UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO / PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL / PROFMAT

ALAN JEFFERSON LIMA ARAGÃO

FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

São Luís (MA)
2024

ALAN JEFFERSON LIMA ARAGÃO

FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

São Luís (MA)
2024

Aragão, Alan Jefferson Lima

Funções convexas com aplicações no ensino médio. / Alan Jefferson Lima Aragão. – São Luis, MA, 2024.

51 f

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

1.Conjuntos convexos. 2.Funções convexas. 3.Conceito de álgebra linear. 4.Otimização. I.Título

CDU: 512:373.5

Elaborado por Cássia Diniz- CRB 13/910

ALAN JEFFERSON LIMA ARAGÃO

FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

Aprovado em: ___/___/____

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
IVANILDO SILVA ABREU
Data: 17/07/2024 19:23:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu
Universidade Estadual do Maranhão

Documento assinado digitalmente
LELIA DE OLIVEIRA CRUZ
Data: 18/07/2024 16:02:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Lélia de Oliveira Cruz
Universidade Estadual do Maranhão

Documento assinado digitalmente
ANSELMO BAGANHA RAPOSO JUNIOR
Data: 18/07/2024 17:25:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Universidade Federal do Maranhão

AGRADECIMENTO

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e por me conceder saúde, força e sabedoria para realizar este sonho de tornar-me Mestre em Matemática, área pela qual tenho tanto amor.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão pelo apoio e contribuição de todos os envolvidos durante o curso de mestrado profissional - PROFMAT na UEMA.

À minha família, pela imensa gratidão os momentos de carinho, incentivo e paciência ao longo desses dois anos desafiadores. Seu apoio foi fundamental para que eu pudesse conciliar trabalho, estudos e outras responsabilidades.

Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT da UEMA por sua dedicação, esforço e competência em promover o nosso desenvolvimento acadêmico e profissional. Seu comprometimento em oferecer aulas de qualidade foi fundamental para o aperfeiçoamento e qualificação profissional dos mestrandos.

Em especial, expresso minha sincera gratidão ao Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu, meu orientador, pelo incentivo, respeito, atenção e dedicação demonstrados ao longo desse período. Sua orientação e sabedoria foram essenciais para o sucesso deste trabalho.

Por fim, agradeço à minha esposa, Edygleide Lino, e à nossa filha, Maria Eloá, pelo amor, compreensão e apoio incondicionais ao longo desta jornada. Sua presença e incentivo foram fundamentais para minha motivação e perseverança.

Agradeço também aos colegas de curso pela acolhida, respeito e pelo exemplo de profissionalismo demonstrado. Juntos, compartilhamos aprendizados valiosos e momentos inesquecíveis que contribuíram para a nossa formação como profissionais educadores.

A todos vocês, meu mais profundo obrigado por fazerem parte desta jornada no PROFMAT na UEMA e por tornarem possível a realização deste sonho acadêmico.

“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.”

Albert Einsten

RESUMO

No contexto do ensino médio, compreender os princípios das funções convexas não apenas enriquece a compreensão matemática dos alunos, mas também os prepara para enfrentar desafios práticos em uma variedade de áreas. No entanto, o estudo da temática possui obstáculos relacionados à complexidade do tema e a necessidade de aplicação de recursos didáticos essenciais. Este estudo se propôs identificar estratégias eficazes para o ensino de conjuntos e funções convexas, promover o desenvolvimento do pensamento crítico e habilidades analíticas dos alunos e avaliar o impacto dessas estratégias na preparação dos alunos para estudos avançados e em sua percepção da relevância da matemática. Para isso, realizou-se uma revisão de literatura sobre ensino de matemática, analisando a práticas pedagógicas e a implementação de uma abordagem didática baseada em visualizações, exemplos do cotidiano e atividades interativas. O estudo indicou que a introdução de conceitos de conjuntos e funções convexas, de maneira contextualizada e prática, melhora a compreensão dos alunos e aumenta seu engajamento com a matemática. Ressalta-se que uma abordagem pedagógica bem estruturada, que inclua exemplos práticos e atividades associativas, resultando na transformação de conceitos matemáticos abstratos em ferramentas práticas e relevantes, preparando alunos para o desenvolvimento do pensamento crítico e perspectivas futuras.

Palavras-chave: Conjuntos convexos; Funções convexas; Conceito de álgebra linear; Otimização.

ABSTRACT

In the context of high school education, understanding the principles of convex functions not only enriches students' mathematical comprehension but also prepares them to face practical challenges across various fields. However, the study of this topic faces obstacles related to the complexity of the subject and the need for essential didactic resources. This study aimed to identify effective strategies for teaching sets and convex functions, promote the development of students' critical thinking and analytical skills, and evaluate the impact of these strategies on students' preparation for advanced studies and their perception of the relevance of mathematics. To achieve this, a literature review on mathematics education was conducted, analyzing pedagogical practices and implementing a didactic approach based on visualizations, real-world examples, and interactive activities. The study indicated that introducing the concepts of sets and convex functions in a contextualized and practical manner enhances students' understanding and increases their engagement with mathematics. It highlights that a well-structured pedagogical approach, incorporating practical examples and associative activities, transforms abstract mathematical concepts into practical and relevant tools, preparing students for critical thinking development and future perspectives.

Keywords: Convex sets; Convex functions; Linear algebra concept; Optimization.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As funções convexas representam um importante tópico no estudo da matemática, com aplicações que se estendem desde a otimização até a modelagem de fenômenos do mundo real. No contexto do ensino médio, compreender os princípios das funções convexas não apenas enriquece a compreensão matemática dos alunos, mas também os prepara para enfrentar desafios práticos em uma variedade de áreas, incluindo economia, engenharia e ciências naturais [2].

No entanto, há desafios relacionados ao ensino do conteúdo, seja pela necessidade de aplicação de recursos didáticos essenciais, seja pela complexidade intrínseca do tema, resultando em obstáculos a serem enfrentados pelos professores e alunos no ensino médio. Diante disso, o trabalho justifica-se pela necessidade de abordar Funções Convexas e suas aplicações no nível médio, destacando suas aplicações práticas e estratégias pedagógicas eficazes para introduzir esses conceitos de forma acessível e envolvente aos alunos.

Ademais, o trabalho possui, como objetivo geral, explorar as funções convexas com ênfase em aplicações práticas. Os objetivos específicos consistem em revisar a literatura sobre a temática e suas definições, identificar e analisar questões práticas do tema para o ensino médio e avaliar a eficácia de exercícios interativos como estratégia pedagógica.

Para o desenvolvimento do estudo, optou-se por uma revisão da literatura, de modo a consolidar o conhecimento teórico existente e mapear o estado da arte para o aperfeiçoamento de abordagens metodológicas. Ao longo das próximas seções, serão discutidos os fundamentos das funções convexas, incluindo definições, propriedades e aplicações em problemas do mundo real. Além disso, serão apresentadas abordagens pedagógicas inovadoras para ensinar funções convexas no ensino médio, buscando promover uma compreensão mais profunda e uma apreciação mais ampla da matemática entre os estudantes.

Em última análise, o estudo aspira não apenas aprofundar a compreensão das funções convexas no contexto do ensino médio, mas também a inspirar uma nova geração de educadores a adotar abordagens inovadoras e dinâmicas para ensinar matemática. Ao fazê-lo, espera-se induzir recursos estratégicos e eficazes no ensino do tema, bem como capacitar os alunos para habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

2. CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

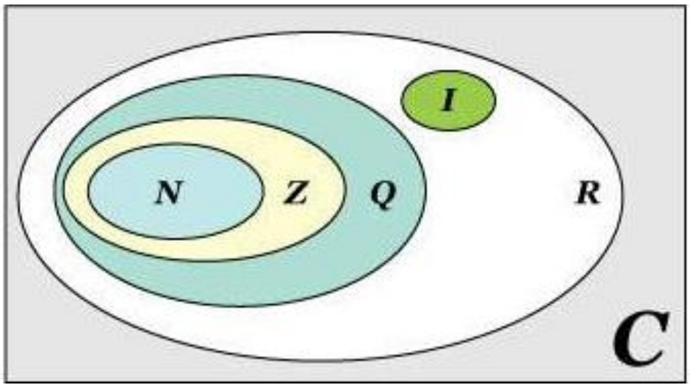
Nessa seção serão apresentados alguns conceitos que serão abordados no decorrer do desenvolvimento desse trabalho, uma vez que a revisão dos conceitos fornece a base teórica necessária para a compreensão da temática e estabelece uma conexão entre a teoria e a proposta do trabalho.

2.1. O Conjunto dos Números Reais

Os números reais constituem um conjunto abrangente que inclui números positivos, negativos, decimais, fracionários, zero, além de dízimas periódicas e não periódicas. Este conjunto é considerado o mais completo e permite a realização de operações matemáticas fundamentais, como adição, subtração, multiplicação e divisão [5].

O conjunto dos números reais é representado pela letra $\mathbb{R}$ e engloba aos conjuntos racionais ($\mathbb{Q}$), os irracionais ($\mathbb{I}$), os naturais ($\mathbb{N}$) e os inteiros ($\mathbb{Z}$), como mostra a Figura 1:

Figura 1. Imagem ilustrativa dos Conjuntos Numéricos.



Fonte: Google Imagens (2019).

Nesse sentido, cabe ressaltar o conceito de cada conjunto:

- **Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)**: formado pelos números positivos e o zero.
  Exemplo:
  $$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$$

- **Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)**: além dos elementos dos números naturais, esse conjunto integra os números negativos.
  Exemplo:

$$\mathbb{Z} = \{...,-4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

- **Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)**: composto pelos números inteiros e aqueles que podem ser escritos como frações a/b, sendo a e b números inteiros e diferentes de zero.

