matemática, além de professores que ensinam Matemática em quaisquer níveis de ensino.

Para se candidatar a uma vaga, os interessados deverão preencher um formulário online disponível apenas em 07 de abril de 2024 (domingo), das 17h às 19h (horário de Brasília). O formulário pode ser acessado a partir do site, disponível em: <https://ogeogebra.com.br/site/edital.php>. Acesso em: 5 de jul. de 2023

No formulário, os candidatos deverão fornecer as seguintes informações: nome, CPF, data de nascimento, país, cidade, estado, e-mail, formação e atuação profissional. Além disso, será necessário concordar com os termos de inscrição. Após preencher todos os campos, o candidato deve clicar em "ENVIAR" para registrar sua solicitação no sistema online.

Os candidatos receberão um e-mail de confirmação da solicitação de inscrição em até 24 horas após a conclusão do processo. O período de solicitação de inscrição, que termina às

19h (horário de Brasília) do dia 07 de abril de 2024, poderá ser encerrado antecipadamente caso o número de inscritos atinja 150% do total de vagas, ou seja, 750 solicitações.

2.5 PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um curso de pós-graduação *stricto sensu* em Matemática, reconhecido e avaliado pela Capes, credenciado pelo Conselho Nacional de Educação – CNE, validado pelo Ministério da Educação, e conduzindo ao título de Mestre. É um curso semipresencial, realizado por Instituições de Ensino Superior associadas em uma Rede Nacional e coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Cujo objetivo é proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. As inscrições devem ser feitas na página do PROFMAT, disponível em: <https://profmatt-sbm.org.br/p>. Acesso em: 5 de jul. de 2023, na internet, onde também é possível encontrar o edital do programa no período das inscrições, geralmente no início do 2 semestre do ano em curso.

Além disso, destacamos os trabalhos de alguns alunos do PROFMAT, como Sousa (2023), Guimarães (2023), Ferreira (2023), Modolo (2023) e Sousa (2020), que são excelentes fontes de formação continuada. Nesses trabalhos, também é possível encontrar informações sobre outros programas de formação continuada.

A seguir, apresentamos um quadro comparativo que destaca as principais finalidades e características de cada programa da formação continuada.

Programa	Foco	Modalidade	Período	Características e Particularidades
PAPMEM	Aperfeiçoamento de professores de Matemática do Ensino Médio	Presencial e Remota (Participação e Participação com Desempenho)	Janeiro e julho (semana integral)	Aula remota ou híbrida com avaliação presencial. Certificação baseada em participação e desempenho. Enfoque em novos temas do

				currículo e uso de tecnologias.
PROLÍMPICO	Preparação para Olimpíadas de Matemática	Remota (aulas no YouTube e Google Classroom)	Fevereiro e agosto	Dividido em níveis (Fundamental e Médio). Aulas e oficinas online. Certificação digital após a conclusão dos formulários de avaliação.
AVAMEC	Capacitação de professores e apoio ao ensino-aprendizagem	A distância (ambiente virtual colaborativo)	Contínuo	Plataforma de aprendizagem colaborativa para cursos, projetos e cadernos pedagógicos. Acesso a materiais de apoio para capacitação.
Curso de GeoGebra	Aperfeiçoamento de professores de Matemática	A distância (inscrição em formulário online)	Contínuo	Foco no uso do GeoGebra para o ensino de Matemática, com inscrições abertas em um período específico. Certificado após conclusão.
PROFMAT	Pós-graduação em Matemática para a Educação Básica	Semipresencial (Rede Nacional de Instituições de Ensino Superior)	Contínuo	Mestrado Profissional em Matemática, com objetivo de qualificar professores de Matemática para o exercício da docência na Educação Básica.

No próximo capítulo, abordaremos o conceito de problema e suas diversas categorias, seguido pela Resolução de Problemas proposta por Polya. Em seguida, realizaremos um

aprofundamento sobre área das figuras, com ênfase em aplicações práticas e no uso do GeoGebra.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo destacamos a importância da resolução de problemas sob a perspectiva da metodologia de Polya. Definimos o conceito de problema e abordamos os diversos tipos de problemas propostos por Dante, ressaltando sua consonância com os objetivos educacionais estabelecidos pela BNCC e pela BNC-Formação Continuada. Também enfatizamos o conceito de área, explorando as principais áreas de figuras planas e destacando propriedades pouco usuais no contexto escolar, além de algumas aplicações práticas. Adicionalmente, utilizamos as tecnologias como o software GeoGebra para construções e verificações de propriedades e das atividades práticas.

A importância da resolução de problemas nos processos de ensino e aprendizagem é amplamente discutida em pesquisas, com contribuições significativas de estudiosos como Polya (2006) e Onuchic (1999). Mas o que é um problema? Segundo Onuchic (1999, p.215) considera um problema como “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Da mesma forma, Dante (2007, p. 9) explica que um problema “É qualquer situação que exija o pensamento do indivíduo para solucioná-lo”.

Vejamos alguns exemplos:

1. O seu problema é está com fome? Deseja então conseguir comida e pensa em meios conhecidos de obtê-la.
2. Se seu problema é de Geometria? Deseja então traçar um triângulo e pensa em processos conhecidos de fazê-lo, ou traçar uma(s) reta(s) convenientemente, ou lembrar de algum teorema ou propriedade que auxilie na solução.
3. Tem um problema qualquer? Deseja então encontrar uma certa incógnita e pensa em maneiras conhecidas de encontrar essa ou outra incógnita semelhante.

Como mencionado na introdução, Dante (2007, p. 11 e seg) apresenta sete objetivos importantes ao ensinar resolução de problemas:

1. Estimular o pensamento produtivo dos alunos.
2. Desenvolver o raciocínio dos alunos.
3. Ensinar os alunos a enfrentar situações novas.
4. Oferecer oportunidades para o desenvolvimento através das aplicações matemáticas.
5. Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.
6. Equipar os alunos com estratégias para resolver problemas.
7. Proporcionar uma base matemática sólida.

Ainda segundo Dante (2007, p. 15), afirma que “mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que devem tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas”.

Para isso, é essencial que os estudantes sejam matematicamente alfabetizados e saibam como resolver os problemas de seu cotidiano.

3.1 Os vários tipos de problemas

3.1.1 Exercícios de reconhecimento

Para (Dante,2007), são exercícios para ajudar os alunos a identificarem e compreenderem conceitos e padrões matemáticos. Os quais são de fundamental importância para a introdução de novos tópicos e para reforçar o entendimento de conceitos previamente ensinados. Eles servem como base para o desenvolvimento de habilidades mais complexas em resolução de problemas.

Características dos Exercícios de Reconhecimento:

- **Identificação de Conceitos:** Auxiliam os alunos a identificar e nomear figuras, padrões, propriedades ou operações matemáticas.
- **Reforço de Aprendizagem:** Reforçam a memorização e a compreensão de conceitos básicos, preparando os alunos para problemas mais complexos.
- **Base para Generalização:** Servem como fundamento para a generalização de conceitos e para a resolução de problemas que requerem uma aplicação mais profunda do conhecimento.

(Dante, 2007) enfatiza que exercícios de reconhecimento são essenciais para garantir que os alunos compreendam e memorizem os conceitos fundamentais da matemática.

Exemplo 1: Reconhecimento de Figuras Geométricas

Enunciado: Identifique e classifique as seguintes figuras geométricas:

Identificação	Classificação
Uma figura com três lados e três ângulos.	Triângulo
Uma figura com quatro lados iguais e quatro ângulos retos.	Quadrado
Uma figura com quatro lados, dois lados opostos de maior comprimento e dois lados opostos de menor comprimento, todos formando ângulos retos entre si.	Retângulo
Uma figura redonda sem lados ou ângulos.	Círculo

Exemplo 2: Reconhecimento de Propriedades de Números

Enunciado: Identifique se os seguintes números são primos ou compostos:

Número	Primo	Composto
7	Sim	Não
12	Não	Sim
19	Sim	Não
20	Não	Sim

Exemplo 3: Reconhecimento de Operações Matemáticas

Enunciado: Identifique a operação matemática que deve ser usada para resolver os seguintes problemas:

Problema	Operação
Maria tem 3 maçãs e ganha mais 5. Quantas maçãs Maria tem agora?	Adição
João tinha 10 laranjas e deu 3 para seu amigo. Quantas laranjas ele tem agora?	Subtração
Uma caixa contém 4 fileiras de 6 bolinhas. Quantas bolinhas há na caixa?	Multiplicação
Um grupo de 15 estudantes é dividido igualmente em 3 equipes. Quantos estudantes há em cada equipe?	Divisão

Desta forma, os exercícios de reconhecimento não apenas ajudam na memorização de conceitos, mas também preparam os alunos para problemas mais complexos ao estabelecer uma base sólida de conhecimento (Dante, 2007). Por isso que estes exercícios são úteis nas fases iniciais do aprendizado, onde a familiarização com os conceitos é fundamental.

Portanto, os exercícios de reconhecimento desempenham um papel muito importante na prática diária do professor de matemática, pois ajudam os alunos a identificar e compreender conceitos matemáticos básicos, fornecendo uma base sólida para o desenvolvimento de habilidades e competências.

3.1.2 Exercícios de Algoritmos

Os exercícios de algoritmos têm as seguintes características:

1. Passos Sequenciais: Requerem que os alunos sigam uma sequência definida de passos ou instruções para chegar à solução.
2. Lógica e Procedimentos: Enfatizam a lógica e os procedimentos necessários para resolver problemas matemáticos.
3. Desenvolvimento de Habilidades Procedimentais: Ajudam os alunos a desenvolver habilidades procedimentais, como cálculos aritméticos, operações algébricas, ou manipulação de dados.

Segundo Dante (2007), os exercícios de algoritmos são fundamentais para a construção do conhecimento matemático, pois permitem que os alunos pratiquem e internalizem procedimentos sistemáticos. Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 1: Cálculo da Média Aritmética

Objetivo: Calcular a média aritmética de uma lista de números.

Passos do Algoritmo:

1. Definir a lista de números.
2. Somar todos os números da lista.
3. Dividir a soma pelo número de elementos na lista.
4. Exibir o resultado.

Exemplo 1: Lista de números: 5, 8, 12, 15

- Passo 1: $5+8+12+15 = 40$
- Passo 2: Número de elementos na lista: 4
- Passo 3: $\frac{40}{4} = 10$
- Resultado: A média aritmética é 10.

Exemplo 2: Resolução de uma Equação Linear

Objetivo: Resolver uma equação linear simples do tipo $ax+b = 0$

Passos do Algoritmo:

1. Isolar a variável x na equação.
2. Subtrair b de ambos os lados da equação.
3. Dividir ambos os lados da equação por a , com $a \neq 0$.
4. Exibir o valor de x .

Exemplo:

- Equação: $3x+6 = 0$
- Passo 1: $3x = -6$
- Passo 2: $x = -6/3$
- Passo 3: $x = -2$
- Resultado: A solução é $x = -2$

Exemplo 3: Conversão de Graus Celsius para Fahrenheit

Objetivo: Converter uma temperatura de graus Celsius para Fahrenheit.

Passos do Algoritmo:

1. Definir a temperatura em graus Celsius.
2. Multiplicar a temperatura por $9/5$.
3. Adicionar 32 ao resultado.
4. Exibir a temperatura em Fahrenheit.

Exemplo: Temperatura em Celsius: 25°C

- Passo 1: $25 \times 9/5 = 45$
- Passo 2: $45 + 32 = 77$
- Resultado: 25°C é igual a 77°F .

Segundo (Dante,2005), esses exercícios de algoritmos são fundamentais para a construção de uma base sólida em matemática, pois ajudam os alunos a desenvolver um entendimento estruturado e lógico dos procedimentos matemáticos. Porque eles são especialmente importantes na aprendizagem de operações complexas e no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas.

3.1.3 Problemas-padrão

Segundo Dante (2007), um problema-padrão é um tipo de problema matemático que se caracteriza por ter uma estrutura e uma solução sistemáticas e que pode ser resolvido usando métodos ou procedimentos bem estabelecidos. Esses problemas são frequentemente usados para ensinar e praticar conceitos matemáticos, uma vez que sua resolução segue um conjunto definido de etapas.

Características dos Problemas-Padrão:

1. Estrutura Definida: Possuem uma estrutura clara e uma solução que pode ser sistematicamente aplicada.
2. Métodos Estabelecidos: Utilizam métodos e fórmulas conhecidos para encontrar a solução.

3. Aplicabilidade: São úteis para praticar habilidades matemáticas e conceitos específicos.

Exemplos de Problemas-Padrão Simples

Problema-Padrão Simples 1: Cálculo da Área de um Quadrado

Descrição: Calcular a área de um quadrado dado o comprimento de seu lado.

Enunciado: Um quadrado tem um lado de 6 cm. Qual é a área do quadrado?

Solução:

1. Definir a fórmula: $\text{Área} = l^2$
2. Substituir o valor: $6^2 = 36$
3. Resultado: A área do quadrado é 36 cm².

Problema-Padrão Simples 2: Cálculo do Perímetro de um Retângulo

Descrição: Encontrar o perímetro de um retângulo com dados comprimento e largura.

Enunciado: Um retângulo tem comprimento de 8 cm e largura de 3 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

Solução:

1. Definir a fórmula: $\text{Perímetro} = 2 \times (\text{comprimento} + \text{largura})$
2. Substituir os valores: $2 \times (8+3) = 2 \times 11 = 22$
3. Resultado: O perímetro do retângulo é 22 cm.

Problema-Padrão Simples 3: Solução de uma Equação Linear

Descrição: Resolver uma equação de primeiro grau.

Enunciado: Resolva a equação $2x + 3 = 11$

Solução:

1. Isolar a variável:

Subtrair 3 de ambos os lados: $2x = 8$

Dividir ambos os lados por 2: $x = 4$

2. Resultado: A solução da equação é $x = 4$

Exemplos de Problemas-Padrão Composto

Problema-Padrão Composto 1: Cálculo da Área de um Trapézio

Descrição: Encontrar a área de um trapézio dado a base maior, base menor e altura.

Enunciado: Um trapézio tem bases de 10 cm e 6 cm e altura de 5 cm. Qual é a área do trapézio?

Solução:

1. Definir a fórmula: $\text{Área} = \frac{1}{2} \times (\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}$

2. Substituir os valores: $1/2 \times (10 + 6) \times 5 = 12 \times 16 \times 5 = 40$
3. Resultado: A área do trapézio é 40 cm^2 .

Problema-Padrão Composto 2: Volume de um Cilindro

Descrição: Calcular o volume de um cilindro dado o raio da base e a altura.

Enunciado: Um cilindro tem raio de 4 cm e altura de 10 cm. Qual é o volume do cilindro?

Solução:

1. Definir a fórmula: $Volume = \pi \times raio^2 \times altura$
2. Substituir os valores: $\pi \times 4^2 \times 10 = \pi \times 16 \times 10 = 160\pi$
3. Resultado: o volume do cilindro é $160\pi \text{ cm}^3$ (aproximadamente $502,65 \text{ cm}^3$)

Problema-Padrão Composto 3: Cálculo de Desconto em uma Compra

Descrição: Calcular o valor final de uma compra após aplicar um desconto.

Enunciado: Um produto custa R\$ 120,00 e está com um desconto de 15%. Qual é o valor final a ser pago?

Solução:

1. Calcular o valor do desconto:

Desconto = 15% de R\$ 120,00 $\rightarrow 0,15 \times 120 = 18$ reais

2. Subtrair o desconto do valor original:
3. Valor final = R\$ 120,00 - R\$ 18,00 = R\$ 102,00.

Resultado: O valor final a ser pago é R\$ 102,00.

3.1.4 Problemas-processos ou heurísticos

Segundo Dante (2007), um problema-processo ou problema-heurístico é um tipo de problema que não possui um caminho claro e preestabelecido para a solução. Em vez disso, esses problemas requerem que o aluno utilize estratégias variadas e criativas para chegar a uma solução. Eles incentivam o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolver problemas de maneira inovadora. Esses problemas podem envolver várias etapas e requerem um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos, além de habilidades de análise e síntese.

Características dos Problemas-Processo ou Heurísticos:

- Solução Não Imediata: Não há uma fórmula ou método direto para resolver o problema; é necessário explorar diferentes estratégias.
- Exploração e Descoberta: Incentivam a exploração de diferentes abordagens e a descoberta de soluções.

- Desenvolvimento de Habilidades: Ajudam a desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.
- Problema-Processo ou Heurístico 1: O Problema do Quadrado Mágico
- Descrição: Preencher um quadrado mágico, onde a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal deve ser a mesma.

Enunciado: Você deve completar um quadrado mágico 3x3 usando os números de 1 a 9. O quadrado mágico deve ser preenchido de tal forma que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal seja igual a 15.

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar que a soma desejada para linhas, colunas e diagonais é 15 e que a soma total dos números de 1 a 9 é 45.

- Planejamento:

Usar uma abordagem sistemática para testar diferentes arranjos dos números.

Considerar as propriedades dos quadrados mágicos e como os números podem ser distribuídos.

- Execução:

Preencher o quadrado tentando diferentes combinações e ajustando conforme necessário até que todas as linhas, colunas e diagonais somem 15.

- Verificação:

Confirmar que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é igual a 15.

- Resultado:

O quadrado mágico é preenchido corretamente com a soma de 15 para todas as linhas, colunas e diagonais.

Problema-Processo ou Heurístico 2: O Problema da Troca de Moedas

Descrição: Encontrar a combinação mínima de moedas para alcançar um valor específico.

Enunciado: Você tem moedas de 1 real, 5 reais e 10 reais e precisa formar o valor de R\$ 23,00. Qual é a combinação mínima de moedas para alcançar esse valor?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar os tipos de moedas e o valor a ser alcançado.

- Planejamento:

Utilizar estratégias de programação dinâmica ou uma abordagem gulosa para testar diferentes combinações de moedas que somam o valor total.

- Execução:

Testar combinações diferentes para minimizar o número total de moedas usadas, começando pelas de maior valor e depois utilizando as menores, conforme necessário.

- Verificação:

Confirmar que a combinação encontrada é a que utiliza o menor número total de moedas.

- Resultado: A combinação mínima de moedas é encontrada para formar o valor de R\$ 23,00.

Exemplo de Solução:

2 moedas de 10 reais = R\$ 20,00

1 moeda de 5 reais = R\$ 5,00

3 moedas de 1 real = R\$ 3,00

Total: 6 moedas

Problema-Processo ou Heurístico 3: O Problema da Sequência de Números

Descrição: Determinar o próximo número em uma sequência baseada em um padrão definido.

Enunciado: Você tem a sequência de números: 2, 6, 12, 20, 30. Qual é o próximo número da sequência?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar o padrão ou fórmula que define a sequência.

- Planejamento:

Analisar a diferença entre os termos da sequência e buscar um padrão. Testar diferentes fórmulas ou abordagens para encontrar o próximo número.

- Execução:

Aplicar a fórmula ou padrão identificado para calcular o próximo número na sequência.

- Verificação:

Confirmar que o próximo número calculado segue o padrão identificado.

- Resultado:

O próximo número na sequência é determinado.

Exemplo de Solução:

- Identificar que a sequência é formada pela soma de números consecutivos: $n^2 + n$.

- Para o quinto termo (30), usamos $5^2 + 5 = 30$.
- Para encontrar o próximo número (sexto termo), usamos $6^2 + 6 = 42$.

Portanto, o próximo número na sequência é 42.

3.1.5 Problemas de aplicação

Segundo Dante (2007), problemas de aplicação são aqueles que envolvem a aplicação de conceitos matemáticos para resolver situações reais e práticas, e geralmente exigem a mobilização de vários conhecimentos matemáticos para encontrar uma solução. Aqui estão dois exemplos de problemas de aplicação seguindo a abordagem de Dante:

Problema de Aplicação 1: Planejamento de um Evento

Descrição: Planejar o número de mesas e cadeiras necessárias para um evento.

Enunciado: Você está organizando um evento e precisa dispor de mesas e cadeiras para 120 convidados. Cada mesa pode acomodar 8 pessoas e cada pessoa precisa de uma cadeira. Qual é o número mínimo de mesas e cadeiras necessárias?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar o número total de convidados e a capacidade de cada mesa.

- Planejamento:

Calcular o número mínimo de mesas necessárias.

Determinar o número total de cadeiras com base no número de convidados.

- Execução:

Número de mesas necessárias = Total de convidados / Capacidade por mesa = $120 / 8 = 15$ mesas.

Número total de cadeiras necessárias = Número de convidados = 120 cadeiras.

- Verificação:

Confirmar que o número de mesas e cadeiras é suficiente para acomodar todos os convidados.

- Resultado:

Para acomodar 120 convidados, são necessárias 15 mesas e 120 cadeiras.

Problema de Aplicação 2: Controle de Estoque

Descrição: Gerenciar o estoque de produtos em uma loja.

Enunciado: Uma loja de eletrônicos tem um estoque de 300 unidades de um determinado produto. Durante um mês, a loja vende 20% do estoque inicial e recebe um novo lote de 50 unidades. Quantas unidades do produto a loja terá ao final do mês?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar o estoque inicial, a porcentagem de venda e o novo lote recebido.

- Planejamento:

Calcular o número de unidades vendidas.

Subtrair o número de unidades vendidas do estoque inicial.

Adicionar o novo lote ao estoque restante.

- Execução:

Unidades vendidas = 20% de 300 = $0,20 * 300 = 60$ unidades.

Estoque após vendas = $300 - 60 = 240$ unidades.

Estoque final = $240 + 50 = 290$ unidades.

- Verificação:

Confirmar que os cálculos de vendas e adições ao estoque estão corretos.

- Resultado:

Ao final do mês, a loja terá 290 unidades do produto em estoque.

Esses problemas de aplicação exigem a utilização de conceitos matemáticos como porcentagens, cálculo de capacidade e gestão de estoque, e ajudam a desenvolver habilidades práticas de resolução de problemas em contextos reais.

3.1.6 Problemas de quebra-cabeça

Problemas quebra-cabeça, segundo Dante (2007), são desafios que exigem uma abordagem criativa e muitas vezes a aplicação de vários conceitos matemáticos para encontrar uma solução. Eles geralmente envolvem um enigma ou uma situação complexa que precisa ser resolvida por meio de raciocínio lógico e estratégias diversas. Aqui estão dois exemplos:

Problema Quebra-Cabeça 1: O Enigma das Moedas

Descrição: Resolver um problema que envolve a distribuição de moedas de diferentes valores.

Enunciado: Você tem um total de 50 moedas, que são apenas de 1 real e de 5 reais. Se você tem um total de R\$ 130,00, quantas moedas de 1 real e quantas moedas de 5 reais você tem?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar a quantidade total de moedas e o valor total em reais.

- Planejamento:

Definir variáveis para representar a quantidade de cada tipo de moeda.

Montar um sistema de equações para resolver o problema.

Execução:

Seja x o número de moedas de 1 real e y o número de moedas de 5 reais.

As equações são:

$$x + y = 50 \text{ (total de moedas)}$$

$$x + 5y = 130 \text{ (valor total em reais)}$$

Resolução do Sistema de Equações:

Subtrair a primeira equação da segunda:

$$(x + 5y) - (x + y) = 130 - 50 \rightarrow 4y = 80 \rightarrow y = 20$$

$$\text{Substituir } y \text{ na primeira equação: } x + 20 = 50 \rightarrow x = 30$$

- Verificação:

Confirmar que os valores encontrados satisfazem ambas as equações.

- Resultado:

Você tem 30 moedas de 1 real e 20 moedas de 5 reais.

Problema Quebra-Cabeça 2: A Sala de Aula dos Alunos

Descrição: Resolver um problema envolvendo a disposição de alunos em uma sala de aula.

Enunciado: Em uma sala de aula, há 24 alunos que devem ser organizados em 4 filas. Cada fila deve ter o mesmo número de alunos, mas a quantidade de alunos em cada coluna varia. Se a primeira fila tem 5 alunos, a segunda fila tem 6 alunos e a terceira fila tem 7 alunos, quantos alunos devem estar na quarta fila para que o total de alunos seja 24?

Solução:

- Definição do Problema:

Identificar o número total de alunos e a quantidade de alunos em cada fila, exceto na quarta fila.

- Planejamento:

Calcular o número total de alunos nas primeiras três filas e determinar quantos alunos restam para a quarta fila.

- Execução:

Número de alunos nas filas conhecidas:

Primeira fila: 5 alunos

Segunda fila: 6 alunos

Terceira fila: 7 alunos

Total de alunos nas três filas: $5 + 6 + 7 = 18$ alunos

Número de alunos restantes para a quarta fila: $24 - 18 = 6$ alunos

- Verificação:

Confirmar que a distribuição dos alunos é consistente com o número total de 24 alunos.

- Resultado:

A quarta fila deve ter 6 alunos para completar o total de 24 alunos.

Esses problemas quebra-cabeça envolvem a aplicação criativa de conceitos matemáticos e exigem habilidades de raciocínio lógico para encontrar soluções viáveis.

3.2 Como se resolve um problema

Segundo (Polya,2006), um dos pioneiros no estudo sistemático da resolução de problemas, oferece uma estrutura metodológica que tem sido amplamente utilizada e adaptada no ensino da matemática. Nela a resolução de problemas é composta por quatro etapas:

1. Compreender o problema: "O que é dado? O que é procurado? Quais são as condições?"
2. Elaborar um plano: "Você já viu um problema semelhante? Conhece um teorema que poderia ser útil?"
3. Executar o plano: "Execute o seu plano. Verifique cada passo. Pode ver claramente que o passo está correto?"
4. Revisar o processo: "Pode verificar o resultado? Pode derivar o resultado de uma forma diferente? Pode usar o resultado, ou o método, para algum outro problema?"

Essas etapas são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático e podem ser aplicadas em diversos contextos, incluindo a resolução de problemas envolvendo a área de figuras planas.

Para ilustrar a aplicação do método, consideremos a resolução de problemas de área de figuras planas. A compreensão desses problemas começa com a identificação das figuras envolvidas (triângulos, quadriláteros, círculos etc.) e a compreensão das fórmulas matemáticas relacionadas à área dessas figuras.

Exemplo 1: Calcule a área de um triângulo com base de 10 cm e altura de 5 cm.

1. Compreender o problema: Identificar a figura (triângulo) e as medidas fornecidas (base = 10 cm, altura = 5 cm).
2. Elaborar um plano: Utilizar a fórmula da área do triângulo: $\text{Área} = (\text{base} \times \text{altura}) / 2$
3. Executar o plano: Substituir os valores na fórmula: $\text{Área} = (10 \times 5) / 2 = 25 \text{ cm}^2$
4. Revisar o processo: Verificar se a fórmula foi aplicada corretamente e se os cálculos estão corretos.

Exemplo 1: Calcule a área de um triângulo com base b de 10 cm e altura h de 6 cm.

Passo 1: Compreender o Problema

O que é pedido?

Calcular a área do triângulo.

Quais são as informações dadas?

Base b = 10 cm

Altura h = 6 cm

Qual é a fórmula para calcular a área de um triângulo?

A fórmula é $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Passo 2: Elaborar um Plano

Utilizar a fórmula da área do triângulo para calcular a área com os valores fornecidos.

Passo 3: Executar o Plano

Substituir os valores de b e h na fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6$$

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

Passo 4: Revisar

Verificar os cálculos:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$5.6 = 30\text{cm}^2$$

Portanto, a área do triângulo é de 30 cm^2 , que está correta.

Problema 2: Calcule a área de um trapézio com bases B de 12 cm e b de 8 cm, e altura h de 5 cm.

Passo 1: Compreender o Problema

O que é pedido?

Calcular a área do trapézio.

Quais são as informações dadas?

Base maior B = 12 cm

Base menor b = 8 cm

Altura h = 5cm

Qual é a fórmula para calcular a área de um trapézio?

A fórmula é $A = \frac{(B+b)}{2} \times h$

Passo 2: Elaborar um Plano

Utilizar a fórmula da área do trapézio para calcular a área com os valores fornecidos.

Passo 3: Executar o Plano

Substituir os valores de B, b e h na fórmula:

$$A = \frac{(B + b)}{2} \times h$$

$$A = \frac{(12 + 8)}{2} \times 5$$

$$A = 50\text{ cm}^2$$

Passo 4: Revisar

Verificar os cálculos:

$$10 + 8 = 20$$

$$20/2 = 10$$

$$10 \times 5 = 50\text{ cm}^2$$

Portanto, a área do trapézio é de 50 cm^2 , que está correta.

Esses exemplos mostram como a metodologia de Polya pode ser aplicada de forma sistemática para resolver problemas envolvendo áreas de figuras planas. Neste sentido, é importante destacar a importância da resolução de problemas como uma competência essencial no ensino de matemática, pois é fundamental que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas e pensar criticamente, utilizando estratégias e procedimentos matemáticos (BNCC, 2018).

Sendo assim, A metodologia de Polya se alinha perfeitamente com esses objetivos, pois promove uma abordagem estruturada para a resolução de problemas que pode ser aplicada em diferentes contextos. Já que segundo a BNCC (Brasil, 2018) enfatiza a necessidade de que os alunos não apenas aprendam a aplicar fórmulas, mas também compreendam os conceitos subjacentes e sejam capazes de utilizar esses conhecimentos de maneira flexível e criativa. Desta forma, a resolução de problemas é, uma competência central no ensino de matemática que deve ser incentivada e desenvolvida continuamente.

3.3 Área de figuras planas

Agora, exploraremos o conceito de área, abordando as áreas das principais figuras planas e apresentamos alguns teoremas que não são usuais no contexto escolar. Utilizamos o software GeoGebra nas construções e verificações das propriedades dessas figuras. Além disso, discutiremos o que a BNCC traz em relação às competências e habilidades no ensino de geometria, mais especificamente em áreas de figuras planas.

O estudo das áreas de figuras planas é uma parte fundamental da geometria, e um dos principais conteúdos de matemática. A compreensão desses conceitos permite aos alunos desenvolver habilidades essenciais para a resolução de problemas e aplicação em diversas situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018), os alunos devem ser capazes de compreender e aplicar conceitos geométricos, incluindo medidas de comprimento, área, volume e ângulos, em diferentes contextos. Além disso, ressalta a importância de desenvolver habilidades de raciocínio lógico, argumentação matemática e resolução de problemas, promovendo uma abordagem investigativa e interdisciplinar no ensino da matemática.

Ainda segundo a BNCC (Brasil, 2018, p. 317), é ressaltado que o aluno deve “(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.”

Além disso, os professores podem inovar sua prática pedagógica, com a inserção das novas tecnologias, especialmente de softwares como o Geogebra que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, enriquecendo sua metodologia. Conforme a BNCC (Brasil, 2018) que afirma que é necessário utilizar processos e ferramentas matemáticas, incluindo as tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados. Desta forma, ao integrar os

princípios da BNCC, o software GeoGebra e a resolução de problemas, os professores podem proporcionar experiências de aprendizagem significativas e contextualizadas, promovendo o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais para preparar os alunos para os desafios do século XXI.

3.3.1 Área do retângulo e do quadrado

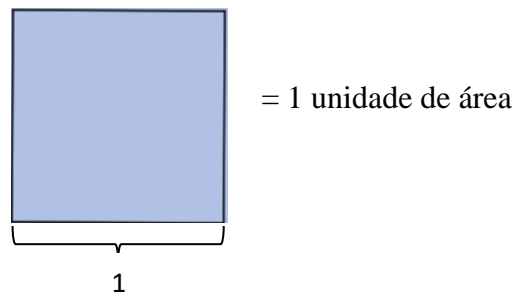
O autor desta dissertação recorda que, antes de ingressar no PROFMAT (UFERSA-RN), não dava a devida atenção ao conceito de área em suas aulas no ensino básico; limitava-se a apresentar as figuras no quadro junto com suas respectivas fórmulas. Embora esse método funcionasse, os alunos não tinham a oportunidade de entender o processo pelo qual o professor chegava a essas fórmulas. Em outras palavras, as aulas poderiam se tornar mais significativas ao explicar o que é área e como se chega a essas fórmulas. Além disso, e usando as tecnologias digitais poderia tornar o ensino mais dinâmico e envolvente, proporcionando aos alunos uma experiência de aprendizado mais rica e interativa.

Nesta perspectiva, segundo a BNCC (Brasil, 2018, p.267), nas suas Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental ressaltar que devemos “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”

Agora, seguindo as ideias do livro *Temas e Problemas Elementares*, publicado pela SBM, e antes de abordarmos o conceito de área, é importante mencionar o significado de medir uma grandeza. Medir uma grandeza é compará-la com outra de mesma espécie tomada como unidade. Por exemplo, vamos determinar o comprimento de uma sala de aula sem o uso de uma fita métrica. Para isso, tome seu passo (distância entre dois passos consecutivos) como uma unidade de comprimento. Caminhe ao longo do comprimento da sala, contando seus passos. Se a pessoa deu dez passos, isso significa que a sala mede 10 unidades de comprimento(u.c.). Da mesma forma, medir a porção de um plano ocupada por uma figura é medir sua área.

Exemplo: vamos determinar a área de uma figura F . Para isso, devemos comparar sua superfície (porção do plano que ela ocupa) com a de outra figura tomada como unidade. Essa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade unitária. Essa ideia ficará mais clara ao adotarmos uma unidade de área como sendo o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado de quadrado unitário.

Figura: 1 - Unidade de área



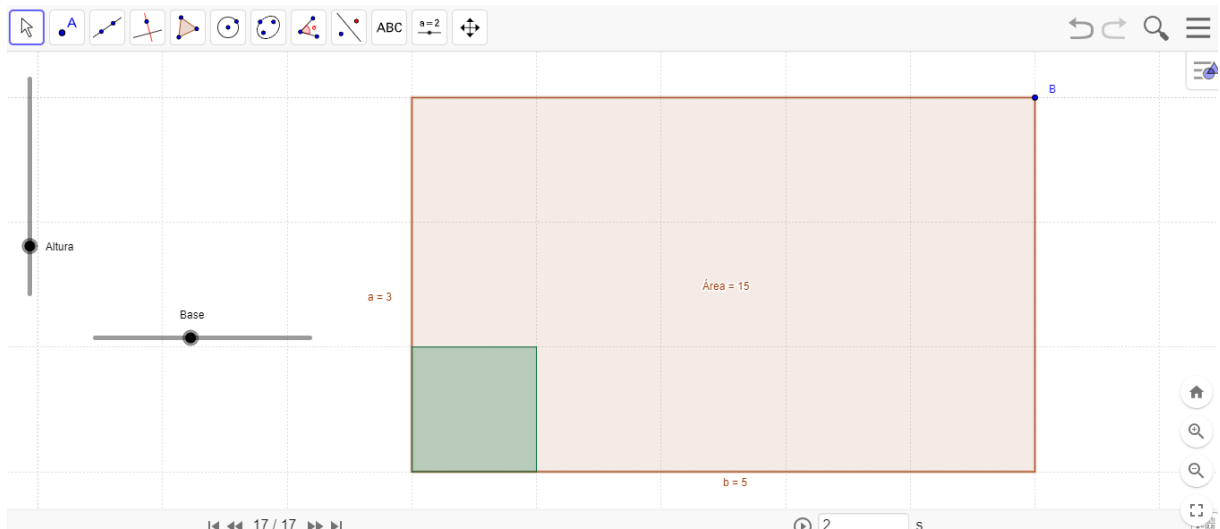
Fonte: Próprio autor

Se o lado do quadrado for de 1 cm, a unidade de área será chamada de centímetro quadrado e representada por cm^2 . Naturalmente que, para cada unidade de comprimento, existe uma unidade correspondente. Assim, o metro quadrado (m^2), o milímetro quadrado (mm^2), o quilômetro quadrado (km^2) são outras unidades de área utilizadas quando forem convenientes para a figura que se deseja medir.

A área de uma figura explica quantas vezes a figura contém a unidade de área. Isto é fácil de perceber, por exemplo, quando desejamos conhecer a área de uma sala de formato retangular cujos lados medem 5 m e 3 m. Para isso, vamos construir essa sala com o uso do software Geogebra.

Neste momento, direcionamos nossa atenção para o que a construção geométrica pode nos oferecer em relação aos lados e à área da sala. Na figura abaixo, basta movimentar as duas barras (controles deslizantes) que indicam a altura e a base do retângulo para visualizar sua área.

Figura: 2 - Área do retângulo



Fonte: Próprio autor

Link da construção: disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/kxm5m4zp>. Acesso em:

15 de mar. de 2024.

É fácil perceber que área da sala corresponde a 15 unidades de área. Que pode ser expresso da seguinte forma: $5 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$, como mostrado na imagem acima.

Fica claro, portanto, que se as medidas dos lados de um retângulo são números inteiros a e b , sua área é o produto desses números:

$$S = ab$$

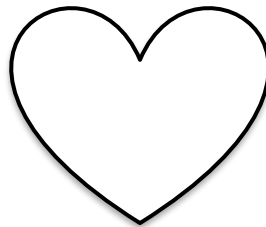
Em particular, se a medida de um quadrado é um número inteiro n , sua área é igual a n^2 .

Com base nas discussões sobre o cálculo de áreas, surgem algumas perguntas: como podemos determinar a área de uma figura qualquer? Como comparar a superfície de uma figura com a de um quadrado unitário?

Para responder a esses questionamentos, apresentaremos a seguir uma experiência que permite estimar a área de uma figura desenhada em uma folha de cartolina, papel ou papelão. O termo ‘aproximadamente’ é essencial, pois, para qualquer figura que possamos imaginar ou desenhar, o que conhecemos sobre sua área são apenas estimativas. Essas estimativas tornam-se mais precisas à medida que refinamos nossos métodos.

Considere a figura C abaixo:

Figura: 3 - Figura C



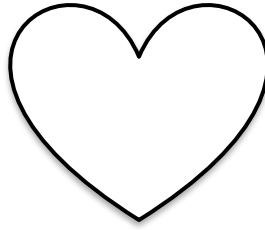
Fonte: Próprio autor

Que área ela tem? Naturalmente, não há como verificar diretamente quantas vezes o quadrado unitário cabe dentro dela. Contudo, usando uma balança digital de 10 kg, podemos proceder da seguinte forma:

1. Recorte da Figura:

Recorte a figura cuja área deseja medir (pode ser a figura C ou outra que seja difícil de quadricular) em uma folha de cartolina, papel ou papelão.

Figura: 4 - Recorte da figura C



Fonte: Próprio autor

2. Recorte da Tira:

Usando o mesmo material, recorte uma tira comprida com 1 cm de largura. Certifique-se de que a tira seja longa o suficiente para que, quando a figura e a tira forem pesadas separadamente na balança, a tira seja mais pesada.

Figura: 5 - Tira – parte 1



Fonte: Próprio autor

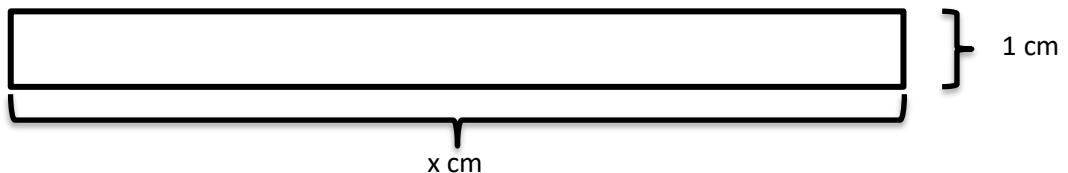
3. Pesagem Separada:

Pese a figura e, em seguida, pese a tira, anotando os pesos. Como a tira será mais pesada, corte-a em pedaços pequenos com uma tesoura, ajustando seu peso. Continue cortando a tira até que os pesos da figura e da tira sejam iguais.

4. Medição da Área

Como a figura e a tira têm a mesma massa e são feitas do mesmo material, elas possuem a mesma área. Assim, basta medir o comprimento da tira.

Figura: 6 - Tira - Parte 2



Fonte: Próprio autor

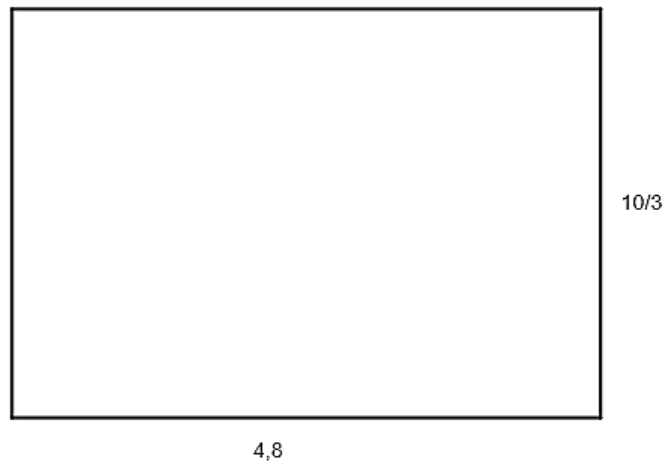
Desta forma, área da figura C será o comprimento da tira (x cm) multiplicado por 1 cm, ou seja, x cm². Se, no exemplo, $x = 100$ cm, a área da figura será 100 cm multiplicado por 1 cm, ou seja, 100 cm². Uma medida bastante aproximada. Esse processo vale para figuras de qualquer tamanho, sejam gigantescas ou microscópicas, desde que conheçamos suas

dimensões.

Considerando novamente o retângulo, sabemos que, se as medidas dos seus lados são números inteiros, a sua área é o produto desses números. Mas o que acontece quando as medidas do retângulo são números racionais? Por exemplo, como calcular a área de um retângulo cujos lados medem 4,8 e $10/3$? Um aluno mais apressado pode dizer: "Multiplique esses dois números!" De fato, isso está correto, mas por que essa multiplicação resulta na área? Será que essa área é exata ou aproximada? Vamos analisar esse problema interessante e sua solução nos dará uma compreensão precisa do caso geral.

O retângulo é assim:

Figura: 7 - Retângulo 4,8 x $10/3$



4,8
Fonte: Próprio autor

Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/mkhfbnb6> .
Acesso em: 25 de mar. de 2024.

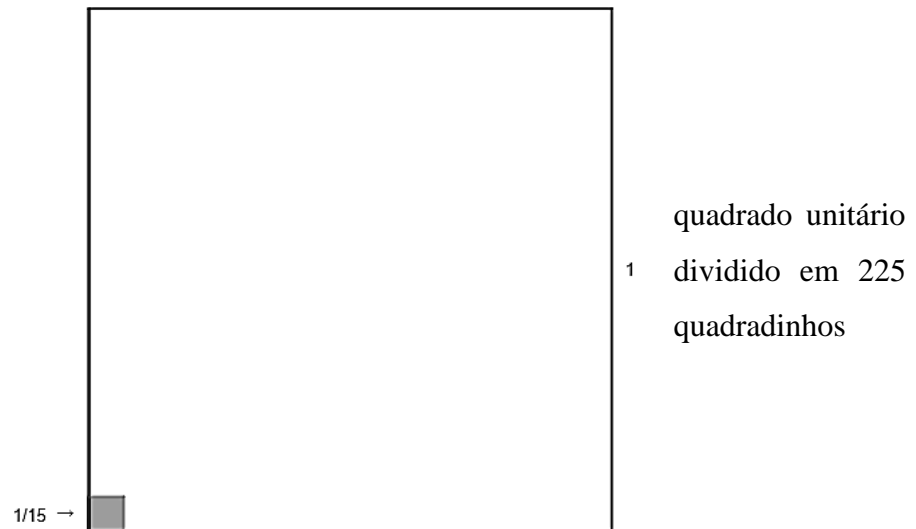
Naturalmente, não podemos visualizar quantas vezes o quadrado unitário cabe dentro do retângulo. Então, vamos proceder da seguinte maneira. Primeiro, vamos escrever as medidas dos lados do retângulo como frações com o mesmo denominador. Isso é sempre possível quando os valores são números racionais.

Por exemplo:

$$4,8 = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} = \frac{72}{15} \quad e \quad \frac{10}{3} = \frac{50}{15}$$

Em segundo lugar, vamos dividir o lado do quadrado unitário em segmentos de tamanho $1/15$ e, traçando linhas paralelas aos lados por cada ponto de divisão, veremos o quadrado unitário dividido em $15^2 = 225$ quadradinhos.

Figura: 8 - Quadrado unitário dividido em 225 quadrados



Fonte: Próprio autor

Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/kfc6ecdv>. Acesso em: 25 de mar. de 2024.

Assim, a área de cada quadrado é $1/225$. Agora, vamos colorir a superfície do retângulo com esses quadrados.

Figura: 9 - Retângulo $72/15 \times 50/15$



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/heughwud>. Acesso em: 25 de mar. de 2024.

Cabem 72 quadrados na base do retângulo e 50 quadrados na altura. Logo, o número de quadrados em que o retângulo ficou dividido é 70×50 . Assim, a área do retângulo é igual a este número multiplicado pela área de cada quadrado, que é $1/225$. Daí a área do

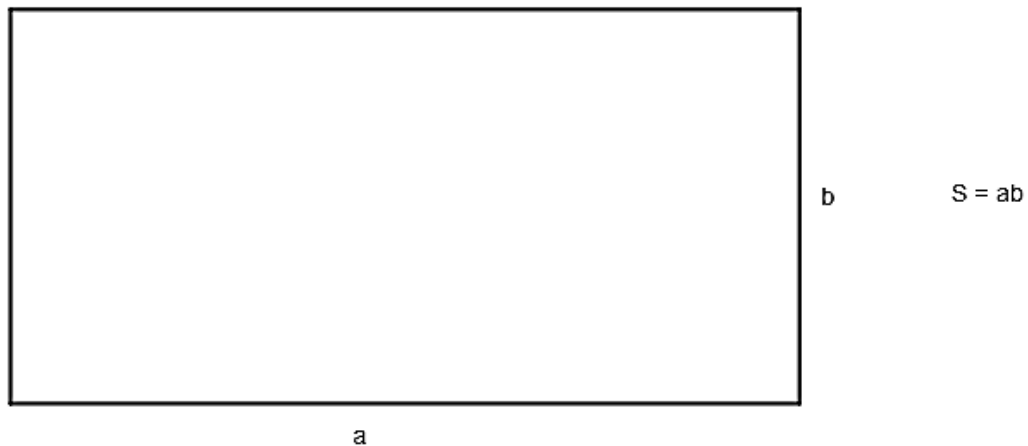
retângulo será:

$$S = 72 \times 50 \times \frac{1}{225} = \frac{72}{15} \times \frac{50}{15} = 4,8 \times \frac{10}{3} = 16$$

De fato, a área do retângulo de medidas racionais é realmente o produto das medidas desses lados. Note que, apesar de termos feito apenas um exemplo, esta solução contém toda ideia da demonstração para triângulos de medidas racionais. Podemos demonstrar que a área de um retângulo cujas medidas dos lados são números reais positivos quaisquer é o produto delas. Não faremos isto aqui, mas o leitor interessado pode ver todos os detalhes dessa demonstração no Livro Medida e Forma em Geometria, do prof. Elon Lages Lima, publicado pela SBM. Assim, podemos afirmar:

A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados.

