

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Wallace da Silva

**O ARTIGO SUR LES SECTIONS
DU TORE (1864) DE JEAN-GASTON DARBOUX:
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA**

Rio de Janeiro

2025



Wallace da Silva

**O ARTIGO SUR LES SECTIONS
DU TORE (1864) DE JEAN-GASTON DARBOUX:
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2025

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Wallace da
O artigo *Sur les sections du tore* (1864) de Jean-Gaston Darboux:
história da matemática e divulgação científica / Wallace da Silva. – Rio
de Janeiro, 2025.

116 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Darboux, Jean-Gaston, 1842-1917.
3. Matemática - História. 4. Geometria diferencial. 5. Toro de revolução.
I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Esta pesquisa é dedicada à minha mãe, cuja força e dedicação tornaram possível minha jornada. Seu apoio inabalável foi essencial para que eu seguisse meus sonhos. Minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao orixá Exu, meu pai, senhor dos caminhos, por abrir minhas encruzilhadas e me guiar com firmeza e proteção.

À minha mãe, Maria da Glória, que, mesmo sem acesso à educação formal, me ensinou sobre força, dignidade e inteligência com o próprio exemplo. Sua trajetória como costureira e mulher batalhadora foi o alicerce da minha.

Ao meu companheiro, Bruno, por caminhar comigo com amor, paciência e presença. Sua parceria foi essencial em cada etapa desta jornada.

À turma do PROFMAT de 2023 do Colégio Pedro II, a melhor que eu poderia ter. Dividir esse percurso com vocês tornou tudo mais leve, desafiador e inspirador.

Aos professores do curso, por cada ensinamento partilhado. Em especial, ao meu orientador, Daniel Felipe Neves Martins, que me acolheu como um filho e foi um guia generoso e firme durante todo o processo. Sua escuta e confiança foram decisivas para que este trabalho acontecesse.

Por fim, agradeço a todos que me ensinaram e àqueles que aprenderam comigo. Professores e alunos, do passado e do presente, formaram o educador que sou e que sigo me tornando.

“Educação sem ser ancorada na História é uma pregação sem fundamentos.

Enquanto a História sem ser inserida na Educação é inconclusa.”

(Ubiratan D’Ambrosio)

RESUMO

SILVA, Wallace da. *O Artigo Sur les Sections du Tore (1864) de Jean-Gaston Darboux: História da Matemática e Divulgação Científica*. 2025. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2025.

Esta dissertação apresenta uma leitura histórica, geométrica e cultural do artigo *Sur les sections du tore* (1864), de Jean-Gaston Darboux, primeiro trabalho publicado pelo autor e um marco na reorganização da geometria no século XIX. O estudo articula três eixos principais: uma análise historiográfica que situa Darboux em seu ambiente intelectual; uma reconstrução acessível e rigorosa do toro de revolução e de suas seções planas, com destaque para as ovas de Cassini, a lemniscata de Bernoulli e os círculos de Villarceau; e uma proposta de divulgação científica voltada à ampliação do repertório cultural e matemático de professores da educação básica e de outros leitores não especializados. A pesquisa explicita que, embora o tema pertença à tradição da geometria diferencial, não se emprega aqui o aparato técnico dessa área; a geometria diferencial aparece sobretudo como contexto histórico que orienta a leitura do artigo original. A dissertação inclui a tradução integral e comentada do texto de Darboux e visualizações produzidas no GeoGebra que atualizam suas ideias para uma linguagem contemporânea. Como produto educacional, apresenta-se a revista *Trajétórias — História da Matemática e Divulgação Científica*, concebida como instrumento de circulação cultural, articulando narrativa histórica, visualização geométrica e entrevistas com pesquisadores. Os resultados mostram que o estudo das seções tóricas permanece atual e oferece um caminho fértil para integrar história da matemática, imaginação geométrica e divulgação científica de qualidade.

Palavras-chave: Jean-Gaston Darboux; seções tóricas; toro de revolução; história da matemática; divulgação científica; produto educacional.

ABSTRACT

SILVA, Wallace da. *O Artigo Sur les Sections du Tore (1864) de Jean-Gaston Darboux: História da Matemática e Divulgação Científica*. 2025. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2025.

This work offers a historical, geometric, and cultural reading of Jean-Gaston Darboux's article *Sur les sections du tore* (1864), the author's first published work and a landmark in the reorganization of geometry in the nineteenth century. The study is structured around three main axes: a historiographical analysis that situates Darboux within his intellectual environment; an accessible and rigorous reconstruction of the torus of revolution and its planar sections, such as Cassini ovals, Bernoulli's lemniscate, and Villarceau circles; and a proposal for scientific communication aimed at broadening the cultural and mathematical repertoire of school teachers and other non-specialist readers. Although the topic belongs to the tradition of differential geometry, the dissertation does not employ the technical apparatus of the field; differential geometry appears primarily as a historical context guiding the interpretation of the original article. The work includes a complete annotated translation of Darboux's text and GeoGebra visualizations that update his ideas into a contemporary geometric language. As an educational product, it presents the digital magazine *Trajetórias — História da Matemática e Divulgação Científica*, conceived as an instrument for cultural circulation that integrates historical narrative, geometric visualization, and interviews with researchers. The results show that the study of toric sections remains relevant and offers a fertile path for bringing together the history of mathematics, geometric imagination, and high-quality scientific outreach.

Keywords: Jean-Gaston Darboux; toric sections; torus of revolution; history of mathematics; scientific outreach; educational product.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Construção do toro de revolução por rotação de um círculo	26
Figura 2 – Malha paramétrica do toro com destaque para os parâmetros geométricos	27
Figura 3 – Interpretação do toro como lugar geométrico	28
Figura 4 – Representação do plano de corte em coordenadas esféricas	30
Figura 5 – Detalhamento do plano secante no ponto Q	31
Figura 6 – Sequência visual da construção da seção tórica	34
Figura 7 – Plano secante parametrizado sobre o toro	35
Figura 8 – Toro cortado por plano vertical com sistema de coordenadas local . . .	37
Figura 9 – Oval de Cassini com duas componentes desconexas	39
Figura 10 – Lemniscata de Bernoulli	40
Figura 11 – Oval de Cassini convexa e simples	40
Figura 12 – Lemniscata de Bernoulli no plano de corte	42
Figura 13 – Seção vertical com duas componentes desconexas	45
Figura 14 – Lemniscata de Bernoulli, caso crítico	45
Figura 15 – Oval convexa e simples	46
Figura 16 – Toro cortado por plano oblíquo e surgimento dos círculos de Villarceau	47
Figura 17 – Círculos de Villarceau obtidos por corte oblíquo do toro	49
Figura 18 – Centros dos círculos de Villarceau no plano secante	54
Figura 19 – Toro de revolução construído no GeoGebra 3D a partir da circunferência geradora	72
Figura 20 – Plano vertical secante ao toro, controlado pelo parâmetro a	73
Figura 21 – Seções planas do toro: oval de Cassini e lemniscata de Bernoulli	75
Figura 22 – Toro parametrizado no GeoGebra 3D pelos ângulos θ e Φ	78
Figura 23 – Plano secante definido por vetores diretores	80
Figura 24 – Ramos da seção tórica obtidos por interseção com plano inclinado . . .	83
Figura 25 – Ramos das curvas de Villarceau obtidos por interseções oblíquas	83
Figura 26 – Interseção do toro com plano horizontal no caso $\phi = 0$	86

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	JEAN-GASTON DARBOUX E O ARTIGO <i>SUR LES SECTIONS DU TORE</i>	14
1.1	A trajetória intelectual de Jean-Gaston Darboux	14
1.2	O artigo <i>Sur les sections du tore</i>: introdução histórica	16
1.3	Lacunas na literatura e contribuições deste trabalho	18
1.4	Critérios e escolhas de tradução	20
1.5	Trechos traduzidos e comentados: ideias centrais e estilo de Darboux	21
1.6	O valor didático e matemático das seções tóricas no artigo de 1864	23
2	O QUE É O TORO: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	25
2.1	O toro e suas representações matemáticas	25
2.2	Parametrização do plano de corte	29
2.3	Equação implícita da curva de interseção entre o toro e o plano secante	32
3	AS CURVAS NOTÁVEIS NO ARTIGO <i>SUR LES SECTIONS DU TORE</i>	36
3.1	As ovais de Cassini	36
3.1.1	Definição e origem	36
3.1.2	Do toro de revolução às ovais	37
3.1.3	Dedução a partir da equação da seção tórica	37
3.1.4	Equivalência com a forma clássica das ovais de Cassini	38
3.1.5	Morfologias e classificação	39
3.1.6	Importância didática e visual	41
3.1.7	Referências cruzadas e notas históricas	41
3.2	A Lemniscata de Bernoulli	42
3.2.1	Origem histórica e vínculo com a família Bernoulli	42
3.2.2	A lemniscata como caso crítico das ovais de Cassini	43
3.2.3	Equações cartesianas e polares	43
3.2.4	Propriedades e simetrias	44
3.2.5	Visualizações e aplicações didáticas	44

3.3	Os círculos de Villarceau	45
3.3.1	Condição para o surgimento	46
3.3.2	Dedução algébrica a partir da seção tórica	47
3.3.3	Interpretação geométrica e propriedades	49
3.3.4	História e legado de Villarceau	50
3.3.5	Representações no GeoGebra	51
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICES	62
	APÊNDICE A – TRADUÇÃO COMENTADA INTEGRAL DE SUR	
	<i>LES SECTIONS DU TORE</i>	63
A.1	Teorema I e corolários	64
A.2	Teorema II: seções gerais e relações com círculos	65
A.3	Teoremas III e IV: três esferas inscritas e relações lineares	66
A.4	Teorema V: seções planas com quatro focos	67
A.5	Teoremas VI a VIII — Cassinóides, curvas recíprocas e tangência	67
A.6	Notas complementares — Generalizações e cyclides	69
	APÊNDICE B – CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA 3D	71
B.1	Construção simplificada: ovais de Cassini e lemniscata de Bernoulli	71
	Resumo dos passos no GeoGebra	74
B.2	Construção com plano inclinado: os círculos de Villarceau	77
	Resumo dos passos no GeoGebra	86
B.3	Considerações pedagógicas e materiais digitais	89
	APÊNDICE C – PRODUTO EDUCACIONAL: REVISTA DE DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA	90

INTRODUÇÃO

A matemática do século XIX testemunhou mudanças profundas na forma como o conhecimento científico era produzido, organizado e ensinado. Nesse cenário, Jean-Gaston Darboux (1842–1917) ocupa um lugar singular. Embora reconhecido como um dos grandes nomes da geometria diferencial, sua presença fora dos círculos especializados permanece limitada. Seu primeiro artigo, *Sur les sections du tore* (1864), escrito ainda como estudante, é um exemplo marcante dessa ausência: um texto breve, elegante e matematicamente rico, mas praticamente desconhecido no contexto da formação docente brasileira.

Durante o mestrado, o contato com esse artigo revelou um campo fértil para o diálogo entre história, geometria e divulgação científica. De um lado, o fascínio geométrico: curvas notáveis, como os círculos de Villarceau, as ovas de Cassini e a lemniscata de Bernoulli, emergem de uma superfície simples, o toro de revolução, mostrando que a imaginação geométrica pode produzir objetos de grande beleza. De outro, a percepção de que esse material permanece distante do público não especializado, incluindo professores, estudantes e leitores interessados, sobretudo pela falta de acesso, tradução e recursos visuais que aproximem uma obra de 1864 do presente. A pergunta central desta dissertação nasce desse encontro: como transformar o texto de Darboux em uma experiência contemporânea de divulgação científica, capaz de ampliar o repertório cultural e matemático de professores da educação básica e de outros leitores não especializados? Ao enfrentar essa pergunta, o trabalho procura apresentar o artigo de 1864 de modo historicamente situado, matematicamente claro e acessível ao leitor atual, articulando reconstrução histórica, análise geométrica e visualização digital.

Esse percurso não pode ser compreendido sem considerar o momento decisivo da formação intelectual de Darboux: sua tese *Sur les surfaces orthogonales*, defendida em 14 de julho de 1866 diante de Chasles, Serret e Bouquet. Nesse trabalho, Darboux demonstrou que certas famílias de superfícies que se intersectam ortogonalmente admitem *linhas isotérmicas de curvatura*, aprofundando resultados de Monge, Lamé e Bertrand. A recepção foi imediata e entusiasmada, e o texto seria posteriormente publicado como *Recherches sur les Surfaces Orthogonales* (APPELL, 1918; TATON, 1954). A tese consolidou sua presença na geometria diferencial do século XIX e estabeleceu o ambiente conceitual no qual o artigo de 1864 pode ser lido: não como um exercício isolado de juventude, mas como parte de um percurso matemático consistente, no qual a análise de superfícies e de suas curvas adquire estrutura e profundidade.

Esse movimento também evidenciou a possibilidade de articular o artigo de Darboux a um projeto de acesso ampliado à matemática, estruturado em três perspectivas complementares. A primeira é a historiográfica, voltada a compreender o texto em sua temporalidade e nas tensões intelectuais de sua época, à luz de autores como Cohen (2016) e Grattan-Guinness (2004). A segunda é a geométrica, que reconstrói, com o apoio de ferramentas computacionais, o toro de revolução e suas seções planas com rigor e clareza, evidenciando como as curvas estudadas por Darboux emergem dessa análise. A terceira é a divulgação científica, que busca apresentar esses temas de modo acessível e visualmente orientado, especialmente para leitores sem formação específica em geometria avançada.

Mais do que um tema acadêmico, este projeto é a continuidade de um percurso pessoal. Ele nasce do encontro entre minha trajetória docente, o gosto pela história das ideias e a convicção de que a ciência se torna mais humana quando compreendida em seu contexto cultural. Ao longo dos anos em sala de aula, percebi que a matemática ganha significado quando é apresentada como uma construção histórica, produzida por pessoas e marcada por escolhas intelectuais. O encontro com Darboux tornou-se, assim, oportunidade de redescobrir e compartilhar a beleza geométrica e a sensibilidade intelectual que unem matemática, arte e ensino.

Nessa articulação, é importante explicitar um aspecto fundamental do trabalho: embora o tema pertença à tradição da geometria diferencial, este estudo não emprega o aparato técnico característico dessa área: formas fundamentais, curvaturas, conexões e métodos diferenciais. Aqui, a geometria diferencial aparece como ambiente histórico no qual Darboux se formou e atuou, não como ferramenta analítica. Recupera-se o contexto em que a geometria de superfícies foi reorganizada no século XIX, destacando elementos que iluminam as escolhas de Darboux sem exigir do leitor competências avançadas.

Além disso, esse diálogo entre história da matemática, visualização geométrica e leitura comentada de textos clássicos se aproxima dos propósitos formativos do PROFMAT. Ao percorrer esse caminho, o trabalho busca compreender o lugar do artigo de Darboux no século XIX, reconstruir o toro de revolução e suas seções planas de modo acessível e analisar as curvas que delas surgem, sempre em diálogo com práticas de sala de aula e com a formação docente. Sem separar rigidamente essas dimensões, a dissertação procura tratá-las como partes de uma mesma experiência cultural e matemática.

Diante desse recorte, torna-se possível apresentar a estrutura deste trabalho. O **Capítulo 1** contextualiza o texto de Darboux no cenário científico do século XIX, reconstruindo seu ambiente intelectual, sua trajetória pessoal e as influências que moldaram a escrita do artigo. Em seguida, o

Capítulo 2 reconstrói matematicamente o toro de revolução como superfície, lugar geométrico e variedade algébrica, culminando na dedução completa da equação da seção tórica. O **Capítulo 3** analisa as curvas originadas das seções planas do toro, discutindo suas propriedades, sua presença no texto de Darboux (1864) e suas potencialidades visuais. As seções tóricas, nesse percurso, assumem papel central ao articular história, visualização e matemática, conectando a leitura de 1864 às linguagens e práticas contemporâneas.

Os anexos ampliam e aprofundam o trabalho desenvolvido. O **Anexo A** apresenta a tradução integral e comentada do artigo *Sur les sections du tore*, tornando-o acessível em português e oferecendo notas que esclarecem passagens matemáticas e históricas. O **Anexo B** reúne um roteiro detalhado de construções no GeoGebra, que possibilita uma leitura visual e contemporânea das ideias de Darboux. O **Anexo C** apresenta o produto educacional desta pesquisa: a revista digital *Trajétórias — História da Matemática e Divulgação Científica*. A revista reúne, de modo acessível e visualmente cuidadoso, os principais elementos desenvolvidos nos três capítulos da dissertação: a trajetória de Jean-Gaston Darboux no contexto do século XIX, a análise do artigo de 1864 e a matemática do toro e de suas seções. Além disso, propõe duas atividades baseadas em visualização dinâmica, oferecendo caminhos possíveis para quem desejar explorar o tema em atividades educativas.

A concepção do material surgiu da percepção de duas lacunas importantes: a pouca presença de Darboux e de suas ideias na formação docente e o distanciamento entre a matemática universitária e aquela ensinada na escola. Por isso, sua organização integra a tradução comentada, as visualizações geométricas e textos que valorizam clareza, visualidade e contexto histórico. As entrevistas com pesquisadores reforçam essa dimensão pública da ciência, pois dão voz aos protagonistas da matemática contemporânea e evidenciam que a matemática não é apenas um conjunto de resultados, mas uma prática viva, feita de interpretações, escolhas e modos de ver. Essa presença da voz do pesquisador é central para o propósito de divulgação científica da revista: ela humaniza o conhecimento, aproxima o público da cultura matemática e mostra que a ciência é sempre uma construção coletiva, situada e em diálogo constante com seu tempo.

A revista funciona, assim, como uma ponte entre diferentes mundos: as imagens favorecem a compreensão das ideias geométricas; os textos históricos aproximam o currículo escolar da história da matemática; os roteiros em GeoGebra favorecem atividades investigativas; e o conjunto permite que professores e estudantes entrem em contato com uma matemática que respira cultura, história e visualidade.

Recuperar Darboux no presente é recuperar também a possibilidade de ensinar uma

matemática que reconhece sua própria história e aproxima o ensino do modo como a ciência realmente se constrói. Assim, esta dissertação busca construir pontes entre séculos, linguagens e públicos, entre o Darboux do século XIX e o professor do século XXI, entre a matemática acadêmica e a sala de aula, entre o rigor geométrico e a sensibilidade da divulgação científica. A matemática, vista por esse caminho, revela-se como imaginação, como cultura e como possibilidade pedagógica. O trabalho procura tornar essa experiência acessível, inspiradora e significativa para quem ensina e aprende matemática hoje.

É nesse horizonte que se inicia o **Capítulo 1**, dedicado a situar Jean-Gaston Darboux no cenário científico do século XIX e a compreender o ambiente intelectual e pessoal que tornou possível a escrita de *Sur les sections du tore*.

1 JEAN-GASTON DARBOUX E O ARTIGO *SUR LES SECTIONS DU TORE*

Este capítulo apresenta uma leitura histórica, matemática e pedagógica do artigo *Sur les sections du tore*, publicado por Jean-Gaston Darboux em 1864, quando ainda era estudante da *École Normale Supérieure*. Trata-se de um texto marcante, ainda pouco conhecido fora dos círculos especializados, que articula de modo muito preciso elementos da geometria clássica, da geometria diferencial e da álgebra.

Ao longo do capítulo, situamos esse trabalho no contexto da matemática francesa do século XIX, ressaltando as transformações pelas quais passava a geometria naquele período. Também traçamos a trajetória intelectual de Darboux, destacando seu percurso acadêmico e algumas de suas contribuições mais duradouras.

Além disso, discutimos o papel da história da matemática como instrumento pedagógico e cultural, capaz de aproximar o conhecimento escolar, a pesquisa matemática e a cultura científica mais ampla. Por fim, analisamos o artigo de Darboux, apresentando trechos traduzidos e comentados, juntamente com considerações sobre suas ideias centrais, seu estilo de trabalho e seu potencial educativo.

1.1 A trajetória intelectual de Jean-Gaston Darboux

Jean-Gaston Darboux (1842–1917) destacou-se como um dos principais matemáticos da tradição geométrica francesa do século XIX. Sua capacidade singular de articular intuição geométrica e rigor analítico contribuiu para a consolidação da geometria diferencial como disciplina autônoma. Produziu avanços fundamentais no estudo dos sistemas ortogonais de superfícies, na geometria infinitesimal e na interpretação geométrica das equações diferenciais. É lembrado, ainda, pelo teorema que leva seu nome, relacionado à propriedade dos valores intermediários da derivada (Sym, 2009; Bottazzini; Gray, 2013)

Darboux nasceu na cidade de Nîmes, no sul da França, em uma residência que, segundo registros históricos, havia funcionado como capela da catedral local (Appell, 1918). De acordo com seu registro civil, sua data oficial de nascimento é 14 de agosto de 1842, às 1h da manhã. Contudo, o próprio Darboux afirmava ter nascido à meia-noite do dia anterior, 13 de agosto, data que adotou em documentos pessoais e que consta em sua lápide no Cemitério de Montparnasse, em Paris (Sym, 2009).

Filho de François Darboux e Alix Gourdoux, cresceu em uma família de classe média ligada ao comércio têxtil. Com a morte precoce do pai, em 1849, sua mãe assumiu os negócios da família e dedicou-se intensamente à educação dos filhos. Gaston e seu irmão mais novo, Louis, estudaram no *Lycée de Nîmes*, instituição marcada pela disciplina rigorosa, com atividades distribuídas das seis da manhã às oito da noite (Taton, 1954).

Darboux concluiu seus estudos secundários em julho de 1859 e, ainda nesse ano, ingressou na classe de *mathématiques spéciales* do *Lycée de Montpellier*, curso preparatório destinado aos exames das Grandes Écoles. Sob orientação de Charles Berger, ex-aluno da *École Normale Supérieure* (ENS), consolidou uma base matemática excepcional e foi incentivado a seguir carreira acadêmica (Taton, 1954; Sym, 2009).

Após um ano em Montpellier, Darboux prestou o concurso de admissão da *École Polytechnique* apenas como treinamento e foi aprovado. No ano seguinte, candidatou-se tanto à Polytechnique quanto à *École Normale Supérieure* e obteve o primeiro lugar em ambos os concursos. Apesar da tradição segundo a qual os melhores colocados optavam pela Polytechnique, Darboux escolheu a ENS, reafirmando sua vocação para a pesquisa e o ensino superior (Bottazzini; Gray, 2013).

Ao chegar a Paris, Darboux foi acompanhado por sua mãe, que o apresentou a Louis Pasteur, então diretor da École Normale. Pasteur, empenhado em fortalecer o nível científico da instituição, obteve autorização ministerial para que Darboux frequentasse cursos livres em outras escolas parisienses. Assim, teve acesso às aulas de Joseph Bertrand no *Collège de France*, onde foi rapidamente reconhecido como um estudante fora do comum. Bertrand descreveu-o como “um espírito penetrante, dotado de rara intuição geométrica, cujas soluções surpreendiam pela elegância e precisão” (Bertrand, 1954, p. 202).

O desempenho acadêmico de Darboux foi notável. Em 9 de julho de 1863, obteve o diploma de *Licencié ès Sciences mathématiques* e, em 7 de agosto, o de *Licencié ès Sciences physiques*. Ainda como estudante, publicou seu primeiro artigo científico, *Sur les sections du tore*, no qual já se observava a combinação entre intuição geométrica e rigor analítico.

O talento de Darboux logo chamou a atenção de Michel Chasles, que aceitou orientar sua tese de doutorado. Enquanto preparava a dissertação, apresentou à *Académie des Sciences*, em 1º de agosto de 1864, um estudo sobre sistemas ortogonais de superfícies que generalizava resultados de Ernst Kummer. Curiosamente, no mesmo dia, Victor Moutard apresentou um trabalho semelhante, evidenciando o interesse crescente pelo tema (Taton, 1954; Sym, 2009).

Darboux defendeu sua tese *Sur les surfaces orthogonales* em 14 de julho de 1866, diante

de Chasles, Serret e Bouquet. Nesse trabalho, demonstrou que certas famílias de superfícies que se intersectam ortogonalmente admitem *linhas isotérmicas de curvatura*, isto é, curvas ao longo das quais a temperatura permanece constante quando a superfície é aquecida. O resultado aprofunda contribuições de Monge, Lamé e Bertrand e foi recebido com entusiasmo, sendo posteriormente publicado como *Recherches sur les Surfaces Orthogonales* (Appell, 1918; Taton, 1954). O impacto da tese projetou Darboux no cenário acadêmico francês, estabelecendo as bases para sua presença na geometria diferencial do século XIX.

A partir desse reconhecimento inicial, sua carreira docente se desenvolveu de forma contínua. Lecionou em liceus parisienses, entre eles o *Lycée Saint-Louis* e o *Lycée Louis-le-Grand*, e também no *Collège de France* (Taton, 1954; Sym, 2009). Em 1872, foi nomeado professor da *École Normale Supérieure* e, em 1880, assumiu a cadeira de geometria superior na Sorbonne (Appell, 1918; Bottazzini; Gray, 2013). Entre 1887 e 1896, publicou os quatro volumes de *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, obra fundamental para a consolidação da geometria diferencial moderna (Appell, 1918).

Além da atuação científica e docente, Darboux desempenhou papel importante na administração acadêmica. Entre 1889 e 1903, foi decano da Faculdade de Ciências da Sorbonne e, em 1900, eleito secretário perpétuo da *Académie des Sciences*, cargo que manteve até 1917 (Appell, 1918).

O alcance de sua obra extrapolou a França e influenciou a comunidade matemática internacional. Inspirou diretamente Élie Cartan e outros desenvolvedores da geometria diferencial moderna, e participou de eventos como o Congresso Internacional de Matemáticos de 1908, em Roma (Sym, 2009; Bottazzini; Gray, 2013). Sua ênfase na visualização geométrica encontra, hoje, ressonância em ferramentas contemporâneas como o GeoGebra.

Jean-Gaston Darboux faleceu em 23 de fevereiro de 1917 e foi sepultado no Cemitério de Montparnasse, em Paris (Appell, 1918). A compreensão de sua trajetória ilumina a originalidade e o alcance de sua produção matemática, fornecendo o pano de fundo necessário para interpretar o artigo *Sur les sections du tore*, tema da próxima subseção.

1.2 O artigo *Sur les sections du tore*: introdução histórica

O artigo *Sur les sections du tore*, publicado em 1864 por Jean-Gaston Darboux, marca não apenas o início de sua trajetória intelectual, mas também um episódio de destaque na história

da geometria do século XIX. Embora escrito quando Darboux ainda era estudante da *École Normale Supérieure*, o texto já revela uma maturidade matemática notável, ao articular conceitos da geometria clássica, da geometria diferencial e da álgebra.

O estudo das seções do toro remonta à Antiguidade. Por volta de 150 a.C., o matemático grego Perseu foi o primeiro a investigar de forma sistemática as curvas geradas pela interseção de um toro com um plano paralelo ao seu eixo de simetria. Conhecidas como *seções espíricas de Perseu*, essas curvas estão entre os registros mais antigos do estudo de curvas produzidas por superfícies de revolução (Booth, 1877).

Entre essas curvas, destacam-se as *ovais de Cassini*, introduzidas no século XVII por Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), astrônomo italiano interessado em descrever as órbitas planetárias. Essas curvas são definidas geometricamente como o conjunto de pontos do plano cujo produto das distâncias a dois focos é constante. Quando essa constante assume um valor específico, a oval de Cassini degenera na célebre *lemniscata de Bernoulli*, estudada por Jakob Bernoulli (1655–1705), que possui a forma de um símbolo de infinito e apresenta notáveis propriedades geométricas e analíticas.