  Exemplo:

$$\mathbb{Q} = \{... -3; -2{,}2; -1, 0, 1/2; 1; 1{,}7; 2, 3 ...\}$$

- **Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)**: formado pelos números infinitos e não periódicos, isto é, aqueles que não podem ser representados na forma fracionária. Exemplo:

$$\mathbb{I} = \{ ..., -3{,}345...; 0; 1, v5, ...\}.$$

Além disso, o conjunto dos números complexos engloba os números reais, não o contrário. É representado na forma algébrica como $Z = a + bi$, em que “a” representa a parte real e “b” uma parte imaginária. Um dos seus elementos são as raízes quadradas de números negativos, por exemplo.

A teoria dos números naturais pode ser fundamentada em três axiomas, conhecidos como os Axiomas de Peano. O terceiro axioma é conhecido como Princípio de Indução Matemática, que constitui a base de um método eficiente para demonstrar proposições sobre números naturais. Suponhamos que as operações de adição, suas propriedades operatórias, bem como a ordem dos números naturais sejam conhecidas.

2.1.1. Definição (Princípio de Indução Matemática)

Seja P(n) uma proposição que depende de um número natural n. Se:

(i) P(1) é verdadeira.

Para todo número natural k, se P(k) é verdadeira, então P(k+1) também é verdadeira. Então, P(n) é verdadeira para todo número natural n.

Esse princípio nos permite provar uma proposição para todos os números naturais, demonstrando que é verdadeira para o primeiro número natural (tipicamente 1) e que, se é verdadeira para qualquer número natural k, então também é verdadeira para o próximo número natural k+1. Essencialmente, ele estabelece uma cadeia de implicações que garante que a proposição é verdadeira para todos os números naturais.

Exemplo. Mostre que:

$$1 + 3 + ... + (2n + 1) = n^2$$

É verdadeira para todo $n \geq 1$.

Solução:

Base n=1.

Para n = 1, a fórmula acima dá-se.

$$1=1^2, \text{ ou seja, } 1=1$$

Assim, a afirmação é verdadeira para n = 1. Deveremos mostrar agora que, se a, afirmação é verdadeira para n = k, então também é verdadeira para n = k + 1.

Hipótese n=k.

Suponha que

$$1 + 3 + ... + (2k-1) = k^2 \tag{2.2}$$

E mostremos que

$$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Passo n = k+1. Somando 2k+1 a ambos os lados da (2.2) temos

$$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$

Isto é

$$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Confirmando que a afirmação, de fato, é verdadeira.

2.2. Ordem em $\mathbb{R}$.

No conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, existe um subconjunto, que denotamos por $\mathbb{R}^+$, chamado conjunto dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:

P1. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$;

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$ somente uma das três alternativas ocorre: $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

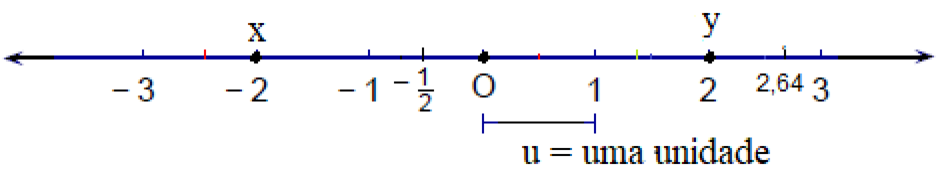
Denotando por $\mathbb{R}^- = \{-x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+\}$, a condição (P2) diz que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

e os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ e $\mathbb{R}^-$ são disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ são chamados negativos.

Dado dois números reais x e y, é natural buscar uma forma de compará-los. Para isso, uma abordagem intuitiva é atribuir a cada ponto de uma reta um único número real e, inversamente, a cada número real um único ponto na reta. Assim, introduzimos a reta real, construída da seguinte forma: selecionamos um ponto na reta denominado origem e associamos a ele o valor 0. Definimos então uma unidade de comprimento u e uma direção de percurso de modo que à direita da origem estão os pontos $z \in \mathbb{R}^+$ e à esquerda, da origem, os pontos $w \in \mathbb{R}^-$.

Figura 2. Reta real contendo valores $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$.



Fonte: Adaptado de Silva (2015).

Geometricamente, se x está à esquerda de y na reta real, temos que x é menor do que y e escrevemos $x < y$. Caso contrário, temos $x > y$. Para compreender melhor este conceito e formalizá-lo, a definição a seguir estabelece uma ordenação para os números reais.

2.2.1. Definição (Relação de Ordem)

Dizemos que x é menor do que y e denotamos por $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$, onde $z \in \mathbb{R}^+$. Neste caso, também escrevemos $y > x$ e dizemos que y é maior do que x. Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, $-x \in \mathbb{R}^+$.

2.2.1.1. Teorema (Propriedades)

A relação de ordem $x < y$ definida em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- **O1. Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$ (Transitividade).**

  Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$. Se $y < z$ então $z - y \in \mathbb{R}^+$. Logo, $z - x = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$. Portanto $x < z$.

- **O2. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, somente uma das seguintes alternativas ocorre: $x = y$, $x < y$ ou $x > y$ (Tricotomia).**

Dados x, y $\in \mathbb{R}$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$ ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^-$. No primeiro caso, tem-se $x < y$, no segundo caso $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas alternativas excluem-se mutuamente por (O2).

- **O3. Se $x < y$, então para todo $z \in \mathbb{R}$ tem-se $x + z < y + z$ (Monotonicidade da adição).**

  Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$. Daí,

$$y - x + z - z = y - x.$$

  Assim, $y + z - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$. Portanto $x + z < y + z$.

- **O4. Se $x < y$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$ (Monotonicidade da multiplicação) .**

  Se $x < y$ e $z > 0$, tem-se $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$. Logo $yz - xz = (y - x)z \in \mathbb{R}^+$. Daí, $xz < yz$. Se $x < y$ e $z < 0$ tem-se $y - x \in R^+$ e $-z \in R^+$. Logo,

$$(y - x)(-z) = y(-z) - x(-z).$$

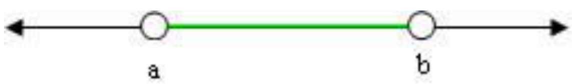
  Então, $(y - x)(-z) = -yz + xz \in \mathbb{R}^+$, de onde segue que $yz < xz$.

2.2.2. Definição (Intervalos Reais)

Seja $I \subset R$ um subconjunto não vazio. Dizemos que I é um intervalo se para quaisquer $a, b \in I$ todos os pontos entre a e b pertencem a I ou, equivalentemente, para qualquer $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$, o ponto $\lambda a + (1 - \lambda)b$ pertence a I. Assim, considerando dois números reais a e b , onde $a < b$, temos a seguinte classificação dos intervalos:

- [Intervalo aberto em **a** e aberto em **b**,]a ,b[, $\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

Figura 3. Aberto à esquerda e aberto à direita.



Fonte: Guidorizzi (2001).

- [Intervalo aberto em **a** e fechado em **b**,]a ,b], $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Figura 4. Aberto à esquerda e fechado à direita.

Fonte: Guidorizzi (2001).

- Intervalo fechado em **a** e aberto em **b**, [a ,b[, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Figura 5. Fechado à esquerda e aberto à direita.

Fonte: Guidorizzi (2001).

- Intervalo fechado em **a** e fechado em **b**, [a ,b], $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Figura 6. Fechado à esquerda e fechado à direita

Fonte: Guidorizzi (2001).

- Intervalos infinitos

Figura 7. Exemplos de intervalos infinitos

$(a,+\infty)$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a)$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$[a,+\infty)$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(-\infty, a]$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Fonte: Guidorizzi (2001).

2.3. Médias de números reais

Um conceito muito importante na matemática é o conceito de média. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma determinada característica. Se a dada especificação é a soma dos componentes, obtém-se a mais simples de todas as médias: a média aritmética. A média aritmética simples da lista de n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é um valor *A* tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$= A + A + ... + A = n·A.

2.3.1. Definição de Média Aritmética Simples

Seja a uma variável quantitativa e $a_1, a_2, \ldots, a_n$os valores assumidos por a. Define-se a **média aritmética** de a indicada por A como a divisão da soma de todos esses valores pela quantidade de valores, isto é:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A + A + \ldots + A = n \cdot A$$

Portanto,

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Segue que:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i)}{n}$$

Este tipo de média funciona de forma mais adequada quando os valores são relativamente uniformes. Por ser sensível aos dados, nem sempre fornece os resultados mais adequados, isso ocorre devido aos pesos serem iguais para todos os dados, possuindo a mesma significância.

Exemplo. Um aluno, preparando-se para o exame vestibular, fez 12 simulados no cursinho ao longo do ano. Em cada simulado, o número de questões era oitenta. Os valores seguintes correspondem às pontuações obtidas nesses exames:

56 – 52 – 61 – 53 – 48 – 68 – 49 – 59 – 61 – 62 – 60 – 55

Qual é a média aritmética desses valores?

Solução:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i)}{n} = \frac{56+52+61+53+48+68+49+59+61+62+60+55}{12} = \frac{684}{12} = 57$$

2.3.2. Definição de Média Aritmética Ponderada

Seja a uma variável quantitativa que assume os valores $a_1, a_2, \dots, a_n$com frequências absolutas respectivamente iguais a $p_1, p_2, \dots, p_n$. A **média aritmética ponderada** de p indicada por P é definida como a divisão da soma de todos os produtos $a_i \cdot p_i$ (i = 1, 2, ..., k) pela soma das frequências, isto é:

$$p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \dots + p_n \cdot a_n = p_1 \cdot P + p_2 \cdot P + \dots + p_n \cdot P.$$

Portanto,

$$P = \frac{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \cdots + p_n \cdot a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

Segue que:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_i \cdot a_i)}{\sum_{i=1}^{n} (p_i)}$$

Exemplo. Considerando as notas e os respectivos pesos de cada uma delas, indique qual a média que o aluno obteve no curso.