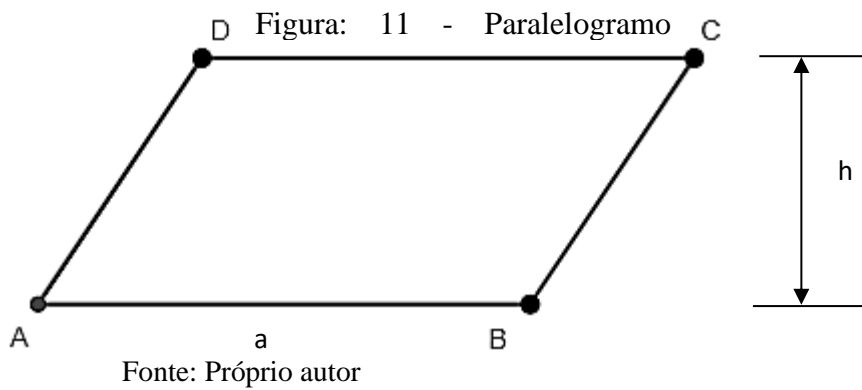
Figura: 10 - Retângulo a x b



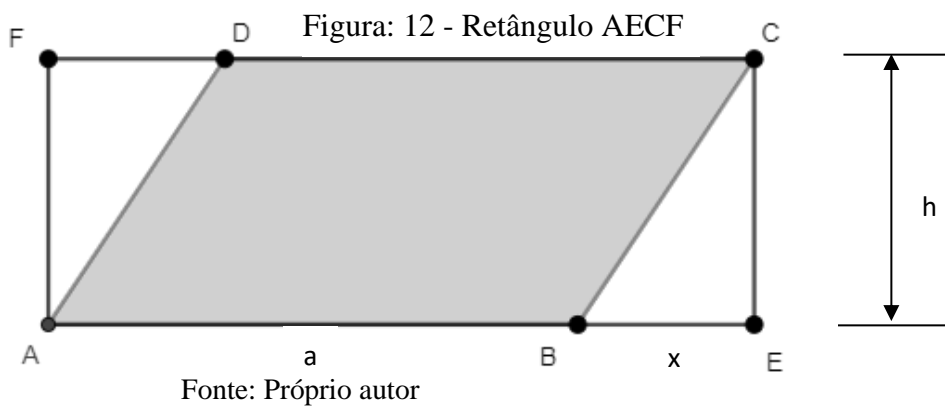
Fonte: Próprio autor

3.3.2 Área do paralelogramo

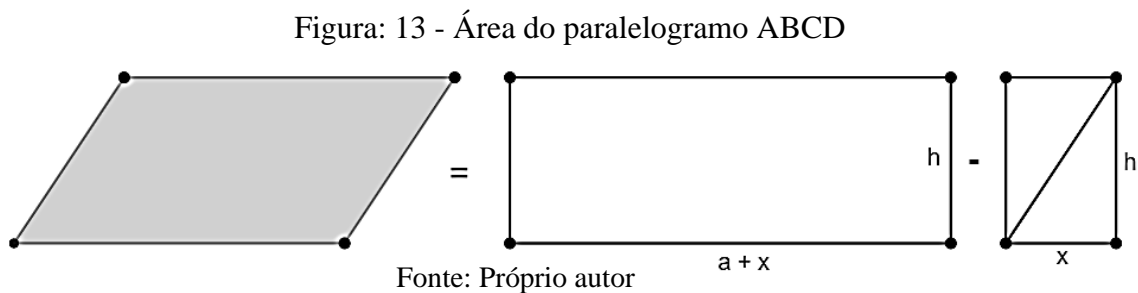
Uma vez conhecida a área do retângulo, podemos calcular a área de um paralelogramo. Considere o paralelogramo ABCD na figura a seguir, com base $AB = a$ e altura h .



A figura a seguir, mostra o retângulo AECF que contém o paralelogramo



Seja $BE = x$. Área do paralelogramo é igual a área do retângulo subtraída de dois triângulos iguais (BEC e DFA) que, juntos, forma um outro retângulo.



$$(ABCD) = (a + x) \cdot h - xh = ah + xh - xh = ah \rightarrow$$

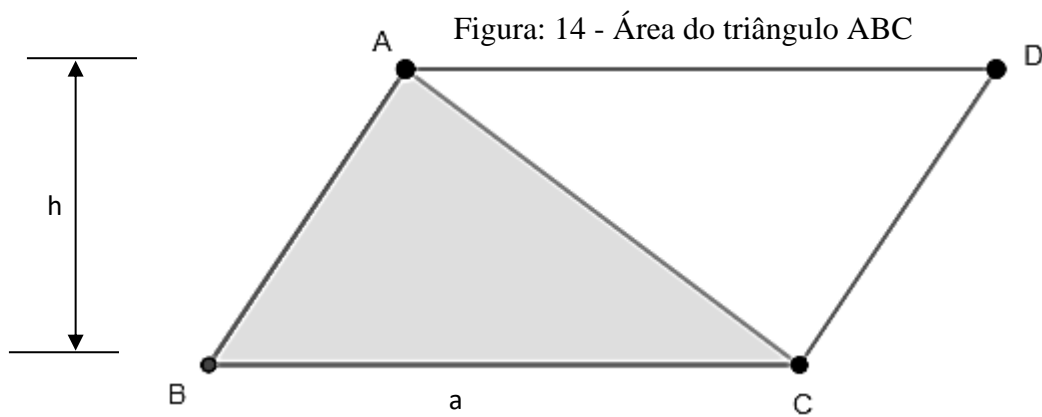
$$\rightarrow (ABCD) = ah$$

A área do paralelogramo é, portanto, o produto da base pela altura.

$$S = ah$$

3.3.3 Área do triângulo

Para obter a área de um triângulo ABC, escolha um lado para chamar de base. Seja então BC a base. Suponha que a base tenha comprimento a e que a altura relativa a essa base tenha tamanho h . Pelo vértice oposto A, trace paralelas aos lados AB e AC formando o paralelogramo ABCD.

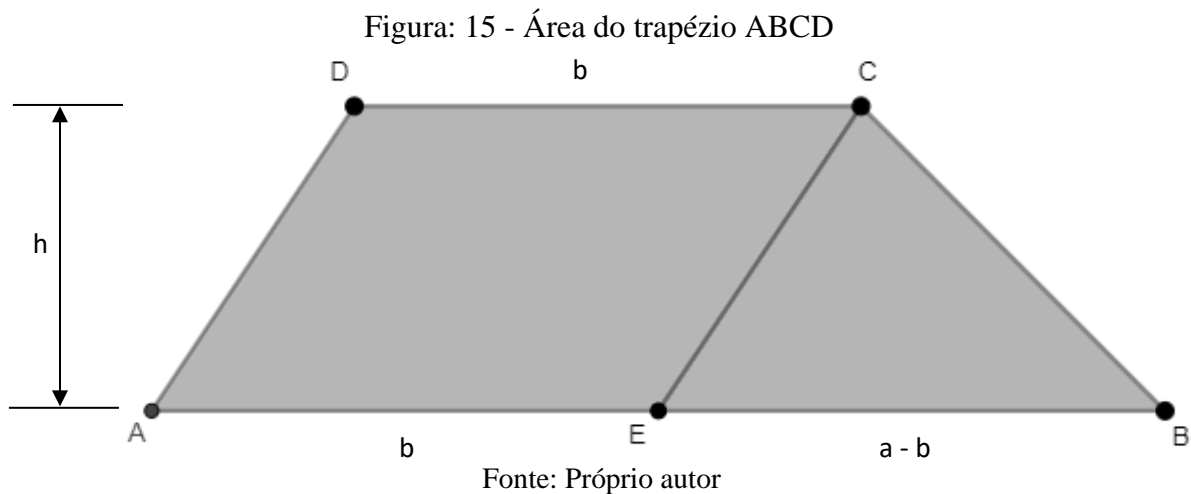


Claro que a área do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo ABCD, pois o triângulo ocupa exatamente metade do espaço dentro do paralelogramo. Portanto, a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura.

$$S = \frac{ah}{2}$$

3.3.4 Área do trapézio

Agora, considere o trapézio ABCD, onde a base maior AB é denotada por a , a base menor CD é denotada por b , e a altura é representada por h , conforme ilustrado na figura a seguir.



Ao traçar o segmento CE paralelo a AD, o trapézio ABCD é dividido em um paralelogramo AECD com base b e altura h, e em um triângulo CEB com base $a - b$ e altura h.

A soma das áreas dessas duas figuras é dada por:

$$bh + \frac{(a - b)h}{2} = \frac{2bh + ah - bh}{2} = \frac{(a + b)h}{2}$$

A área do trapézio é, portanto, o produto da base média pela altura.

$$S = \frac{(a + b)h}{2}$$

(Chamamos de base média de um trapézio ao segmento de reta que une as partes médias dos lados opostos não-paralelos. Sua medida é a média aritmética das bases.)

Se conhecemos a área de um triângulo, podemos calcular a área de qualquer polígono. Isso porque sempre podemos dividir um polígono em triângulos, e a área do polígono será a soma das áreas desses triângulos. No entanto, é importante notar que, intuitivamente, utilizamos a soma das áreas a partir da área de um retângulo, algo que não foi explicitamente mencionado antes.

Para sermos claros, o cálculo de áreas de polígonos segue as seguintes regras:

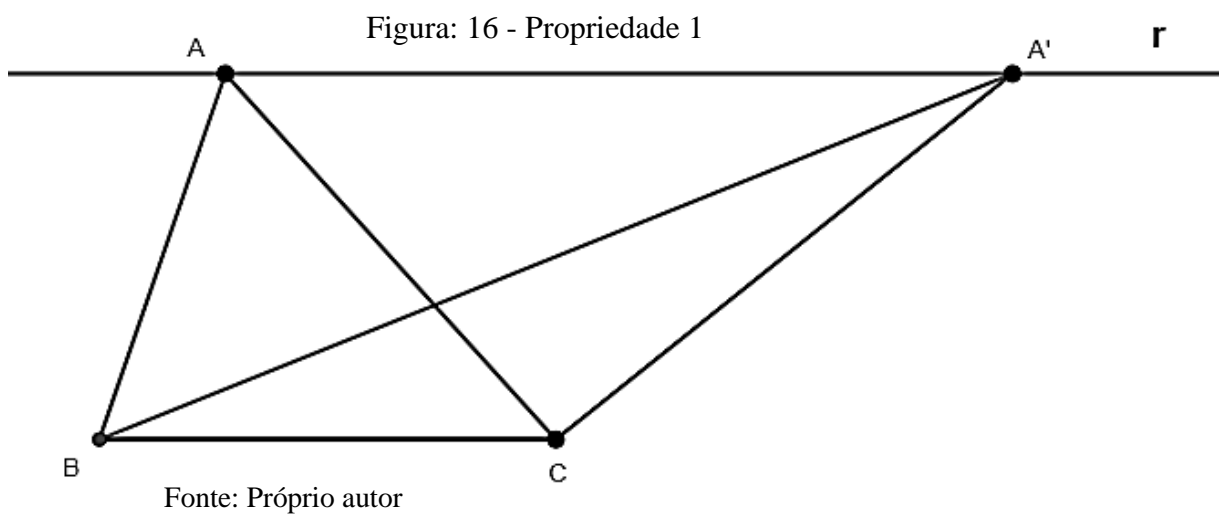
1. Podemos associar a cada polígono P um número real positivo chamado área de P.
2. A área de um quadrado com lado unitário é 1.
3. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
4. Se um polígono P é decomposto em outros polígonos de forma que quaisquer dois deles possuem em comum, no máximo, pontos de seus lados, então a área de P é a

soma das áreas desses polígonos.

Com essas regras estabelecidas, que validam os resultados que obtivemos, vamos agora tratar de certas propriedades dos triângulos.

Propriedade 1

A área de um triângulo permanece inalterada quando sua base é fixa e o terceiro vértice se desloca ao longo de uma reta paralela à base.



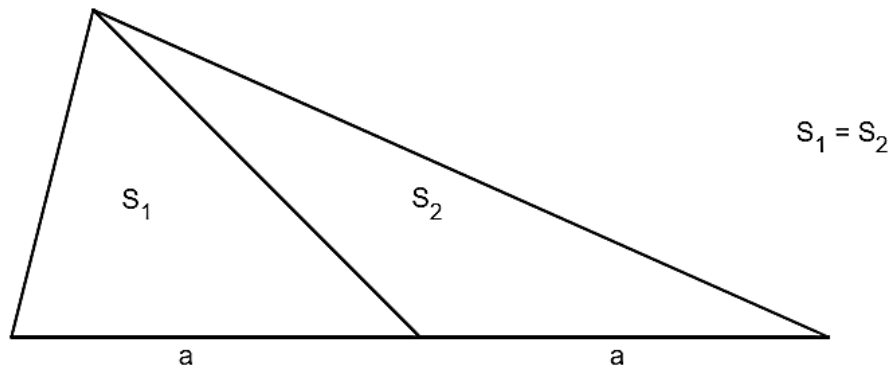
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/nzhn4swm>. Acesso em: 30 de mar. de 2024.

Na figura acima, a reta r é paralela a base BC . Os triângulos ABC e $A'BC$ têm a mesma área pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em duas partes iguais. De fato, observando a figura a seguir, os dois triângulos formados pela mediana possuem a mesma base e a mesma altura, resultando assim em áreas iguais.

Figura: 17 - Propriedade 2



Fonte: Próprio autor

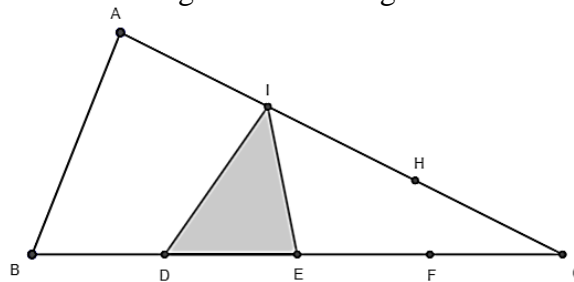
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/kpmda6xz>. Acesso em: 30 de mar. de 2024.

Quando duas figuras possuem a mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, podemos enunciar a propriedade 2 assim: “Uma mediana divide um triângulo em dois triângulos equivalentes.” Antes de prosseguirmos com as propriedades, vamos resolver dois problemas cujos enunciados não são comuns nos livros didáticos atuais.

Problema 1

O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos I e H. Qual é a área do triângulo IDE?

Figura: 18 - Triângulo IDE



Fonte: Próprio autor

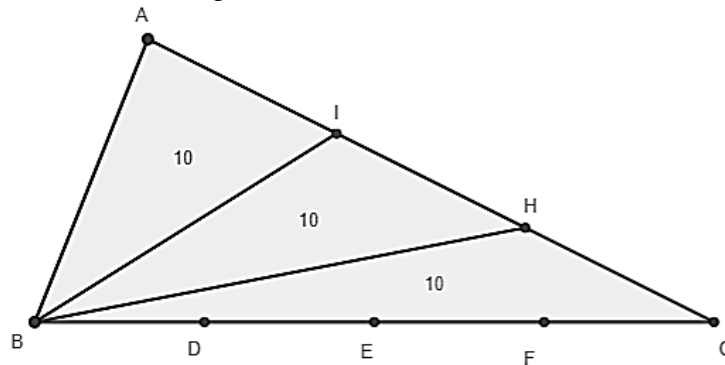
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/tngambt>. Acesso em: 30 de mar. de 2024.

Resolução:

Observe na figura a seguir, o triângulo ABC com cevianas BI e BH. (ceviana é qualquer segmento de reta que une um vértice do triângulo a um ponto qualquer interior ao lado oposto.)

Pela propriedade 2 os triângulos BAI, BIH, BHC têm mesma área. Cada um tem, portanto, área igual a 10 e o triângulo BIC tem área igual a 20. Observe agora o triângulo BIC com as cevianas ID, IE e IF.

Figura: 19 - Cevianas BI e BH

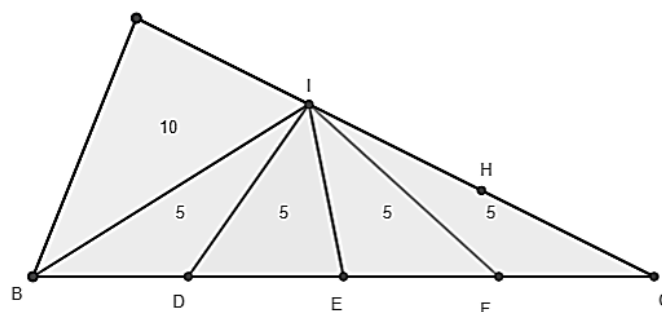


Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/tfd3w84k>. Acesso em: 30 de mar. de 2024.

Pela mesma propriedade, os triângulos IBD, IDE, IEF e IFC tem mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do triângulo IDE é igual a 5.

Figura: 20 - Área do triângulo IDE



Fonte: Próprio autor

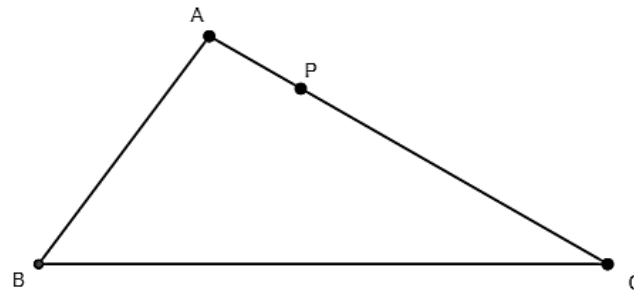
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/d4zykqr4>. Acesso em: 30 de mar. de 2024.

Comentários: Repare que a solução do problema não necessitou de fórmula. Uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu. Vamos ver outro problema.

Problema 2

São dados um triângulo ABC e um ponto P do lado AC, mais próximo de A que C. Traçar uma reta por P que divide o triângulo ABC em duas partes de mesma área.

Figura: 21 - Ponto P sobre o lado AC



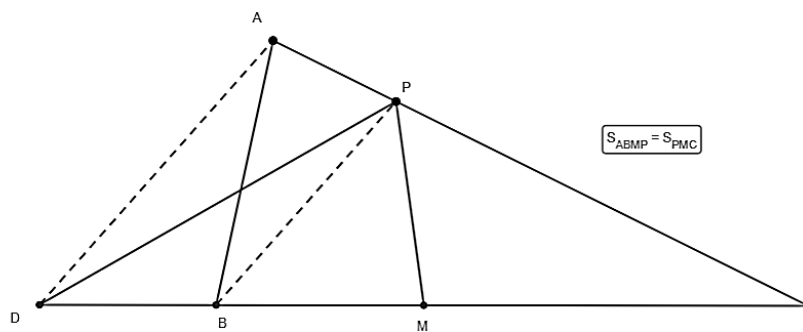
Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/brnedey2>. Acesso em: 31 de mar. de 2024.

Resolução:

Traçando BP e uma paralela por A a BP que encontra a reta BC em D. Os triângulos ABP e DBP tem áreas iguais pela propriedade 1. Assim o triângulo PDC tem mesma área que o triângulo ABC. Mas, tomando o ponto médio de DC, a reta PM divide PDC em duas partes de mesma área (propriedade 2). Logo, PM divide também ABC em duas partes de mesma área.

Figura: 22 - Mediana PM



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/anwpbwqr>. Acesso em: 31 de mar. de 2024.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

Demonstração:

1. Considere dois triângulos ABC e DEF:

Ambos possuem a mesma altura h .

As bases dos triângulos são b_1 e b_1 , respectivamente.

2. Área dos Triângulos:

A área do triângulo ABC é dada por: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h$

A área do triângulo DEF é dada por: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$

3. Razão entre as Áreas:

Dividindo a área do triângulo ABC pela área do triângulo DEF:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h}$$

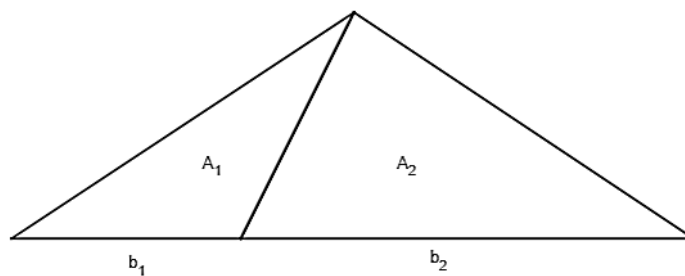
4. Simplificação:

Simplificando a expressão acima, obtemos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Portanto, a razão entre as áreas de dois triângulos com a mesma altura é igual à razão entre suas bases.

Figura: 23 - Razão entre as áreas de dois triângulos



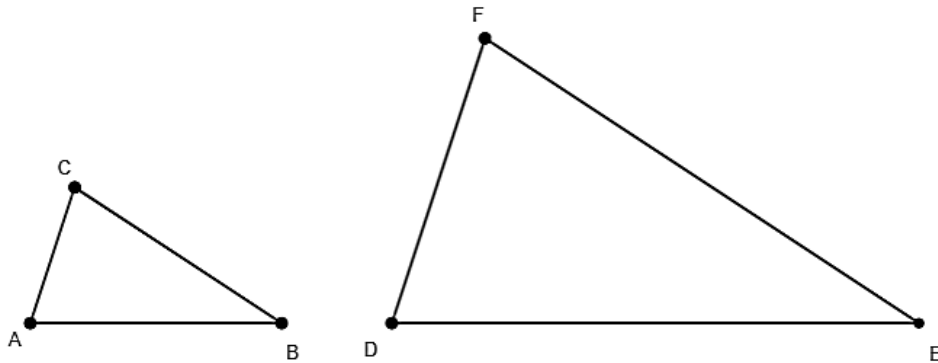
Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/fzrx5ej2>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Figura: 24 - Triângulos semelhantes ABC e DEF



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/ykxjwxt>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

Demonstração:

Considere dois triângulos semelhantes ABC e DEF:

- Os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais.
- Seja k a razão de semelhança, ou seja, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD} = k$

Fórmula para a área dos triângulos:

- A área do triângulo ABC é A_1
- A área do triângulo DEF é A_2

Razão entre as alturas:

- Sejam h_1 a altura do $\triangle ABC$ relativo à base BC e h_2 a altura do $\triangle DEF$ relativa à base EF.
- Como os triângulos são semelhantes, a razão entre suas alturas também é k : $\frac{h_1}{h_2} = k$

Cálculo das áreas:

A área do triângulo ABC: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_1$

A área do triângulo DEF: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h_2$

Razão entre as áreas:

- Dividindo a área do triângulo ABC pela área do triângulo DEF:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot EF \cdot h_2}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{BC \cdot h_1}{EF \cdot h_2}$$

Substituindo as razões de semelhança:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k \cdot EF \cdot k \cdot h_2}{EF \cdot h_2}$$

Simplificando mais:

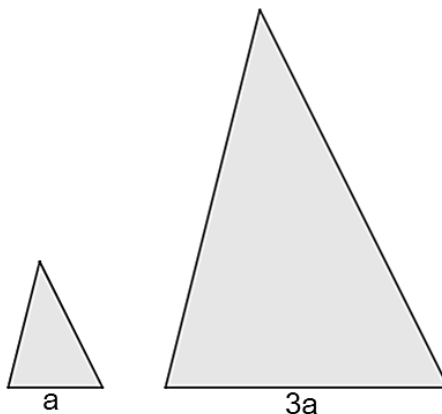
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k \cdot k \cdot EF \cdot h_2}{EF \cdot h_2} = k^2$$

Portanto, a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Vamos a mais um exemplo simples

Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?

Figura: 25 - Triângulos semelhantes de base a e $3a$



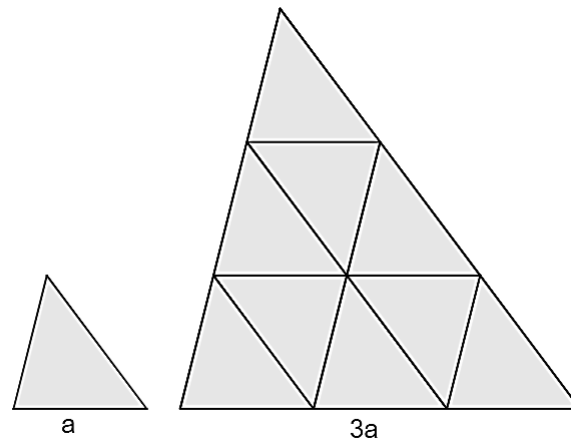
Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/p4pyfchn>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

Para esta pergunta, alunos(as) tem uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é $k = \frac{1}{3}$ e, portanto, a razão entre as áreas é $1/9$. Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

Podemos ver esta relação na figura a seguir. Na qual ela foi construída utilizando o software Geogebra. É fácil ver que o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.

Figura: 26 - Razão entre áreas de triângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/hvfmwudx>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

A propriedade 4 que mostramos para triângulos vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Não é nosso objetivo nesta dissertação fazer a demonstração. O leitor interessado pode encontrá-la com todos os detalhes no livro “Medida e Forma em Geometria”, do professor Elon Lages Lima, publicado pela SBM.

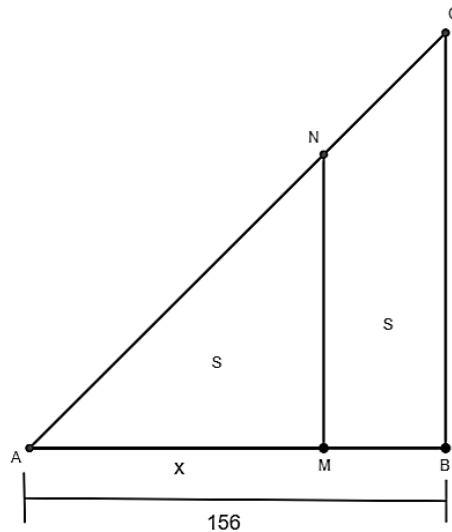
Um problema de aplicação prática

O Sr. Afrânio possuía um valioso terreno desocupado próximo ao centro de uma cidade. Com a urbanização, novas ruas foram abertas, e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo retângulo ABC, com o ângulo reto em B e o lado AB medindo 156 metros. Após a morte de Afrânio, os advogados encontraram em seu testamento instruções para dividir o terreno igualmente entre seus dois filhos. A instrução era a seguinte: "Um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham o mesmo valor. O terreno em forma de trapézio será do meu filho mais velho, e o triângulo restante será do meu filho mais novo.

Em qual posição relativamente ao lado AB do terreno o muro deve ser construído?

Solução:

Figura: 27 - Problema de aplicação prática



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/rpkspm2n>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

Na figura acima, MN é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado AB. Seja $AM = x$ de forma que o triângulo AMN e o trapézio MBCN tenham a mesma área S. Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $x/156$. Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá $x = 78\sqrt{2} \cong 110$.

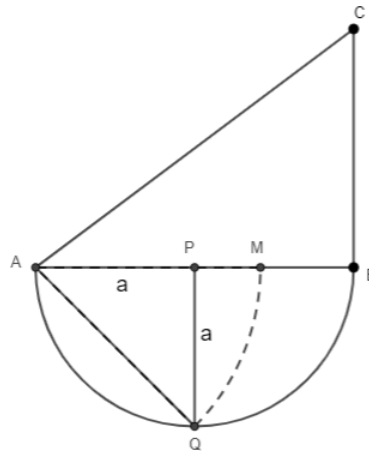
Portanto, o muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB a uma distância de 110 metros de A, dividindo assim o terreno igualmente entre os dois filhos de Afrânio.

Acabamos de resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área. Mas como podemos fazer isso utilizando apenas régua e compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem cálculos complexos ou aproximações. Vamos ver como se faz isso.

Resolvendo o problema novamente considerando $AB = 2a$. Iremos encontrar $AM = a\sqrt{2}$.

Fazendo o seguinte: Pelo ponto P, médio de AB trace uma perpendicular PQ a AB de comprimento a como na figura seguinte:

Figura: 28 - Construção com régua e compasso



Fonte: Próprio autor

Como $AQ = a\sqrt{2}$, transfira com o compasso essa medida para a reta AB encontrando a posição exata de M.

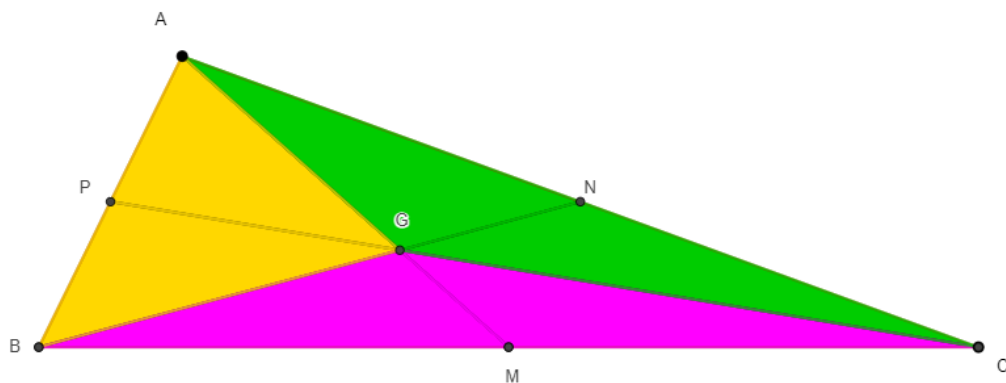
Vamos para mais um exemplo utilizando as propriedades.

As medianas de um triângulo, divide esse triângulo em 6 outros triângulos. Mostre que eles têm mesma área.

Solução:

Representamos por (ABC) a área de um triângulo ABC.

Figura: 29 - Uma propriedade das Medianas de um triângulo



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/a2s4umuc>. Acesso em: 1 de abr. de 2024.

Seja $(ABC) = S$. O ponto de interseção das medianas é G, o baricentro. Como $AP = BP$, $BM = CM$, $AN = NC$ e pela propriedade 2, temos que

$(PBG) = (PAG) = S_1, (NAG) = (NCG) = S_2, (MGB) = (MCG) = S_3$. Como, $(ABM) = (AMC)$, $(CAP) = (CPB)$ e $(BNC) = (BNA)$, segue que $(ABM) = (AMC) \rightarrow 2(PGA) + (MGB) = 2(NAG) + (MCG) \rightarrow 2S_1 + S_3 = 2S_2 + S_3 \rightarrow S_1 = S_2$, de forma análoga para $(CAP) = (CPB)$ e $(BNC) = (BNA)$, teremos $S_2 = S_3$ e $S_1 = S_3$, ou seja $S_1 = S_2 = S_3 = k$. Pelo fato de $(ABM) + (AMC) = (ABC) \rightarrow 2S_1 + S_3 + 2S_2 + S_3 = S \rightarrow 2k + k + 2k + k = S \rightarrow k = \frac{S}{6}$. Portanto, os triângulos têm área igual a $S/6$.

Todos os procedimentos realizados até agora estão em conformidade com a BNCC. Pois, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 305), devemos:

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

3.3.5 Área do círculo

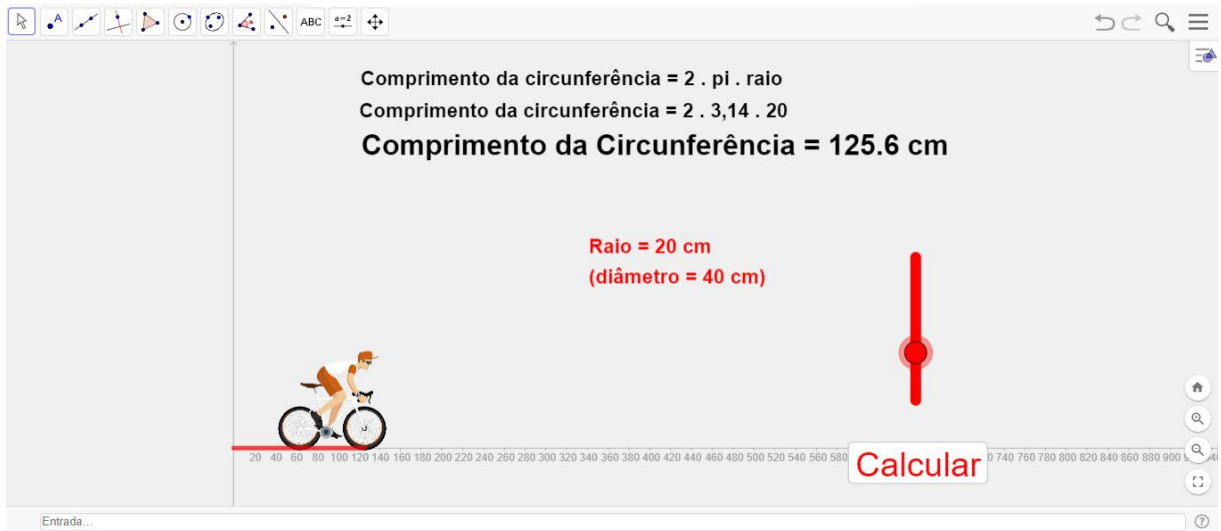
Antes de passarmos para a área do círculo, é fundamental compreender o número π . Este número é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, resultando em um valor constante, independentemente das circunstâncias, pois todas são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R , então

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

por definição.

Mas, qual é o comprimento de uma circunferência? Sabemos que é o comprimento de um segmento, mas nossa compreensão inicial é mais intuitiva. Podemos imaginar passar um barbante fino ao redor da circunferência, esticá-lo e medir seu comprimento com uma régua. Esse método nos dá uma boa ideia do comprimento, mas é impreciso. Observe a mesma situação ilustrada no GeoGebra na figura abaixo: com a barra vertical (controle deslizante), basta definir o raio e clicar em "Calcular" para que a bicicleta percorra o comprimento da circunferência.

Figura: 30 - Comprimento da circunferência



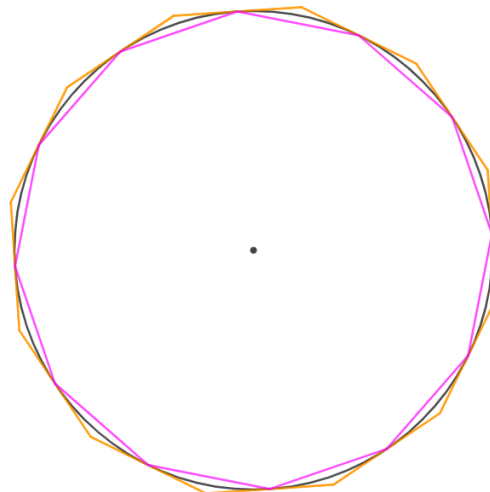
Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/uhzuma5z>. Acesso em: 2 de abr. de 2024.

Vamos tornar mais preciso este conceito

O comprimento de uma circunferência é, por definição, o número real cuja aproximação por falta são os perímetros polígonos regulares inscritos e cuja aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos regulares circunscritos.

Figura: 31 - Polígonos inscritos e circunscritos a circunferência

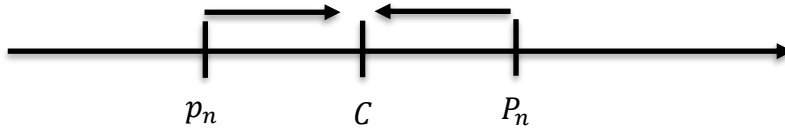


Fonte: Próprio autor

Observe a figura acima. Você vê uma circunferência com um dodecágono regular inscrito e outros circunscritos. Pensando agora nessa situação com polígonos regular de n lados. Se C é comprimento da circunferência, p_n o perímetro do polígono inscrito e P_n o perímetro do

circunscrito temos, por definição $p_n < C < P_n$.

Quando n cresce, os valores de p_n aumenta, os de P_n diminuem e ambos cada vez mais de C .



Sendo R o raio da circunferência, as razões $\frac{p_n}{2R}$ e $\frac{P_n}{2R}$ quando n cresce, vão se aproximando, uma por um lado e outra pelo de $\frac{C}{2R}$, ou seja, de π .

Vejam na tabela estas aproximações para alguns valores de n .

Tabela 1 - Aproximações de π

N	$\frac{p_n}{2R}$	$\frac{P_n}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,1415	3,14167

Fonte: Próprio autor

Observando a tabela acima, percebemos que os valores das duas colunas vão se aproximando. No entanto, para polígonos de 384 lados, só conseguimos garantir precisão nas três primeiras casas decimais.

O número π é um número irracional, aproximadamente igual a 3,1416. A escolha da letra grega π para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro deve-se a Euler, que a adotou em 1737. Esta razão tem fascinado matemáticos e entusiastas ao longo de toda a história.

Continuando com a ideia dos polígonos, a área do círculo é um número real cujas aproximações por falta são dadas pelas áreas dos polígonos regulares inscritos. Vamos imaginar um polígono regular de n lados (com n sendo um valor bem grande) inscrito em uma

circunferência de raio R . Dividimos o polígono em triângulos isósceles iguais, todos com vértices no centro da circunferência. Cada triângulo possui dois lados iguais a R , um lado igual a a (lado do polígono) e altura h relativa à base.

A área do polígono é $A_n = n \cdot \frac{ah}{2} = \frac{p_n \cdot h}{2}$ onde p_n é o perímetro do polígono. Quando n cresce indefinidamente, p_n tende ao comprimento da circunferência e h tende ao raio. A área do círculo é então:

$$S = \frac{2\pi R \cdot R}{2}$$

$$S = \pi R^2$$

Existem várias outras maneiras de demonstrar a fórmula da área do círculo. Recomendamos ao leitor a consultar o livro "Medida e Forma em Geometria", do professor Elon, onde o autor, além de apresentar uma abordagem prática para a demonstração, prova rigorosamente que a área do círculo é realmente πR^2 , mostrando que ela não pode ser nem maior nem menor.

3.3.6 Áreas de setores

Frequentemente, precisaremos calcular áreas de setores. Observe que a área de um setor é proporcional ao ângulo central ou ao comprimento do seu arco. Para justificar isso, basta notar que, ao dobrar o ângulo central, a área do setor também dobra; ao triplicar o ângulo central, a área do setor triplica, e assim por diante.

Feitas as considerações, vamos deduzir a fórmula a partir das considerações mencionadas anteriormente.

Seja $A = \pi R^2$ a área do círculo de raio R e S a área do setor circular. Por proporção temos que

$$\frac{S}{A} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Essa proporção nos diz que a razão entre a área do setor S e a área total do círculo A é igual à razão entre o ângulo central α em graus do setor e o ângulo total de um círculo completo,

que é 360° .

Agora, substituímos A pela área do círculo:

$$\frac{S}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Para isolar S, multiplicamos ambos os lados da equação por πR^2 :

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2$$

Portanto, a fórmula acima expressa a área de um setor cujo ângulo central mede α em graus.

Por outro lado, como a área do setor também é proporcional ao comprimento L do seu arco, podemos exprimir essa área assim:

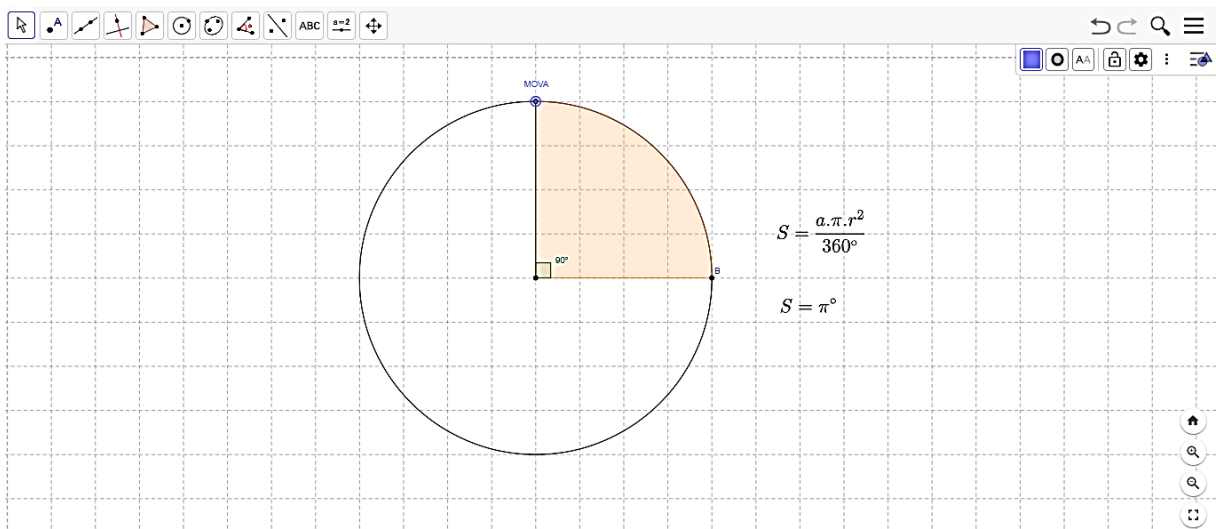
$$S = \frac{L}{2\pi R} \cdot \pi R^2$$

$$S = \frac{LR}{2}$$

uma fórmula bastante interessante, pois dá a ideia de um triângulo de comprimento L e altura R.

Agora, vamos explorar um exemplo interativo sobre áreas de setores circulares no GeoGebra: basta mover o ponto 'MOVA' para visualizar a área S do setor. Neste exemplo, o círculo tem um raio de 4 unidades.

Figura: 32 - Área do setor na prática



Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/juytmbfe>. Acesso em: 5 de abr. de 2024.

E ainda de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 271), “[...] os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, [...]”.

Agora, no capítulo 4, vamos aplicar os conceitos discutidos até o momento, por meio de uma proposta de formação continuada.

4 UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PAUTADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM/DE ÁREA DE FIGURAS PLANA

Neste capítulo, apresentaremos cinco problemas modelo para a formação continuada. O leitor poderá, dependendo do público-alvo, escolher outros problemas disponíveis no anexo A desta dissertação e adequá-los conforme nossa proposta. Conforme discutido em capítulos anteriores, Polya (2006) propõe quatro fases para a resolução de um problema: compreensão, elaboração de um plano, execução do plano e verificação. Para esta última fase, utilizaremos o software de geometria dinâmica GeoGebra, construindo as figuras para verificar as respostas.

4.1 Resolução comentada de problema modelo 1

Para o Problema-Modelo 1, apresentamos as seguintes justificativas para escolha, conforme detalhado no quadro abaixo:

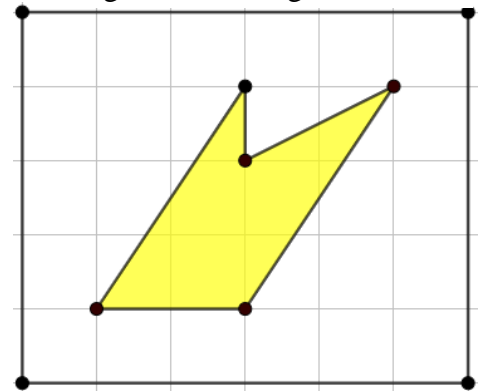
Aspectos	Justificativa
Múltiplas Soluções	A questão apresenta diversas soluções, pois há vários caminhos que podem ser explorados para obter a resposta, incentivando o pensamento crítico e criativo.
Interatividade	A utilização de diálogos durante a resolução do problema torna o aprendizado mais dinâmico e interativo, promovendo a participação ativa dos alunos, a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento.
Uso do GeoGebra	O GeoGebra foi escolhido por sua capacidade de realizar construções geométricas precisas, como a representação de segmentos como $\sqrt{2}$, algo inviável de se

	realizar com materiais físicos no mundo real.
Construção com Régua e Compasso	As noções de construção com régua compasso é essencial para construir figuras simples ou mais complexas no Geogebra.

Problema-Modelo 1. (OBMEP 1ª FASE NÍVEL 3 - 2023) A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado e 30 cm^2 . Qual é a área, em cm^2 , de cada quadradinho do lado quadriculado?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

Figura: 33 - Polígono amarelo



Fonte: Próprio autor

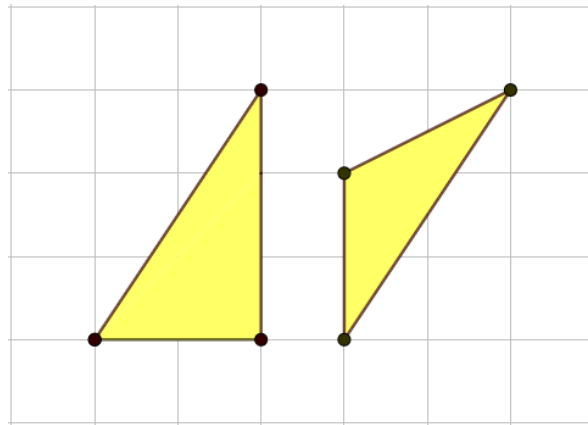
Resolução:

1ª fase: Compreensão e Interpretação

Nessa fase, o professor-formador propõe uma leitura individual e coletiva do problema. Em seguida, ele faz algumas perguntas à turma para analisar o nível de compreensão. Um possível diálogo seria o seguinte:

- Professor: Maria, o que é pedido no problema?
- Maria: a área de cada quadradinho.
- Professor: João, quais são os dados do problema?
- João: A área do polígono amarelo é de 30 cm^2 , e os vértices do polígono são pontos do quadriculado.
- Professor: Muito bem! Carlos, considerando que os vértices do polígono são pontos do quadriculado, é possível dividir essa figura amarela em figuras mais simples utilizando esses pontos?
- Carlos: Sim
- Professor: Como?
- Carlos: Posso dividir as figuras em triângulos da seguinte maneira:

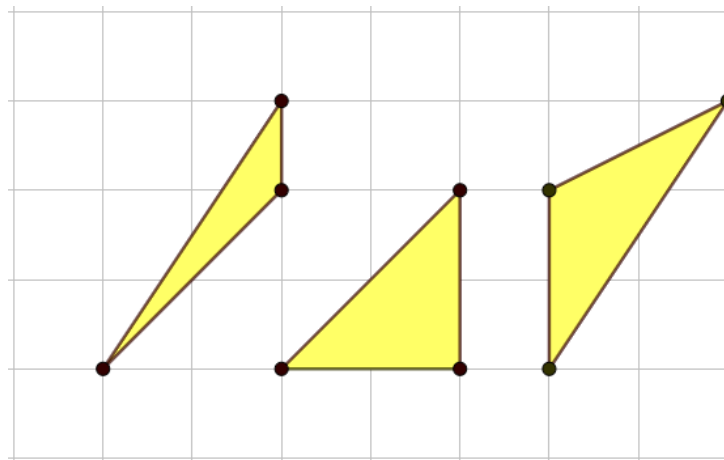
Figura: 34 - Dois triângulos amarelos



Fonte: Próprio autor

- Professor: Alguém tem outra maneira?
- Ricardo: Eu, professor.
- Professor: Qual seria, Ricardo?
- Ricardo: Assim:

Figura: 35 - Três triângulos amarelos



Fonte: Próprio autor

- Professor: Ótimo! Turma, é possível determinar a área de cada triângulo no exemplo do Carlos e do Ricardo?
- Turma: Achamos que sim.
- Professor: Ok. Turma, qual seria a fórmula para calcular a área de cada triângulo?
- Turma: $(\text{base} \times \text{altura})/2$
- Professor: Luana, conhecemos a base e altura dos triângulos?
- Luana: Não, mas como os pontos do quadriculado determinam segmentos iguais, podemos 'chamar' x o lado de cada segmento do quadriculado.