Outro destaque no estudo das seções do toro são os *círculos de Villarceau*. Descobertos no século XIX por Yvon Villarceau (1813–1883), esses círculos resultam de determinados cortes oblíquos no toro e possuem a propriedade notável de que, em uma superfície regular e suave, passam exatamente quatro círculos distintos por qualquer ponto. A descoberta surpreendeu a comunidade matemática da época, ao revelar propriedades inesperadas em uma superfície aparentemente simples.

O toro é uma superfície algébrica de quarta ordem, gerada pela rotação de um círculo de raio r em torno de um eixo situado no mesmo plano do círculo, a uma distância R de seu centro, com $R > r$. Sua equação cartesiana padrão, centrada na origem e no plano xy , é dada por:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$

ou, de forma expandida, em coordenadas cartesianas:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

Uma *seção tórica* é definida como a curva resultante da interseção do toro com um plano qualquer no espaço tridimensional. Assim como as seções cônicas resultam do corte de um cone por um plano, as seções tóricas exibem uma ampla variedade de configurações geométricas,

dependendo da inclinação, da posição e da orientação do plano secante. Essa analogia, aliás, é central na abordagem desenvolvida por Darboux.

Ao escolher estudar as seções planas do toro, Darboux dialoga com uma tradição matemática milenar, mas também inaugura uma abordagem moderna para o problema. Diferente de seus antecessores, que priorizavam descrições puramente geométricas, Darboux faz uso sistemático da análise algébrica para deduzir as equações das seções, sem jamais dispensar a interpretação geométrica dos resultados. Esse equilíbrio entre álgebra e geometria, que se tornaria uma marca constante de sua obra, já se manifesta de maneira especialmente elegante neste seu primeiro artigo.

O artigo *Sur les sections du tore* apresenta uma análise detalhada sobre as diferentes formas como planos podem intersectar o toro, gerando curvas de naturezas variadas. Em vez de apenas reunir resultados específicos, Darboux propõe uma formulação geral que abrange todos os casos, incluindo situações singulares e limites críticos. Suas análises mostram, por exemplo, como certas configurações do plano geram os círculos de Villarceau, outras produzem as ovas de Cassini e, em casos particulares, conduzem à lemniscata de Bernoulli.

Para além do rigor técnico, destaca-se no artigo a preocupação pedagógica. Darboux organiza a exposição com notável clareza, alternando descrições geométricas, deduções analíticas e observações qualitativas. Isso reflete não apenas sua competência matemática, mas também seu compromisso, desde jovem, com a transmissão do saber e com a construção de uma cultura matemática sólida.

Assim, ao revisitarmos o artigo *Sur les sections du tore*, não se trata apenas de explorar um objeto matemático elegante, mas também de retomar uma abordagem que articula história, análise rigorosa, visualização geométrica e intuição, elementos fundamentais para o ensino e a aprendizagem da matemática, tanto no século XIX quanto na contemporaneidade. Esse panorama inicial nos permitirá, nas próximas seções, aprofundar a análise das ideias e dos métodos apresentados por Darboux em seu estudo das seções do toro.

1.3 Lacunas na literatura e contribuições deste trabalho

Embora o artigo *Sur les sections du tore* seja mencionado em estudos gerais sobre a obra de Darboux, a literatura especializada dedica pouca atenção a esse texto específico. Nas histórias da geometria do século XIX, ele aparece de modo indireto, quase sempre como referência preliminar à produção posterior do autor. Em obras de síntese, como Bottazzini e

Gray (2013), o artigo de 1864 não recebe análise aprofundada. Em Sym (2009), é citado como marco inicial da trajetória científica de Darboux, sem discussão detida de sua estrutura ou de seu potencial pedagógico. Até onde foi possível investigar, não há traduções para o português nem estudos comentados que examinem de forma sistemática seus argumentos ou suas escolhas metodológicas.

Esse quadro evidencia uma lacuna importante. Apesar de sua relevância histórica e de seu papel na reorganização geométrica do século XIX, o artigo permanece pouco acessível, tanto pela barreira linguística quanto pela ausência de materiais que o aproximem da cultura matemática contemporânea e da formação de professores. Não se encontram reconstruções modernas de suas demonstrações em linguagem acessível, análises comparativas com textos correlatos ou visualizações digitais que permitam explorar geometricamente as ideias apresentadas por Darboux.

Entre os trabalhos contemporâneos que dialogam com o tema destaca-se o artigo de Luca Moroni, *The Toric Sections: A Simple Introduction* (2020). Moroni apresenta uma introdução visual às seções tóricas e propõe o uso do GeoGebra como ferramenta exploratória, mencionando Darboux como referência histórica. No entanto, seu texto não reconstrói as demonstrações presentes no artigo de 1864, não examina os argumentos algébricos utilizados por Darboux e não descreve metodologicamente as construções no software. Suas figuras são ilustrativas, mas não são acompanhadas de algoritmos ou roteiros completos de implementação. Trata-se de uma proposta de divulgação científica, e não de uma análise histórica ou de uma reconstrução matemática comentada.

A presente dissertação busca enfrentar esse cenário por meio de quatro contribuições complementares. A primeira é a tradução integral do artigo *Sur les sections du tore* para o português, acompanhada de notas históricas e geométricas que esclarecem a terminologia do século XIX e explicitam passagens condensadas do texto original. A segunda é a reconstrução matemática acessível do toro de revolução e de suas seções, com ênfase na interpretação geométrica e na dedução algébrica, sem recorrer ao aparato técnico da geometria diferencial. A terceira é a elaboração de visualizações no GeoGebra que atualizam essas ideias para uma linguagem contemporânea e exploratória. A quarta é o desenvolvimento de um produto educacional que articula história, visualização e divulgação científica.

Essas contribuições procuram transformar um texto clássico de 1864 em material acessível, culturalmente significativo e pedagogicamente relevante, ampliando seu alcance e propondo novas formas de integrá-lo à formação de professores e à divulgação da matemática.

1.4 Critérios e escolhas de tradução

A tradução do artigo *Sur les sections du tore* foi realizada com o objetivo de tornar acessível ao público brasileiro um texto importante da juventude de Jean-Gaston Darboux. Mais do que verter o francês do século XIX para o português, tratou-se de entender o sentido das ideias e apresentá-las de forma clara, mantendo o caráter histórico do texto sem dificultar a leitura.

Ao longo da tradução, procuramos seguir um princípio simples: preservar o conteúdo matemático e, ao mesmo tempo, facilitar a compreensão para quem não está acostumado ao estilo científico do período. Quando a redação de Darboux era longa ou pouco direta para o leitor atual, fizemos pequenos ajustes que tornassem o trecho mais claro, sempre indicando essas decisões. Essa orientação guiou todas as escolhas descritas a seguir.

Adotamos como primeiro critério a *fidelidade semântica*, isto é, o cuidado em manter o sentido preciso das afirmações e dos argumentos. Termos técnicos e expressões típicas da geometria do século XIX foram traduzidos buscando equilíbrio entre rigor e clareza.

O segundo critério foi a *adaptação terminológica*. Quando Darboux utilizava notações ou expressões já superadas, optamos por atualizá-las para formas mais familiares, acrescentando uma breve explicação quando necessário. O objetivo foi aproximar o texto histórico do repertório de professores e estudantes de hoje.

Outro ponto importante foi o uso de *notas de tradução*. Em trechos mais densos, incluímos comentários que esclarecem termos ambíguos, explicam referências históricas ou indicam o valor didático de certas passagens. Nesses casos, priorizamos a transparência, permitindo que o leitor acompanhe as escolhas feitas.

As principais dificuldades estiveram no estilo retórico de Darboux, marcado por períodos longos e por um modo de argumentar típico do século XIX. Além disso, diferenças entre o francês da época e o português atual exigiram decisões interpretativas constantes. Em alguns momentos, mantivemos um termo original entre colchetes; em outros, oferecemos uma breve explicação para preservar o sentido do texto.

Por fim, reforçamos que esta tradução comentada não substitui o texto original. Ela oferece um caminho de leitura mais acessível, especialmente para professores e estudantes interessados na história da matemática e na compreensão das ideias de Darboux. A versão integral, reunida no Anexo A, é um recurso para quem deseja consultar o artigo na íntegra, agora acompanhado de um material que facilita sua leitura e discussão.

1.5 Trechos traduzidos e comentados: ideias centrais e estilo de Darboux

Para compreender o valor histórico e matemático do artigo *Sur les sections du tore*, é importante ler algumas de suas passagens diretamente. Nesta seção, apresentamos trechos selecionados, traduzidos do francês, acompanhados de comentários que destacam as ideias matemáticas essenciais e aspectos marcantes do estilo de Darboux, como a clareza na exposição e o equilíbrio entre argumentos algébricos e interpretações geométricas.

Trecho 1 (Apresentação do problema):

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ce mémoire consiste à déterminer les courbes résultant de l'intersection d'un tore circulaire par un plan quelconque. Ce problème, quoique classique, nous paraît mériter une étude nouvelle à cause de la richesse et de la variété des courbes obtenues.

Tradução nossa:

O problema que nos propomos resolver neste trabalho consiste em determinar as curvas resultantes da interseção de um toro circular por um plano qualquer. Este problema, ainda que clássico, parece-nos merecer um novo estudo em razão da riqueza e da variedade das curvas obtidas (Darboux, 1864, p. 3).

Comentário: Logo nas primeiras linhas, Darboux explicita sua motivação. Reconhece o caráter clássico do problema, mas ressalta que a diversidade e a riqueza geométrica das curvas justificam um novo estudo. Essa abordagem revela uma atitude típica de sua obra: visitar temas tradicionais sob uma nova perspectiva, combinando rigor analítico e intuição geométrica.

Trecho 2 (Definição do toro):

Considérons un cercle de rayon b , dont le centre décrit un cercle situé dans un plan perpendiculaire au premier, et de rayon a . La surface ainsi engendrée est le tore circulaire.

Tradução nossa:

Consideremos um círculo de raio b , cujo centro descreve um círculo situado em um plano perpendicular ao primeiro, e de raio a . A superfície assim gerada é o toro circular (Darboux, 1864, p. 5).

Comentário: Essa definição é ao mesmo tempo concisa e rigorosa. Darboux utiliza uma linguagem geométrica clara, sem recorrer, neste momento, a formulações algébricas. Essa escolha, de começar pela descrição geométrica intuitiva antes de apresentar a formalização analítica, é recorrente em sua obra e revela uma evidente preocupação didática. No texto original, Darboux

emprega as letras a e b para designar, respectivamente, o raio do círculo gerador e a distância de seu centro ao eixo de revolução. Neste trabalho, optamos por utilizar as notações R e r , buscando uniformidade e clareza expositiva. Essa equivalência é puramente notacional e não altera o conteúdo matemático.

Trecho 3 (As curvas notáveis):

On obtient ainsi diverses courbes remarquables, parmi lesquelles figurent des cercles particuliers, connus sous le nom de cercles de Villarceau, et des courbes telles que les ovales de Cassini et la lemniscate de Bernoulli.

Tradução nossa:

Obtêm-se, assim, diversas curvas notáveis, entre as quais figuram círculos particulares, conhecidos como círculos de Villarceau, e curvas como as ovais de Cassini e a lemniscata de Bernoulli (Darboux, 1864, p. 7).

Comentário: Esse trecho sintetiza um dos resultados mais notáveis do artigo. Ao nomear explicitamente essas curvas, Darboux não apenas reconhece a tradição matemática anterior, mas também apresenta seu trabalho como uma síntese e ampliação desse legado. A referência simultânea aos círculos de Villarceau, às ovais de Cassini e à lemniscata de Bernoulli antecipa a riqueza geométrica que as seções do toro podem revelar.

Trecho 4 (Método analítico e interpretação geométrica):

L'emploi de la méthode analytique nous permettra d'établir des équations générales des sections du tore. Toutefois, nous chercherons aussi à rendre compte des propriétés géométriques de ces courbes, afin de mieux saisir leur nature.

Tradução nossa:

O emprego do método analítico nos permitirá estabelecer as equações gerais das seções do toro. Todavia, buscaremos também dar conta das propriedades geométricas dessas curvas, a fim de melhor apreender sua natureza (Darboux, 1864, p. 8).

Comentário: Esse trecho evidencia um dos pilares do pensamento de Darboux: a integração entre análise algébrica e intuição geométrica. Mais do que obter equações, ele busca compreender a natureza geométrica das curvas, articulando diferentes representações matemáticas. Essa postura atravessa todo o artigo *Sur les sections du tore*, que combina clareza conceitual, elegância na formulação e equilíbrio metodológico. Longe de ser apenas um tratado técnico, o texto se apresenta como um modelo de prática matemática com elevado potencial formativo, cuja relevância pedagógica permanece atual e inspiradora.

1.6 O valor didático e matemático das seções tóricas no artigo de 1864

O artigo *Sur les sections du tore*, de Jean-Gaston Darboux, não é apenas um documento matemático de interesse histórico. Trata-se também de um recurso de grande valor formativo para o ensino contemporâneo. Suas observações qualitativas sobre as seções do toro favorecem uma compreensão intuitiva e geométrica dos fenômenos envolvidos, estimulando uma visualização mental precisa das curvas estudadas.

Darboux compreendeu a importância de explorar, primeiro, as propriedades qualitativas das curvas para, em seguida, formalizá-las por meio de equações algébricas. Essa abordagem, hoje amplamente recomendada no ensino de geometria e análise, era inovadora para seu tempo e revela um cuidado pedagógico explícito.

Entre as observações qualitativas mais relevantes estão aquelas relacionadas às curvas notáveis geradas pelos cortes planos no toro. Ao descrever as interseções específicas que originam os círculos de Villarceau, Darboux evidencia a presença inesperada de círculos perfeitos em uma superfície aparentemente simples, oferecendo uma visão geométrica expressiva sobre o comportamento das superfícies curvas.

Da mesma maneira, suas análises sobre as ovais de Cassini ressaltam a conexão entre geometria analítica e estudo qualitativo de superfícies. Ele mostra como variações na posição relativa entre o toro e o plano secante conduzem a curvas com diferentes características qualitativas. Em certos casos, essas curvas lembram elipses alongadas; em outros, transformam-se em lemniscatas ou resultam em curvas disjuntas. A descrição dessas transições é um recurso valioso para o ensino, pois enfatiza o papel do raciocínio geométrico intuitivo como etapa prévia ao formalismo algébrico.

Além disso, Darboux analisa com atenção o caso limite das ovais de Cassini que dá origem à lemniscata de Bernoulli. Essa passagem pode ser explorada hoje com o apoio de softwares como o GeoGebra, permitindo visualizar de maneira contínua a transição entre diferentes curvas. A possibilidade de simular essas configurações reforça a atualidade do artigo para a formação matemática.

Nesse sentido, as seções tóricas descritas por Darboux oferecem ao professor e ao estudante um exemplo claro de como intuição geométrica, análise qualitativa e argumentação algébrica podem atuar em conjunto na construção do conhecimento matemático. Quando apresentadas em linguagem acessível e com apoio de recursos visuais, essas ideias ganham força como material de formação docente e de divulgação científica.

A partir desse panorama, o capítulo seguinte retoma o toro de revolução em uma perspectiva mais técnica, apresentando-o como superfície de revolução, lugar geométrico e superfície algébrica. Essa reconstrução servirá de base para compreender, de maneira clara, as seções tóricas estudadas por Darboux.

2 O QUE É O TORO: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

2.1 O toro e suas representações matemáticas

Dentre as superfícies frequentemente estudadas em geometria, o toro de revolução ocupa um lugar de destaque por reunir uma forma de fácil reconhecimento visual com propriedades matemáticas ricas. A proximidade com objetos do cotidiano, como uma câmara de pneu, favorece a intuição inicial e permite iniciar o estudo pela observação direta de sua estrutura espacial.

A organização deste capítulo foi inspirada pela leitura do artigo de Darboux e pela tradição geométrica em que ele se formou. Embora Darboux trabalhe diretamente com a equação cartesiana do toro, sua análise pressupõe um entendimento prévio da forma da superfície e das curvas que nela surgem. Optei, portanto, por tornar explícito esse percurso: começo pela geometria física do toro, como superfície de revolução, avanço para sua representação paramétrica e, por fim, chego à forma algébrica que sustentará a dedução das seções tóricas.

Esse movimento, da forma para a equação, dialoga com a perspectiva clássica sintetizada por Coxeter (1969, p. 2), destacando o papel da visualização como ponto de partida. Ao mesmo tempo, aproxima-se das ideias de D'Ambrosio (1996, p. 35), segundo as quais o conhecimento matemático nasce de práticas culturais, experiências cotidianas e modos de perceber o espaço. Assim, iniciar pela dimensão geométrica não é apenas um recurso didático, mas uma escolha epistemológica que integra história, intuição e formalização, permitindo tratar o toro como objeto central tanto para a discussão matemática quanto para a reflexão sobre práticas de ensino.

Nesta seção, o toro será analisado sob três perspectivas complementares: como superfície de revolução, como lugar geométrico e como superfície algébrica de grau 4 em \mathbb{R}^3 . Cada uma dessas abordagens evidencia aspectos distintos de sua estrutura e estabelece a base conceitual para o estudo das seções tóricas, tema central deste trabalho, ao mesmo tempo em que oferece subsídios para uma exploração acessível da geometria do toro no contexto da formação docente.

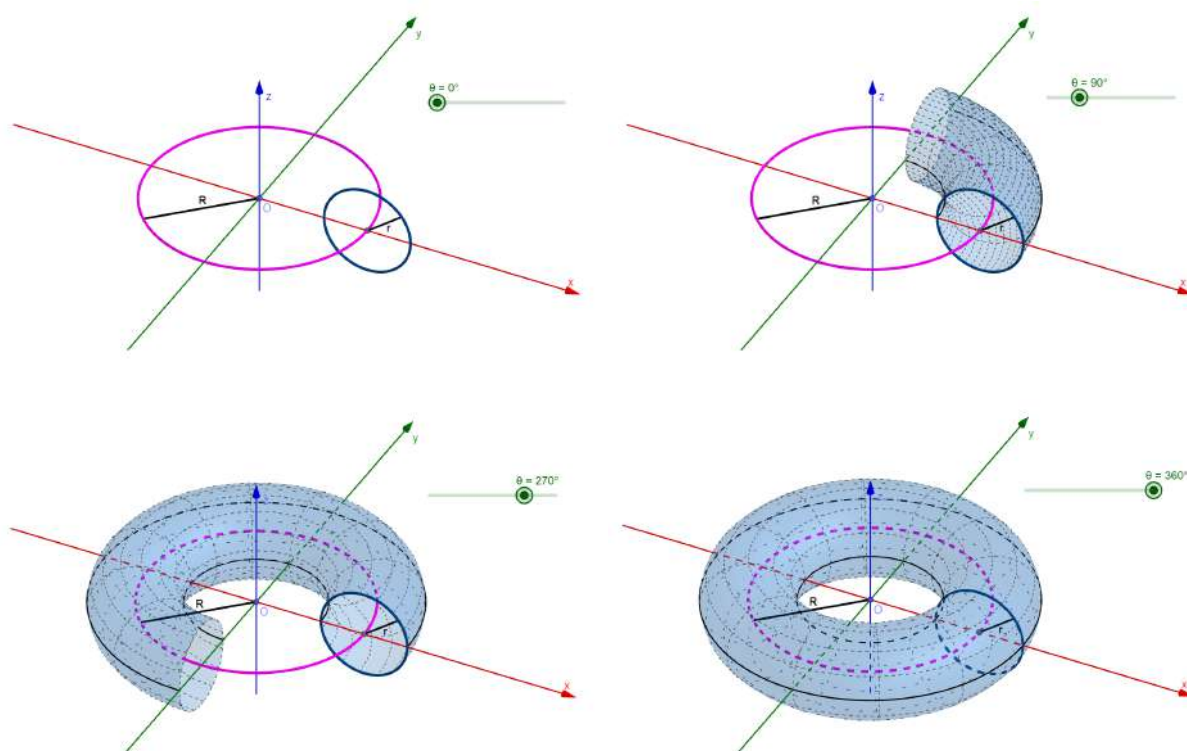
O toro pode ser construído geometricamente pela rotação de um círculo de raio r , com centro no ponto $(R, 0, 0)$ do plano xz , em torno do eixo z , assumindo $R > r > 0$.¹ Essa condição define o *toro anular*, no qual a superfície não apresenta autointerseção. O objeto obtido é uma superfície regular, fechada e com simetria axial. Tal construção evidencia sua natureza de

¹ No caso $R = r$, obtém-se o chamado *toro de chifre*, tangente ao eixo de rotação; para $R < r$, surge o *toro fusiforme*, no qual a superfície apresenta autointerseção (Do Carmo, 2016).

superfície de revolução e conduz a uma parametrização natural, particularmente útil para fins de visualização em ambientes computacionais, como o *GeoGebra*.

Considera-se um círculo de raio $r = 1$, situado no plano xz e com centro em $(2,5, 0, 0)$. A rotação desse círculo em torno do eixo z gera um toro de revolução. A Figura 1 ilustra quatro posições do círculo correspondentes aos ângulos de rotação 0° , 90° , 270° e 360° .

Figura 1 – Construção do toro de revolução por rotação de um círculo



Fonte: O autor, 2025.

Do ponto de vista analítico, o toro pode ser parametrizado por dois ângulos: um que percorre a circunferência geratriz, e outro que representa a rotação dessa geratriz em torno do eixo z . Para evitar ambiguidade com a notação das coordenadas do plano de corte nas seções seguintes, adotaremos os símbolos θ e ϕ nesta parametrização. Seja ϕ o ângulo que localiza um ponto na circunferência geratriz (no plano vertical), e θ o ângulo da rotação em torno do eixo z . Com esses parâmetros, a superfície é descrita por:

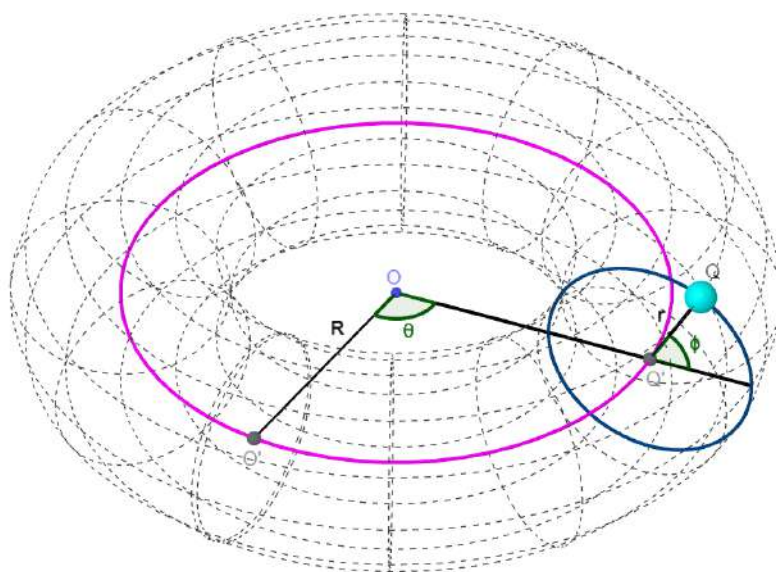
$$\mathbf{T}(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi) \quad (2.1)$$

com $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

A escolha do intervalo semiaberto $[0, 2\pi)$ evita a sobreposição de pontos, já que 0 e 2π representam a mesma direção angular.

Para cada valor fixo de ϕ , define-se um ponto na circunferência geratriz vertical, situada no plano xz e de raio r . A variação de θ , por sua vez, realiza a rotação dessa geratriz em torno do eixo z , gerando circunferências horizontais no plano xy , de raio $R + r \cos \phi$. Essa parametrização revela com clareza a estrutura do toro como superfície de revolução, além de ser especialmente adequada para visualizações computacionais e para o estudo de propriedades locais. A Figura 2 ilustra essa construção, destacando os ângulos θ e ϕ , bem como os raios R e r .

Figura 2 – Malha paramétrica do toro com destaque para os parâmetros geométricos



Fonte: O autor, 2025.

Partimos agora da representação paramétrica para alcançar, de forma sucessiva, a representação algébrica do toro, eliminando os parâmetros θ e ϕ a fim de obter uma equação que relacione apenas as coordenadas cartesianas (x, y, z) .

A partir da parametrização, temos:

$$x = (R + r \cos \phi) \cos \theta, \quad y = (R + r \cos \phi) \sin \theta.$$

Elevando ao quadrado e somando:

$$x^2 + y^2 = (R + r \cos \phi)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (R + r \cos \phi)^2.$$

Como $R + r \cos \phi > 0$, podemos extrair a raiz:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R + r \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \quad \sin \phi = \frac{z}{r}.$$

Substituindo na identidade trigonométrica $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r} \right)^2 + \left(\frac{z}{r} \right)^2 = 1. \quad (2.2)$$

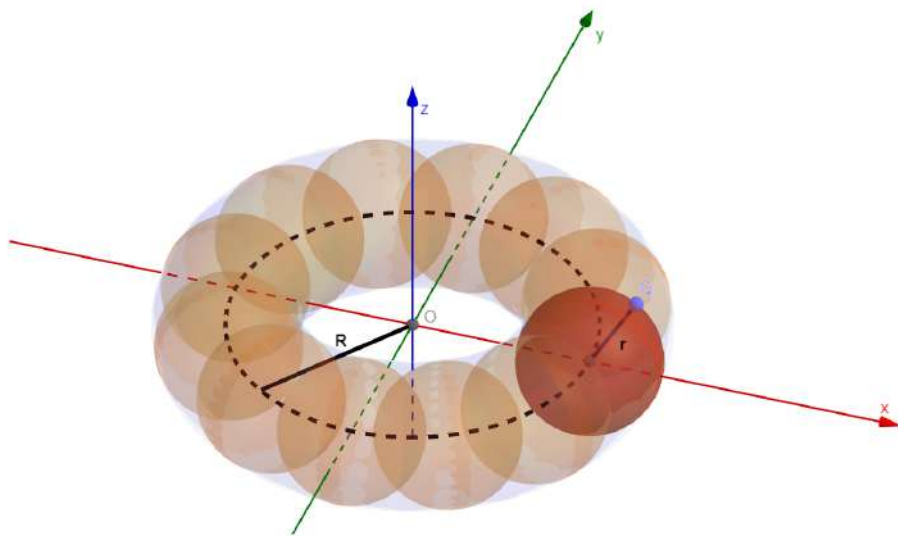
Multiplicando ambos os lados por r^2 , chegamos à forma intermediária

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2. \quad (2.3)$$

que ainda envolve uma raiz quadrada, mas prepara a passagem para a representação algébrica final do toro.

Essa expressão descreve o toro como o conjunto dos pontos do espaço que mantêm distância constante r de uma circunferência plana de raio R , centrada na origem e situada no plano xy . Trata-se da definição métrica adotada por Darboux em sua formulação original da superfície, e que fundamenta a compreensão intuitiva da estrutura tubular do toro. A Figura 3 ilustra essa interpretação geométrica.

Figura 3 – Interpretação do toro como lugar geométrico



Fonte: O autor, 2025.

Desenvolvendo agora a equação (2.3), obtemos sua forma algébrica explícita:

$$x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + R^2 + z^2 = r^2,$$

$$\Rightarrow -2R\sqrt{x^2 + y^2} = r^2 - x^2 - y^2 - z^2 - R^2.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$4R^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2,$$

ou, de forma mais usual:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2). \quad (*)$$

Essa é a **equação cartesiana do toro**, uma quártica bicircular que define a superfície como uma variedade algébrica de grau 4 em \mathbb{R}^3 . Ela será a base para a investigação das curvas geradas pela interseção do toro com planos, as chamadas *seções tóricas*.

Esta construção articula, de forma integrada, as três representações fundamentais do toro, geométrica, paramétrica e cartesiana, e estabelece o alicerce conceitual para as etapas seguintes deste trabalho: a parametrização dos planos de corte e a dedução das equações das curvas de interseção, conhecidas como seções tóricas. Essas curvas serão descritas em um sistema de coordenadas local, construído de acordo com a geometria do plano secante.