DISCIPLINA	NOTA	PESO
Biologia	8,2	3
Filosofia	10,0	2
Física	9,5	4
Geografia	7,8	2
História	10,0	2
Língua Portuguesa	9,5	3
Matemática	6,7	4

Retirado de: https://www.todamateria.com.br/media/

Solução:

$$P = \frac{3 \cdot 8{,}2 + 2 \cdot 10{,}0 + 4 \cdot 9{,}5 + 2 \cdot 7{,}8 + 2 \cdot 10{,}0 + 3 \cdot 9{,}5 + 4 \cdot 6{,}7}{3 + 2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4} = \frac{173{,}5}{20} = 8{,}7$$

2.3.3. Definição Média Geométrica Simples

A **média geométrica simples** G dos números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$é dada por:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = G \cdot G \cdot \dots \cdot G = G^n$$

Portanto,

$$G = \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{a_i})}$$

Exemplo. Calcule a média geométrica dos números a seguir 8; 7; 10.

Solução:

$$G = \sqrt[5]{8 \cdot 7 \cdot 10} = \sqrt[5]{560} \cong 3{,}5451$$

Deve-se salientar que só se define a média geométrica para números reais positivos, pois evita-se a possibilidade de a média não existir (por exemplo, qual seria a média geométrica entre os números 5 e -5?).

2.3.4. Média Harmônica

A **média harmônica** de uma sequência de números reais não nulos $\mathrm{a_1, a_2, \dots, a_n}$ é o número H com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma.

$$\frac{1}{\mathrm{a_1}} + \frac{1}{\mathrm{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{a_n}} = \frac{1}{\mathrm{H}} + \frac{1}{\mathrm{H}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{H}}$$

Portanto,

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{n}}{\frac{1}{\mathrm{a_1}} + \frac{1}{\mathrm{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{a_n}}}$$

Deduz-se que:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)}$$

Exemplo. Determine a média harmônica dos números indicados15, 10, 6.

Solução:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{10}{30}} = 3 \cdot \frac{30}{10} = 9$$

2.3.5. Média Quadrática

A **média quadrática** de uma sequência de números reais não nulos $\mathrm{a_1, a_2, \dots, a_n}$é o número Q com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = Q^2 + Q^2 + \cdots + Q^2 = nQ^2$$

Logo

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Dessa forma:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)}{n}}$$

Exemplo. Dados os valores 1, 3, 4 encontre a média quadrática.

Solução:

$$Q = \sqrt{\frac{1^2 + 3^2 + 4^2}{3}} = \sqrt{\frac{1 + 9 + 16}{3}} = \sqrt{8{,}666\ldots} \cong 2{,}943$$

2.3.6. Desigualdade das médias

Para quaisquer n > 1 números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tem-se;

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Isto é, MG≤MA. Ademais, vale a igualdade para $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Exemplo. Mostre que se x e y são números reais positivos, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Além disso, vale a igualdade $x + \frac{1}{x} = 2$ se, e somente se, x=1.

Solução:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \leftrightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x \geq 0 \cdot x$$

$$(x^2 - 2x + 1)^2 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

A última desigualdade acima é claramente verdadeira, uma vez que o quadrado de qualquer número real é maior do que ou igual a zero. Portanto, obtemos $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Sendo assim, percebe-se que se x = 1, então $x + \frac{1}{x} = 2$. Por outro lado, se $x + \frac{1}{x} = 2$, então, fazendo manipulações algébricas parecidas com as que fizemos acima, chegamos à equação $(x - 1)^2 = 0$, o que acarreta x = 1.

3. FUNÇÕES CONVEXAS DE UMA VARIÁVEL REAL

Neste capítulo, definiremos as funções convexas de uma variável real, estudaremos algumas de suas principais propriedades e características. Apresentaremos também as funções estritamente convexas, côncavas e estritamente côncavas. Como primeiras aplicações, traremos, além de variados exemplos, a desigualdade de Jensen e a de Bernoulli. As definições e resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [2], [6] e [8].

3.1. Conjunto Convexo

Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ não vazio. O conjunto C é convexo se para todos $a, b \in C$ tem-se $\lambda a + (1-\lambda)b \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1]$. Segue da definição acima que C é um conjunto convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está inteiramente contido em C.

Figura 8. Conjunto convexo e não-convexo.

Fonte: Google Imagens.

Exemplo: Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 2\}$. O conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é convexo.

Solução: De fato, dados $a = (x_1, y_1)$ e $b = (x_2, y_2) \in C$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b &= \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)\\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda(3x_1 + 2) + (1-\lambda)(3x_2 + 2))\\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 3(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + 2) \in C.
\end{aligned}$$

Exemplo: Seja C = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$. O conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ não é convexo.

Solução: De fato, existem a = $(-1, 1) \in C$ e b = $(1, 1) \in C$ mas

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(1,1) = (0,1) \notin C.$$

3.1.1. Definição

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

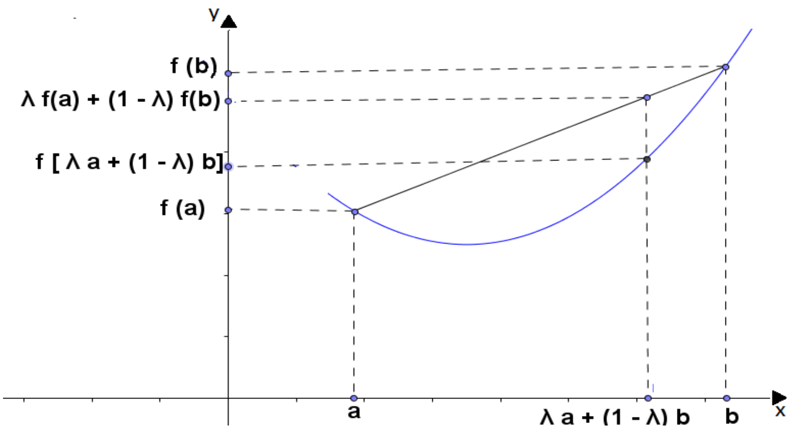
(i) A função f é convexa se

$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$, para todo a, b $\in$ I e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

(ii) A função é estritamente convexa se

$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$, para todos a, b $\in$ I e todo $\lambda \in$ R $\mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq$ 1.

Figura 9. Interpretação geométrica de convexidade.



Fonte: Silva (2015).

A corda com os pontos (a, f(a)) e (b, f(b)) fica acima do gráfico de f.

Exemplo: Sejam m, n $\in \mathbb{R}$ com m$\neq$ 0. A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por f(x) = mx + n é convexa.

Solução: De fato, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= m(\lambda a + (1-\lambda)b) + n \\ &= ma\lambda + mb - mb\lambda + n \\ &= ma\lambda + \lambda n + mb - mb\lambda + n - \lambda n \\ &= \lambda(ma + n) + (1-\lambda)mb + (1-\lambda)n \end{aligned}$$

$$= \lambda(ma + n) + (1 - \lambda)(mb + n)$$
$$= \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Logo f é uma função convexa.

Exemplo: Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Mostre que f é convexa.

Solução: Mostremos, a princípio, que $(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2$.

De fato,

$$\lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - [\lambda a + (1 - \lambda)b]^2 \geq 0$$
$$\lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - [\lambda^2 a^2 + 2\lambda a(1 - \lambda)b + (1 - \lambda)^2 b^2] \geq 0$$
$$\lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \lambda^2 a^2 - 2\lambda a(1 - \lambda)b - (1 - \lambda)^2 b^2 \geq 0$$
$$(\lambda - \lambda^2)a^2 - 2\lambda(1 - \lambda)ab + (\lambda - \lambda^2)b^2 \geq 0$$
$$\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2 \geq 0.$$

Dessa maneira, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2$$
$$\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2$$
$$= \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Logo f é uma função convexa.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ ´é convexa.

Solução: De fato, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = e^{\lambda a + (1-\lambda)b}$$
$$= e^{\lambda a} \cdot e^{(1-\lambda)b}$$
$$= e^{\lambda a} \cdot e^{(b-\lambda b)}$$
$$= e^{\lambda a} \cdot e^{b} \cdot e^{(-\lambda b)}$$
$$= e^{\lambda(a-b)} \cdot e^{b}$$
$$\leq \lambda(e^a - e^b) + e^b$$
$$= \lambda e^a + e^b - \lambda e^b$$
$$= \lambda e^a + (1 - \lambda)e^b$$
$$= \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Logo f é uma função convexa.

3.1.2. Definição de Função Côncava

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- A função f é côncava se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

para todos $a, b \in I$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

- A função f é estritamente côncava se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

para todos $a, b \in I$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

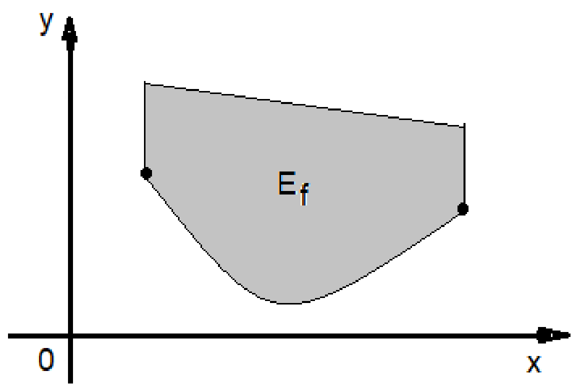
3.1.3. Definição de Epígrafo de uma função

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Define-se o epígrafo de f como:

$$E_f = \{(x, r) : x \in \mathbb{R} \text{ e } r \geq f(x)\}.$$

A Figura 10 mostra uma ilustração correspondente, graficamente, ao epígrafo de uma função.

Figura 10. Epígrafo de uma função.



Fonte: Google Imagens.

