

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

**A Matemática da Mágica do Jogo dos Três Montes**

**Marcelo Augusto de Oliveira Alberti**

Orientadora: Profa. Dra. Fernanda Diniz de Melo Hernandez

Maringá - PR

2025

# A Matemática da Mágica do Jogo dos Três Montes

Marcelo Augusto de Oliveira Alberti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Dra. Fernanda Diniz de Melo Hernandez

Maringá - PR

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

A334m	<p>Alberti, Marcelo Augusto de Olivera</p> <p>A matemática da mágica do jogo dos três montes / Marcelo Augusto de Oliveira Alberti. - Maringá, 2025. iv,51 f. : il., color.</p> <p>Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernanda Diniz de Melo Hernandez.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2025.</p> <p>1. Jogo dos três montes. 2. Funções compostas. 3. Logaritmos. 5. Matemática discreta. 6. Ensino de matemática. 7. Jogos - Matemática. I. Hernandez, Fernanda Diniz de Melo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.</p> <p>CDD 23.ed. 510.7</p>
-------	---

Edilson Damasio CRB9-1.123

**MARCELO AUGUSTO DE OLIVEIRA ALBERTI**

**A MATEMÁTICA DA MÁGICA DO JOGO DOS TRÊS MONTES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

**COMISSÃO JULGADORA:**

*Fernanda D. M. Hernandez*

Profa. Dra. Fernanda Diniz de Melo Hernandez  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)

*Gleiciane da Silva Aragão*

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão  
UNIFESP - Universidade Federal de São Paulo / Campus Diadema

*Rodrigo Martins*

Prof. Dr. Rodrigo Martins  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2025  
Local de defesa: Bloco F67 – Sala 107

Aos meus amados pais, esposa e filho.

---

---

# AGRADECIMENTOS

---

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de sabedoria e força, por guiar meus passos durante toda essa jornada.

Aos meus pais, Antonio e Albertina, pelo incentivo e sacrifícios que fizeram desde pequeno para que eu pudesse estudar.

À minha esposa Ana Maria, obrigado por sua paciência, por sempre me apoiar e estar ao meu lado nos momentos mais difíceis, pela compreensão nos momentos em que a rotina exigiu mais tempo e ausências.

Ao meu filho Marcello Arthur, você é minha inspiração. Que esse exemplo demonstre que sonhos são possíveis com persistência.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra Fernanda de Melo Hernandez por me aceitar como seu orientando, pela orientação técnica, intelectual e humana. Por sua paciência, disponibilidade e críticas construtivas que foram fundamentais para a execução deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que de algum modo me ajudaram nessa caminhada.

Aos todos os colegas, amigos e instituições que contribuíram direta ou indiretamente para essa formação.

Aos professores Dr. Rodrigo Martins e Dra. Gleiciane da Silva Aragão por aceitarem o convite para participarem da banca e se disporem a ler meu trabalho.

*A tarefa não é tanto ver  
aquilo que ninguém viu, mas  
pensar o que ninguém ainda pensou  
sobre aquilo que todo mundo vê.*

*Arthur Schopenhauer.*

---

# RESUMO

---

Esta dissertação investiga a matemática subjacente ao jogo dos três montes, um truque de cartas tradicional, demonstrando como conceitos matemáticos fundamentais podem ser utilizados para explicar seu funcionamento. O trabalho apresenta três abordagens distintas para analisar o comportamento das cartas: através de funções compostas, função maior inteiro e logaritmos. Demonstra-se que, após três iterações, uma carta escolhida entre 21 cartas sempre converge para a posição central, independentemente de sua posição inicial. O estudo estabelece uma relação entre o número de cartas e o número mínimo de iterações necessárias para identificar a carta escolhida, expressa pela fórmula  $\lceil \log_3 n \rceil$ . Além da análise matemática, o trabalho propõe uma abordagem pedagógica utilizando o jogo como ferramenta didática, oferecendo uma alternativa lúdica e interativa para o ensino de conceitos matemáticos complexos no ensino médio. Esta pesquisa contribui para o campo da educação matemática ao estabelecer conexões entre a matemática teórica e suas aplicações práticas, promovendo uma aprendizagem mais significativa e envolvente.

**Palavras-chave:** Jogo dos três montes. Funções compostas. Logaritmos. Matemática discreta. Ensino de matemática.

---

---

# ABSTRACT

---

This dissertation investigates the mathematics behind the three piles game, a traditional card trick, demonstrating how fundamental mathematical concepts can be used to explain its operation. The work presents three distinct approaches to analyze the behavior of cards: through composite functions, greatest integer function, and logarithms. It demonstrates that after three iterations, a card chosen from 21 cards always converges to the central position, regardless of its initial position. The study establishes a relationship between the number of cards and the minimum number of iterations required to identify the chosen card, expressed by the formula  $\lceil \log_3 n \rceil$ . Beyond mathematical analysis, the work proposes a pedagogical approach using the game as a didactic tool, offering a playful and interactive alternative for teaching complex mathematical concepts in high school. This research contributes to the field of mathematics education by establishing connections between theoretical mathematics and its practical applications, promoting more meaningful and engaging learning.

**Keywords:** Three piles game. Composite functions. Logarithms. Discrete mathematics. Mathematics teaching.

---

---

## LISTA DE FIGURAS

---

2.1	Distribuição das cartas na mesa . . . . .	22
2.2	Participante apontando a terceira coluna . . . . .	23
2.3	Execução da segunda parte da terceira etapa . . . . .	24
2.4	Execução da terceira parte da terceira etapa . . . . .	25
2.5	Carta escolhida após três rodadas . . . . .	26
2.6	Posição das cartas após a primeira iteração . . . . .	31
2.7	Posição das cartas após a segunda iteração . . . . .	32
2.8	Posição das cartas após a terceira iteração . . . . .	33
3.1	Implementação dos montes após a escolha da coluna . . . . .	46
3.2	Implementação da distribuição das cartas . . . . .	47

---

---

# LISTA DE TABELAS

---

2.1	Posição das cartas na primeira distribuição. . . . .	26
2.2	Posição das cartas na segunda distribuição. . . . .	27
2.3	Posição das cartas na terceira distribuição. . . . .	28
2.4	Posições das cartas após as iterações. . . . .	37
2.5	Relação entre número de cartas e iterações mínimas necessárias. . . . .	41

## Índice de Notações

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$X \subset Y$	$X$ é um subconjunto de $Y$
$X \times Y$	produto cartesiano de $X$ por $Y$
$a \equiv b \pmod{n}$	$a$ congruente a $b$ módulo $n$ .

---

---

# CONTEÚDO

---

<b>Índice de Notações</b>	<b>vii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fundamentos teóricos</b>	<b>2</b>
1.1 Funções . . . . .	2
1.2 Aritmética modular . . . . .	4
1.3 Função piso e função teto . . . . .	8
1.4 Funções exponenciais e logarítmicas . . . . .	11
1.4.1 Função exponencial . . . . .	11
1.4.2 Função inversa . . . . .	12
1.4.3 Função logarítmica . . . . .	13
1.5 Elementos básicos de matrizes . . . . .	14
1.5.1 Definições . . . . .	14
1.5.2 Operações com matrizes . . . . .	18
<b>2 O jogo dos três montes</b>	<b>21</b>
2.1 Descrição do jogo . . . . .	21
2.2 Análise matemática do jogo dos três montes . . . . .	29
2.2.1 Usando função composta . . . . .	29
2.2.2 Usando a função piso e congruência . . . . .	34
2.2.3 Usando logaritmos . . . . .	38
2.3 Sugestão de atividade . . . . .	41

---

<b>3 O ensino de matemática: o jogo dos três montes como estratégia pedagógica</b>	<b>42</b>
3.1 A matemática na educação básica: formando cidadãos críticos e autônomos	42
3.2 A Matemática na vida cotidiana . . . . .	43
3.3 O jogo dos três montes como ferramenta pedagógica . . . . .	44
3.4 A relevância do Scratch no ensino de matemática . . . . .	45

---

# INTRODUÇÃO

---

A matemática desempenha um papel fundamental na formação integral do cidadão, desenvolvendo habilidades cognitivas, raciocínio lógico e capacidade de resolução de problemas. Após anos atuando na educação básica, percebemos que o aluno tem maior interesse em conteúdos com aplicação no cotidiano e quando abordado de modo interativo. Esta dissertação investiga o jogo dos três montes como instrumento facilitador no ensino de funções e aritmética modular, explorando suas bases teóricas e aplicações práticas. O jogo apresenta um meio eficaz de estabelecer conexões entre os conteúdos.

O primeiro capítulo estabelece os fundamentos teóricos necessários para a compreensão do trabalho, abordando conceitos essenciais de funções, aritmética modular e funções exponenciais e logarítmicas. Estes elementos matemáticos são apresentados de forma progressiva e interligada, construindo uma base sólida para as análises subsequentes.

No segundo capítulo, exploramos detalhadamente o jogo dos três montes, apresentando sua dinâmica e demonstrando matematicamente seu funcionamento através de três abordagens distintas: funções compostas, função piso e logaritmos. Esta análise multifacetada permite uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos envolvidos e suas inter-relações.

O terceiro capítulo dedica-se às aplicações pedagógicas, discutindo como o jogo dos três montes pode ser utilizado como ferramenta didática. Também é apresentado um simulador do jogo feito em Scratch, uma linguagem de programação visual gratuita, que pode ser usado para trabalhar os conteúdos matemáticos e computacional.

A relevância deste trabalho reside em sua contribuição para a metodologia do ensino da matemática, propondo uma abordagem que integra aspectos lúdicos e teóricos. Esta pesquisa visa contribuir para o campo da educação matemática, oferecendo uma perspectiva inovadora sobre como conceitos matemáticos complexos podem ser apresentados de forma envolvente e significativa, promovendo assim uma aprendizagem mais efetiva.

---

# Fundamentos teóricos

---

A matemática por trás dos jogos de cartas frequentemente revela estruturas elegantes e surpreendentes. Neste capítulo serão abordados alguns conceitos matemáticos fundamentais de funções, da aritmética modular e funções exponenciais e logarítmicas, baseando-se principalmente nos trabalhos de [LIMA 2013] e [HEFEZ 2014].

## 1.1 Funções

O conceito de função, conforme apresentado por [LIMA 2013], é um dos pilares fundamentais da matemática moderna, com uma rica história que remonta aos trabalhos de Euler no século XVIII. Inicialmente vamos definir relação entre conjuntos, estabelecendo as bases necessárias para compreender o conceito de funções e suas aplicações em diferentes contextos matemáticos.

**Definição 1.1.1.** *Dados dois conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , uma relação de  $X$  em  $Y$  (ou entre  $X$  e  $Y$ , nessa ordem) é um subconjunto  $R$  do produto cartesiano  $X \times Y$ , isto é,  $R$  é um conjunto de pares ordenados do tipo  $(x, y)$ , com  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Se  $R$  é uma relação de  $X$  em  $X$ , diremos simplesmente que  $R$  é uma relação em  $X$ .*

**Exemplo 1.1.2.** Se  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $Y = \{3, 4, 5\}$ , o conjunto  $R = \{(x, y) \in X \times Y; x \geq y\}$  é a relação de  $X$  em  $Y$  dada por  $R = \{(3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$ ; estes são os únicos pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$  e  $y \in \{3, 4, 5\}$  e tais que  $x \geq y$ .

Com isso podemos ir para a definição formal de função.

**Definição 1.1.3.** *Dados conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , uma relação  $f$  de  $X$  em  $Y$  é uma função se para todo  $x \in X$ , existe um único  $y \in Y$ , tal que  $xfy$  ( $x$  se relaciona com  $y$ ). Noutras palavras, uma função  $f : X \rightarrow Y$ , é uma regra que associa cada elemento*

$x \in X$  um único elemento  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto  $X$  chama-se domínio e  $Y$  é o contradomínio da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a imagem de  $x$  pela função  $f$ . Escreve-se  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  transforma  $x$  em  $f(x)$ .

Alguns exemplos de funções, temos a função identidade  $f : X \rightarrow X$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Outro exemplo é a função constante  $f : X \rightarrow Y$ , onde se toma  $c \in Y$  e põe  $f(x) = c$  para todo  $x \in X$ . Uma função frequentemente estudada em matemática discreta devido a suas aplicações em áreas como ciência da computação e teoria dos números é a função com domínio discreto, ou seja, uma função cujo domínio consiste em um conjunto de pontos isolados que não formam um intervalo contínuo. Esse domínio pode ser um conjunto de números inteiros, números naturais ou qualquer conjunto finito de números.

**Exemplo 1.1.4.** Considere a função  $f : \{1, 2, 4, 7\} \rightarrow \mathbb{N}$ , definida por  $f(x) = 2x + 1$ , então

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$f(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Temos os seguintes pares ordenados  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(4, 9)$  e  $(7, 15)$ .