2.2 Parametrização do plano de corte

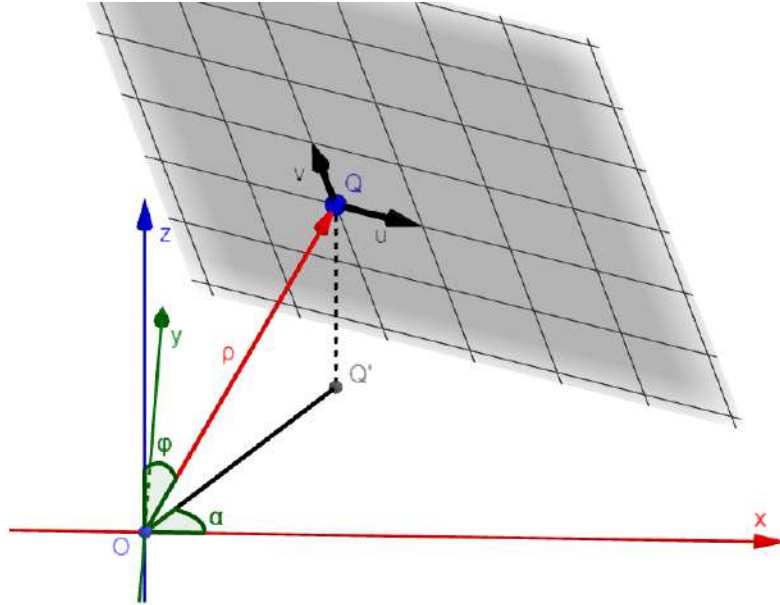
O plano de corte, ilustrado na Figura 4, será descrito por três parâmetros geométricos: a distância ρ , que mede o comprimento do vetor \overrightarrow{OQ} ; o ângulo α , que define a direção azimutal da projeção do ponto Q no plano xy ; e o ângulo φ , que expressa a inclinação de \overrightarrow{OQ} em relação ao eixo z .

A escolha por parametrizar o plano de corte a partir de coordenadas esféricas centradas na origem se justifica tanto por razões geométricas quanto pedagógicas. Do ponto de vista geométrico, o vetor \overrightarrow{OQ} fixa, ao mesmo tempo, a posição do ponto Q no espaço e a orientação global do plano. Do ponto de vista didático, essa descrição permite relacionar de modo direto os parâmetros ρ , α e φ às figuras em coordenadas esféricas habitualmente presentes nos livros de cálculo vetorial.

As coordenadas cartesianas de Q são dadas por

$$Q = (\rho \cos \alpha \sin \varphi, \rho \sin \alpha \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Figura 4 – Representação do plano de corte em coordenadas esféricas



Fonte: O autor, 2025.

A partir desse ponto, introduzimos um sistema de coordenadas locais (u, v) no próprio plano. Para isso, escolhemos dois vetores diretores ortonormais \vec{e}_u e \vec{e}_v , contidos no plano e ortogonais entre si, de modo que qualquer ponto do plano possa ser escrito na forma

$$X(u, v) = Q + u\vec{e}_u + v\vec{e}_v.$$

O primeiro vetor diretor é tomado no plano xy , perpendicular à projeção de \overrightarrow{OQ} nesse plano. Definimos

$$\vec{e}_u = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0).$$

Trata-se de um vetor unitário, tangente à circunferência de raio $\rho \sin \varphi$ no plano xy e ortogonal ao vetor $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, que aponta na direção da projeção de Q .

O segundo vetor diretor é escolhido de modo a capturar a inclinação do plano de corte. Partimos da direção radial associada a Q e a inclinamos por um ângulo φ em torno do eixo que passa por \vec{e}_u . Isso conduz ao vetor unitário

$$\vec{e}_v = (\cos \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \cos \varphi, -\sin \varphi).$$

Observe que, para $\varphi = 0$, tem-se $\vec{e}_v = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, isto é, um vetor inteiramente contido no plano xy . À medida que φ aumenta, a componente vertical $-\sin \varphi$ entra em cena e o plano passa a se inclinar em relação ao plano horizontal.

Um cálculo direto mostra que

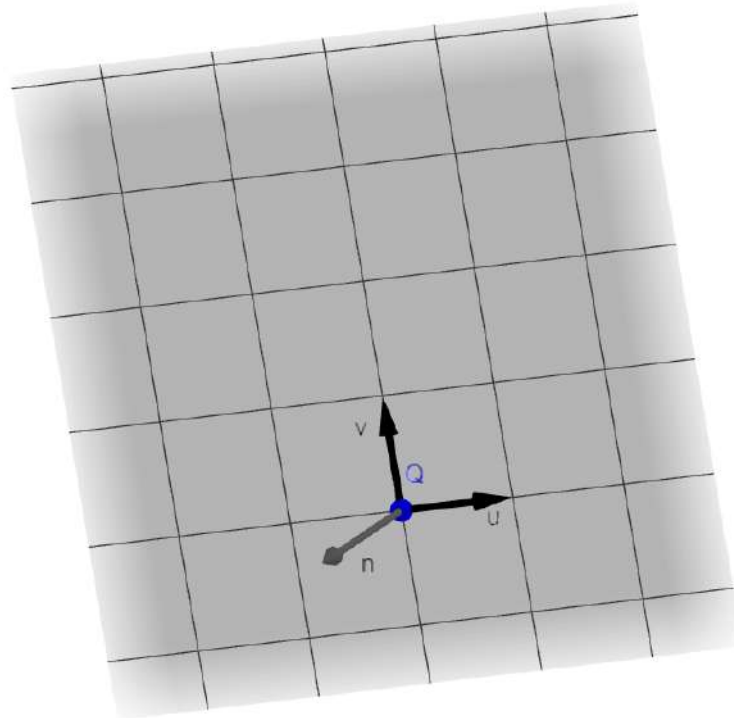
$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u = 1, \quad \vec{e}_v \cdot \vec{e}_v = 1, \quad \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0,$$

de modo que $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ forma, de fato, uma base ortonormal do plano de corte. As coordenadas locais u e v medem, respectivamente, o deslocamento na direção tangencial horizontal e na direção inclinada do plano.

Substituindo Q , \vec{e}_u e \vec{e}_v em $X(u, v) = Q + u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$, obtemos explicitamente:

$$\begin{cases} x(u, v) = \rho \sin \varphi \cos \alpha - u \sin \alpha + v \cos \alpha \cos \varphi, \\ y(u, v) = \rho \sin \varphi \sin \alpha + u \cos \alpha + v \sin \alpha \cos \varphi, \\ z(u, v) = \rho \cos \varphi - v \sin \varphi. \end{cases}$$

Figura 5 – Detalhamento do plano secante no ponto Q



Fonte: O autor, 2025.

Na Figura 5, esse sistema coordenado local, alinhado à orientação do plano, é introduzido e será essencial na dedução da equação da seção tórica. A construção dos vetores \vec{e}_u , \vec{e}_v e da normal $\vec{n} = \vec{e}_u \times \vec{e}_v$ forma um triedro ortogonal que acompanha as simetrias do problema, em sintonia com o modo como Darboux organiza suas leituras geométricas.

2.3 Equação implícita da curva de interseção entre o toro e o plano secante

A partir deste ponto, buscamos deduzir a equação da curva de interseção entre o toro e o plano de corte. Para isso, substituímos as expressões parametrizadas de $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ na equação implícita do toro.

Cálculo de $x^2 + y^2$:

Partimos das seguintes expressões, resultantes da parametrização do plano:

$$\begin{cases} x(u, v) = \rho \sin \varphi \cos \alpha - u \sin \alpha + v \cos \alpha \cos \varphi, \\ y(u, v) = \rho \sin \varphi \sin \alpha + u \cos \alpha + v \sin \alpha \cos \varphi \end{cases}$$

Para facilitar os cálculos, decompomos as expressões em três parcelas:

$$x = A + B + C, \quad y = D + E + F$$

em que:

$$\begin{aligned} A &= \rho \sin \varphi \cos \alpha, & B &= -u \sin \alpha, & C &= v \cos \alpha \cos \varphi, \\ D &= \rho \sin \varphi \sin \alpha, & E &= u \cos \alpha, & F &= v \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

A soma dos quadrados é, portanto:

$$x^2 + y^2 = (A + B + C)^2 + (D + E + F)^2$$

Expansão dos termos:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(D + E + F)^2 = D^2 + E^2 + F^2 + 2DE + 2DF + 2EF$$

Somando todos os termos:

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + 2(AB + AC + BC + DE + DF + EF)$$

Cálculo dos termos individuais:

$$A^2 + D^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho^2 \sin^2 \varphi$$

$$B^2 + E^2 = u^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = u^2$$

$$C^2 + F^2 = v^2 \cos^2 \varphi (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = v^2 \cos^2 \varphi$$

Cálculo dos termos mistos:

$$AB + DE = -\rho u \sin \varphi \cos \alpha \sin \alpha + \rho u \sin \varphi \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$AC + DF = \rho v \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho v \sin \varphi \cos \varphi$$

$$BC + EF = -uv \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi + uv \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi = 0$$

Reunindo os resultados:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + u^2 + v^2 \cos^2 \varphi + 2\rho v \sin \varphi \cos \varphi$$

Essa soma pode ser reescrita de forma compacta como:

$$x^2 + y^2 = u^2 + (\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2$$

Concluimos, assim, a parte mais algébrica da substituição. A seguir, tratamos do cálculo de z^2 , cuja expressão resulta diretamente da parametrização apresentada anteriormente.

Cálculo de z^2

A coordenada z na parametrização do plano é dada por:

$$z(u, v) = \rho \cos \varphi - v \sin \varphi$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$z^2 = (\rho \cos \varphi - v \sin \varphi)^2$$

Substituição Final

Substituindo as expressões de $x^2 + y^2$ e z^2 na equação do toro, obtemos:

$$(u^2 + (\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (u^2 + (\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2)$$

Expandindo os dois termos quadráticos:

$$(\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + 2\rho v \sin \varphi \cos \varphi + v^2 \cos^2 \varphi \quad (2.4)$$

$$(\rho \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi - 2\rho v \sin \varphi \cos \varphi + v^2 \sin^2 \varphi \quad (2.5)$$

Somando as equações (1) e (2), obtemos:

$$\rho^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + v^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 + v^2$$

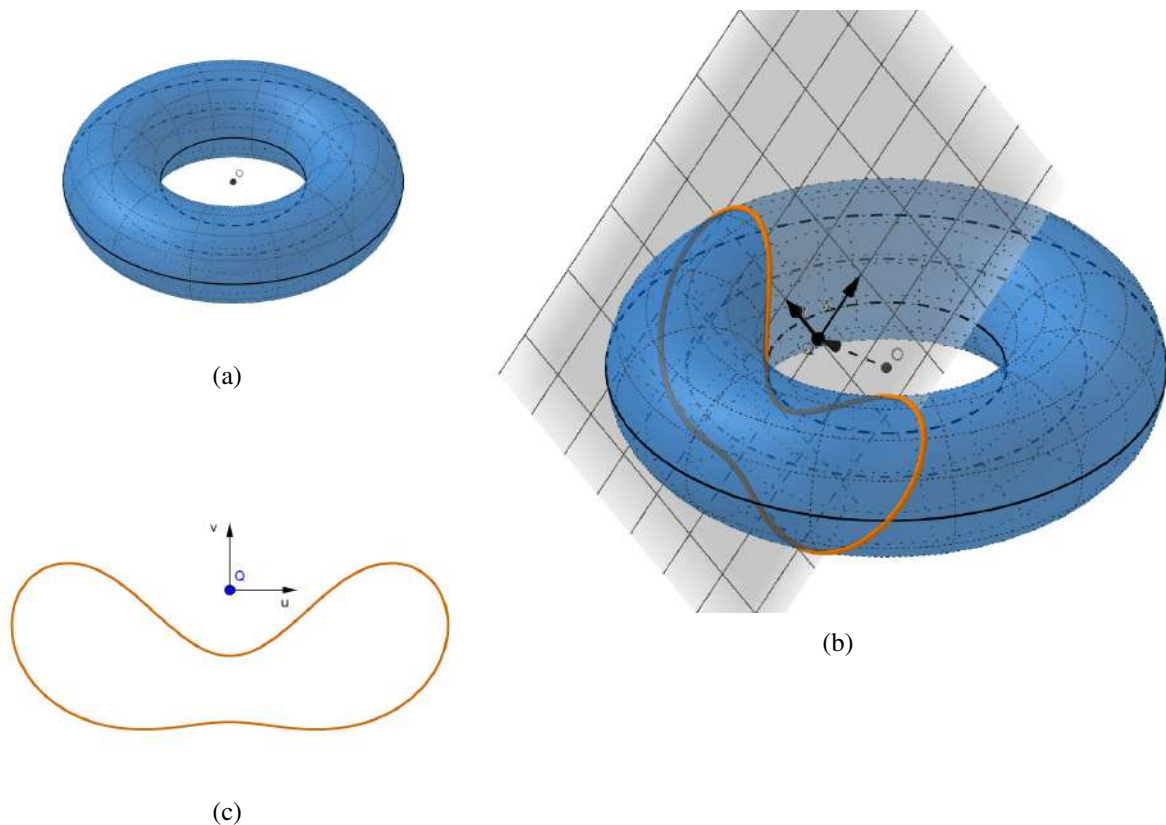
Portanto, a equação do toro, restrita ao plano de corte, assume a forma final:

$$(u^2 + \rho^2 + v^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (u^2 + (\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2). \quad (2.6)$$

Essa é a equação implícita da curva de interseção entre o toro e o plano secante, chamada *seção tórica*, escrita em um sistema de coordenadas locais adaptado ao próprio plano de corte. Esse sistema, construído a partir da geometria do toro e da orientação do plano, permite descrever a curva de modo preciso e evidencia simetrias e propriedades métricas que, de outro modo, permaneceriam ocultas.

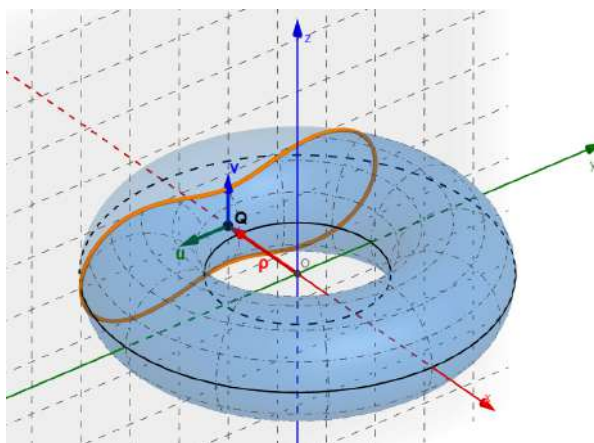
A Figura 6 apresenta a sequência visual da construção da seção tórica: (a) o toro de revolução; (b) o toro com o plano secante; (c) a curva resultante da interseção, destacada no plano.

Figura 6 – Sequência visual da construção da seção tórica



Na Figura 7, apresenta-se a visualização do plano secante parametrizado sobre o toro, com destaque para as direções locais u e v , o ponto Q e a curva de interseção correspondente à seção tórica. Essa representação traduz geometricamente a substituição realizada na equação do toro, tornando explícita a relação entre a construção analítica e sua interpretação geométrica.

Figura 7 – Plano secante parametrizado sobre o toro



Fonte: O autor, 2025.

Nesse referencial:

- u representa a direção horizontal no plano de corte;
- v corresponde à direção vertical no plano de corte, ortogonal a u ;
- ρ determina a posição do plano no espaço, medida a partir da origem.

As variáveis u , v e ρ , portanto, não coincidem com coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas usuais, mas formam um sistema local ajustado à simetria do problema. Essa abordagem se aproxima da tradição geométrica de Darboux, que recorria com frequência a sistemas adaptados para tornar mais visíveis as estruturas das superfícies.

Com a equação da seção tórica em mãos, abre-se um novo horizonte de investigação: o estudo das curvas que emergem dessas interseções. Ao variarmos os parâmetros do plano de corte, observaremos o surgimento de figuras de grande interesse matemático e estético, como os círculos de Villarceau, as ovais de Cassini e as lemniscatas de Bernoulli. Essas curvas, que nascem da interação entre simetria e inclinação, evidenciam a profundidade geométrica do toro e oferecem possibilidades concretas de exploração didática no contexto da formação de professores de matemática.

3 AS CURVAS NOTÁVEIS NO ARTIGO *SUR LES SECTIONS DU TORE*

Neste capítulo, analisamos as curvas notáveis que resultam da interseção do toro de revolução com planos em diferentes orientações. Tais interseções, denominadas de forma geral *seções tóricas*, revelam uma diversidade de configurações geométricas, que vão das *ovais de Cassini* e da *lemniscata de Bernoulli* aos *círculos de Villarceau*, cada qual dotado de propriedades algébricas e geométricas próprias.

Partiremos da equação geral da seção tórica, deduzida no capítulo anterior, e a especializaremos para cortes verticais e oblíquos, de modo a evidenciar três famílias centrais de curvas: os *círculos de Villarceau*, as *ovais de Cassini* e a *lemniscata de Bernoulli*.

Nosso objetivo é examinar essas curvas como objetos matemáticos: sua origem geométrica, dedução algébrica, propriedades visuais e simetrias, articulando-as ainda a recursos didáticos representações no GeoGebra. Essa análise constitui o núcleo do artigo de Darboux (1864) e, por consequência, um dos eixos centrais desta dissertação, ao mostrar como a geometria diferencial pode se desdobrar em fenômenos simultaneamente rigorosos e acessíveis no ensino.

3.1 As ovais de Cassini

As chamadas *ovais de Cassini*¹ surgem naturalmente no estudo das seções planas do toro de revolução. Em particular, Darboux (1864) demonstra que determinadas interseções por *planos verticais*, isto é, paralelos ao plano xz , conduzem a curvas cujo lugar geométrico é o conjunto dos pontos cujas distâncias a dois focos fixos possuem produto constante. Trata-se precisamente da caracterização clássica das ovais de Cassini.

3.1.1 Definição e origem

As ovais devem seu nome a Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), que as introduziu em 1680 no contexto de estudos sobre movimentos celestes. Na formulação original, uma oval de Cassini é o *lugar geométrico dos pontos P do plano cujo produto das distâncias a dois focos fixos F_1 e F_2 é constante*. Formalmente, para uma constante $k > 0$,

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = k.$$

¹ Embora também designadas como “elipses de Cassini”, o termo “ovais” mostra-se mais adequado, pois a família abrange formas não elípticas, como a lemniscata de Bernoulli e curvas com componentes desconexas.

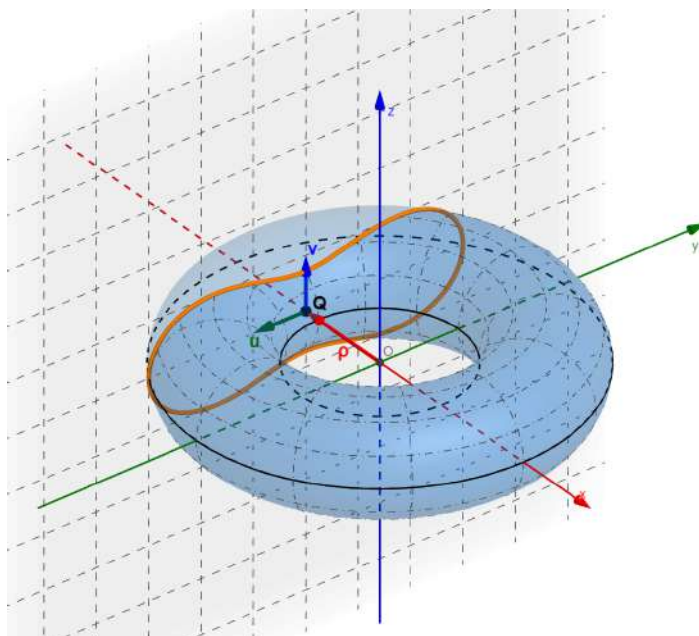
Trata-se de uma generalização distinta da elipse, na qual a condição métrica envolve o **produto**, e não a soma, das distâncias aos focos. Em notação moderna, considerando os focos em $(\pm a, 0)$ e um parâmetro positivo c , obtém-se a forma algébrica clássica

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4. \quad (3.1)$$

3.1.2 Do toro de revolução às ovais

Considere o toro de revolução definido pelos parâmetros $R > r > 0$, em que R é o raio maior e r o raio menor. Darboux (1864) mostra que, ao cortar o toro por um plano vertical paralelo ao eixo de revolução, a interseção resultante é uma *seção tórica* descrita por uma curva algébrica de quarta ordem. Em condições específicas, essa curva coincide com uma *oval de Cassini*, estabelecendo de modo elegante a correspondência entre uma superfície tridimensional e um lugar geométrico plano, como ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Toro cortado por plano vertical com sistema de coordenadas local



Fonte: O autor, 2025.

3.1.3 Dedução a partir da equação da seção tórica

Partimos da equação geral da seção tórica para um plano com inclinação φ :

$$(u^2 + \rho^2 + v^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + (\rho \sin \varphi + v \cos \varphi)^2). \quad (3.2)$$

No caso vertical ($\varphi = 0$), obtém-se

$$(u^2 + \rho^2 + v^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + \rho^2). \quad (3.3)$$

Como a curva de interseção está contida no próprio plano do corte, restringimos a equação a esse plano impondo $v = 0$. Assim, resulta

$$(u^2 + \rho^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + \rho^2). \quad (3.4)$$

Definindo $b^2 = R^2 - r^2$, a equação (3.4) reescreve-se como

$$(u^2 + \rho^2 + b^2)^2 = 4R^2(u^2 + \rho^2), \quad (3.5)$$

o que caracteriza uma quártica plana em (u, ρ) .

3.1.4 Equivalência com a forma clássica das ovais de Cassini

Expandindo a equação (3.5), obtém-se

$$(u^2 + \rho^2)^2 + 2b^2(u^2 + \rho^2) + b^4 = 4R^2(u^2 + \rho^2),$$

ou, de forma rearranjada,

$$(u^2 + \rho^2)^2 - 2(R^2 - b^2)(u^2 + \rho^2) + b^4 = 0. \quad (3.6)$$

Por outro lado, a forma clássica das ovais de Cassini, com focos em $(\pm a, 0)$, é dada por

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4. \quad (3.7)$$

Identificando $u = x$ e $\rho = y$, e adotando $a = R$ e $c = b$, percebe-se que o produto

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2]$$

expande-se exatamente na expressão

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(R^2 - b^2)(x^2 + y^2) + b^4,$$

que é a forma obtida em (3.6). Assim, as equações (3.6) e (3.7) são algébrica e estruturalmente equivalentes: ambas representam o mesmo lugar geométrico, descrito ora como seção vertical do toro, ora como curva clássica de Cassini.

Darboux (1864) deteve-se justamente nessa equivalência para relacionar o toro às ovais de Cassini em sua forma clássica. A partir desse ponto, torna-se natural investigar como a comparação entre os parâmetros a e c determina diferentes morfologias da curva. Essa análise, acompanhada aqui por construções visuais no GeoGebra, constitui o tema da subseção seguinte.

3.1.5 Morfologias e classificação

Na forma clássica (3.1), com focos em $(\pm a, 0)$, a morfologia da curva depende da relação entre os parâmetros c e a :

- duas componentes desconexas, se $c < a$;
- lemniscata de Bernoulli, no caso crítico, se $c = a$;
- oval convexa e simples, se $c > a$.

No contexto do toro, quando o plano vertical escolhido impõe $a = R$ e $c = b = \sqrt{R^2 - r^2}$, a morfologia da seção depende não apenas de R e r , mas também da posição do plano vertical em relação ao eixo de revolução. Para fins de ilustração, fixamos $R = 3$ e $r = 1$, de modo que o toro permanece constante. As diferentes formas surgem, então, ao variar a posição do plano, controlada pelo parâmetro ρ . Valores distintos de ρ produzem as três morfologias previstas por Cassini: duas componentes desconexas, a lemniscata crítica e a oval convexa e simples.

As diferentes morfologias possíveis das ovas de Cassini, incluindo o caso limite da lemniscata de Bernoulli, podem ser visualizadas nas Figuras 9, 10 e 11, obtidas por meio de construções no GeoGebra.

Figura 9 – Oval de Cassini com duas componentes desconexas

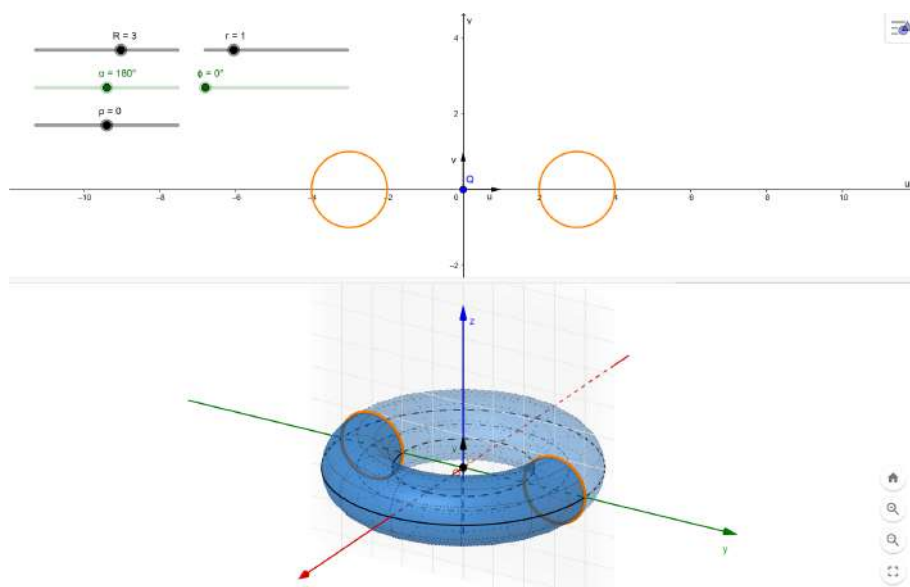
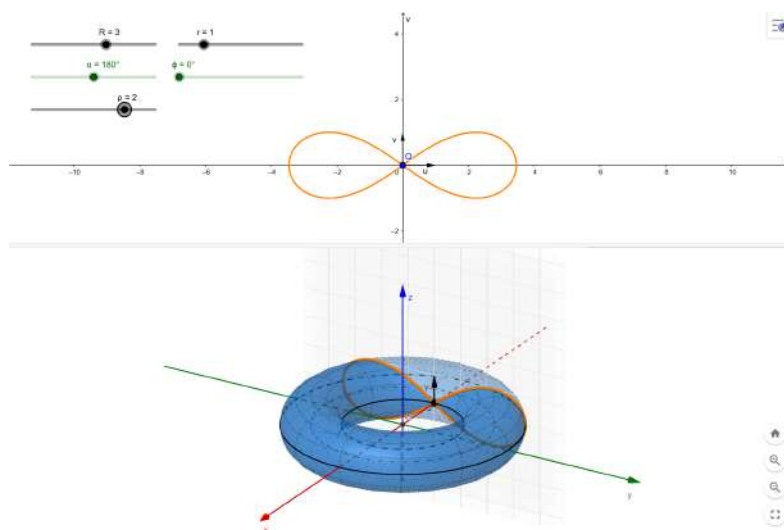
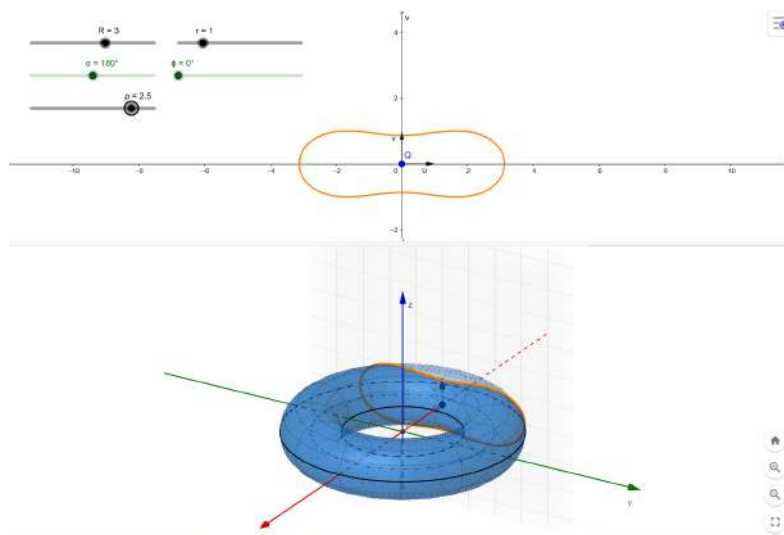


Figura 10 – Lemniscata de Bernoulli



Fonte: O autor, 2025.