- Professor: Muito bem, Luana!
- Professor: Cristina, somando a área dos dois triângulos no exemplo de Carlos ou os três triângulos no exemplo de Ricardo, qual seria o valor desta soma?
- Cristina: Seria 30, pois corresponde a área do polígono amarelo.
- Professor: Perfeito. César, se conseguirmos “achar” o valor de x , resolveremos nosso problema?
- César: Sim, pois a área de cada quadradinho é $x \cdot x = x^2$.
- Professor: Ótimo, turma! Então parece que o problema está bem entendido.

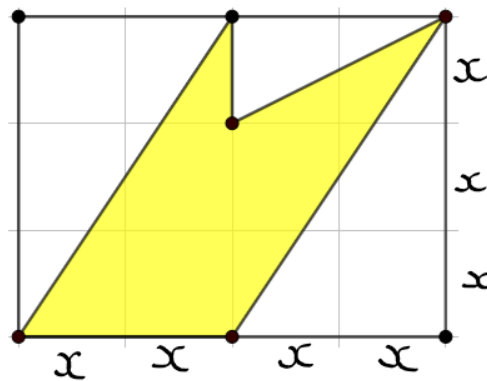
2ª fase: Elaboração de um plano

Nesta fase, o professor deve fazer com que os discentes proponham estratégias para solucionar, ou seja, criem um plano.

Um possível diálogo para esta etapa:

- Professor: Alguém já resolveu este problema antes?
- Fabrício: não, mas já vi algo parecido.
- Professor: Fabrício, do que se tratava o problema?
- Fabrício: calcular a área de triângulos.
- Professor: Certo, como seria o procedimento para este problema?
- Fabrício: Com a ideia de Carlos, podemos calcular a área dos dois triângulos e igualar a área do polígono amarelo, com isso ficaria apenas o x^2 na sentença matemática.
- Professor: Fabrício, isso vale para o exemplo de Ricardo?
- Fabrício: Sim, pois os três triângulos equivalem a área do polígono amarelo.
- Professor: Muito bem! Alguém tem mais alguma sugestão?
- Fernando: Sim, professor. Podemos calcular a área do retângulo com lados $3x$ e $4x$ e, em seguida, subtrair as áreas dos triângulos que não fazem parte do polígono amarelo. Assim, a área restante será igual à área do polígono amarelo.

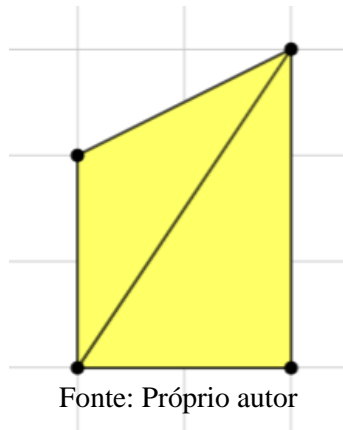
Figura: 36 - Retângulos de lados $3x$ por $4x$



Fonte: Próprio autor

- Professor: Show! Turma, mais alguma ideia?
- Paulo: Observando a ideia do Carlos, podemos realizar um movimento rígido na horizontal da seguinte forma: ‘pegue’ o triângulo da direita e mova-o até que fique justaposto ao triângulo da esquerda, formando um trapézio.

Figura: 37 - Trapézio formado pelo movimento rígido – Parte 1



Fonte: Próprio autor

- Professor: Muito bem, Paulo! Agora vamos executar esses planos.

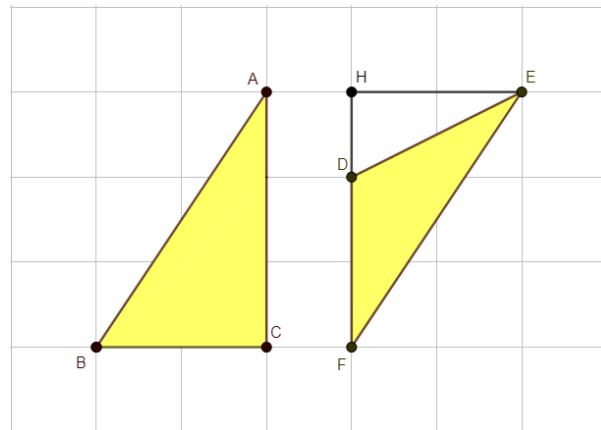
3ª Execução do plano

Nesta fase, os alunos executam os planos traçados na fase anterior, verificando cada passo a ser dado. No nosso problema modelo 1, temos 4 planos, passaremos agora para analisar cada plano, vamos começar pelo de Fabrício.

Plano de Fabrício:

Vamos dividir a figura amarela em dois triângulos, denotados como ABC e EDF . Considere também o segmento HE como a altura do triângulo EDF . Veja a figura abaixo:

Figura: 38 - Divisão em dois triângulos



Fonte: Próprio autor

Agora, calculando a área do triângulo ABC somada à área do triângulo EDF e igualando à área do polígono amarelo, temos:

$$\frac{BC \cdot AC}{2} + \frac{DF \cdot HE}{2} = 30 \rightarrow \frac{2x \cdot 3x}{2} + \frac{2x \cdot 2x}{2} = 30 \rightarrow 3x^2 + 2x^2 = 30 \rightarrow 5x^2 = 30 \rightarrow$$

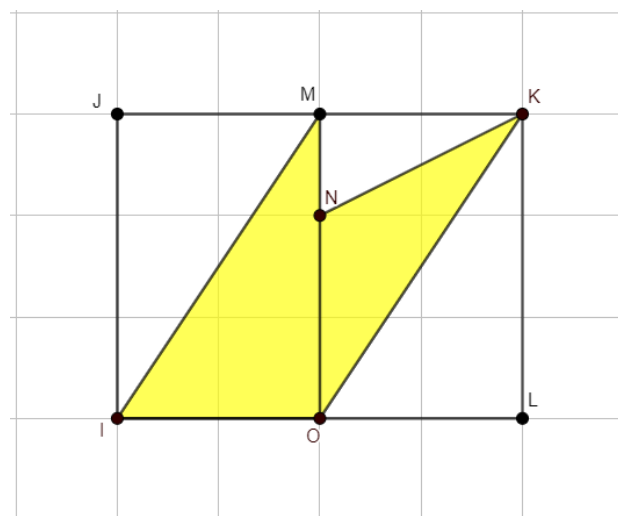
$$\rightarrow 5x^2 = 30 \rightarrow x^2 = 6, \text{ que é a área de cada quadradinho.}$$

Pronto, agora vamos ver a execução do plano de Fernando.

Plano de Fernando:

Vamos utilizar a subtração de áreas da seguinte forma: denotando por IJKL o retângulo de lados $4x$ por $3x$ que compreende o polígono amarelo, a área do polígono amarelo será a área do retângulo menos a soma das áreas dos três triângulos que não fazem parte do polígono amarelo. Vejamos:

Figura: 39 - Retângulo IJKL



Fonte: Próprio autor

$$30 = IL.LK - \left(\frac{JM.IJ}{2} + \frac{MN.MK}{2} + \frac{OL.LK}{2} \right) \rightarrow 30 = 4x.3x - \left(\frac{2x.3x}{2} + \frac{x.2x}{2} + \frac{2x.3x}{2} \right)$$

$$\rightarrow 30 = 12.x^2 - (3x^2 + x^2 + 3x^2) = 30 \rightarrow 30 = 12.x^2 - (7x^2) \rightarrow 30 = 5x^2 \rightarrow$$

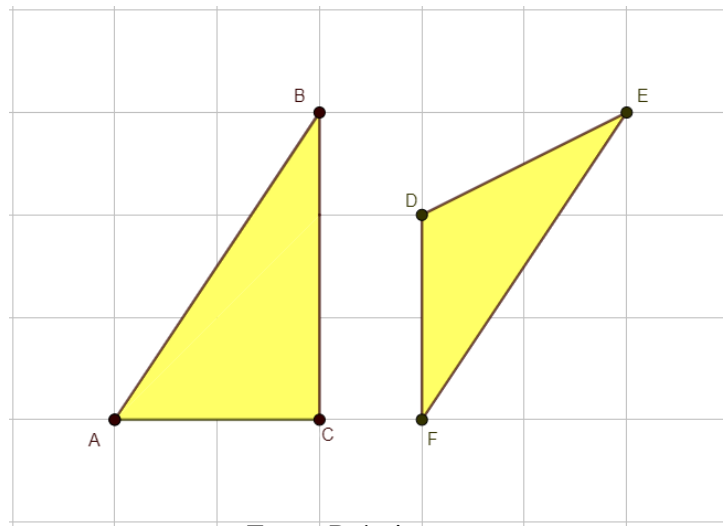
$$\frac{30}{5} = \frac{5x^2}{5}, x^2 = 6, \text{ ou seja, o valor que corresponde a \u00e1rea pedida.}$$

Plano de Paulo:

Aproveitando as notações dadas aos dois tri\u00e2ngulos por Fabr\u00edcio, vamos fazer um movimento r\u00edgido na horizontal da direita para a esquerda, fazendo com que o lado EF do tri\u00e2ngulo EDF coincida com o lado AB do tri\u00e2ngulo ABC. Veja a figura abaixo:

Antes do movimento.

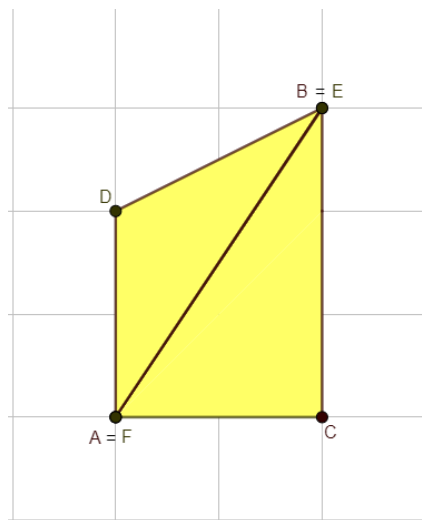
Figura: 40 - Tri\u00e2ngulos antes do movimento r\u00edgido



Fonte: Pr\u00f3prio autor

Depois do movimento.

Figura: 41 - Trap\u00e9zio formado pelo movimento r\u00edgido – Parte 2



Fonte: Pr\u00f3prio autor

Como a área amarela mede 30 cm^2 e corresponde a 4 quadradinhos mais a metade de dois quadradinhos, ou seja, 5 quadradinhos correspondem a uma área de 30 cm^2 . Assim, para determinar a área de cada quadradinho, basta dividir 30 por 5, resultando em 6 cm^2 por quadradinho.

Neste momento, seria interessante perguntar à turma qual solução foi mais simples e promover discussões.

Passando para a 4ª e última fase, que é a verificação.

4ª Verificação do plano

Neste momento, utilizaremos o software de geometria dinâmica GeoGebra para verificar a solução do problema. E para avaliar se o público-alvo conhece esta ferramenta ou já ouviu falar dela, o professor formador poderá fazer algumas perguntas, como: ‘Vocês conhecem esta ferramenta?’, ‘Sabem fazer alguma construção?’, ‘Já usaram em sala de aula?’. Dependendo das respostas, o professor pode solicitar que façam a construção ou constrói diretamente com público-alvo.

Como será nossa construção?

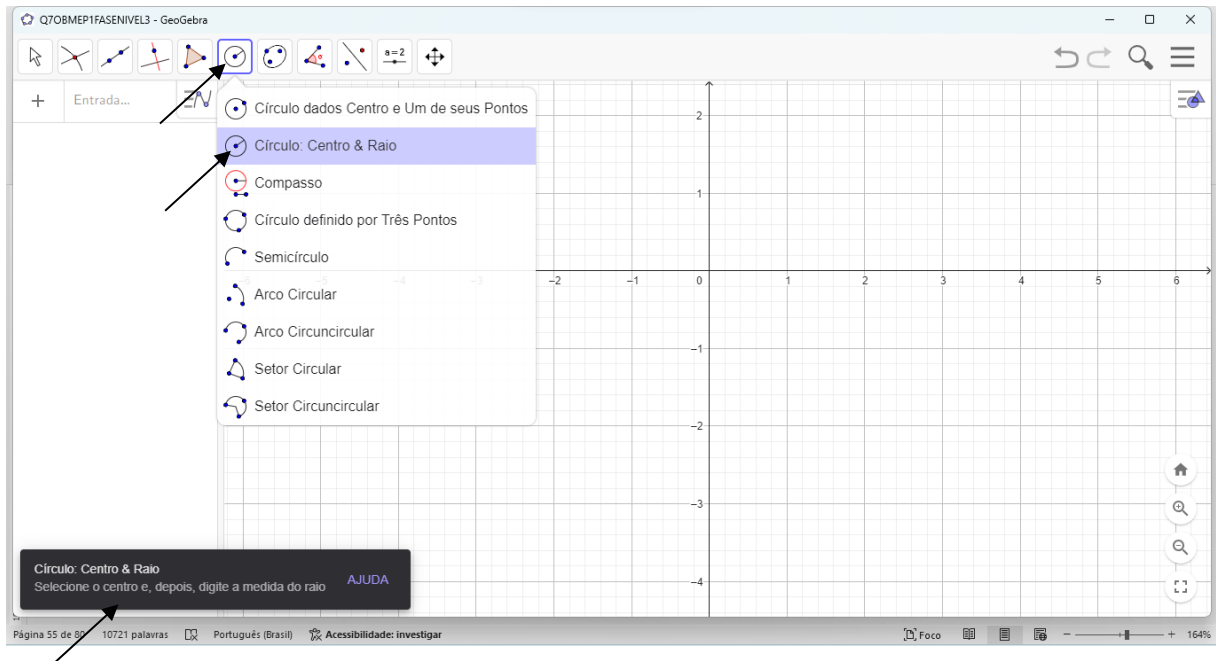
Como a área encontrada de cada quadrinho foi igual a 6, ou seja, $x^2 = 6$. Isto significa dizer que $x = \sqrt{6}$. Assim, a nossa verificação passa pela construção de quadrinhos de lados iguais a $\sqrt{6}$.

Agora, vamos proceder com a construção da figura amarela do problema, o que pode ser feito em conjunto com o público-alvo. Se a turma encontrar dificuldades com o software, o formador pode apresentar as ferramentas necessárias. Nas referências, há um link com material explicativo sobre todas as ferramentas do GeoGebra. A seguir, estão os passos para a construção:

1º Passo: Construção do Círculo de raio unitário

Clique no link, disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT. Acesso em: de mai. de 2024, para abrir o GeoGebra. Na barra de ferramentas, selecione o sexto grupo de ferramentas e clique em ‘Círculo centro e raio’. No canto inferior esquerdo do quadro, você verá uma dica sobre como criar o círculo.

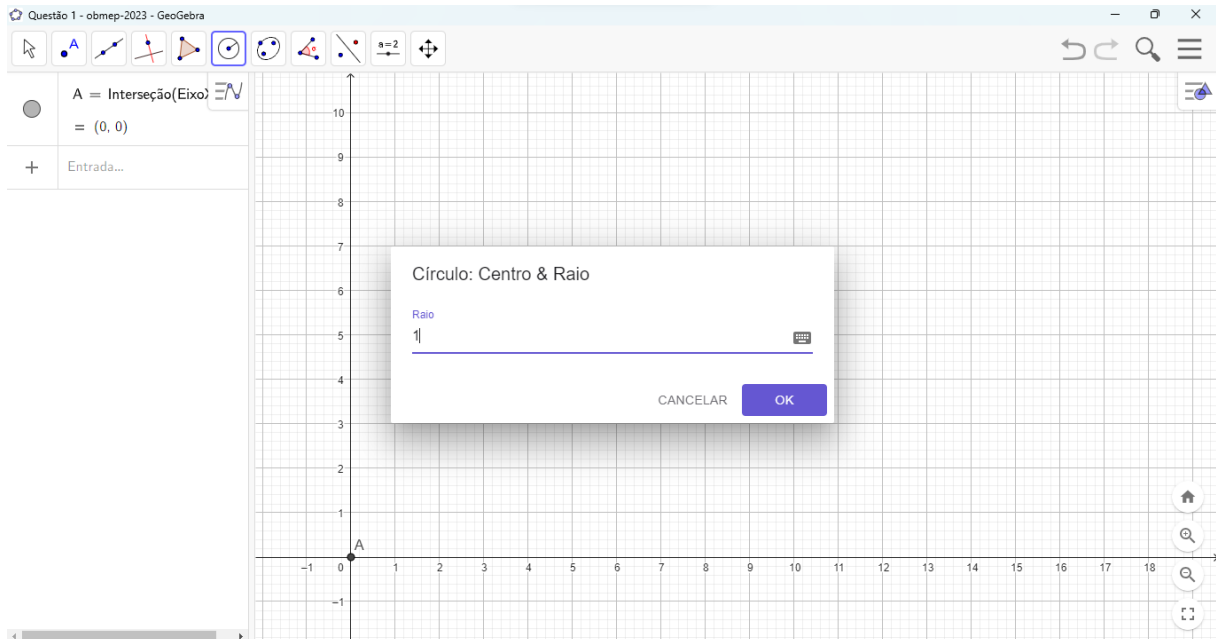
Figura: 42 - Círculo de raio unitário – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Selecione o centro e depois digite a medida do raio. Vamos escolher o centro como a origem do sistema de coordenadas e definir o raio como 1.

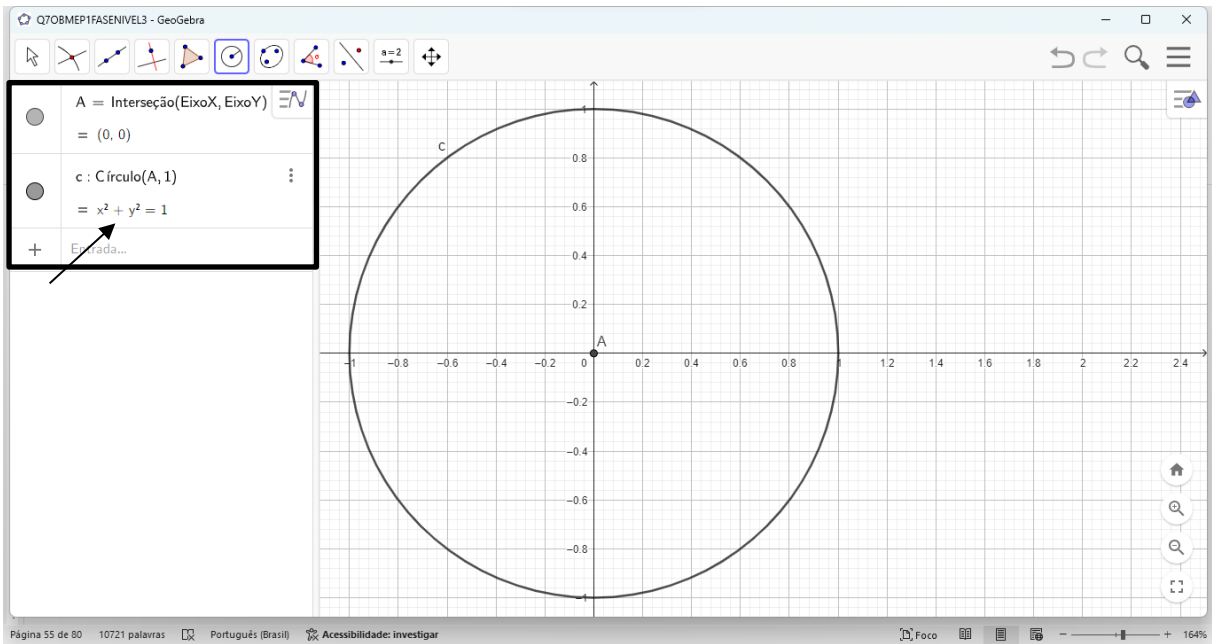
Figura: 43 - Círculo de raio unitário – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Observe na janela de álgebra o círculo c construído

Figura: 44 - Círculo de raio unitário – Parte 3

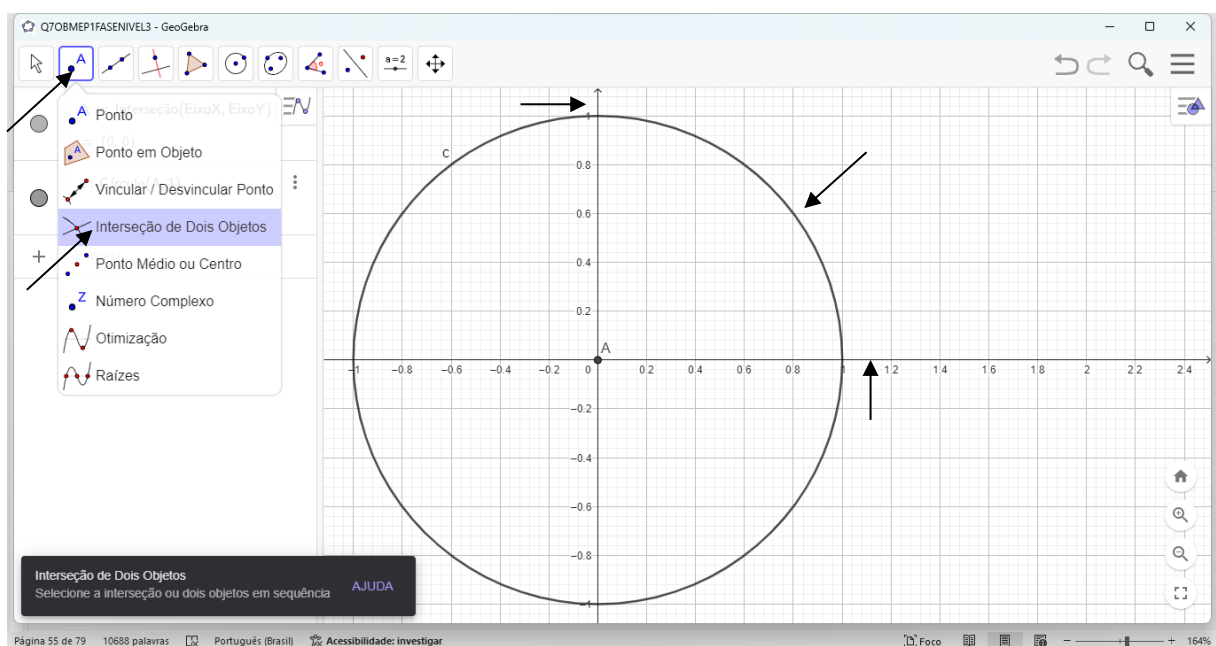


Fonte: Próprio autor

2º Passo: Construção do quadrado de lado unitário.

Com o círculo criado, vamos construir um quadrado com lado unitário. Primeiro, determinaremos as interseções do círculo com os eixos X e Y. Para isso, clique no segundo grupo de ferramentas e selecione 'Interseção de Dois Objetos'. Em seguida, clique no círculo e nos eixos para visualizar os pontos de interseção. Note que a ordem das letras dos pontos de interseção pode variar dependendo da sequência dos cliques.

Figura: 45 - Quadrado de lado unitário – Parte 1

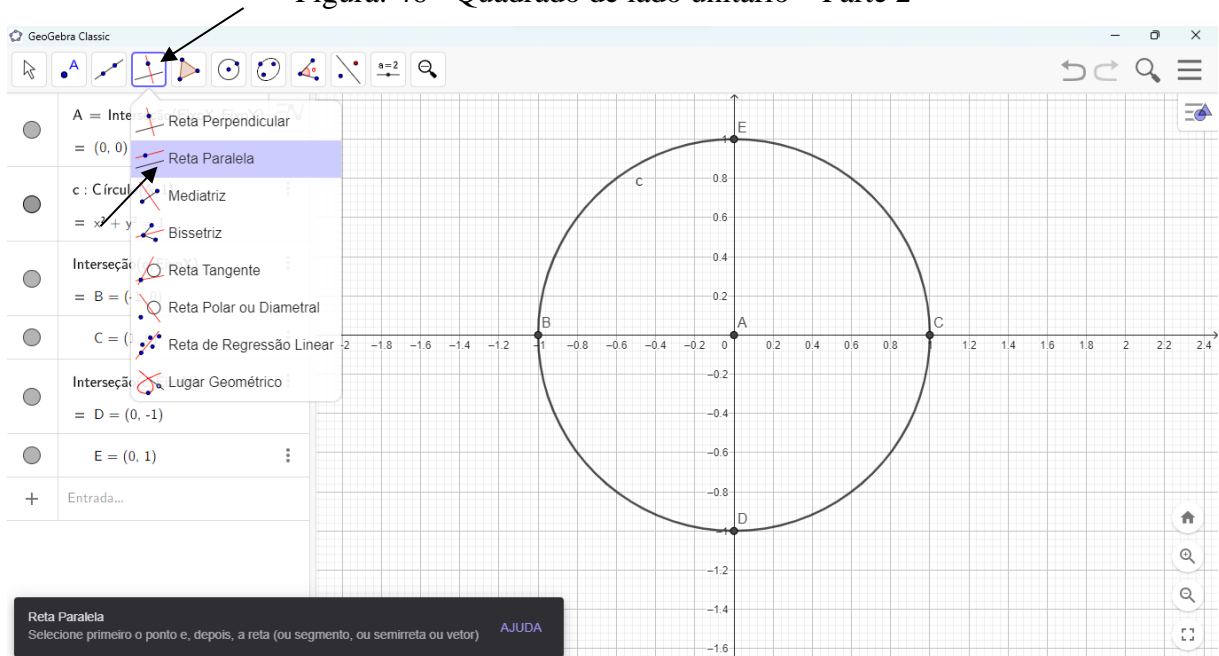


Fonte: Próprio autor

Com os pontos de intersecção com os eixos determinados, vamos passar por estes pontos retas paralelas e visualizar o ponto de intersecção destas retas. Clique no 4 grupo de ferramentas e em retas paralelas, agora clique no ponto C e no eixo Y, depois no ponto E e no eixo X. Para determinar a intersecção destas retas, fazemos da forma que já foi feito anteriormente, clique no 2º grupo de ferramentas e em Intersecção de Objetos, agora clique nas retas para visualizar o ponto. Vide figuras abaixo:

Para traçar paralelas aos eixos X e Y passando pelos pontos E e C, respectivamente, clique no quarto grupo de ferramentas e selecione ‘Retas Paralelas’.

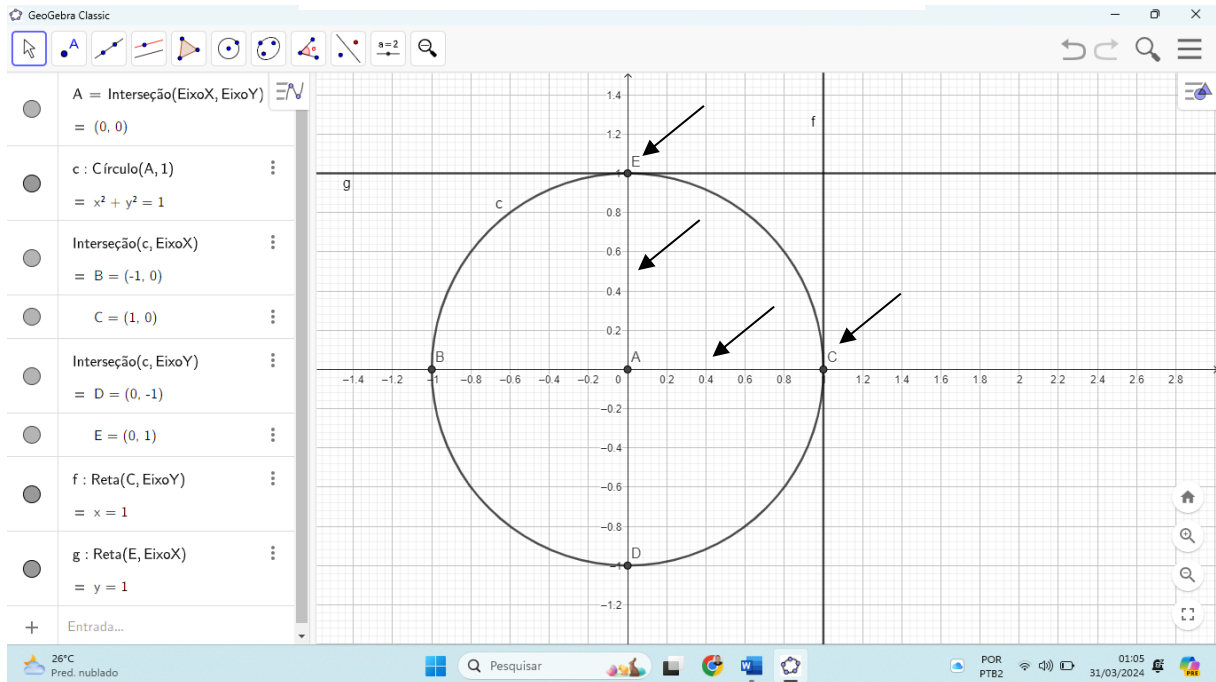
Figura: 46 - Quadrado de lado unitário – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Clique no ponto C e, em seguida, no eixo Y. Repita o processo para o ponto E e o eixo X.

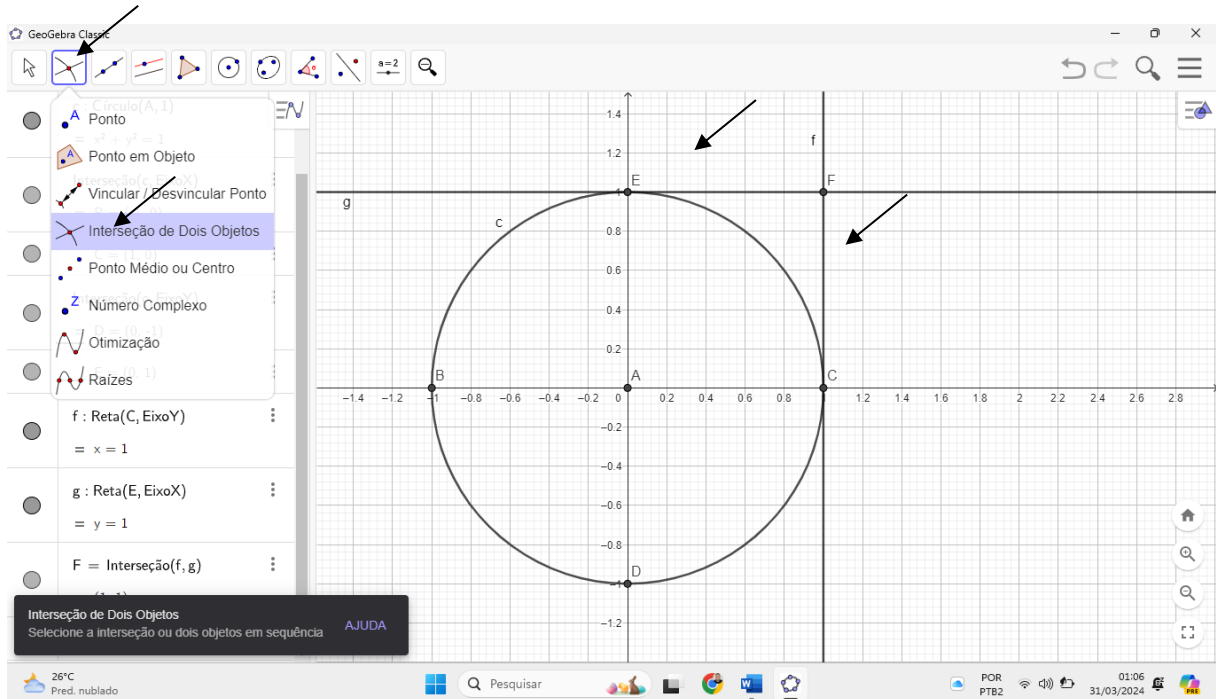
Figura: 47 - Quadrado de lado unitário – Parte 3



Fonte: Próprio autor

Em seguida, clique nas retas g e f para visualizar o ponto F, interseção. Com isso, construímos o quadrado ACFE de lado unitário.

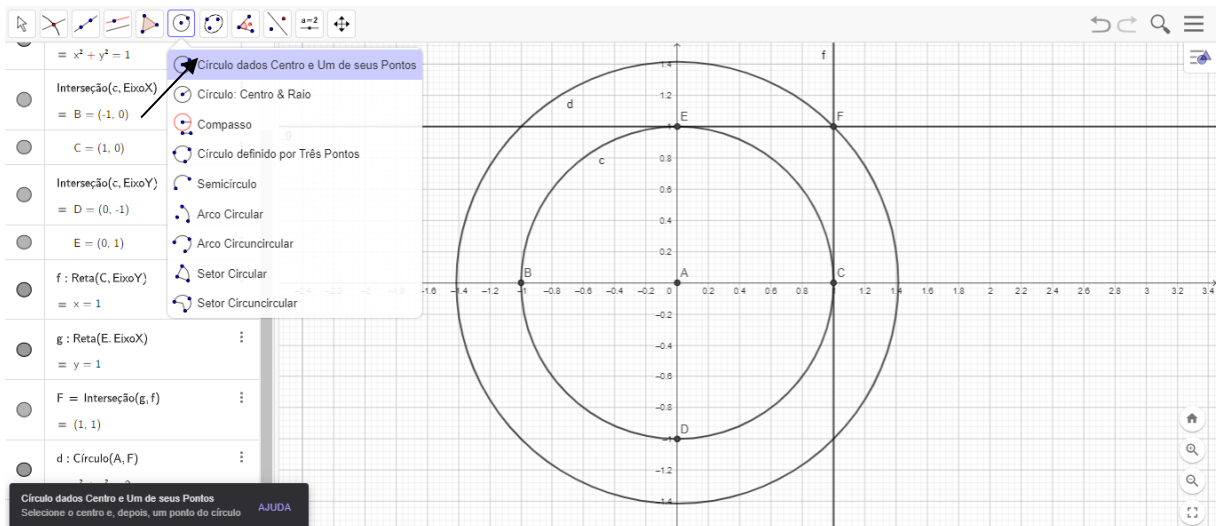
Figura: 48 - Quadrado de lado unitário – Parte 4



Fonte: Próprio autor

Com o quadrado ACFE de lado unitário construído, vamos agora construir um círculo de raio $\sqrt{2}$ para definir o segmento $\sqrt{2}$. Para isso, clique no sexto grupo de ferramentas e selecione ‘Círculo dados Centro e Um de seus Pontos’. Em seguida, clique nos pontos A e F para construir o círculo d (observe que AF é a diagonal do quadrado de lado unitário, cujo valor é $\sqrt{2}$, ou seja, $AF = \sqrt{2}$).

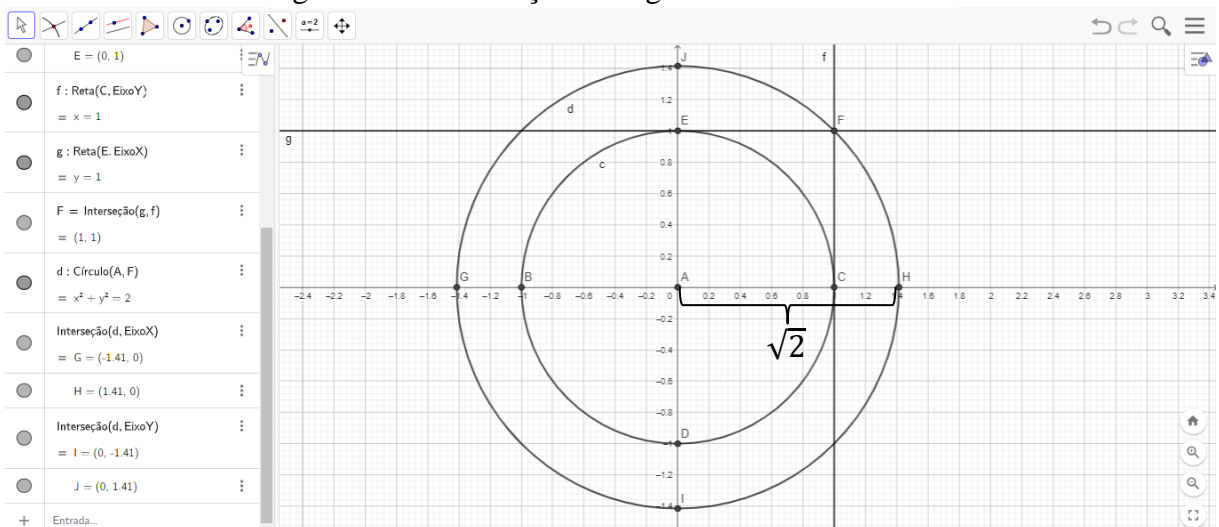
Figura: 49 - Construção do segmento $\sqrt{2}$ – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Agora, marque as interseções (Ponto H e J) do círculo de raio AF com os eixos X e Y. Como já utilizamos o procedimento de interseção entre círculo e eixos anteriormente, basta repetir os passos de maneira análoga. Observe que o segmento $AH = \sqrt{2}$.

Figura: 50 - Construção do segmento $\sqrt{2}$ – Parte 2

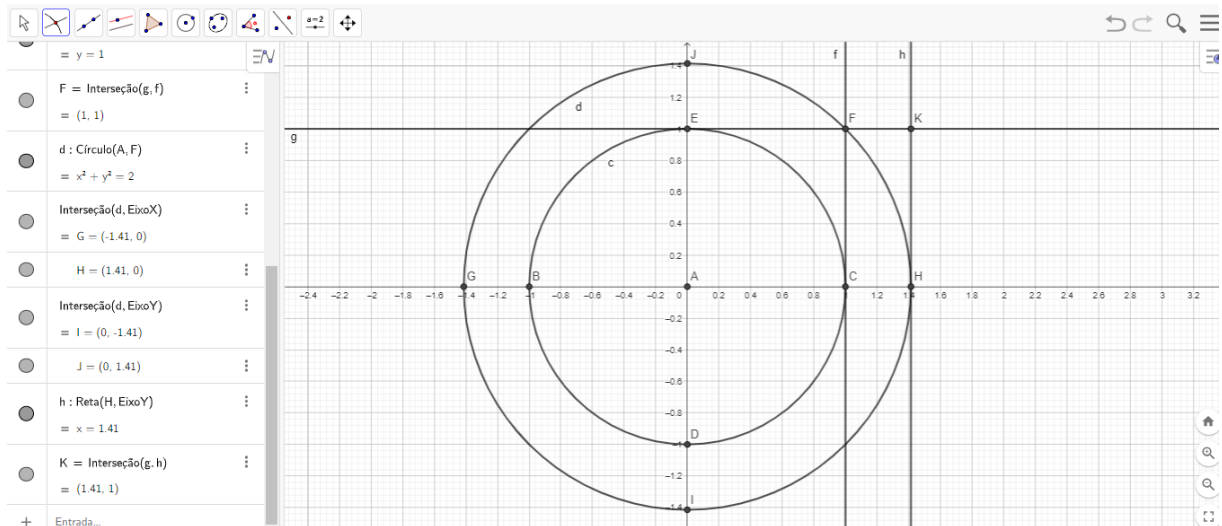


Fonte: Próprio autor

4º Passo: Construção do segmento $\sqrt{3}$

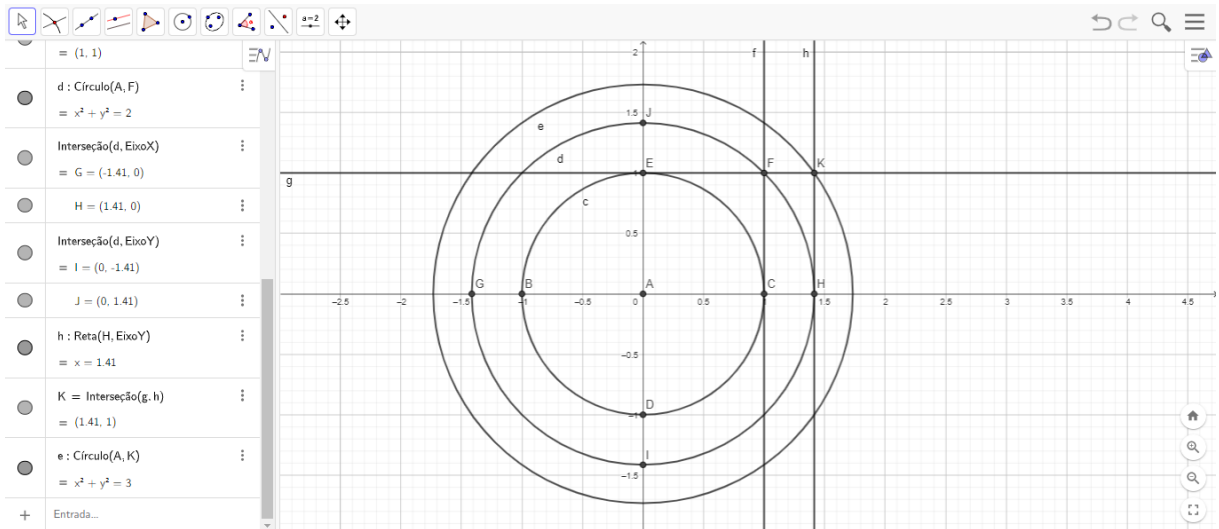
Para a construção do segmento $\sqrt{3}$, seguimos os mesmos passos usados para o segmento $\sqrt{2}$. Antes disso, vamos traçar uma reta h paralela ao eixo Y que passe por H e marcar sua interseção (ponto K) com a reta g , como esses procedimentos de construção já foram feitos anteriormente, basta seguir os mesmos comandos. Com isso, temos o retângulo $AHKE$ como indicado na figura abaixo.

Figura: 51 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 1



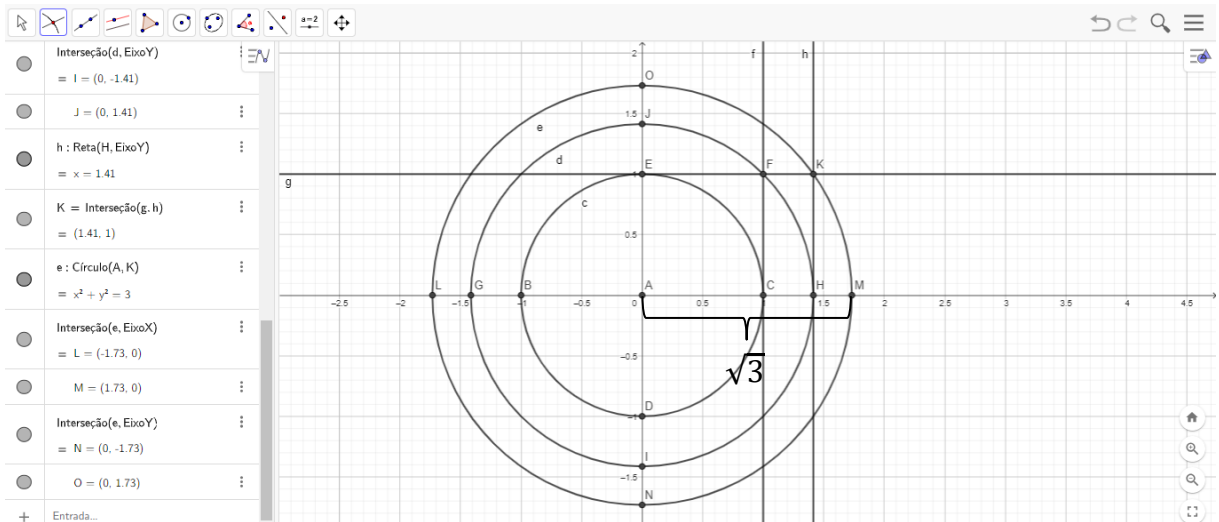
Fonte: Próprio autor

Agora, com o retângulo $AHKE$ de lado $\sqrt{2}$ por 1 construído, vamos construir um círculo de raio $\sqrt{3}$ para definir o segmento $\sqrt{3}$. Para isso, clique no sexto grupo de ferramentas e selecione ‘Círculo dados Centro e Um de seus Pontos’. Em seguida, clique nos pontos A e K para construir o círculo e (observe que AK é a diagonal do retângulo $AHKE$, cujo valor é $\sqrt{3}$, ou seja, $AK = \sqrt{3}$

Figura: 52 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 2

Fonte: Próprio autor

Agora, marque as interseções (Ponto M e O) do círculo de raio AK com os eixos X e Y. Como já utilizamos o procedimento de interseção entre círculo e eixos anteriormente, basta repetir os passos de maneira análoga. Observe que o segmento $AM = \sqrt{3}$.

Figura: 53 - Construção do segmento $\sqrt{3}$ – Parte 3

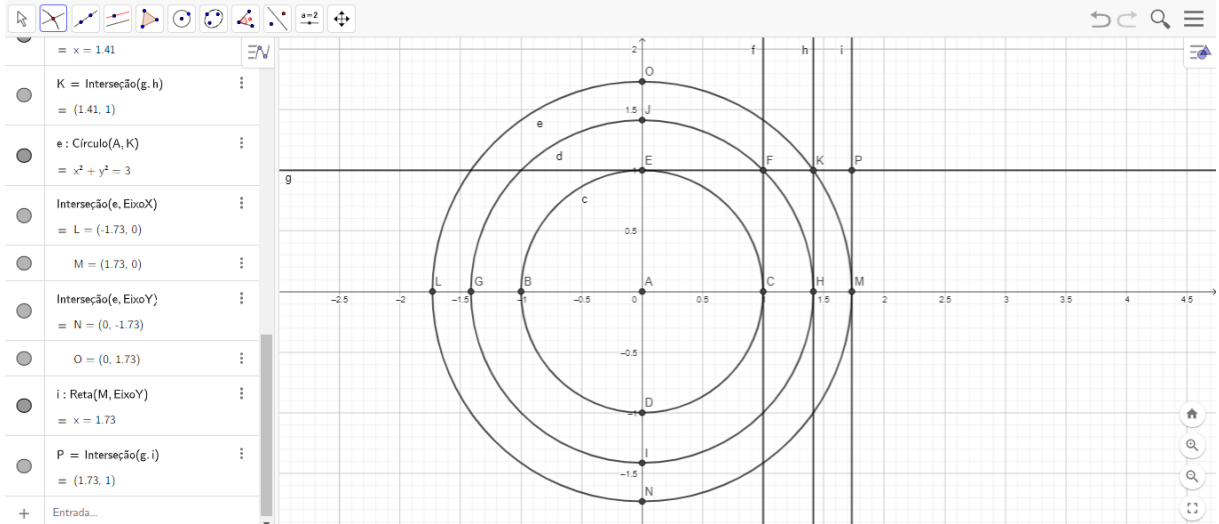
Fonte: Próprio autor

5º Passo: Construção do segmento $\sqrt{4}$

Para a construção do segmento $\sqrt{4}$, seguimos os mesmos passos usados para o segmento $\sqrt{3}$. Antes disso, vamos traçar uma reta i paralela ao eixo Y que passe por M e marcar sua interseção (ponto P) com a reta g, como esses procedimentos de construção já foram feitos

anteriormente, basta seguir os mesmos comandos. Com isso, temos o retângulo AMPE como indicado na figura abaixo.