Uma função muito importante nos estudos das funções são as composições entre funções, que podemos definir da seguinte forma:

**Definição 1.1.5.** Dadas as funções  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ , a função composta de  $f$  e  $g$  (nessa ordem) é a função  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , definida, para cada  $x \in X$ , por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Exemplo 1.1.6.** Considere as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ . Temos  $g \circ f$  e  $f \circ g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{[f(x)]^2 + 1} = \frac{1}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 = \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)^2 = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}.$$

Apesar de não ser comutativa, a operação de composição de funções é associativa, conforme ensina o resultado a seguir:

**Proposição 1.1.7.** *Dadas funções  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  e  $h : Z \rightarrow W$ , temos*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

*Demonstração.* Note inicialmente que ambas  $h \circ (g \circ f)$  e  $(h \circ g) \circ f$  são funções de  $X$  em  $W$ . Portanto, para tais funções serem iguais, é suficiente que elas associem, a cada  $x \in X$  um mesmo elemento de  $W$ .

Basta notar que

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

□

Essa proposição é muito importante, pois assegura que, se tivermos funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  e pudermos compô-las (nessa ordem), podemos denotar a função composta simplesmente por  $h \circ g \circ f$ , sem se preocupar com qual composição deve efetuar primeiro.

Um caso particular da discussão anterior, sejam dados  $n \in \mathbb{N}$  e uma função  $f : X \rightarrow X$ . Escrevemos  $f^{(n)}$  para denotar a composta

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n,$$

a qual também é uma função de  $X$  em si mesmo.

## 1.2 Aritmética modular

A teoria dos números possui um ramo essencial conhecido como aritmética modular, que investiga como os números se relacionam quando são divididos por um determinado valor constante, denominado módulo. Em 1801, o matemático Carl Friedrich Gauss apresentou uma abordagem formal deste tema em seu trabalho “Disquisitiones Arithmeticae”, estabelecendo bases que hoje se mostram cruciais tanto para a matemática pura quanto para suas aplicações práticas. Na sequência, usando como referência [HEFEZ 2014], serão apresentados os princípios básicos e as características fundamentais da aritmética modular, elementos necessários para a compreensão de suas diversas aplicações.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $a \in \mathbb{Z}$ , definimos*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

*Este número inteiro  $|a|$  é chamado de módulo ou valor absoluto de  $a$ .*

Observe que para todo  $a \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $|a| \geq 0$ , onde  $|a| = 0$  se, e somente se,  $a = 0$ . Abaixo seguem algumas propriedades básicas do valor absoluto: Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $r \in \mathbb{N}$ , temos:

- $|ab| = |a||b|$ ;
- $|a| \leq r$  se, e somente se,  $-r \leq a \leq r$ ;
- $|a| \geq r$  se, e somente se,  $a \leq -r$  ou  $a \geq r$ ;
- $-|a| \leq a \leq |a|$ ;
- $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  (desigualdade triangular).

**Definição 1.2.2.** *(Divisibilidade) Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , diremos que  $a$  divide  $b$ , escrevemos  $a|b$ , quando existir  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ca$ . Nesse caso, diremos também que  $a$  é um divisor ou um fator de  $b$  ou, ainda, que  $b$  é um múltiplo de  $a$  ou que  $b$  é divisível por  $a$ .*

Vamos enunciar a propriedade arquimediana a seguir.

**Proposição 1.2.3.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  com  $b \neq 0$ . Então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $nb \geq a$ .*

*Demonstração.* Como  $b \neq 0$ , temos que  $|b| \geq 1$ . Multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por  $|a| + 1$ , obtemos:

$$(|a| + 1)|b| \geq |a| + 1 > |a| \geq a.$$

Assim, se tomarmos  $n = |a| + 1$  para  $b > 0$  e  $n = -(|a| + 1)$  para  $b < 0$ , teremos  $nb \geq a$ .

□

Diremos que um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{Z}$  é limitado inferiormente, se existir  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $c \leq x$  para todo  $x \in S$ . Diremos que  $a \in S$  é um menor elemento de  $S$  se  $a \leq x$  para todo  $x \in S$ .

Uma propriedade que só os números inteiros possuem é o Princípio da Boa Ordenação: Se  $S$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$  e limitado inferiormente, então  $S$  possui um menor elemento. Vamos demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.4.** (*Divisão euclidiana*) *Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $b \neq 0$ . Existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que  $a = bq + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ .*

*Demonstração.* Considere o conjunto  $S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$ . Vamos inicialmente mostrar a existência de  $q$  e  $r$ . Pela propriedade arquimediana, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ , logo,  $a - nb > 0$ , o que mostra que  $S$  é não vazio. O conjunto  $S$  é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que  $S$  possui um menor elemento  $r$ . Suponhamos então que  $r = a - bq$ . Sabemos que  $r \geq 0$ . Vamos mostrar que  $r < |b|$ . Suponhamos por absurdo que  $r \geq |b|$ . Portanto, existe  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $r = |b| + s$ , logo  $0 \leq s < r$ . Mas isso contradiz o fato de  $r$  ser o menor elemento de  $S$ , pois  $s = a - (q \pm 1)b \in S$ , com  $s < r$ , ou seja,

se  $b > 0$ , então

$$r = |b| + s \Rightarrow s = r - |b| \Rightarrow s = a - bq - |b| \Rightarrow s = a - bq - b \Rightarrow s = a - (q + 1)b \in S$$

ou, se  $b < 0$ , então

$$s = a - bq + b \Rightarrow s = a - (q - 1)b \in S.$$

Assim provamos a existência de  $q$  e  $r$ , resta agora provar que  $q$  e  $r$  são únicos. Suponha que  $a = bq + r = bq' + r'$ , onde  $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r < |b|$  e  $0 \leq r' < |b|$ . Como  $0 \leq r < |b|$  temos que,  $-r \geq -|b|$ . Além disso,  $-r \leq r' - r$ , pois  $r' \geq 0$  e  $r' - r \leq r'$ , pois  $r \geq 0$ . Deste modo, temos

$$-|b| < -r \leq r' - r < |b|, \text{ isto é, } -|b| < r' - r < |b|. \text{ Logo, } |r' - r| < |b|.$$

Por outro lado,

$$bq + r = bq' + r' \Rightarrow bq - bq' = r' - r \Rightarrow b(q - q') = r' - r.$$

Calculando o valor absoluto a ambos os lados da igualdade temos,  $|b(q - q')| = |r' - r|$ , pela propriedade de módulo do produto, temos,  $|b||q - q'| = |r' - r| < |b|$ , mas  $|b| > 0$ . Deste

modo,  $0 \leq |q - q'| < 1$ , logo  $q - q' = 0$ , ou seja,  $q = q'$ , e substituindo em  $qb + r = bq' + r'$  obtemos  $r = r'$ . Demonstração extraída de [HEFEZ 2014].  $\square$

**Exemplo 1.2.5.** O quociente e o resto da divisão de 21 por 4 são  $q = 5$  e  $r = 1$ , onde  $0 \leq 1 < |4|$  e  $21 = 4 \cdot 5 + 1$ .

E o quociente e o resto da divisão de  $-21$  por 4 são  $q = -6$  e  $r = 3$ , onde  $0 \leq 3 < |4|$  e  $-21 = 4 \cdot (-6) + 3$ .

**Definição 1.2.6.** (*Aritmética dos restos*) Seja  $m$  um número natural. Diremos que dois números inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$  se os restos de sua divisão euclidiana por  $m$  são iguais. Quando os inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$ , escreve-se

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

**Exemplo 1.2.7.** Seja  $a = 21$  e  $b = 16$ . Como ambos deixam restos iguais a 1 na divisão por 5, temos que  $21 \equiv 16 \pmod{5}$ .

**Proposição 1.2.8.** Seja  $m \in \mathbb{N}$ . Para todos  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , tem-se

- $a \equiv a \pmod{m}$  (*reflexiva*);
- se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$  (*simétrica*);
- se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$  então  $a \equiv c \pmod{m}$  (*transitiva*);

Logo, a congruência módulo um número inteiro fixo  $m$ , é uma relação de equivalência.

Para analisar se dois números são congruentes módulo  $m$ , não é necessário realizar a divisão euclidiana de ambos por  $m$  e depois comparar os restos obtidos. Basta na verdade, aplicar a seguinte proposição:

**Proposição 1.2.9.** Suponha que  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m > 1$ . Tem-se que  $a \equiv b \pmod{m}$  se, e somente se,  $m | b - a$ .

*Demonstração.* Sejam  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m > 1$ , vamos supor que  $a \equiv b \pmod{m}$ , então pela definição temos que  $a = mq + r$  e  $b = mq' + r$ , as divisões euclidianas de  $a$  e  $b$  por  $m$ , respectivamente, onde  $0 \leq r < |m| = m$ , pois  $m > 0$ .

Assim,

$$b - a = mq' + r - (mq + r) \Rightarrow b - a = m(q' - q).$$

Portanto,  $m|b - a$ .

Por outro lado, vamos supor que  $m|b - a$ . Pela divisão euclidiana, temos:

$$a = mq + r, \text{ com } 0 \leq r < m$$

$$b = mq' + r', \text{ com } 0 \leq r' < m.$$

Calculando  $b - a$ :

$$b - a = m(q' - q) + r' - r. \quad (1.1)$$

Analisando o número  $r' - r$ . Sabemos que,

$$0 \leq r' < m \Rightarrow -r \leq r' - r < m - r.$$

Como  $-m < -r$ , pois  $0 \leq r < m$  e  $m - r < m$  temos

$$-m < -r \leq r' - r < m - r < m \Rightarrow -m < r' - r < m.$$

Mas  $m|b - a$  e pela equação (1.1) segue que  $m|r' - r$ , isto é,  $r' - r$  é um múltiplo de  $m$ . Usando a desigualdade anterior resulta,

$$r' - r = 0 \Rightarrow r' = r.$$

Portanto,  $a \equiv b \pmod{m}$ . □

### 1.3 Função piso e função teto

As funções piso e teto são ferramentas essenciais em problemas discretos, especialmente em contextos que envolvem arredondamento e divisão inteira. Elas mapeiam números reais para o maior inteiro menor ou igual a  $x$  e o menor inteiro maior ou igual a  $x$ , respectivamente, e estão intimamente ligadas à divisão euclidiana. Com foco em resultados que serão aplicados diretamente à análise do posicionamento de cartas, tema central deste trabalho, nesta seção, apresentamos suas definições, propriedades básicas, para mais detalhes ver Seção 3.1, pág. 67-70 de [GRAHAM, KNUTH e PATASHNIK 1994].

**Definição 1.3.1.** *A função piso denotada por  $\lfloor x \rfloor$  retorna o maior número inteiro menor ou igual a  $x$ .*

**Exemplo 1.3.2.** Dado  $x = 3,74$ , temos que o maior número inteiro que é menor ou igual a  $3,74$  é  $3$ , assim,  $\lfloor 3,74 \rfloor = 3$ .

**Definição 1.3.3.** A função teto denotada por  $\lceil x \rceil$  retorna o menor número inteiro maior ou igual a  $x$ .

**Exemplo 1.3.4.** Dado  $x = 3,74$ , temos que o menor número inteiro que é maior ou igual a  $3,74$  é  $4$ , assim,  $\lceil 3,74 \rceil = 4$ .

**Proposição 1.3.5.** Para qualquer número real  $x$ , a relação entre as funções piso e teto pode ser expressa como:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

*Demonstração.* Vamos separar em casos:

Caso 1: se  $x$  é inteiro ( $x \in \mathbb{Z}$ ),  $\lceil x \rceil = x$  e  $\lfloor x \rfloor = x$  e portanto,  $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ .

Caso 2: se  $x$  não é um número inteiro ( $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ), suponha que  $x = n + u$ , onde  $n$  é um número inteiro e  $0 < u < 1$ . Assim,  $\lceil x \rceil = n + 1$  é o menor inteiro maior que  $x$  e  $\lfloor x \rfloor = n$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Portanto,  $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ .  $\square$

Vamos enunciar um resultado importante para o desenvolvimento do estudo das posições das cartas. O próximo resultado relaciona a função piso e função teto.

**Proposição 1.3.6.** Para quaisquer inteiros positivos  $a$  e  $b$ , vale a identidade:

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a + b - 1}{b} \right\rfloor. \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Pela Teorema 1.2.4 (Divisão euclidiana), temos:

$$a = bq + r, \quad \text{onde } 0 \leq r < b.$$

Vamos desenvolver a prova através da análise em dois casos baseado no resto da divisão euclidiana.

Caso 1 - Divisão exata ( $r = 0$ ).

Para o lado esquerdo da equação:

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \lceil q \rceil = q.$$

Para o lado direito:

$$\left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{b-1}{b} \right\rfloor.$$

Como  $\frac{(b-1)}{b} < 1$ , temos

$$\left\lfloor q + \frac{b-1}{b} \right\rfloor = q.$$

Caso 2 - Resto não nulo ( $r > 0$ ).