Figura 11 – Oval de Cassini convexa e simples



Fonte: O autor, 2025.

A diversidade das morfologias ilustradas revela não apenas a riqueza algébrica e geométrica das ovas de Cassini, mas também o seu potencial pedagógico. A possibilidade de transitar entre curvas clássicas e cortes de uma superfície tridimensional, agora tornada visível no GeoGebra, abre espaço para discussões que vão além da formalização matemática. Esse aspecto justifica uma análise específica de sua importância didática e visual.

3.1.6 Importância didática e visual

As ovas de Cassini oferecem um elo acessível entre a noção de lugar geométrico no plano e a de seções de superfícies no espaço. Sua exploração apresenta potencial didático por diferentes razões:

- estabelecem uma conexão direta entre uma superfície tridimensional, o toro, e curvas planas notáveis;
- introduzem quárticas planas em um ambiente visual e investigativo, favorecendo a intuição do estudante;
- permitem explorações dinâmicas no GeoGebra, por meio do controle de parâmetros e da posição do plano de corte;
- reforçam a leitura de simetrias, de focos e de transições morfológicas, nos casos $c < a$, $c = a$ e $c > a$.

A visualização desses fenômenos amplia a compreensão de conceitos abstratos e oferece ao professor de matemática um recurso valioso para articular a geometria clássica com abordagens exploratórias contemporâneas.

3.1.7 Referências cruzadas e notas históricas

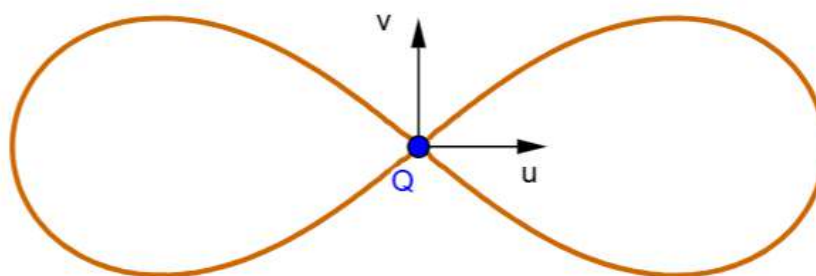
Essas curvas ocupam papel central no *Teorema I* e no *Corolário I* de Darboux (1864). Leituras modernas, como Moroni (*The Toric Sections: a Simple Introduction*, 2021), destacam as ovas como casos canônicos de seções verticais do toro. A tradição das curvas focais também aparece em Berger (*Géométrie, I*). Essa rede de referências sustenta o lugar das ovas de Cassini como peça-chave para compreender a geometria do toro e seu potencial formativo.

A análise realizada mostra que as seções verticais do toro são quárticas planas cuja expressão é equivalente à forma clássica das ovas de Cassini. A depender da posição do plano, emergem as três morfologias conhecidas. Essa ponte entre geometria espacial, álgebra e história oferece um caminho fértil para o ensino e a formação docente, e prepara a discussão da curva crítica dessa família, a lemniscata de Bernoulli.

3.2 A Lemniscata de Bernoulli

A presença da lemniscata como caso crítico das ovais de Cassini, mencionada na seção anterior, justifica uma análise independente. Essa curva, representação pela Figura 12, marca a transição entre diferentes morfologias da família de Cassini e mostra como pequenos ajustes nos parâmetros podem alterar de modo decisivo a topologia do lugar geométrico. Sua investigação aprofunda a leitura do artigo *Sur les sections du tore*, de Darboux (1864), e oferece aos professores um campo fértil para explorar continuidade, simetria e singularidade no ensino de geometria.

Figura 12 – Lemniscata de Bernoulli no plano de corte



Fonte: O autor, 2025.

3.2.1 Origem histórica e vínculo com a família Bernoulli

A lemniscata foi introduzida por Jakob Bernoulli no final do século XVII, motivada por problemas de quadratura e como alternativa às elipses em modelos astronômicos. O nome deriva do latim *lemniscatus* (laço), em alusão à sua forma em “ ∞ ”. Tornou-se objeto de intenso estudo, sobretudo na teoria das funções elípticas, pela riqueza de suas propriedades.

O estudo da lemniscata não se limitou a Jakob Bernoulli. Euler aprofundou sua investigação ao analisar integrais relacionadas ao comprimento de arco da curva, e Gauss dedicou parte significativa de sua pesquisa à inversão dessas integrais, processo que culminou na formulação das funções elípticas. A lemniscata de Bernoulli, portanto, não apenas ocupa lugar de destaque

na geometria clássica, mas também serviu de alicerce para desenvolvimentos fundamentais da análise matemática.

No artigo de Darboux, a lemniscata aparece implicitamente como o caso crítico das ovais de Cassini: o momento em que duas componentes desconexas se fundem em um laço simétrico. Embora Darboux não a nomeie diretamente como *lemniscata de Bernoulli*, sua análise da família de curvas inclui esse limite estrutural.

3.2.2 A lemniscata como caso crítico das ovais de Cassini

Na forma clássica das ovais de Cassini,

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4,$$

a morfologia da curva depende da relação entre c e a (metade da distância entre os focos):

- $c < a$: duas componentes desconexas;
- $c = a$: lemniscata de Bernoulli;
- $c > a$: curva convexa e simples.

Portanto, a lemniscata surge exatamente quando a constante c iguala a metade da distância entre os focos. No toro, onde identificamos $a = R$ e $c = b = \sqrt{R^2 - r^2}$, essa condição corresponderia a $b = R$, ou seja, a um limite teórico em que $r \rightarrow 0$. Embora tal caso não ocorra como seção regular de um toro espesso, ele conecta de forma natural a geometria do toro às propriedades clássicas da família de Cassini.

Do ponto de vista exploratório, entretanto, é possível aproximar esse caso no GeoGebra. Mantendo fixos R e r , e variando apenas a posição do plano vertical, controlada pelo parâmetro ρ , observam-se as três morfologias previstas pela teoria, incluindo a transição crítica que dá origem à lemniscata de Bernoulli. Essa leitura prepara a análise visual e didática apresentada a seguir.

3.2.3 Equações cartesianas e polares

A lemniscata admite diferentes formas algébricas equivalentes:

- forma cartesiana:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);$$

- forma polar:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta).$$

Essas representações tornam explícita sua simetria e permitem análises métricas e paramétricas.

3.2.4 Propriedades e simetrias

A lemniscata apresenta propriedades marcantes:

- simetria em relação aos eixos coordenados;
- um ponto duplo (auto-interseção) na origem;
- dois laços congruentes conectados no centro;
- parametrizações racionais em termos de funções elípticas.

3.2.5 Visualizações e aplicações didáticas

Visualizar a lemniscata como transição dentro da família de Cassini tem grande valor pedagógico. Utilizando softwares como GeoGebra, pode-se acompanhar de forma dinâmica como a variação de um parâmetro altera a topologia da curva.

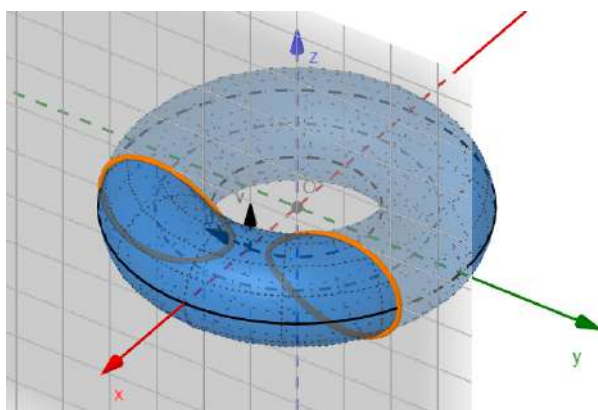
No contexto do toro, fixando $R = 3$ e $r = 1$, a posição do plano vertical em relação ao eixo é controlada pelo parâmetro ρ . Alterando apenas o valor de ρ , observam-se as três morfologias clássicas:

- para certos valores de ρ , duas componentes desconexas ($c < a$);
- para um valor crítico de ρ , a lemniscata de Bernoulli ($c = a$);
- para valores distintos do crítico, uma oval convexa e simples ($c > a$).

Essas três situações estão ilustradas, respectivamente, nas Figuras 13, 14 e 15.

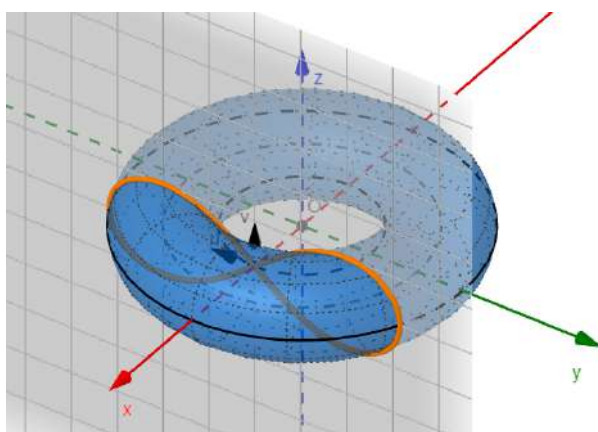
A lemniscata de Bernoulli, ao se manifestar como o caso crítico das ovals de Cassini, sintetiza o diálogo entre álgebra, geometria espacial e história da matemática. Seu estudo mostra como uma transição topológica pode ser tornada visível e investigável com ferramentas modernas como o GeoGebra, oferecendo ao ensino de matemática um recurso poderoso para discutir continuidade, simetria e singularidade. Encerrada essa análise, voltamo-nos agora a

Figura 13 – Seção vertical com duas componentes desconexas



Fonte: O autor, 2025.

Figura 14 – Lemniscata de Bernoulli, caso crítico



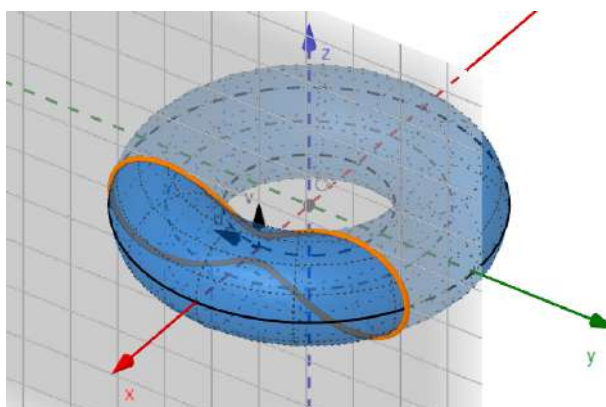
Fonte: O autor, 2025.

outra família de curvas notáveis que emergem das seções do toro, os círculos de Villarceau, cuja descoberta histórica e elegância geométrica oferecem novos desdobramentos à leitura de Darboux.

3.3 Os círculos de Villarceau

Os chamados *círculos de Villarceau* emergem como seções notáveis do toro de revolução quando este é cortado por um plano oblíquo cuidadosamente escolhido. Ao contrário dos cortes horizontais ou verticais, o plano deve ser inclinado de forma a conter dois pontos diametralmente opostos da circunferência maior do toro. O resultado é a interseção da superfície com esse plano em duas curvas perfeitamente circulares e simétricas, os círculos de Villarceau.

Figura 15 – Oval convexa e simples



Fonte: O autor, 2025.

Esse fenômeno foi observado pela primeira vez por Jean-Baptiste Villarceau, em 1848, e mais tarde formalizado analiticamente por Jean-Gaston Darboux, em 1864. A descoberta revela que, sob uma condição muito específica de inclinação, o toro admite uma seção circular, um caso raro dentro da tipologia geral das seções tóricas, que são, em sua maioria, curvas quárticas planas. A elegância visual desses círculos contrasta com a complexidade algébrica do toro, oferecendo um exemplo singular de simetria emergente (Darboux, 1864).

Além de seu interesse histórico e matemático, os círculos de Villarceau oferecem um recurso pedagógico valioso, pois permitem explorar simetrias, degenerações e propriedades algébricas em ambiente visual e interativo, especialmente com o apoio de softwares como o *GeoGebra*.

Na Figura 16, o toro é intersectado por um plano oblíquo que passa por dois pontos simétricos da superfície. Nessa configuração particular, a interseção não resulta em uma curva algébrica de quarto grau, mas em duas circunferências reais, conhecidas como círculos de Villarceau, cuja existência evidencia uma simetria geométrica notável do toro de revolução.

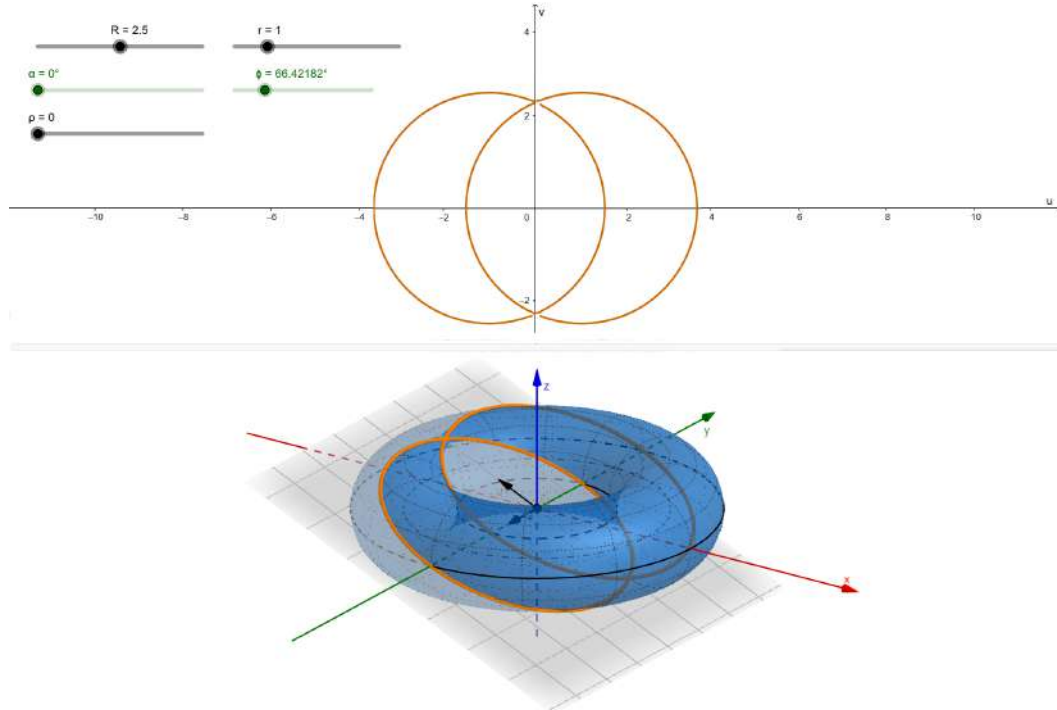
Nas subseções seguintes, analisaremos as condições de surgimento, a dedução algébrica detalhada, o contexto histórico e as possibilidades didáticas associadas a essa construção.

3.3.1 Condição para o surgimento

Proposição 3.1 (Proposição de Villarceau). *Seja o toro de revolução definido pelos parâmetros $R > r > 0$. Se o plano secante Π_φ forma ângulo φ tal que*

$$\tan \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

Figura 16 – Toro cortado por plano oblíquo e surgimento dos círculos de Villarceau



Fonte: O autor, 2025.

então a seção tórica $\Pi_\varphi \cap \text{Toro}(R, r)$ degenera na união de duas circunferências congruentes, denominadas círculos de Villarceau. Essa condição é necessária e suficiente para o surgimento dessa configuração.

3.3.2 Dedução algébrica a partir da seção tórica

Recorde que, no referencial ortonormal intrínseco ao plano de corte $\Pi_\varphi = \{(u, v)\}$, a seção tórica é dada por

$$(u^2 + v^2 + \rho^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + (\rho \cos \varphi - v \sin \varphi)^2), \quad (3.8)$$

onde $\rho > 0$ representa o deslocamento do sistema intrínseco em relação ao eixo do toro e $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ é o ângulo de inclinação de Π_φ .

Demonstração. A equação (3.8) pode ser escrita como

$$\mathcal{P}(u, v) = (u^2 + v^2 + K)^2 - 4R^2(u^2 + (\rho \cos \varphi - v \sin \varphi)^2), \quad K := \rho^2 + R^2 - r^2.$$

Efetuamos a translação vertical

$$v = y + b, \quad b := \rho \cot \varphi = \frac{\rho \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

pela qual $\rho \cos \varphi - (y + b) \sin \varphi = -y \sin \varphi$. Assim,

$$\mathcal{P}(u, y) = (u^2 + (y + b)^2 + K)^2 - 4R^2(u^2 + y^2 \sin^2 \varphi).$$

Expandindo o primeiro termo,²

$$(u^2 + (y + b)^2 + K)^2 = (u^2 + y^2)^2 + \alpha u^2 + \beta y^2 + \gamma(u^2 + y^2) + \delta + 4by(u^2 + y^2 + K + b^2),$$

onde

$$\alpha = 2(K + b^2), \quad \beta = 2(K + b^2) + 4b^2, \quad \gamma = 2(K + b^2), \quad \delta = (K + b^2)^2.$$

Subtraindo $4R^2(u^2 + y^2 \sin^2 \varphi)$, obtemos

$$\mathcal{P}(u, y) = (u^2 + y^2)^2 + (\alpha - 4R^2)u^2 + (\beta - 4R^2 \sin^2 \varphi)y^2 + \gamma(u^2 + y^2) + \delta + 4by(u^2 + y^2 + K + b^2).$$

Sob a condição de Villarceau, com $\rho = R \sin \varphi = r$, o termo linear em y é anulado, e a equação reduz-se a

$$\mathcal{P}(u, y) = (u^2 + y^2 - \rho^2)^2 - (2\rho u)^2.$$

Portanto, a equação quártica degenerou em produto de duas equações quadráticas:

$$\mathcal{P}(u, y) = ((u - \rho)^2 + y^2 - \rho^2) ((u + \rho)^2 + y^2 - \rho^2).$$

Logo, no quadro transladado (u, y) , os círculos estão centrados em $(\pm\rho, 0)$:

$$(u - \rho)^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad (u + \rho)^2 + y^2 = \rho^2.$$

Retornando à variável original $v = y + b$, conclui-se que os centros assumem a forma $(\pm\rho, \rho \cot \varphi)$, evidenciando a diferença entre os dois sistemas de coordenadas. Portanto, a interseção $\Pi_\varphi \cap \text{Toro}(R, r)$ se reduz, de fato, à união de duas circunferências congruentes, o que prova a proposição.

Observação (Interpretação geométrica). O parâmetro $b = \rho \cot \varphi$ indica a ordenada dos centros das circunferências em relação à origem de Π_φ . No sistema transladado (u, y) , os círculos estão centrados em $(\pm\rho, 0)$; no sistema original (u, v) , aparecem deslocados verticalmente. Ou seja, os círculos de Villarceau são simétricos em relação ao eixo u no plano intrínseco e aparecem inclinados no sistema original, explicando sua representação visual como curvas tangentes ao toro em duas direções conjugadas.

² A expansão completa foi realizada com apoio de sistema de álgebra computacional (CAS). Aqui registramos apenas os coeficientes relevantes para a fatoração.

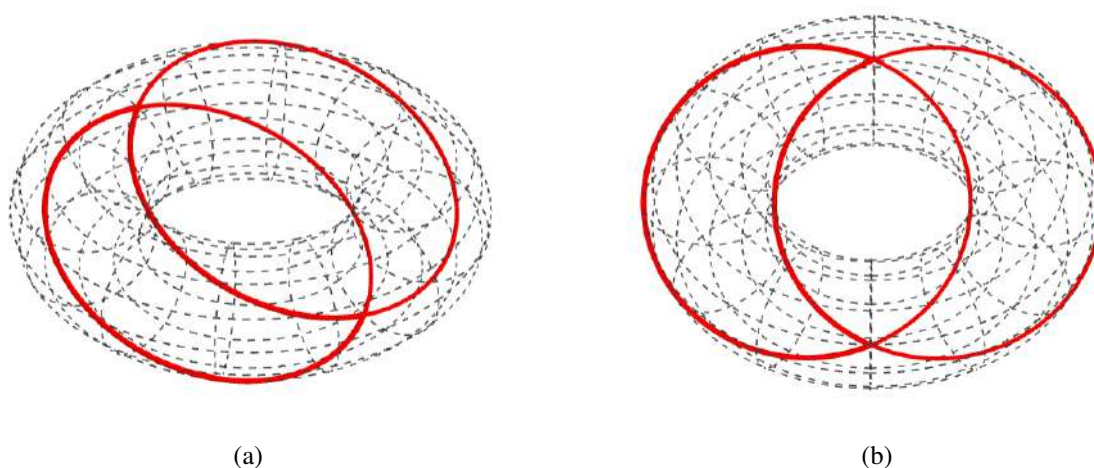
Observação (Caráter didático da demonstração). *Descrições clássicas dos círculos de Villarceau encontram-se em obras de geometria e em fontes de divulgação matemática, como Coxeter (1969), Weisstein (2000) e Monera (2011). Essas referências, entretanto, limitam-se a indicar a condição trigonométrica para a existência dos círculos ou a descrevê-los geometricamente, sem apresentar a dedução algébrica detalhada. A dedução aqui desenvolvida, com expansão completa da quártica, translação de coordenadas e fatoração explícita, configura-se como uma contribuição didática desta dissertação, elaborada com vistas à formação de professores de matemática.*

3.3.3 Interpretação geométrica e propriedades

Visualmente, os círculos de Villarceau aparecem como dois anéis inclinados que se entrelaçam de forma harmônica na estrutura do toro. Sua simetria é perceptível tanto na forma da seção quanto na disposição espacial dos pontos de tangência entre o plano oblíquo e a superfície.

Esses círculos surgem sempre em pares simétricos, reflexo da natureza bilateral do plano oblíquo em relação ao toro. Formam ângulos determinados pelos parâmetros R e r , estabelecendo uma relação direta entre medidas construtivas e curvas resultantes. Distinguem-se das demais seções tóricas por não serem paralelos nem perpendiculares a nenhum plano coordenado. Cada círculo é tangente ao toro internamente em dois pontos diametralmente opostos, o que evidencia uma relação singular entre curva e superfície. Constituem, ainda, um raro exemplo em que uma quártica plana degenera em duas cônicas, neste caso, duas circunferências.

Figura 17 – Círculos de Villarceau obtidos por corte oblíquo do toro



A Figura 17 apresenta duas visualizações dos círculos de Villarceau obtidos por corte oblíquo do toro. Em (a), uma vista oblíqua evidencia o entrelaçamento das circunferências. Em (b), uma vista alternativa destaca a simetria do par de círculos.

Do ponto de vista geométrico, essa configuração mostra como pequenas variações no ângulo do plano de corte podem modificar radicalmente a natureza da curva obtida. Didaticamente, oferece um exemplo privilegiado de como conceitos abstratos, degeneração de curvas, simetria e tangência, podem ser visualizados de forma concreta, despertando o interesse dos estudantes e favorecendo a construção de significados em geometria.

3.3.4 História e legado de Villarceau

A descoberta dos círculos que hoje levam o nome de Villarceau antecede em quase duas décadas a publicação do artigo *Sur les sections du tore*, de Jean-Gaston Darboux (1864). Jean-Baptiste Philibert Yvon Villarceau (1813–1883), engenheiro e astrônomo francês, observou empiricamente, em 1848, que ao cortar um toro por um plano oblíquo específico, passando por dois pontos simétricos da borda interna, surgiam duas curvas perfeitamente circulares (Villarceau, 1848). O fenômeno foi comunicado à *Académie des Sciences*, mas não chegou a ser sistematizado em um tratado analítico, permanecendo como uma curiosidade geométrica (Coxeter, 1969; Weisstein, 2000). A denominação “círculos de Villarceau” consolidou-se apenas posteriormente, em obras de geometria descritiva e de divulgação matemática do final do século XIX e início do século XX, reconhecendo o pioneirismo da observação feita em 1848.

A análise de Darboux, ainda que não cite Villarceau nominalmente, descreve de forma precisa as condições angulares sob as quais ocorre essa degeneração de uma quártica em duas cônicas (Darboux, 1864). Importa destacar que Darboux tratava esse caso como parte de um estudo mais amplo sobre seções do toro, interessando-se sobretudo pela estrutura algébrica geral das curvas resultantes, e não apenas pelo fenômeno particular observado por Villarceau. Se Villarceau teve o mérito da observação empírica, coube a Darboux demonstrar matematicamente por que esse fenômeno acontece. Esse episódio ilustra o papel de Darboux como sistematizador da geometria de sua época, articulando observações da prática da engenharia e da astronomia com os métodos analíticos emergentes do século XIX (Monera, 2011).

Do ponto de vista historiográfico, o caso dos círculos de Villarceau mostra como a matemática avança pela interação entre experimentação visual, intuição geométrica e formalização analítica. Didaticamente, esse diálogo entre Villarceau e Darboux pode ser explorado

para evidenciar aos alunos que o conhecimento matemático não nasce pronto, mas resulta de processos de observação, descoberta, sistematização e rigor.

3.3.5 Representações no GeoGebra

O fenômeno descrito empiricamente por Villarceau (1848) e formalizado por Darboux (1864) pode, hoje, ser explorado de forma interativa com o auxílio de softwares de geometria dinâmica, como o *GeoGebra* (Hohenwarter; Hohenwarter, 2025). Essa ferramenta permite não apenas reproduzir visualmente os círculos de Villarceau, mas também experimentar com diferentes valores dos parâmetros (R, r) e variar continuamente o ângulo do plano de corte, aproximando a intuição geométrica da formalização algébrica (Monera, 2011).

A construção baseia-se na parametrização do toro e na definição de um plano inclinado que passa por dois pontos simétricos da borda interna. Ao variar o ângulo φ com um controle deslizante, observa-se que, para a maior parte dos valores, a interseção é uma curva quártica. Entretanto, no ângulo crítico previsto pela condição de Villarceau, a curva se degenera em duas circunferências reais e simétricas, confirmando experimentalmente o resultado demonstrado por Darboux (1864).

Do ponto de vista pedagógico, o uso do controle deslizante favorece a percepção do surgimento gradual dos círculos e torna visível a tangência dupla entre o plano e o toro. Além disso, a possibilidade de manipulação interativa estimula a formulação de hipóteses e conjecturas pelos estudantes, criando um espaço fértil de investigação matemática que conecta observação, experimentação e demonstração, em consonância com a BNCC (Brasil, 2018).

Assim, a tecnologia atual permite retomar, em sala de aula, o mesmo percurso que marcou a história da matemática no século XIX: partir de uma observação empírica (Villarceau), passar pela formalização analítica (Darboux) e chegar a uma exploração didática que articula visualização, experimentação e prova. Desse modo, os círculos de Villarceau exemplificam como a história matemática pode ser atualizada em práticas pedagógicas contemporâneas.

Mini-atividade no GeoGebra

Objetivo: reproduzir, em ambiente digital, o mesmo percurso geométrico e analítico desenvolvido por Darboux em *Sur les sections du tore* (1864). Parte-se do caso mais simples, no qual o plano de corte é horizontal e a seção do toro consiste em duas circunferências concêntricas no plano secante, e procede-se à inclinação gradual desse plano até atingir um ângulo crítico. Nesse

valor específico, a curva de interseção se decompõe em duas circunferências reais e simétricas, caracterizando os círculos de Villarceau.