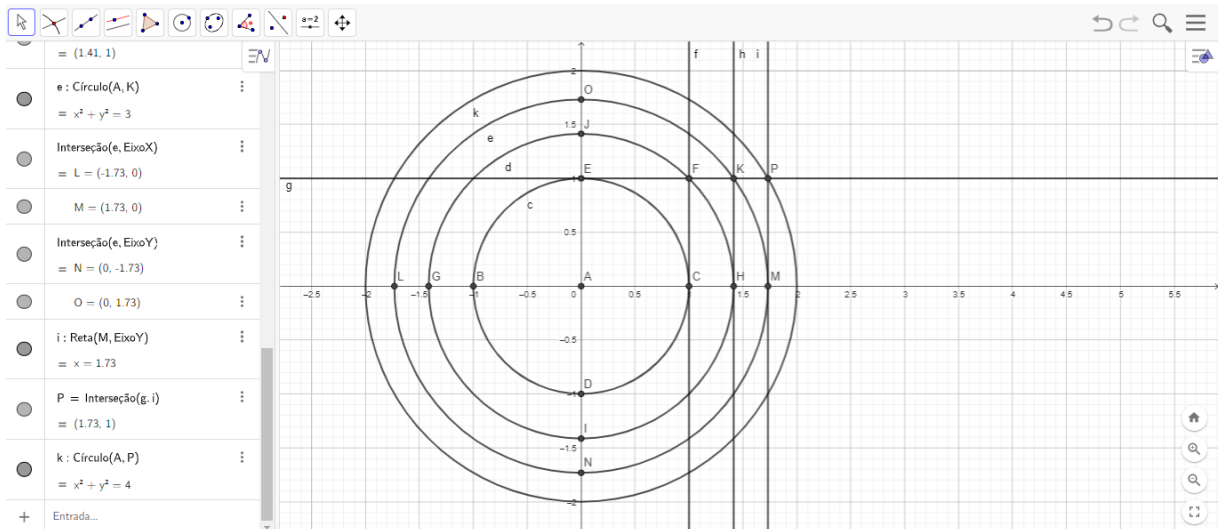
Figura: 54 - Construção do segmento $\sqrt{4}$ – Parte 1



Fonte: Próprio autor

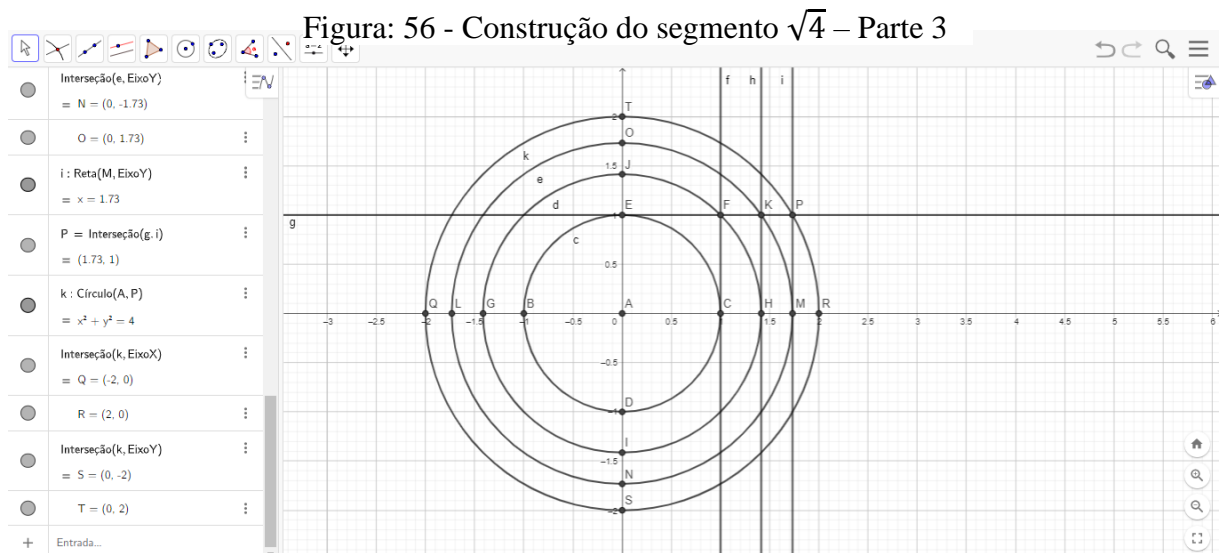
Agora, com o retângulo AMPE de lado $\sqrt{3}$ por 1 construído, vamos construir um círculo de raio $\sqrt{4}$ para definir o segmento $\sqrt{4}$. Para isso, clique no sexto grupo de ferramentas e selecione ‘Círculo dados Centro e Um de seus Pontos’. Em seguida, clique nos pontos A e P para construir o círculo k (observe que AP é a diagonal do retângulo AMPE, cujo valor é $\sqrt{4}$, ou seja, $AP = \sqrt{4}$

Figura: 55 - Construção do segmento $\sqrt{4}$ – Parte 2



Fonte: Próprio autor

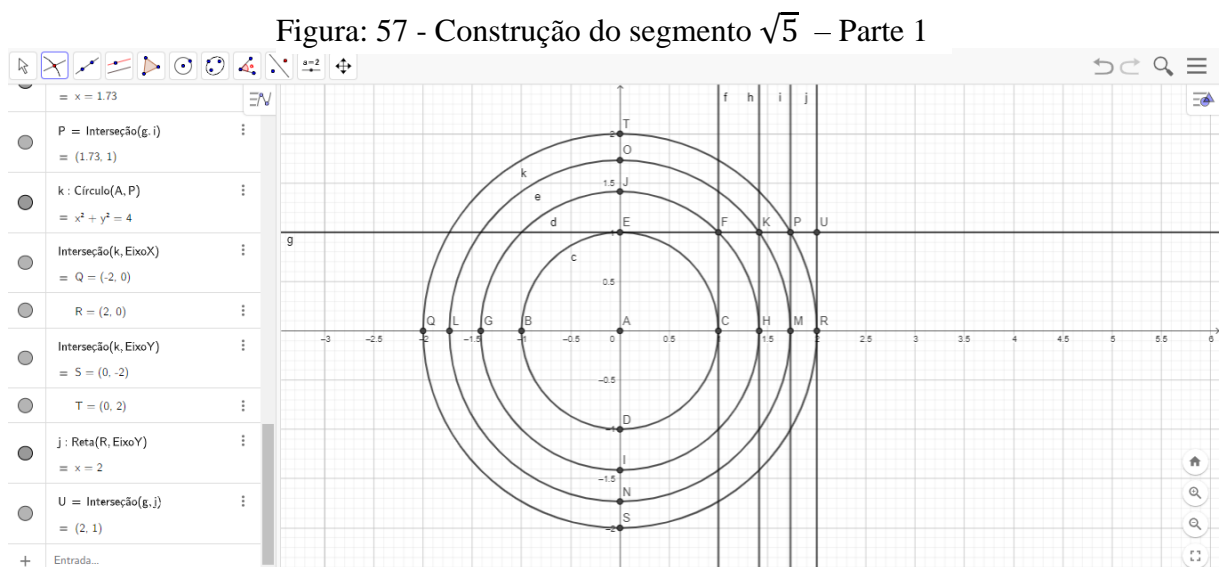
Agora, marque as interseções (Ponto R e T) do círculo de raio AP com os eixos X e Y. Como já utilizamos o procedimento de interseção entre círculo e eixos anteriormente, basta repetir os passos de maneira análoga. Observe que o segmento $AR = \sqrt{4}$



Fonte: Próprio autor

5º Passo: Construção do segmento $\sqrt{5}$

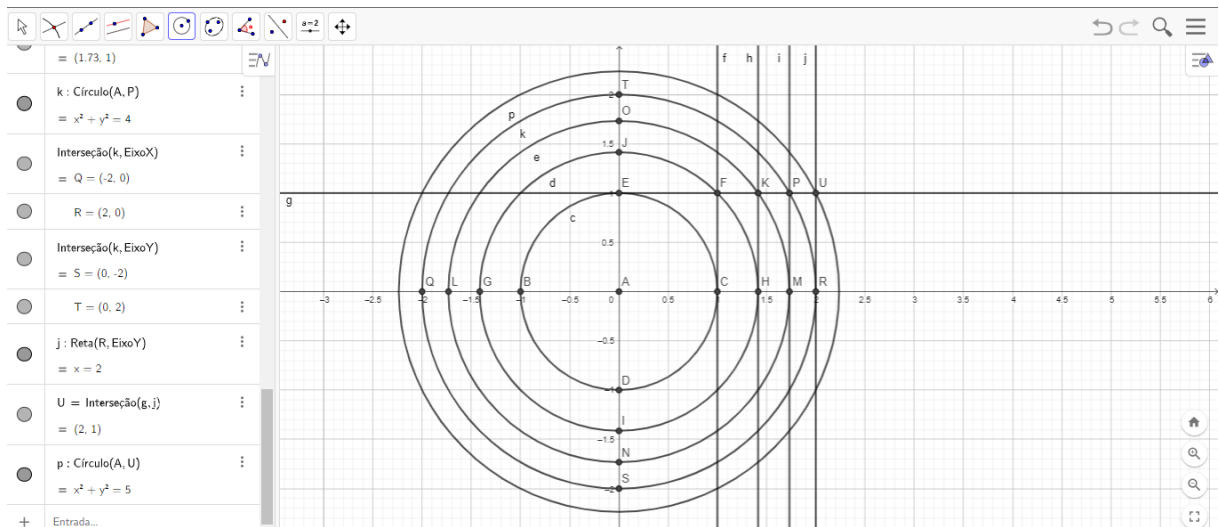
Para a construção do segmento $\sqrt{5}$, seguimos os mesmos passos usados para o segmento $\sqrt{4}$. Antes disso, vamos traçar uma reta j paralela ao eixo Y que passe por R e marcar sua interseção (ponto U) com a reta g, como esses procedimentos de construção já foram feitos anteriormente, basta seguir os mesmos comandos. Com isso, temos o retângulo ARUE como indicado na figura abaixo.



Fonte: Próprio autor

Agora, com o retângulo ARUE de lado $\sqrt{4}$ por 1 construído, vamos construir um círculo de raio $\sqrt{5}$ para definir o segmento $\sqrt{5}$. Para isso, clique no sexto grupo de ferramentas e selecione ‘Círculo dados Centro e Um de seus Pontos’. Em seguida, clique nos pontos A e U para construir o círculo p (observe que AU é a diagonal do retângulo ARUE, cujo valor é $\sqrt{5}$, ou seja, $AU = \sqrt{5}$).

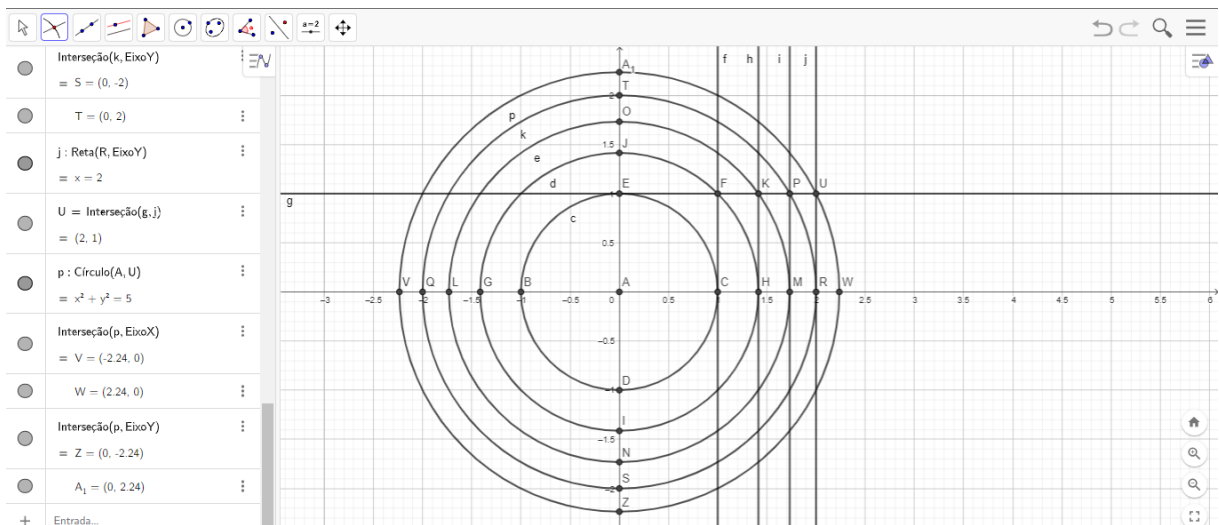
Figura: 58 - Construção do segmento $\sqrt{5}$ – Parte 2



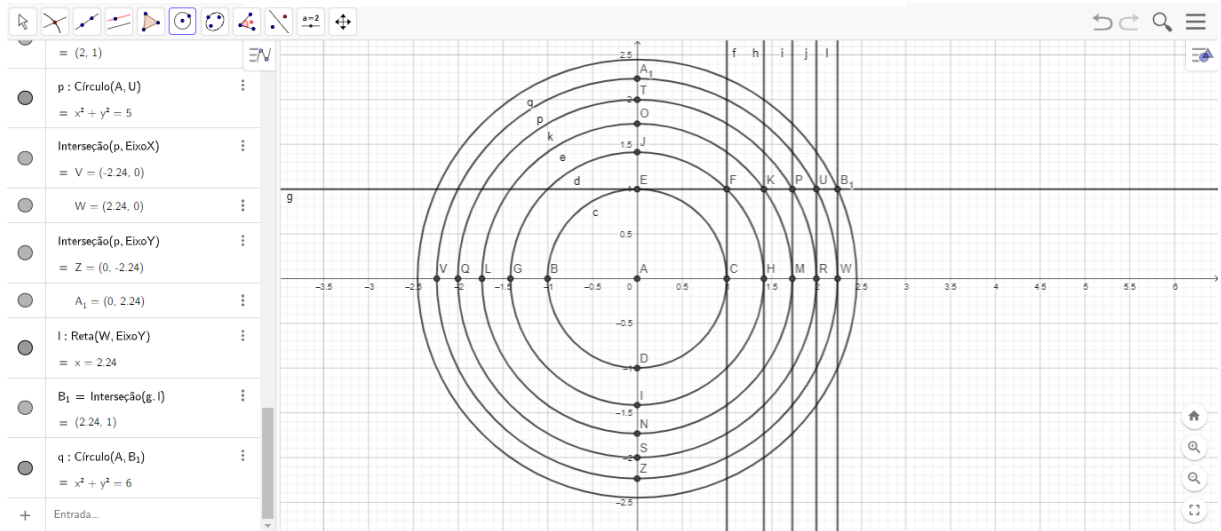
Fonte: Próprio autor

Agora, marque as interseções (Ponto W e A_1) do círculo de raio AU com os eixos X e Y. Como já utilizamos o procedimento de interseção entre círculo e eixos anteriormente, basta repetir os passos de maneira análoga. Observe que o segmento $AW = \sqrt{5}$.

Figura: 59 - Construção do segmento $\sqrt{5}$ – Parte 3

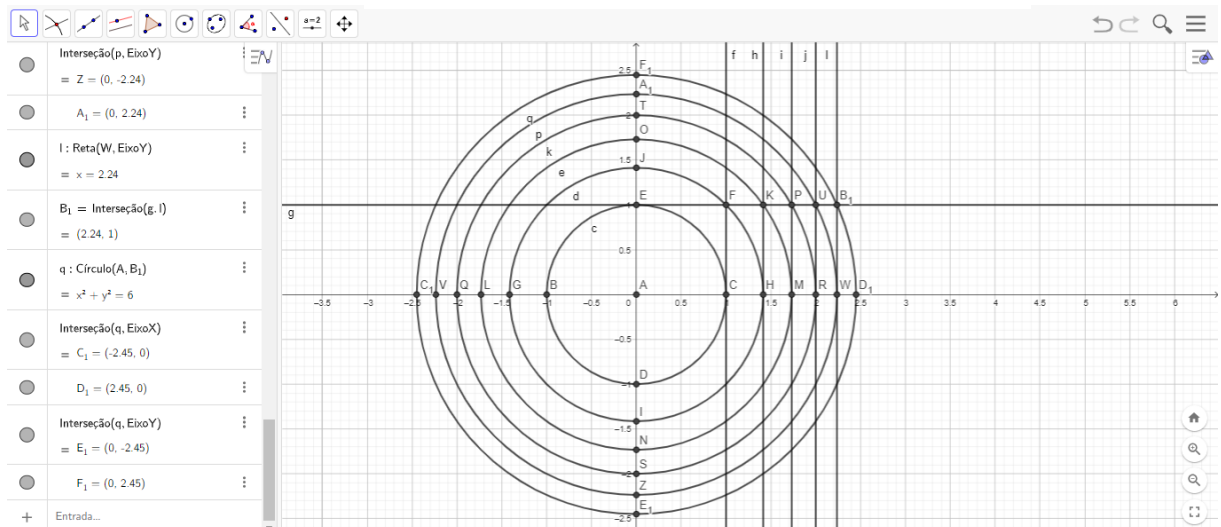


Fonte: Próprio autor

Figura: 61- Construção do segmento $\sqrt{6}$ – Parte 2

Fonte: Próprio autor

Agora, marque as interseções (Ponto D_1 e F_1) do círculo de raio AB_1 com os eixos X e Y. Como já utilizamos o procedimento de interseção entre círculo e eixos anteriormente, basta repetir os passos de maneira análoga. Observe que o segmento $AD_1 = \sqrt{6}$.

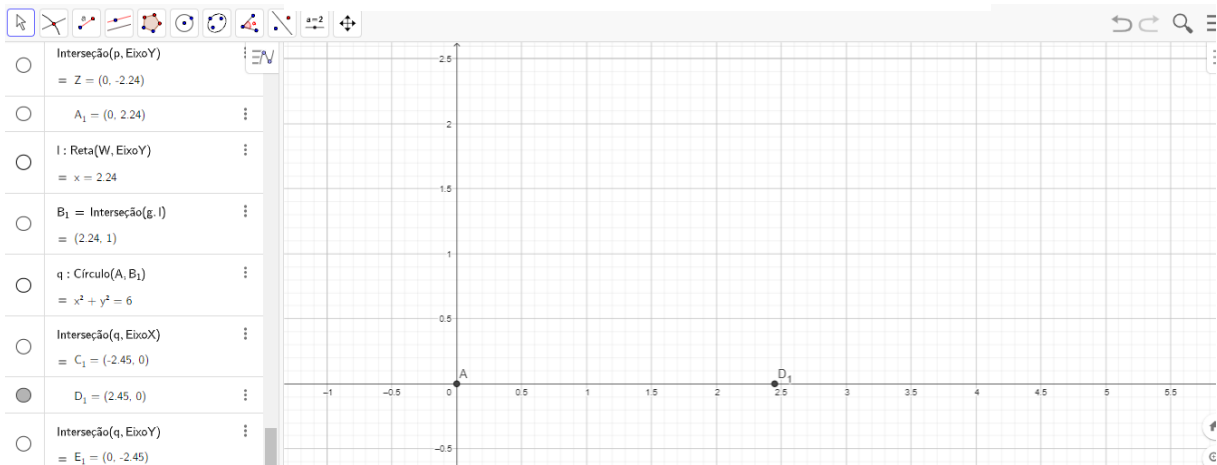
Figura: 62 - Construção do segmento $\sqrt{6}$ – Parte 3

Fonte: Próprio autor

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/z9gezcgq>. Acesso em: 20 de mai. de 2024

Tudo o que precisamos fazer agora é construir a malha quadriculada com o segmento de comprimento $\sqrt{6}$ e desenhar o polígono amarelo nessa malha para verificar a resposta. Primeiro, vamos ocultar (veja na janela de álgebra os elementos desmarcados) todos os elementos da última construção, deixando apenas o segmento $AD_1 = \sqrt{6}$. Vejamos:

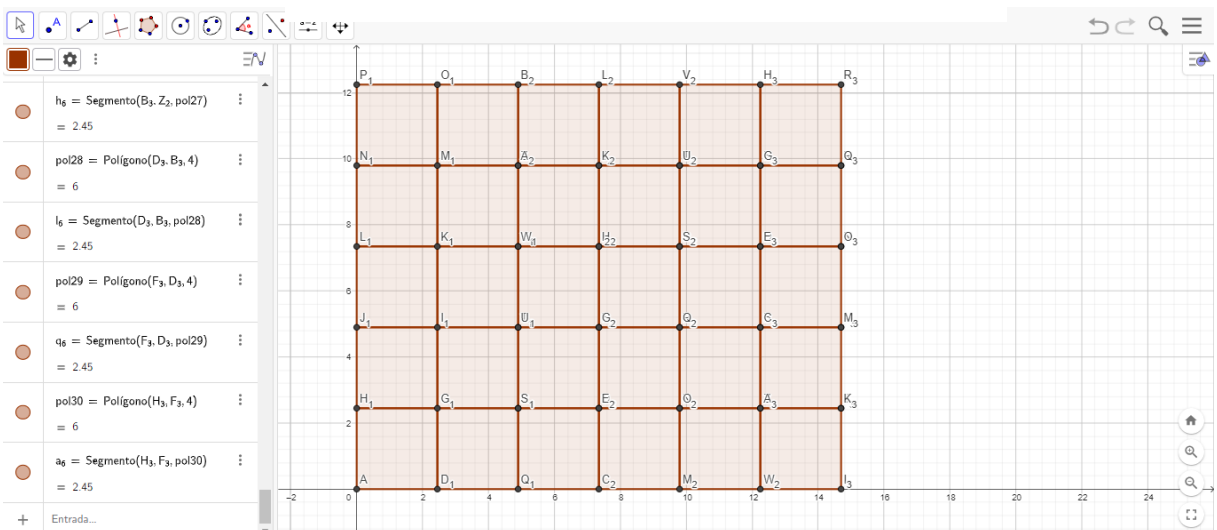
Figura 63 - Construção do polígono amarelo – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Agora, vamos construir uma sequência de quadrados com lado $AD_1 = \sqrt{6}$. No quinto grupo de ferramentas, selecione a opção "Polígono Regular". Em seguida, clique nos pontos A e D_1 . Na janela que abrirá, digite 4, que corresponde ao quadrado. Continue este processo clicando sequencialmente em $H_1G_1J_1I_1, \dots, P_1O_1G_1D_1, I_1G_1, \dots, H_3G_3$.

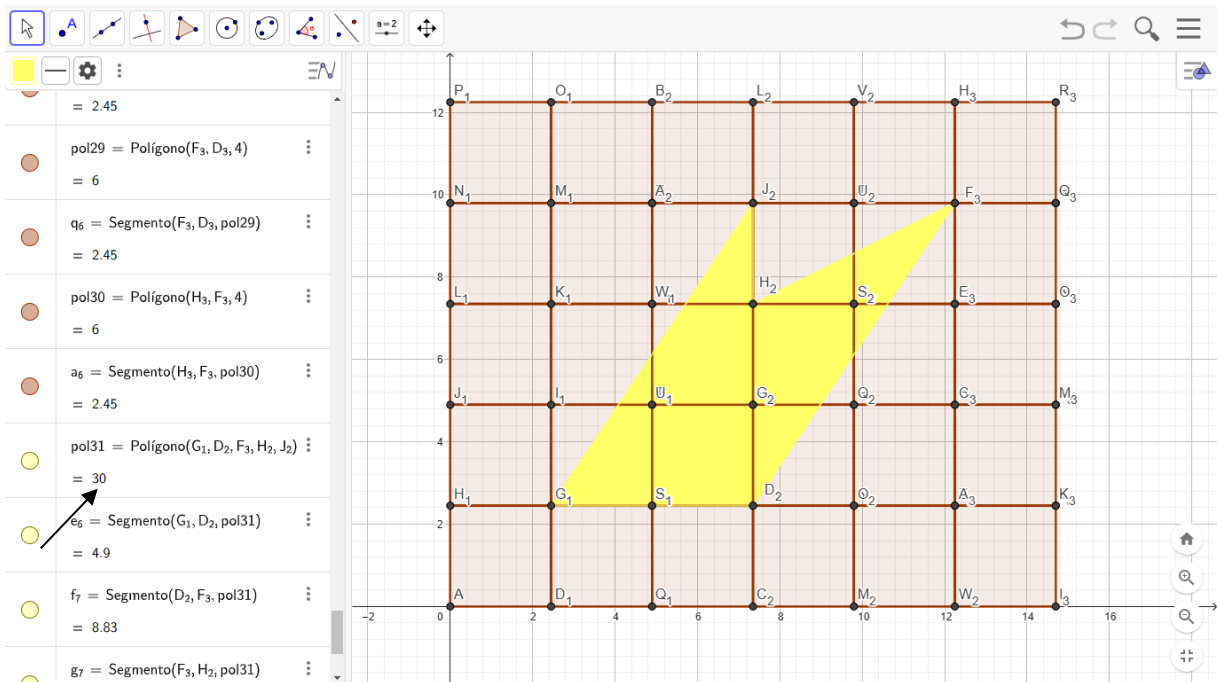
Figura: 64 - Construção do polígono amarelo – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Por último, vamos construir o polígono G_1, D_2, F_3, H_2, J_2 , que corresponde ao polígono amarelo (a cor foi modificada nas configurações e ocultamos alguns símbolos). Note que a janela de álgebra indica a área como 30, confirmando que a resposta encontrada na terceira fase da metodologia de Polya está correta.

Figura: 65 - Construção do polígono amarelo – Parte 3

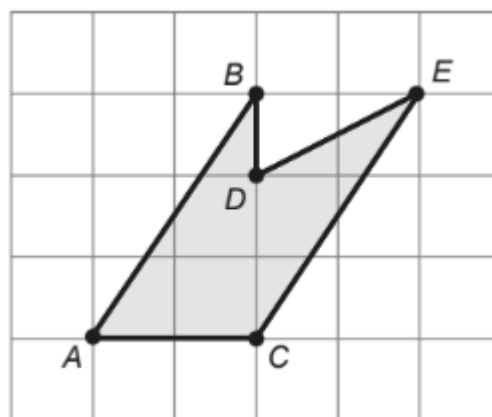


Fonte: Próprio autor

Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/aqbzq5ag>. Acesso em: 20 de mai. de 2024

Solução oficial: A área do polígono amarelo é igual a soma das áreas dos triângulos ABC e CDE. Seja l o lado de cada quadradinho do quadriculado, então a área do triângulo ABC é $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2l \cdot 3l}{2} = 3l^2$ e a área do triângulo CDE é $\frac{CD \cdot BE}{2} = \frac{2l \cdot 2l}{2} = 2l^2$; nesse último triângulo tomamos a base como CD e a altura como BE. A área do polígono amarelo é, portanto, $3l^2 + 2l^2 = 5l^2 = 30 \text{ cm}^2$. Logo, $l^2 = 6 \text{ cm}^2$, ou seja, um quadradinho do quadriculado tem área de 6 cm^2 .

Figura: 66 - Área do polígono ABC e CDE



Fonte: OBMEP - 2023

Comentários: Utilizar a metodologia de resolução de problemas proposta por Polya (2006) através de diálogos torna o aprendizado mais interativo, uma vez que o professor-formador conduz o problema com boas perguntas, incentivando a turma a aprender e interagir de forma positiva. Já a utilização do GeoGebra na 4ª fase trouxe muitos elementos para o aperfeiçoamento do público-alvo, pois foi necessário aplicar alguns fundamentos da construção com régua e compasso, mesmo que isso não tenha sido explicitamente mencionado durante a construção. Ter essas noções de construção com régua e compasso ajuda na criação das figuras. É importante lembrar que o GeoGebra realiza operações que não são possíveis no mundo real, como criar uma abertura exata de $\sqrt{2}$ com um compasso. No mundo real, dependendo do material utilizado, conseguimos apenas aproximações.

4.2 Resolução comentada de problema modelo 2

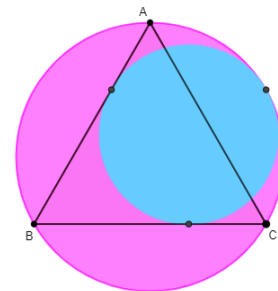
Para o Problema-Modelo 2, apresentamos as seguintes justificativas para a escolha, conforme detalhado no quadro abaixo:

Aspectos	Justificativa
Demanda por vários recursos	O problema requer a aplicação de diversos conceitos, como o traçado de retas perpendiculares para identificar triângulos retângulos, o uso de razões trigonométricas para relacionar os raios dos círculos, a análise das relações de inscrição e circunscrição entre triângulo equilátero e círculo, além de demandar uma boa dose de criatividade na resolução.
Complexidade da construção no GeoGebra	No GeoGebra, problemas aparentemente simples podem demandar construções mais elaboradas, enquanto questões mais complexas podem ser resolvidas de maneira mais direta. No caso específico deste problema, foi necessário partir de um resultado previamente conhecido sobre a relação entre os raios dos círculos para determinar a solução.

Problema-Modelo 2. (OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2023) Na figura ABC é um triângulo equilátero e a circunferência menor é tangente a dois lados do triângulo e ao círculo maior, como indicado. A região rosa é a que está dentro do círculo maior e fora do círculo menor. Qual é a razão entre as áreas destacadas em azul e rosa?

Figura: 67 - Triângulo equilátero inscrito na circunferência

- (A) $4/3$
- (B) $4/5$
- (C) $4/7$
- (D) $2/7$
- (E) $2/9$



Fonte: OBMEP - 2023

Resolução:

1.ª fase: compreensão do problema

É essencial que o problema seja bem compreendido e interpretado, tornando essa fase muito importante. Para isso, o professor formador pode propor uma leitura individual seguida de uma leitura coletiva. Após isso, ele pode fazer algumas perguntas por meio de diálogos para verificar o nível de compreensão do problema. Veja um possível exemplo de diálogo para este problema:

- Professor: José, o que o problema está perguntando?
- José: A razão entre as áreas em azul e rosa.
- Professor: Maria, o que é dado e quais são as condições?
- Maria: Um triângulo equilátero, e a circunferência menor é tangente a dois lados do triângulo e à circunferência maior.
- Professor: Podemos determinar a área das circunferências com essas condições?
- Maria: Não sei.
- Professor: Cláudia, é possível traçar alguma reta ou segmento convenientemente?
- Cláudia: Sim.
- Professor: Como?
- Cláudia: Traçando um segmento de B até o ponto de tangência das duas circunferências.
- Professor: Esse segmento passa pelos centros das duas circunferências e do triângulo equilátero?
- Cláudia: Acho que sim.
- Professor: Fátima, se ele passar pelos centros das circunferências e do triângulo equilátero, isso ajuda na resolução?

- Fátima: Acredito que sim, pois poderemos formar triângulos retângulos com os raios das circunferências nos pontos de tangência.
- Professor: Turma, alguém pode acrescentar mais alguma coisa?
- Lucas: Com o que foi dito anteriormente, podemos visualizar triângulos retângulos, e isso pode ajudar. O segmento que passa pelo centro do triângulo equilátero é a bissetriz, a mediana e a altura.
- Professor: Pronto, então a questão foi compreendida e sabemos quais são os possíveis caminhos para a resolução.

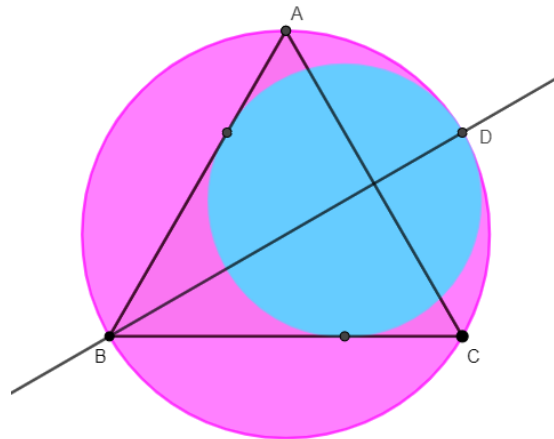
2ª fase: elaboração de um plano

Nesta fase, é importante que o público-alvo interaja propondo planos para resolver o problema, pois eles já o compreenderam e interpretaram. Como se trata de um problema de área envolvendo polígonos regulares inscritos e figuras tangentes, é necessário que eles tenham alguns teoremas, resultados ou conhecimentos de geometria plana em mente, pois isso ajudará na resolução. Vamos a um plano.

Determinado um plano:

Traçando uma mediatriz de forma que ela passe por B e pelo ponto D, que é tangente às duas circunferências.

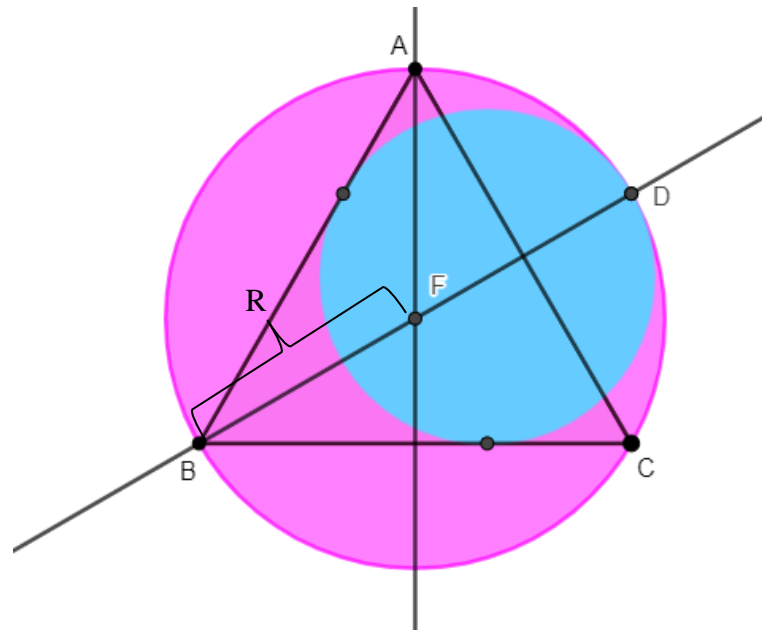
Figura: 68 - Mediatriz que passa por B e D



Fonte: Próprio autor

Traçando outra mediatriz por B. Com isso, temos que a interseção das duas mediatrizes é o ponto F, centro do círculo maior, cujo raio mede R.

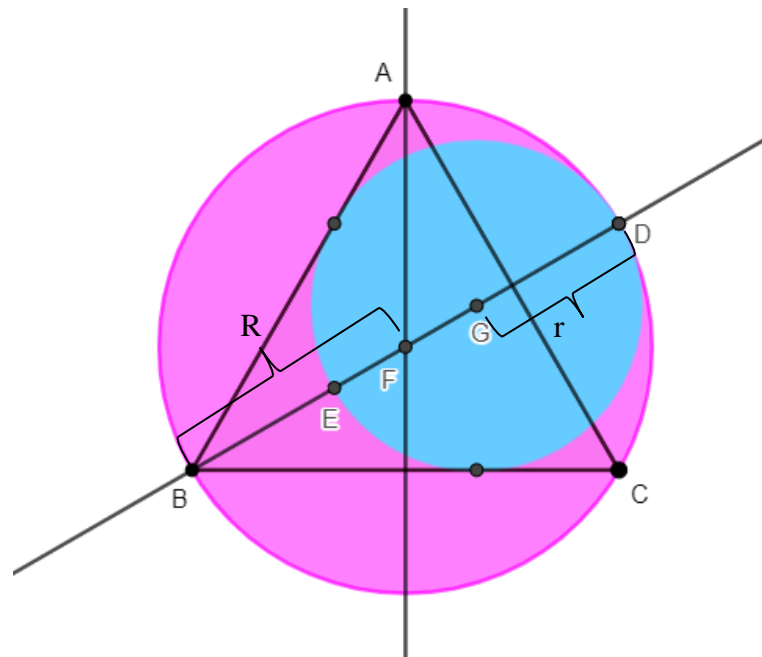
Figura: 69 - Encontro das duas mediatrizes



Fonte: Próprio autor

Determinando o centro do círculo azul marcando o ponto médio de ED. Denote esse ponto como G, sendo $EG = DG = r$, onde r é o raio do círculo menor.

Figura: 70 - Centro do círculo azul

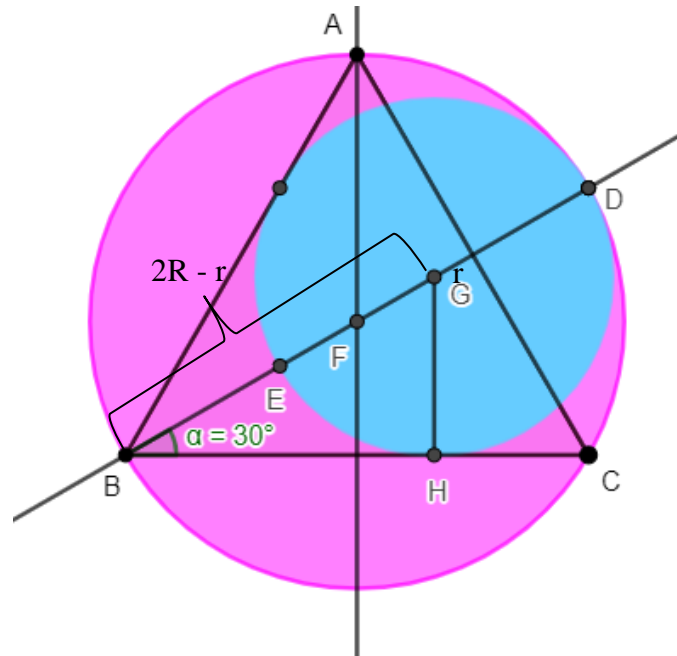


Fonte: Próprio autor

Denotando por H o ponto de interseção do círculo menor com o lado BC, temos que $GH = r$, e $GB = R + (R - r)$. Note também que o ângulo GBC mede 30° , formando um triângulo

retângulo GHB. Assim, podemos aplicar uma das razões trigonométricas do triângulo retângulo. Fica assim:

Figura: 71 - Triângulo retângulo GHB



Fonte: Próprio autor

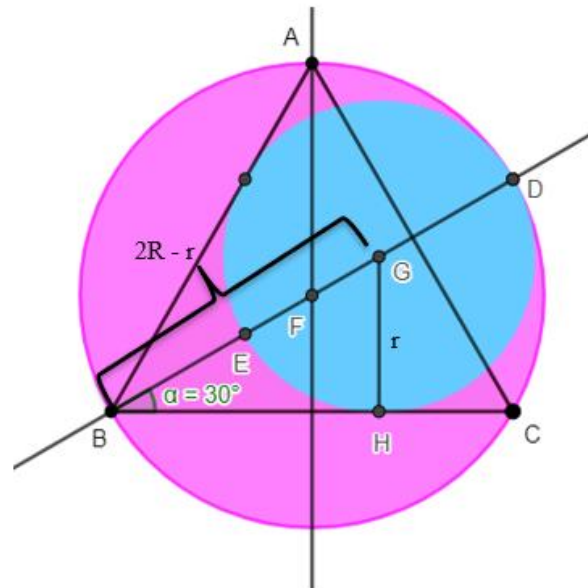
Com isso, obteremos uma relação entre R e r , permitindo calcular a área do círculo maior e do círculo menor, expressas em função de R ou r . Em seguida, subtraímos a área do círculo maior da área do círculo menor, resultando na área da parte rosa. Por fim, dividimos a área do círculo menor (azul) pela área da parte rosa.

3ª fase: execução do plano

Neste momento, o discente colocar em prática a estratégia previamente elaborada na segunda fase. É essencial que ele mantenha a atenção nos detalhes e siga a ordem lógica estabelecida, verificando a correção de cada passo antes de prosseguir para o próximo. A precisão e a atenção são fundamentais aqui para evitar erros que possam comprometer o resultado.

Partindo da última parte da elaboração do plano, temos o triângulo retângulo BHG:

Figura: 72 - Triângulo retângulo BHG



Fonte: Próprio autor

Calculando o seno de 30° no triângulo retângulo BHG, temos:

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{r}{2R - r} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{2R - r} \rightarrow 2R - r = 2r \rightarrow 3r = 2R \rightarrow r = \frac{2R}{3}.$$

Como temos uma relação entre os raios dos dois círculos, vamos calcular a divisão entre área do círculo menor e a região rosa (área do círculo maior – área do círculo menor).

Assim,

$$\frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior} - \text{Área do círculo menor}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{\pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2R}{3}\right)^2}{R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}.$$

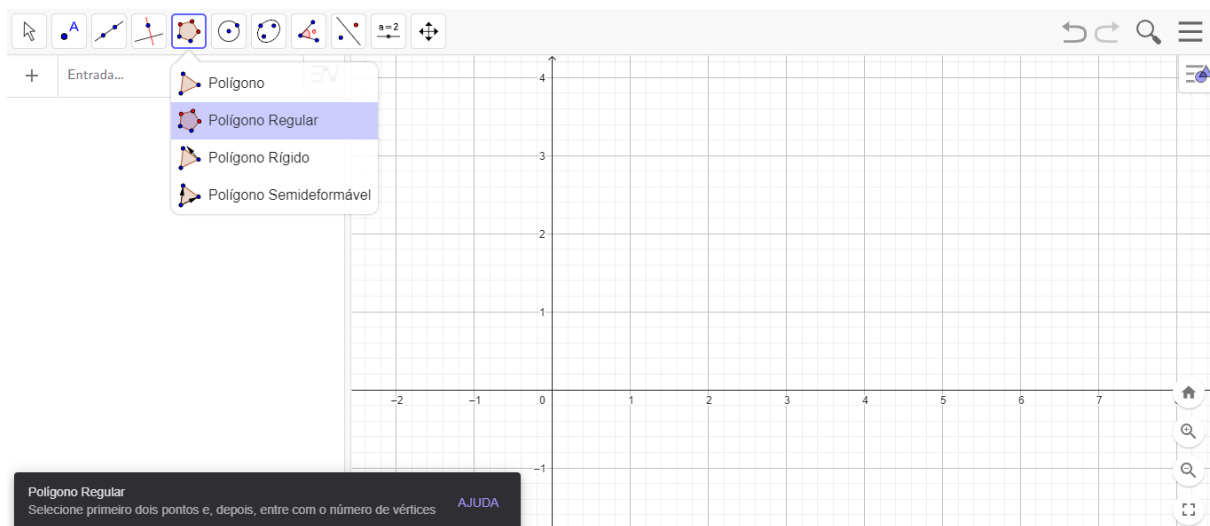
Portanto, a resposta pedida é $\frac{4}{5}$, alternativa (B). O link desta construção está disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/fkmeqqdv>. Acesso em: 25 de mai. de 2024

4ª fase: Verificação

Iremos construir a figura do problema utilizando o Geogebra. Inicialmente clique no link, disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT. Acesso em: 25 de mai. de 2024. Com o Geogebra aberto, vamos aos passos:

Construindo o triângulo equilátero: No quinto grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Polígono Regular”.

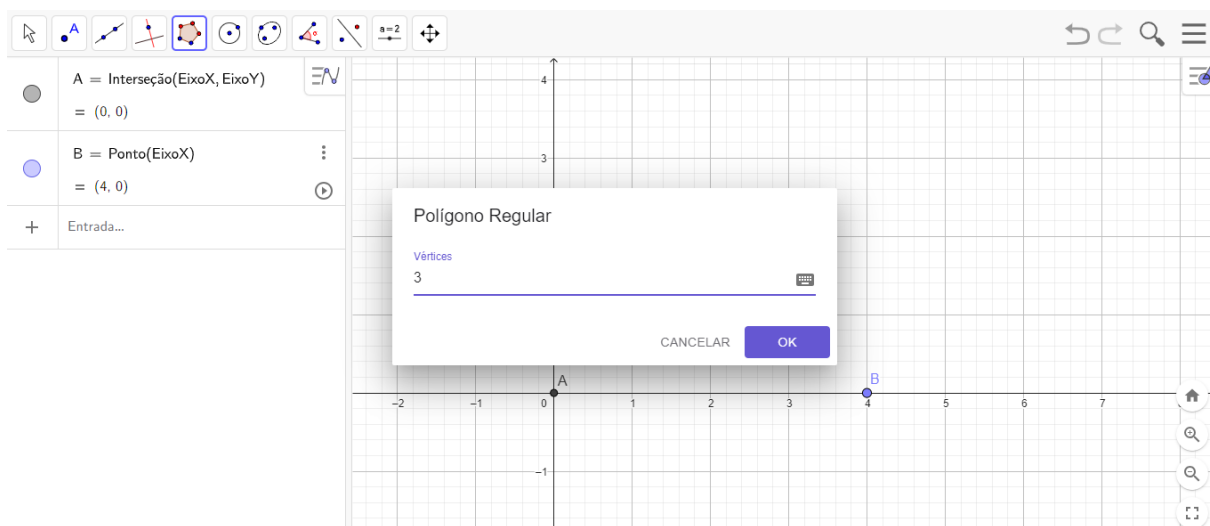
Figura: 73 - Construção do triângulo equilátero – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Selecionamos dois pontos A e B na malha e, na caixa de diálogo, digite o número três, que se refere à quantidade de vértices do polígono. Em seguida, clique em OK.

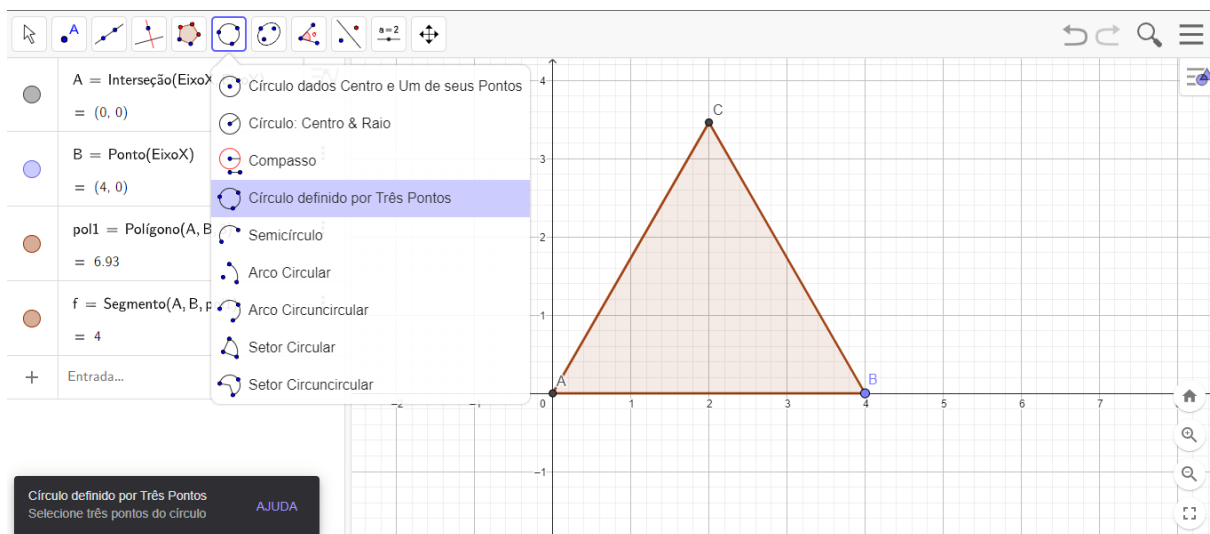
Figura: 74 - Construção do triângulo equilátero – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Construído o triângulo equilátero, vamos construir um círculo circunscrito ao triângulo equilátero: no sexto grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Círculo definido por Três Pontos.”