Pela divisão euclidiana,  $r$  é inteiro e  $0 \leq r < b$ , se  $r \neq 0$ , então

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r}{b} \right\rceil.$$

Como  $r \neq 0$ , então  $1 \leq r < b$ , logo  $\frac{1}{b} \leq \frac{r}{b} < 1$ . Assim,

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = q + 1.$$

Para o lado direito:

$$\left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r+b-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor q + 1 + \frac{r-1}{b} \right\rfloor.$$

Como  $1 \leq r < b$ , então  $0 \leq r-1 < b-1$  e daí  $0 \leq \frac{r-1}{b} < \frac{b-1}{b} < 1$ , logo

$$\left\lfloor q + 1 + \frac{r-1}{b} \right\rfloor = q + 1.$$

Deste modo, para ambos os casos a igualdade é verdadeira, ou seja,

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor.$$

□

**Exemplo 1.3.7.** Se  $a = 8$  e  $b = 3$  então:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil &= 3 \\ \left\lfloor \frac{8+3-1}{3} \right\rfloor &= \lfloor 3 \rfloor = 3. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.8.** Se  $a = 19$ ,  $b = 4$ , então:

$$\left\lceil \frac{19}{4} \right\rceil = \lceil 4.75 \rceil = 5$$
$$\left\lfloor \frac{19 + 4 - 1}{4} \right\rfloor = \lfloor 5.5 \rfloor = 5.$$

## 1.4 Funções exponenciais e logarítmicas

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais das funções exponenciais, funções inversas e funções logarítmicas. Essas funções são amplamente utilizadas em diversas áreas da matemática e das ciências aplicadas, sendo essenciais para a modelagem de fenômenos que envolvem crescimento, decaimento e relações inversas, foi usada como referência [LIMA 2013].

### 1.4.1 Função exponencial

A função exponencial é uma das funções mais importantes da matemática, com aplicações por exemplo em biologia e economia. Sua definição e propriedades são fundamentais para o entendimento de fenômenos que envolvem crescimento ou decaimento exponencial.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $a$  um número real positivo e diferente de 1. Chama-se função exponencial na base  $a$ , a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $f(x) = a^x$ .*

**Proposição 1.4.2.** *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ , a função exponencial de base  $a$ ,  $f(x) = a^x$  tem as seguintes propriedades:*

- i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;*
- ii)  $a^1 = 1$ ;*
- iii)  $f$  é uma função crescente se e somente se  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$ ;*
- iv)  $f$  é uma função decrescente se e somente se  $x < y \Rightarrow a^y < a^x$  quando  $0 < a < 1$ ;*
- v) a função exponencial é ilimitada superiormente;*
- vi) a função exponencial é contínua.*
- vii) A função exponencial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a \neq 1$ , é sobrejetiva.*

Algumas propriedades das funções exponenciais que seguem:

- **Propriedade da potência:**

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Pela definição de exponencial,  $a^{x+y}$  é o número que resulta da multiplicação de  $a$  por si mesmo  $x + y$  vezes. Isso é equivalente a multiplicar  $a^x$  (que é  $a$  multiplicado  $x$  vezes) por  $a^y$  (que é  $a$  multiplicado  $y$  vezes).

- **Propriedade do expoente negativo:**

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Decorre diretamente da definição de exponencial, pois  $a^x \cdot a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ .

- **Propriedade do expoente fracionário:**

$$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Segue da definição de raiz e da propriedade da potência.

**Teorema de caracterização:** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é exponencial se, e somente se, satisfaz  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  e é monótona. Ver teorema 8.3 de [LIMA 2013].

## 1.4.2 Função inversa

A função inversa é um conceito fundamental que nos permite “desfazer” a ação de uma função bijetora. No contexto das funções exponenciais e logarítmicas, a função inversa é essencial para definir a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

**Definição 1.4.3.** Dada uma função bijetora  $f : X \rightarrow Y$ , a função inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  é definida por:

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

### Propriedades da função inversa

- **Relação com a função original:**

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

- **Gráfico da função inversa:** O gráfico de  $f^{-1}$  é a reflexão do gráfico de  $f$  em relação à reta  $y = x$ .

- **Monotonicidade:**

- Se  $f$  é crescente, então  $f^{-1}$  também é crescente.
- Se  $f$  é decrescente, então  $f^{-1}$  também é decrescente.

### Exemplo de função inversa

A função exponencial  $f(x) = a^x$  é bijetora, portanto, possui inversa, que é a função logarítmica  $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ .

### 1.4.3 Função logarítmica

A função logarítmica é definida como a inversa da função exponencial e é amplamente utilizada para resolver equações exponenciais e modelar fenômenos que envolvem crescimento ou decaimento. A base para este conteúdo pode ser encontrada em [STEWART 2013] e [LIMA 2013].

**Definição 1.4.4.** *Seja  $a$  um número real positivo e diferente de 1. A função logarítmica de base  $a$ ,  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida como a inversa da função exponencial:*

$$y = \log_a(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad a^y = x.$$

### Propriedades da função logarítmica

- **Propriedade do produto:**

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

**Demonstração:** Seja  $u = \log_a(x)$  e  $v = \log_a(y)$ . Então,  $a^u = x$  e  $a^v = y$ . Multiplicando  $x$  e  $y$ , temos  $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ . Portanto,  $\log_a(xy) = u + v = \log_a(x) + \log_a(y)$ .

- **Propriedade do quociente:**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

**Demonstração:** Similar à propriedade do produto, usando divisão em vez de multiplicação.

- **Propriedade da potência:**

$$\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x).$$

**Demonstração:** Seja  $\log_a(x) = m$ . Então,  $a^m = x$ . Elevando ambos os lados à potência  $k$ , temos  $(a^m)^k = x^k$ , ou seja,  $a^{mk} = x^k$ . Portanto,  $\log_a(x^k) = mk = k \cdot \log_a(x)$ .

- **Mudança de base:**

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

**Demonstração:** Seja  $y = \log_a(x)$ . Então,  $a^y = x$ . Aplicando  $\log_b$  em ambos os lados, temos  $\log_b(a^y) = \log_b(x)$ . Pela propriedade da potência,  $y \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$ . Portanto,  $y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ .

## 1.5 Elementos básicos de matrizes

As matrizes são estruturas matemáticas fundamentais para organizar e manipular dados multidimensionais, com aplicações que abrangem desde a resolução de sistemas lineares até a modelagem de transformações geométricas. Nesta seção, baseada nas obras de [ANTON H.; RORRES 2012] e [BOLDRINI 1986], apresentamos definições, operações básicas e resultados teóricos essenciais.

### 1.5.1 Definições

**Definição 1.5.1.** Uma **matriz**  $A$  com entradas reais de ordem  $m \times n$ , é uma tabela disposta em  $m$  linhas e  $n$  colunas. Escrevemos  $[a_{ij}]_{m \times n}$ , onde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , com  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  agrupados em  $m$  linhas e  $n$  colunas, e será representada como:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  corresponde ao elemento na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

**Exemplo 1.5.2.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  com elementos reais dispostos em 2 linhas e 3 colunas.

As matrizes podem ser classificadas de acordo com a ordem e a disposição dos seus elementos. A seguir, definimos formalmente cada tipo, acompanhados de notação matemática e exemplos.

**Definição 1.5.3.** Uma matriz  $A$  é denominada *matriz linha* se possuir apenas uma linha, ou seja, é de ordem  $1 \times n$ . Formalmente:

$$A = [a_{1j}]_{1 \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.5.4.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 12 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ , é uma matriz linha.

**Definição 1.5.5.** Uma matriz  $A$  é chamada *matriz coluna* se possuir apenas uma coluna, ou seja, é de ordem  $m \times 1$ . Formalmente:

$$A = [a_{i1}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.5.6.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$  é uma matriz coluna.

**Definição 1.5.7.** Uma matriz  $A$  é *quadrada* se o número de linhas  $m$  for igual ao número de colunas  $n$ , ou seja,  $m = n$ . Neste caso, diz-se que  $A$  é de ordem  $n$ . Formalmente:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad \text{onde } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Definição 1.5.8.** Em uma matriz quadrada os elementos  $a_{ii}$  da  $i$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna, com  $i = 1, \dots, n$  formam a *diagonal principal* da matriz.

**Exemplo 1.5.9.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -9 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  é uma matriz quadrada de ordem 3.

**Definição 1.5.10.** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  é uma matriz diagonal se todos os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

**Exemplo 1.5.11.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  é uma matriz diagonal de ordem 3.

**Definição 1.5.12.** A matriz identidade  $I_n$  é uma matriz diagonal de ordem  $n \times n$  em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1:

$$I_n = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad \text{onde } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

**Exemplo 1.5.13.** A matriz  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  é a matriz identidade de ordem 3.

:

**Definição 1.5.14.** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  é triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j.$$

**Exemplo 1.5.15.**  $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  é uma matriz triangular superior.

**Definição 1.5.16.** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  é triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal são nulos:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i < j.$$

**Exemplo 1.5.17.**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  é uma matriz triangular inferior.

**Definição 1.5.18.** A matriz nula  $0_{m \times n}$  é uma matriz de ordem  $m \times n$  em que todos os elementos são iguais a zero:

$$0_{m \times n} = [0]_{m \times n}.$$

**Exemplo 1.5.19.** Uma matriz nula de ordem 2, é da forma  $0_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Definição 1.5.20.** Se  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , definimos a matriz oposta de  $A$ , como sendo a matriz  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

**Exemplo 1.5.21.** Se  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ , então  $-A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$  é a oposta de  $A$ .

**Definição 1.5.22.** Dada a matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , podemos obter uma outra matriz  $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ , cujas linhas são colunas de  $A$ , isto é,  $b_{ij} = a_{ji}$ .  $A^T$  é denominada transposta de  $A$ .

$$\text{Se } A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ então, } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.5.23.** Se  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ , então a matriz transposta de  $A$  é  $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ .

**Definição 1.5.24.** Duas matrizes  $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$  são iguais,  $A = B$ , se elas têm o mesmo número de linhas ( $m = r$ ) e colunas ( $n = s$ ), e todos os seus elementos correspondentes são iguais ( $a_{ij} = b_{ij}$ ).

**Definição 1.5.25.** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  é simétrica se é igual à sua transposta:

$$A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

**Exemplo 1.5.26.** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ , note que,  $A = A^T$ . Portanto,  $A$

é uma matriz simétrica.

**Definição 1.5.27.** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  é antissimétrica se sua transposta é igual à sua oposta:

$$A^T = -A \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j.$$

**Observação:** Os elementos da diagonal principal são necessariamente nulos ( $a_{ii} = 0$ ).

**Exemplo 1.5.28.** Dada  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , como  $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$ , então

$A$  é uma matriz antissimétrica.

## 1.5.2 Operações com matrizes

As operações matriciais são ferramentas essenciais para explorar as propriedades e relações entre matrizes. As operações básicas incluem adição, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes, cada uma com regras específicas quanto às dimensões envolvidas. Essas operações formam a base para aplicações em diversas áreas, como computação gráfica, engenharia e ciência de dados.

**Definição 1.5.29** (Adição). A soma de duas matrizes de mesma ordem,  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , é uma matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ , de ordem  $m \times n$ , que denotaremos por  $A + B$ , cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ . Isto é,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Assim

$$A+B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

**Propriedades:** Dadas as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  de mesma ordem  $m \times n$ , temos:

- i)  $A + B = B + A$  (comutatividade).
- ii)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (associatividade).

iii)  $A + 0 = A$ , onde 0 denota a matriz nula de ordem  $m \times n$ .

iv)  $A + (-A) = 0$ .

**Definição 1.5.30** (Multiplicação por escalar). *Se  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , podemos definir o produto de  $\lambda$  por  $A$  como sendo a matriz  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  tal que,  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ , isto é*

$$B = \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

**Propriedades:** Dadas as matrizes  $A$  e  $B$  de mesma ordem  $m \times n$ , e os números  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , temos:

i)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .

ii)  $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ .

iii)  $0 \cdot A = 0$ , isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz  $A$ , teremos a matriz nula.

iv)  $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A$ .

v)  $1 \cdot A = A$ .

**Definição 1.5.31** (Multiplicação de Matrizes). *Sejam  $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B_{n \times p} = [b_{ij}]_{n \times p}$ , isto é, com o número de colunas de  $A$  igual ao número de linhas de  $B$ . Podemos definir o produto de  $A$  por  $B$  como sendo a matriz  $C_{m \times p} = (AB)_{m \times p} = [c_{ij}]_{m \times p}$ , onde*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

**Exemplo 1.5.32.** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ , então

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & 12 & -12 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

**Propriedades:** Desde que seja possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

*i)* Em geral  $AB \neq BA$  (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

*ii)*  $AI = IA = A$ .