A atividade reconstrói esse percurso a partir da equação quártica geral da seção tórica, articulando a observação empírica do fenômeno (Villarceau, 1848) com sua explicação algébrica (Darboux, 1864).

Duas formas de iniciar a atividade:

(a) Acessar o arquivo pronto.

O modelo digital utilizado nesta pesquisa, contendo o toro, o plano inclinado e os parâmetros geométricos correspondentes à equação quártica da seção tórica, está disponível em:

<https://www.geogebra.org/classic/etsuvzyz>

(b) Construir o modelo a partir do zero.

O Anexo B.2 apresenta o roteiro completo de construção no GeoGebra 3D, no qual o toro e o plano secante são definidos de modo consistente com a dedução analítica desenvolvida no Capítulo 2. Essa opção permite vivenciar integralmente o processo de modelagem geométrica a partir da equação quártica.

Relação com a BNCC: a atividade dialoga com as habilidades EM13MAT403 e EM13MAT405, que enfatizam o uso de tecnologias digitais para a formulação de conjecturas, a exploração de propriedades geométricas e a articulação entre diferentes representações matemáticas.

Roteiro

1. Abra o arquivo pronto ou utilize o modelo construído conforme o Anexo B.2. O toro está definido por parâmetros fixos

$$R = 3, \quad r = 1,5,$$

garantindo a forma anular da superfície ($R > r$) e valores didaticamente convenientes para a visualização dos círculos de Villarceau.

2. Identifique os controles deslizantes associados ao plano secante, que correspondem aos parâmetros geométricos utilizados na equação quártica da seção tórica:

$$\rho, \quad \alpha, \quad \varphi.$$

(Observe como cada parâmetro altera a posição ou a orientação do plano em relação ao toro.)

3. Ajuste o parâmetro ρ de modo que o plano secante passe pelo centro do toro. (Essa configuração corresponde ao caso analisado na dedução algébrica e favorece cortes simétricos.)

4. Fixe os parâmetros

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{e} \quad \varphi = 0^\circ,$$

garantindo que o plano secante, inicialmente, seja perpendicular ao eixo de rotação do toro. (Nesse caso inicial, a interseção do plano com o toro consiste em duas circunferências concêntricas.)

5. Varie lentamente o ângulo de inclinação φ , medido em graus. (Acompanhe a deformação contínua da curva de interseção, que, em geral, apresenta caráter quártico.)
6. Identifique o valor de φ para o qual a curva de interseção se decompõe em *duas circunferências reais e simétricas*. (Observe o momento em que a curva perde o alongamento característico das quárticas e assume dupla simetria circular.)

7. Compare o valor experimental obtido com a condição clássica de Villarceau:

$$\tan \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

verificando que o valor crítico corresponde a

$$\varphi = 30^\circ.$$

8. Utilize as ferramentas de medição do GeoGebra para determinar o raio das circunferências obtidas. (Verifique que o raio coincide com o valor previsto $r = 1,5$.)

Perguntas de investigação

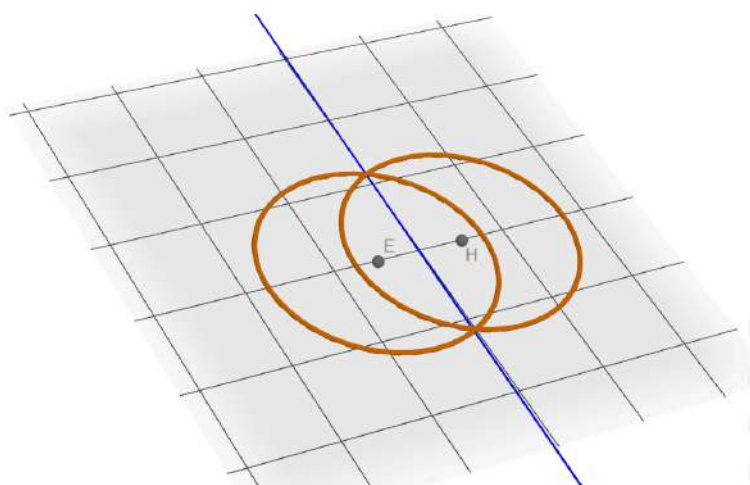
- Por que a equação quártica da seção tórica se fatoriza exatamente nesse valor do ângulo φ ?
- Como a posição dos centros das circunferências reflete as simetrias internas do toro?
- De que modo a observação da degeneração da curva quártica auxilia na compreensão do resultado analítico obtido por Darboux?
- Como a condição de Villarceau se modifica ao alterar os parâmetros R e r ? O que muda na visualização?

Discussão orientada

A equação quártica da seção tórica se fatoriza exatamente no valor crítico do ângulo φ porque, nessa configuração, o plano secante torna-se duplamente tangente ao toro. Do ponto de vista algébrico, essa condição impõe relações específicas entre os coeficientes da equação quártica, fazendo com que termos mistos sejam anulados e permitindo a fatoração em duas equações quadráticas correspondentes a circunferências. Trata-se, portanto, de um caso de degeneração controlada da curva, previsto analiticamente pela condição de Villarceau.

A posição dos centros das circunferências obtidas reflete diretamente as simetrias internas do toro. Em particular, os centros aparecem dispostos de forma simétrica em relação a um eixo do plano secante, o que espelha a simetria de revolução da superfície original. Essa disposição evidencia que os círculos de Villarceau não surgem de maneira arbitrária, mas como consequência da estrutura geométrica global do toro.

Figura 18 – Centros dos círculos de Villarceau no plano secante



Fonte: O autor, 2025.

Na Figura 18, os pontos E e H representam os centros das duas circunferências obtidas no caso crítico da inclinação do plano secante. A reta azul indica o eixo de simetria intrínseco desse plano, correspondente à mediatriz do segmento EH , refletindo diretamente a simetria de revolução do toro.

A observação da degeneração da curva quártica auxilia na compreensão do resultado analítico de Darboux ao tornar visível um fenômeno que, no tratamento puramente algébrico, poderia parecer artificial. Ao acompanhar a deformação contínua da seção, o estudante percebe

que a fatoração não é um truque formal, mas a expressão simbólica de uma mudança geométrica real na natureza da interseção.

Ao alterar os parâmetros R e r , a condição de Villarceau se ajusta de acordo com a relação

$$\tan \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

o que modifica o ângulo crítico no qual ocorre a degeneração. Na visualização, essa mudança manifesta-se na inclinação necessária do plano para que os círculos de Villarceau apareçam, bem como no raio e na posição relativa das circunferências obtidas. Ainda assim, o fenômeno qualitativo permanece o mesmo: para cada par admissível (R, r) , existe um ângulo específico no qual a seção quártica se decompõe em duas circunferências reais e simétricas.

Síntese didática

Ao manipular o plano secante sobre o toro, o estudante acompanha, de forma dinâmica, o mesmo percurso conceitual desenvolvido nesta dissertação: parte-se de uma equação quártica geral e identifica-se, por meio de uma condição precisa sobre os parâmetros geométricos, um caso de degeneração notável.

A exploração digital torna visível o fenômeno observado empiricamente por Villarceau e explicado analiticamente por Darboux, articulando visualização, experimentação e demonstração. A possibilidade de utilizar tanto um arquivo pronto quanto a construção completa favorece a autonomia docente e reforça a compreensão do processo geométrico subjacente.

Conclusão

Os círculos de Villarceau surgem, nesta dissertação, não como um caso isolado ou meramente curioso, mas como um ponto crítico dentro da família contínua das seções do toro. Ao partir da equação quártica geral e impor uma condição precisa sobre a inclinação do plano secante, observa-se a degeneração da curva em duas circunferências reais e simétricas, revelando uma estrutura geométrica que não é visível à primeira vista.

Esse percurso reflete fielmente a abordagem adotada por Darboux em seu estudo das seções do toro: começar pelos casos mais simples, acompanhar a deformação progressiva das curvas e identificar, por meio de condições analíticas rigorosas, os casos notáveis. A análise dos círculos de Villarceau evidencia, assim, como a geometria do toro articula visualização, simetria e fatoração algébrica.

Do ponto de vista didático, esse caso mostra-se particularmente fértil, pois permite reconstruir historicamente um processo de descoberta matemática e, ao mesmo tempo, explorá-lo com ferramentas contemporâneas de visualização dinâmica. Desse modo, os círculos de Villarceau ocupam um lugar privilegiado nesta dissertação como elo entre a equação quártica, a interpretação geométrica e a formação docente em matemática.

Assim, a análise dos círculos de Villarceau sintetiza os três eixos centrais desta dissertação, rigor matemático, contextualização histórica e potencial didático, constituindo um elo privilegiado entre a geometria clássica do século XIX e a formação docente atual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação foi organizada em torno de quatro perguntas apresentadas na introdução: quem foi Jean-Gaston Darboux? Por que o artigo *Sur les sections du tore* (1864) é relevante do ponto de vista histórico e matemático? Como descrever de maneira clara e rigorosa as seções tóricas? E de que forma esse material pode ampliar o repertório cultural e matemático de professores da educação básica e de outros leitores não especializados? Os capítulos buscaram responder progressivamente a essas questões, cada um a seu modo e com ênfases próprias.

A análise histórica mostrou que Darboux ocupa um lugar central na matemática do século XIX. Sua obra combina tradição e inovação, unindo intuição geométrica, precisão analítica e uma atenção constante ao ensino. Esse perfil permitiu compreender o artigo de 1864 não apenas como uma coleção de resultados, mas como parte de um processo maior de reformulação da geometria, no qual métodos algébricos, interpretações visuais e preocupações pedagógicas se entrelaçam de forma moderna.

Foi possível perceber também que o artigo *Sur les sections du tore* vai muito além do estudo de casos isolados. Ao apresentar uma abordagem geral baseada na equação métrica do toro, Darboux propôs um método unificado para compreender diferentes curvas geradas pela interseção entre plano e superfície. Essa perspectiva explica a relevância do texto para a história da geometria diferencial e para o estudo contemporâneo das quárticas bicirculares, revelando a profundidade de um trabalho escrito ainda em sua juventude acadêmica.

Do ponto de vista matemático, este trabalho apresentou três formas principais de descrever o toro: como superfície de revolução, por meio de sua parametrização e por sua equação algébrica. Cada uma delas contribuiu, de modo próprio, para a compreensão das seções tóricas. A dedução da equação da curva, a parametrização do plano secante e a análise das formas que surgem do corte permitiram reconstruir de modo acessível e rigoroso os principais argumentos de Darboux. As ovais de Cassini, a lemniscata de Bernoulli e os círculos de Villarceau foram tratadas de forma integrada, destacando a unidade conceitual que une essas curvas clássicas da geometria. Ainda hoje, essa unidade causa certa admiração a quem se debruça sobre essas figuras.

Do ponto de vista da divulgação científica, a dissertação mostrou que textos históricos podem ser traduzidos, contextualizados e visualizados de maneira a enriquecer o repertório de professores da educação básica e de leitores não especializados. A tradução comentada do artigo,

apresentada no Anexo A, desempenha papel central nesse processo, pois disponibiliza um texto clássico acompanhado de notas que esclarecem, passo a passo, os procedimentos matemáticos e históricos que o sustentam.

O produto educacional, a revista *Trajetórias — História da Matemática e Divulgação Científica*, reforça essa dimensão formativa e pública da matemática. A revista reúne história, geometria, entrevistas e visualizações no GeoGebra, articulando rigor, clareza e acessibilidade. Ela não se propõe a ser um material didático tradicional, mas um instrumento de circulação cultural: uma ponte entre a matemática universitária, a história que lhe dá sentido e os leitores que buscam ampliar sua compreensão da geometria. Essa aproximação ocorre por meio de três movimentos complementares: traduzir conteúdos avançados para linguagem acessível; recolocar o texto de Darboux em seu contexto histórico; e oferecer visualizações que favoreçam a leitura geométrica.

No conjunto, os resultados reforçam o valor de aproximar história, geometria e divulgação científica. Ao revisitar um texto escrito em 1864 e torná-lo acessível a novos públicos, este trabalho sugere que a matemática ensinada hoje, na escola, na universidade ou fora delas, pode se beneficiar de um diálogo vivo com sua própria história. Essa aproximação, construída com rigor e cuidado histórico, contribui para formar leitores mais atentos, curiosos e conscientes do caráter histórico da matemática.

Limitações do Trabalho

Este trabalho apresenta limites inerentes às escolhas de escopo necessárias em uma pesquisa de mestrado. O recorte histórico concentrou-se no artigo *Sur les sections du tore* (1864) e em referências diretamente relacionadas, sem examinar de modo amplo a produção posterior de Jean-Gaston Darboux. Uma análise mais ampla poderia situar com maior precisão o papel das seções tóricas em sua obra madura e no contexto geométrico do século XIX, tema que permanece aberto para estudos futuros.

A tradução comentada, embora fiel ao texto original e acompanhada de notas explicativas, representa uma interpretação específica. Questões filológicas, escolhas terminológicas alternativas e análises de estilo foram apenas indicadas, não exploradas de forma exaustiva. Em certo sentido, trata-se de uma leitura possível entre várias outras.

Do ponto de vista matemático, optou-se por uma apresentação adequada a leitores não especializados, o que implicou deixar de lado demonstrações mais técnicas presentes na literatura

de geometria diferencial e teoria das superfícies. No campo computacional, priorizou-se o uso do GeoGebra por seu valor didático, ainda que outras ferramentas permitam abordagens mais sofisticadas e até mais completas.

Por fim, a revista produzida como material educacional ainda não foi avaliada de maneira sistemática em contextos reais de ensino. A ausência de dados sobre sua recepção e impacto constitui uma limitação natural deste trabalho, que abre espaço para estudos futuros.

Perspectivas Futuras

As limitações apontam caminhos promissores para desdobramentos posteriores. No plano histórico, uma possibilidade é aprofundar a análise da obra de Darboux, relacionando o artigo de 1864 ao desenvolvimento posterior da geometria diferencial e às discussões sobre métodos geométricos e analíticos no século XIX.

No campo matemático, estudos futuros podem explorar com maior detalhe as quárticas associadas às seções tóricas, investigando aspectos projetivos, singularidades e leituras contemporâneas desses objetos. Outra frente promissora é ampliar o uso de ferramentas computacionais especializadas, que oferecem recursos avançados de visualização e análise.

No âmbito educacional, torna-se relevante investigar como a revista *Trajétórias* é recebida por professores e estudantes, avaliando seu potencial formativo e suas contribuições para aproximar história, visualização geométrica e sala de aula. Também é possível expandir a revista para uma série dedicada à divulgação científica, incorporando novos temas, diferentes autoras e autores e recursos multimídia que ampliem seu alcance.

Essas perspectivas reforçam que o estudo das seções do toro permanece atual e fecundo. Este trabalho constitui um primeiro passo, que pode ser aprofundado em pesquisas posteriores, inclusive em nível de doutoramento.

Ao longo deste trabalho, revisitar Darboux tornou-se também um exercício de revisitar a mim mesmo como professor. Ao traduzir, reorganizar e explicar seu texto, reencontrei minha relação com a história da matemática e com a prática docente. Transformar um artigo clássico em material de circulação ampla altera não apenas o olhar do leitor, mas também o do pesquisador que se dedica a essa tarefa. Espero que este trabalho possa inspirar novas leituras, compreensões e olhares para a geometria e para sua presença na cultura matemática contemporânea.

REFERÊNCIAS

- APPELL, P. *Obituary of Gaston Darboux*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris, 1918. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Darboux_Appell/>>. Acesso em: 8 jul. 2025.
- BERTRAND, J. A. L. Lembranças sobre Darboux. In: TATON, R. *Gaston Darboux (1842–1917)*. Revue d’Histoire des Sciences et de leurs Applications, Paris, t. 7, n. 3, p. 197–214, 1954.
- BOOTH, J. *A Treatise on Some New Geometrical Methods*. London: Longmans, Green, 1877.
- BOTTAZZINI, U.; GRAY, J. *Hidden Harmony – Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory*. New York: Springer, 2013.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>>. Acesso em: 9 set. 2025.
- COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- COHEN, H. Floris. The ‘Mathematization of Nature’: The Making of a Concept, and How It Has Fared in Later Years. In: REMMERT, V. R.; SCHNEIDER, M.; SORENSEN, K. (eds.). *Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries*. Switzerland: Springer, 2016. p. 143–160.
- D’AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.
- DARBOUX, J.-G. *Sur les sections du tore*. Bulletin de la Société Philomathique de Paris, p. 1–25, 1864.
- DARBOUX, J.-G. *Sur les sections du tore*. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris, v. 59, p. 814–818, 1864.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. *GeoGebra: Dynamic Mathematics Software for Schools*. Disponível em: <<<https://www.geogebra.org>>>. Acesso em: 9 set. 2025.
- GRATTAN-GUINNESS, Ivor. The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, v. 31, p. 163–195, 2004.
- MONERA, L.; MONTERDE, J. Surfaces with Villarceau Circles. *Journal for Geometry and*

Graphics, v. 15, n. 1, p. 63–75, 2011. Disponível em: <<<https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg15/j15h1mone.pdf>>>. Acesso em: 9 set. 2025.

MORONI, L. *The Toric Sections: A Simple Introduction*. arXiv:1901.04778, 2019. Disponível em: <<<https://arxiv.org/abs/1901.04778>>>. Acesso em: 15 ago. 2025.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Gaston Darboux*. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. Disponível em: <<<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Darboux/>>>. Acesso em: 6 jul. 2025.

SYM, A. Darboux's Greatest Love. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, p. 404001, 2009. DOI: 10.1088/1751-8113/42/40/404001.

TATON, R. *Gaston Darboux (1842–1917)*. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, Paris, t. 7, n. 3, p. 197–214, 1954.

VILLARCEAU, J.-B. P. Y. *Note sur une propriété do tore*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, v. 27, p. 207–209, 1848.

WEISSTEIN, E. W. Villarceau Circles. *MathWorld — A Wolfram Web Resource*. Disponível em: <<<https://mathworld.wolfram.com/VillarceauCircles.html>>>. Acesso em: 9 set. 2025.

WIKIPEDIA. Villarceau circles. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Villarceau_circles>>. Acesso em: 9 set. 2025.

WIKIPÉDIA. Cercles de Villarceau. Disponível em: <<https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercles_de_Villarceau>>. Acesso em: 9 set. 2025.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TRADUÇÃO COMENTADA INTEGRAL DE *SUR LES SECTIONS DU TORE*

Este anexo apresenta a tradução comentada integral do artigo *Sur les sections du tore*, publicado por Jean-Gaston Darboux em 1864. O texto foi traduzido do francês para o português segundo uma estratégia de fidelidade semântica, buscando preservar o estilo matemático do século XIX e, ao mesmo tempo, introduzir adaptações terminológicas que favoreçam a clareza para o leitor contemporâneo.

As notas de rodapé e os comentários adicionais têm caráter histórico e pedagógico. Seu objetivo é contextualizar a obra no panorama da geometria clássica, ressaltando sua relevância para a formação de professores e para a divulgação científica. A numeração de teoremas, corolários e notas segue a do artigo original de Darboux.

O texto francês original encontra-se em domínio público e pode ser consultado nas coleções digitais da Bibliothèque Nationale de France. Nesta dissertação, opta-se por apresentar apenas a tradução comentada, que cumpre a função de mediação didática e histórica sem exigir a reprodução integral do documento em francês.

Nota metodológica de tradução

A tradução aqui apresentada foi orientada pelos seguintes critérios:

- a) **Fidelidade semântica:** manutenção rigorosa do conteúdo matemático, privilegiando a inteligibilidade para o leitor atual;
- b) **Adaptação terminológica:** notações e convenções do século XIX foram adequadas ao uso contemporâneo, quando necessário;
- c) **Notas complementares:** foram incluídas observações históricas, matemáticas e didáticas em notas de rodapé, sem prejuízo do texto original.

Dessa forma, o anexo não apenas reproduz o conteúdo de Darboux, mas também o torna acessível ao público da educação matemática e da história da matemática.

Texto traduzido e comentado

A seguir, apresenta-se a tradução comentada do artigo de Darboux. O texto está organizado em seções, mantendo a sequência dos teoremas, corolários e notas do autor.

A.1 Teorema I e corolários

Darboux enuncia o primeiro resultado da seguinte forma:

O produto das distâncias de um ponto qualquer do toro a duas esferas inscritas opostas é proporcional à distância desse ponto ao plano meridiano que contém os centros das duas esferas.

Sejam b o raio de uma esfera inscrita e a a distância de seu centro ao eixo de revolução. Denotemos por T e T' os comprimentos das tangentes traçadas de um ponto até duas esferas opostas cujos centros estão sobre o eixo x . Temos então:

$$TT' = 2a \cdot y.$$

A demonstração é considerada simples, podendo ser obtida tanto por métodos analíticos quanto por argumentos puramente geométricos.¹

Corolário I

Se traçarmos um plano secante paralelo ao plano xz , ele cortará as duas esferas inscritas opostas segundo dois círculos congruentes (reais ou imaginários). As tangentes a esses círculos também serão tangentes às respectivas esferas. Como a coordenada y se mantém constante em toda a seção, o lugar geométrico dos pontos dessa curva se caracteriza pela seguinte propriedade:

Uma seção vertical do toro é o conjunto dos pontos tais que o produto de suas distâncias a duas circunferências congruentes é constante.

Essas circunferências se degeneram em pontos quando o plano secante se torna tangente às esferas inscritas. Nesse caso, a curva resultante é uma **oval de Cassini**.²

¹ Darboux não apresenta a demonstração completa, presumindo que o leitor familiarizado com a geometria analítica clássica poderia reconstruí-la com facilidade. Essa prática era comum nos textos matemáticos do século XIX.

² A oval de Cassini é uma curva de quarto grau definida como o conjunto dos pontos do plano cujas distâncias a dois focos fixos têm produto constante.

Corolário II

Consideremos agora o plano bitangente que passa pela reta Oy e analisemos a natureza da seção que ele produz.

Seja P um ponto dessa seção. O raciocínio geométrico conduz à equação:

$$\frac{MN}{\sin(\angle NPM)} = \text{constante},$$

o que implica que o lugar geométrico do ponto P é formado por dois círculos que passam pelos pontos M e N , com raio igual a a , a distância do centro da esfera inscrita ao eixo.

A.2 Teorema II: seções gerais e relações com círculos

De modo geral, qualquer plano secante que intersecte o toro cortará as duas esferas inscritas opostas segundo dois círculos (reais ou imaginários) e também intersectará o plano meridiano que contém os centros dessas esferas segundo uma reta. Para qualquer ponto da curva de interseção, a coordenada y será proporcional à distância até essa reta. Assim, pode-se enunciar a seguinte propriedade:

As seções do toro são tais que o produto das tangentes traçadas de um ponto qualquer a dois círculos é proporcional à distância desse ponto a uma determinada reta.

Esses dois círculos são obtidos como interseções entre o plano secante e as esferas inscritas opostas. O conjunto dos centros desses círculos descreve uma elipse, projeção da circunferência geradora das esferas inscritas sobre o plano da seção.³

Há uma infinidade de possibilidades para essas esferas inscritas⁴, e, conseqüentemente, para os pares de círculos gerados pelas interseções. Em particular, um desses círculos pode degenerar em um ponto, caso o plano seja tangente à esfera correspondente.

³ Embora Darboux não utilize a expressão “círculos de Villarceau”, a configuração descrita aqui corresponde exatamente ao caso moderno em que um plano inclinado corta o toro produzindo duas interseções circulares reais. Esses círculos especiais, descobertos por Yvon Villarceau em 1848, são hoje conhecidos como *círculos de Villarceau*. Darboux descreve o fenômeno, mas não o nomeia.

⁴ Essa caracterização das seções do toro antecipa a noção moderna de curvas definidas por propriedades de tangência múltipla a elementos auxiliares, como círculos ou esferas. Embora Darboux não use linguagem algébrica contemporânea, sua formulação é compatível com interpretações projetivas e diferenciais.

A.3 Teoremas III e IV: três esferas inscritas e relações lineares

Teorema III

Sejam t, t', t'' as distâncias de um ponto qualquer do toro a três esferas inscritas, cujos centros estão separados por distâncias c, c', c'' . Existe entre essas três distâncias uma relação algébrica determinada pela geometria da configuração.

A demonstração é direta. Consideremos a equação de uma esfera inscrita genérica, centrada num ponto da circunferência de raio a no plano xy e de raio b . As tangentes traçadas de um ponto qualquer do toro até essas esferas satisfazem relações do tipo:

$$t^2 = (x - a \cos \alpha)^2 + (y - a \sin \alpha)^2 + z^2 - b^2,$$

em que α é o ângulo que determina a posição do centro da esfera inscrita sobre a circunferência meridiana. Eliminando as variáveis auxiliares e reorganizando os termos, Darboux obtém uma expressão do tipo:

$$T^2 = \left(\frac{t \cos \alpha + t' \sin \alpha}{2} \right)^2.$$

Essa relação mostra que existe uma dependência entre as tangentes traçadas a três esferas inscritas, em função dos ângulos que determinam suas posições relativas. O resultado também pode ser obtido por uma abordagem puramente geométrica, embora Darboux opte pela via analítica.⁵

Teorema IV

Tomemos agora três esferas inscritas quaisquer. Quando um plano secante intercepta essas esferas, obtêm-se três círculos em sua interseção. Para qualquer ponto da curva de seção resultante, esses três círculos podem substituir as esferas como elementos auxiliares, pois são duplamente tangentes à curva da seção.

Dessa forma, pode-se enunciar:

Toda seção do toro é tal que, se lhe forem traçados três círculos que lhe sejam duplamente tangentes, haverá uma relação linear e homogênea entre as distâncias de um ponto qualquer da curva até as circunferências desses três círculos.

⁵ A estratégia adotada por Darboux antecipa métodos modernos de parametrização de superfícies por coordenadas circulares e o uso de simetrias para simplificação de equações quadráticas.

Sejam a, a', a'' as distâncias entre os centros dos círculos tomados dois a dois, e A, A', A'' as distâncias desses centros aos centros das respectivas esferas inscritas. A relação obtida por Darboux é:

$$a''(t - t') + a(t' - t'') + a'(t'' - t) = 0.$$

Como verificação, se tomarmos $a = a' = a''$, obtém-se:

$$t + t' + t'' = 0,$$

que corresponde à condição para uma seção paralela.

Esse resultado permite afirmar que, dada qualquer seção do toro, é sempre possível encontrar quatro esferas inscritas (reais ou imaginárias) que lhe sejam tangentes. Ao se escolher três delas, as tangentes traçadas de um ponto da seção até essas esferas equivalem às distâncias até os respectivos pontos de contato. Duas dessas esferas serão tangentes de um lado do plano e a terceira, do outro. Nessas condições, os coeficientes associados às distâncias tomam os sinais $k = -b$ e $k' = k'' = b$, e a equação anterior se reescreve como uma relação de focos.

A.4 Teorema V: seções planas com quatro focos

Toda seção plana do toro possui uma propriedade notável. Existem quatro pontos fixos, chamados *focos*, tais que as distâncias de um ponto da curva seccional até três deles satisfazem uma relação linear e homogênea.

Esses quatro focos estão dispostos de forma simétrica em relação ao eixo da seção, o que implica que pertencem a um mesmo círculo.

A.5 Teoremas VI a VIII — Cassinóides, curvas recíprocas e tangência

Teorema VI — A propriedade focal das ovais de Cassini

Para determinadas seções verticais do toro, especialmente aquelas que resultam em uma oval de Cassini, os quatro focos identificados anteriormente são todos reais. Essa condição impõe a seguinte relação entre os parâmetros do toro:

$$b = a \cdot \sin \varphi,$$

em que a é a distância do centro da esfera inscrita ao eixo de revolução, b é o raio da esfera e φ é um ângulo associado à inclinação do plano secante.