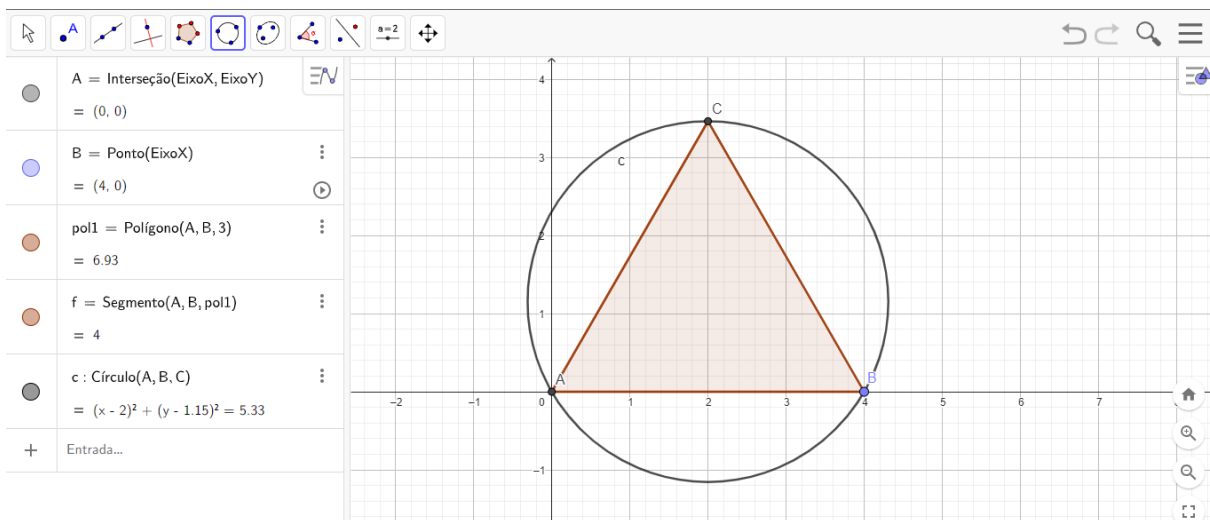
Figura: 75 - Círculo circunscrito ao triângulo equilátero – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Selecionamos os pontos A, B e C do triângulo equilátero para definir o círculo com os três pontos

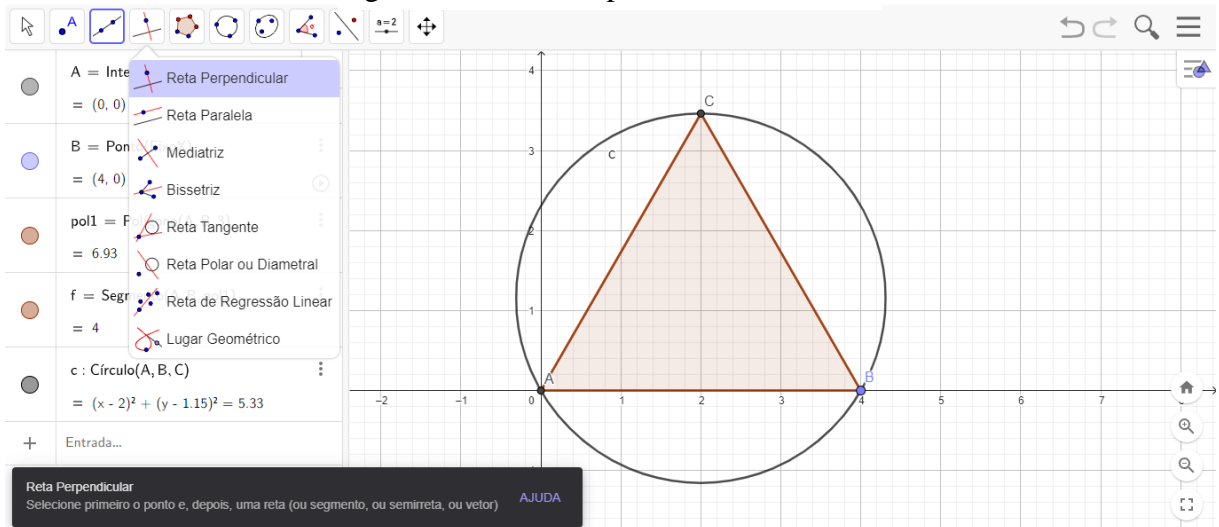
Figura: 76 - Círculo circunscrito ao triângulo equilátero – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Vamos traçar uma reta passando por A que seja perpendicular ao segmento BC: no quarto grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Reta Perpendicular”.

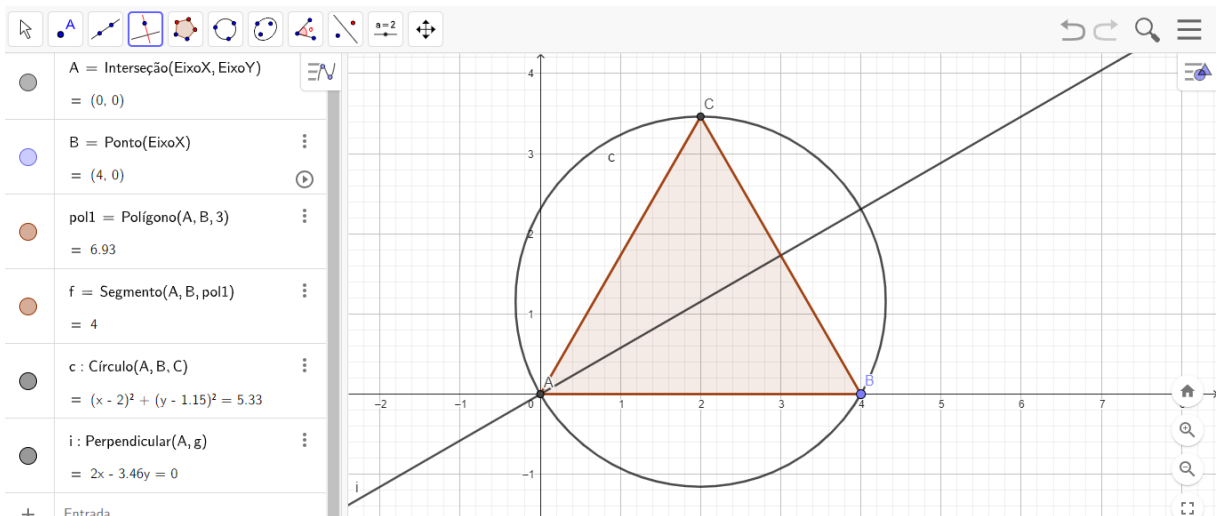
Figura: 77 - Reta Perpendicular – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Clicando no ponto A e depois no segmento BC, temos a reta i .

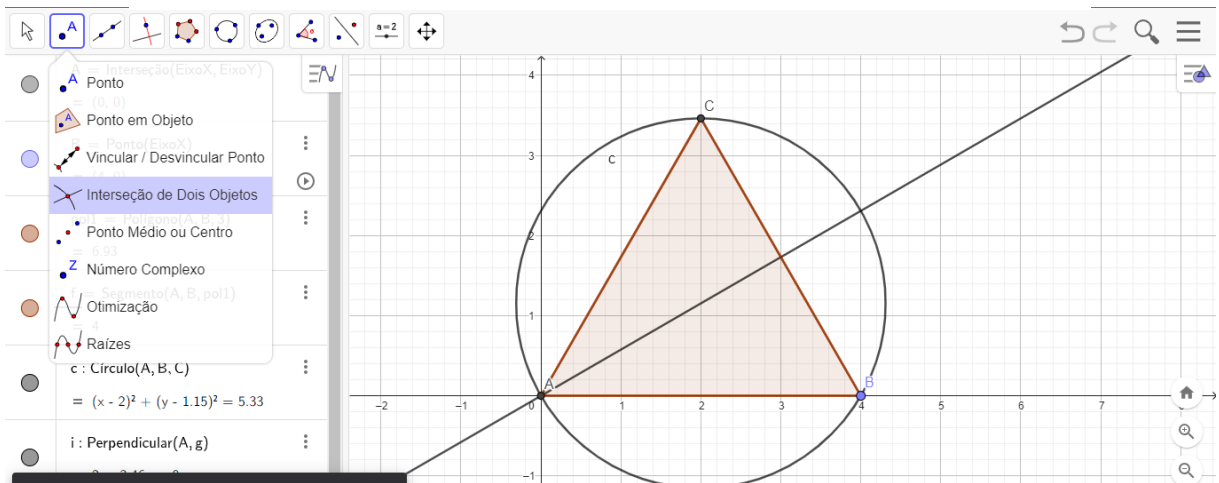
Figura: 78 - Reta Perpendicular – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Marcando as interseções entre o círculo c e a reta perpendicular i : no segundo grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Interseção de Dois Objetos”.

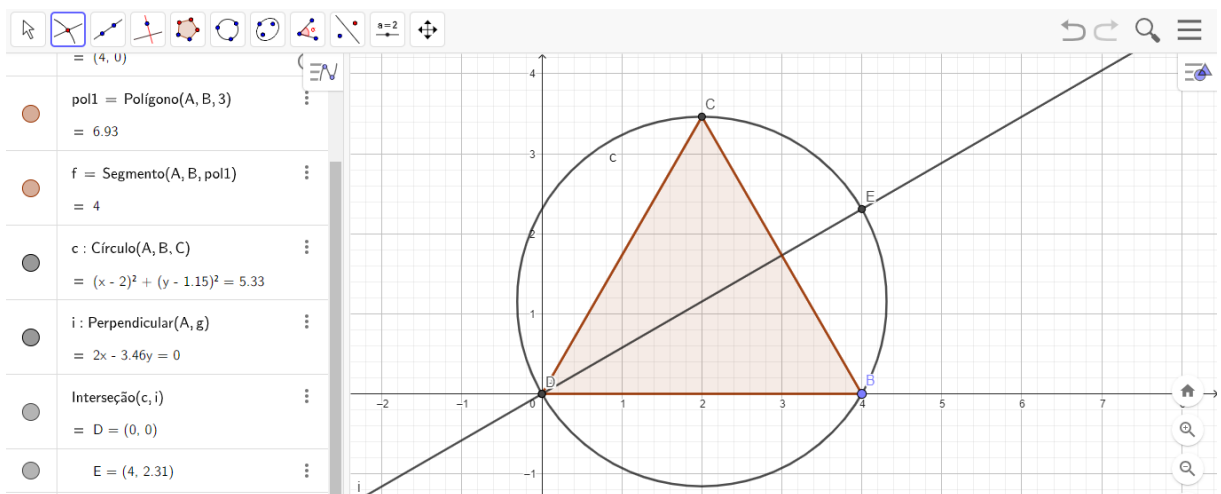
Figura: 79 - Interseções entre o círculo c e a reta perpendicular i – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Clicamos na reta i e no círculo c, temos as interseções que são os pontos A=D e o E.

Figura: 80 - Interseções entre o círculo c e a reta perpendicular i – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Precisamos construir um círculo dentro do círculo c que seja tangente aos lados AC e BA, e ao círculo c no ponto E. Inicialmente, vamos construir um segmento (raio) que tenha E como uma das extremidades. Esse segmento deve estar relacionado com a área e o raio do círculo c, pois deve respeitar as propriedades do problema. Uma estratégia é calcular a razão entre as áreas do círculo menor e do círculo maior para obtermos r em função da área do círculo c (maior), já que a área do círculo maior é dada pela construção.

$$\frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \rightarrow \frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior}} = \frac{r^2}{R^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior}}} \cdot R^2 = r \rightarrow \sqrt{\frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior}}} \cdot R = r \rightarrow$$

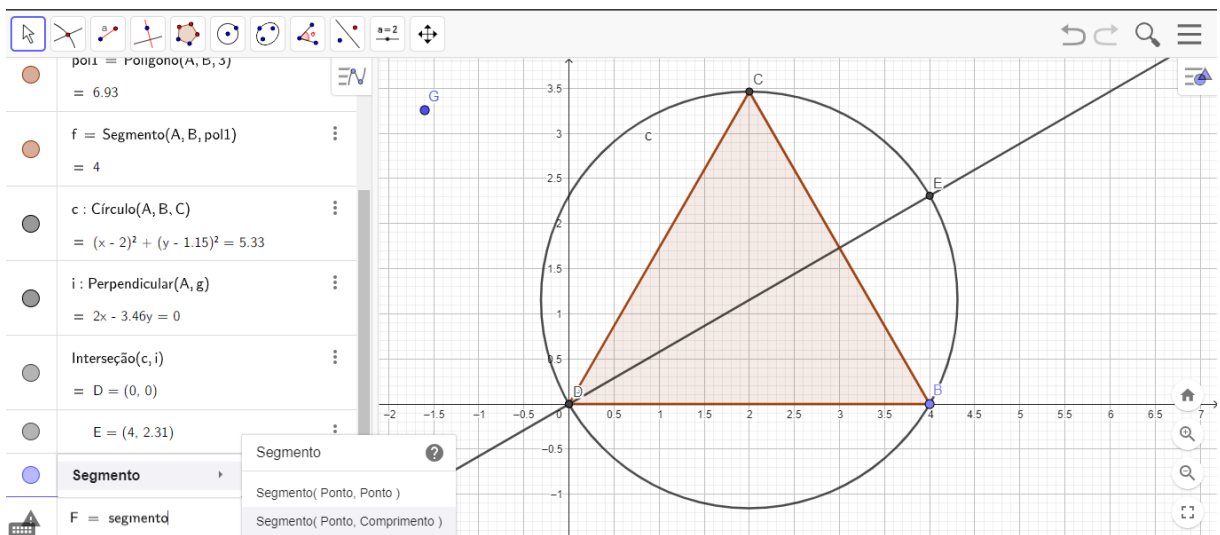
$$\rightarrow \sqrt{\frac{\pi r^2}{\text{Área do círculo maior}}} \cdot R = r, \text{ como } R = \frac{3r}{2} \rightarrow r \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\text{Área do círculo maior}}} \frac{3}{2} r = r$$

$$r = \sqrt{\frac{\text{Área do círculo maior}}{\pi}} \frac{2}{3}$$

Agora, basta construir um segmento r.

Na janela de entrada, digitamos o seguinte comando: r = segmento (ponto, comprimento).

Figura: 81 - Construção do segmento r – Parte 1

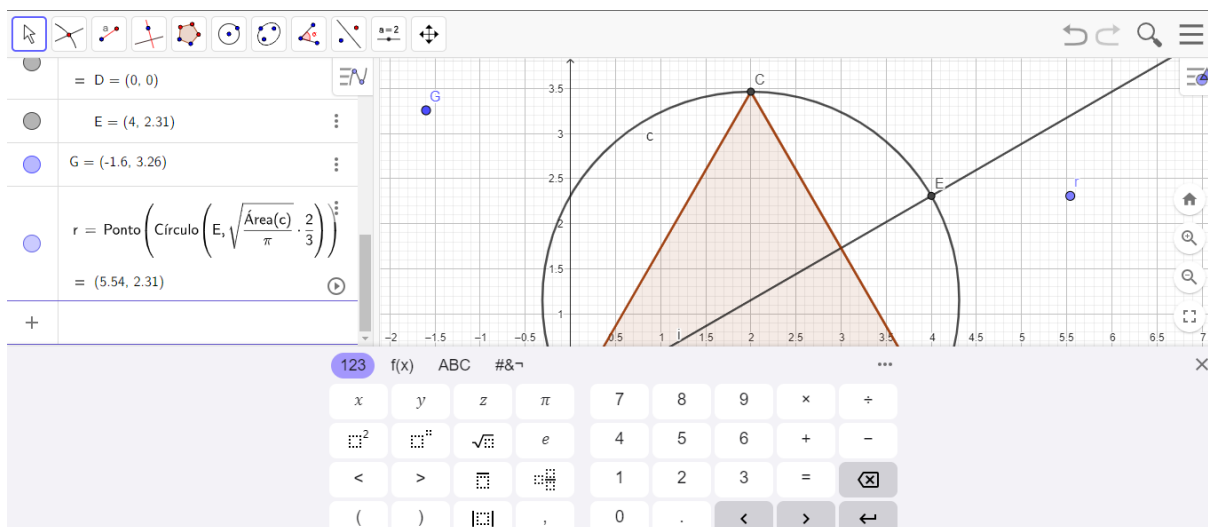


Fonte: Próprio autor

Substituímos “ponto” por E e “comprimento” por $\sqrt{\frac{\text{Área}(c)}{\pi}} \frac{2}{3}$. Utilizamos o teclado disponibilizado no Geogebra para determinar o comprimento do segmento r. Como indicado na figura abaixo, caso o leitor tenha dificuldade, basta copiar e colar o seguinte código na janela de entrada:

r=Ponto (Círculo(E,sqrt(((Área(c))/(π)))*((2)/(3))))

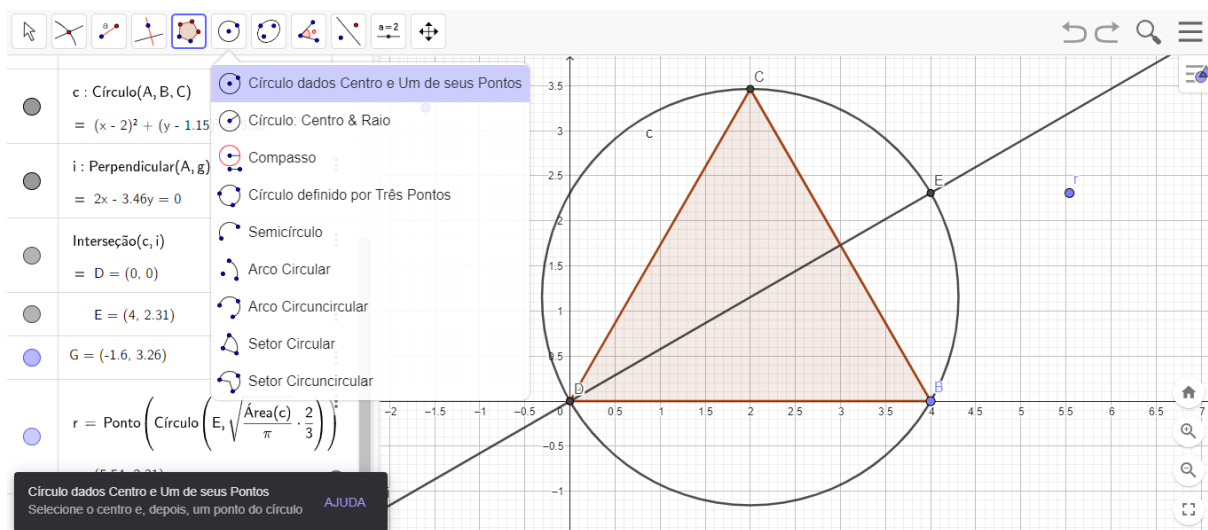
Figura: 82 - Construção do segmento r – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Construindo o círculo de raio r com centro em E. No quinto grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”. Em seguida clicamos em E e r para construir o círculo d de raio r.

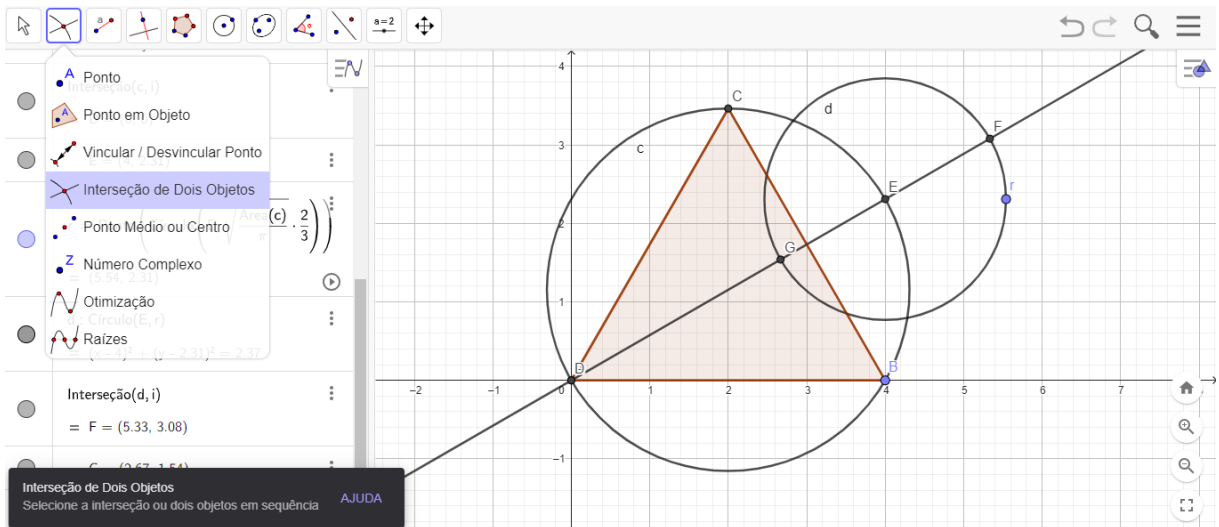
Figura: 83 - Círculo de raio r com centro em E – Parte 1



Fonte: Próprio autor

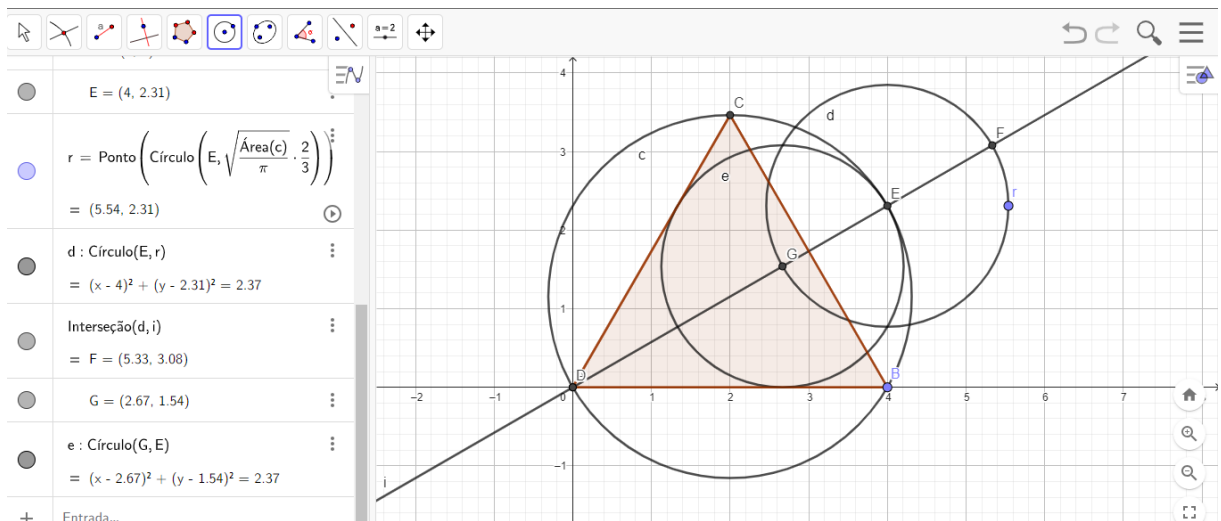
Com o círculo d construído, marcamos as interseções da reta i com o círculo d: no segundo grupo de ferramentas, selecionamos a opção “Interseção de Dois Objetos”, clicamos somente na reta i e no círculo d para determinar os pontos G e F, que são as interseções.

Figura: 84 - Círculo de raio r com centro em E – Parte 2



Fonte: Próprio autor

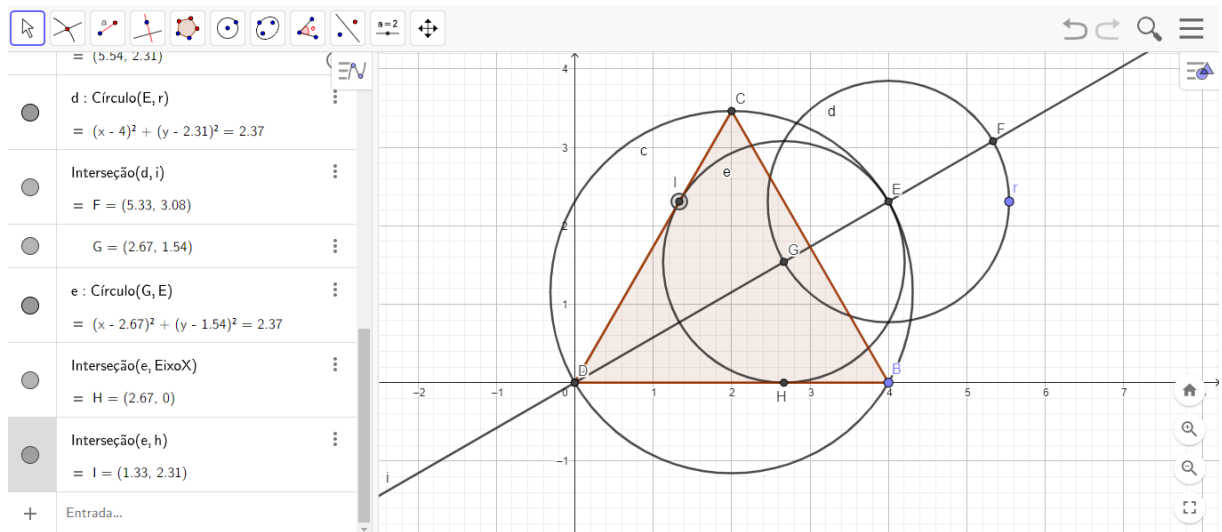
Agora, vamos construir um círculo tangente internamente ao círculo c e aos lados CD e BD : no sexto grupo de ferramentas, selecione a opção “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, clicando em G e depois em E , construímos o círculo e (menor).

Figura: 85 - Círculo tangente internamente ao círculo c – Parte 1

Fonte: Próprio autor

Determinado as interseções do círculo e com os lados DC e BC , temos:

Figura: 86 - Círculo tangente internamente ao círculo c – Parte 2



Fonte: Próprio autor

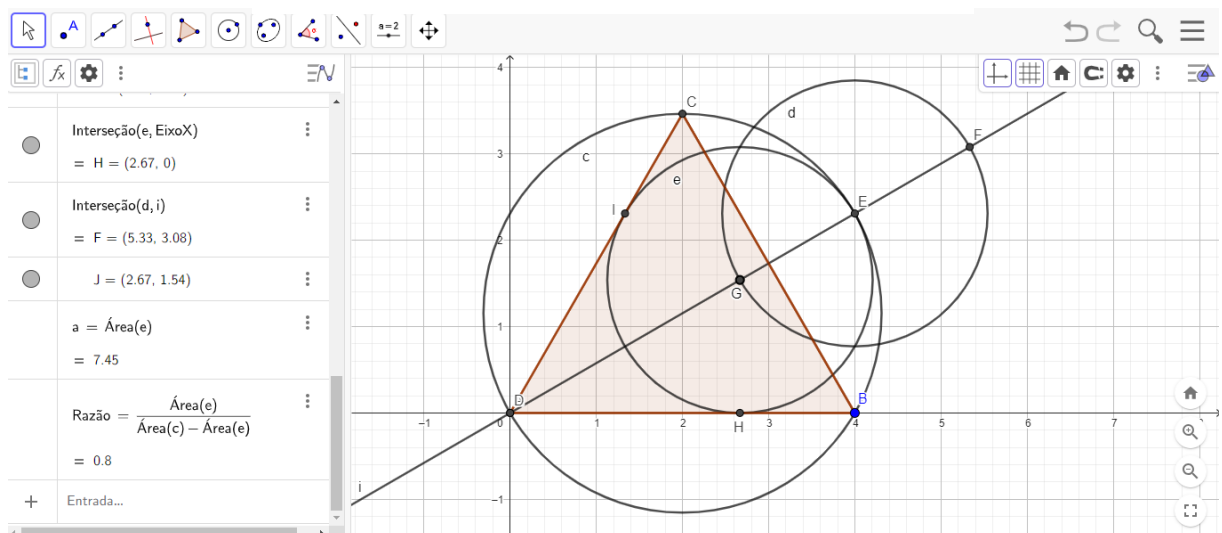
Até agora, um dos objetivos foi alcançado: a construção da figura do problema. Tudo o que precisamos fazer agora é dividir as áreas solicitadas para verificar se a resposta encontrada na terceira etapa corresponde à que encontraremos utilizando os comandos do GeoGebra.

Denotamos o círculo "e" como sendo o azul do problema e a área rosa como sendo a subtração da área do círculo "c" pela área do círculo "e".

No Geogebra, digite o seguinte comando na janela de álgebra:

$$\text{Razão} = \left(\frac{\text{Área}(e)}{\text{Área}(c) - \text{Área}(e)} \right)$$

Figura: 87 - Razão entres as áreas solicitadas – Parte 1

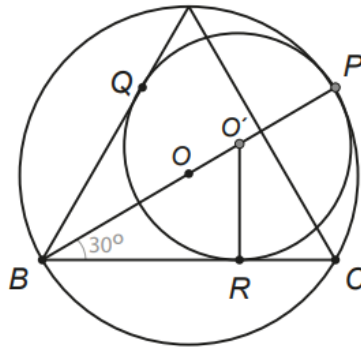


Fonte: Próprio autor

Portanto, a resposta encontrada, com uma razão igual a 0,8, corresponde àquela determinada na terceira etapa e ao gabarito oficial. O link desta construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/zzyp4w8>. Acesso em: 30 de mai. de 2024

Solução Oficial: Observamos, em primeiro lugar, que os centros O e O' das duas circunferências tangentes pertencem ao diâmetro BP da circunferência externa.

Figura: 88 - Razão entre as áreas solicitadas – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Como a circunferência interna é tangente aos lados BA e BC do triângulo ABC , seu centro O' pertence à bissetriz do ângulo do vértice B desse triângulo. Por outro lado, o raio $O'R$ é perpendicular ao lado BC no ponto de tangência, logo o triângulo $O'BR$ é retângulo e a medida do ângulo $O'BR$ é 30° , como assinalado na figura. Temos, portanto, que o triângulo retângulo $O'BR$ é a metade de um triângulo equilátero e os comprimentos dos seus lados $O'B$ e $O'R$ são tais que $O'B = 2 \cdot O'R$.

Vamos chamar de S e r os comprimentos dos raios das circunferências maior e menor, respectivamente; com essa notação, temos que $O'B = 2S - r$ e $O'R = r$, e $2S - r = 2r$. Daí,

$$S = \frac{3r}{2}$$

A área do círculo destacado em azul será $r^2\pi$ e a área na cor rosa será igual à diferença entre as áreas dos dois círculos ou seja:

$$\frac{9}{4}r^2\pi - r^2\pi = \frac{5}{4}r^2\pi$$

A razão entre as áreas destacadas em azul e rosa será:

$$\frac{r^2\pi}{\frac{5}{4}r^2\pi} = \frac{4}{5}$$

Comentários: Um dos aspectos interessantes do GeoGebra é que, ao tentar construir a figura do problema, realizamos várias tentativas. Em particular, para realizar essa construção, precisamos das informações fornecidas nas três primeiras etapas. Ou seja, nossa construção só

foi possível graças à relação entre os raios e a área do círculo circunscrito ao triângulo equilátero. Além disso, essa construção foi debatida em um fórum na 22ª edição do Curso de GeoGebra. Disponível em: <https://ogegebra.com.br/site/>. Acesso em: 30 de mai. de 2024.

4.3 Resolução comentada de problema modelo 3

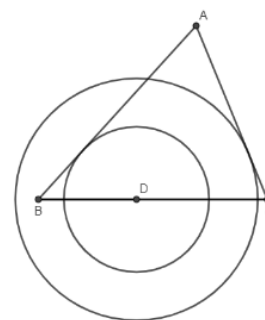
Para o Problema-Modelo 3, apresentamos as seguintes justificativas para a escolha, conforme detalhado no quadro abaixo:

Aspectos	Justificativa
Conceitos pouco explorados no contexto escolar	Tangência e perpendicularismo entre segmentos e circunferências, além de relações de proporcionalidade entre áreas de figuras planas e segmentos.
Uso do GeoGebra	Permite traçar tangentes e medir distâncias com maior precisão visual, embora as construções sejam aproximadas.
Inclusividade e Desafios	A questão desafia os alunos ao abordar conceitos raramente explorados no ambiente escolar, como propriedades específicas de áreas.

Problema-Modelo 3. (PAPMEM-2024 - 1ª EDIÇÃO) Na figura ao lado as circunferências possuem centro D e raios de comprimentos 3 e 5. O segmento AB é tangente à circunferência menor e o segmento AC é tangente à maior. Sabe-se que $AB = 10$ e $AC = 8$. A razão DB/DC é igual a:

- A) $1/2$
- B) $2/3$
- C) $3/4$
- D) $4/5$
- E) $5/6$

Figura: 89 - Circunferências que possuem centro D e raios de comprimentos 3 e 5



Fonte: PAPMEM - 2024

Resolução:

1ª fase: Compreensão e Interpretação.

A primeira fase do método de Polya, "Compreender o Problema", é fundamental para a resolução. Nesta fase, o objetivo é assegurar que o problema seja completamente compreendido antes de se tentar encontrar uma solução. Isso envolve a identificação das informações dadas, o reconhecimento do que é necessário encontrar ou provar, e a determinação das condições do problema. Muitas vezes os professores já sabem como resolver os problemas, mas não deixa que os estudantes possam pensar produtivamente sobre a resolução.

Uma abordagem para esta fase inclui:

- **Leitura Atenta:** Ler o problema várias vezes para garantir que todos os detalhes sejam capturados.
- **Identificação dos Dados:** Listar as informações fornecidas e identificar o que está faltando.
- **Visualização:** Sempre que possível, desenhar diagramas ou esquemas para visualizar o problema.
- **Reformulação:** Tentar reformular o problema com suas próprias palavras para garantir a compreensão.
- **Questões de Verificação:** Fazer perguntas como "O que exatamente precisa ser encontrado?" e "Quais são as condições do problema?".

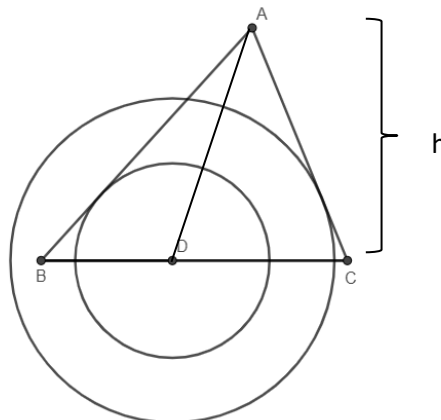
Compreender profundamente o problema é essencial para as etapas subsequentes do método de Polya, pois fornece uma base sólida sobre a qual se pode construir uma estratégia de solução eficaz.

Um possível diálogo para este problema seria assim:

- Professor: Felipe, o que se pede no problema?
- Felipe: A razão entre os segmentos DB/DC .
- Professor: E quais são as informações que o problema nos dá?
- Felipe: Duas circunferências concêntricas, com raios 3 e 5, respectivamente. Que o segmento AB é tangente à circunferência menor e o segmento AC é tangente à maior. Que $AB = 10$ e $AC = 8$.
- Professor: Muito bem! Turma, vocês já viram problemas parecidos com este?
- Turma: Sim. Mas em partes
- Professor: Como assim?

- Turma: Cálculo de segmentos envolvendo potência de um ponto em relação a uma circunferência.
- Professor: Ótimo! Pedro, será que essas informações ajudam?
- Pedro: Não sei, pois teremos que de alguma forma determinar essa divisão entre os segmentos DB/DC .
- Professor: Parece que não conseguimos muito avanço. Turma, vamos explorar a figura mais um pouco.
- Professor: Pedro, perceba que os raios foram fornecidos, $R = 5$ e $r = 3$, é além do mais, os raios são perpendiculares aos segmentos $AB = 10$ e $BC = 8$, tangentes as circunferências.
- Pedro: Sim, e aí?
- Professor: Veja também que é possível dividir esse triângulo ABC em dois menores tomando os raios como alturas.
- Pedro: Entendi, pois teremos dois triângulos ABD e ADB , cujas bases são os lados $AB = 10$ e $BC = 8$.
- Professor: Com essas informações, faz te lembrar de algo?
- Pedro: Cálculo de área de triângulo? Pois temos base e altura.
- Professor: Sim, apesar de não está implícito no problema.
- Rafael: Então professor, esse problema não é de área, mas conseguimos resolver por área. Olhando de outra forma os triângulos ABD e ADB , vejo que eles também têm mesma altura.
- Professor: Que belo insight, poderia mostrar essa altura?
- Rafael: Sim, professor. Veja

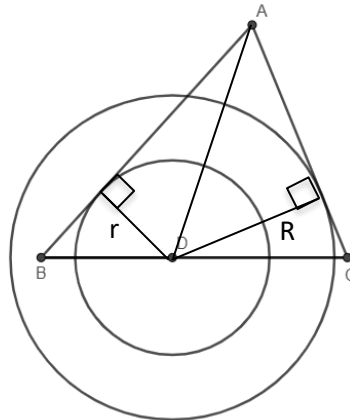
Figura: 90 - Triângulos ABD e ADB com altura h



Fonte: Próprio autor

- Luzia: Professor, posso mostrar se a minha visualização está de acordo com o que já foi dito anteriormente com relação aos dois triângulos ABD e ADB?
- Professor: Sim, Luzia. Fique à vontade.
- Luzia: Claro, professor. Olhe:

Figura: 91 - Triângulos ABD e ADB com alturas R e r



Fonte: Próprio autor

- Professor: Perfeito, Luzia. Veja que os dois triângulos podem ser visualizados de duas formas.
- Professor: Alguém tem mais alguma ideia?
- Turma: Não, professor.
- Professor: Pronto, agora o problema está compreendido e temos uma possível caminho para resolvê-lo e quem sabe encontraremos outros durante a busca pela solução.

2ª fase: Elaboração de um plano

A segunda fase do método de Polya, "Planejar uma Estratégia", é crucial para resolver problemas matemáticos de maneira eficaz e estruturada. Nesta fase, após ter compreendido completamente o problema na primeira fase, o foco se desloca para desenvolver um plano ou uma estratégia que possa levar à solução do problema.

Objetivos da Segunda Fase:

- Selecionar uma Abordagem:

Identificar e escolher uma abordagem ou método apropriado para resolver o problema. Isso pode envolver a aplicação de fórmulas conhecidas, o uso de propriedades geométricas, ou a decomposição do problema em partes menores e mais manejáveis.

- Usar Problemas Análogos:

Procurar problemas similares que já foram resolvidos anteriormente e usar esses casos como referência para planejar a solução do problema atual.

- Formular Hipóteses:

Desenvolver hipóteses ou suposições que possam simplificar o problema e permitir um caminho claro para a solução. É importante considerar várias alternativas e avaliar suas viabilidades.

Perguntas Importantes na Segunda Fase:

- Qual é a melhor maneira de começar a resolver este problema?
- Que princípios matemáticos ou fórmulas são relevantes aqui?
- Existem problemas semelhantes que eu já resolvi que possam me ajudar?
- Posso dividir o problema em partes menores e resolver cada uma separadamente?
- Que informações adicionais ou relações posso explorar?

Exemplos de Estratégias Comuns:

1. Dividir e Conquistar: Dividir o problema em subproblemas menores e resolver cada um separadamente.
2. Trabalhar para Trás: Começar a partir da solução desejada e trabalhar para trás, usando raciocínio reverso.
3. Usar Diagramas: Desenhar diagramas ou figuras para visualizar o problema e identificar relações importantes.
4. Experimentação: Testar diferentes abordagens ou valores para ganhar insights sobre o problema.
5. Aplicar Fórmulas: Identificar e aplicar fórmulas matemáticas ou teoremas que se aplicam ao problema.

Importância da Segunda Fase:

Planejar uma estratégia é essencial porque um plano bem pensado aumenta significativamente a probabilidade de sucesso na resolução do problema. Esta fase incentiva o raciocínio lógico e a organização do pensamento, proporcionando uma base sólida para a execução da solução na fase seguinte.

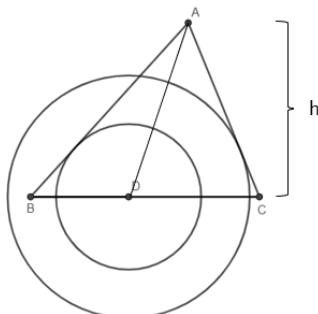
Em síntese, a segunda fase do método de Polya é sobre encontrar o caminho certo para resolver o problema. Um bom plano é metade da solução, e essa fase é dedicada a estruturar esse plano de maneira eficaz e metódica.

Agora, passando para a elaboração de um plano.

Podemos abordar geometricamente da seguinte maneira: calculando a área do triângulo ABC de duas formas, conforme discutido na primeira fase. Primeiro, calculamos a área do

triângulo ABC usando BD e DC como bases dos triângulos ABD e ADC, com a altura h sendo a mesma para ambos. Veja a figura:

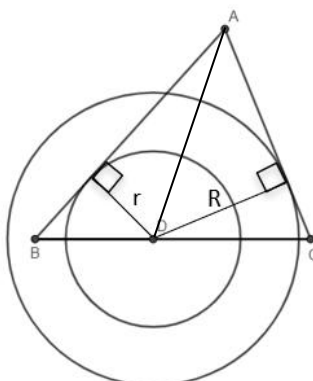
Figura: 92 - Áreas do triângulo ABD + ADC com altura h



Fonte: Próprio autor

Logo em seguida, calculamos a área do triângulo ABC usando AB e AC como bases dos triângulos ABD e ADC, com r e R sendo as respectivas alturas.

Figura: 93 - Áreas do triângulo ABD + ADC com altura r e R



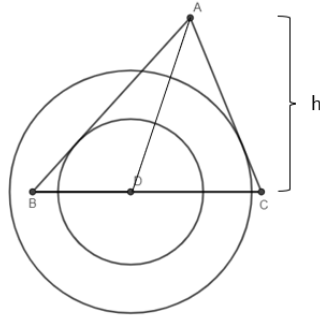
Fonte: Próprio autor

Como temos várias áreas sendo calculadas de formas diferentes e utilizando os segmentos DB e DC, podemos determinar a razão entre DB e DC.

3ª fase: Executando o plano

Inicialmente, vamos calcular a área do triângulo $A(ABC) = A(ABD) + A(ADC)$ tomando BD e DC bases dos triângulos ABD e ADC, com altura “h” a ambos. Vejamos:

Figura: 94 - Área do triângulo ABC – parte 1



Fonte: Próprio autor

$$A(ABD) = \frac{DB \cdot h}{2}$$

$$A(ADC) = \frac{DC \cdot h}{2} \text{ u. a}$$

Somando as áreas dos triângulos ABD e ADC, obtemos a área de ABC.

$$A(ABC) = A(ABD) + A(ADC)$$

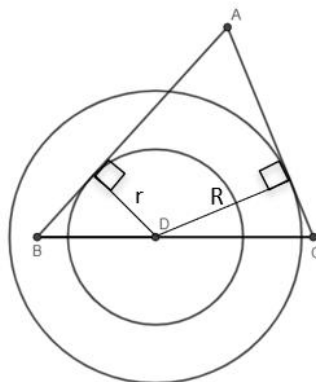
$$A(ABC) = \left(\frac{DB \cdot h}{2} + \frac{DC \cdot h}{2} \right)$$

$$A(ABC) = h \left(\frac{DB}{2} + \frac{DC}{2} \right) \text{ u. a}$$

Por outro lado, vamos calcular a área do triângulo $A(ABC) = A(ABD) + A(ADC)$ tomando AB e AC como sendo as bases dos triângulos ABD e ADC, com r e R as alturas.

Para determinar a área, consideremos:

Figura: 95 - Área do triângulo ABC – parte 2



Fonte: Próprio autor

$$A(ABD) = \frac{r \cdot AB}{2}$$

$$A(ABD) = \frac{3 \cdot 10}{2}$$

$$A(ABD) = 15 \text{ u. a}$$

$$A(ADC) = \frac{R \cdot AC}{2}$$

$$A(ADC) = \frac{5.8}{2}$$

$$A(ADC) = 20 \text{ u.a}$$

Novamente, somando as áreas dos triângulos ABD e ADC, obtemos a área de ABC.

$$A(ABC) = A(ABD) + A(ADC)$$

$$A(ABC) = 15 + 20$$

$$A(ABC) = 35 \text{ u.a}$$

Como as duas áreas são iguais, podemos igualar as expressões:

$$A(ABC) = 35u.a \text{ e } A(ABC) = h\left(\frac{DB}{2} + \frac{DC}{2}\right)u.a$$

$$35 u.a = h\left(\frac{BD}{2} + \frac{DC}{2}\right)u.a$$

Mas, neste caso, será uma situação infrutífera, pois não sabemos a altura “h” para podermos determinar a razão entre DB/DC .

Outro modo, é pensar em partes. Primeiro, vamos igualar as seguintes áreas:

$$A(ABD) = \frac{DB \cdot h}{2}$$

e

$$A(ABD) = 15 \text{ u.a}$$

$$15 = \frac{DB \cdot h}{2}$$

$$30 = DB \cdot h \text{ (I)}$$

Depois essas:

$$A(ADC) = \frac{DC \cdot h}{2} \text{ u.a}$$

e

$$A(ADC) = 20 \text{ u.a}$$

$$\frac{DC \cdot h}{2} = 20$$

$$DC \cdot h = 40 \text{ u.a (II)}$$

Agora, é bem natural pensar em dividir as expressões I e II para chegar na resposta, pois $h \neq 0$.

Dividindo a expressão (I) pela (II), temos:

$$\frac{30}{40} = \frac{DB \cdot h}{DC \cdot h}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{DB}{DC}$$

Portanto, A razão DB/DC é igual a $3/4$.

Comentário: este problema é bem interessante, pois podemos extrair mais informações de acordo com a resposta. Vejamos:

Partindo da resposta, temos que

$$\frac{3}{4} = \frac{DB}{DC} \leftrightarrow \frac{30}{40} = \frac{DB}{DC} \leftrightarrow \frac{DB \cdot h}{DC \cdot h} = \frac{DB}{DC} \leftrightarrow \frac{\frac{DB \cdot h}{2}}{\frac{DC \cdot h}{2}} = \frac{DB}{DC} \leftrightarrow \frac{A(ABD)}{A(ADC)} = \frac{DB}{DC}.$$

Ou seja, dado um triângulo ABC e sendo traçado uma ceviana AD, há uma relação de proporcionalidade entre as áreas dos dois triângulos (ABD e ADC) que a ceviana dividiu o triângulo ABC e suas bases, respetivamente. Um resultado muito importante, pois é possível determinar a razão DB/DC sendo conhecidas as áreas dos triângulos ABD e ADC. E isto já foi discutido anteriormente, onde tratamos de alguns teoremas pouco usuais no contexto escolar.