3.1.3.1. Teorema do Epígrafo

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não vazio. A função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em I se e somente se E_f é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

- **Demonstração**

Seja f uma função convexa e (a, r_1) e (b, r_2) dois elementos de E_f . Então $f(a) \leq r_1$ e $f(b) \leq r_2$. Da convexidade de f segue que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, tem-se:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2.$$

Por outro lado, observe que o ponto

$$\begin{aligned}\lambda(a, r_1) + (1-\lambda)(b, r_2) &= (\lambda a, \lambda r_1) + ((1-\lambda)b, (1-\lambda)r_2)\\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\end{aligned}$$

É tal que a ordenada satisfaz (2.1.1), ou seja, $\lambda(a, r_1) + (1-\lambda)(b, r_2) \in E_f$. Portanto E_f é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

Seja E_f um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$, $a, b \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Considere (a, r_1) e (b, r_2) dois elementos de E_f. Suponhamos $r_1 = f(a)$ e $r_2 = f(b)$. Assim, $(a, f(a))$ e $(b, f(b)) \in E_f$. Como E_f é convexo, tem-se:

$$\begin{aligned}\lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) &= (\lambda a, \lambda f(a)) + ((1-\lambda)b, (1-\lambda)f(b))\\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)) \in E_f .\end{aligned}$$

Logo, pela definição de epígrafo tem-se:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Portanto, f é uma função convexa.

A definição de função convexa direciona a uma série de propriedades importantes, como a subaditividade e a continuidade, as quais tornam as funções uma ferramenta poderosa na modelagem e solução de problemas reais. Para isso, a compreensão das propriedades facilita a análise e a solução de equações diferenciais e de otimização, fornecendo métodos eficientes para encontrar soluções ótimas, as quais são listadas abaixo:

- P.1. Se f e g são funções convexas, então f + g é convexa.

De fato, sejam f e g duas funções convexas. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) + g(\lambda a + (1-\lambda)b)\\ &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) + \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)\\ &= \lambda f(a) + \lambda g(a) + (1-\lambda)f(b) + (1-\lambda)g(b)\\ &= \lambda[f(a) + g(a)] + (1-\lambda)[f(b) + g(b)]\\ &= \lambda(f+g)(a) + (1-\lambda)(f+g)(b).\end{aligned}$$

Logo, f + g é convexa.

- P.2. Se $\alpha \geq 0$ e f é convexa então αf é convexa.

De fato, sejam $\alpha \geq 0$ e f uma funções convexa. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}(\alpha f)[\lambda a + (1-\lambda)b)] &= \alpha f[\lambda a + (1-\lambda)b)] \\ &\leq \alpha[\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)] \\ &= \lambda(\alpha f)(a) + (1-\lambda)(\alpha f)(b).\end{aligned}$$

Logo, αf é convexa.

- P.3. Se f e g são funções convexas, ambas crescentes ou ambas decrescentes, então $f \cdot g$ é convexa.

De fato, sejam f e g duas funções convexas. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ com $a < b$ tem-se:

$$[f(a) - f(b)][g(b) - g(a)] \leq 0.$$

Logo,

$$f(a)g(b) + f(b)g(a) \leq f(a)g(a) + f(b)g(b).$$

Assim, se $\lambda \in [0,1]$ tem-se:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b)g(\lambda a + (1-\lambda)b) \\ &\leq [\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)][\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)] \\ &= \lambda^2 f(a)g(a) + \lambda(1-\lambda)[f(a)g(b) + f(b)g(a)] \\ &+ (1-\lambda)^2 f(b)g(b) \\ &\leq \lambda^2 f(a)g(a) + \lambda(1-\lambda)[f(a)g(a) + f(b)g(b)] \\ &+ (1-\lambda)^2 f(b)g(b) \\ &= \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b) \\ &= \lambda(f \cdot g)(a) + (1-\lambda)(f \cdot g)(b).\end{aligned}$$

Sendo assim, $f \cdot g$ é convexa.

Se f e g são funções convexas e crescentes então $g \circ f$ é convexa.

De fato, sejam $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ duas funções convexas tais que $f(I) \subseteq J$. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= g[f(\lambda a + (1-\lambda)b)] \\ &\leq g[\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)] \\ &\leq \lambda g[f(a)] + (1-\lambda)g[f(b)] \\ &= \lambda(g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b).\end{aligned}$$

Portanto $g \circ f$ é convexa.

3.1.3.2. Teorema das Inclinações

Seja f : I→ ℝ uma função convexa. Então:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

para todos a, b, x ∈ I com a < x < b.

- **Demonstração.** Como f é uma função convexa tem-se:

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Da desigualdade apresentada, obtém-se:

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f(x) - f(a) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) - f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f(x) - f(a) \leq f(a)\left(\frac{b-x}{b-a} - 1\right) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f(x) - f(a) \leq f(a)\left[\frac{b-x}{b-a} - \left(\frac{b-a}{b-a}\right)\right] + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f(x) - f(a) \leq f(a)\left(\frac{b-x-b+a}{b-a}\right) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f(x) - f(a) \leq \frac{a-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

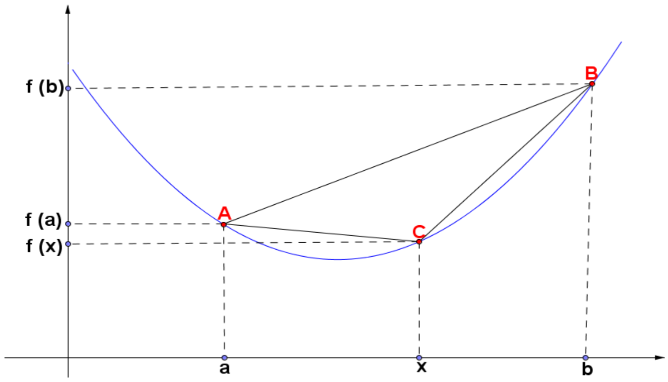
$$= \frac{x-a}{b-a} f(b) - f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(a)$$

$$= \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)]$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

que prova a primeira desigualdade $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. A segunda desigualdade $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ pode ser demonstrada de modo similar e deixo como exercício para o estudante. A Figura 11 aborda o Teorema das Inclinações, de modo a contribuir com o texto abordado.

Figura 11. Representação geométrica do teorema das inclinações.



Fonte: Silva (2015).

3.1.3.3. Teorema da Convexidade Diferenciável Unilateral (TCDU)

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então f tem derivada à direita e à esquerda em cada ponto do int(I) e f'_- e f'_+ são não decrescentes no int(I). Se $c \in \text{int}(I)$ tem-se: $f'_-(c) \leq f'_+$ e

$$f(x) \geq f(c) + f'_-(c)(x-c), \ \forall x \in I$$

$$f(x) \geq f(c) + f'_+(c)\ (x-c), \ \forall x \in I.$$

- **Demonstração**

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $c \in \text{int}(I)$. Considere $[a, b] \subset I$ tal que $a < c < b$.

Pelo teorema das inclinações, tem-se:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \text{ para } x \in (c,b].$$

Também segue do teorema que a função $x \longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ é crescente em (c, b]. Assim, pelo teorema da função monótona do Cálculo pode-se inferir que as derivadas laterais existem e, portanto, a derivada à direita existe [14].

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

De modo semelhante é possível provar que a derivada à esquerda $f'_-(c)$ também existe. Se $a < c < d < b$ então para h suficientemente pequeno e positivo percebe-se que:

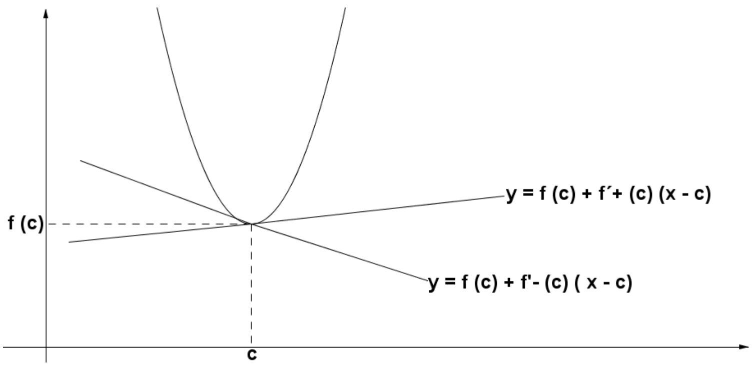
$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} \leq \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \frac{f(d)-f(d-h)}{h}.$$

Passando o limite para $h \to 0$ tem-se:

$$f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d)$$

Um exemplo gráfico está contido na Figura 12.

Figura 12. Interpretação geométrica do Teorema da Convexidade Diferenciável Unilateral.



Fonte: Silva (2015).

3.1.3.4. Definição

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita Lipschitiziana relativa a $I_o \subset I$ se existe $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in I_o$.

3.1.3.5. Teorema

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $[a, b] \subset int(I)$. Então:

(1) f é Lipschitiziana relativa a [a, b];

(2) f é continua no int(I).

- **Demonstração.** (1) Sejam $c, d \in I$ tais que $c < a < b < d$. Pelo TCDU, é notório que:

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b),$$

para todo $a \leq x \leq y \leq b$.

Sendo assim, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ onde $K = \max\{|f'_+(a)|, |f'_-(b)|\}$. Dessa maneira, f é Lipschitiziana relativa a [a, b]. (2) f contínua no int(I) é uma consequência imediata do que é demonstrado em (1).

É cabível salientar que uma função que é Lipschitiziana relativa a um intervalo $[a, b] \subset int(I)$ é absolutamente contínua em [a, b]. É um fato bem conhecido que tal função é derivável em quase todos os pontos de [a, b]. Isto mostra que toda função convexa é derivável em quase todos os pontos de seu domínio [a, b]. A seguir, mostraremos uma propriedade de derivabilidade de funções convexas sem usar o conceito de continuidade absoluta.