*iii)*  $A(B + C) = AB + AC$  (*Distributividade à esquerda da multiplicação, em relação a soma*).

*iv)*  $(A + B)C = AC + BC$  (*Distributividade à direita da multiplicação, em relação a soma*).

*v)*  $(AB)C = A(BC)$  (*associatividade*).

*vi)*  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

*vii)*  $0 \cdot A = 0 \cdot A = 0$ .

---

# O jogo dos três montes

---

O jogo dos três montes é um clássico truque de cartas que, além de entreter, esconde uma fascinante estrutura matemática por trás de sua execução. Neste capítulo, vamos inicialmente explicar o funcionamento do jogo, e depois exploraremos a análise matemática desse jogo, demonstrando como a posição de uma carta escolhida pode ser determinada através de iterações sucessivas, utilizando conceitos como funções, composição de funções, função piso, função teto, congruência e logaritmos.

A partir de uma abordagem formal, veremos como a incerteza sobre a localização da carta é reduzida a cada etapa, até que, após três iterações, a carta escolhida é inevitavelmente levada para a posição central do baralho. Além disso, generalizaremos o problema para diferentes quantidades de cartas, estabelecendo uma relação entre o número de cartas e o número mínimo de iterações necessárias para identificar a carta escolhida.

Por fim, proporemos uma atividade prática para fixar os conceitos de logaritmos e suas propriedades, aplicando-os ao contexto do jogo. Este capítulo não apenas desvenda a matemática por trás de um truque aparentemente simples, mas também ilustra como a teoria matemática pode ser aplicada de maneira lúdica e envolvente.

## 2.1 Descrição do jogo

O jogo dos três montes é um truque de cartas intrigante que envolve 21 cartas dispostas em 3 colunas. Esse jogo é jogado por duas pessoas, a primeira será o mágico e a segunda a participante. Ao final do jogo o mágico deverá adivinhar a carta escolhida pela participante no início do jogo. A seguir, descrevemos detalhadamente o procedimento do jogo:

### 1. Preparação inicial

O mágico começa distribuindo as 21 cartas uma a uma, colocando uma carta na coluna 1, depois uma carta na coluna 2, e em seguida uma na coluna 3. Esse processo é repetido até que todas as cartas tenham sido distribuídas entre as três colunas, conforme a Figura 2.1.

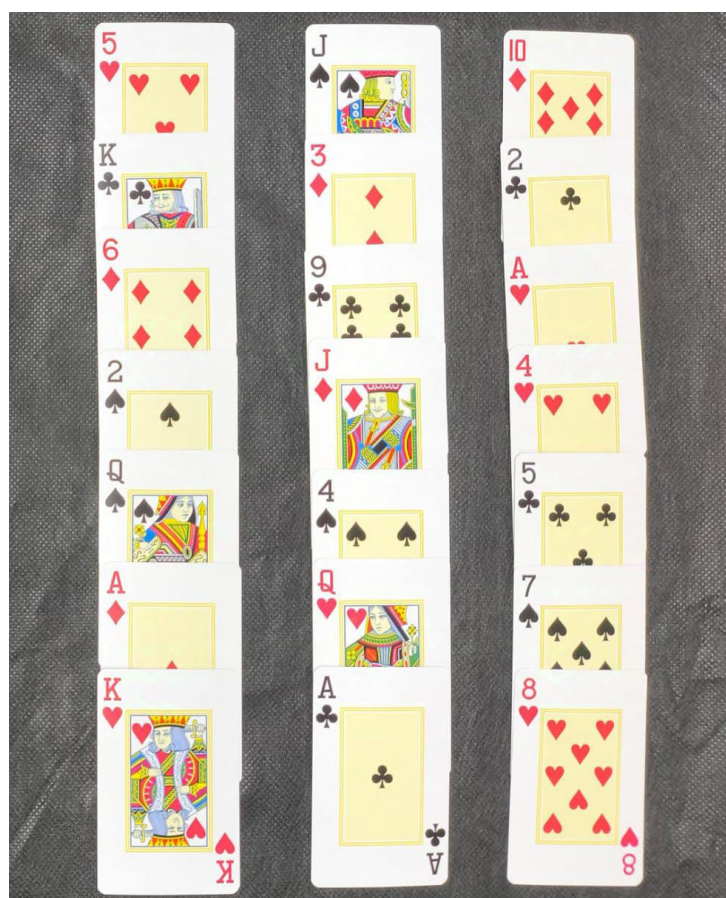


Figura 2.1: Distribuição das cartas na mesa. Fonte: Autor.

### 2. Escolha da carta

O mágico solicita a participante que escolha uma carta, sem mencioná-la ou apontá-la diretamente. E em seguida pede a participante indicar em qual dos três montes a carta escolhida está localizada. Supondo que a participante tenha escolhido a coluna 3, como pode ser visto na Figura 2.2.

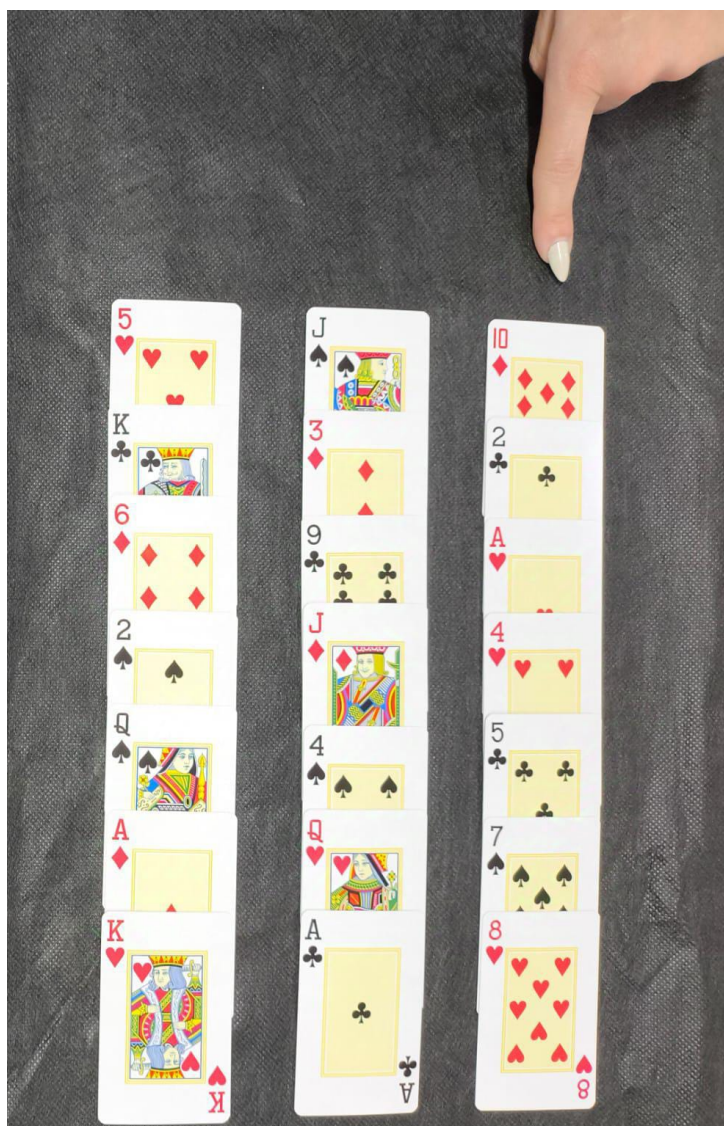
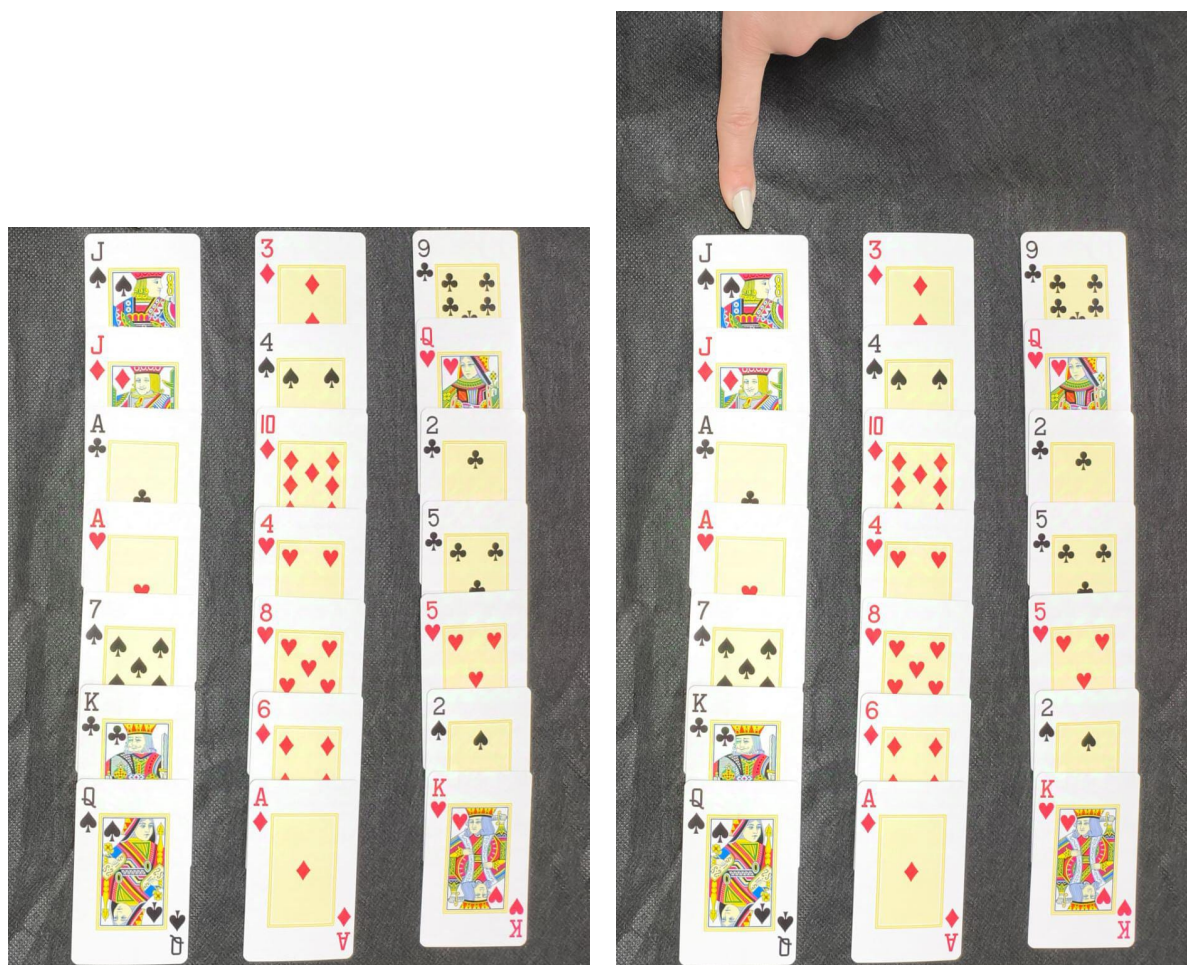


Figura 2.2: Participante apontando a coluna. Fonte: Autor.

### 3. Primeira redistribuição das cartas

Após a participante informar a coluna, o mágico coleta as cartas das três colunas, colocando a coluna escolhida pela participante entre as outras duas. O mágico então redistribui as 21 cartas, uma a uma, começando pela coluna 1, depois pela coluna 2, e finalmente pela coluna 3, repetindo o processo até que todas as cartas sejam redistribuídas, conforme Figura 2.3(a), depois pede para que a participante aponte a coluna em que a sua carta escolhida esta agora (Figura 2.3(b)).