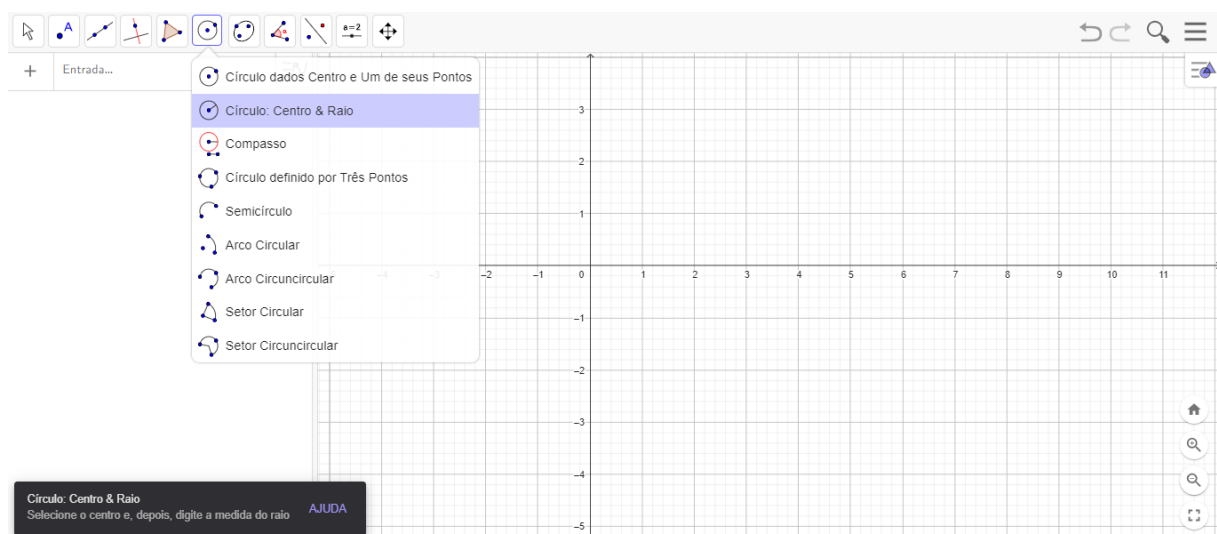
4ª fase: Verificação

Esta é uma etapa crucial, pois envolve a revisão e verificação da solução encontrada. O objetivo é garantir que todos os passos do processo de resolução estejam corretos e que a solução atenda às condições do problema. Nossa proposta, como realizada nos problemas anteriores, é utilizar o GeoGebra, um software dinâmico de matemática, para a construção e visualização das figuras geométricas do problema.

Vamos à construção:

Construindo duas circunferências concêntricas. Para isso, clicamos no sexto grupo de ferramentas, e escolhendo a opção "Círculo: Centro e Raio"

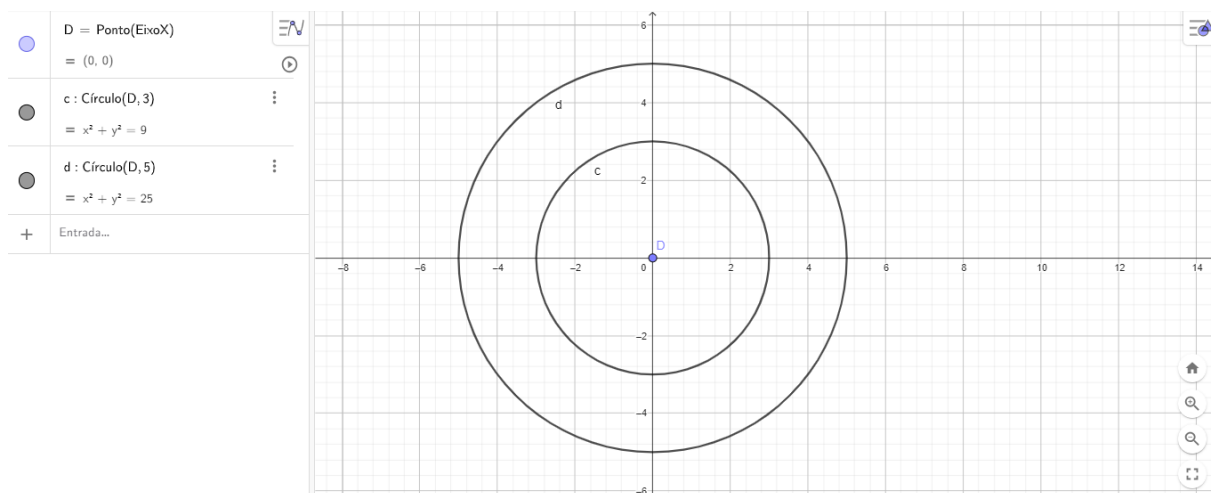
Figura: 96 - Duas circunferências concêntricas – Parte 1



Fonte: Próprio autor

Em seguida, clicamos na origem do sistema de coordenadas e selecionamos raio = 3. Da mesma forma, repetimos os mesmos passos para criar outro círculo com raio 5. Renomeando o ponto A para D, clicamos com o botão direito do mouse sobre o ponto A, escolhendo a opção "Renomear" e digitando D.

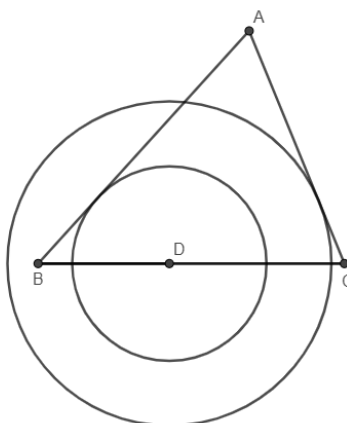
Figura: 97 - Duas circunferências concêntricas – Parte 2



Fonte: Próprio autor

Aqui já encontramos um impasse. Observando a figura do problema abaixo, devemos construir tangentes aos círculos de forma que a interseção dessas tangentes com o eixo X sejam os pontos B e C. Além disso, temos que $AB = 10$ e $AC = 8$, com $BD/DC = 3/4$. Este é um típico problema que é um pouco complicado de ser resolvido pelo GeoGebra. Resolvemos por tentativas e erros, partindo da relação $BD/DC = 3/4$.

Figura: 98 - Tangentes aos círculos



Fonte: Próprio autor

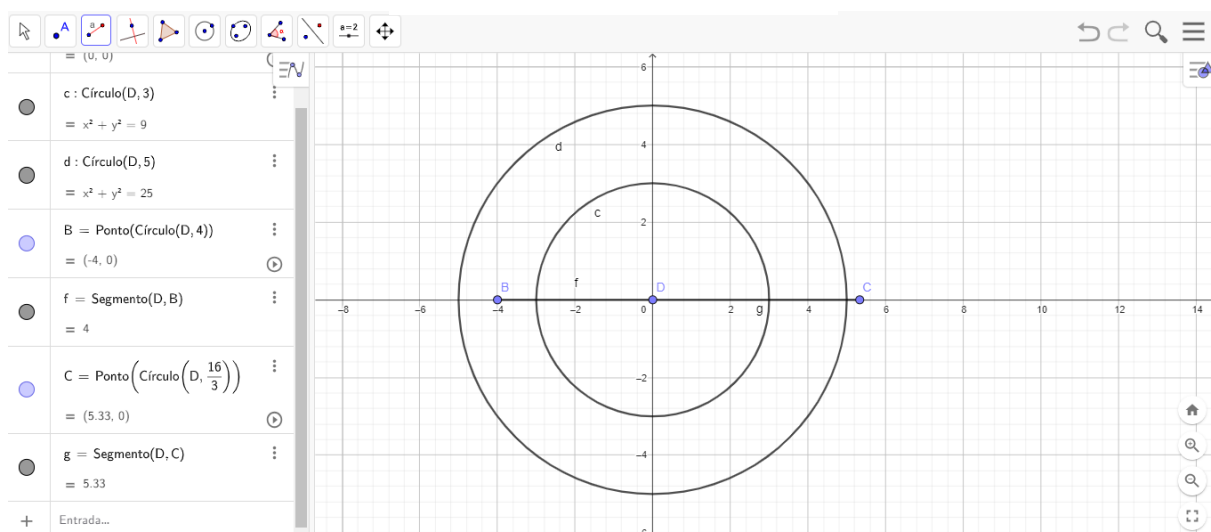
Como os raios dos círculos medem 3 e 5, respectivamente, nossa primeira tentativa foi considerar frações equivalentes a $3/4$. Inicialmente, atribuímos $DB = 4,5$ e $DC = 6$, pois $DB/DC = 3/4$. Fizemos a construção e, na hora de verificar, a resposta ficou um pouco distante dos dados do problema. Após mais algumas tentativas, a que ficou mais próxima foi atribuir $BD =$

4 e $DC = 16/3$, pois $BD/DC = 3/4$. Vale salientar que este problema foi debatido em um fórum no 22º Curso de GeoGebra. Disponível em: <https://ogegebra.com.br/site/edital.php>. Acesso em: 25 de mai. de 2024.

Agora, vamos prosseguir com a construção, vamos criar os segmentos $DB = 4$ e $DC = 16/3$. No GeoGebra, clicamos no terceiro grupo de ferramentas e selecionamos a opção “Segmento com Comprimento Fixo”. Em seguida, clicamos em D e inserimos o valor 4. Foi criado um segmento $DA = 4$. Renomeando o ponto A para B e, em seguida, fazendo um giro de 180° de forma que o segmento $DB = -4$.

De maneira análoga, criamos outro segmento $DC=16/3$, mas sem a necessidade de fazer o giro de 180° , pois ele já está na posição correta. Veja a figura:

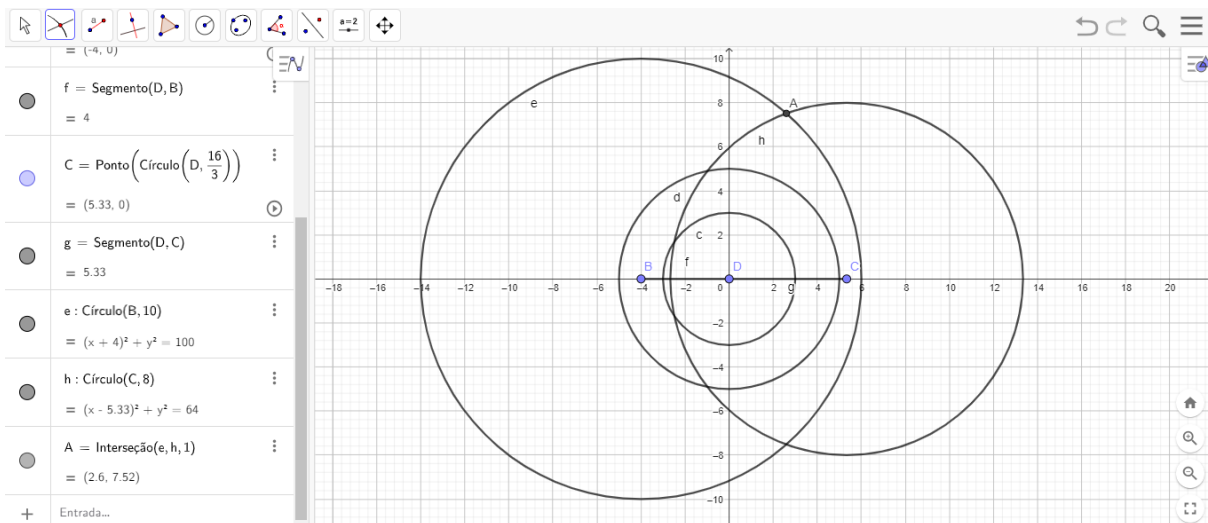
Figura: 99 - Segmentos DB e DC



Fonte: Próprio autor

Criando dois círculos: um centrado em B com raio 10 e outro centrado em C com raio 8. Marcamos a interseção (ponto A) . Como já abordamos a construção de círculos anteriormente, omitiremos os passos detalhados, mencionando apenas o que deve ser feito. Ver figura:

Figura: 100 - Dois círculos

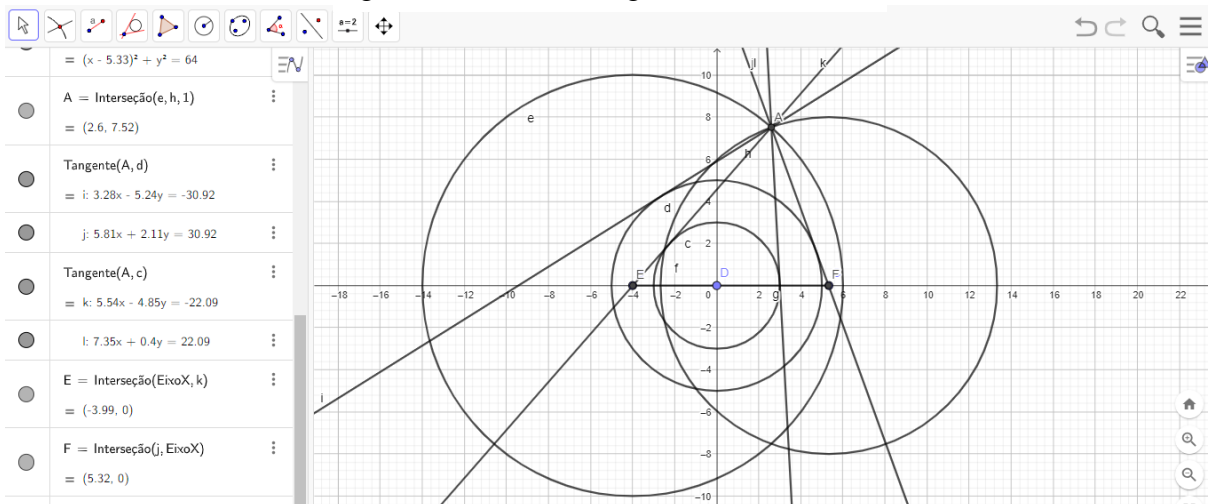


Fonte: Próprio autor

Agora, traçamos retas que passam por A e que sejam tangentes aos círculos “d” e “c”, e marcando as interseções dessas retas com o eixo X, temos que $F \cong 16/3$ e $E \cong 4$.

Observação: Alguns comandos para as construções já foram mencionados anteriormente. Portanto, em alguns casos, omitiremos os passos detalhados e apenas indicaremos como proceder.

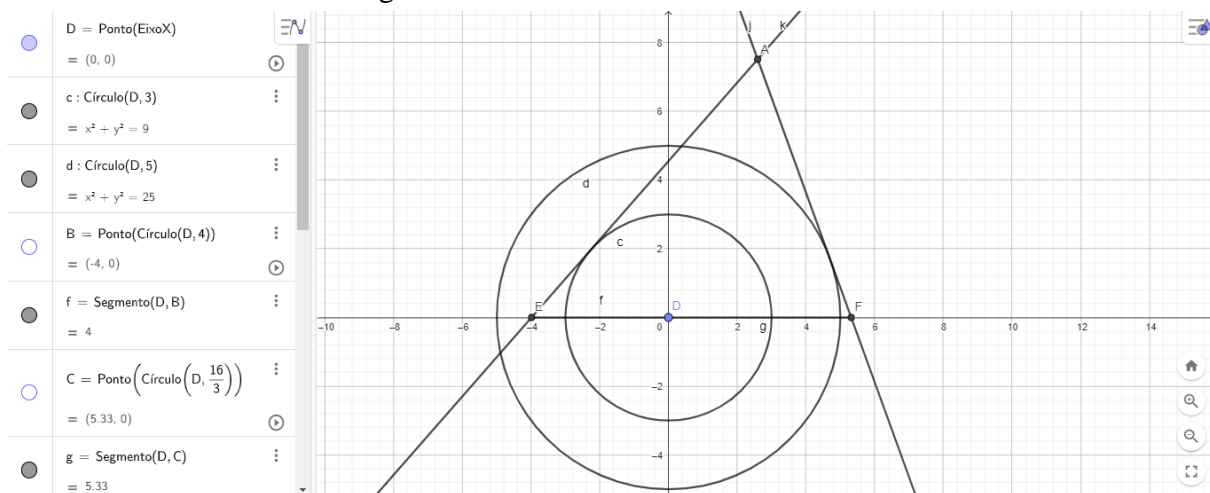
Figura: 101 - Retas tangentes aos círculos



Fonte: Próprio autor

Para “limpar a imagem” vamos omitir algumas construções. Começando pelos pontos B e C, os círculos “e” e “h”, e as retas i e l. Para fazer isso, basta desmarcar as “bolinhas” na janela de álgebra que indicam essas construções. Continuando desmarcando outros elementos até que a figura fique assim:

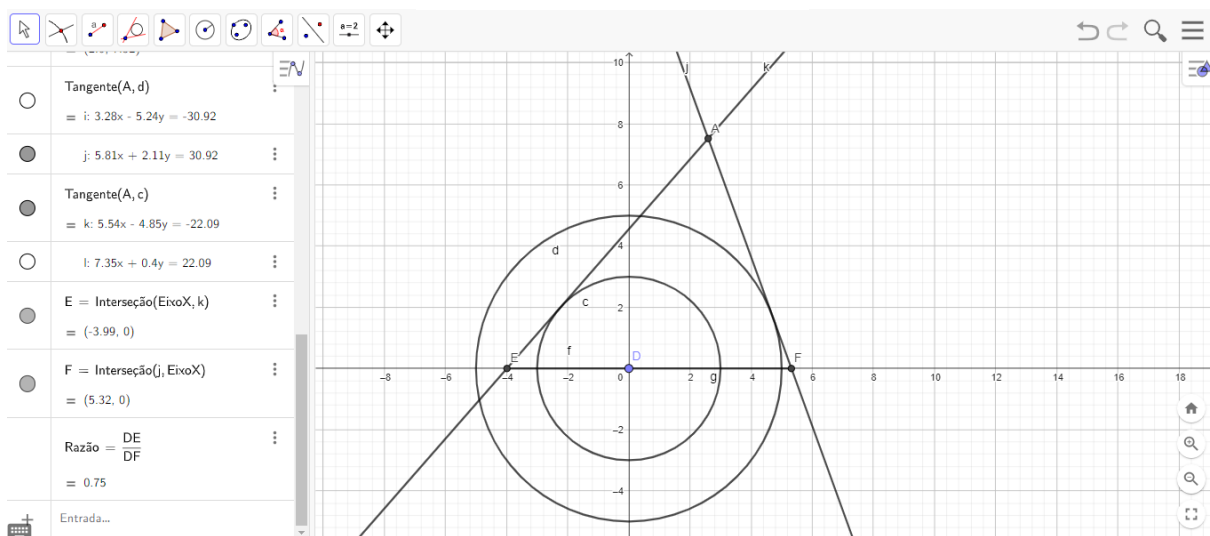
Figura: 102 - Omitindo elementos



Fonte: Próprio autor

Agora, vamos calcular a razão DB/DC , utilizando DE e DF , já que $E \cong B$ e $F \cong C$. Na Janela de Álgebra, digitamos o seguinte: Razão = DE/DF . Vejamos:

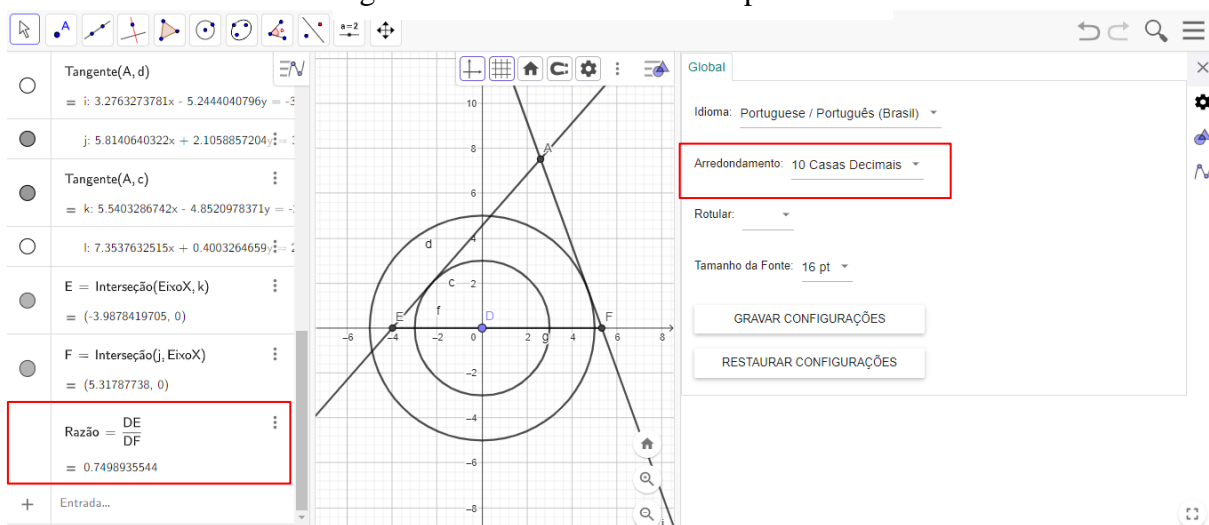
Figura: 103 - Razão DB/DC



Fonte: Próprio autor

Embora tenhamos obtido a resposta $0,75 = 3/4$, que coincide com o valor determinado na 3ª fase, isso pode nos dar uma falsa impressão de que a resposta está correta. Para verificar se esse decimal é exato, podemos ajustar o número de casas decimais nas configurações do GeoGebra. Ao fazermos isso, obtemos

Figura: 104 - Razão DB/DC - Aproximada



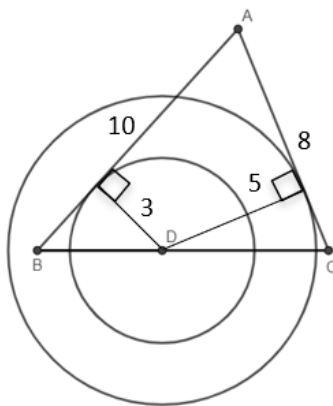
Fonte: Próprio autor

De fato, a resposta é aproximada, mas isso era esperado, pois os segmentos DE e DF também são aproximações de DB e DC. Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/mcvgzprq>. Acesso em: 30 de mai. de 2024

Passaremos agora para a Solução Oficial.

Solução Oficial: Aplicação direta da Teorema.

Figura: 105 - Problema-modelo



Fonte: PAPMEM – 2024 - 1ª EDIÇÃO

$$\frac{DB}{DC} = \frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{10 \cdot 3/2}{8 \cdot 5/2} = \frac{3}{4}$$

Comentários: Este tipo de problema demanda o uso de recursos que geralmente não associamos diretamente. Envolve a determinação de uma razão, mas utilizamos conceitos de

áreas para resolvê-lo. Isso enriquece significativamente nosso nível intelectual e nos equipa com ferramentas para enfrentar problemas semelhantes.

A construção não foi rigorosa, resultando em uma resposta aproximada. Motivo pela qual foi debatida no 22º Curso de GeoGebra, sem que até agora uma construção rigorosa tenha resultado exatamente em $3/4$. No entanto, é isso que torna valioso conhecer essas ferramentas digitais; às vezes, os problemas são simples, mas a construção pode ser complexa, enquanto em outros casos, os problemas são complexos, mas as construções no GeoGebra são simples

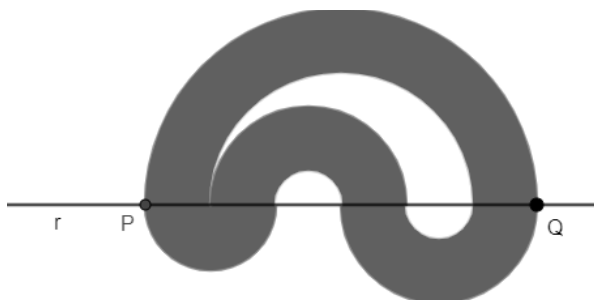
4.4 Resolução comentada de problema modelo 4

Para o Problema-Modelo 4, apresentamos as seguintes justificativas para a escolha, conforme detalhado no quadro abaixo:

Aspectos	Justificativa
Estratégias na solução	A questão apresenta um desafio ao envolver uma figura composta por semicírculos, exigindo cálculos de adição e subtração de áreas de semicírculos.
Uso do Geogebra	Estimula a habilidade de construir semicírculos a partir das relações entre diâmetro e raio, ao longo da construção da figura.

Problema-Modelo 4. (Livro Temas e Problemas Elementares Publicado pela SBM – Capítulo 5: Áreas) Na figura abaixo, o segmento PQ, de 6 cm, sobre a reta r, está dividido em 6 partes de 1 cm. Utilizando esses pontos, foram construídas semicircunferências com diâmetro sobre a reta r. Calcule área sombreada.

Figura: 106 - Semicircunferências



Fonte: Livro Temas e Problemas Elementares Publicado pela SBM – Capítulo 5: Áreas

Resolução:

1ª fase: compreensão e interpretação

Compreender o problema vai além de simplesmente ler a questão. Trata-se de uma análise detalhada e profunda do enunciado para garantir que todas as partes do problema sejam claras. Isso envolve identificar as informações fornecidas, entender o que é pedido e relacionar os dados de maneira lógica.

Para ilustrar esse processo, vamos estabelecer um possível diálogo entre o professor e a turma para este problema.

— Professor: Vamos começar com a leitura do problema. Façam uma leitura individual e tentem entender do que se trata.

Os alunos fazem uma leitura individual do problema.

— Professor: Agora, vamos ler juntos. Enquanto lemos, vamos identificar pontos importantes no enunciado do problema.

O professor lê o problema em voz alta e interage com a turma para destacar pontos importantes.

— Professor: Na figura abaixo, o segmento PQ, de 6 cm, sobre a reta r, está dividido em 6 partes de 1 cm. Utilizando esses pontos, foram construídas semicircunferências com diâmetro sobre a reta r. Calcule área sombreada.

— Professor: O que precisamos resolver?

— Ricardo: Precisamos calcular a área sombreada.

— Professor: Correto. E quais são os dados fornecidos?

— André: Um segmento PQ de 6 cm, dividido em 6 partes de 1 cm cada.

— Professor: Muito bem. E o que mais?

— Carlos: Semicircunferências foram construídas sobre esses pontos.

— Professor: Isso mesmo. E quais são as condições do problema?

— Rafaelly: As semicircunferências têm diâmetros de acordo com a quantidade de segmentos 1 cm que estão sobre a reta r.

— Professor: Excelente. Agora que compreendemos o problema, podemos passar para a próxima fase do método de Polya.

2ª fase: Elaboração de um plano

Após compreender o problema, a segunda fase do método de Polya é "Elaborar um Plano". Esta fase visa desenvolver uma estratégia ou um conjunto de passos que levarão à solução do problema. Portanto, nesta etapa, é essencial identificar os métodos e ferramentas

matemáticas que serão usados para resolver o problema. Isso pode incluir fórmulas, teoremas, algoritmos, ou qualquer outra técnica relevante.

Perguntas Essenciais para Fazer na elaboração de um Plano

1. Já resolvi um problema semelhante antes? Se sim, que métodos usei?
2. Que estratégias posso aplicar aqui?
3. Existe alguma fórmula ou teorema relevante?
4. Posso dividir o problema em partes menores? Resolver cada parte pode tornar o problema mais manejável.

Para o nosso problema, ressaltamos estes pontos:

- Identificar as áreas dos semicírculos;
- Cada semicircunferência tem seu diâmetro determinado pelos pontos sobre a reta r ;
- A fórmula para a área de um semicírculo $\frac{\pi r^2}{2}$;
- Calcular a área de cada semicírculo;
- Subtrair as áreas entre os semicírculos convenientemente para obter a área sombreada.

Um possível Diálogo entre Professor e Turma.

- Professor: Agora que entendemos o problema, vamos fazer um plano para resolvê-lo. Alguém tem uma ideia de como começar?
- Luana: Podemos começar calculando as áreas dos semicírculos.
- Professor: Excelente. E qual é a fórmula para a área de cada semicírculo?
- Luana: É metade da área de um círculo: $\frac{\pi r^2}{2}$.
- Professor: Isso mesmo. Qual é o raio dos semicírculos?
- Júlio: Depende de qual semicírculo estaremos nos referindo.
- Professor: Certo. Depois de calcular a área de cada semicírculos, o que devemos fazer para chegar na resposta correta?
- Miguel: fazer algumas somas e subtrações convenientemente entre as áreas dos semicírculos para chegarmos no valor da área sombreada.
- Professor: Perfeito! Nosso plano está pronto. Vamos agora seguir esses passos para executar nosso plano.

3ª fase: execução do plano

Na terceira fase do método de Polya "Executar o Plano". Envolve colocar em prática as estratégias delineadas na fase anterior e resolver o problema passo a passo. Vamos explorar essa fase em detalhes.

Perguntas Essenciais para Executar o Plano

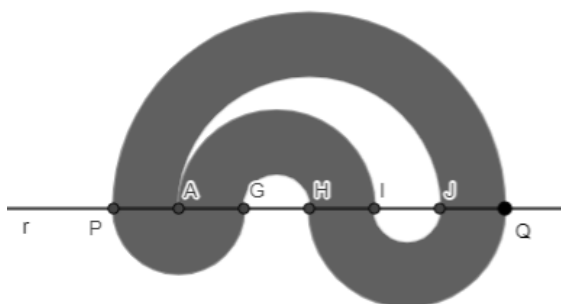
Polya (2006) sugere que, durante a execução, o estudante deve considerar as seguintes perguntas:

1. Estou seguindo o plano corretamente? Verificar cada passo e garantir que está sendo executado conforme planejado.
2. Os cálculos estão corretos? Realizar verificações e revisões constantes para evitar erros.
3. O resultado faz sentido? Avaliar se o resultado obtido é razoável dentro do contexto do problema.

Um possível Diálogo entre Professor e Turma:

- Professor: Vamos agora executar nosso plano. Primeiro, como calcular a área de cada um dos semicírculos? Qual é a fórmula?
- André: Para calcular a área de cada semicírculo, devemos denotar cada ponto em que o segmento PQ foi dividido. Pois assim, saberemos qual semicírculo estamos tratando. Para calcular a área, utilizaremos a fórmula $\frac{\pi r^2}{2}$. Agora veja como ficou denotando os pontos:

Figura: 107 - Semicírculos



Fonte: Próprio autor

- Professor: Muito bem! E qual é o valor da área de cada semicírculo?
- Beto: Considerando cada semicírculo, temos:

Área do semicírculo de diâmetro PG = 2cm.

Raio: 1cm

$$A = \frac{\pi 1^2}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Área do semicírculo de diâmetro AI = HQ = 3cm

Raio: 1,5 cm

$$A = \frac{\pi 1,5^2}{2}$$

$$A = \frac{2,25\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Área do semicírculo de diâmetro GH = IJ = 1cm.

Raio: 0,5 cm

$$A = \frac{\pi 0,5^2}{2}$$

$$A = \frac{0,25\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Área do semicírculo de diâmetro AJ = 4 cm.

Raio: 2cm

$$A = \frac{\pi 2^2}{2}$$

$$A = \frac{4\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Área do semicírculo de diâmetro PQ = 6 cm.

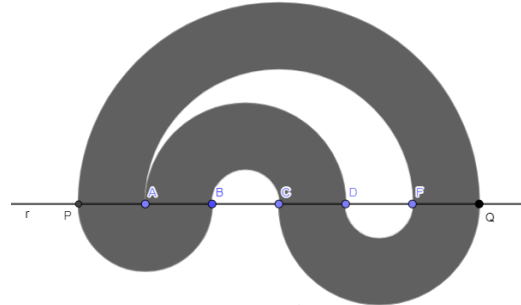
Raio: 3cm

$$A = \frac{\pi 3^2}{2}$$

$$A = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^2$$

- Professor: Muito bem. Qual será a área sombreada?
- Luís: Fazendo as seguintes somas e subtrações entre as áreas dos semicírculos

Figura: 108 - Área da região em cinza



Fonte: Próprio autor

(Área do semicírculo PG + (Área do semicírculo HQ - Área do semicírculo IJ)) + (Área do semicírculo PQ - (Área do semicírculo AJ)) + (Área do semicírculo AI - Área do semicírculo GH).

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi 1,5^2}{2} - \frac{\pi 0,5^2}{2} \right) \right) + \left(\frac{9\pi}{2} - \left(\frac{4\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{2,25\pi}{2} - \left(\frac{0,25\pi}{2} \right) \right) = \\
 & = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{2,1\pi}{2} \right) + \left(\frac{5\pi}{2} \right) + \left(\frac{2\pi}{2} \right) = \\
 & = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{2\pi}{2} \right) + \left(\frac{5\pi}{2} \right) + \left(\frac{2\pi}{2} \right) = \\
 & = 5\pi.
 \end{aligned}$$

- Professor: Perfeito! Agora, vamos para última fase. Construir a figura utilizando o Geogebra e fazer o cálculo para obter a área sombreada para verificar se corresponde com esta resposta.

4ª fase: verificação

A quarta fase do método de Polya é "Revisar". Nesta etapa, o objetivo é verificar se a solução obtida está correta, analisar o processo de resolução e considerar outras possíveis abordagens ou generalizações. Revisar ajuda a garantir que a solução é válida e reforça o entendimento do problema.

Vamos utilizar o Geogebra para construir a figura do problema e fazer os cálculos para conferir com a solução obtida na 3ª etapa.

Passos a serem utilizados no Geogebra

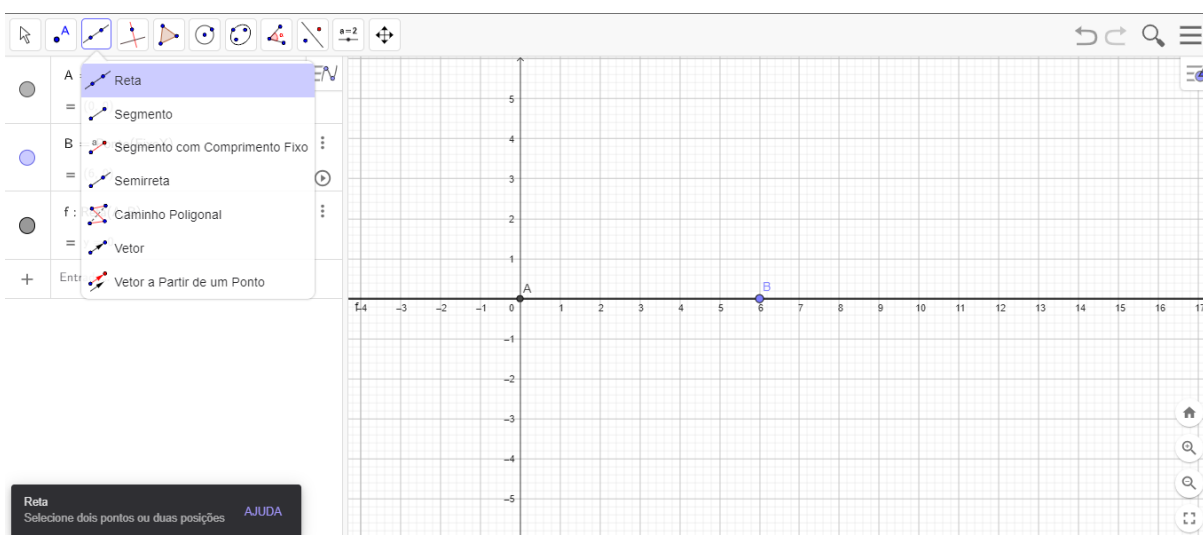
1. Construir uma reta r;

2. Construir um segmento $PQ = 6\text{cm}$ sobre a reta r ;
3. Dividir o segmento em partes em 6 partes iguais:
4. Construir as semicircunferências:
5. Utilizar os pontos de divisão como diâmetros para construir semicircunferências.
6. Calcular a Área Sombreada através da utilização de ferramentas de medição do Geogebra.

Um provável Diálogo entre Professor e Turma

- Professor: Vamos revisar nossa solução usando o Geogebra. Primeiro, vamos construir uma reta “ r ”. Quem se habilita?
- Paulo: Professor, já desenhei a reta “ r ” utilizando o 3º grupo de ferramentas e clicando na opção Reta. Marquei um ponto $A(0,0)$ e outro em $B(6,0)$.

Figura: 109 - Construção da reta r

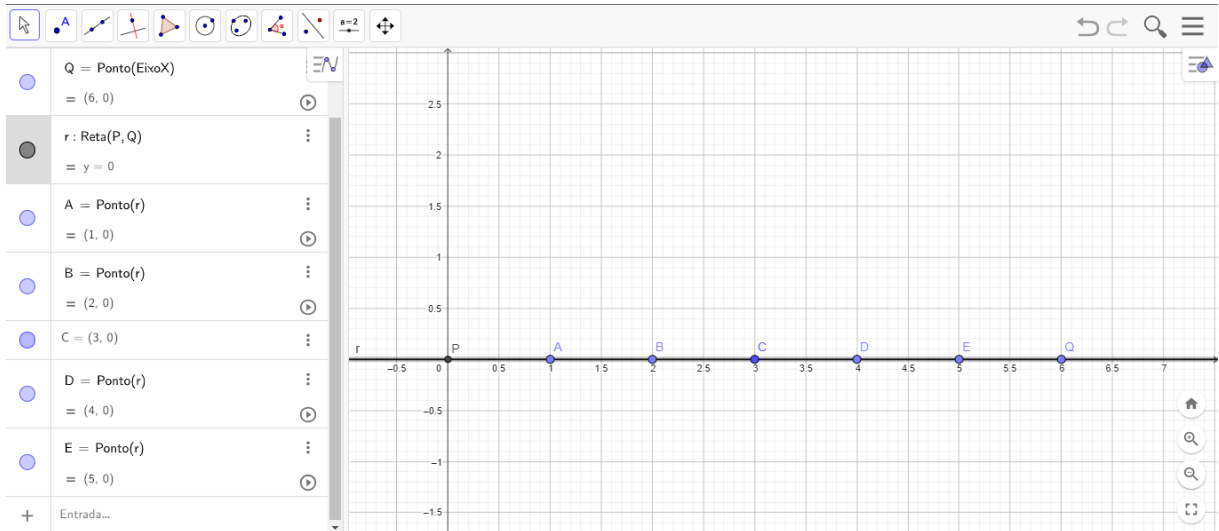


Fonte: Próprio autor

- Professor: "Ótimo. Agora, por que você escolheu esses pontos para construir a reta?"
- Paulo: Como no problema temos um segmento $PQ = 6\text{ cm}$, fica mais conveniente, pois basta renomear os pontos A e B , para P e Q .
- Professor: "Ótimo. Agora, vamos dividir o segmento AB em 6 partes iguais. Em seguida, vamos nomear os pontos de divisão e renomear o segmento AB para PQ . Quem pode fazer isso?"
- Priscila: Professor, posso fazer essa parte. Primeiro, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A , escolha a opção "Renomear", digite "P" na caixa de diálogo e clique em "OK". Repita o processo para o ponto B , renomeando-o para "Q". Para denominar os outros pontos, clique no segundo grupo de ferramentas e selecione a

opção "Ponto". Em seguida, clique nos pontos (1,0), (2,0), (3,0), (4,0) e (5,0), renomeando-os como A, B, C, D e E. Veja a figura:

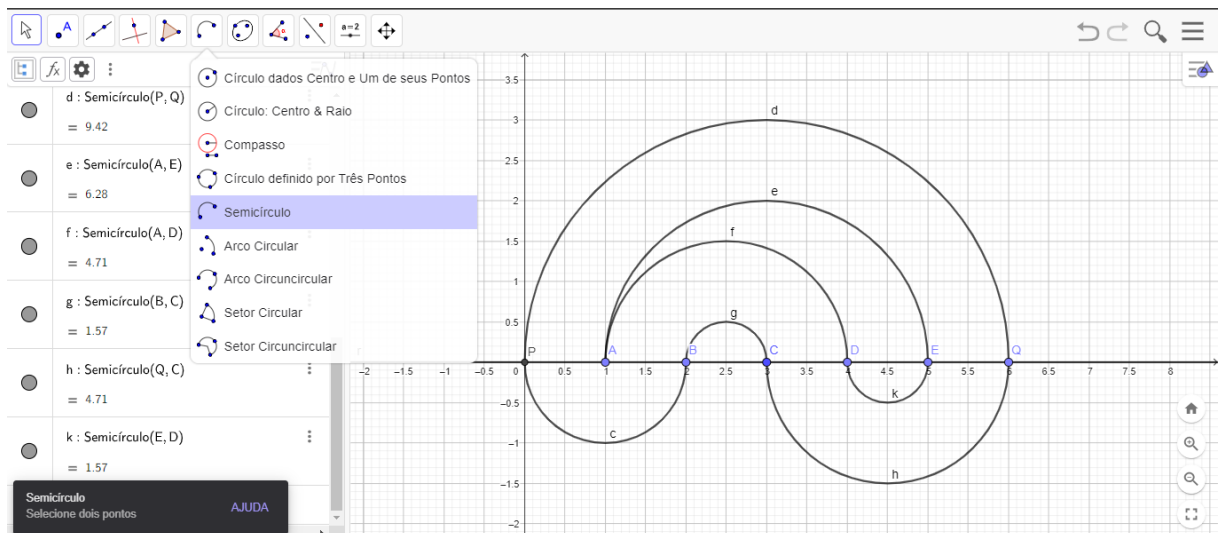
Figura: 110 - Sequência de pontos



Fonte: Próprio autor

- Professor: Muito bem! Podemos então construir os semicírculos, alguém tem uma ideia?
- Cleber: Eu tenho, no 6º grupo de ferramentas, selecionamos a opção "Semicírculo". Em seguida, clicamos nos pontos BP, PQ, AE, AD, BC, QC e ED para formar os semicírculos c, d, e, f, g, h e k, conforme mostrado na figura a seguir:

Figura: 111 - Construção dos semicírculos – Parte 2

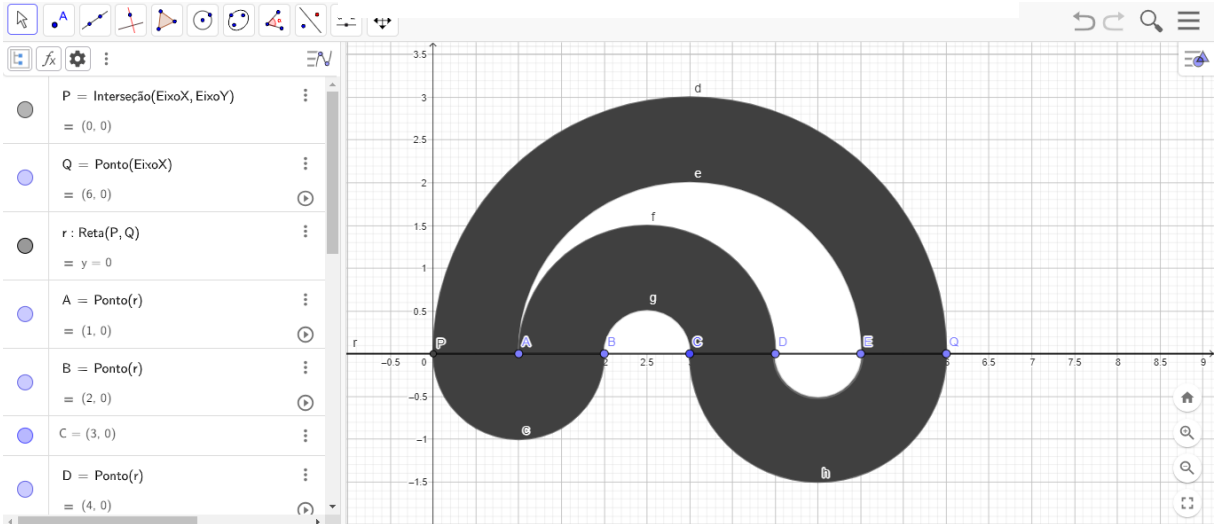


Fonte: Próprio autor

- Professor: "Muito bem. Como podemos colorir a área sombreada para visualizarmos melhor a região cuja área queremos calcular?"
- Eduina: "No GeoGebra, clicamos com o botão direito do mouse sobre o semicírculo BP. Em seguida, selecionamos 'Configurações', depois 'Cor' e escolhemos cinza."

Ajustamos a transparência para 100%. Repetimos o mesmo procedimento para os semicírculos PQ, AE, AD, CB, QC, DC e PB, usando as cores cinza e branco alternadamente. Veja:

Figura: 112 - Construção dos semicírculos – Parte 3

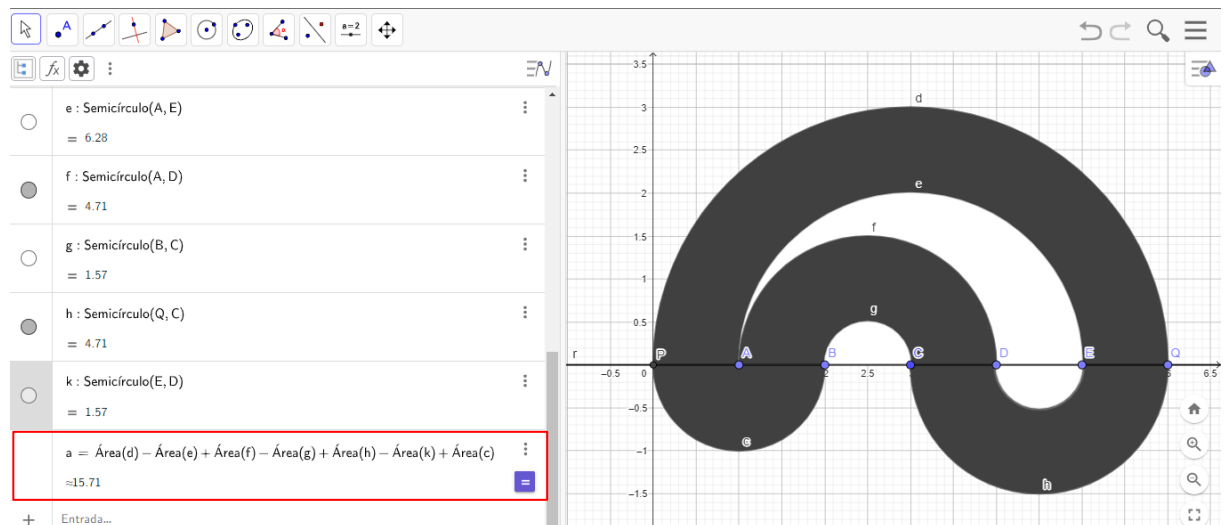


Fonte: Próprio autor

— Professor: Perfeito! Agora, como podemos calcular a área da região sombreada?

Lucas: Podemos seguir a ideia da Eduina da seguinte maneira: adicionaremos a área cinza e subtrairemos a área branca. Ficaria assim: área do semicírculo PQ - área do semicírculo AE + área do semicírculo AD - área do semicírculo CB + área do semicírculo QC - área do semicírculo DC + área do semicírculo QC. No GeoGebra, digitamos o seguinte comando na janela de álgebra: $=\text{Área}(d) - \text{Área}(e) + \text{Área}(f) - \text{Área}(g) + \text{Área}(h) - \text{Área}(k) + \text{Área}(c)$.

Figura: 113 - Área da região sombreada



Fonte: Próprio autor

Professor: Essa resposta corresponde àquela encontrada na terceira fase? Se sim, por quê?

José: Sim, porque a resposta foi $5\pi = 5 \cdot 3,14\dots \approx 15,71$, que é o valor obtido no Geogebra.