3.1.3.6. Teorema de Lebesgue para Funções Convexas

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então:

(1) No int(I), f'_- é contínua à esquerda e f'_+ é contínua à direita;

(2) Existe um número contável de pontos onde f não é derivável em I.

- **Demonstração**

(**1**) Em virtude da continuidade de f no int(I), tem-se para todos x, y, z no int(I):

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{z\to x} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geq \lim_{z\to x} f'_+(z),$$

para x < z < y.

Fazendo o limite para $y \to x$ teremos:

$$f'_+(x) \geq \lim_{z\to x} f'_+(z)$$

Como $f'_+(c)$ é não decrescente, tem-se:

$$f'_+(x) \leq \lim_{z\to x} f'_+(z).$$

Logo,

$$f'_+(x) = \lim_{z\to x} f'_+(z)$$

que prova a continuidade à direita de f'_+.A continuidade à esquerda de f'_-é provada de modo análogo. Para (2), do TCDU, tem-se:

$$f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(z),$$

para todos x, y, z ∈ int(I) com x < y < z.

Se f'_+ é contínua em y, significa que:

$$f'_+(y) = \lim_{x\to y} f'_+(x) = \lim_{z\to y} f'_+(z) = f'_-(y)$$

Indicando que f é derivável em y. Mostrando que os pontos no int(I) os quais f não é derivável são aqueles em que a função não decrescente f'_+ tem um salto.

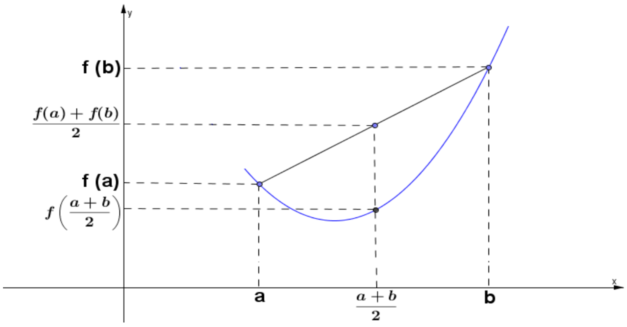
3.2. Convexidade no Ponto Médio

3.2.1. Definição

Uma função f : I → ℝ é chamada convexa ponto médio se para todos a, b ∈ I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

Figura 13. Interpretação geométrica da convexidade ponto médio.



Fonte: Silva (2015).

A figura 12 mostra o significado geométrico da convexidade ponto médio: O ponto médio da corda que une dois pontos do gráfico de f não se localiza abaixo do ponto correspondente no gráfico.

Exemplo: A função f: I ⊂ ℝ → ℝ definida por f (x) = |x| é convexa ponto médio.

Solução. De fato, para quaisquer a, b ∈ I ⊂ ℝ tem-se:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left|\frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right| \leq \left|\frac{a}{2}\right| + \left|\frac{b}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}(|a| + |b|)$$
$$= \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

Logo f é convexa ponto médio.

3.2.2. Teorema da Convexidade no Ponto Médio

Seja f : I → ℝ convexa no ponto médio e contínua. Então f é convexa.

- **Demonstração.** Seja $\{a_k\} \subset I$ uma sequência. Da convexidade ponto médio segue que:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\right)$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4)\right).$$

Por indução matemática, demonstra-se que:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i)}{n}$$

para todo n da forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

Suponha que a desigualdade acima vale para n = N. Definindo a_N por

$$a_N = \frac{1}{N-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}),$$

Segue que

$$a_N = \frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N).$$

Assim,

$$f(a_N) = f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} f(a_i)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)}{N} + \frac{f(a_N)}{N}.$$

Disso segue que $f(a_N) \leq \frac{\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)}{N-1}$, ou seja, a desigualdade também vale para n = N - 1.Então, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $a, b \in I$ e $k, n \in \mathbb{N}$. Considerando que:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i)}{n}$$

Por conseguinte,

$$f\left(\frac{ak}{n} + \frac{b(n-k)}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(kf(a) + (n-k)f(b)).$$

Tomando-se $\lambda = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, a desigualdade acima se torna:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$$

com $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$, existe um $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{Q}$ com $0 \leq \lambda_n \leq 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Como f é continua, então a desigualdade acima também é verdadeira para $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

3.3. Funções Convexas Deriváveis

3.3.1. Teorema

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Então f é convexa se e somente se $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

- **Demonstração**

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Pelo teorema 2.1.12 tem-se que f tem derivada em cada ponto no int(I) e f' é não decrescente. Assim $f'(x) > 0, \forall x \in I$. Como f é derivável duas vezes temos $f''(x) \geq 0$. Sejam $x, y \in I$ com $x < y$ e $0 < \lambda < 1$. Pelo teorema do Valor Médio do Cálculo existem ξ_1, ξ_2 tal que $x < \xi_1 < \lambda x + (1 - \lambda)y < \xi_2 < y$ e ξ_3 com $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$ de modo que:

$$
\begin{gathered}
f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y) = \\
\lambda[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(x)] + (1 - \lambda)[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(y)] = \\
\lambda(1 - \lambda)(y - x)f'(\xi_1) + (1 - \lambda)\lambda(x - y)f'(\xi_2) = \\
\lambda(1 - \lambda)(y - x)(\xi_1 - \xi_2)f''(\xi_3) \leq 0.
\end{gathered}
$$

Logo, f é convexa.

Diante disso, pode-se concluir do teorema acima que f é estritamente convexa se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ mas o inverso não é verdadeiro como por exemplo, a função dada por $f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ e no entanto $f'(0) = 0$.

3.3.2. Teorema da Minimização Convexa

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então todo ponto de mínimo local é também ponto de mínimo global e o conjunto de pontos de mínimo é convexo. Se f é estritamente convexa não há mais de um ponto de mínimo.

- **Demonstração**

Seja $a \in I$ um ponto de mínimo local que não é global. Então existe $b \in I$ tal que $f(b) < f(a)$. Da convexidade de I, tem-se $x = \lambda b + (1 - \lambda)a \in I$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Por outro lado, como f é convexa segue que:

$$\begin{aligned} f(x) = f(\lambda b + (1-\lambda)a) &\leq \lambda f(b) + (1-\lambda)f(a) \\ &= \lambda f(b) + f(a) - \lambda f(a) \\ &= f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) \\ &< f(a). \end{aligned}$$

No entanto, se $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, segue que x está próximo de **a** e como $f(x) < f(a)$ e $x \in I$ tem-se uma contradição na hipótese de "**a**" ser ponto de mínimo local que não seja global. Logo "**a**" é um ponto de mínimo global de f . Nesse viés, mostra-se que o conjunto de pontos de mínimo é convexo.

Seja $T \subset I$ o conjunto dos pontos de mínimo globais e $z \in R$ o valor mínimo da função, ou seja, $f(y) = z$, $\forall y \in T$.

Para quaisquer $y, a \in T$ e $\lambda \in [0, 1]$ segue que:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)a) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(a) = \lambda z + (1-\lambda)z = z.$$

Disto conclui-se que T é convexo pois $f(\lambda y + (1-\lambda)a) = z$.

E agora mostremos que o ponto de mínimo global é único.

Suponha que f seja estritamente convexa e que existam $y, a \in T$ com $y \neq a$ e $y \in (0, 1)$, significa que existe um elemento "y" e um elemento "a" pertencentes ao conjunto "T" de modo que "y" é diferente de "a" e 'y" pertence ao intervalo aberto entre 0 e 1.

Como y e a são pontos de mínimo globais e $\lambda y + (1-\lambda)a \in I$, por I ser convexo, tem-se:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)a) \geq f(y) = f(a) = z.$$

Mas pela convexidade estrita de f,

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1-\lambda)a) &< \lambda f(y) + (1-\lambda)f(a) \\ &= \lambda z + (1-\lambda)z \\ &= z. \end{aligned}$$

A qual é uma contradição.

Nesse viés, o ponto de mínimo é único.

4. APLICABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

A matemática é frequentemente percebida como uma disciplina desafiadora e abstrata pelos alunos do ensino médio. No entanto, conceitos como conjuntos e funções convexas podem ser apresentados de maneira que facilitem a compreensão e despertem o interesse dos estudantes. Para tornar o conceito de conjuntos convexos acessível, é essencial começar com definições simples e visuais. Um conjunto convexo pode ser descrito de maneira intuitiva como uma coleção de pontos em que qualquer linha traçada entre dois pontos dentro do conjunto permanece completamente dentro do conjunto. Esta propriedade pode ser ilustrada com formas geométricas básicas, como triângulos e círculos, em contraste com formas não convexas, como estrelas. Conforme enfatizado por Boyd e Vandenberghe (2004), uma abordagem visual na introdução de conceitos complexos, como a convexidade, é fundamental para a compreensão inicial dos alunos.

Ao introduzir os fundamentos necessários, espera-se não apenas enriquecer o currículo, mas também proporciona aos alunos ferramentas valiosas para compreender e resolver problemas do cotidiano. Com uma abordagem didática adequada, que inclui visualizações, conexões com a vida real e atividades interativas, é possível transformar a matemática de uma disciplina abstrata em uma ferramenta prática e interessante. A convexidade, assim, deixa de ser um conceito teórico e se torna uma parte integrante do entendimento do mundo ao redor, preparando os alunos para desafios futuros em diversas áreas do conhecimento. Esta seção explora métodos para ensinar esses conceitos de forma acessível e prática, destacando as vantagens desse aprendizado e utilizando referências confiáveis para embasar a abordagem.