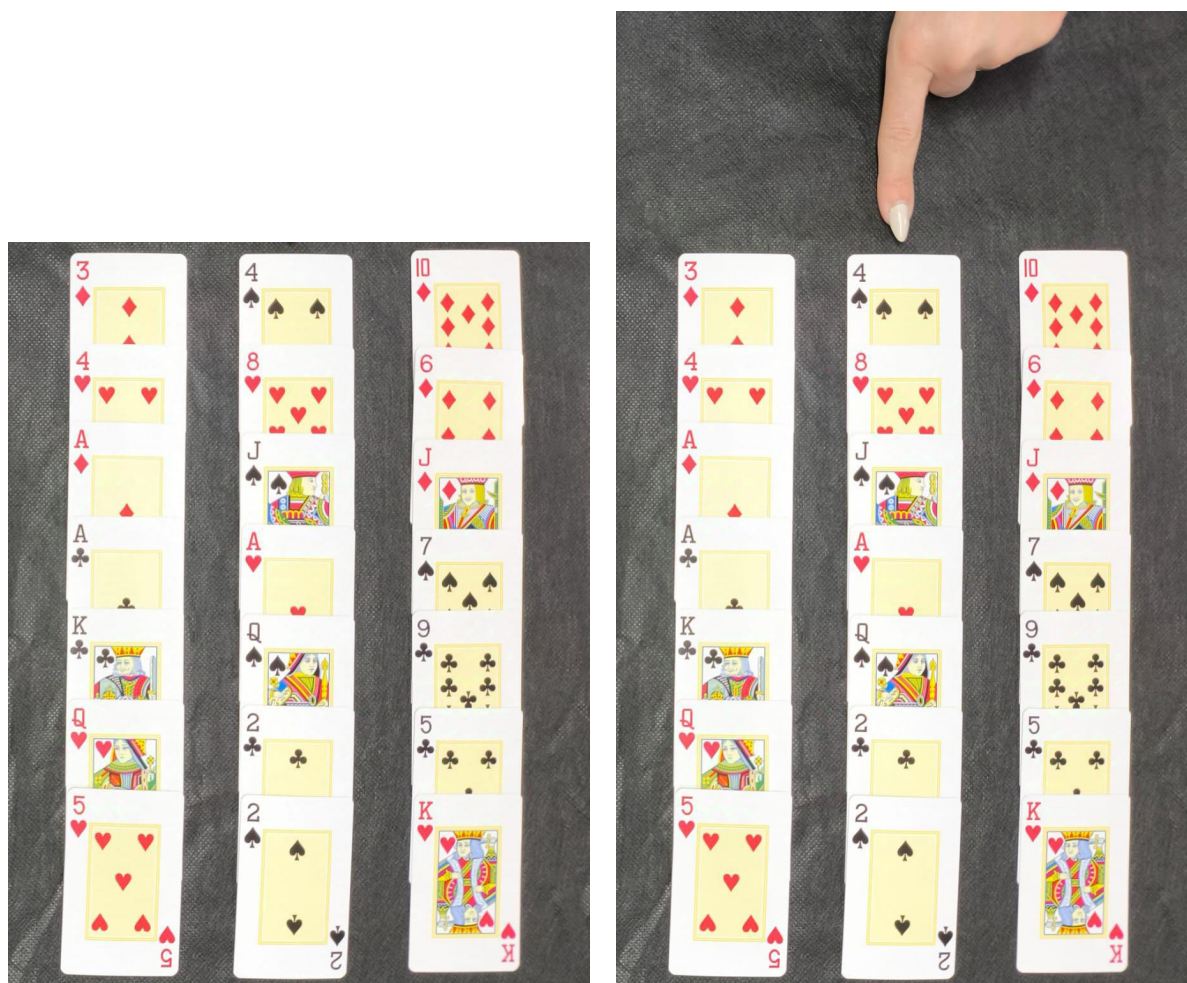


(a) Segunda distribuição das cartas na mesa.

(b) Participante apontando a primeira coluna.

Figura 2.3: Execução da segunda parte da terceira etapa. Fonte: Autor.

O mágico repete essa etapa pela última vez, colocando a coluna escolhida entre as outras duas, formando um monte completo com as 21 cartas, e assim irá distribuir as cartas do mesmo modo anterior (Figura 2.4(a)), e após essa última distribuição de cartas na mesa, solicita que a participante indique apontando em qual coluna está a carta por ela escolhida, neste caso foi indicada a coluna 2 (Figura 2.4(b)).



(a) Terceira distribuição das cartas na mesa.

(b) Participante apontando a segunda coluna.

Figura 2.4: Execução da terceira parte da terceira etapa. Fonte: Autor.

#### 4. Revelação da carta

Após essas três iterações, a carta escolhida pela participante será a carta que está na posição 11 do monte final. Este truque destaca a habilidade do mágico em manipular a ordem das cartas com destreza, utilizando um processo sistemático de redistribuição. No entanto, é a aplicação dos princípios matemáticos que realmente garante o sucesso do truque, garantindo que a carta escolhida termine sempre na posição central, como pode ser observado na Figura 2.5.

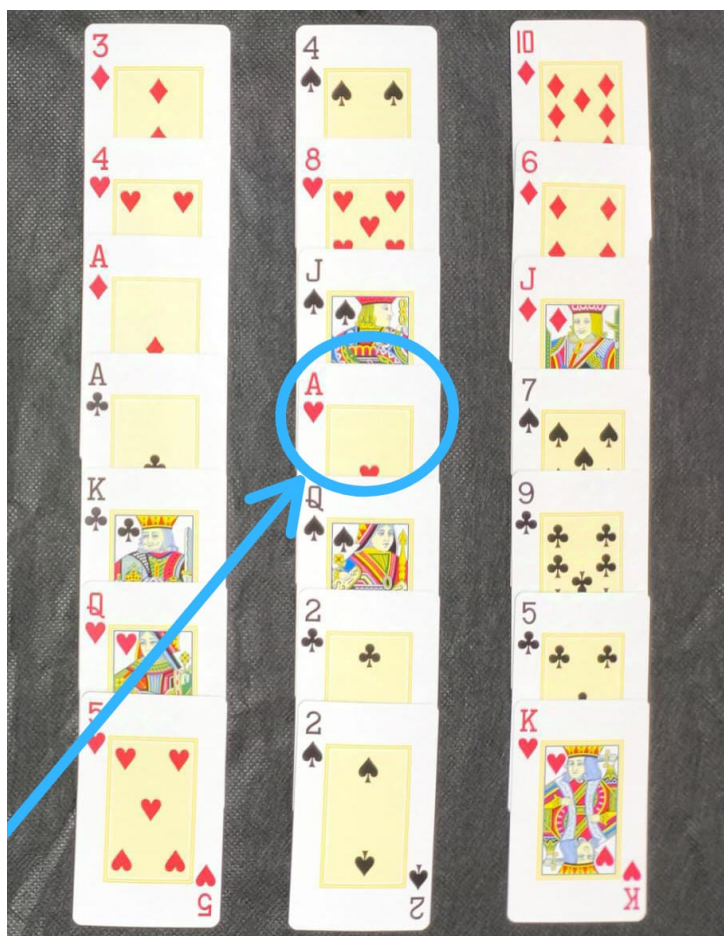


Figura 2.5: Carta escolhida após três rodadas. Fonte: Autor.

**Exemplo 2.1.1.** Vamos mostrar aqui com tabelas o movimento das cartas. Os números de 1 a 21 indicam as posições de cada uma das cartas na primeira distribuição.

Passo 1: O mágico distribui as cartas na mesa conforme a Tabela 2.1:

Tabela 2.1: Posição das cartas na primeira distribuição.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

Fonte: Autor.

Supondo que a participante escolha a carta 9. Nesse caso ele dirá que a carta escolhida está na terceira coluna.

O mágico junta as cartas de cada fileira, formando 3 montes:

Monte 1: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19

Monte 2: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Monte 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21

Coloca então o monte referente a terceira coluna no meio dos 2 montes formando um monte com 21 cartas, as cartas agora estão dispostas da forma:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Passo 2: o mágico irá distribuir as cartas uma a uma formando três colunas com 7 cartas cada um conforme a tabela a seguir (Tabela 2.2):

Tabela 2.2: Posição das cartas na segunda distribuição.

1	4	7
10	13	16
19	3	6
9	12	15
18	21	2
5	8	11
14	17	20

Fonte: Autor.

É perguntado a participante em qual coluna da Tabela 2.2 está a carta escolhida. A participante responderá: na primeira. Assim, o mágico irá juntar as cartas de cada fileira formando três montes:

Monte 1: 1, 10, 19, 9, 18, 5, 14

Monte 2: 4, 13, 3, 12, 21, 8, 17

Monte 3: 7, 16, 6, 15, 2, 11, 20

E irá colocar o monte 1, referente a primeira coluna no meio dos outros dois montes,

formando assim um monte completo de 21 cartas na seguinte ordem:

4, 13, 3, 12, 21, 8, 17, 1, 10, 19, 9, 18, 5, 14, 7, 16, 6, 15, 2, 11, 20

Passo 3: O mágico irá distribuir novamente as cartas uma a uma formando três colunas com 7 cartas cada uma conforme a Tabela 2.3:

Tabela 2.3: Posição das cartas na terceira distribuição.

4	13	3
12	21	8
17	1	10
19	9	18
5	14	7
16	6	15
2	11	20

Fonte: Autor.

É perguntado a participante novamente em qual coluna da Tabela 2.3 está a sua carta. A participante responderá: na segunda coluna. Assim, o mágico irá juntar as cartas de cada coluna formando três montes:

Monte 1: 4, 12, 17, 19, 5, 16, 2

Monte 2: 13, 21, 1, 9, 14, 6, 11

Monte 3: 3, 8, 10, 18, 7, 15, 20

Na qual irá inserir o monte 2, referente a segunda fileira, no meio dos outros dois montes, formando assim um monte completo de 21 cartas na seguinte ordem:

4, 12, 17, 19, 5, 16, 2, 13, 21, 1, 9, 14, 6, 11, 3, 8, 10, 18, 7, 15, 20

O mágico finaliza a mágica apontando que a carta escolhida será 11<sup>a</sup> carta, que pode ser contado tanto na ordem crescente como na ordem decrescente do monte de cartas, e neste caso, a 11<sup>a</sup> carta será, a carta que estava na primeira distribuição na posição número 9.

## 2.2 Análise matemática do jogo dos três montes

Por que o jogo (mágica) funciona? Porque todas as posições das cartas, após três iterações, irão terminar na posição 11. Para demonstrar este resultado, apresentaremos três métodos complementares de análise, a primeira abordagem utilizará funções compostas, permitindo-nos acompanhar o movimento das cartas a cada iteração, a segunda demonstração empregará a função maior inteiro e congruências, oferecendo uma perspectiva algébrica do comportamento das cartas e por fim, uma análise através de logaritmos nos permitirá generalizar o problema, estabelecendo uma relação entre o número de cartas e as iterações necessárias. Cada método oferece uma perspectiva única sobre o funcionamento do jogo, revelando diferentes aspectos da estrutura matemática subjacente que garante seu funcionamento.

### 2.2.1 Usando função composta

Nesta subseção vamos analisar matematicamente o porquê é possível descobrir a carta escolhida pelo participante após três iterações, usando para tal a composição de uma função que irá mapear a posição da carta escolhida e tabelas. Para tanto, iremos determinar uma função que relaciona a posição da carta com a posição que assumirá após a redistribuição das cartas. Para isso, conhecendo a posição da carta devemos encontrar a coluna e a linha que essa carta pertence. Como as cartas estão distribuídas de 3 em 3, se  $p'$  indica uma posição na tabela, dividindo  $p'$  por 3 pelo algoritmo da divisão existem únicos  $q'$  e  $r'$  tais que:

$$p' = 3q' + r' \tag{2.1}$$

com  $q' \in \mathbb{Z}_+$  indicando a linha que  $p'$  pertence e  $r' = 0, 1, 2$  indicando a coluna. Neste caso, a linha 0 e a coluna 0 indicam a primeira posição na tabela. Como a tabela possui 7 linhas e 3 colunas, teremos  $q' = 0, 1, \dots, 6$  e  $r' = 0, 1, 2$ , conseqüentemente,  $p' = 0, 1, \dots, 20$ . Para fins didáticos, é mais interessante enumerar as linhas de 1 a 7 e as colunas 1 a 3, conseqüentemente as posições de 1 a 21. Assim, sejam  $k = 1, 2, \dots, 7$ ,  $c = 1, 2, 3$  e  $p = 1, 2, \dots, 21$ , podemos fazer a seguinte identificação  $p = p' + 1$ ,  $k = q' + 1$  e  $c = r' + 1$ . Substituindo  $p'$ ,  $q'$  e  $r'$  em (2.1), temos  $p - 1 = 3(k - 1) + c - 1$  daí  $p = 3(k - 1) + c$ . Portanto, para cada posição  $p = 1, 2, \dots, 21$ , existem únicos  $k = 1, 2, \dots, 7$  e  $c = 1, 2, 3$ , onde  $p = 3(k - 1) + c$ ,  $k$  representa a linha e  $c$  representa a coluna que a carta na posição

$p$  ocupa.

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $p$  uma posição na coluna  $c \in \{1, 2, 3\}$  escolhida e a função  $f : \{1, 2, \dots, 21\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 21\}$ , definida por  $f(p) = k + 7$ , onde  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) é o único natural tal que  $p = 3(k - 1) + c$ . Após três iterações a carta em uma posição  $p$  qualquer terminará na posição 11.*

*Demonstração.* Consideramos um conjunto de 21 posições organizadas em três colunas, cada uma com sete linhas. As posições são numeradas de 1 a 21, e cada posição  $p$  pode ser representada como:  $p = 3(k - 1) + c$ , onde  $k$  representa a linha e varia de 1 a 7, e  $c$  é a coluna e varia de 1 a 3.