Professor: Parabéns, turma!

Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/pksy4dxu>.
Acesso em: 15 de jun. de 2024

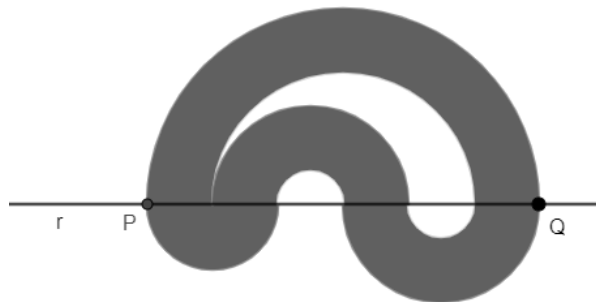
Comentários: Este tipo de questão, ao utilizar o GeoGebra para verificação, torna o processo mais dinâmico. O aspecto construtivo da figura facilita a compreensão do caminho que o aluno deve seguir para chegar à solução. Além disso, é importante trabalhar questões sem alternativas, como exemplificado aqui, para confrontar a resposta obtida na terceira fase com a do GeoGebra na 4ª fase. Em caso de divergência, devemos identificar onde está o erro, realizando verificações tanto no GeoGebra quanto na terceira fase.

Solução Oficial: Seja $s(d)$ a área de um semicírculo de diâmetro d . Seja S a área da região sombreada.

Fazendo inicialmente $s(1) = A$, temos que $s(2) = 4A$, $s(3) = 9A$ e assim por diante, pois semicírculos são figuras semelhantes.

Observe atentamente as figuras acima e abaixo da reta que contém os diâmetros e conclua que:

Figura: 114 - Área S



Fonte: Próprio autor

$$S = s(6) - s(4) + s(3) - s(1) + s(2) + s(3) - s(1)$$

$$S = 36A - 16A + 9A - A + 4A + 9A - A = 40A$$

$$\text{Como } A = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}, \text{ concluímos que } S = 5\pi.$$

Comentários: Neste tipo de problema, ao utilizar o GeoGebra para verificação, torna o processo mais dinâmico. O aspecto construtivo da figura facilita a compreensão do caminho que o aluno deve seguir para chegar à solução. Além disso, é importante trabalhar questões sem alternativas, como exemplificado aqui, para confrontar a resposta obtida na terceira fase com a do GeoGebra na 4ª fase. Em caso de divergência, devemos identificar onde está o erro, realizando verificações tanto no GeoGebra quanto na terceira fase.

4.5 Resolução comentada de problema modelo 5

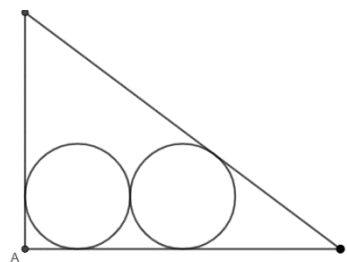
Para o Problema-Modelo 5, apresentamos as seguintes justificativas para a escolha, conforme detalhado no quadro abaixo:

Aspectos	Justificativa
Estratégias pouco exploradas no contexto escolar	O problema envolve o traçado de retas perpendiculares, tangências entre circunferências internas a um triângulo, o uso de relações métricas em triângulos retângulos, além do cálculo de áreas de triângulos e trapézios.
Generalizações	Demonstra a existência de uma fórmula que relaciona o raio aos lados do triângulo retângulo. Destacando que a construção é rigorosa: partindo de um círculo de raio $4/3$, a figura é construída com precisão.
Resolução GeoGebra x Resolução por Polya	A solução utilizando o GeoGebra difere da abordagem tradicional com a metodologia de Polya. No GeoGebra, foi necessário conhecer o valor do raio inicialmente para realizar a construção, enquanto na resolução manual, utilizamos traçados para visualizar triângulos internos ao triângulo retângulo, chegando ao valor do raio de $4/3$ por meio de áreas de figuras planas.

Problema-Modelo 5. (PAPMEM-2024 - 1ª EDIÇÃO) Na figura ao lado o triângulo ABC é retângulo em A. No seu interior há duas circunferências iguais tangentes entre si. Uma delas é tangente ao lado AC e AB e outra é tangente aos lados AB e BC. Sabes que $AB=8$ e $AC=6$. Determine o raio dessas circunferências.

- A) $3/2$
- B) $4/3$
- C) $5/4$
- D) $6/5$
- E) $7/6$

Figura: 115 - Triângulo ABC é retângulo



Fonte: PAPMEM -2024 – 1ª EDIÇÃO

Resolução:

1ª fase: compreensão e interpretação

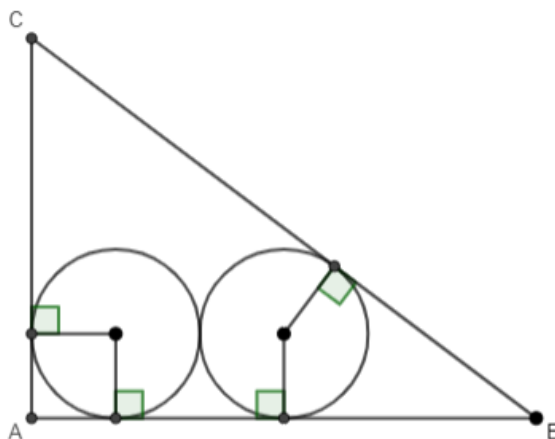
A primeira fase do método de Polya é crucial para resolver problemas de maneira eficaz e organizada. Nesta etapa, o foco principal é compreender completamente o problema. Isso envolve identificar todos os dados fornecidos, entender as relações entre as informações e visualizar claramente o que se pede no problema.

Vamos iniciar a solução com um diálogo entre o Professor-formador e o Professor-aluno.

- Professor-formador: Vamos analisar esta questão passo a passo usando o método de Polya. Na primeira fase, precisamos entender o problema. O que você percebe sobre as circunferências dentro do triângulo ABC?
- Professor-aluno: As circunferências são tangentes aos lados do triângulo. Uma delas toca os lados AC e AB, enquanto a outra toca os lados AB e BC.
- Professor-formador: Muito bem! Como resolver o problema?
- Professor-aluno: Podemos usar os dados $AB = 8$ e $AC = 6$ para encontrar o raio das circunferências?
- Professor-formador: Muito bem! Pode sim, lembra de alguma fórmula ou propriedade?
- Professor-aluno: Lembro sim, podemos usar a propriedade das circunferências tangentes aos lados do triângulo para relacionar os raios com os lados do triângulo retângulo, pois cada raio é perpendicular aos lados.
- Professor-formador: Perfeito! Poderia fazer um desenho do seu raciocínio?

- Professor-aluno: Sim. Veja:

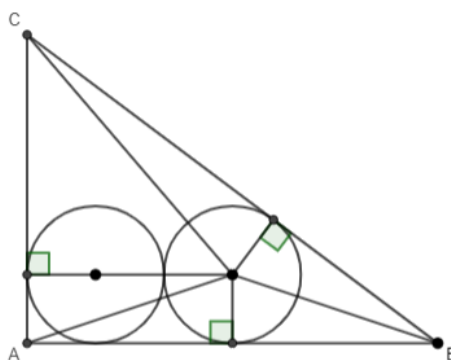
Figura: 116 - Raios perpendiculares



Fonte: Próprio autor

- Professor-formador: Perfeito! Podemos calcular o raio das circunferências utilizando essas relações?
- Professor-aluno: Acredito que será útil para resolver, mas não vejo um caminho.
- Professor-formador: Será que podemos formar triângulos internos ao triângulo ABC tomando os raios com as alturas?
- Professor-aluno: Sim, seria assim:

Figura: 117 - Triângulo ABC tomando os raios com as alturas



Fonte: Próprio autor

- Professor-formador: Ótimo! Tem outras formas, mas essa está boa.
- Professor-formador: Veja que conhecemos os catetos do triângulo retângulo ABC. Além disso, todos os triângulos dentro do triângulo ABC têm bases e alturas conhecidas. Isso te lembra algo?
- Professor-aluno: Lembrei, a área do triângulo retângulo! Os catetos funcionam como base e altura, assim como a área de qualquer triângulo com base e altura conhecidas.

- Professor-formador: Muito bem! Já compreendemos o problema e parece que, ao compararmos as áreas, chegaremos à solução.

2ª fase: elaboração de um plano

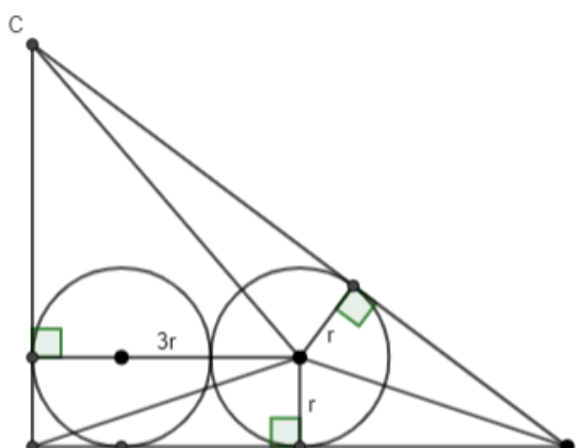
Nesta segunda fase, elaborar um Plano, é muito importante para a resolução do problema. Ela envolve a seleção de estratégias apropriadas e a formulação de um conjunto de passos lógicos que conduzirão à solução. Esse planejamento estruturado facilita a execução do plano na terceira fase e aumenta a confiança do estudante em resolver problemas mais complexos.

Continuando o diálogo estabelecido na primeira fase.

- Professor-formador: Você já resolveu esse tipo de problema antes?
- Professor-aluno: Sim, ao calcular a área de um triângulo retângulo dados os catetos e de triângulos cujas alturas e bases são conhecidas.
- Professor-formador: Muito bem! Como você vai proceder para resolver este problema?
- Professor-aluno: Dado que os lados do triângulo retângulo são $AB = 8$ e $AC = 6$, posso calcular sua área. Além disso, irei determinar a área dos três triângulos internos ao triângulo ABC: CFA, AFB e BFC, onde as alturas são raios e as bases são os lados do triângulo ABC. Ao igualar a área do triângulo ABC à soma das áreas desses triângulos menores, restando apenas encontrar o raio.

Veja a figura abaixo:

Figura:118 - Três triângulos internos ao triângulo ABC



Fonte: Próprio autor

- Professor-formador: Muito bem! Já temos um ótimo plano, vamos a execução dele na 3ª fase.

3ª fase: execução do plano

Nesta fase, todo o trabalho preparatório se concretiza. É crucial seguir os passos planejados com precisão e atenção aos detalhes para alcançar a solução. Durante este processo, a verificação contínua e a reavaliação são fundamentais para assegurar a execução adequada do plano e a consistência dos resultados conforme as expectativas.

Um possível diálogo entre Professor-formador e Professor-aluno:

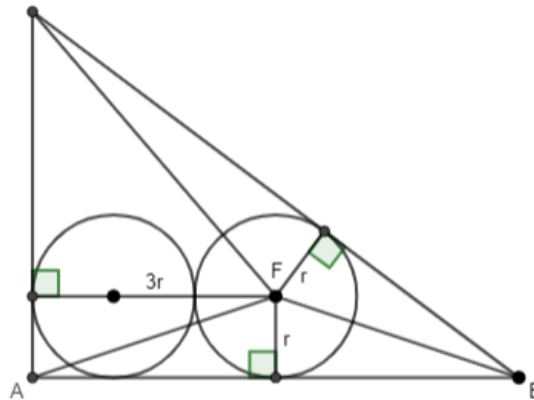
- Professor-formador: Você poderia executar o plano estabelecido na segunda etapa?
- Professor-aluno: Sim, como o triângulo ABC é retângulo em A, podemos calcular a área usando os lados $AB = 8$ e $AC = 6$ como base e altura, respectivamente. Basta aplicar a fórmula $\text{base} \times \text{altura} / 2$. Veja:

$$A(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ u. a}$$

Por outro lado, vamos calcular a área dos três triângulos internos ao triângulo ABC: CFA, AFB e BFC, onde as alturas são raios e as bases são os lados do triângulo ABC.

Vejamos:

Figura: 119 - Área do triângulo do ABC



Fonte: Próprio autor

$$\begin{aligned} A(ABC) &= CFA + AFB + BFC = \frac{AC \cdot 3r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} = \frac{6 \cdot 3r}{2} + \frac{8 \cdot r}{2} + \frac{10 \cdot r}{2} = \\ &= \frac{18r}{2} + \frac{8 \cdot r}{2} + \frac{10 \cdot r}{2} = \frac{36r}{2} = 18r \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Como, $A(ABC) = 24 \text{ u.a}$, temos que

$$A(ABC) = 24$$

$$18r = 24$$

$$r = \frac{24}{18}$$

$$r = \frac{12}{9}$$

$$r = \frac{4}{3}$$

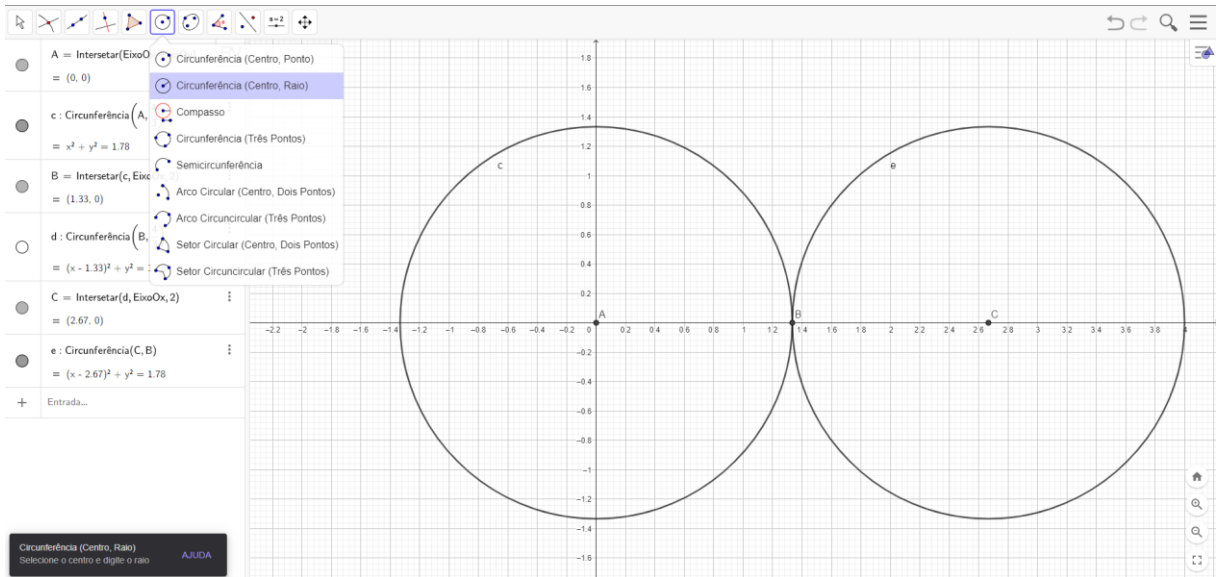
4ª fase: Verificação do plano

Nesta fase, é fundamenta verificar a precisão da solução para consolidar o aprendizado. Utilizamos o GeoGebra na construção como ferramenta não apenas para confirmar os cálculos, mas também para oferece uma visualização clara do problema e da solução. Essa etapa reforça a confiança na resposta obtida e promove uma compreensão mais profunda do problema e de suas possíveis variações e generalizações.

Um possível diálogo para esta fase:

- Professor-Formador: Vamos resolver esse problema sobre circunferências tangentes internamente em um triângulo retângulo utilizando o GeoGebra. Primeiro, vamos entender o que o problema está pedindo. Temos um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, com $AB = 8$ e $AC = 6$. No interior do triângulo, há duas circunferências iguais que são tangentes entre si, e tangentes aos lados do triângulo conforme descrito no problema. Precisamos determinar o raio dessas circunferências.
- Professor-Aluno: Certo. Acredito que o primeiro passo é construir o triângulo ABC no GeoGebra com as medidas dadas.
- Professor-Formador: Sim, mas veja: temos duas circunferências tangentes e internas ao triângulo. O que acha de começarmos construindo primeiro as duas circunferências?
- Professor-aluno: Certo, como conhecemos o raio, que é $4/3$, vamos começar a construção. No GeoGebra, cliquei no sexto grupo de ferramentas e selecionei a opção ‘Circunferência (Centro, Raio)’. Em seguida, cliquei na origem do sistema de coordenadas, construindo o círculo c de centro $A(0,0)$. Marquei a interseção do círculo com c o eixo x , originando o ponto $B(4/3,0)$. De modo análogo, construí outro círculo de mesmo raio centrado em B e mais uma vez outro círculo de mesmo raio com centro em C, conforme mostrado na figura:

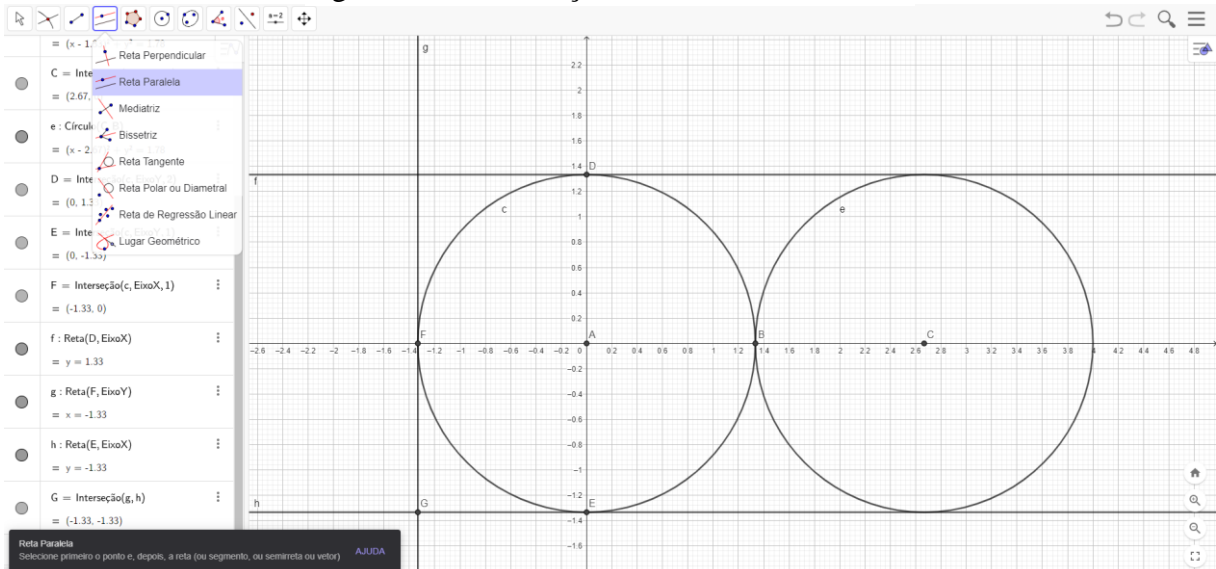
Figura: 120 - Dois círculos tangentes externamente



Fonte: Próprio autor

- Professor-Formador: Muito bem! Precisamos construir o triângulo. Como você pretende proceder?
- Professor-Aluno: Vou marcar as interseções do círculo c com o eixo y e a outra que falta no eixo x . Em seguida, traçarei retas paralelas aos eixos passando por esses pontos, originando os pontos D, E e F e as retas f, g e h. Após fazer a interseção das retas g e h, teremos o ponto G, conforme mostrado na figura:

Figura: 121 - Interseções com os dois círculos



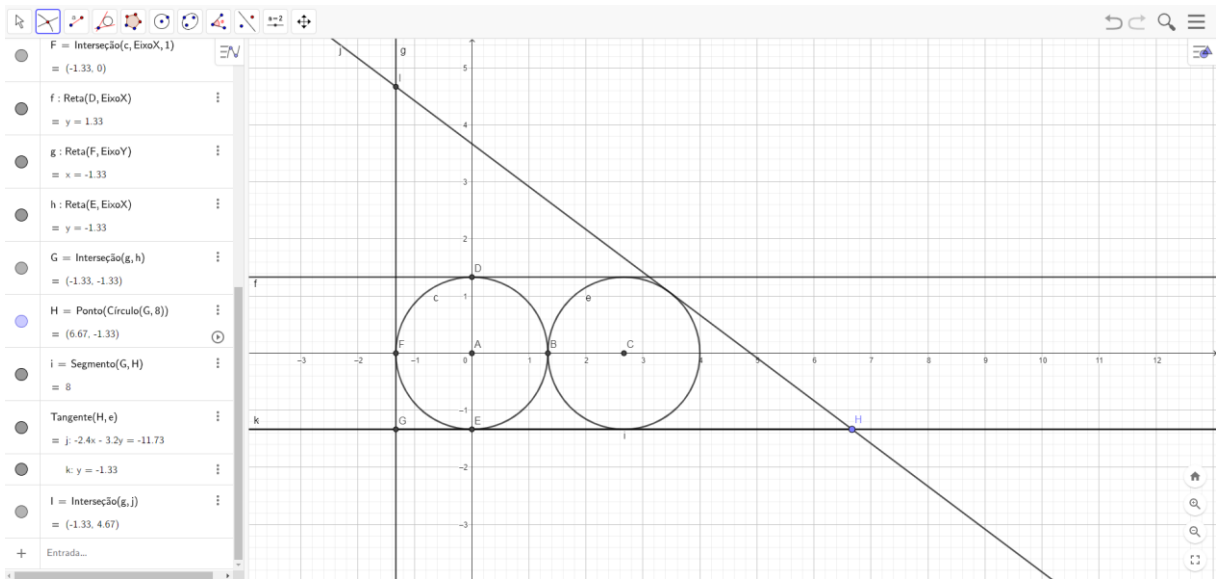
Fonte: Próprio autor

- Professor-Formador: Ótimo! Mas você ainda não construiu o triângulo retângulo. Continue com o raciocínio.

- Professor-Aluno: Como as retas h e g são perpendiculares no ponto G , podemos construir os segmentos a partir dele. Primeiro, construí o segmento $GH=8$. Em seguida, tracei uma tangente ao círculo e passando por H . A interseção dessa tangente j com a reta g é o ponto I . Com isso, o segmento GI deve ser igual a 6, o que é confirmado após a construção. Além disso, $HI=10$, conforme observado no GeoGebra.

Veja a seguir o triângulo retângulo IGH .

Figura: 122 – Construção do triângulo IGH

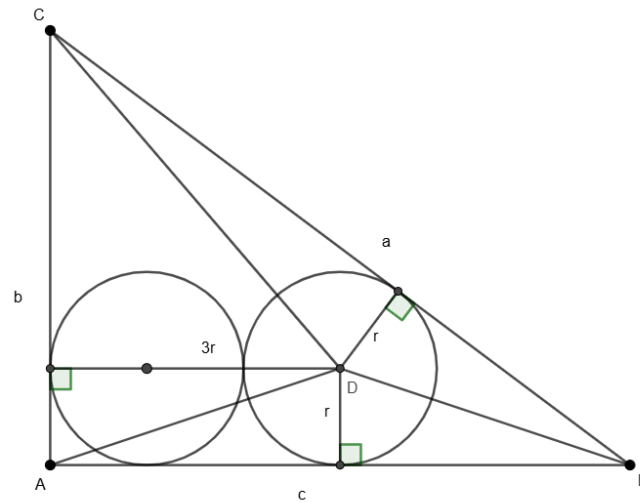


Fonte: Próprio autor

- Professor-Formador: Parabéns! Você conseguiu construir a figura utilizando o valor do raio encontrado na terceira fase. É sempre possível construir esses círculos com base no valor do raio? Se sim, podemos generalizar essa construção? Se for possível, como seria a fórmula geral?
- Professor-Aluno: Sim, é possível. Considere o seguinte enunciado: Num triângulo retângulo ABC com o ângulo reto em A . No interior deste triângulo, existem duas circunferências iguais que são tangentes entre si. Uma das circunferências é tangente aos lados AC e AB , enquanto a outra é tangente aos lados AB e BC . Determine o raio dessas circunferências em função dos lados do triângulo ABC .

Solução. Sejam $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, e D o centro da circunferência tangente aos lados AB e BC . Agora, tudo o que precisamos fazer é calcular a área do triângulo ABC e igualar à soma das áreas dos triângulos ADB , BDC e CDA . Com isso, determinaremos o raio r da circunferência. De fato:

Figura: 123 - Raio em função dos lados



Fonte: Próprio autor

De fato:

$$(ABC) = ADB + BDC + CDA = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot 3r}{2} =$$

$$= \frac{r(a+3b+c)}{2}, \text{ mas } (ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{c \cdot b}{2}, \text{ com isso,}$$

$$(ABC) = \frac{c \cdot b}{2}$$

$$\frac{r(a + 3b + c)}{2} = \frac{c \cdot b}{2}$$

$$r(a + 3b + c) = c \cdot b$$

$$r = \frac{c \cdot b}{(a + 3b + c)}$$

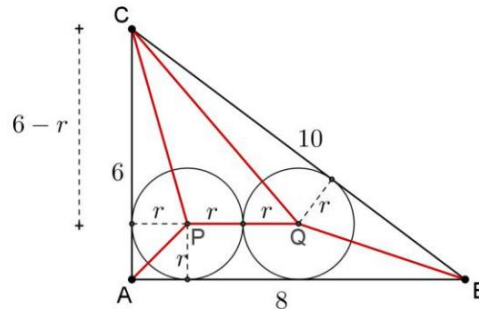
Portanto, a fórmula acima determina o raio em função dos lados do triângulo.

Link da construção, disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/af86wzdm>.

Acesso em: 03 de ago. de 2024

Solução Oficial

Figura: 124 - Triângulo ABC dividido em triângulos e trapézio



Fonte: PAPMEM – jan. de 2024

Sejam P e Q os centros das circunferências como mostra a figura. Como o triângulo ABC é retângulo em A temos $BC = 10$. Seja r o raio das circunferências e, pela construção em vermelho que aparece na figura temos:

$$(PAC) + (QBC) + (ABQP) + (CPQ) = (ABC)$$

$$\frac{6 \cdot r}{2} + \frac{10 \cdot r}{2} + \frac{(8+2r)r}{2} + \frac{2r \cdot (6-r)}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2}$$

As constas são fáceis e chegamos a $r = 4/3$.

Comentários: Podemos perceber que a solução utilizando o GeoGebra difere um pouco daquela que construímos nas três primeiras etapas pela metodologia de resolução de problemas de Polya. Precisamos de métodos adicionais para construir as figuras. No caso em questão, foi necessário conhecer o valor do raio inicialmente para fazer a construção. Por outro lado, ao resolver sem o GeoGebra, fizemos traçados na figura para visualizar triângulos internos ao triângulo retângulo e assim chegar ao valor do raio de $4/3$.

Outro aspecto interessante deste problema é que ele pode ser generalizado. Demonstramos que existe uma fórmula que relaciona o raio aos lados do triângulo retângulo. Também é importante notar que essa construção é rigorosa: partindo do círculo de raio $4/3$, conseguimos construir a figura de forma precisa.

Em síntese, essa abordagem de solução amplia nossa capacidade de resolver problemas. Utilizar tanto métodos tradicionais quanto ferramentas tecnológicas como o GeoGebra proporciona uma compreensão mais profunda e versátil dos conceitos matemáticos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a importância da formação continuada na vida profissional dos educadores, esta dissertação propôs uma formação continuada para professores de Matemática fundamentada na metodologia de resolução de problemas de Polya, com foco específico na resolução de áreas de figuras planas utilizando o software GeoGebra. Além de beneficiar os professores de Matemática, este trabalho também é direcionado a entusiastas da Matemática, curiosos, e participantes de olimpíadas, vestibulares e ENEM.

Ao longo desta pesquisa, buscamos fornecer aos professores da educação básica teorias, recursos tecnológicos e práticas educacionais que possam apoiar sua prática docente diária. O Anexo A contém uma lista abrangente de problemas sobre áreas de figuras planas da OBMEP (2005–2023), problemas do capítulo 5 de áreas do livro "Temas e Problemas Elementares", publicado pela SBM, e problemas de Geometria do PAPMEM de janeiro de 2024, todos acompanhados de seus respectivos gabaritos.

Os resultados desta pesquisa indicam que a integração da metodologia de resolução de problemas, o uso de recursos tecnológicos e as diretrizes da BNCC e da BNC (Formação Continuada) tornam o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e significativo para professores e alunos. À medida que o mundo se reinventa e o conhecimento científico avança, a percepção dessas mudanças pelos professores está ligada ao elo entre saber e saber fazer, rompendo paradigmas e se adequando às novas possibilidades e demandas da sociedade atual.

Para futuras pesquisas, recomendamos a expansão do uso do GeoGebra em outras áreas da Matemática para explorar mais profundamente as construções de figuras planas e espaciais associadas à metodologia de resolução de problemas. Além disso, é importante investigar como essas ferramentas podem ser integradas de maneira mais eficaz nas práticas pedagógicas diárias dos professores e avaliar o impacto dessas integrações no desempenho dos alunos.

Concluimos que a formação continuada é essencial para o aprimoramento profissional dos educadores, permitindo o desenvolvimento de novos conhecimentos e a articulação entre teoria e prática, promovendo uma educação mais adaptada às exigências contemporâneas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Raphael Ramon Oliveira. **Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software Geogebra**. 2017. Dissertação (PROFMAT) - Centro de ciências da natureza, Universidade Federal do Piauí, Piauí, 2017.

AVAMEC. **Inscrições**. Disponível em : <https://avamec.mec.gov.br/#/>. Acesso em: 5 de jul. de 2023

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base. Brasília, 2018. **Base Nacional Comum para a Formação Continuada de Professores da Educação Básica (BNC-Formação Continuada)**. Disponível em : http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=164841-rcp001-20&category_slug=outubro-2020-pdf&Itemid=30192. Acesso em 10 de ago. de 2023. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> . Acesso em 26 de ago. de 2023.

D'Ambrósio, U. (1996). **Educação Matemática: da teoria à prática**. São Paulo: Papirus.

Dante, L. M. I. (2005). **Didática da Matemática**. Ática.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9**, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005

FERREIRA, Lenilson do Carmo. **O uso de resolução de problemas no auxílio do ensino da geometria plana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 100 f. 2023.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados.

GeoGebra. **Tutorial**. Disponível em: https://www.telecom.uff.br/pet/petws/downloads/tutoriais/geogebra/Tutorial_GeoGebra.pdf.

Acesso em: 29 de set. de 2023

GUIMARÃES, Elder da Silva Ferreira. **Técnicas de resolução de problemas matemáticos a partir de questões do ENEM: orientações frente às dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Piauí. Teresina, 72 f. 2023.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação Continuada de Professores**. Tradução Juliana dos Santos Padilha Porto Alegre: Artmed, 2010.

- LIBÂNEO, José. Carlos. **Pedagogia e pedagogos para quê?** São Paulo: Editora Cortez, 2005.
- Lima, Elon Lages, [et al.], **Temas e problemas elementares**, 2ª edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- LIMA, Elon Lajes. **Medida e forma em geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio De Janeiro (RJ): Sociedade Brasileira De Matemática, 2009.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** In: A educação matemática em revista. N. 4. Campinas. 1995.
- MODOLO, TALITA MORAES. **O ensino da matemática por meio da resolução de problemas: um estudo das questões da OBMEP sobre perímetro e área**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 93 f. 2023.
- MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: F.C.
- MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria** coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- Nóvoa, A. (1992). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote.
- O Geogebra. **Inscrição**. Disponível em : <https://ogeogebra.com.br/site/edital.php>. Acesso em: 5 de jul. de 2023
- OBMEP. **Material Didático**: Provas e Soluções [edições 2005 até 2023]. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 22 de mar. de 2024.
- OGEOGEBRA. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/site/>. Acesso em: 11 de abr. de 2024.
- ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. **O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores**. Revista Iberoamericana de matemática, 2007, 79- 97.
- PACHECO, Erica Farias. **Utilizando o software GeoGebra no ensino da Matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3º ano do Ensino Médio**. *Debates em Educação*, Maceió, v. 11, nº 24, Maio/ago. 2019.
- PAPMEM. **1ª Edição - Jan. de 2024**. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 22 de jan. de 2024.
- PAPMEM. **Inscrições**. Disponível em: <https://institucionalimpa.br/pub/login.action>. Acesso em: 5 de jul. de 2023
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- PROFMAT. **Inscrições**. Disponível em: <https://institucionalimpa.br/pub/login.action>. Acesso em: 5 de jul. de 2023

PROLÍMPICO. **Inscrições**. Disponível em: <https://institucional.impa.br/pub/login.action>.

Acesso em: 5 de jul. de 2023

RODRIGUES, Â.; ESTEVES, M. **A análise de necessidades na formação de professores**.

Porto: Porto Editora, 1993.

SOUZA, Levi Rodrigo Pinto de. **Sequência didática e OBMEP**: uma proposta para o ensino de áreas e perímetros de polígonos por meio da resolução de problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró, 132 f. 2020.

SOUZA, Railson Pereira de. **A importância da argumentação matemática na resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 78 f. 2023.

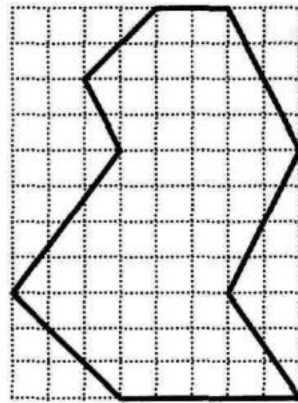
TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2008.

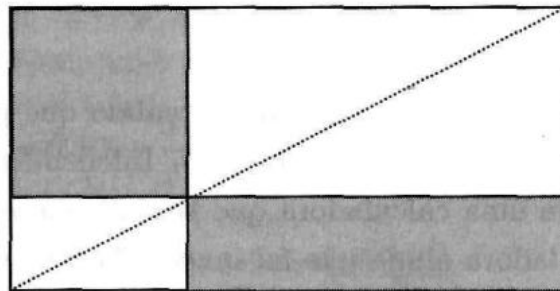
ANEXO A - LISTA COM PROBLEMAS DE ÁREAS DE/COM FIGURAS PLANAS

Problemas do livro Temas e Problemas Elementares – Capítulo 5 - Áreas

1. Na figura a seguir, cada quadriculado representa uma unidade de área. Qual é a área do polígono que aparece no interior do quadriculado?

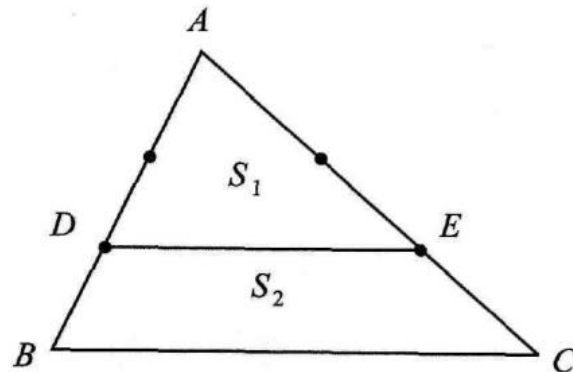


2. Observe a figura a seguir. Por um ponto da diagonal do retângulo foram traçadas paralelas a seus lados. Mostre que as áreas dos retângulos sombreados são iguais.



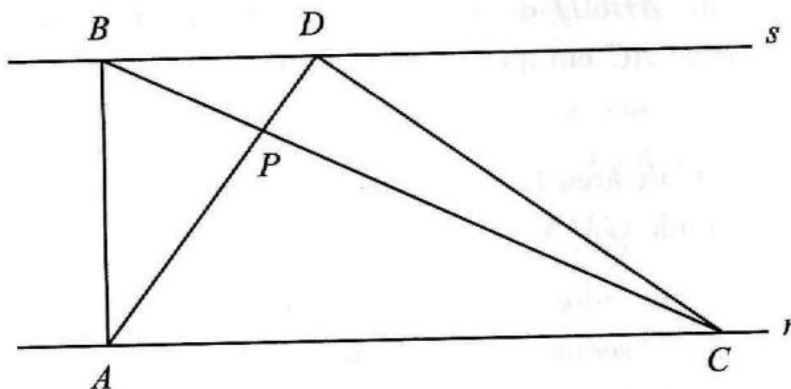
3. Do pentágono ABCDE sabe-se o seguinte $A = E = 90^\circ$, $B = C = 120^\circ$, $AB = CD = 4$ e $BC = 8$. Calcule a área deste pentágono.
4. No paralelogramo de área 1, os pontos P, Q e R, nesta ordem, dividem a diagonal AC em quatro partes iguais. Qual é a área do triângulo DPQ ?

5. No triângulo ABC de área 1, as medianas BM e CN cortam-se em G. Qual é a área do triângulo GMN?
6. Na figura a seguir, os lados AB e AC do triângulo ABC estão divididos em três partes iguais. O segmento DE divide o triângulo em duas partes: um triângulo de área S_1 e um trapézio de área S_2 . Qual destas duas áreas é maior?



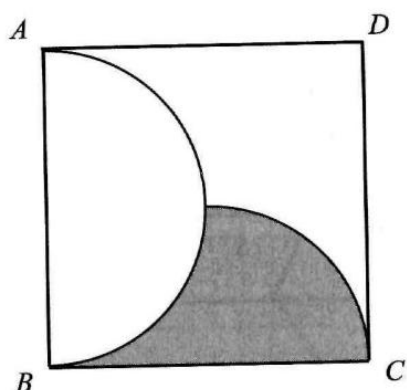
7. Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas e o segmento AB é perpendicular a ambas. Os segmentos AD e BC cortam-se em P.

- a) Mostre que as áreas dos triângulos PAB e PCD são iguais.
- b) Dados $AB = 10$, $BD = 7$ e $AC = 18$, calcule a área do triângulo PDC.

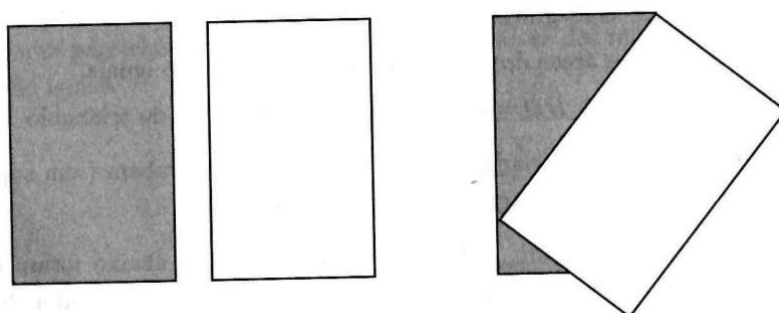


8. No máximo, quantos triângulos equiláteros de lado 1 cabem (sem superposição) dentro de um hexágono regular de lado 12?

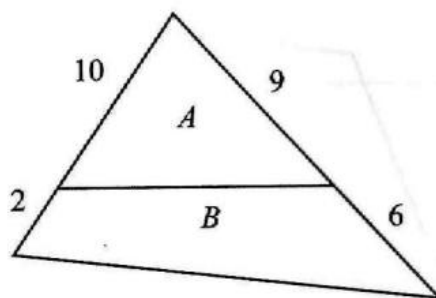
9. No interior do quadrado de lado 1 da figura abaixo foram traçadas as semicircunferências de diâmetro AB e BC. Qual é o valor da área sombreada?



10. Abaixo você vê dois retângulos iguais. Colocando um sobre o outro como mostra a figura, decida se o retângulo de cima cobriu mais da metade do retângulo de baixo, exatamente a metade ou menos da metade.



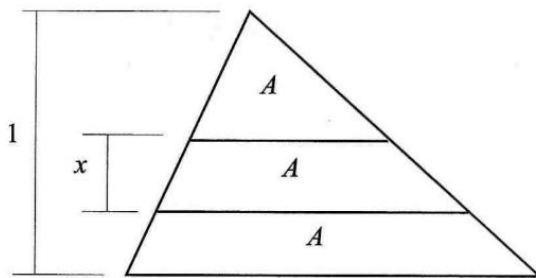
11. Usando apenas seus instrumentos de desenho, trace por P uma reta que divida o quadrilátero da figura abaixo em duas partes de mesma área.



12. ABCDEF é um hexágono regular. Os pontos M, N e P são médios dos lados AB, CD e EF. Qual é a razão entre a área do Triângulo MNP e a área do hexágono?

13. Um hexágono regular e um triângulo equilátero estão escritos na mesma circunferência. Qual é a razão entre as áreas dessas duas figuras?

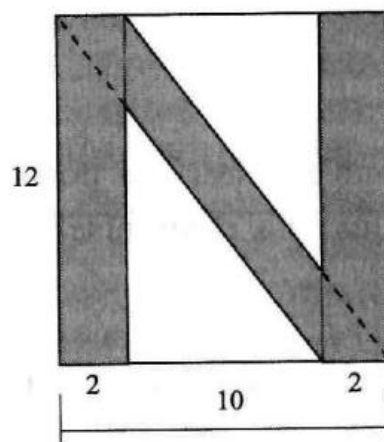
14. A figura abaixo mostra um triângulo de altura 1 dividido por duas paralelas à sua base em três partes de mesma área. Qual é a altura do trapézio central?



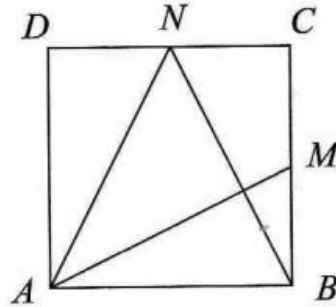
15. Em um triângulo ABC mostre que sua área é $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}\hat{A}$.

16. Com dados da figura a seguir, calcule a razão entre as áreas A e B.

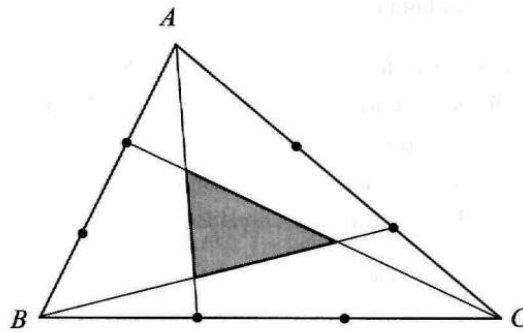
17. A letra “N” da figura a seguir foi construída a partir de um retângulo de base 10 e altura 12. Calcule sua área.



18. Seja ABCD um quadrado de lado 1 e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e DC, respectivamente. Traçando os segmentos AM, AN e NB, calcule as áreas das cinco partes em que o quadrado ficou dividido.

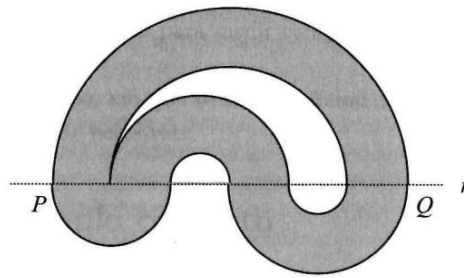


19. O triângulo ABC da figura seguir tem área igual a 1. Cada um de seus lados foi dividido em três partes iguais. Calcule a área do triângulo sombreado.



20. No manuscrito de Aryabhatiya do século VI encontrou-se a seguinte afirmação: “Somos 4 a 100, multiplique por 8 e some 62000. O resultado é aproximadamente a circunferência do círculo de diâmetro 20000.” Qual é o valor de π que está implícito nesta afirmação?

21. Na figura abaixo, o segmento PQ, de 6cm, sobre a reta r, está dividido em seis partes de 1cm. Utilizando esses pontos, foram construídas semicircunferências com diâmetros sobre a reta r. Calcule a área sombreada.

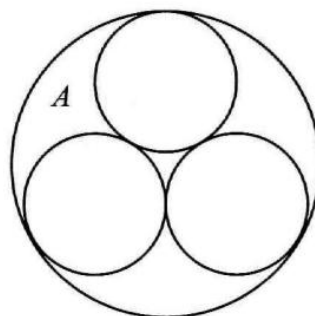


22. Em um círculo de raio 1, um arco tem comprimento $x(0 < x < \pi)$. Determine a área do segmento circular correspondente a esse arco.

23. Os pontos A, B e C nesta ordem sobre uma circunferência de raio 1, são tais que o arco AB mede 80° e arco BC mede 50° . Calcule a área da região do círculo limitada pelas cordas AC e BC e pelo arco AB.

24. Em uma circunferência de raio 1, as cordas AB e CD são paralelas e o centro da circunferência não está entre elas. A corda AB é igual ao lado do hexágono regular inscrito na circunferência e CD é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência. Calcule a área da região do círculo compreendida entre as duas cordas.

25. A figura a seguir mostra três circunferências iguais de raio 1, tangentes entre si, duas a duas e uma circunferência com maior raio tangente às três primeiras. Calcule a área da região A.



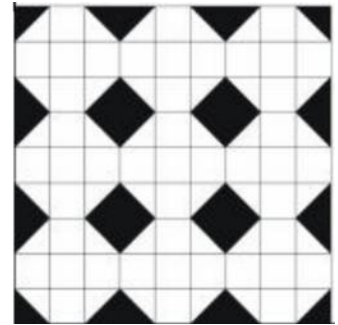
Gabarito dos problemas de áreas do Livro Temas e Problemas Elementares.

1	55,5
2	Demonstração
3	65,74
4	1/8
5	1/12
6	$s_2 > s_1$
7	a) demonstração b) 9,8
8	864
9	$\frac{1}{4}$
10	A parte coberta tem área maior que a metade da área do retângulo
11	Demonstração
12	3/8
13	O triângulo equilátero tem metade da área do hexágono
14	$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
15	Demonstração
16	1
17	66
18	5, 20,20,25 e 30
19	1/7
20	3,1416
21	5π
22	$S = \frac{x - \text{sen } x}{2}$
23	$S = \frac{2\pi}{9}$
24	$S = \frac{\pi}{6}$
25	$S = \frac{1}{18} ((8\sqrt{3} - 1)\pi - 6\sqrt{3})$

Problemas de/com áreas de figuras planas da OBMEP de 2005 a 2023
(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2005)

12. Uma parede de 3 metros de altura por 9 metros de comprimento foi inteiramente coberta com azulejos quadrados de 10 cm de lado. Foram usados dois tipos de azulejos: um totalmente branco e o outro preto e branco. A figura representa o padrão usado, a partir do canto inferior esquerdo da parede. Qual é a área da parede coberta com a cor branca?

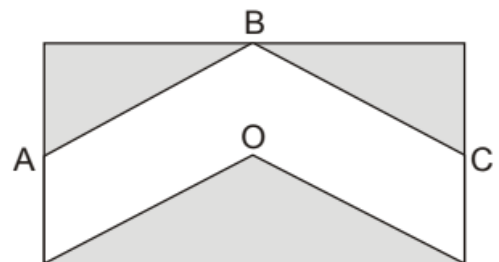
- A) 21 m^2
- B) 22 m^2
- C) 23 m^2
- D) 24 m^2
- E) 25 m^2



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2006)

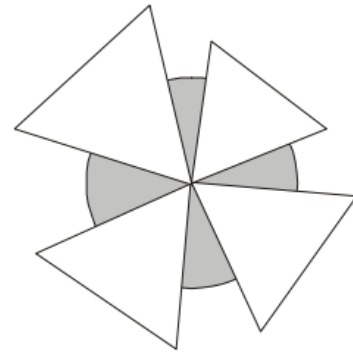
1. No retângulo ao lado, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. A área da região sombreada é

- A) $1/4$ da área do retângulo.
- B) $1/3$ da área do retângulo.
- C) $1/2$ da área do retângulo.
- D) $3/5$ da área do retângulo.
- E) $2/3$ da área do retângulo.