4.1 Funções Convexas: Simplificando a Abstração

Em primeira análise, para tornar o aprendizado mais relevante, é possível conectar o conceito de funções convexas a problemas práticos do cotidiano dos alunos. Por exemplo, ao planejar uma viagem de carro, pode-se buscar minimizar o consumo de combustível com base na velocidade. A relação entre consumo de combustível e velocidade pode ser modelada por uma função convexa. Explicar essa aplicação ajuda a ilustrar a importância de reconhecer e trabalhar com funções convexas na resolução de problemas reais. Van De Walle (2009) destaca que a relevância desses temas reside na capacidade de estabelecer as bases necessárias para a compreensão de problemas mais complexos nas disciplinas matemáticas e em aplicações práticas em diversas áreas.

Em segunda análise, o desenvolvimento de material didático para o ensino de conjuntos e funções convexas no nível médio requer uma cuidadosa seleção de recursos que facilitem a compreensão dos alunos. Inicialmente, uma introdução clara aos conjuntos, utilizando exemplos do cotidiano para contextualizar, é essencial. Além disso, gráficos elucidativos e representações visuais devem ser incorporados para tornar conceitos abstratos mais tangíveis. À medida que se avança para as funções, o material deve explorar exemplos práticos, como a modelagem de situações envolvendo otimização, demonstrando a aplicabilidade desses conceitos. A linguagem utilizada deve ser acessível, e a inclusão de diferentes formatos, como vídeos explicativos e apresentações interativas, diversifica a abordagem.

Ademais, a sequência didática desempenha um papel crucial ao proporcionar uma progressão lógica dos temas. Por exemplo, após compreenderem conjuntos, os alunos podem explorar funções convexas através de exercícios que envolvam intervalos e suas propriedades. O desenvolvimento contínuo do material, incorporando feedbacks de alunos e professores, garante sua eficácia. Essa base sólida é essencial para a integração com atividades práticas e interdisciplinares, à medida que os alunos compreendem a relevância prática dos conceitos abordados.

Além do viés metodológico, as adaptações curriculares e estratégias de avaliação são essenciais para garantir que o ensino de conjuntos e funções convexas atenda à diversidade de habilidades e estilos de aprendizagem dos alunos. Um currículo flexível, que permita a personalização do ensino, é fundamental. A diversificação de materiais educativos, como vídeos, textos complementares e projetos, atende às necessidades específicas dos estudantes, promovendo uma aprendizagem inclusiva [7]

Nas avaliações, a flexibilidade é igualmente crucial. Projetos, apresentações orais e portfólios oferecem uma visão mais holística do aprendizado, avaliando não apenas o domínio dos conceitos, mas também habilidades de aplicação e pensamento crítico. A abordagem formativa e contínua permite ajustes no ensino conforme necessário. Dessa forma, as estratégias de avaliação não são apenas ferramentas de mensuração, mas guias para aprimoramento constante. Essa adaptabilidade prepara os alunos para lidar com os desafios da aprendizagem e da avaliação ao longo de suas jornadas educacionais.

Portanto, a integração de atividades práticas e interdisciplinares visa consolidar os conceitos matemáticos em situações do mundo real, estabelecendo uma ponte entre a teoria e a prática. Iniciar com problemas práticos que exijam compreensão de conjuntos prepara os alunos para explorar funções convexas em contextos mais amplos. Além disso, a interdisciplinaridade deve ir além de uma conexão superficial; projetos que envolvam matemática, física e economia, por exemplo, proporcionam uma visão integrada. A colaboração entre professores garante consistência nessa abordagem, oferecendo uma experiência educacional mais completa.

5. APLICAÇÕES

Nesta seção, serão apresentados exemplos atividades envolvendo alguns dos conceitos, anteriormente revisitados, que contemplam funções convexas, com foco nas aplicações nas variadas áreas do conhecimento.

5.1. Propriedade de Monotonicidade Crescente

Uma função convexa definida em um intervalo tem a propriedade de que sua inclinação (derivada) aumenta ou permanece constante à medida que você se move da esquerda para a direita ao longo do intervalo.

- **Exemplo**

Considere a função $f(x) = x^2$. Ela é convexa em todo o seu domínio. Se calcular a derivada, $f'(x) = 2x$, percebe-se que está sempre aumentando à medida que x aumenta. Isso é um indicativo da convexidade da função. Diante disso, os alunos serão desafiados a identificar intervalos de crescimento e decrescimento em uma função específica, utilizando o conceito de derivada para determinar a monotonicidade crescente.

- **Exemplo**

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento desta função utilizando o conceito de derivada para determinar a monotonicidade crescente.

Resolução

A derivada da função f(x), denotada por f'(x), pode ser encontrada aplicando as regras de derivação às expressões que compõem a função f(x). Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento, analisa-se os sinais da derivada f'(x) em cada intervalo crítico e os pontos de inflexão. Se a derivada for positiva em um intervalo, a função está crescendo; se negativa, a função está decrescendo.

Primeiro, calculamos a derivada da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Em seguida, igualamos a derivada a zero para encontrar os pontos críticos:

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Agora, vamos determinar os sinais da derivada f'(x) em três intervalos:

- Intervalo 1: $(-\infty, 0)$
- Intervalo 2: $(0, 2)$
- Intervalo 3: $(2, \infty)$

Para o intervalo 1: $(-\infty, 0)$

- Escolhe-se um ponto teste $x = -1$.
- Avalia-se a derivada: $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$

Como a derivada é positiva, a função f(x) está crescendo neste intervalo.

Para o intervalo 2: $(0, 2)$

- Analisa-se um ponto teste $x = 1$.
- Verifica-se a derivada: $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$

Como a derivada é negativa, a função f(x) está decrescendo neste intervalo.

Para o intervalo 3: $(2, \infty)$

- Seleciona-se um ponto teste $x = 3$.
- Estima-se a derivada: $f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9$

Como a derivada é positiva, a função f(x) está crescendo neste intervalo.

Nesse viés, a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ cresce nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, e decresce no intervalo $(0, 2)$. No tema da propriedade de soma ponderada, os estudantes serão confrontados com problemas práticos envolvendo a distribuição ponderada de recursos entre diferentes projetos.

5.2. Propriedade de Soma Ponderada

Se f (x) e g (x) são funções convexas definidas em um intervalo, então a função $h(x) = af(x) + bg(x)$, onde a e b são constantes não negativas e $a + b = 1$, também é convexa.

- **Exemplo**

Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, ambas as funções convexas, então $h(x) = 0.5\,x^2 + 0.5\,x^3$ também é convexa, pois é uma combinação convexa ponderada de $f(x)$ e $g(x)$. Assim, os discentes deverão calcular as ponderações e interpretar os resultados em termos de eficiência na alocação de recursos.

- **Exemplo**

Em uma empresa, três projetos estão em andamento e precisam ser avaliados quanto à distribuição ponderada de recursos. O Projeto A requer 40% dos recursos disponíveis, o

Projeto B requer 30% e o Projeto C requer 30%. Os resultados dos projetos são avaliados com base na ponderação dos recursos alocados a cada um. Se o Projeto A atingir um resultado de 80 pontos, o Projeto B 60 pontos e o Projeto C 70 pontos, como seria interpretada a eficiência na alocação de recursos?

Resolução:

A soma ponderada dos resultados dos projetos pode ser calculada multiplicando a proporção de recursos alocados para cada projeto pelo resultado obtido e, em seguida, somando os resultados.

A soma ponderada (SP) é dada pela fórmula:

$$SP = (P_A \cdot R_A) + (P_B \cdot R_B) + (P_C \cdot R_C)$$

Onde:

$P_{A,}$ $P_{B,}$ P_C são as proporções de recursos alocados para os Projetos A, B e C, respectivamente.

$R_{A,}$ $R_{B,}$ R_C são os resultados obtidos nos Projetos A, B e C, respectivamente.

Para calcular a soma ponderada, usamos as proporções de recursos alocados para cada projeto e seus resultados correspondentes:

$$SP = (0.40 \cdot 80) + (0.30 \cdot 60) + (0.30 \cdot 70)$$

$$SP = (32) + (18) + (21)$$

$$SP = 71$$

A eficiência na alocação de recursos pode ser interpretada pela soma ponderada dos resultados dos projetos. Neste caso, a soma ponderada é de 71 pontos. Isso indica que, com a alocação de recursos conforme as proporções estabelecidas, os resultados combinados dos projetos alcançaram um nível de eficiência de 71 pontos. Quanto maior a soma ponderada, maior seria a eficiência na alocação de recursos e, portanto, o desempenho geral dos projetos. Com relação à propriedade de unicidade do mínimo global, os alunos serão solicitados a encontrar o mínimo global de uma função convexa e demonstrar sua unicidade.

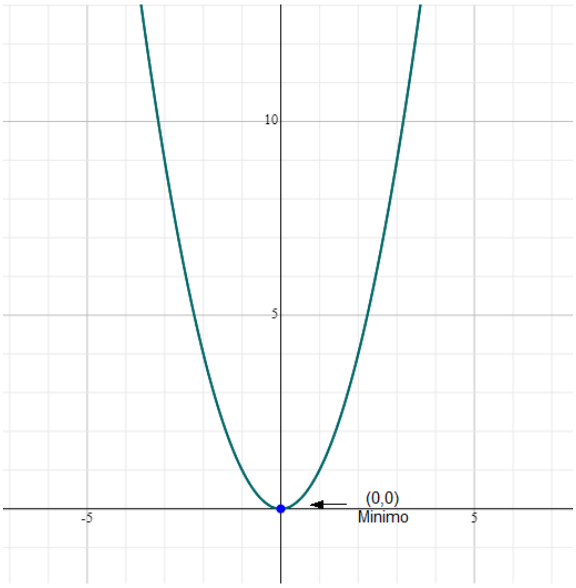
5.3. Propriedade de Unicidade do Mínimo Global

Uma função convexa, definida em um conjunto convexo, tem, no máximo, um mínimo global. Em outras palavras, não pode haver dois mínimos globais distintos em uma função convexa.