Sob essa condição, pode-se mostrar que:

$$\sqrt{y^2 + (x - a)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (x + a)^2} = a^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

o que caracteriza a equação canônica da oval de Cassini como curva seccional do toro.⁶

Toda cassinoide (isto é, uma oval de Cassini em configuração específica) possui a seguinte propriedade: se aos seus dois focos forem adicionados mais um ponto tomado sobre o eixo focal, existirá uma relação linear e homogênea entre as distâncias de um ponto qualquer da curva a esses três pontos.

Essa observação se articula com resultados de outros autores, como Garlin, que investigaram o lugar geométrico dos pontos de onde se enxerga uma elipse sob ângulo constante, curva que também possui quatro focos dispostos ao longo do eixo maior.

Teorema VII — Curvas recíprocas e ovais de Descartes

Darboux mostra que as seções planas do toro podem ser interpretadas como curvas recíprocas, no sentido da geometria inversiva clássica, das ovais de Descartes.

As seções do toro podem ser vistas como transformações recíprocas de ovais de Descartes, tendo como polo da transformação um dos quatro focos da curva resultante.

Como essas seções possuem quatro focos dispostos sobre um mesmo círculo, Darboux recupera uma observação atribuída a Michel Chasles: as ovais de Descartes recíprocas correspondentes possuem três focos alinhados. Assim, em particular, a oval de Cassini pode ser entendida como a curva recíproca de uma oval de Descartes.

Teorema VIII — Seções tangentes e conicidade recíproca

Quando o plano secante é tangente ao toro, a configuração focal se altera: dois dos quatro focos coincidem no ponto de contato entre o plano e a superfície. Isso modifica a estrutura da curva gerada, que passa a obedecer a uma equação como:

⁶ Darboux não nomeia aqui a lemniscata de Bernoulli, mas esta equação representa exatamente o *caso crítico* das ovais de Cassini, quando o produto das distâncias aos dois focos atinge seu valor limite e a curva resultante é a lemniscata. Esse caso singular é reconhecido hoje como a transição entre as Cassini simples e as Cassini de dois ramos.

$$at + \lambda a'^2 + b^2(t' + t'') = 0,$$

com $a' = a''$, representando o caso em que duas das esferas inscritas coincidem em posição.

Ao se realizar a transformação recíproca com polo no ponto de tangência, a curva obtida é uma **cônica**.⁷

Darboux destaca que a seção produzida por um plano tangente paralelo ao eixo do toro é a recíproca de uma hipérbole, sendo essa construção acessível pela geometria analítica clássica.

Caso se tomem como polos os dois focos restantes (não coincidentes) da seção tangente, obtêm-se curvas ovais com dois focos coincidentes, as chamadas **limaçons de Pascal**.⁸

A.6 Notas complementares — Generalizações e cyclides

Nota A — Curvas recíprocas da equação geral

As seções planas do toro analisadas até aqui satisfazem uma equação geral do tipo:

$$\lambda t + \mu t' + \nu t'' = 0.$$

Darboux observa que, ao se aplicar a transformação por *raios vetores recíprocos* (isto é, a inversão em relação a um ponto), a forma da equação é preservada.

Nota B — A superfície recíproca de um cone de segundo grau

Se utilizarmos como coordenadas as tangentes traçadas de um ponto até três esferas inscritas idênticas, o toro admite uma equação da forma:

$$\alpha t + \beta t' + \gamma t'' = 0.$$

Caso se tomem três esferas quaisquer (iguais ou não) e atribuam-se a elas coeficientes arbitrários, obtém-se uma equação do tipo:

⁷ Os casos em que a seção do toro por um plano tangente ou por um plano pouco inclinado gera duas interseções circulares reais correspondem, na terminologia moderna, aos *círculos de Villarceau*. Embora Darboux não utilize esse nome, sua descrição é inteiramente compatível com a configuração estudada por Villarceau em 1848.

⁸ A noção de curva recíproca empregada por Darboux corresponde ao que hoje chamamos de inversão circular. A interligação entre conicidade e limaçons evidencia o refinamento geométrico com que o autor explora as possibilidades das seções planas do toro.

$$\lambda t + \mu t' + \nu t'' = 0,$$

que, em geral, representa um número infinito de círculos.

Darboux mostra que, ao se realizar uma transformação recíproca tomando como polo o ponto comum de interseção das três esferas, a equação resultante adquire a forma:

$$\lambda\sqrt{P} + \mu\sqrt{P'} + \nu\sqrt{P''} = 0,$$

em que P , P' , P'' são funções lineares das coordenadas cartesianas do ponto. Essa relação define uma **superfície recíproca de um cone de segundo grau**, que inclui, como casos particulares, o toro e a **cyclide de Dupin**.⁹

Nota C — Extensão das propriedades à cyclide

As propriedades estabelecidas para as seções do toro se estendem naturalmente às seções da cyclide. Assim como nas curvas geradas por planos secantes do toro, as seções da cyclide possuem quatro focos e obedecem a relações lineares entre distâncias.

Quando a cyclide pode ser descrita como a envoltória de esferas tangentes a uma esfera e a dois planos, há duas seções planas paralelas a esses planos que produzem, como curvas seccionais, ovais de Descartes.

⁹ A cyclide é uma superfície clássica estudada por Charles Dupin no século XIX, definida como envoltória de esferas tangentes a três superfícies. É uma das poucas superfícies não triviais que possuem duas famílias ortogonais de círculos.

APÊNDICE B – CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA 3D

Este anexo reúne os roteiros completos de construção utilizados nas visualizações apresentadas nos capítulos teóricos desta dissertação e no produto educacional. As instruções estão organizadas de modo reproduzível e seguem a sintaxe em português do *GeoGebra 3D*, permitindo a replicação integral por professores, estudantes e pesquisadores. As construções são apresentadas em duas versões: uma simplificada, adequada para visualizar as ovas de Cassini e a lemniscata de Bernoulli, e uma versão completa que utiliza planos inclinados e possibilita observar curvas próximas às de Villarceau.

B.1 Construção simplificada: ovas de Cassini e lemniscata de Bernoulli

B.1.1 Circunferência geradora

Para que o toro seja obtido como superfície de revolução, utilizamos uma circunferência contida em um plano perpendicular ao eixo de rotação. Como a rotação será realizada em torno do eixo Z , escolhemos a direção $\text{Eixo}Y$, que é perpendicular a esse eixo no *GeoGebra*:

$$c = \text{Círculo}[(R, 0, 0), r, \text{Eixo}Y]$$

O software cria automaticamente controles deslizantes para R e r . Para que o toro exista, é necessário que $R > r$.

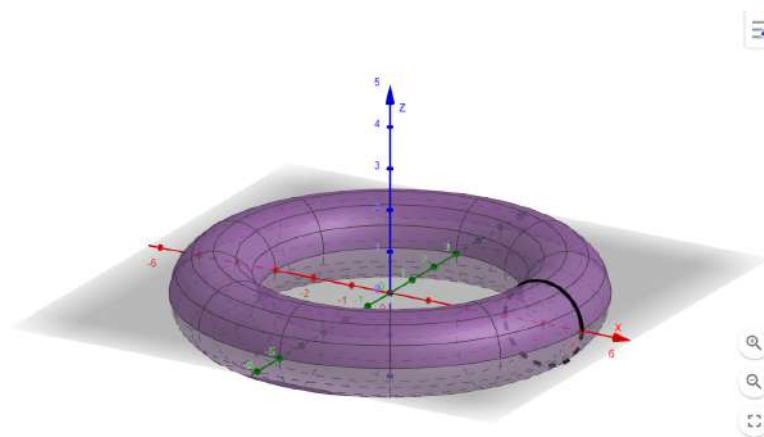
B.1.2 Construção do toro

A superfície é gerada pela rotação completa da circunferência c em torno do eixo Z , conforme o comando utilizado no *GeoGebra 3D*,

$$\text{Toro} = \text{Superfície}(c, 360^\circ, \text{Eixo}Z).$$

A Figura 19 ilustra o toro de revolução obtido a partir dessa construção.

Figura 19 – Toro de revolução construído no GeoGebra 3D a partir da circunferência geradora



Fonte: O autor, 2025.

B.1.3 Plano secante vertical

O parâmetro a controla a posição do plano vertical que corta o toro ao longo do eixo X :

1. Criar o controle deslizante

$$a \in [-(R + r), R + r].$$

2. Definir o ponto

$$Q = (a, 0, 0).$$

3. Criar o plano perpendicular ao eixo X , que no *GeoGebra* corresponde a um plano vertical:

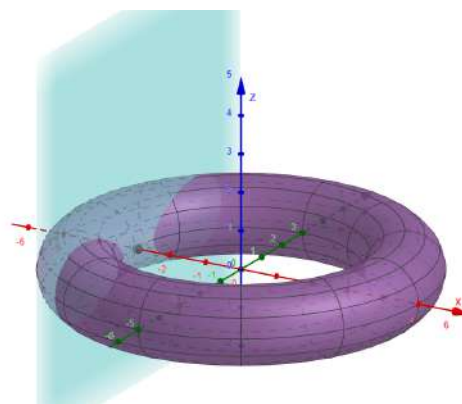
$$p = \text{PlanoPerpendicular}(Q, \text{EixoX}).$$

A variação do parâmetro a desloca o plano vertical ao longo do eixo X , determinando diferentes posições de corte do toro. A Figura 20 ilustra o plano secante obtido a partir dessa construção no GeoGebra.

B.1.4 Curva de interseção: parametrização explícita

A interseção entre o toro e um plano vertical é discutida no Capítulo 3 por meio da equação implícita da curva, obtida ao restringir a equação do toro ao sistema local de coordenadas

Figura 20 – Plano vertical secante ao toro, controlado pelo parâmetro a



Fonte: O autor, 2025.

(u, ρ) adaptado ao plano de corte. Essa descrição, dada pela equação quártica ali apresentada, corresponde ao tratamento analítico desenvolvido por Darboux em seu artigo de 1864. Ela é adequada para o estudo teórico das seções do toro e para a comparação direta com as ovais de Cassini.

Para fins de implementação no *GeoGebra*, porém, é mais eficiente trabalhar com uma parametrização explícita da mesma curva. Essa parametrização não é obtida da forma implícita em (u, ρ) , mas sim da parametrização global do toro, restringida pela condição do plano vertical $x = a$.

Partimos da parametrização usual do toro:

$$x(t, \varphi) = (R + r \cos t) \cos \varphi,$$

$$y(t, \varphi) = (R + r \cos t) \sin \varphi,$$

$$z(t, \varphi) = r \sin t,$$

e impomos a condição $x = a$. Isso fornece

$$\cos \varphi = \frac{a}{R + r \cos t},$$

e, portanto,

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R + r \cos t} \right)^2}.$$

Como o denominador exige $|a| \leq R + r \cos t$, a curva só existe nos valores de t que satisfazem essa condição.

Assim, uma parametrização explícita da curva de interseção é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= a, \\y(t) &= \pm(R + r \cos t) \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R + r \cos t}\right)^2}, \quad t \in [0, 2\pi]. \\z(t) &= r \sin t,\end{aligned}$$

Essa expressão será utilizada nas construções do presente anexo por oferecer maior eficiência computacional e permitir controles deslizantes diretos no *GeoGebra*.

Primeiro ramo

```
c1 = Curva[
  a,
  (R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sen(t),
  t, 0, 2*pi]
```

Segundo ramo

```
c2 = Curva[
  a,
  -(R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sen(t),
  t, 0, 2*pi]
```

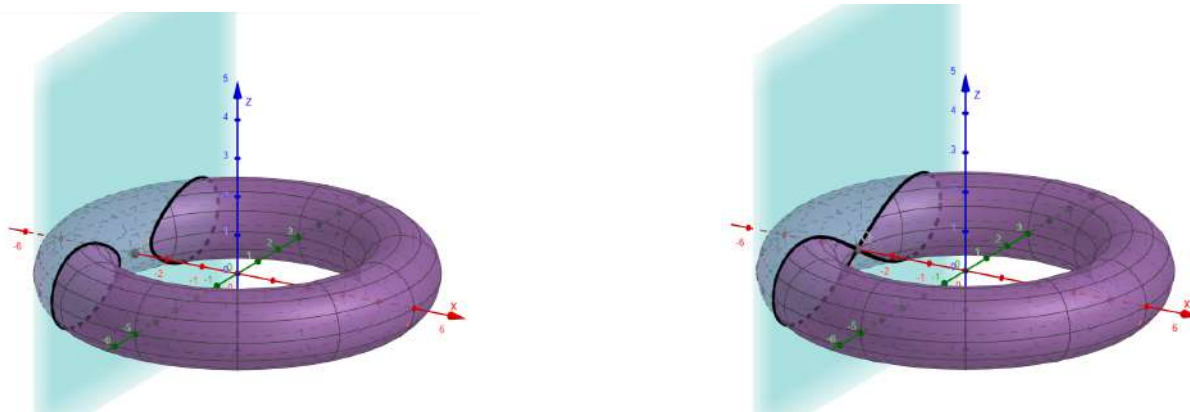
A Figura 21 apresenta duas seções planas do toro obtidas por corte adequado da superfície. Em (a), observa-se uma oval de Cassini com dois ramos desconexos. Em (b), surge a lemniscata de Bernoulli, correspondente ao caso crítico da família de curvas associadas.

Resumo dos passos no GeoGebra

Para facilitar a reprodução da construção no *GeoGebra*, organizamos a seguir os passos essenciais em ordem de execução:

1. Criar os controles deslizantes R , r e a , garantindo $R > r$.

Figura 21 – Seções planas do toro: oval de Cassini e lemniscata de Bernoulli



(a) Oval de Cassini

(b) Lemniscata de Bernoulli

Fonte: O autor, 2025.

2. Construir a circunferência geradora:

$$c = \text{Círculo}[(R, 0, 0), r, \text{EixoY}].$$

3. Gerar o toro por rotação:

$$\text{Toro} = \text{Superfície}(c, 360^\circ, \text{EixoZ}).$$

4. Definir o ponto do plano secante:

$$Q = (a, 0, 0).$$

5. Criar o plano vertical:

$$p = \text{PlanoPerpendicular}(Q, \text{EixoX}).$$

6. Definir os dois ramos da interseção por meio das curvas c_1 e c_2 :

$$c_1 = \text{Curva}[\\ a, \\ (R + r \cdot \cos(t)) * \text{sqrt}(1 - (a / (R + r \cdot \cos(t)))^2), \\ r \cdot \text{sen}(t), \\ t, 0, 2 \cdot \text{pi}]$$

```
c2 = Curva[
  a,
  -(R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sen(t),
  t, 0, 2*pi]
```

7. Ajustar a visualização, ativar superfícies semitransparentes e ocultar objetos intermediários conforme desejado.

Esse conjunto de passos reproduz integralmente as construções apresentadas na Seção B.1 e permite explorar, com controles diretos, as ovas de Cassini e a lemniscata de Bernoulli como seções planas do toro.

B.2 Construção com plano inclinado: os círculos de Villarceau

Esta construção generaliza a anterior introduzindo a inclinação do plano secante, permitindo a visualização de curvas oblíquas e aproximando, em casos particulares, curvas notáveis como as de Villarceau. Para isso, utilizamos duas letras distintas da família de *phi*. A letra maiúscula Φ denota o parâmetro da geratriz do toro, enquanto a letra minúscula ϕ representa exclusivamente a inclinação do plano. Essa distinção permite uma implementação clara no GeoGebra e evita ambiguidades entre parâmetros com papéis geométricos diferentes.

B.2.1 Controles deslizantes

A construção utiliza cinco parâmetros ajustáveis no GeoGebra 3D. Os intervalos foram escolhidos de modo a permitir a visualização completa do toro e das interseções produzidas pelo plano:

R	$\in (2, 5)$	raio maior do toro;
r	$\in (0, 2)$	raio menor, com $r < R$;
alpha	$\in [0, 2\pi)$	parâmetro angular α ;
phi	$\in (0, \pi)$	inclinação ϕ do plano;
rho	$\in [-(R + r), R + r]$	posição do ponto $Q(\rho, \alpha)$.

O parâmetro Φ , utilizado apenas na parametrização do toro, é gerado automaticamente pelo comando `Superfície` sob o nome `Phi`.

B.2.2 Toro parametrizado

O toro de revolução é descrito pela parametrização

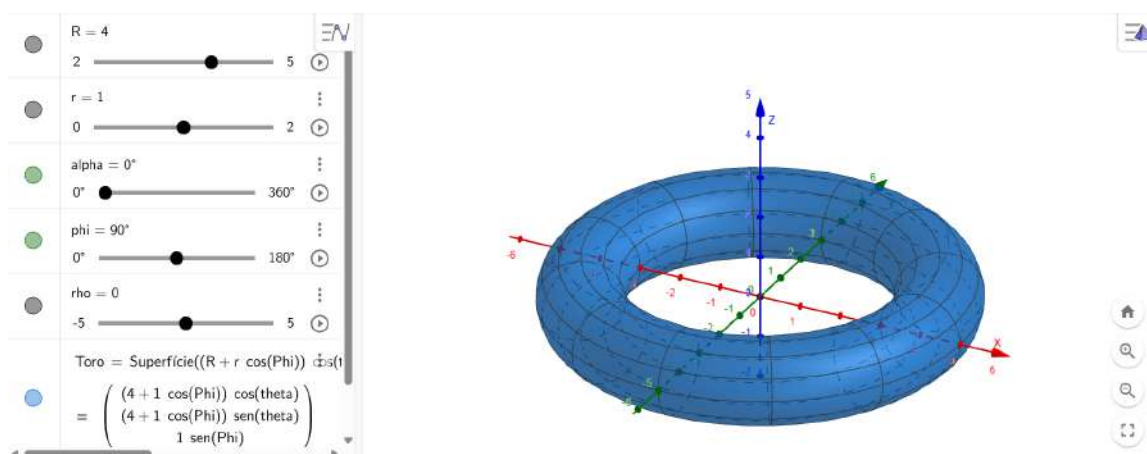
$$T(\theta, \Phi) = ((R + r \cos \Phi) \cos \theta, (R + r \cos \Phi) \sin \theta, r \sin \Phi), \quad \theta, \Phi \in [0, 2\pi).$$

Código GeoGebra:

```
Toro = Superfície[
  (R + r*cos(Phi))*cos(theta),
  (R + r*cos(Phi))*sen(theta),
  r*sen(Phi),
  theta, 0, 2*pi,
  Phi, 0, 2*pi]
```

A Figura 22 apresenta o toro parametrizado no GeoGebra 3D a partir dos ângulos θ e Φ , que controlam, respectivamente, a rotação da circunferência geratriz e a rotação em torno do eixo de revolução. Essa parametrização permite visualizar de forma clara a estrutura da superfície e serve de base para as construções analíticas desenvolvidas nas seções seguintes.

Figura 22 – Toro parametrizado no GeoGebra 3D pelos ângulos θ e Φ



Fonte: O autor, 2025.

B.2.3 Plano de corte

Um plano no espaço é determinado por um ponto e dois vetores diretores não colineares: o ponto fixa a posição do plano no espaço, enquanto os vetores determinam sua orientação. Assim, qualquer ponto do plano pode ser escrito como

$$Q + s u + t v,$$

com $s, t \in \mathbb{R}$. Essa forma paramétrica é especialmente adequada à construção no GeoGebra, pois organiza de maneira clara os parâmetros que definem o plano.

Escolhemos o ponto

$$Q(\rho, \alpha) = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, 0)$$

no plano xy , expresso em coordenadas polares. Essa representação permite controlar a posição do plano em torno do toro apenas pelo parâmetro radial ρ , deixando a inclinação exclusivamente a cargo de ϕ . Com isso, evita-se introduzir um deslocamento vertical independente e mantém-se a modelagem mais transparente.

O vetor

$$u(\alpha) = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$$

é tangente ao círculo de raio ρ no plano xy , sendo portanto perpendicular ao vetor radial que liga a origem ao ponto $Q(\rho, \alpha)$. Ele garante que o plano possa girar em torno de Q de modo controlado.

Já o vetor

$$v(\alpha, \phi) = (-\cos \alpha \cos \phi, -\sin \alpha \cos \phi, \sin \phi)$$

é obtido inclinando-se o vetor radial de Q por um ângulo ϕ : para $\phi = 0$, ele permanece no plano xy ; para $\phi = \pi/2$, torna-se vertical. Assim, ϕ controla exatamente a inclinação do plano.

Código GeoGebra:

```
Q = (rho*cos(alpha), rho*sin(alpha), 0)
```

```
u = Vetor[(0,0,0), (sin(alpha), -cos(alpha), 0)]
```

```
v = Vetor[(0,0,0),
           (-cos(alpha)*cos(phi),
            -sin(alpha)*cos(phi),
            sin(phi))]
```

```
p = Plano[Q, u, v]
```

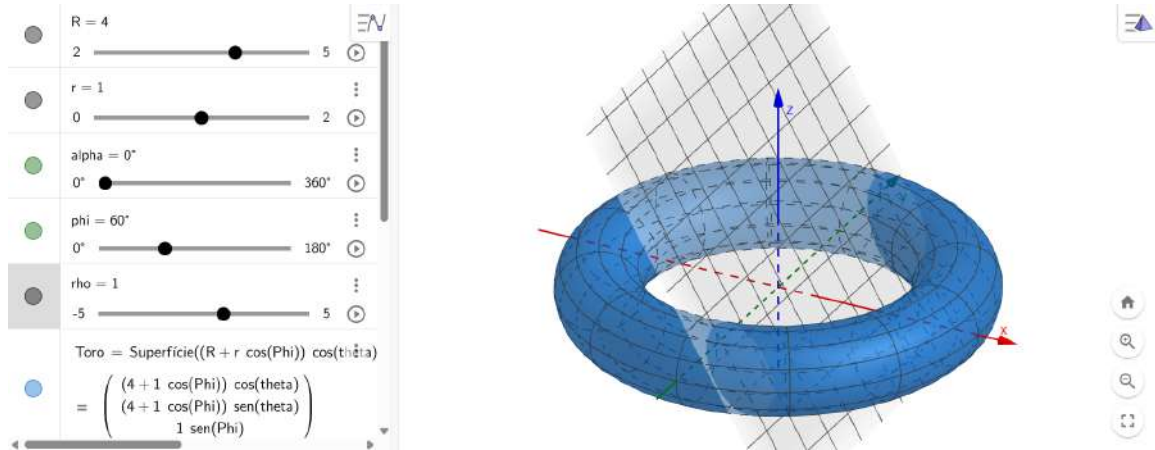
Na Figura 23, o plano secante é descrito a partir de dois vetores diretores, $u(\alpha)$ e $v(\alpha, \phi)$, e de um ponto $Q(\rho, \alpha)$ pertencente ao plano. Essa parametrização permite controlar de forma precisa tanto a inclinação quanto a posição do plano em relação ao toro, sendo fundamental para a dedução analítica das seções tóricas.

B.2.4 Equação auxiliar da interseção

Um ponto pertence simultaneamente ao toro e ao plano quando satisfaz as duas equações correspondentes. Para determinar a curva de interseção entre o toro e o plano secante, substituímos a parametrização do toro

$$T(\theta, t) = ((R + r \cos t) \cos \theta, (R + r \cos t) \sin \theta, r \sin t),$$

Figura 23 – Plano secante definido por vetores diretores



Fonte: O autor, 2025.

isto é, a mesma expressão de $T(\theta, \Phi)$ agora escrita com o parâmetro t no lugar de Φ , na equação do plano definido por $Q(\rho, \alpha)$, $u(\alpha)$ e $v(\alpha, \phi)$.

O plano é descrito pela parametrização vetorial

$$Q + s u(\alpha) + t v(\alpha, \phi),$$

o que permite testar diretamente a coplanaridade de um ponto.

Um vetor está contido em um plano se, e somente se, é perpendicular à normal desse plano. Assim, a condição de coplanaridade entre $T(\theta, t)$ e o plano é

$$\langle T(\theta, t) - Q, n(\alpha, \phi) \rangle = 0,$$

onde a normal é dada pelo produto vetorial

$$n(\alpha, \phi) = u(\alpha) \times v(\alpha, \phi).$$

Substituindo explicitamente as coordenadas e reorganizando a expressão, obtém-se

$$(R + r \cos t)(\cos \theta \cos \alpha + \sen \theta \sen \alpha) = \rho \sen \phi - r \cos \phi \sen t.$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos \theta \cos \alpha + \sen \theta \sen \alpha = \cos(\theta - \alpha),$$

chegamos à forma compacta:

$$(R + r \cos t) \cos(\theta - \alpha) = \rho \sen \phi - r \cos \phi \sen t. \quad (\text{B.1})$$

A partir dessa equação, isolamos $\cos(\theta - \alpha)$ dividindo ambos os lados por $R + r \cos t$. Em seguida, reorganizamos a expressão introduzindo o fator $\sin \phi$ no denominador. Para $\phi \neq 0$, obtemos

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{\rho \sin \phi - r \cos \phi \sin t}{\sin \phi (R + r \cos t)}.$$

Definimos, então, a função auxiliar

$$S(t) = \frac{\rho \sin \phi - r \cos \phi \sin t}{\sin \phi (R + r \cos t)},$$

de modo que a dependência entre θ e t possa ser escrita de forma compacta como

$$\cos(\theta - \alpha) = S(t).$$

A função $S(t)$ reúne em uma única expressão os termos que dependem da inclinação do plano e da geometria do toro. A equação

$$\cos(\theta - \alpha) = S(t)$$

mostra que, para cada valor de t , a existência de pontos na interseção depende exclusivamente do valor de $S(t)$. Como a função cosseno assume valores apenas no intervalo $[-1, 1]$, a curva existe somente para os valores de t em que $|S(t)| \leq 1$. Quando $|S(t)| > 1$, não há nenhum valor de θ que satisfaça a igualdade, e, portanto, não ocorre interseção para aquele parâmetro t .

Código GeoGebra:

$$S(t) = (\rho * \sin(\phi) - r * \cos(\phi) * \sin(t)) / (\sin(\phi) * (R + r * \cos(t)))$$

B.2.5 Ramos da interseção

A equação (B.1) torna-se

$$\cos(\theta - \alpha) = S(t),$$

e, para cada valor admissível de t , admite duas soluções simétricas em θ :

$$\theta_1(t) = \alpha + \arccos(S(t)), \quad \theta_2(t) = \alpha - \arccos(S(t)).$$

Essas duas escolhas correspondem naturalmente aos dois ramos da curva. Usando as identidades

$$\cos(\theta_i - \alpha) = S(t), \quad \sin(\theta_i - \alpha) = \pm \sqrt{1 - S(t)^2},$$

e substituindo-as na parametrização do toro, obtêm-se os dois ramos:

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} (R + r \cos t) \left(S(t) \cos \alpha - \sqrt{1 - S(t)^2} \sin \alpha \right) \\ (R + r \cos t) \left(S(t) \sin \alpha + \sqrt{1 - S(t)^2} \cos \alpha \right) \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} (R + r \cos t) \left(S(t) \cos \alpha + \sqrt{1 - S(t)^2} \sin \alpha \right) \\ (R + r \cos t) \left(S(t) \sin \alpha - \sqrt{1 - S(t)^2} \cos \alpha \right) \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

Os sinais opostos nas componentes de c_1 e c_2 refletem exatamente as duas possibilidades para $\theta - \alpha = \pm \arccos(S(t))$, confirmando a simetria dos dois ramos da interseção.