8. A figura mostra um círculo de área 36 cm^2 sobre o qual estão desenhados quatro triângulos equiláteros com um vértice comum no centro do círculo. Qual é a área da região sombreada?

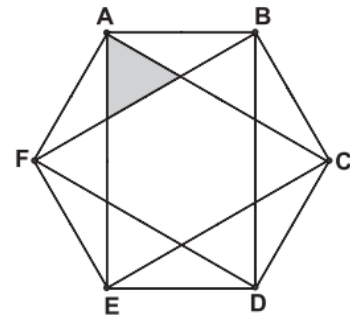
- A) 9 cm^2
- B) 12 cm^2
- C) 15 cm^2
- D) 20 cm^2
- E) 24 cm^2



(OBMEP – 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2007)

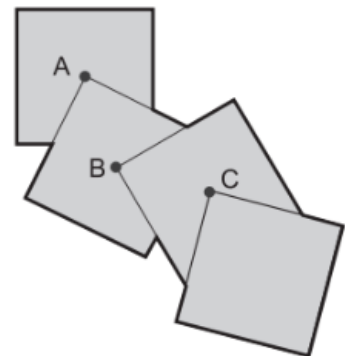
4. Área do hexágono regular ABCDDEF é 45 cm^2 . Qual é a área do triângulo sombreado?

- A) 2,0
- B) 2,5
- C) 3,0
- D) 3,5
- E) 4,0

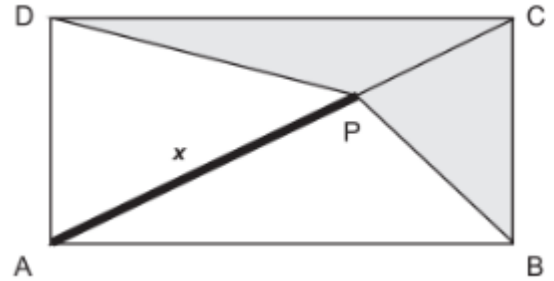
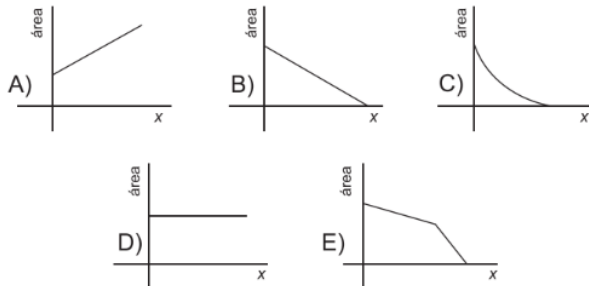


13. A figura foi feita com quatro quadrados de 10 cm de lado. Os vértices A, B e C são também centros dos quadrados correspondentes. Qual é a área da região sombreada?

- A) 100 cm^2
- B) 150 cm^2
- C) 225 cm^2
- D) 275 cm^2
- E) 325 cm^2



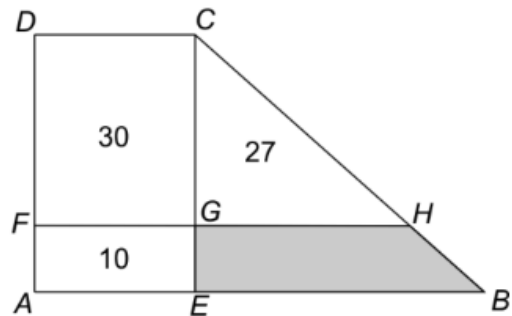
18. Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do poliedro BCDP em função da distância $x=AP$?



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2008)

14. O trapézio ABCD foi dividido em dois retângulos AEGF e FGCD, um triângulo GHC e um trapézio EBHG. As áreas dos dois retângulos e do triângulo, em cm^2 , estão indicadas na figura. Qual é a área do trapézio EBHG?

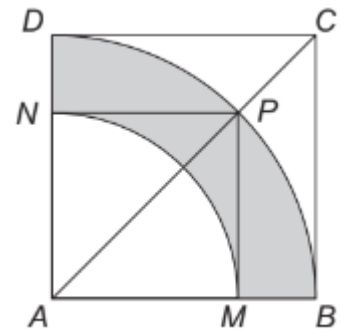
- A) 15 cm^2
- B) 18 cm^2
- C) 21 cm^2
- D) 22 cm^2
- E) 24 cm^2



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2009)

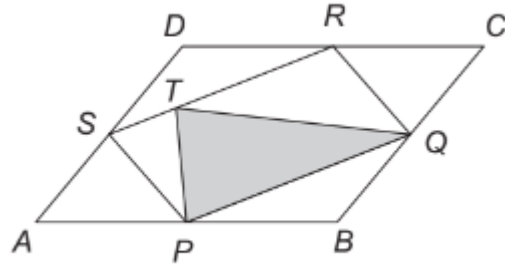
8. Na figura, ABCD e AMPN são quadrados e BD e MN são arcos de círculos de centro A. Qual é a razão entre a área sombreada e a área do quadrado ABCD?

- A) $\pi/4$
- B) $\pi/5$
- C) $\pi/6$
- D) $\pi/7$
- E) $\pi/8$



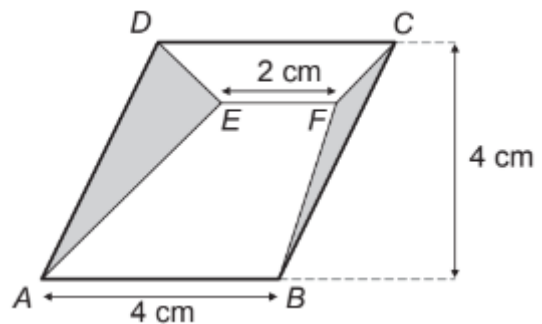
9. Na figura, o paralelogramo ABCD tem área 40 cm^2 . Os pontos P, Q, R, S são pontos médios dos lados do paralelogramo e T está no segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?

- A) 10 cm^2
- B) 12 cm^2
- C) 14 cm^2
- D) 16 cm^2
- E) 18 cm^2



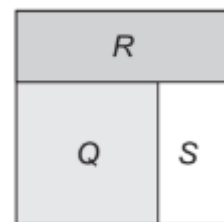
11. Na figura, ABCD é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos cinzentos?

- A) 2 cm^2
- B) 4 cm^2
- C) 6 cm^2
- D) 8 cm^2
- E) 10 cm^2

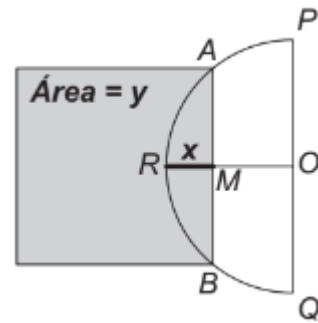
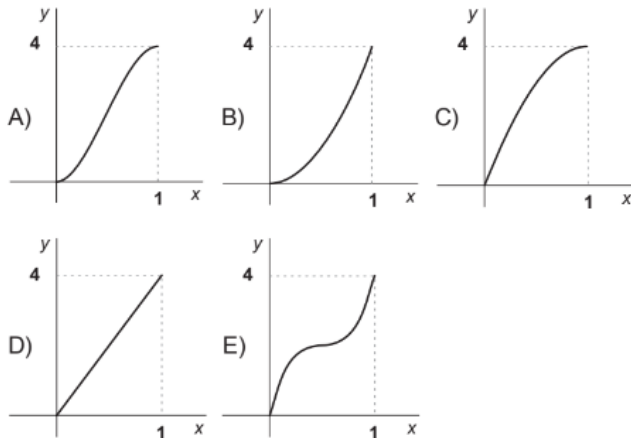


12. A figura mostra um quadrado de lado 1 m dividido em dois retângulos e um quadrado. As áreas do quadrado Q e do retângulo R são iguais. Qual é a área do retângulo S?

- A) $\sqrt{5}-2 \text{ m}^2$
- B) $1/5 \text{ m}^2$
- C) $3-\sqrt{5} \text{ m}^2$
- D) $1/3 \text{ m}^2$
- E) $\sqrt{5}/3 \text{ m}^2$



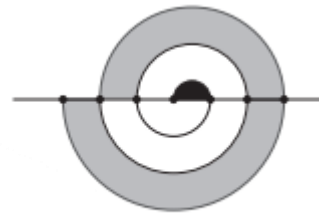
19. O semicírculo da figura tem centro O e diâmetro $PQ=2$ cm. O raio OR é perpendicular a PQ . Por um ponto qualquer M de OR traça-se a corda AB perpendicular a OR . Sejam X o comprimento de RM , em cm, e Y a área do quadrado de lado AB , em cm^2 . Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre X e Y ?



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2010)

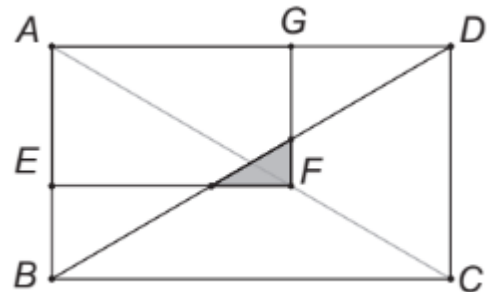
10. Na figura ao lado os pontos destacados sobre a reta estão igualmente espaçados. Os arcos que ligam esses pontos são semicircunferências e a região preta tem igual a 1. Qual é a área da região cinza?

- A) 15
- B) 18
- C) 25
- D) 30
- E) 36



20. Na figura, ABCD e AEFG são retângulos e o ponto F pertence à diagonal AC. A área do triângulo cinza é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo AEFG. Qual é o valor de $AF \setminus AC$?

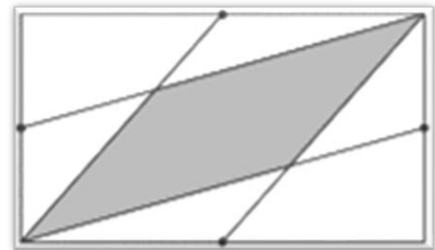
- A) $\frac{3}{5}$
- B) $\frac{3}{8}$
- C) $\frac{8}{13}$
- D) $\frac{11}{18}$
- E) $\frac{3}{4}$



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2011)

16. A figura mostra um retângulo de área 42 cm^2 com os pontos médios dos lados em destaque. Qual é a área, em cm^2 , da região cinza?

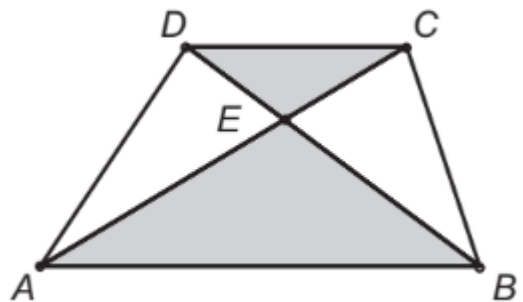
- A) 8
- B) 10
- C) 12
- D) 14
- E) 16



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2012)

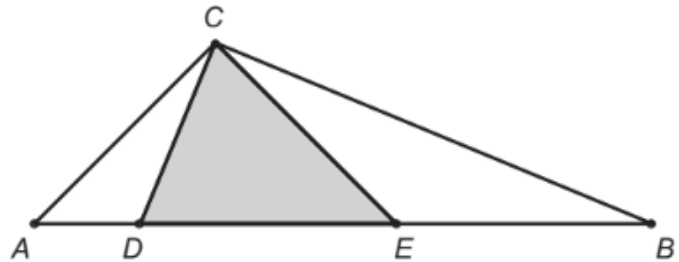
12. A figura mostra um trapézio ABCD de base AB e CD; o ponto E é o ponto de encontro de suas diagonais. Os triângulos ABE e CDE têm áreas a e b, respectivamente. Qual é a área do trapézio?

- A) $2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
- B) $\frac{3}{2}(a+b)$
- C) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
- D) $2(a+b)$
- E) \sqrt{ab}



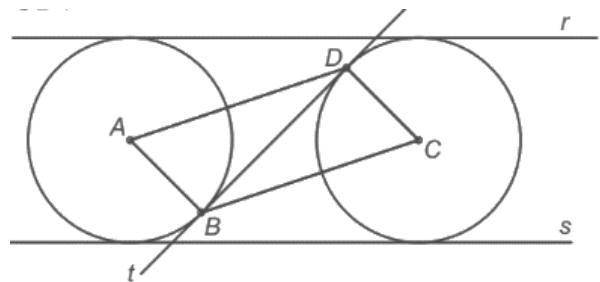
14. Na figura, os segmentos AC, CE e EB têm o mesmo comprimento, os ângulos ACE e BCD são retos e a área do triângulo CDE é 1. Qual é a área do triângulo ABC?

- A) $\sqrt{2}$
- B) 2
- C) $\sqrt{2} + 1$
- D) $2\sqrt{2}$
- E) 3



17. Na figura, as retas r e s são paralelas e a distância entre elas é 2 cm. A reta t forma um ângulo de 45° com a reta r . Os círculos com centro em A e C tangenciam a reta t nos pontos B e D , respectivamente, a tangenciam as retas r e s . Qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero ABCD?

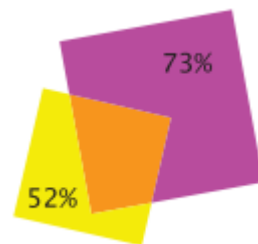
- A) $\sqrt{2}$
- B) 2
- C) $1 + \sqrt{2}$
- D) $2\sqrt{2}$
- E) 3



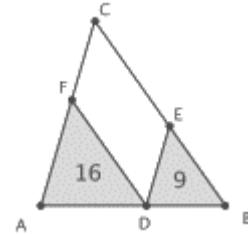
(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2013)

5. Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A área não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% da área desse quadrado e a área não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% da área desse quadrado. Qual é a razão entre os lados do quadrado menor e do quadrado maior?

- A) $3/4$
- B) $5/8$
- C) $2/3$
- D) $4/7$
- E) $4/5$



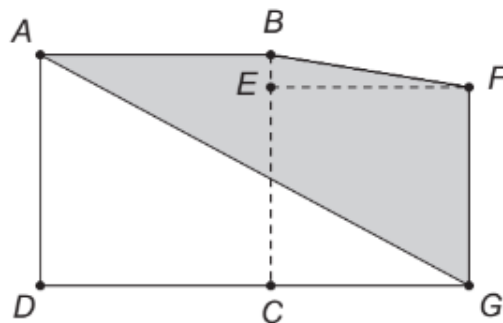
16. Na figura, as retas DE e DF são paralelas, respectivamente, aos lados AC e BC do triângulo ABC. Os triângulos ADF e DBE têm áreas 16 e 9, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero CFDE?



- A) 18
- B) 21
- C) 24
- D) 25
- E) 27

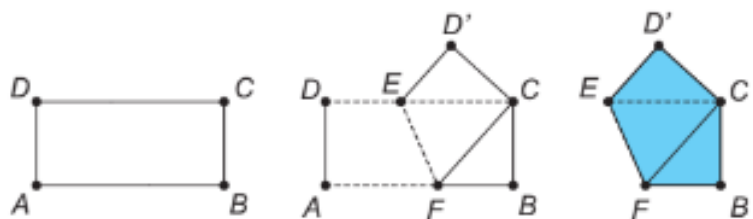
(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2014)

5. Na figura ao lado, ABCD e EFGH são quadrados de área R e S, respectivamente. Qual é a área da região cinza?



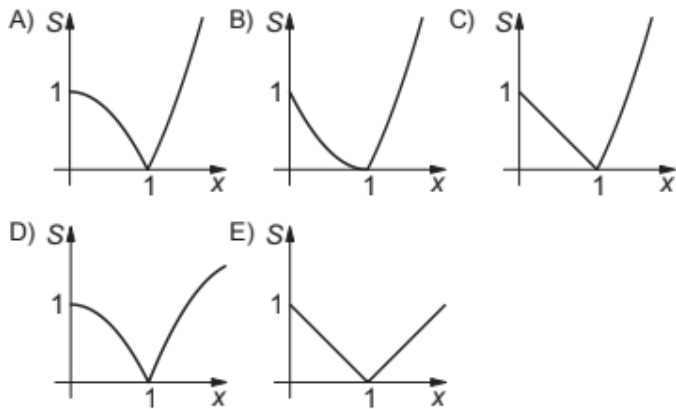
- A) $(R+S)/2$
- B) $(R-S)/2$
- C) $RS/2$
- D) \sqrt{RS}
- E) $\sqrt{R^2 + S^2}$

7. Um retângulo ABCD de papel branco, com área de 20 cm^2 , é dobrado como mostra a figura, formando o pentágono BCD'E'F com área de 14 cm^2 . Se pintarmos de azul os dois lados do papel dobrado e desfizemos a dobra, o retângulo ficará com uma região não pintada. Qual é a área dessa região?



- A) 10 cm^2
- B) 12 cm^2
- C) 14 cm^2
- D) 16 cm^2
- E) 18 cm^2

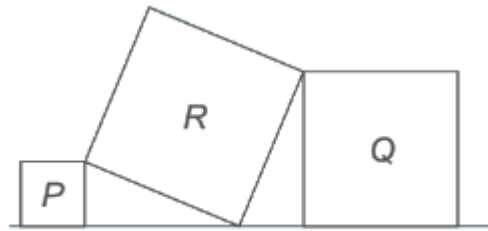
16. O paralelogramo ABCD tem 24 cm^2 e os pontos E F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero EFGH?



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2016)

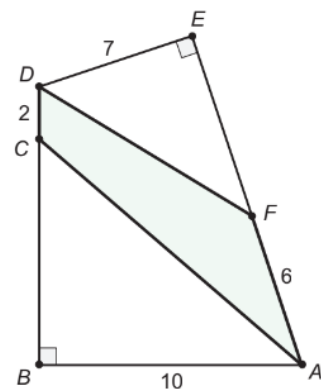
3. Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24 cm^2 e 168 cm^2 , respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?

- A) 96 cm^2
- B) 100 cm^2
- C) 121 cm^2
- D) 144 cm^2
- E) 156 cm^2



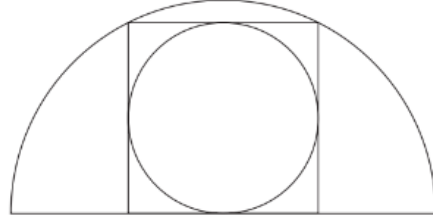
8. Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AF do quadrilátero ABDE, respectivamente. Os ângulos B e E são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero ACDF?

- A) 16
- B) 21
- C) 31
- D) 33
- E) 40

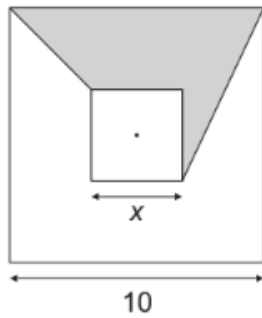


10. O quadrado da figura está inscrito no semicírculo e o círculo está inscrito no quadrado. O círculo tem área igual a 10 cm^2 . Qual é a área do semicírculo?

- A) 25 cm^2
- B) 30 cm^2
- C) 35 cm^2
- D) 40 cm^2
- E) 45 cm^2



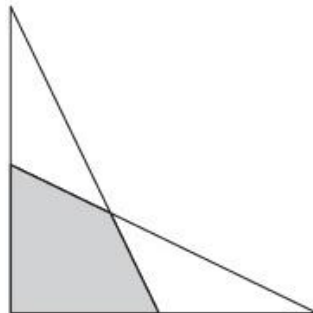
11. Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lados 10 e o menor tem lados X . Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de X ?



- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

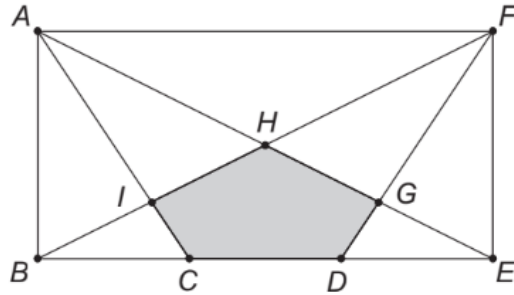
12. Dos triângulos retângulos, ambos com catetos de medidas a e b , com $a > b$, são sobrepostos como na figura. Qual é a área do quadrilátero sombreado?

- A) $a(a^2+b^2)/(a+b)$
- B) $b(a^2+b^2)/(a+b)$
- C) $b^2(a-b)/(a+b)$
- D) $a^2b^2/(a+b)^2$
- E) $ab^2/(a+b)$



14. Na figura, ABEF é um retângulo e $BC=CD=DE$. Qual é a razão entre as áreas do pentágono CDGHI e do retângulo ABEF?

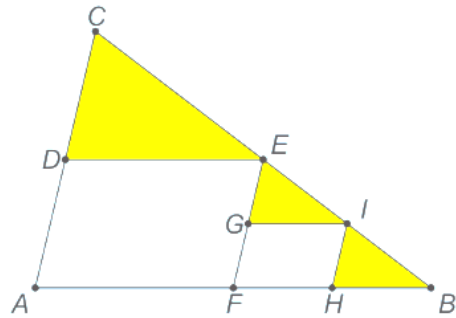
- A) $2/15$
- B) $1/6$
- C) $1/8$
- D) $3/10$
- E) $1/12$



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2017)

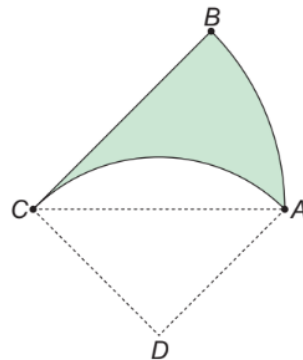
1. Na figura abaixo D,E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC, e G, H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE. A área do triângulo ABC é 48 cm^2 . Qual é a área da região destacada em amarelo?

- A) 16 cm^2
- B) 18 cm^2
- C) 20 cm^2
- D) 22 cm^2
- E) 24 cm^2



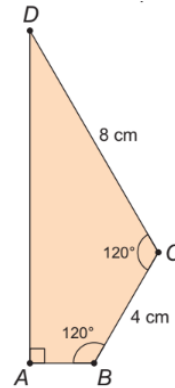
8. Na figura, o arco AC é um quarto de uma circunferência de centro D e o arco AB é um oitavo de uma circunferência de centro C. O segmento AD mede 2 cm . Qual é a área em cm^2 da região verde?

- A) 2
- B) π
- C) 4
- D) 2π
- E) 4π



13. Na figura, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ medem 120° , o ângulo $\hat{B}AD$ é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ em cm^2 ?

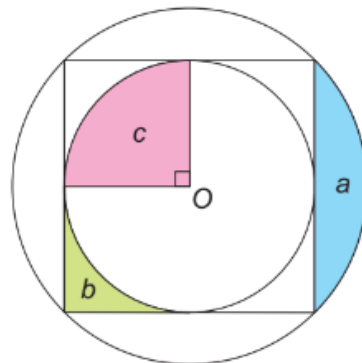
- A) $14\sqrt{3}$
- B) $28\sqrt{3}$
- C) $32\sqrt{3}$
- D) $36\sqrt{3}$
- E) $40\sqrt{3}$



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2018)

9. A figura mostra três regiões, a , b e c , determinadas por um quadrado de centro O , e suas circunferências inscrita e circunscrita. Qual das igualdades a seguir é verdadeira?

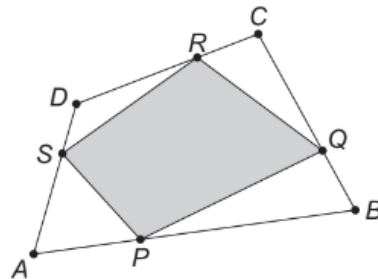
- A) $c = a + b$
- B) $c = a - b$
- C) $c = 2a + b$
- D) $c = a + 2b$
- E) $c = 2a - b$



12. A figura mostra um quadrilátero convexo $ABCD$ de área 1 e pontos P, Q, R e S tais que $AP = AB/3$, $BQ = BC/3$, $CR = CD/3$ e $DS = DA/3$.

Qual é a área do quadrilátero $PQRS$?

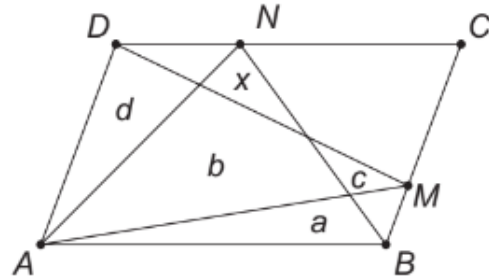
- A) $1/3$
- B) $5/9$
- C) $2/3$
- D) $7/9$
- E) $6/7$



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2019)

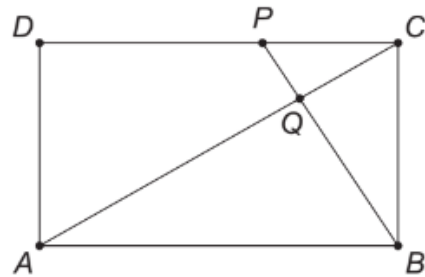
9. No paralelogramo ABCD da figura, os pontos M e N são pontos dos lados BC e CD, respectivamente. As áreas a, b, c e d são conhecidas. Qual é o valor da área x ?

- A) $c + d - a$
 B) $a + c + d - b$
 C) $a + c + d - 2b$
 D) $a + d - b$
 E) $a + c - d$

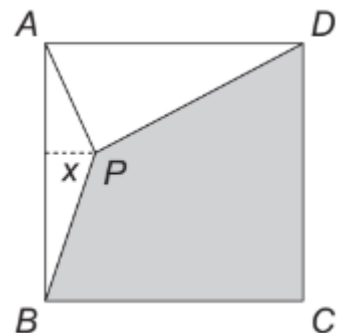


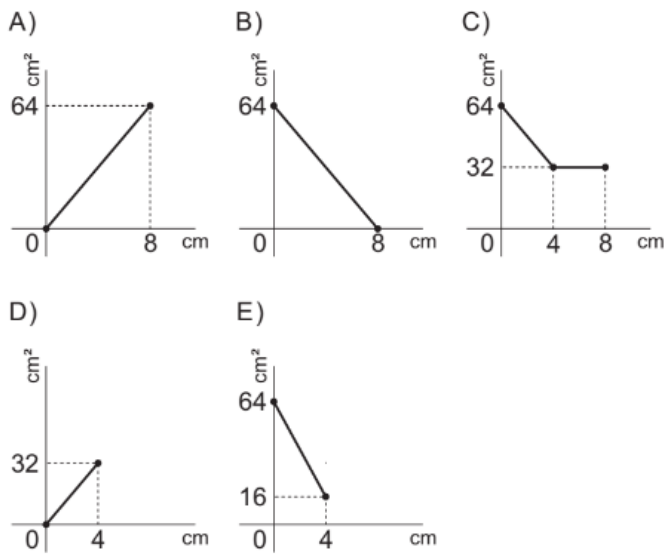
12. Sabendo que as áreas dos triângulos BCQ e QCP da figura são, respectivamente 6 e 2, qual é a área do retângulo ABCD?

- A) 48
 B) 50
 C) 52
 D) 54
 E) 56



13. O quadrado ABCD tem 8 de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP. Seja x a distância, em centímetros, do ponto P a lado AB. Qual é o gráfico da área da região destacada em cinza em função de x?

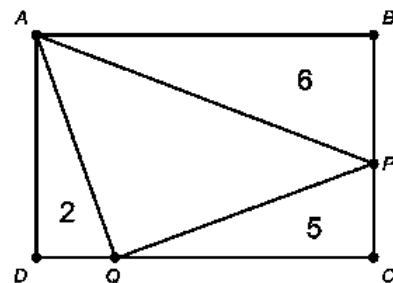




(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2022)

19. O retângulo ABCD é formado pelos triângulos ABP, CQP, AQD e APQ. As áreas dos triângulos ABP, CQP e AQD são, respectivamente, 6, 5 e 2 cm². Qual é em cm², a área do triângulo APQ?

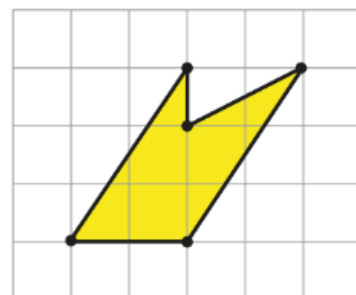
- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11



(OBMEP - 1ª FASE – NÍVEL 3 – 2023)

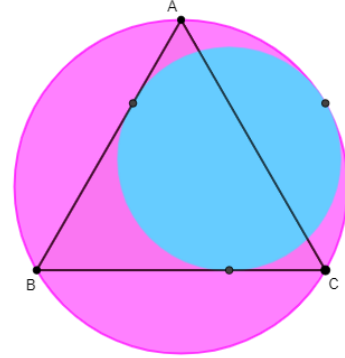
07. A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado e 30 cm². Qual é a área, em cm², de cada quadradinho do lado quadriculado?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6



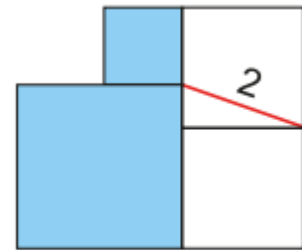
12. Na figura ABC é um triângulo equilátero e a circunferência menor é tangente a dois lados do triângulo e ao círculo maior, como indicado. A região rosa é a que está dentro do círculo maior e fora do círculo menor. Qual é a razão entre as áreas destacadas em azul e rosa?

- A) $4/3$
- B) $4/5$
- C) $4/7$
- D) $2/7$
- E) $2/9$

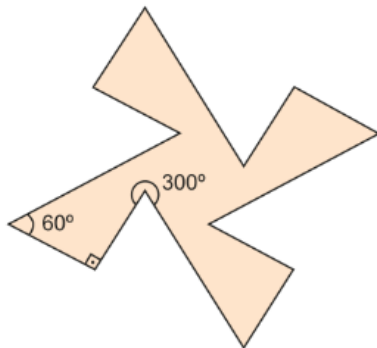


13. A figura a seguir é formada por quatro quadrados. A medida do segmento destacado em vermelho é 2. Qual é a soma das áreas dos quadrados azuis?

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 10



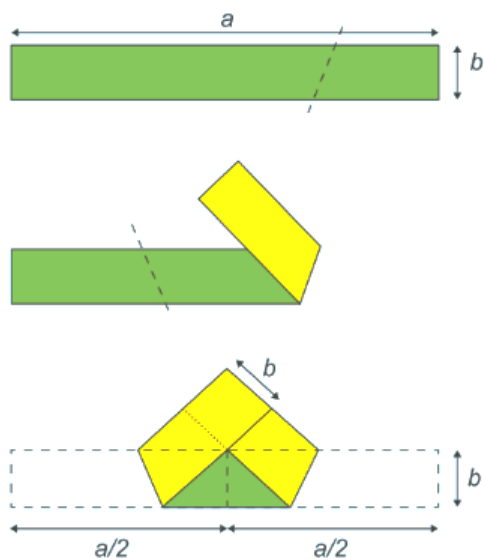
15. A figura tem 8 lados de medida 10 cm, 4 lados de medida 20 cm, 4 ângulos de 60° , 4 ângulos de 90° e 4 ângulos de 300° .



Qual é a área da figura?

- A) 100 cm^2
- B) 120 cm^2
- C) 200 cm^2
- D) 400 cm^2
- E) 420 cm^2

19. Uma tira retangular tem comprimento e a largura b . Ao dobrar a tira, a sobreposição de duas pontas formou um quadrado de lado b e o resultado da dobra foi um pentágono sem nenhum buraco no centro, como indicado nas figuras. Qual é a razão a/b ?



- A) $4 + \sqrt{2}$
- B) $2(2 + \sqrt{2})$
- C) $4\sqrt{2}$
- D) $4(\sqrt{2} - 1)$
- E) $4(\sqrt{2} + 1)$

Gabarito dos problemas de áreas de figuras da OBMEP de 2005 a 2023

OBMEP 2005
12. A) 21 m^2
OBMEP 2006
1. C) $1/2$ da área do retângulo.
8. B) 12 cm^2
OBMEP 2007
4. B) $2,5 \text{ cm}^2$
13. E) 325 cm^2
18. B)
OBMEP 2008
14. C) 21 cm^2
OBMEP 2009
8. E) $\pi/8$
9. A) 10 cm^2
11. 4 cm^2
12. B) $\sqrt{5}-2 \text{ cm}^2$
19. C)
OBMEP 2010
10. E) 36
20. A) $3/5$
OBMEP 2011
16. D) 14 cm^2

OBMEP 2012
12. C) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
14. C) $\sqrt{2}+1$
17. B) 2 cm^2
OBMEP 2013
5. A) $\frac{3}{4}$
16. C) 24
OBMEP 2014
5. A) $(R+S)/2$
7. B) 12 cm^2
16. B) 5 cm^2
OBMEP 2015
4. E) 240 cm^2
13. A)
OBMEP 2016
3. D) 144cm^2
8. C) 31
10. A) 25 cm^2
11. B)
12. E) $ab^2/(a+b)$
14. B) $1/6$
OBMEP 2017
1. B) 18 cm^2

8. A) 2
13.A) $14\sqrt{3} \text{ cm}^2$
OBMEP 2018
9. A) $c=a+b$
12. B) $5/9$
OBMEP 2019
9. A) $c+d-a$
12. A) 48
13. E)
OBMEP 2022
19. E) 11
OBMEP 2023
07. E) 6
12. B) $4/5$
13. D) 8
15. D) 400 cm^2
19. B) $2(2+\sqrt{2})$

Problemas com áreas

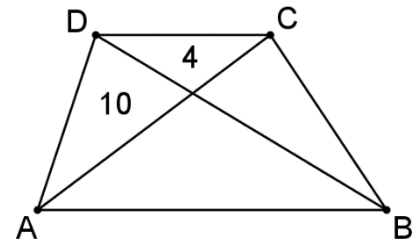
Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada

No Ensino Médio podemos trabalhar com áreas de forma a estimular o raciocínio e evitando a memorização de fórmulas ou processos. Podemos calcular coisas que possuem aparência difícil (mas na realidade não são) utilizando as áreas como ferramenta e, nesta aula, vamos mostrar alguns exemplos.

Problema Inicial

A figura ao lado mostra um trapézio de bases AB e CD . Os números que aparecem dentro dos triângulos representam suas áreas.

Qual é a área do trapézio?



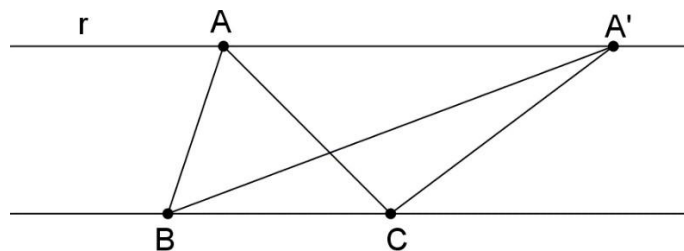
O problema parece difícil pela absoluta falta de dados concretos o que impede, naturalmente, a aplicação de qualquer fórmula. Como você verá a seguir, o problema é fácil para quem conhece duas propriedades elementares das áreas de triângulos.

Em todo o texto a área do triângulo de vértices X, Y e Z será representada por (XYZ) . Para polígonos, a notação será a mesma.

Dois propriedades

1) Dois triângulos de mesma base e mesma altura possuem mesma área.

Na figura abaixo, se a reta r é paralela à reta BC então $(ABC) = (A'BC)$, pois os dois triângulos possuem mesma base e mesma altura.



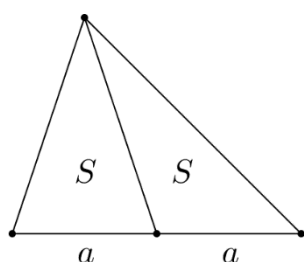
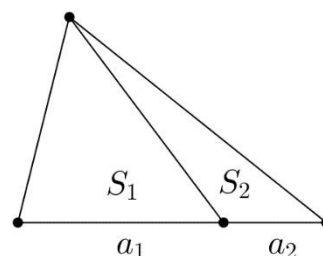
2) Se dois triângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.

Na figura ao lado, se S_1 e S_2 são as áreas dos triângulos de bases respectivamente iguais a a_1 e a_2 temos, então

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

ou,
ainda,

$$\frac{S_1}{a_1} = \frac{S_2}{a_2} = \frac{S_1 + S_2}{a_1 + a_2}$$



É importante ainda observar o fato, agora elementar, que uma mediana de um triângulo divide o triângulo em dois outros de mesma área.

Com essas propriedades podemos resolver o problema inicial.

Sendo P o ponto de interseção das diagonais vemos que os triângulos DAB e CAB possuem mesma área, pois têm mesma base e mesma altura. Como eles possuem a parte PAB em comum, concluímos que

$$(PBC) = (PAD) = 10$$

Em seguida, utilizando a propriedade 2 temos que:

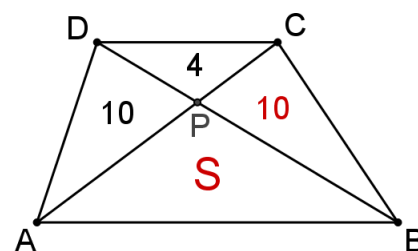
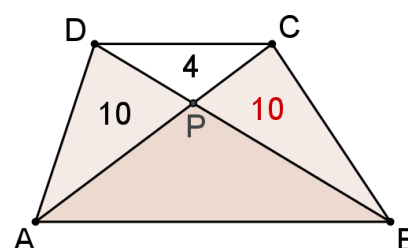
$$\frac{(DAP)}{(DPC)} = \frac{AP}{PC} = \frac{(BAP)}{(BPC)}$$

ou
seja,

$$\frac{10}{4} = \frac{S}{10}$$

e, portanto, $S = 25$.

A área do trapézio é $4 + 10 + 10 + 25 = 49$

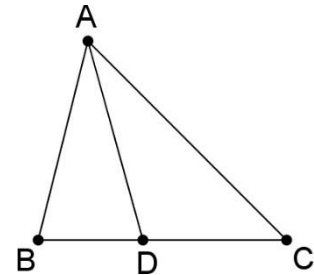


Problema 2

Demonstre o teorema da bissetriz interna.

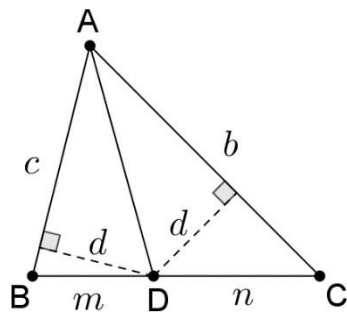
Esse teorema diz que, no triângulo ABC , se D é o ponto onde a bissetriz do ângulo A corta o lado BC então

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

**Solução**

Vamos simplificar a notação usando os símbolos da figura abaixo. Sabemos que todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Assim, o ponto D possui distâncias iguais aos lados AB e AC .

Pela propriedade 2 temos:



$$\frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{DB}{DC}$$

$$\frac{cd/2}{bd/2} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$$

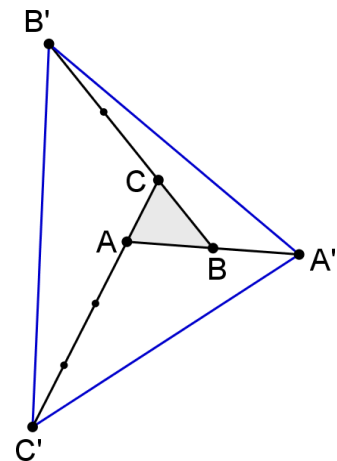
como queríamos demonstrar.

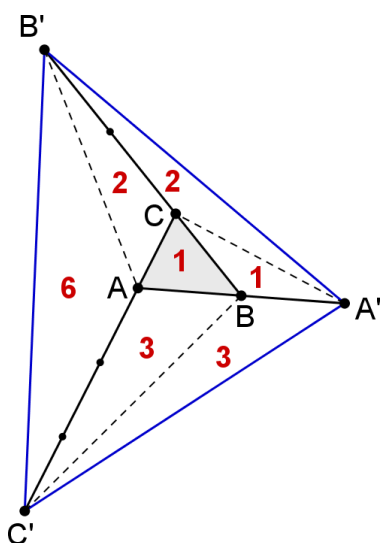
Problema 3

O triângulo ABC tem área 1.

- Prolongue AB de um comprimento $BA' = AB$.
- Prolongue BC de um comprimento $CB' = 2BC$.
- Prolongue CA de um comprimento $AC' = 3CA$.

Qual é a área do triângulo $A'B'C'$?





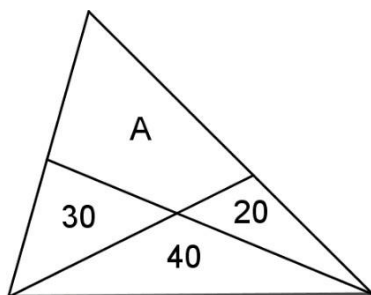
Solução

Traçando AB' , BC' e CA' temos a situação da figura ao lado. A partir de $(ABC) = 1$, usando a segunda propriedade anotamos a área de cada triângulo no seu interior.

$$(A'B'C') = 18$$

Problema 4 (Vestibular FGV-RJ)

A figura mostra um triângulo subdividido em quatro regiões, cujas áreas estão indicadas nas mesmas.



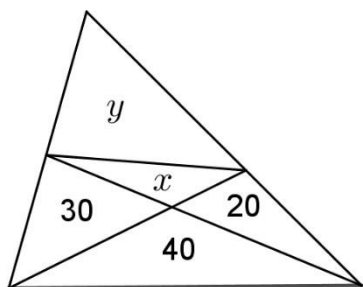
Determine o valor de A.

Solução

$$\frac{x}{20} = \frac{30}{40} \rightarrow x = 15$$

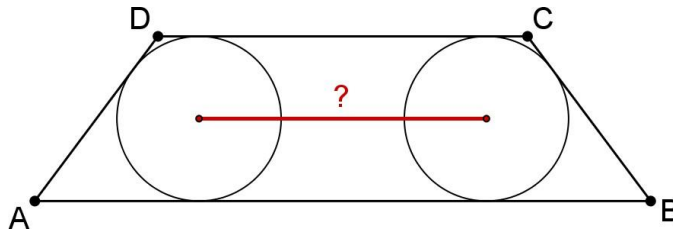
$$\frac{y+x+20}{30+40} = \frac{y}{x+30} \rightarrow y = 63$$

$$A = x + y = 15 + 63 = 78$$



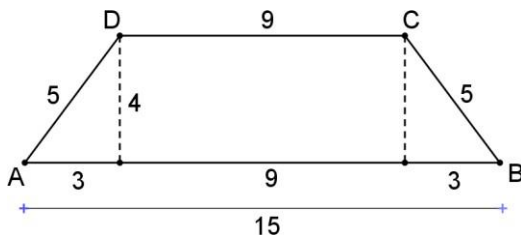
Problema 5

A figura mostra um trapézio $ABCD$. Sabe-se que $AB = 15$, $CD = 9$, e $AD = BC = 5$.



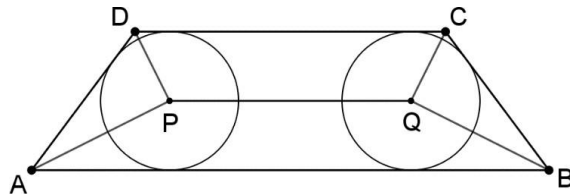
Qual é a distância entre os centros das duas circunferências da figura?

Solução



Examinando o trapézio, temos a situação da figura ao lado.

Concluimos que a altura do trapézio é igual a 4 e, conseqüentemente, o raio da circunferência é igual a 2.



Passamos, então a examinar a próxima figura. Se P e Q são os centros das duas circunferências, vamos dividir o trapézio em quatro partes: dois trapézios com base comum $PQ = x$ com alturas iguais ao raio das circunferências e, nas laterais, dois triângulos congruentes de bases

AD e BC com alturas também iguais ao raio das circunferências

A soma das áreas das quatro partes é igual à área do trapézio, ou seja,

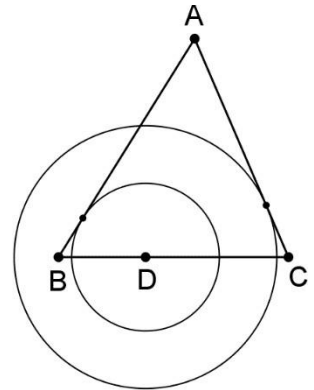
$$\begin{aligned} (ABQP) + (CDPQ) + (APD) + (BCQ) &= (ABCD) \\ \frac{(15+x) \cdot 2}{2} + \frac{(9+x) \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} &= \frac{(15+9) \cdot 2}{2} \end{aligned}$$

Cálculos simples conduzem a $x = 7$.

Problemas propostos

- 01.** Na figura ao lado as circunferências possuem centro D e raios de comprimentos 3 e 5. O segmento AB é tangente à circunferência menor e o segmento AC é tangente à maior. Sabe-se que $AB = 10$ e $AC = 8$. A razão DB/DC é igual a:

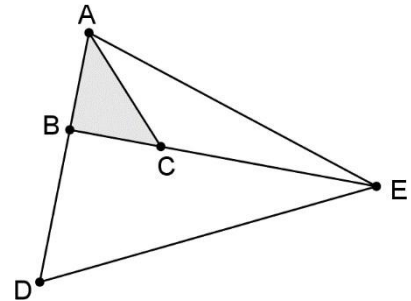
- A) $1/2$
 B) $2/3$
 C) $3/4$
 D) $4/5$
 E) $5/6$



- 02.** Na figura ao lado $BD = r \cdot AB$ e $CE = s \cdot BC$ onde r e s são números reais positivos. O triângulo ABC tem área igual a 1.

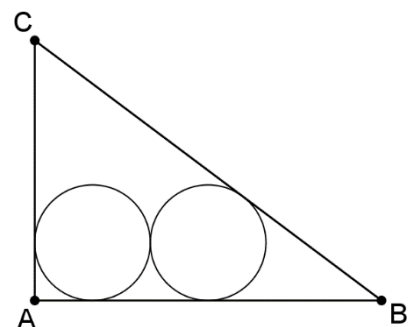
A área do triângulo ADE é igual a:

- A) rs
 B) $rs + 1$
 C) $1 + r + s$
 D) $r^2 + s^2$
 E) $(1 + r)(1 + s)$



- 03.** Na figura ao lado o triângulo ABC é retângulo em A . No seu interior há duas circunferências iguais tangentes entre si. Uma delas é tangente aos lados AC e AB e outra é tangente aos lados AB e BC . Sabe-se que $AB = 8$ e $AC = 6$. Determine o raio dessas circunferências.

- A) $3/2$
 B) $4/3$
 C) $5/4$
 D) $6/5$
 E) $7/6$



Gabarito dos exercícios propostos do PAPMEM – Janeiro de 2024

1	c) $\frac{3}{4}$
2	e) $(1 + r)(1 + s)$
3	b) $\frac{4}{3}$