- **Exemplo**

Se $f(x) = x^2$, a função é convexa e tem um mínimo global em $x = 0$, como aponta a Figura 13.

Figura 14. Gráfico de $f(x) = x^2$.



Fonte: Autor (2024).

Não importa o intervalo ou subconjunto convexo considerado, o mínimo global será sempre $x = 0$. Assim, o aluno deverá utilizar métodos analíticos e gráficos para justificar suas respostas.

- **Exemplo**

Considere a função $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Determine o mínimo global desta função e demonstre sua unicidade, utilizando métodos analíticos e gráficos para justificar suas respostas.

Resolução:

Para encontrar o mínimo global de uma função convexa, é necessário verificar, a priori, se a função é convexa. Uma função é convexa se sua segunda derivada for sempre positiva em todo o domínio da função. O mínimo global ocorre no ponto em que a primeira derivada é igual a zero e a segunda derivada é positiva.

A fórmula para determinar o mínimo global (x_{min}) de uma função convexa é: $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

Onde:

- a é o coeficiente quadrático da função,
- b é o coeficiente linear da função.

Primeiro, determina-se a primeira e segunda derivadas da função $f(x) = x^2 + 4x + 5$:

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f''(x) = 2$$

Em seguida, iguala-se a primeira derivada à zero para encontrar o ponto crítico:

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

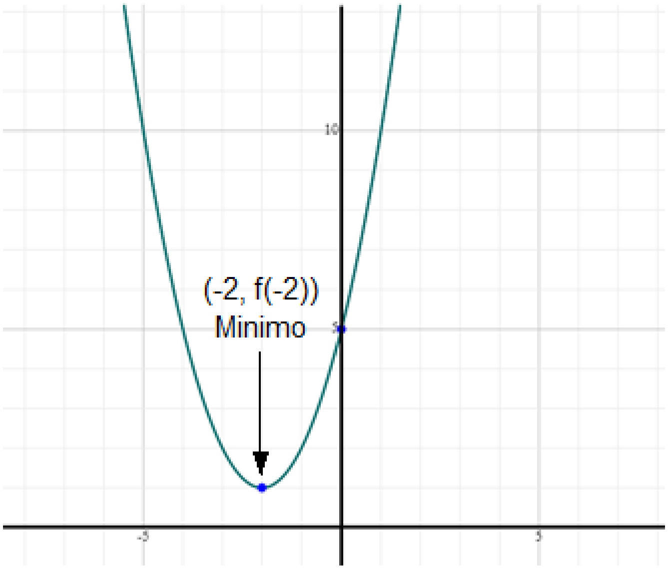
Verifica-se se a segunda derivada é positiva em todo o domínio da função. Como f"(x) = 2, que é sempre positivo, pode-se confirmar que a função é convexa.

Nesse viés, o mínimo global ocorre no ponto $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{min} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Para demonstrar a unicidade do mínimo global, podemos observar o gráfico da função.

Figura 15. Gráfico da função $f(x) = x^2 + 4x + 5$.



Fonte: Autor (2024).

O gráfico da função $f(x) = x^2 + 4x + 5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, indicando que o ponto (-2, f(-2)) é o ponto mais baixo da função. Não há outros mínimos globais, pois, como função é convexa, não possui pontos de inflexão. Nesse ínterim, o mínimo global da função $f(x) = x^2 + 4x + 5$ é $x_{min} = -2$ e a unicidade são demonstradas pela convexidade da função, bem como pela ausência de pontos de inflexão no gráfico.

5.4. Otimização em Matemática, Física e Biologia.

5.4.1. Matemática

- **Exemplo**

Considerando uma empresa que produza dois tipos de produtos, A e B, representados pelas variáveis x e y, respectivamente. A empresa dispõe de duas máquinas para a produção, cada uma com um tempo de produção específico para cada unidade dos produtos. Para o produto A, o tempo necessário é de $2x + y \leq 20$ horas, enquanto para o produto B é de $x + 3y \leq 30$ horas. Além disso, a empresa precisa garantir que a produção de ambos os produtos seja não negativa, ou seja, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

O objetivo é maximizar o lucro total.

- Para o produto A, o lucro por unidade é modelado pela função $f(x) = 4x$.
- Para o produto B, o lucro por unidade é modelado pela função $g(y) = 5y$.
- O lucro total é a soma dessas funções: $L(x,y) = 4x + 5y$.

Ness problema, os conjuntos são definidos pelas funções que determinam a produção de cada produto, enquanto as funções fornecidas representam os lucros por unidade de cada produto. O objetivo é maximizar o lucro total que a empresa pode obter, levando em conta as restrições de produção. Para entender melhor, imagina-se o papel de um gerente de fábrica que produz dois tipos de produtos: A e B. Tem-se duas máquinas disponíveis, cada uma com seu próprio tempo de produção para cada produto. O desafio é descobrir quanto de cada produto deve ser produzido para obter o maior lucro possível, considerando os tempos de produção das máquinas e o lucro que cada produto gera.

O problema pode ser discutido em sala de aula para ilustrar como os conceitos de conjuntos e funções convexas que são aplicados na prática, como na otimização da produção em uma empresa, por exemplo. Os alunos podem resolvê-lo utilizando métodos gráficos ou algébricos para encontrar a melhor quantidade de cada produto que maximiza o lucro total.

Resolução:

A empresa possui duas máquinas disponíveis, cada uma com um tempo específico de produção para cada produto. O objetivo é descobrir a quantidade de cada produto que a empresa deve produzir para maximizar seu lucro total, levando em consideração as limitações de tempo de produção de cada máquina.

As restrições de produção indicam quanto tempo é necessário para produzir cada produto, tendo em vista o tempo disponível de cada maquinário. São representadas pelas seguintes equações:

- Para o produto A: $2x + y \leq 20$ horas
- Para o produto B: $x + 3y \leq 30$ horas

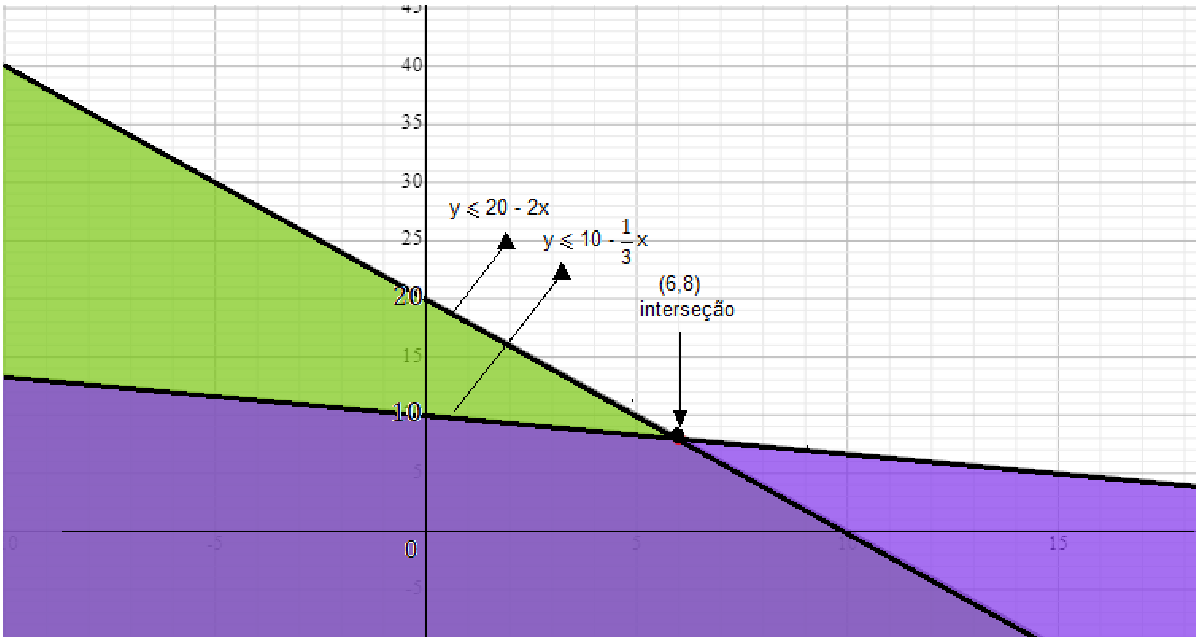
Ademais, é preciso garantir que a produção de ambos os produtos não seja negativa, ou seja, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O propósito é potencialize o lucro total, o qual é calculado somando os lucros individuais de cada produto. O lucro por unidade de cada produto é dado pelas seguintes funções:

- Para o produto A: $f(x) = 4x$
- Para o produto B: $g(y) = 5y$

Portanto, a função de lucro total é dada por $L(x,y) = 4x + 5y$.

Para resolver este problema, pode-se usar métodos gráficos ou algébricos. Para isso, inicia-se desenhando as restrições no plano cartesiano, identificando a região na qual todas as restrições são satisfeitas. Em seguida, procura-se o ponto dentro do espaço delimitado que maximize nossa função de lucro total, o qual será o ponto ótimo que nos dará a quantidade ideal de cada produto a ser produzida para maximizar o lucro total da empresa.

Figura 16. Gráfico pertencente ao exemplo enunciado.



Fonte: Autor (2024).

Em seguida, é plausível identificar os pontos onde as linhas que limitam a área viável se encontram. Para isso, resolve-se o sistema de equações formado por essas interseções:

Para $y \leq 20 - 2x$ e $y \leq 10 - \frac{1}{3}x$ temos:

$$20 - 2x = 10 - \frac{1}{3}x$$

$$-20x + \frac{1}{3}x = 10 - 20$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Assim, podemos concluir que y = 8 e o ponto de interseção é (6,8).