Na primeira iteração, aplicamos a função  $f$ :

$$f(p) = k + 7$$

Para  $k = 1$ :  $f(1) = f(2) = f(3) = 8$ , ou seja, as cartas das posições 1, 2 e 3 são levadas à posição 8. Para  $k = 2$ :  $f(4) = f(5) = f(6) = 9$ , isto é, as cartas das posições 4, 5 e 6 são levadas para a posição 9.

Para  $k = 3$ :  $f(7) = f(8) = f(9) = 10$ , Para  $k = 4$ :  $f(10) = f(11) = f(12) = 11$ , Para  $k = 5$ :  $f(13) = f(14) = f(15) = 12$ , Para  $k = 6$ :  $f(16) = f(17) = f(18) = 13$ , Para  $k = 7$ :  $f(19) = f(20) = f(21) = 14$ , ou seja, as cartas das posições 19, 20 e 21 são levadas pela função  $f$  à posição 14.

Podemos ver a representação do comportamento de cada uma das cartas sendo deslocadas para cada posição de acordo com suas cores, que refere-se a cada linha  $k$  na qual pertence, conforme a Figura 2.6.

1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9
10	11	12	10	11	12
13	14	15	13	14	15
16	17	18	16	17	18
19	20	21	19	20	21

Figura 2.6: Posição das cartas após a primeira iteração. Fonte: Autor.

Na segunda iteração, aplicamos  $f$  sobre as posições obtidas da primeira iteração:

Para  $k = 1$ : As posições resultantes da primeira iteração que foram levadas para a posição 8 são levadas para a posição 10, ou seja,  $f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3)) = f(8) = 10$ , isto é,  $(f \circ f)(1) = (f \circ f)(2) = (f \circ f)(3) = f(8) = 10$ .

Para  $k = 2$ : As posições que, na primeira iteração, foram levadas para a posição 9 são, na segunda iteração, levadas para a posição 10, ou seja,  $f(f(4)) = f(f(5)) = f(f(6)) = f(9) = 10$ , isto é,  $(f \circ f)(4) = (f \circ f)(5) = (f \circ f)(6) = f(9) = 10$ .

De modo análogo,

para  $k = 3$ , temos  $(f \circ f)(7) = (f \circ f)(8) = (f \circ f)(9) = f(10) = 11$ ;

para  $k = 4$ , temos  $(f \circ f)(10) = (f \circ f)(11) = (f \circ f)(12) = f(11) = 11$ ;

para  $k = 5$ , temos  $(f \circ f)(13) = (f \circ f)(14) = (f \circ f)(15) = f(12) = 11$ ;

para  $k = 6$ , temos  $(f \circ f)(16) = (f \circ f)(17) = (f \circ f)(18) = f(13) = 12$ ;

e para  $k = 7$ , temos  $(f \circ f)(19) = (f \circ f)(20) = (f \circ f)(21) = f(14) = 12$ .

Podemos ver a representação após a segunda iteração do comportamento de cada uma das cartas sendo deslocadas para cada posição de acordo com suas cores, que refere-se a cada linha  $k$  na qual pertence, conforme a Figura 2.7.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

Figura 2.7: Posição das cartas após a segunda iteração. Fonte: Autor.

Na terceira iteração, aplicamos  $f$  novamente: Para  $k = 1$ , as posições resultantes da segunda iteração que resultaram na posição 10 são levadas para a posição 11, ou seja,  $(f \circ f \circ f)(1) = (f \circ f \circ f)(2) = (f \circ f \circ f)(3) = f(10) = 11$ .

Analogamente,

para  $k = 2$ , temos  $(f \circ f \circ f)(4) = (f \circ f \circ f)(5) = (f \circ f \circ f)(6) = f(10) = 11$ ;

para  $k = 3$ , temos  $(f \circ f \circ f)(7) = (f \circ f \circ f)(8) = (f \circ f \circ f)(9) = f(11) = 11$ ;

para  $k = 4$ , temos  $(f \circ f \circ f)(10) = (f \circ f \circ f)(11) = (f \circ f \circ f)(12) = f(11) = 11$ ;

para  $k = 5$ , temos  $(f \circ f \circ f)(13) = (f \circ f \circ f)(14) = (f \circ f \circ f)(15) = f(11) = 11$ ;

para  $k = 6$ , temos  $(f \circ f \circ f)(16) = (f \circ f \circ f)(17) = (f \circ f \circ f)(18) = f(12) = 11$ ;

e para para  $k = 7$ , temos  $(f \circ f \circ f)(19) = (f \circ f \circ f)(20) = (f \circ f \circ f)(21) = f(12) = 11$ .

Depois de realizar a terceira iteração, é possível representar comportamento de cada uma das cartas sendo deslocadas para cada posição de acordo com suas cores, que refere-se a cada linha  $k$  na qual pertence, conforme a Figura 2.8.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

Figura 2.8: Posição das cartas após a terceira iteração, Fonte: Autor.

Podemos concluir, que após três iterações da função  $f$ , todas as posições  $p$  são mapeadas para a posição 11. Isso ocorre devido à forma como a função reorganiza as posições em cada iteração, centralizando todas as cartas na posição 11 ao final do processo. Esta demonstração confirma a proposição de que  $(f \circ f \circ f)(p) = 11$  para qualquer posição inicial  $p$ .  $\square$

**Definição 2.2.2.** Considere uma função  $f : N \rightarrow N$ . Um ponto fixo de  $f$  é um ponto  $x \in N$  tal que  $f(x) = x$ .

**Proposição 2.2.3.** O ponto  $p = 11$  é um ponto fixo da função  $f : \{1, 2, \dots, 21\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 21\}$ , definida por  $f(p) = k + 7$ , onde  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) é o único natural tal que  $p = 3(k - 1) + c$ , com  $c \in \{1, 2, 3\}$ .

*Demonstração.* Note que a posição  $p = 11$  está na coluna 2 ( $c = 2$ ), como  $p = 3(k - 1) + c$ , temos  $11 = 3(k - 1) + 2$ , e assim,  $k = 4$ , portanto,  $f(11) = 4 + 7 = 11$ , pela Definição 2.2.2,  $p = 11$  é ponto fixo de  $f$ .  $\square$

outra iteração que for realizada mantém a carta na mesma posição. De fato, pela Proposição 2.2.1,  $(f \circ f \circ f)(p) = 11$ , ou seja, para qualquer que seja a posição inicial  $p$ , ao realizar 3 iterações essa carta inicial é levada para a posição 11, que pela proposição 2.2.3 é um ponto fixo de  $f$ . Deste modo, ao calcular a quarta iteração da função  $f$  em uma posição  $p$ , temos

$$(f \circ f \circ f \circ f)(p) = f((f \circ f \circ f)(p)) = f(11) = 11.$$

### 2.2.2 Usando a função piso e congruência

O jogo dos três montes é um intrigante quebra-cabeça que desafia os jogadores a reorganizar as cartas para atingir uma certa configuração específica. Nesta subseção, vamos explorar a matemática por trás desse jogo que pode ser modelada usando a função teto, a função piso e congruência módulo  $m$ , que nos permite prever o comportamento das cartas ao longo do jogo.

O jogo é composto por 21 cartas, espalhadas na mesa em 3 colunas contendo 7 cartas cada uma das colunas. Ao considerar que  $p$  representa uma carta escolhida dentre as 21 cartas possíveis, e usando a função teto iremos definir uma função que relaciona a posição da carta com a posição que irá assumir após a redistribuição das cartas.

**Definição 2.2.4.** *Seja a função  $f : \{1, 2, \dots, 21\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 21\}$ , definida por*

$$f(p) = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 7, \quad (2.2)$$

onde:

- $\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$  é o menor inteiro maior que  $\frac{p}{3}$ ;
- $p$  é a posição da carta;
- 7 é o quociente entre o número total de cartas e o número de colunas.

Usando a relação (1.2) da Proposição 1.3.6, podemos reescrever a equação (2.2) e a Definição 2.2.4 da seguinte forma:

**Definição 2.2.5.** *Seja a função  $f : \{1, 2, \dots, 21\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 21\}$ , definida por*

$$f(p) = \left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor + 7, \quad (2.3)$$

onde:

- $\left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor$  é o maior inteiro menor que  $\frac{p+2}{3}$ ;
- $p$  é a posição da carta;
- 7 é o quociente entre o número total de cartas e o número de colunas.

Precisamos agora de uma relação entre a função maior inteiro e congruência, segundo [GRAHAM, KNUTH e PATASHNIK 1994] Seção 3.3 (pág. 82), temos a equação  $x \bmod y = x - y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ , para  $y \neq 0$ , reescrevendo a equação obtemos:

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \frac{x - x \bmod y}{y}. \quad (2.4)$$

Tomando,  $x = p + 2$  e  $y = 3$  em (2.4) resulta:

$$\left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor = \frac{(p+2) - (p+2) \bmod 3}{3}. \quad (2.5)$$

Assim, substituindo (2.5) em (2.3), podemos reescrever a função  $f$  da forma:

$$f(p) = \left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor + 7 = \frac{(p+2) - (p+2) \bmod 3}{3} + 7. \quad (2.6)$$

Após a participante escolher uma carta, a coluna em que a carta escolhida está é colocada entre os outros dois montes, isto é, um monte será colocado acima e outro abaixo, ficando o escolhido no meio. A função  $f(p)$  (equação (2.6)) pega a posição desta carta escolhida dentre as opções de 1 a 21, e leva após uma iteração, para as posições de 8 a 14 (conforme segunda coluna da Tabela 2.4), reduzindo para 7 as possibilidades de cartas.

Depois de feito essa distribuição das cartas, novamente a pessoa irá dizer em que coluna está a carta em que ela havia escolhido, e com isso este monte será colocado novamente no meio dos outros dois montes, e espalhado novamente na mesa uma a uma. No entanto, as cartas após a primeira iteração, ou seja, após a aplicação da função  $f$  em (2.6), será novamente movida segundo a qual a função  $f$  irá distribuí-las, isto é, o resultado das posições das cartas após a segunda iteração, será a composição  $(f \circ f)(p)$ .

Vamos determinar a composta,

$$\begin{aligned} (f \circ f)(p) &= \left\lfloor \frac{f(p) + 2}{3} \right\rfloor + 7 \\ &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor + 7 + 2}{3} \right\rfloor + 7 \\ &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p+2}{3} \right\rfloor + 9}{3} \right\rfloor + 7. \end{aligned}$$

Escrevendo a função composta acima usando a equação (2.6), temos:

$$(f \circ f)(p) = \frac{\left( \frac{(p+2) - (p+2) \bmod 3}{3} + 9 \right) - \left( \frac{(p+2) - (p+2) \bmod 3}{3} + 9 \right) \bmod 3}{3} + 7. \quad (2.7)$$

Observe que ao aplicar a função composta  $f \circ f$  (equação (2.7)), nas cartas após a primeira iteração, e escolhida a coluna que a carta está nessa primeira iteração, a função composta levará as cartas da coluna escolhida para as posições de 10 a 12 (conforme terceira coluna da Tabela 2.4), reduzindo para 3 o número de possibilidades de acertarmos a carta escolhida.

Por fim, ao realizar a terceira iteração, ou seja, aplicar a função  $f$  para as cartas após duas iterações, isto é, a  $f$  da composta  $f((f \circ f)(p)) = (f \circ f \circ f)(p)$ .

Calculando essa função, temos:

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(p) &= f((f \circ f)(p)) \\ &= \left\lfloor \frac{(f \circ f)(p) + 2}{3} \right\rfloor + 7 \\ &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 9}{3} \right\rfloor + 9}{3} \right\rfloor + 7. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação de  $(f \circ f \circ f)(p)$  usando a equação (2.6), temos:

$$(f \circ f \circ f)(p) = \frac{((f \circ f)(p) + 2) - ((f \circ f)(p) + 2) \bmod 3}{3} + 7, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$(f \circ f \circ f)(p) = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} [A - B] + 9 \right) - \left( \frac{1}{3} [A - B] + 9 \right) \bmod 3 \right] + 7, \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(p + 2) - (p + 2) \bmod 3}{3} + 9 \\ B &= \left( \frac{(p + 2) - (p + 2) \bmod 3}{3} + 9 \right) \bmod 3. \end{aligned}$$

Note que, ao calcular a composta  $f \circ f \circ f$  (equação (2.9)), nas 3 opções restantes 10, 11 e 12, a carta escolhida estará agora na posição 11.

Tabela 2.4: Posições das cartas após as iterações.

Posição inicial da carta $p$	Posição da carta após a 1ª iteração $f(p)$	Posição da carta após a 2ª iteração $(f \circ f)(p)$	Posição da carta após a 3ª iteração $(f \circ f \circ f)(p)$
1	8	10	11
2	8	10	11
3	8	10	11
4	9	10	11
5	9	10	11
6	9	10	11
7	10	11	11
8	10	11	11
9	10	11	11
10	11	11	11
11	11	11	11
12	11	11	11
13	12	11	11
14	12	11	11
15	12	11	11
16	13	12	11
17	13	12	11
18	13	12	11
19	14	12	11
20	14	12	11
21	14	12	11

Fonte: Autor.