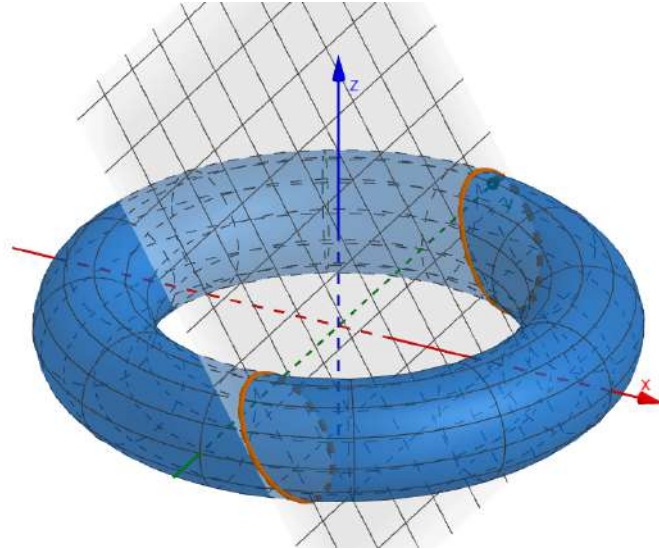
Código GeoGebra:

```
c1 = Curva[
  (R + r*cos(t)) *
  ( S(t)*cos(alpha) - sqrt(1 - S(t)^2)*sen(alpha) ),
  (R + r*cos(t)) *
  ( S(t)*sen(alpha) + sqrt(1 - S(t)^2)*cos(alpha) ),
  r*sen(t),
  t, 0 + (phi == 0), 2*pi - (phi == 0)]
```

```
c2 = Curva[
  (R + r*cos(t)) *
  ( S(t)*cos(alpha) + sqrt(1 - S(t)^2)*sen(alpha) ),
  (R + r*cos(t)) *
  ( S(t)*sen(alpha) - sqrt(1 - S(t)^2)*cos(alpha) ),
  r*sen(t),
  t, 0 + (phi == 0), 2*pi - (phi == 0)]
```

Na Figura 24, a interseção entre o plano inclinado e o toro de revolução dá origem a dois ramos distintos da seção tórica, denotados por c_1 e c_2 . Esses ramos correspondem às duas componentes reais da curva obtida nesse tipo de corte, refletindo a simetria geométrica presente na configuração considerada.

Figura 24 – Ramos da seção tórica obtidos por interseção com plano inclinado

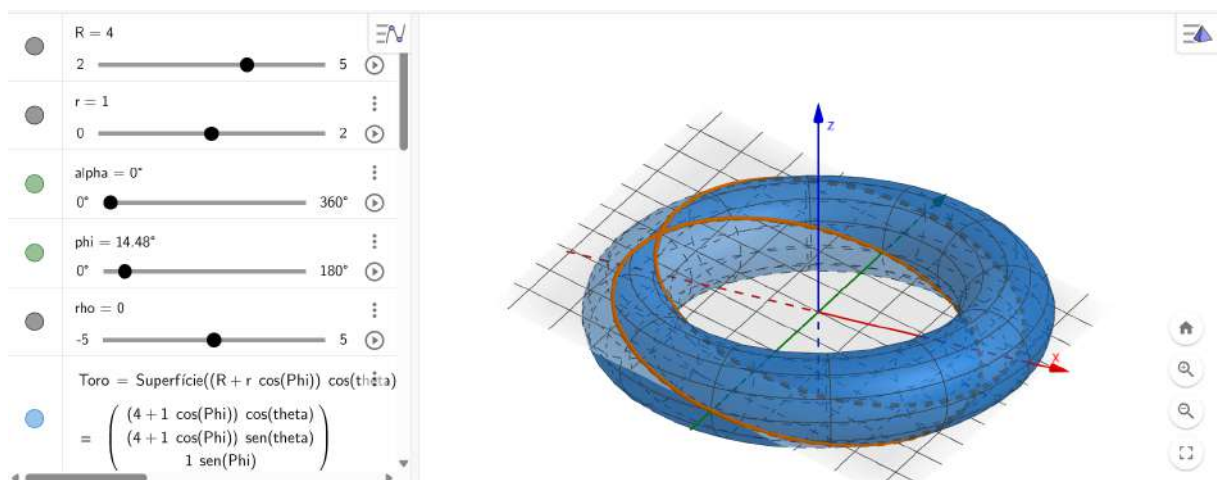


Fonte: O autor, 2025.

As curvas c_1 e c_2 implementam diretamente as expressões obtidas para os dois ramos da interseção entre o toro e o plano parametrizado pelos valores de α , ϕ e ρ .

Como discutido na Seção 3.3, a inclinação do plano pode produzir cortes oblíquos característicos do toro. A figura a seguir ilustra esse caso particular, em que os dois ramos da interseção reproduzem as curvas de Villarceau.

Figura 25 – Ramos das curvas de Villarceau obtidos por interseções oblíquas



Fonte: O autor, 2025.

Na Figura 25, a interseção oblíqua do toro de revolução gera duas curvas circulares

distintas, conhecidas como curvas de Villarceau. Esses dois ramos correspondem às soluções reais da seção tórica nesse caso particular e evidenciam uma simetria notável da superfície, já destacada por Darboux em sua análise geométrica.

B.2.6 O caso especial $\phi = 0$

A construção anterior foi desenvolvida sob a hipótese $\phi \neq 0$. Essa condição aparece de forma explícita na definição da função auxiliar

$$S(t) = \frac{\rho \operatorname{sen} \phi - r \cos \phi \operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} \phi (R + r \cos t)},$$

que envolve divisão por $\operatorname{sen} \phi$. Quando $\phi = 0$, o denominador se anula e a expressão deixa de fazer sentido algébrico. O caso $\phi = 0$ precisa, portanto, ser tratado separadamente.

Do ponto de vista geométrico, o vetor

$$v(\alpha, \phi) = (-\cos \alpha \cos \phi, -\operatorname{sen} \alpha \cos \phi, \operatorname{sen} \phi)$$

torna-se, para $\phi = 0$,

$$v(\alpha, 0) = (-\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha, 0),$$

isto é, um vetor inteiramente contido no plano xy . Os vetores

$$u(\alpha) = (\operatorname{sen} \alpha, -\cos \alpha, 0) \quad \text{e} \quad v(\alpha, 0)$$

passam a gerar o próprio plano xy . Como o ponto $Q(\rho, \alpha) = (\rho \cos \alpha, \rho \operatorname{sen} \alpha, 0)$ também pertence a esse plano, a parametrização

$$Q + s u(\alpha) + t v(\alpha, 0)$$

descreve o plano $z = 0$. Assim, o plano secante perde a inclinação e coincide com o plano horizontal que corta o toro.

A interseção entre o toro e o plano $z = 0$ é obtida impondo

$$z = r \operatorname{sen} t = 0,$$

o que implica

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \pi.$$

Substituindo esses valores na parametrização do toro,

$$T(\theta, t) = ((R + r \cos t) \cos \theta, (R + r \cos t) \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} t),$$

obtem-se duas circunferências coplanares, ambas contidas em $z = 0$:

$$C_{\text{externa}}(\theta) = ((R + r) \cos \theta, (R + r) \operatorname{sen} \theta, 0),$$

$$C_{\text{interna}}(\theta) = ((R - r) \cos \theta, (R - r) \operatorname{sen} \theta, 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Código GeoGebra:

```
Cext = Se[
  phi == 0,
  Curva[
    (R + r) * cos (t) ,
    (R + r) * sen (t) ,
    0,
    t, 0, 2*pi]]
```

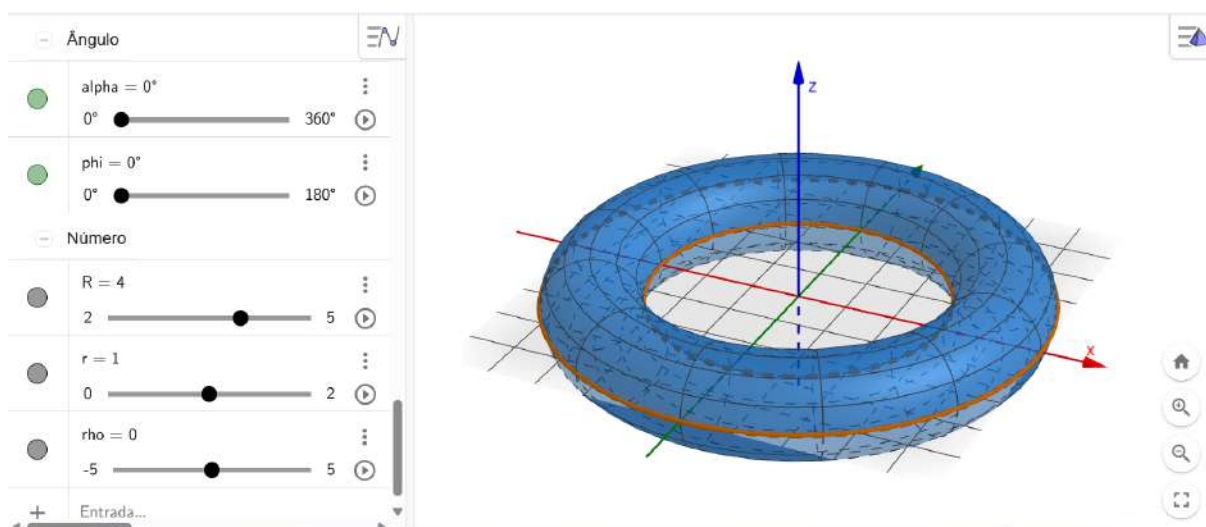
```
Cint = Se[
  phi == 0,
  Curva[
    (R - r) * cos (t) ,
    (R - r) * sen (t) ,
    0,
    t, 0, 2*pi]]
```

Na seção meridiana que contém o eixo de revolução, o plano $z = 0$ aparece como uma reta horizontal que é tangente à circunferência geratriz externa no ponto de abscissa $R + r$ e à geratriz interna no ponto de abscissa $R - r$. Na superfície tridimensional, essa situação corresponde à degenerescência da seção tórica em duas circunferências planas, uma interna e outra externa.

Na Figura 26, considera-se o caso especial em que $\phi = 0$, no qual o plano secante é horizontal. Nessa situação, a interseção do toro resulta em duas circunferências, uma interna e outra externa, correspondentes às seções circulares clássicas descritas por Darboux. Esse caso particular evidencia a persistência de seções de natureza puramente circular no conjunto das seções tóricas.

Esse é precisamente um dos casos-limite destacados por Darboux em seu estudo das seções do toro. A quártica que descreve, em geral, a interseção entre o toro e um plano inclinado

Figura 26 – Interseção do toro com plano horizontal no caso $\phi = 0$



Fonte: O autor, 2025.

se reduz, quando $\phi = 0$, à união de duas circunferências. Do ponto de vista geométrico, o caso $\phi = 0$ fornece um exemplo simples e muito visual de como uma mesma família de seções pode interpolar entre curvas quárticas mais gerais e figuras elementares como círculos.

Resumo dos passos no GeoGebra

Para facilitar a reprodução da construção no *GeoGebra*, organizamos abaixo os passos essenciais em ordem de execução:

1. Criar os controles deslizantes:

$$R \in (2, 5), \quad r \in (0, 2), \quad \alpha \in [0, 2\pi), \quad \phi \in (0, \pi), \quad \rho \in [-(R+r), R+r].$$

2. Construir o toro pela parametrização:

```
Toro = Superfície[
  (R + r*cos(Phi))*cos(theta),
  (R + r*cos(Phi))*sen(theta),
  r*sen(Phi),
  theta, 0, 2*pi,
  Phi, 0, 2*pi]
```

3. Definir o ponto que determina a posição do plano secante:

$$Q = (\rho \cdot \cos(\alpha), \rho \cdot \sin(\alpha), 0)$$

4. Construir os vetores diretores do plano:

$$u = \text{Vetor}[(0, 0, 0), (\sin(\alpha), -\cos(\alpha), 0)]$$

$$v = \text{Vetor}[(0, 0, 0), \\ (-\cos(\alpha) \cdot \cos(\phi), \\ -\sin(\alpha) \cdot \cos(\phi), \\ \sin(\phi))]$$

5. Criar o plano inclinado:

$$p = \text{Plano}[Q, u, v]$$

6. Definir a função auxiliar:

$$S(t) = (\rho \cdot \sin(\phi) - r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)) / \\ (\sin(\phi) \cdot (R + r \cdot \cos(t)))$$

7. Construir os dois ramos da curva de interseção:

(a) Primeiro ramo:

$$c1 = \text{Curva}[\\ (R + r \cdot \cos(t)) \cdot (S(t) \cdot \cos(\alpha) - \sqrt{1 - S(t)^2} \cdot \sin(\alpha)), \\ (R + r \cdot \cos(t)) \cdot (S(t) \cdot \sin(\alpha) + \sqrt{1 - S(t)^2} \cdot \cos(\alpha)), \\ r \cdot \sin(t), \\ t, 0, 2 \cdot \pi]$$

(b) Segundo ramo:

$$c2 = \text{Curva}[\\ (R + r \cdot \cos(t)) \cdot (S(t) \cdot \cos(\alpha) + \sqrt{1 - S(t)^2} \cdot \sin(\alpha)), \\ (R + r \cdot \cos(t)) \cdot (S(t) \cdot \sin(\alpha) - \sqrt{1 - S(t)^2} \cdot \cos(\alpha)), \\ r \cdot \sin(t), \\ t, 0, 2 \cdot \pi]$$

8. Construir os dois ramos da curva de interseção para $\phi = 0$:

(a) Ramo externo:

```
Cext = Se[
  phi == 0,
  Curva[
    (R + r)*cos(t),
    (R + r)*sen(t),
    0,
    t, 0, 2*pi]]
```

(b) Ramo interno:

```
Cint = Se[
  phi == 0,
  Curva[
    (R - r)*cos(t),
    (R - r)*sen(t),
    0,
    t, 0, 2*pi]]
```

9. Ajustar a visualização: ativar modo semitransparente no toro, destacar o plano secante e aplicar cores para os dois ramos.

Esse procedimento reproduz completamente a construção apresentada na Seção B.2 e permite visualizar, para valores adequados de ϕ , os dois ramos das curvas de Villarceau.

B.3 Considerações pedagógicas e materiais digitais

A construção do toro e de suas seções planas no GeoGebra 3D oferece um conjunto de possibilidades didáticas relevantes para a formação de professores e para a elaboração de atividades investigativas em sala de aula. A manipulação direta dos parâmetros envolvidos permite observar transições contínuas entre diferentes tipos de cortes, destacando aspectos geométricos que, em geral, não aparecem em representações bidimensionais.

A variação do parâmetro ρ controla o deslocamento do plano e evidencia, de maneira clara, quando a interseção deixa de existir, quando surge um único ramo ou quando aparecem dois ramos distintos. Já a inclinação determinada por ϕ permite explorar situações oblíquas, aproximando cortes clássicos como os círculos de Villarceau e oferecendo oportunidade para discutir relações entre orientação do plano e simetria do toro. Em especial, valores críticos de ρ e combinações específicas entre os parâmetros tornam visíveis formas como as ovais de Cassini e, no limite, a lemniscata de Bernoulli.

Tais variações não apenas ilustram conceitos de geometria diferencial e superfícies de revolução, mas também promovem o desenvolvimento de habilidades relacionadas à interpretação gráfica, análise de dependência funcional e compreensão espacial, previstas em documentos curriculares como a BNCC. A possibilidade de alternar vistas, ajustar opacidade e manipular curvas explicitamente favorece discussões sobre continuidade, simetria e transformação geométrica, contribuindo para uma abordagem mais visual e conceitual do estudo de superfícies.

As construções desenvolvidas neste anexo estão disponíveis em versões digitais interativas, permitindo a manipulação dos parâmetros em tempo real e a visualização completa das seções do toro no GeoGebra 3D.

- **Construção B.1 — Versão simplificada**

<<https://www.geogebra.org/classic/wthemzwp>>

- **Construção B.2 — Versão completa com plano inclinado**

<<https://www.geogebra.org/classic/jduzbghq>>

- **Construção complementar — Versão com vista do plano secante**

<<https://www.geogebra.org/classic/etsuvzyz>>

APÊNDICE C – PRODUTO EDUCACIONAL: REVISTA DE DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

A revista *Trajetórias — História da Matemática e Divulgação Científica* é o produto educacional desta dissertação e representa o resultado do percurso desenvolvido ao longo da pesquisa. Seu objetivo é aproximar temas da matemática superior, em especial o estudo do toro de revolução e das seções apresentadas por Jean-Gaston Darboux em 1864, do público escolar e dos professores da educação básica, que muitas vezes permanecem distantes desse tipo de conteúdo.

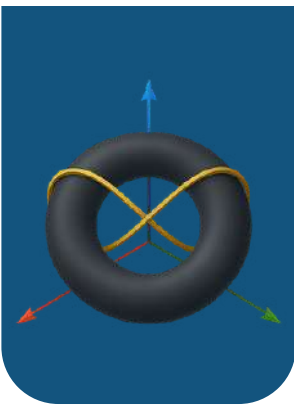
A motivação para a criação da revista surgiu da percepção de duas lacunas importantes. A primeira é a pouca presença de Darboux e de suas ideias na formação docente e na cultura matemática brasileira. A segunda é o distanciamento entre a matemática trabalhada na universidade e aquela que chega às escolas. Ao longo da pesquisa, ficou claro que esse distanciamento não se deve à incapacidade de professores ou estudantes, mas às poucas oportunidades de acesso, mediação e material didático que tornem esses temas compreensíveis e visualmente acessíveis. A revista foi criada, portanto, para ajudar a preencher esse espaço, fortalecendo o repertório de quem ensina matemática na educação básica.

A concepção do produto apoiou-se em três etapas principais. Primeiro, foi realizada uma leitura aprofundada da obra e da trajetória de Jean-Gaston Darboux, seguida da tradução comentada de seu artigo de 1864. Esse estudo conjunto permitiu compreender não apenas as ideias presentes no artigo, mas também o contexto intelectual que moldou sua escrita. Em seguida, foram produzidas construções geométricas no GeoGebra, que tornam visíveis as curvas e fenômenos descritos por Darboux. Por fim, todo esse material foi organizado em formato de revista, com linguagem clara, estrutura acessível e cuidado visual, de modo a dialogar diretamente com professores, estudantes e outros leitores interessados em matemática.

A revista se insere de forma natural no campo da divulgação científica ao adotar uma comunicação que valoriza clareza, visualidade e contextualização histórica. As entrevistas presentes no material reforçam essa dimensão pública da ciência: ao ouvir pesquisadores que atuam em universidades e grupos de pesquisa, o leitor passa a compreender que o trabalho científico envolve não só investigação, mas também comunicação, interpretação e valorização do próprio objeto de estudo. Assim, a revista contribui para aproximar o público da cultura científica e para mostrar que a matemática é uma prática viva, construída por pessoas e sempre

em transformação.

O produto foi pensado para ser utilizado na educação básica de diferentes maneiras. As imagens podem auxiliar em aulas de geometria; os textos históricos ajudam a conectar o currículo escolar com a história da matemática; os roteiros em GeoGebra permitem atividades práticas e investigativas; e as entrevistas ampliam a visão dos estudantes sobre o que significa fazer ciência. A revista funciona, portanto, como uma ponte entre o ensino escolar e a matemática universitária, oferecendo ao professor novos caminhos, novas referências e novos modos de explorar a matemática em sala de aula.

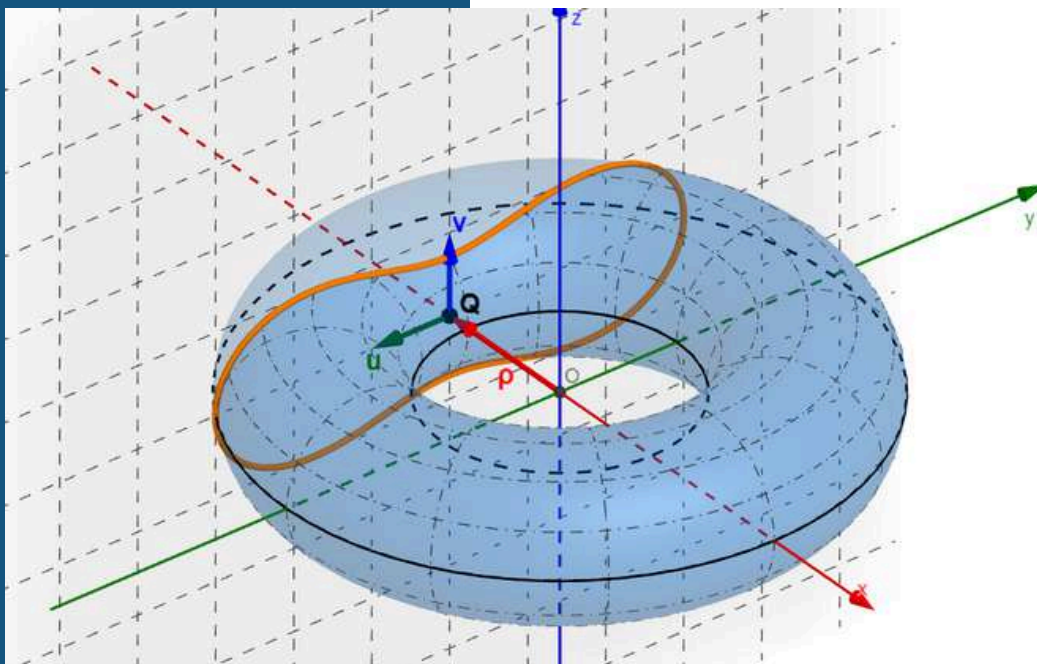


TRAJETÓRIAS

História da Matemática e Divulgação Científica

AS SEÇÕES DO TORO

Jean-Gaston Darboux e a geometria no século XIX.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO: Entrevistas com matemáticos brasileiros: teoria, aplicações e ensino.

JEAN-GASTON DARBOUX: Um geômetra do século XIX e sua leitura do toro.

CURVAS NOTÁVEIS: Cassini, Bernoulli e Villarceau entre arte e ciência.

PRÁTICA EM SALA DE AULA: GeoGebra como ferramenta para explorar as seções do toro.

SUMÁRIO

Editorial – p. 03

1. Seção Histórica

Jean-Gaston Darboux (1842–1917) – p. 04

O artigo *Sur les sections du tore* (1864) – p. 05

2. Seção Matemática

Toro como superfície de revolução – p. 06

Toro como lugar geométrico e superfície algébrica de grau 4 – p. 07

Introdução às seções tóricas – p. 08

Ovais de Cassini – p. 09

Lemniscata de Bernoulli – p. 10

Círculos de Villarceau – p. 11

3. Trajetórias em Diálogo – p. 12

Entrevista com Marcos Craizer – p. 13

Entrevista com Alejandro Cabrera – p. 15

Entrevista com Anderson Reis de Vargas – p. 17

Entrevista com Magno Luiz Ferreira – p. 19

4. Seção Didática

Seções tóricas no GeoGebra – p. 19

Construindo o toro no GeoGebra 3D – p. 20

Conclusão – p. 22

Referências – p. 23

Ficha Técnica – p. 24

EDITORIAL

É com grande alegria que apresento a primeira edição da revista **Trajelórias – História da Matemática e Divulgação Científica**.

Este projeto nasce como fruto da minha pesquisa de mestrado, mas também como um convite para que professores, estudantes e curiosos possam olhar a matemática com outros olhos: os da história, da beleza e da imaginação científica.

O tema desta edição é o **toro de revolução** e as curvas que surgem de seus cortes estudadas por **Jean-Gaston Darboux** em **1864**. Longe de ser apenas uma curiosidade geométrica, o toro oferece um ambiente simples e, ao mesmo tempo, surpreendentemente rico para explorar formas diversas, como círculos, ovais e lemniscatas.

Aqui, o leitor encontrará uma breve visita à trajetória de Darboux, um olhar introdutório sobre o toro e, sobretudo, o coração desta revista: a seção **Trajelórias em Diálogo**, que reúne quatro entrevistas e quatro perspectivas complementares sobre a geometria. Um geômetra, um matemático com formação em Física, um professor-pesquisador e um historiador da matemática apresentam visões convergentes e complementares sobre geometria, ensino e as transformações que definiram a matemática moderna.

Nosso propósito é simples e profundo: **aproximar a matemática da vida**. Que cada página seja um convite à descoberta, ao diálogo e ao encantamento com a história da matemática e suas conexões.

Boa leitura!

Wallace da Silva
Editor



+55 21 99939-7424

wallacedsilva@outlook.com.br



SEÇÃO HISTÓRICA

JEAN-GASTON DARBOUX (1842–1917)



Figura 1 - Jean-Gaston Darboux

Jean-Gaston Darboux nasceu em Nîmes, no sul da França, em 1842. Estudou na École Normale Supérieure, em Paris, onde foi aluno de grandes mestres da análise e da geometria. Rapidamente destacou-se como pesquisador e professor, ocupando cátedras no Collège de France e tornando-se, mais tarde, secretário perpétuo da Académie des Sciences.

Ao longo da carreira, Darboux publicou trabalhos fundamentais em análise, teoria das superfícies e equações diferenciais. Seu nome está ligado a conceitos que ainda hoje figuram em manuais avançados, como a **transformação de Darboux** e o **teorema de Darboux**.

Foi, no entanto, na **geometria diferencial** que deixou sua marca mais profunda. Combinando a tradição iniciada por Gauss e ampliada por Riemann, Darboux soube transformar superfícies em verdadeiros laboratórios matemáticos. Entre elas, o **toro de revolução** se destacou como palco privilegiado de suas investigações.

Darboux defendeu *Sur les surfaces orthogonales* em 14 de julho de 1866, diante de Chasles, Serret e Bouquet. Nesse trabalho, introduziu o estudo das **linhas isotérmicas** de curvatura em famílias de superfícies ortogonais, aprofundando resultados de Monge e Lamé. A tese foi recebida com entusiasmo e marcou sua entrada definitiva na geometria diferencial.

Em 1864, publicou o artigo "*Sur les sections du tore*", no qual analisa com rigor as curvas geradas pela interseção entre o toro e planos em diferentes inclinações. Esse texto, escrito ainda no início de sua trajetória acadêmica, revela a originalidade de um matemático capaz de encontrar elegância em objetos simples e, ao mesmo tempo, grande profundidade em problemas aparentemente elementares.

Linha do Tempo de Darboux

- 1842 ● Nasce em Nîmes, França.
- 1864 ● Publica *Sur les sections du tore*.
- 1866 ● Defende a tese *Sur les surfaces orthogonales*, sob orientação de Michel Chasles.
- 1873 ● Secretário perpétuo da *Académie des Sciences*.
- 1917 ● Falece em Paris.

SEÇÃO HISTÓRICA

SUR LES SECTIONS DU TORE (1864)

O artigo que inaugura as curvas notáveis do toro

Publicado em 1864, **Sur les sections du tore** é um texto breve e inteiramente analítico, escrito na linguagem matemática de sua época. Ainda assim, Darboux faz a geometria emergir dos cálculos: os círculos de **Villarceau**, as ovas de **Cassini** e a lemniscata de **Bernoulli** aparecem como imagens implícitas no próprio raciocínio. O artigo revela a habilidade rara do autor de unir precisão analítica e visualização geométrica, combinação que torna sua leitura um desafio, mas também uma descoberta para o leitor contemporâneo.

Trecho original (francês):

Si l'on considère un tore de révolution obtenu par la rotation d'un cercle autour d'un axe extérieur, on voit qu'un plan quelconque peut le couper suivant des courbes dont la forme dépend essentiellement de l'inclinaison du plan. Dans certains cas, la section est un cercle, dans d'autres, elle devient une courbe plus compliquée, souvent symétrique et toujours déterminée par une équation du second degré en x , y et z .

Tradução (português):

Se considerarmos um toro de revolução obtido pela rotação de um círculo em torno de um eixo exterior, vemos que um plano arbitrário pode cortá-lo segundo curvas cuja forma depende essencialmente da inclinação do plano. Em alguns casos, a seção é um círculo, em outros, torna-se uma curva mais complexa, frequentemente simétrica e sempre determinada por uma equação de segundo grau em x , y e z .