Avaliar a função objetivo nos pontos de interseção baseia-se em substituir os valores de x = 6 e y = 8 na função objetivo L(x,y) = 4x + 5y:

L(6,8) = 4·6 + 5·8 = 24 + 40 = 64

Desse modo, o valor máximo da função objetivo ocorre quando x = 6 (6 unidades do produto A) e y = 8 (8 unidades do produto B), representando um lucro total de 64 unidades monetárias. Diante disso, a melhor decisão para maximizar o lucro total de L(x,y) = 4x + 5y é produzir 6 unidades do produto A e 8 unidades do produto B, resultando em um lucro total de 64 unidades monetárias.

5.4.2. Física

Durante 2 segundos, uma partícula move-se de acordo com as equações indicadas a seguir:

$$x = 2 - t \text{ e } y = -3{,}5t^2 + 4t + 5$$

Determine em qual dos instantes t = 0, 3 ou t = 1, 6 segundos o raio de curvatura da trajetória é maior.

Solução:

Em primeira análise, urge determinar a equação que determina a trajetória da partícula. Assim:

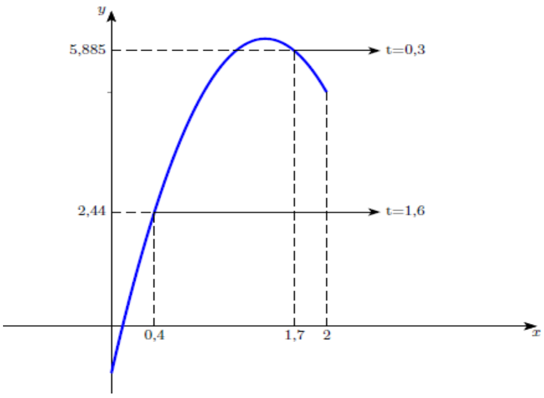
$$y = -3{,}5t^2 + 4t + 5$$

$$y = 5 + 4\cdot(2 - x) - 3{,}5\cdot(2 - x)^2$$

$$y = -3{,}5x^2 + 10x - 1,\ x \in [0, 2].$$

Analisando o gráfico a seguir, é notório que a partícula descreve uma trajetória em forma de parábola.

Figura 17: Trajetória da partícula



Fonte: Autor (2024).

Observando o gráfico percebe-se que em t = 0, 3 segundos a curvatura é mais acentuada que em t = 1,6, devido ao formato côncavo. Dessa maneira, espera-se que o raio de curvatura em t = 0, 3 seja inferior ao raio de curvatura em t = 1,6 segundos. Para demonstrar esta hipótese é necessário calcular os raios de curvatura.

Assim iniciando pelas equações das velocidades tem-se:

$$v_x = x' = (2 - t)' = -1$$

$$v_y = y' = (-3{,}5t^2 + 4t + 5)' = 4 - 7t$$

O módulo da velocidade é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (4 - t)^2} = \sqrt{17 - 56t + 49t^2}.$$

Efetuando-se as operações para t = 0,3 e t = 1,6, e tem-se, respectivamente, como resultado, v = 2,15 e v = 7,27.

É possível verificar que o movimento da partícula é inicialmente retardado e, posteriormente, acelerado. O módulo da velocidade tem variação mais rápida quando a aceleração tangencial a_t é maior. Assim, $a_t = v'$ temos

$$a_t = v' = \sqrt{17 - 56t + 49t^2} = \frac{98t - 56}{2(\sqrt{17 - 56t + 49t^2})}$$

Na sequência, é necessário estabelecer o módulo da aceleração (a). Logo,

$$a_x = v_x' = (-1)' = 0$$

$$a_y = v_y' = (4 - 7t)' = -7.$$

Temos que o módulo da aceleração é dado por:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-7)^2 = 7}$$

Efetuando-se as operações para t = 0,3 e t = 1,6, e tem-se respectivamente como resultado, $a_n \cong 3{,}27$ e $a_n \cong 0{,}99$.

Com as informações obtidas, é possível calcular o raio R da curvatura:

Nota: *Em uma trajetória circular, nota-se que o raio de curvatura R coincide com o raio de uma circunferência. Em outras curvas, existe em cada ponto um raio de curvatura que pode ser calculado por:*

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

Onde v é o modulo da velocidade e a_n é a aceleração normal.

Logo, para:

- t = 0,3:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(2{,}15)^2}{(3{,}27)^2} \cong 1{,}41$$

- t = 1,6:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(7{,}27)^2}{(0{,}99)^2} \cong 53{,}39$$

Portanto, conclui-se que o raio da curvatura é maior para t = 1,6 segundos.

5.4.3. Biologia

Em certa cultura, a quantidade de bactérias, em milhões de unidades, é dada pela expressão.

$$N(t) = N_0 e^{kt} \text{ para } t \geq 0,$$

Onde N_0 é a quantidade inicial de bactérias, t é o tempo em minutos desde o primeiro momento do experimento e k uma constante real positiva. Considere que, no décimo minuto, foi ministrado um medicamento na população de bactérias com o intuito de interromper seu crescimento. A partir deste momento, a sua quantidade passou a ser expressa por:

$$D(t) = 2(t-10)^2.e^{-t+10} + 4 \text{ para } t \geq 10.$$

Calcule o instante em que a taxa de crescimento é máxima, indicando o resultado em minutos e segundos.

Solução:

Inicialmente, calcula-se a derivada segunda da função D(t), pois sabe-se que, se D"(t) ≥ 0 pata todo t real, então D(t) é uma função convexa.

$$D''(t) = e^{-t+10}(2t^2 - 48t + 284).$$

Calculando as raízes de D"(t), é possível verificar em qual ponto a função tem taxa de decrescimento máxima.

$$D''(t) = 0$$

Obtive-se um produto nulo

$$e^{-t+10}(2t^2 - 48t + 284) = 0$$

Logo,

$$e^{-t+10} = 0 \text{ (impossivel) ou } (2t^2 - 48t + 284) = 0$$

Então:

$$t = 12 \pm \sqrt{2}.$$

t	**10**		$\mathbf{12 - \sqrt{2}}$		$\mathbf{12 + \sqrt{2}}$	+∞
D"	+	+	0	-	0	+
D		∪	ponto de inflexão	∩	ponto de inflexão	∪

Estudando o sinal da função, verifica-se que o ponto, onde a taxa de crescimento é máxima ocorre, em t = $12 - \sqrt{2}$.

Sendo assim,

$$12 - \sqrt{2} \cong 10{,}58 \cong 10 \text{ minutos e } 35 \text{ segundos}$$

Diante disso, infere-se que, para t aproximadamente igual a 10 minutos e 35 segundos, a taxa de crescimento atinge o seu valor máximo.

6. CONCLUSÃO

O presente estudo abordou a importância de adaptar o ensino de conjuntos e funções convexas no ensino médio, enfatizando o desenvolvimento do pensamento crítico, as aplicações práticas e a preparação dos alunos para estudos avançados. A revisão realizada revelou que a integração desses conceitos no currículo escolar proporciona múltiplos benefícios educacionais, tanto no âmbito teórico quanto prático.

A priori, o ensino das funções convexas estimula habilidades analíticas e críticas nos alunos, permitindo-lhes identificar propriedades e padrões aplicáveis na matemática, física e biologia. Outrossim, a inclusão dos fundamentos e definições no ensino médio consolida uma base sólida que facilita o aprendizado. Demonstrar a relevância prática desses conceitos por meio de exemplos do cotidiano, como a otimização de recursos e o planejamento de trajetos, contribui para aumentar o interesse e o engajamento dos alunos na disciplina de matemática. Para isso, a implementação de uma abordagem didática adequada, que inclui visualizações, conexões com a vida real e atividades interativas, transforma a matemática de uma disciplina abstrata em uma ferramenta prática e interessante, além de adaptações curriculares e as estratégias de avaliação desempenham um papel fundamental na eficácia do ensino desses tópicos.

Portanto, espera-se que o estudo contribua para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino médio, promovendo uma educação matemática mais inclusiva, relevante e eficaz. Além disso, sugere-se que pesquisas futuras continuem a explorar métodos inovadores de ensino, a fim de fortalecer ainda mais a conexão entre teoria matemática e aplicações práticas no cotidiano dos estudantes.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] AMORIM, Ronan Gomes de. **Introdução à Análise convexa:** Conjuntos e Funções Convexas. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

[2] BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. **Otimização convexa** . Cambridge university press, 2004.

[3] BUSSE, Ronaldo da Silva; SOARES, Flávia dos Santos. **O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio**. 2007. p.8. Trabalho Científico (In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM), Belo Horizonte, 2007. Disponível em:<http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/PO02944174789T. doc>. Acesso em: 07 jun. 2024.

[4] CERRI, Cristina. Desvendando os números Reais. **São Paulo: IME-USP**, v. 9, 2006.

[5] FREIRE, Benedito Tadeu; GOMES, José Maria. **Uma desigualdade muito útil: a de Cauchy-Schwars**. Olimpíada de matemática do estado do Rio Grande do Norte. Aula 2. 2010. Disponível em: http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/AULA- N2-OLIMPIADA-DE-MATEMATICA-SUPER-CORRIGIDA.pdf>.Acesso em: 07 jun. 2024.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

[7] LIMA, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 1.

[8] MORDUKHOVICH, Boris; NAM, Nguyen Mau. Um caminho fácil para análises e aplicações convexas. **Springer Nature**, 2023.

[9] SILVA, Álvaro Antunes da. **Funções Convexas e Desigualdades:** Uma Abordagem no Ensino Médio.2015, 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista " Julio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São Jose do Rio Preto, 2015

[10] SILVEIRA, Samai Serique Dos Santos; SANTOS, Verônica; CAMPOS, Lucas Viana De Souza. Possibilidade De Adaptação Curricular No Ensino De Matemática. **XI SIEPEX**, p. 66.

[11] VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. Penso Editora, 2009.