Podemos concluir que independentemente da posição inicial da carta  $p$  escolhida dentre as opções de 1 a 21, após 3 iterações, ou seja, compondo a função  $f$  três vezes, todas as cartas de qualquer posição serão levadas para o centro do baralho, isto é, para a posição 11, conforme podemos observar na Tabela 2.4 quarta coluna.

### 2.2.3 Usando logaritmos

Muitos jogos têm a matemática por trás do comportamento de como as cartas são distribuídas, sobre a posição após algum processo recursivo, entre outros. O jogo dos três montes, no qual sabemos que para 21 cartas são necessárias 3 iterações conforme já demonstrado na subseção 2.2.1, usando função composta, subseção 2.2.2, usando a função piso, levanta uma questão interessante: seria possível determinar o número de iterações para outras quantidades de cartas?

A análise da redução da incerteza nos permite compreender melhor o funcionamento deste jogo, conforme apresentado pelo projeto Matemática Multimídia da UNICAMP [UNICAMP 2010].

#### Redução da incerteza

Em que consiste a incerteza neste jogo dos três montes? Perceba que ao iniciar o jogo, a participante tem 21 possibilidades de escolha para sua carta, assim o mágico tem uma incerteza de 21 cartas, pois o espaço amostral das possibilidades de escolha é o total das cartas. Quando ocorre a primeira iteração, ou seja, quando a participante escolhe uma das 3 colunas, já indica que as outras 2 colunas, isto é, 14 cartas não estão entre as escolhidas, deste modo, a incerteza do mágico já foi reduzida a 7 cartas das 21 iniciais, que pode ser observado na Figura 2.6 da subseção 2.2.1.

Após a execução da segunda iteração, como podemos ver na Figura 2.7 da subseção 2.2.1, a incerteza passou de 7 cartas para 2 ou 3 cartas, dependendo se a participante escolher a primeira ou terceira coluna é 2 cartas, e se escolher a segunda coluna é 3 cartas possíveis, que na média vem para 2,333... uma vez que novamente ao escolher uma coluna de um total de 3, reduz a terça parte as cartas possíveis.

Para a terceira iteração, restam 3 cartas (posições 10, 11 ou 12) que o mágico tem dúvida de qual é a escolhida pela participante, quando a participante escolhe a coluna,

reduz essa dúvida a 1 carta apenas, a que está ou na posição 10, ou 11 ou 12, que pode ser observado na Figura 2.8 da subseção 2.2.1. Como vimos pelo estudo das subseções 2.2.1 e 2.2.2 que após 3 iterações, qualquer carta acaba indo para a posição 11, conforme pode ser ilustrado pela Figura 2.8 da subseção 2.2.1.

A redução da incerteza ocorre da seguinte forma:

- No início do jogo: incerteza = 21 cartas (todas as posições de 1 a 21);
- Após a 1ª iteração: incerteza = 7 cartas (posições 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14);
- Após a 2ª iteração: incerteza = 3 cartas (posições 10, 11 e 12);
- Após a 3ª iteração: certeza = 1 carta (posição 11).

Será que ocorre algum padrão dessa redução das possibilidades a cada iteração?

### Padrão de redução

Podemos perceber que ao considerar 21 cartas, dispostas em 3 colunas, a cada iteração, o número de incerteza é reduzido a terça parte da quantidade anterior, pois como a participante escolhe uma dentre três colunas, apenas a terça parte das cartas que antes eram possíveis de escolha, permanecem disponíveis, deste modo, quando executara a primeira iteração ( $j = 1$ ), temos que o número de possibilidades veio para  $21 \cdot \frac{1}{3} = 7$ .

Já para a segunda iteração ( $j = 2$ ), teve uma redução para  $7 \cdot \frac{1}{3} = 2,333$ , e olhando para a disposição das cartas, nos mostra que das 7 cartas advindas da coluna escolhida na primeira etapa, 2 foram para a primeira coluna, 3 para a coluna central e 2 para a terceira coluna, conforme ilustrado na Figura 2.6.

Por fim, na terceira iteração ( $j = 3$ ), a escolha se reduz novamente a terça parte das possibilidades anteriores, ou seja,  $\frac{1}{3} \cdot 2,333 = 0,777$ , o que nos dá uma incerteza menor que 1 de acertar a carta escolhida, isso ocorre, pois caso a carta escolhida esteja na primeira ou terceira coluna (onde haviam 2 cartas das remanescentes), apenas ocorrem 2 possibilidades, dentre 3 cartas que são o centro de cada coluna, já se a escolha for da coluna central onde há 3 cartas das remanescentes, então teremos uma candidata em cada coluna, como pode ser observado na Figura 2.7.

Pode-se concluir que a incerteza após  $j$  iterações, será obtida pela expressão:

$$\text{Incerteza após } j \text{ iterações} = 21 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j. \quad (2.10)$$

Este padrão de redução da incerteza é fundamental para entender o funcionamento do jogo e pode ser a base para determinar o número de iterações necessárias para diferentes quantidades de cartas.

### Generalização do jogo dos três montes

Para generalizar o caso do jogo dos três montes, consideramos um número  $n$  de cartas distribuídas em 3 colunas, onde  $n$  é ímpar e múltiplo de 3. Seja  $j$  o número de iterações em que as cartas são redistribuídas na mesa. Podemos analisar o padrão de redução da incerteza da seguinte forma:

- Primeira iteração:  $n \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{n}{3^1}$ ;
- Segunda iteração:  $n \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{n}{3^2}$ ;
- Terceira iteração:  $n \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{n}{3^3}$ ;

Generalizando para a  $j$ -ésima iteração:

$$\underbrace{n \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}_{j \text{ vezes}} = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{n}{3^j}. \quad (2.11)$$

Desejamos saber o menor número possível de iterações necessárias para que a condição de incerteza sobre a carta escolhida seja menor ou igual a 1, isto é:

$$\frac{n}{3^j} \leq 1. \quad (2.12)$$

Como  $n > 0$  e  $3^j > 0$ , podemos reescrever a equação (2.12) como:

$$n \leq 3^j.$$

Aplicando o logaritmo de base 3 em ambos os lados da desigualdade, obtemos:

$$j \geq \log_3 n. \quad (2.13)$$

Dado que  $j$  deve ser um número inteiro, a equação (2.13) nos fornece o menor inteiro maior ou igual a  $\log_3 n$ . Podemos expressar isso utilizando a função teto:

$$j = \lceil \log_3 n \rceil.$$

Alternativamente, podemos usar a função piso:

$$j = \lfloor \log_3 n \rfloor + 1. \quad (2.14)$$

Para o caso específico de 21 cartas, temos:

$$j = \lfloor \log_3 21 \rfloor + 1 = \lfloor 2,771 \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, o número mínimo de iterações para identificar a carta escolhida entre as 21 cartas divididas em 3 colunas é 3. A equação (2.14) nos fornece o número mínimo de iterações necessárias para que, dado um número de cartas  $n$  (ímpar e múltiplo de 3), todas elas sejam levadas para a posição central ( $\frac{n+1}{2}$ ), determinando assim a carta escolhida.

## 2.3 Sugestão de atividade

Para trabalhar com os conteúdos de logaritmo que faz parte da 3ª série do ensino médio da educação básica, pode ser desenvolvida essa atividade, para fixação do conteúdo de logaritmo, no cálculo de logaritmos de valores de base 3, aplicando as propriedades, bem como utilizar a decomposição em fatores primos e assim, aplicar as propriedades de logaritmo do produto, logaritmo do quociente e logaritmo de uma potência. E em casos onde não seja possível esse cálculo pelas propriedades, convém o uso de calculadora científica para determinar tais valores, bem como conferir os resultados obtidos.

1) Dado um número ímpar e múltiplo de 3 cartas distribuídas em 3 colunas, calcular a quantidade de iterações mínimas para descobrir a carta escolhida e completar a Tabela (2.5):

Tabela 2.5: Relação entre número de cartas e iterações mínimas necessárias.

Número de cartas	9	15	21	27	33	39	...	75	81	87	...	237	243	249
Iterações mínimas														

Fonte: Adaptado de UNICAMP (2010).

# O ensino de matemática: o jogo dos três montes como estratégia pedagógica

---

O ensino de matemática na educação básica tem sido amplamente discutido no âmbito acadêmico, especialmente no que se refere à sua contribuição para a formação integral do cidadão. Como destacado por [SKOVSMOSE 2000], a matemática não se limita a ser uma ferramenta técnica, mas também uma forma de empoderamento social, permitindo que os indivíduos questionem e transformem sua realidade. Neste capítulo, discutiremos a importância do ensino de matemática na educação básica, sua relevância para a formação do cidadão e como o jogo dos três montes, aliado ao uso de tecnologias digitais como o Scratch, pode se tornar uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de conceitos matemáticos complexos.

## 3.1 A matemática na educação básica: formando cidadãos críticos e autônomos

A Base Nacional Comum Curricular [BRASIL 2018] define a matemática como uma área do conhecimento que contribui para a formação de indivíduos críticos, autônomos e responsáveis, capazes de intervir na realidade de forma significativa. A BNCC destaca que o ensino de matemática deve promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e da resolução de problemas, competências essenciais para a vida em sociedade. Além disso, a matemática é fundamental para o desenvolvimento do pensamento científico, pois fornece ferramentas para a análise de dados, a interpretação

de fenômenos e a construção de modelos que explicam a realidade.

De acordo com [FREIRE 1996], a educação deve ser um ato de libertação, e o ensino de matemática não pode ser reduzido a uma mera transmissão de fórmulas e algoritmos. Ele deve ser contextualizado, permitindo que os estudantes compreendam seu papel na sociedade e utilizem o conhecimento matemático para transformar sua realidade. Essa visão é reforçada por [D'AMBRÓSIO 1996], que defende uma abordagem etnomatemática, na qual a matemática é entendida como uma construção cultural, integrada ao contexto social e histórico dos estudantes.

O Plano Nacional de Educação [BRASIL 2014] estabelece como uma de suas metas a melhoria da qualidade da educação básica, com ênfase no desenvolvimento de competências e habilidades que preparem os estudantes para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho. Nesse contexto, a matemática desempenha um papel crucial, pois fornece ferramentas para a compreensão e interpretação de dados, a análise de situações complexas e a tomada de decisões baseadas em evidências.

## 3.2 A Matemática na vida cotidiana

A matemática está presente em diversas situações do cotidiano, desde o cálculo de despesas domésticas até a interpretação de gráficos e estatísticas em notícias e relatórios. Segundo [D'AMBRÓSIO 1996], a matemática é uma forma de leitura do mundo, que permite aos indivíduos compreender e intervir na realidade de forma crítica e reflexiva. O desenvolvimento de habilidades matemáticas, como o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas, é essencial para a formação de cidadãos capazes de enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Nesse sentido, [PAIS 2011] argumenta que a matemática escolar deve estar conectada às práticas sociais, permitindo que os estudantes reconheçam a utilidade do conhecimento matemático em suas vidas. Essa conexão entre a matemática e o cotidiano é fundamental para despertar o interesse dos estudantes e mostrar a relevância dessa disciplina para sua formação como cidadãos.

### 3.3 O jogo dos três montes como ferramenta pedagógica

O Jogo dos três montes, quando associado a um simulador desenvolvido no Scratch, pode se tornar uma ferramenta pedagógica poderosa para o ensino de matemática. O jogo permite que os estudantes explorem conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa, facilitando a compreensão de tópicos complexos, como funções afins, funções compostas, congruência módulo  $n$  e logaritmos. Além disso, o uso do Scratch promove o desenvolvimento do pensamento computacional, uma habilidade essencial para o século XXI.

No desenvolvimento do jogo, foram utilizadas diversas abordagens matemáticas para modelar o comportamento das cartas. A primeira abordagem utilizou funções afins e funções compostas para descrever o movimento das cartas. A função afim foi aplicada para modelar a posição das cartas em cada iteração, e a função composta foi utilizada para provar que, após três iterações, a carta escolhida retorna à posição inicial. Essa abordagem permite que os estudantes visualizem a aplicação de funções matemáticas em um contexto prático, reforçando a compreensão desses conceitos.

A segunda abordagem utilizou congruência módulo  $n$  (resto da divisão inteira) para modelar o comportamento das cartas. Essa técnica permitiu demonstrar que, independentemente da posição inicial da carta, após três iterações, ela sempre retorna à posição 11. A congruência módulo  $n$  é um conceito fundamental da teoria dos números, e sua aplicação no jogo dos três montes ilustra como a matemática pura pode ser utilizada para resolver problemas práticos.

Além disso, o projeto explorou a relação entre o número de cartas e o número mínimo de iterações necessárias para descobrir a carta escolhida. Utilizando logaritmos, foi possível determinar que, dado um número de cartas, o número mínimo de iterações necessárias para identificar a carta escolhida é proporcional ao logaritmo do número de cartas. Essa abordagem introduz os estudantes ao conceito de complexidade algorítmica e à importância dos logaritmos na análise de processos iterativos.

## 3.4 A relevância do Scratch no ensino de matemática

O Scratch é uma linguagem de programação visual gratuita, desenvolvida pelo Media Lab do MIT, que permite que os estudantes criem projetos interativos, como jogos, animações e simulações, utilizando conceitos matemáticos de forma prática e contextualizada. De acordo com [RESNICK et al. 2009], o uso do Scratch no ensino de matemática permite que os alunos explorem conceitos abstratos de forma concreta, facilitando a compreensão e a aplicação desses conceitos em situações reais.

No contexto do jogo dos três montes, o Scratch foi utilizado para desenvolver um simulador que permite aos estudantes visualizar e interagir com os conceitos matemáticos de forma dinâmica. Durante o desenvolvimento do algoritmo, implementei um sistema de distribuição aleatória das cartas utilizando um mecanismo de iteração dinâmica, que proporciona uma experiência única a cada nova partida. O algoritmo foi estruturado de modo que, após a escolha da coluna (fileira) pela participante, essas cartas são colocadas entre as outras duas colunas não escolhidas, ou seja, ficando no meio do monte para que seja feita a distribuição de cartas da próxima etapa, garantindo assim que as cartas da coluna escolhida ocupem as posições de 8 a 14 na próxima distribuição.

Para viabilizar esta lógica de redistribuição, utilizei conceitos de aritmética modular, especificamente a congruência módulo  $n$ , que é representada no código através do operador de resto da divisão de  $x$  por  $y$ , conforme pode ser observado na Figura 3.1.

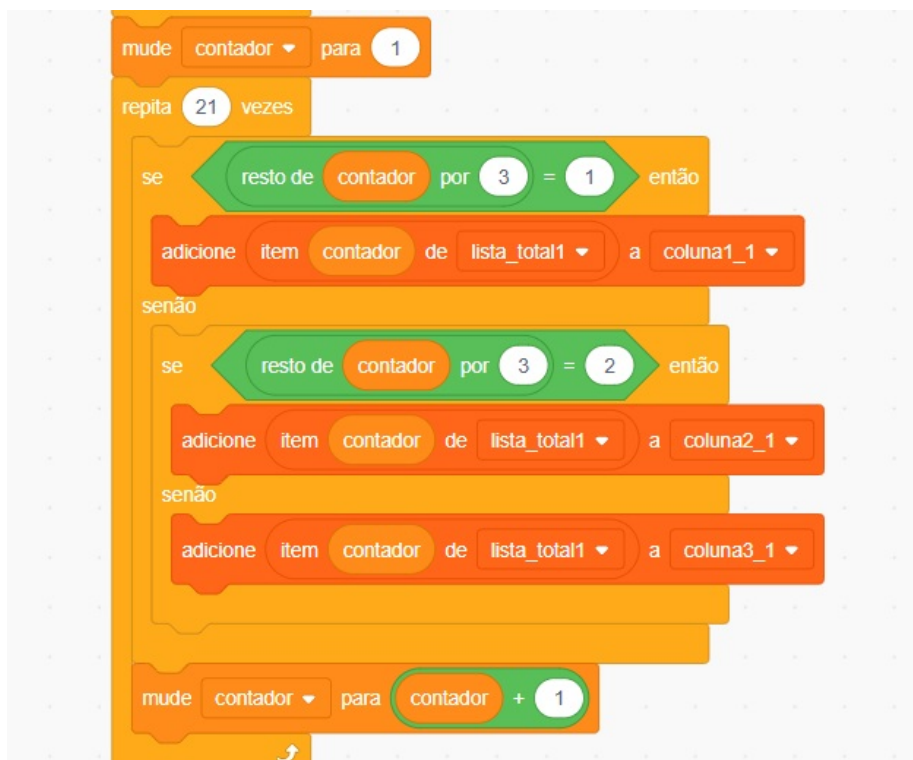


Figura 3.1: Implementação dos montes após a escolha da coluna. Fonte: Autor.

O simulador inclui códigos que implementam as funções matemáticas utilizadas na modelagem do jogo, como funções afins, conforme pode ser visto na Figura 3.2, que trás a função  $p = 3(k - 1) + c$ , onde  $p$  é a posição de uma carta escolhida,  $c$  é o número da coluna e  $k$  é a linha em que a carta é distribuída.

Por exemplo, os códigos que implementam a função afim podem ser utilizados para mostrar como a posição das cartas é calculada em cada iteração. Os códigos que implementam a congruência módulo  $n$  podem ser utilizados para mostrar como o resto da divisão inteira é utilizado para determinar a posição final da carta. Esses exemplos podem ser utilizados para introduzir os estudantes aos conceitos de programação e à aplicação de conceitos matemáticos em contextos práticos.

O ensino de matemática na educação básica é essencial para a formação do cidadão, pois desenvolve habilidades cognitivas e competências necessárias para a vida em sociedade. O jogo dos três montes, aliado ao uso de tecnologias digitais como o Scratch, pode ser uma alternativa eficaz para o ensino de conceitos matemáticos complexos, como funções afins, congruência módulo  $n$  e logaritmos. Além disso, o uso do Scratch promove o desenvolvimento do pensamento computacional, uma habilidade essencial para a era contemporânea.

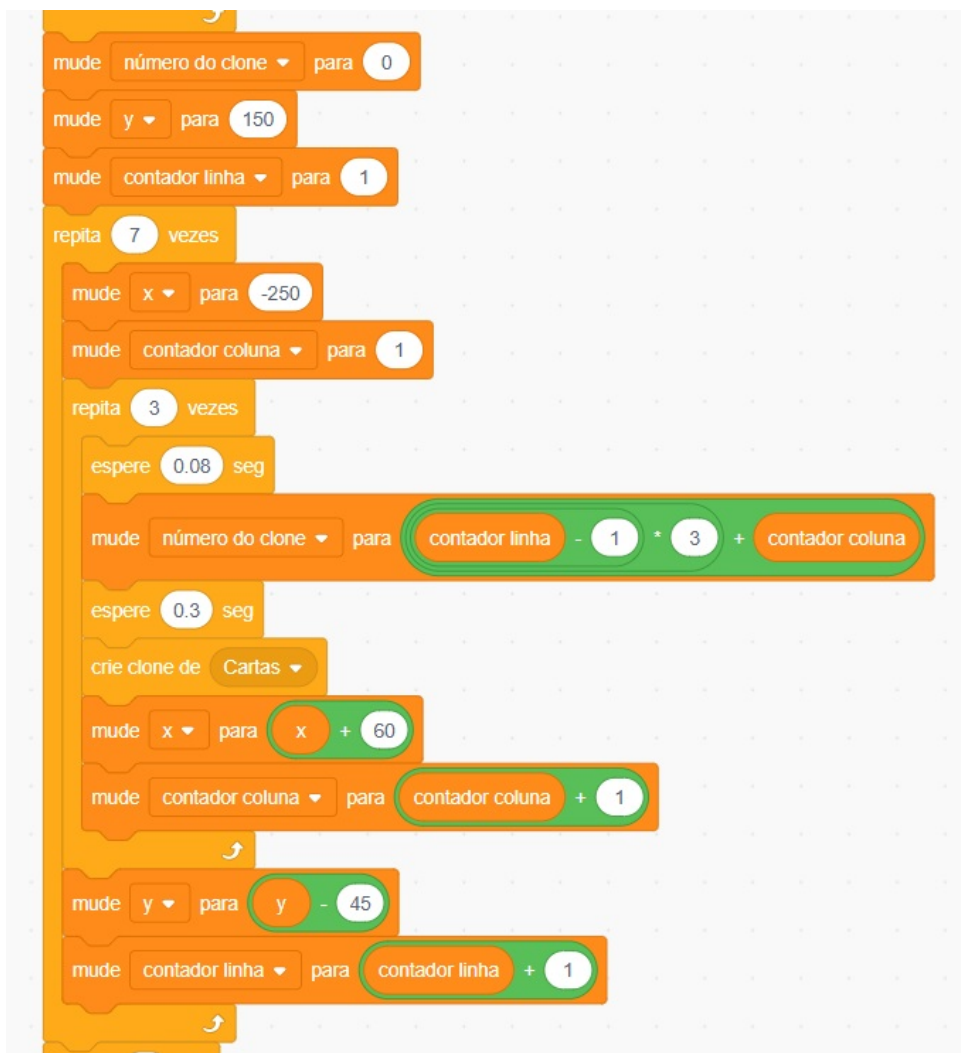


Figura 3.2: Implementação da distribuição das cartas. Fonte: Autor.

A inclusão dos códigos utilizados no simulador pode ser uma estratégia eficaz para mostrar como os conceitos matemáticos foram implementados no Scratch e como os estudantes podem aprender com eles. Essa abordagem alinha-se às diretrizes da BNCC [BRASIL 2018] e do PNE [BRASIL 2014], que destacam a importância de integrar tecnologias digitais ao ensino e de desenvolver competências essenciais para a vida no século XXI.

Como destacado por [PAPERT 1980], a aprendizagem deve ser ativa e significativa, e o uso de ferramentas como o Scratch permite que os estudantes construam seu conhecimento de forma autônoma e criativa. Dessa forma, o ensino de matemática pode se tornar mais engajador e relevante, contribuindo para a formação de cidadãos críticos, autônomos e preparados para os desafios do futuro.

---

---

# CONCLUSÃO

---

Esta dissertação explorou a matemática por trás do jogo dos três montes, demonstrando como um simples truque de cartas pode revelar profundas conexões com conceitos matemáticos fundamentais. Através de três abordagens distintas - funções compostas, função maior inteiro e logaritmos - foi possível compreender e explicar rigorosamente o porquê a carta escolhida sempre termina na posição central após três iterações.

A análise matemática revelou que o número mínimo de iterações necessárias para identificar uma carta em um conjunto de  $n$  cartas pode ser determinado pela expressão  $\lceil \log_3 n \rceil$ , estabelecendo uma relação direta entre a quantidade de cartas e o número de iterações necessárias. Esta descoberta não apenas explica o funcionamento do jogo tradicional com 21 cartas, mas também permite sua generalização para diferentes quantidades de cartas.

Do ponto de vista pedagógico, o jogo dos três montes demonstrou ser uma ferramenta valiosa para o ensino de matemática, proporcionando uma abordagem lúdica e envolvente para conceitos como funções, logaritmos e aritmética modular. A implementação do jogo em ambiente digital, através do Scratch, ampliou ainda mais suas possibilidades didáticas, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma interativa e significativa.

Este trabalho contribui para o campo da educação matemática ao estabelecer pontes entre o lúdico e o formal, demonstrando que jogos e truques aparentemente simples podem esconder estruturas matemáticas sofisticadas. Além disso, a proposta de atividades práticas e a disponibilização do simulador digital oferecem aos professores recursos concretos para enriquecer suas práticas pedagógicas.

Como perspectivas futuras, pretende-se explorar uma generalização ainda mais ampla do problema, considerando um total de  $m \times n$  cartas distribuídas em  $m$  linhas e  $n$  colunas, onde  $m$  e  $n$  são números ímpares. O objetivo será demonstrar que, após um número

---

mínimo de iterações, a carta escolhida sempre irá para a posição central  $(m \times n)/2$ . Esta generalização promete revelar padrões matemáticos ainda mais profundos e estabelecer novas conexões com áreas como teoria dos números e álgebra abstrata.

---

# BIBLIOGRAFIA

---

- [ANTON H.; RORRES 2012]ANTON H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [BOLDRINI 1986]BOLDRINI, J. L. e. a. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row, 1986.
- [BRASIL 2014]BRASIL. *Plano Nacional de Educação (PNE)*. 2014. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014.
- [BRASIL 2018]BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018.
- [D'AMBRÓSIO 1996]D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. Campinas: Papyrus, 1996.
- [FREIRE 1996]FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- [GRAHAM, KNUTH e PATASHNIK 1994]GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- [HEFEZ 2014]HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).
- [LIMA 2013]LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 07. 297 p. (Coleção PROFMAT, v. 07). ISBN 978-85-85818-81-4.
- [PAIS 2011]PAIS, L. C. *Educação Matemática: Uma Introdução*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [PAPERT 1980]PAPERT, S. *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books, 1980.

[RESNICK et al. 2009]RESNICK, M. et al. Scratch: Programming for all. *Communications of the ACM*, v. 52, n. 11, p. 60–67, 2009.

[SKOVSMOSE 2000]SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

[STEWART 2013]STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

[UNICAMP 2010]UNICAMP. *Baralho mágico - O Experimento*. Campinas: Matemática Multimídia, 2010. Projeto M3 - Matemática Multimídia.