— Jean-Gaston Darboux, „Sur les sections du tore”, 1864.

Das interseções do toro surgem figuras que combinam simplicidade e profundidade. Villarceau, Cassini e Bernoulli são pontos de partida para compreender por que essa superfície continua a fascinar a matemática e são o fio que conduz às páginas seguintes.

O que Darboux faz no artigo:

- Analisa cortes do toro por planos em diferentes inclinações.
- Descreve o surgimento de curvas como circunferências, ovas e lemniscatas.
- Introduz métodos de cálculo diferencial aplicados à geometria das superfícies.
 - Mostra que um objeto simples pode dar origem a fenômenos geométricos sofisticados.

Importância do artigo:

- É o primeiro estudo sistemático das seções do toro.
- Antecipou ideias que hoje aparecem em livros de geometria diferencial.
- Tornou-se referência permanente na obra de Darboux.
- Inspirou estudos posteriores sobre curvas de Cassini, Villarceau e Bernoulli.
- Mostra um método que combina intuição geométrica e cálculo preciso.

SEÇÃO MATEMÁTICA

O TORO COMO OBJETO MATEMÁTICO

O toro pode ser descrito de três formas principais:

O toro pode ser descrito como superfície de revolução, como lugar geométrico e como superfície algébrica de grau 4 em \mathbb{R}^3 . Cada uma dessas representações destaca um aspecto da sua estrutura e prepara o terreno para o estudo das seções tóricas, tal como feito por Jean Gaston Darboux em seu artigo de 1864.

1. Toro como superfície de revolução e representação paramétrica:

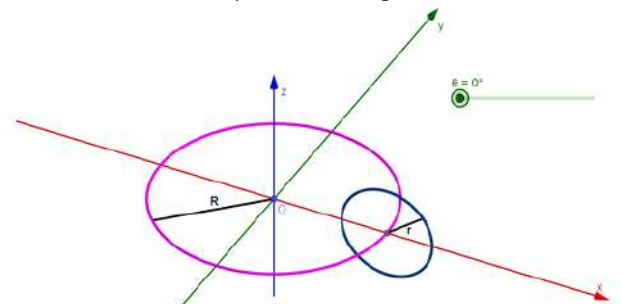
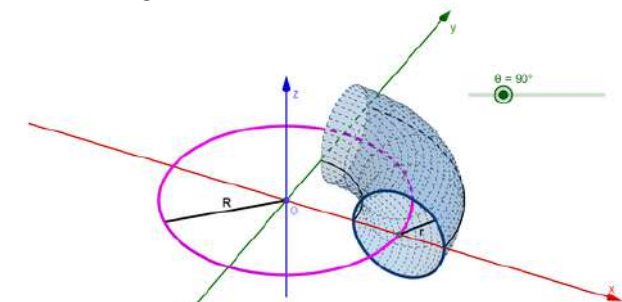
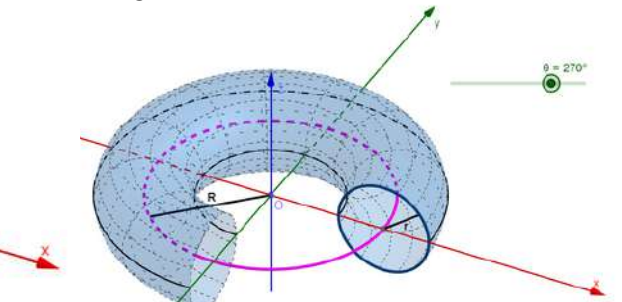
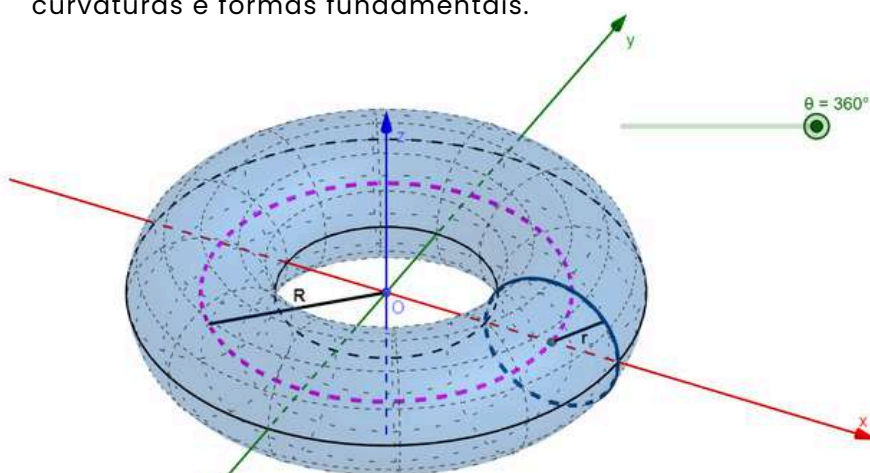
Partimos de um círculo de raio r , com centro em $(R,0,0)$ no plano XZ , e o rotacionamos em torno do eixo Z , com $R > r > 0$. Essa construção produz o chamado toro anular, superfície regular, fechada e com simetria axial.

Do ponto de vista analítico, introduzimos dois ângulos. O ângulo ϕ localiza o ponto na circunferência geratriz, no plano vertical. O ângulo θ descreve a rotação dessa circunferência em torno do eixo Z . Assim obtemos a parametrização.

$$\mathbf{T}(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

com $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

Essa forma torna visível a estrutura do toro como superfície de revolução e é especialmente adequada para visualizações em softwares como o GeoGebra, bem como para o estudo de vetores tangentes, curvaturas e formas fundamentais.

Figura 2.1 - Giro de 0° Figura 2.2 - Giro de 90° Figura 2.3 - Giro de 270° Figura 2.4 - Giro de 360°

SEÇÃO MATEMÁTICA

O TORO COMO OBJETO MATEMÁTICO

2. Toro como lugar geométrico:

Reescrevendo a parametrização em termos das coordenadas cartesianas, obtemos

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,$$

a equação que descreve o toro como conjunto de todos os pontos do espaço que estão a distância constante r de uma circunferência de raio R , situada no plano XY e centrada na origem.

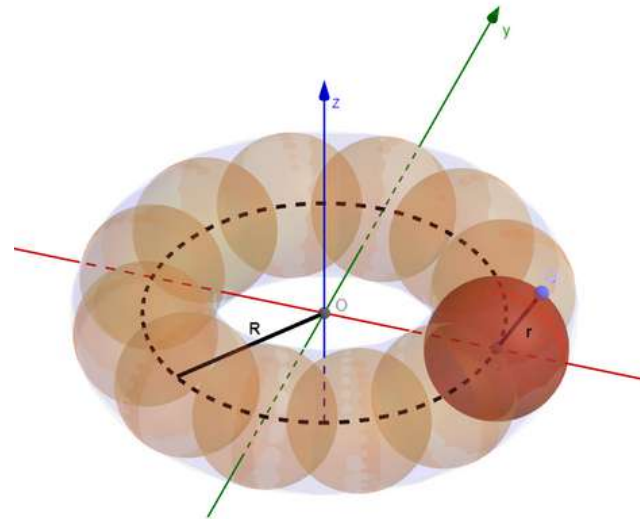


Figura 2.5 - O toro como lugar geométrico

Trata-se da interpretação do toro como lugar geométrico: em vez de parametrizar a geratriz, consideramos o **conjunto das esferas** de raio r centradas na circunferência de raio R . Essa formulação, adotada por Darboux em *Sur les sections du tore*, define o toro pela condição de distância constante, estrutura que favorece a dedução das equações das seções planas.

3. Toro como superfície algébrica de grau 4:

Desenvolvendo a equação métrica, eliminamos a raiz e obtemos a equação cartesiana do Toro:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

Trata-se de uma quártica bicircular, isto é, de uma superfície algébrica de grau 4 em R^3 que contém dois círculos no infinito.

É essa forma algébrica que permite estudar de modo sistemático as seções tóricas. Ao substituir na equação do toro as coordenadas de um plano secante convenientemente parametrizado, obtemos a equação implícita das curvas de interseção. É nesse cenário que surgem figuras clássicas como os círculos de Villarceau, as ovas de Cassini e a lemniscata de Bernoulli, que Darboux analisa em detalhe.

As três representações do toro convivem de forma articulada. A parametrização evidencia a origem geométrica da superfície, a descrição por lugar geométrico traduz o ponto de vista adotado por Darboux e a equação algébrica fornece a base para deduzir, em coordenadas locais, a equação das seções tóricas. É a partir dessa síntese que, nas próximas páginas, o leitor acompanhará o caminho de Darboux na descrição das curvas geradas pela interseção entre o toro e um plano.

SEÇÃO MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO ÀS SEÇÕES TÓRICAS

As seções do toro: entre história, geometria e beleza matemática

Seção tórica é qualquer curva obtida pela interseção entre um toro de revolução e um **plano secante**.

Dependendo da posição e inclinação do plano, surgem diferentes tipos de curvas:

- círculos comuns,
- círculos de Villarceau,
- ovais de Cassini,
- lemniscatas de Bernoulli,
- curvas abertas,
- e até curvas autointersectantes.

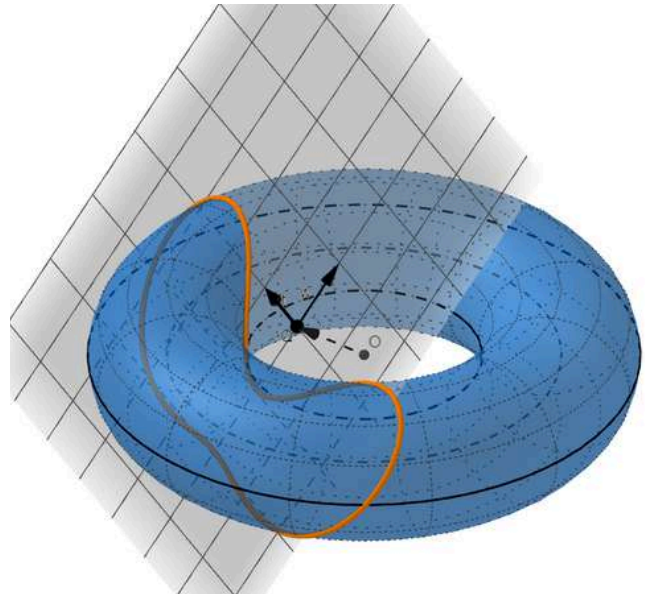


Figura 2.6 - A interseção entre um toro e um plano inclinado, destacada em laranja.

Trecho original (francês):

Un plan quelconque peut le couper suivant des courbes dont la forme dépend essentiellement de l'inclinaison du plan. (Darboux, 1864)

Tradução (português):

Um plano arbitrário pode cortá-lo (o toro) segundo curvas cuja forma depende essencialmente da inclinação do plano. (Darboux, 1864)

As seções do toro já eram conhecidas desde o século XVII, sobretudo em problemas de mecânica e óptica que exploravam interseções entre superfícies e planos.

Foi **Jean-Gaston Darboux**, em 1864, quem organizou o estudo sistemático dessas curvas no artigo Sur les sections du tore. Nesse trabalho, ele:

1. Apresenta uma **parametrização adaptada ao plano secante**, que permite descrever a interseção com clareza;
2. Analisa a **simetria e a estrutura** das curvas obtidas;
3. Discute casos notáveis (Cassini, Bernoulli, Villarceau);
4. E propõe uma leitura **geométrica refinada**, antecipando ideias que mais tarde se consolidariam na geometria diferencial moderna.

Explore no
Geogebra:



[Click aqui](#)

SEÇÃO MATEMÁTICA

1. AS OVAIS DE CASSINI

As **ovais de Cassini** são curvas definidas pelo conjunto de pontos P do plano cujo **produto das distâncias** a dois focos fixos F1 e F2 é constante:

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = k$$

Introduzidas por **Giovanni Domenico Cassini** em **1680**, essas curvas generalizam a elipse, mas trocam a soma das distâncias focais pelo produto. Por isso, podem assumir formas que vão desde **duas componentes desconexas** até uma **oval convexa**, passando pela curva crítica da família: **a lemniscata de Bernoulli**.

Quase dois séculos depois, **Jean-Gaston Darboux** mostrou que elas surgem naturalmente ao cortar um toro por um **plano vertical**, revelando uma ponte elegante entre curvas focais clássicas e a geometria diferencial do toro.

Quando representadas com os focos em $(\pm a, 0)$, sua forma algébrica clássica é:

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4$$

As ovas de Cassini surgem como casos especiais das seções tóricas verticais. Ao cortar o toro por um plano paralelo ao eixo de revolução ($\varphi=0$) e restringir a equação da seção tórica ao próprio plano ($v=0$), obtém-se:

$$(u^2 + \rho^2 + v^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + \rho^2)$$

Com $b^2=R^2-r^2$, essa quártica plana torna-se equivalente à forma clássica de Cassini com $x=u$, $y=\rho$, $a=R$, $c=b$. Assim, **a seção vertical do toro coincide exatamente com uma oval de Cassini**.

Darboux demonstra que, ao variar a posição do plano vertical (controlada pelo parâmetro ρ), surgem as três morfologias clássicas da família:

Sua análise combina o rigor algébrico com uma visão geométrica refinada e é essa leitura que inspira diretamente o material desta revista.

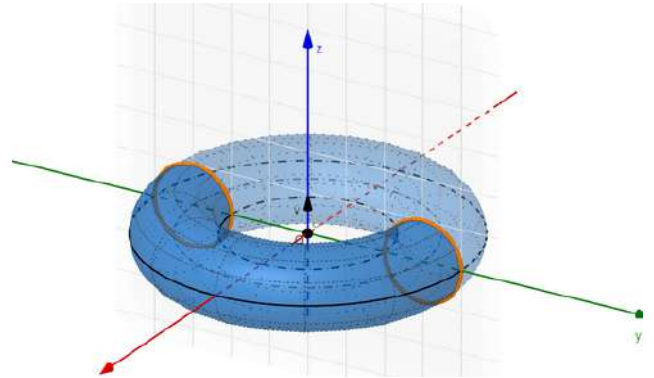


Figura 2.7 – Duas componentes desconexas.

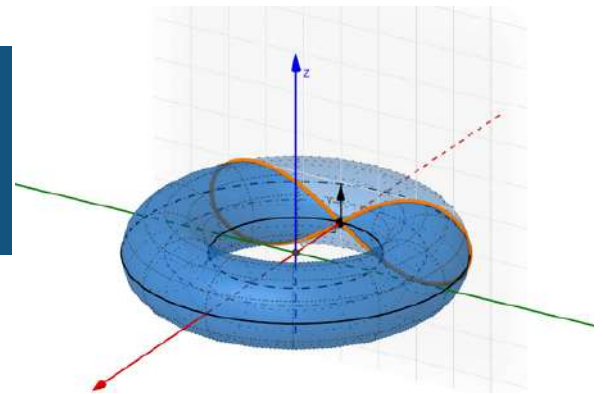


Figura 2.8 – Lemniscata de Bernoulli.

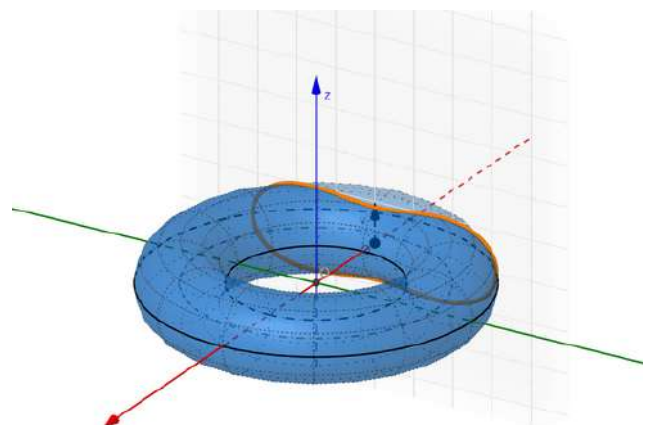


Figura 2.9 – Oval convexa.

- Duas componentes desconexas, se $c < a$;
- Lemniscata de Bernoulli, no caso crítico, se $c = a$;
- Oval convexa e simples, se $c > a$.

SEÇÃO MATEMÁTICA

2. A LEMNISCATA DE BERNOULLI

A **lemniscata de Bernoulli** é a curva que surge **no caso crítico** da família das ovas de Cassini. Na forma clássica:

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4,$$

ela aparece quando

$$c = a,$$

isto é, quando o produto das distâncias aos dois focos atinge o valor exato em que duas componentes desconexas se fundem em um único laço simétrico: a famosa forma de “∞”.

Na forma polar, sua expressão elegante é:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta),$$

destacando sua simetria e estrutura de duplo laço.

Introduzida por **Jakob Bernoulli** no século XVII, a lemniscata nasceu do estudo de problemas de quadratura e de modelos astronômicos. Sua forma de laço, derivada do latim *lemniscatus*, tornou-se um dos símbolos clássicos da matemática.

No artigo *Sur les sections du tore* (1864), **Darboux** reconhece a lemniscata como o limite crítico natural das seções planas do toro, mesmo sem nomeá-la diretamente. Ela representa, para ele, o ponto em que duas componentes se unem por simetria.

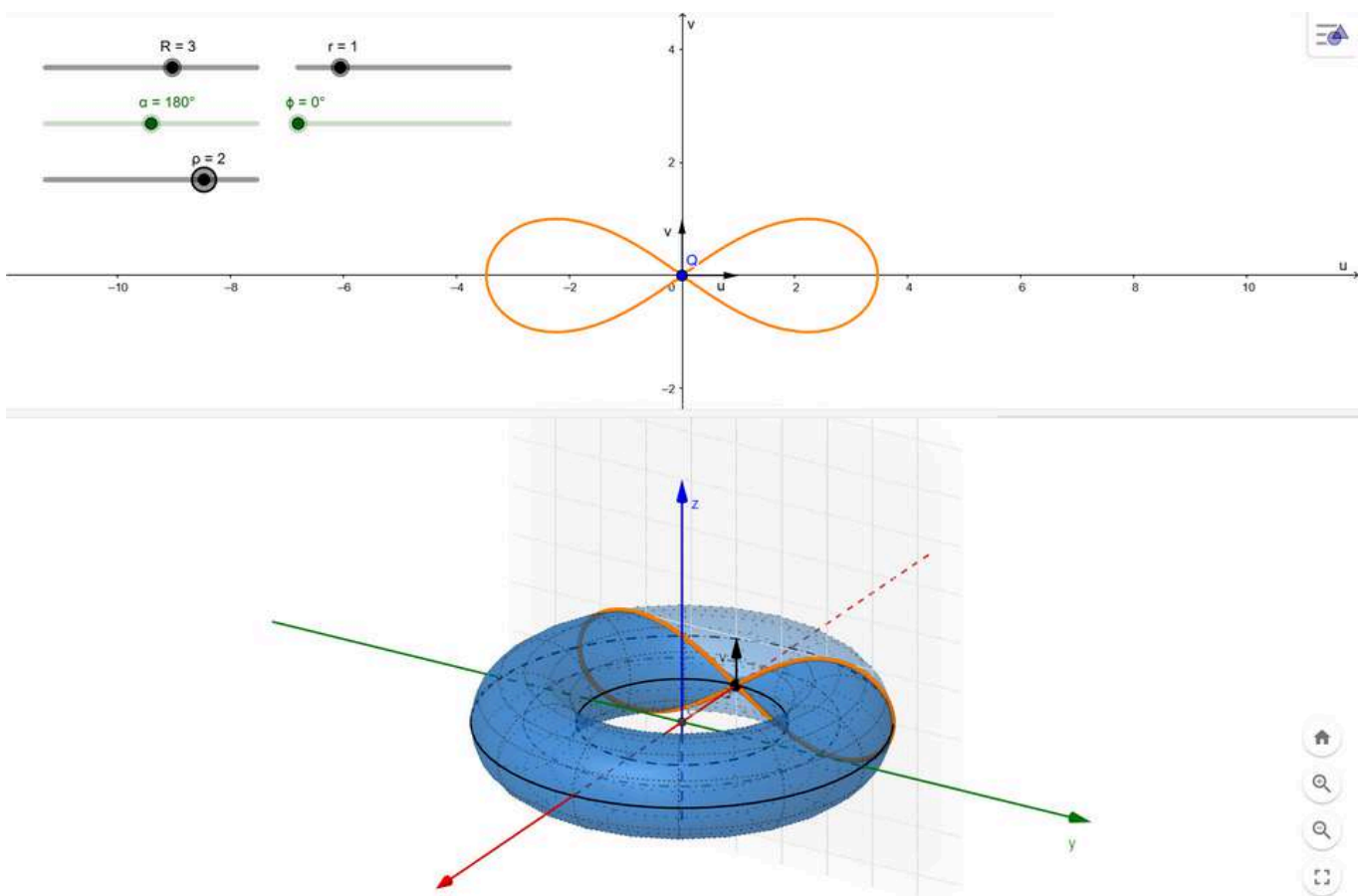


Figura 2.10 — Lemniscata de Bernoulli, caso crítico ($c = a$).

SEÇÃO MATEMÁTICA

3. CÍRCULOS DE VILLARCEAU

Os **círculos de Villarceau** aparecem quando o toro é cortado por **um plano oblíquo muito específico**, inclinado de modo a passar por **dois pontos diametralmente opostos** da circunferência maior do toro.

Nesse ângulo único, a interseção, normalmente uma curva quártica, se **degenera em duas circunferências congruentes**, simétricas e perfeitamente inseridas na superfície.

Os círculos foram observados pela primeira vez por **Jean-Baptiste Villarceau**, em **1848**, durante estudos geométricos ligados à Astronomia. Sua descoberta foi apresentada à *Académie des Sciences* e rapidamente se tornou uma curiosidade matemática: um corte oblíquo que, inesperadamente, produz dois círculos perfeitos.

Essa é uma das seções mais elegantes do toro: duas curvas circulares surgem como se fossem “linhas escondidas”, reveladas apenas no plano correto.

Considere um toro de parâmetros $R > r > 0$.

Darboux (1864) demonstra que existe um único ângulo φ para o qual a seção tórica se torna circular. Esse ângulo satisfaz:

$$\tan \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

No sistema intrínseco do plano de corte, a equação geral da seção tórica se reduz, sob a condição de Villarceau, ao produto de duas circunferências:

$$(u - \rho)^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad (u + \rho)^2 + y^2 = \rho^2.$$

Ou seja: uma **quártica degenerada** em **duas cônicas**. Cada círculo é tangente ao toro em dois pontos, formando o par simétrico que caracteriza a seção de Villarceau.

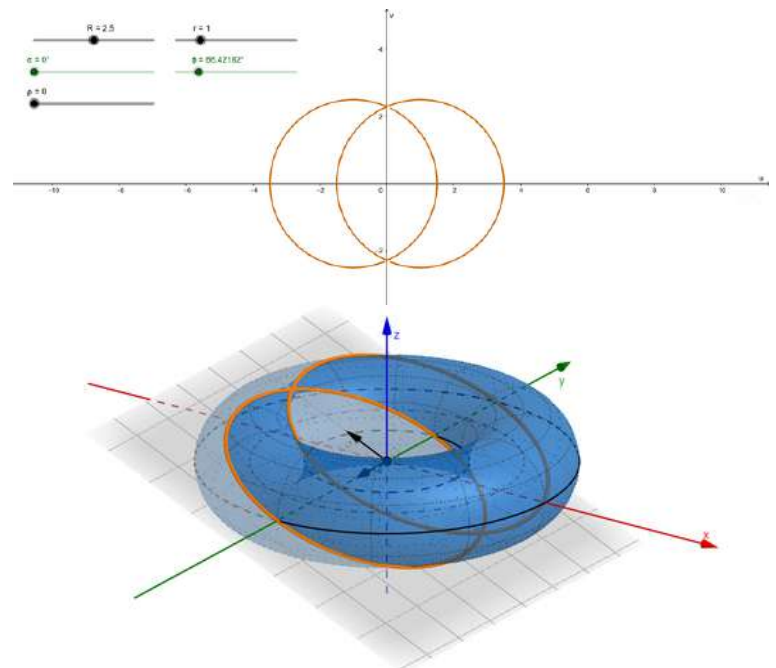


Figura 2.11 - Toro cortado por plano oblíquo específico, produzindo os dois círculos de Villarceau.

Somente em 1864, no artigo *Sur les sections du tore*, Jean-Gaston Darboux forneceu uma análise completa: explicou o ângulo, descreveu a degeneração da quártica e mostrou por que surgem exatamente duas circunferências.

As três seções tóricas, Cassini, Bernoulli e Villarceau, mostram que o toro abriga uma variedade surpreendente de curvas clássicas. Cada plano revela uma forma distinta. Assim, encerramos este percurso retomando a ideia central de Darboux: a inclinação do plano transforma tudo.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

O TORO SOB QUATRO PERSPECTIVAS

A presente seção reúne quatro olhares complementares sobre o toro, a geometria diferencial e o lugar da História da Matemática na compreensão da matemática contemporânea. As entrevistas mostram como pesquisa, ensino e história se cruzam para iluminar temas que atravessam mais de um século de debates: de Darboux ao século XXI.



Marcos Craiser

Doutor pelo **IMPA** e professor da **PUC-Rio**, atua em geometria diferencial, singularidades e aplicações modernas à visão computacional.

Alejandro Cabrera

Doutor em Matemática e professor da **UFRJ**, trabalha com geometria, física matemática e modelos geométricos que aparecem em teorias contemporâneas.



Anderson Vargas

Doutor pela **PUC-Rio**, professor do **Colégio Pedro II**, pesquisa ensino de geometria, formação docente e perspectivas didáticas para o toro e outras superfícies.

Magno Ferreira

Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física pela **UFRJ**, professor do **IFRJ**, investiga práticas matemáticas do século XIX, teoria dos invariantes e formação do historiador da matemática no Brasil.



POR QUE CONVIDAMOS ESSES PESQUISADORES?

A escolha dos entrevistados reflete a diversidade de perspectivas que o toro e suas seções suscitam:

- **Craiser**, pela profundidade na geometria diferencial clássica;
- **Cabrera**, pela articulação entre geometria e física contemporânea;
- **Vargas**, pela ponte entre história, ensino e formação de professores.
- **Ferreira**, pela leitura historiográfica do século XIX, destacando práticas matemáticas, circulação de ideias e a própria formação do historiador da matemática no Brasil.

Juntos, oferecem um panorama que conecta Darboux às discussões atuais em matemática.

COMO CHEGAMOS ÀS PERGUNTAS?

A formulação das perguntas partiu das leituras realizadas para esta edição, do estudo das seções tóricas e da busca por compreender como temas que surgem em Darboux podem ser revisitados no presente. Procuramos saber:

- Como se dá hoje a formação em geometria diferencial?
- O toro permanece relevante na pesquisa contemporânea?
- Que vínculos mantém com a Física?
- De que modo a História da Matemática pode aproximar esses temas do ensino?
- O que a historiografia do século XIX revela sobre a formação da matemática moderna?

A seguir, você encontrará o diálogo completo com Marcos Craiser, Alejandro Cabrera, Anderson Vargas e Magno Luiz Ferreira, revelando como o toro continua vivo na matemática contemporânea.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM MARCOS CRAIZER

Nesta conversa, Marcos Craizer revisita a formação em geometria diferencial, comenta caminhos de pesquisa e destaca como a história e as aplicações ajudam a ampliar o alcance da área. Suas respostas oferecem uma visão clara e atual do campo, mantendo o diálogo com suas raízes clássicas.



Marcos Craizer

Marcos Craizer doutorou-se pelo **IMPA** em 1989 e é **professor** do Departamento de Matemática da **PUC-Rio** desde 1988. Sua área de pesquisa se situa entre a **Geometria Diferencial Afim** e a **Teoria de Singularidades**. Tem também interesse em Geometria Discreta, considerando suas aplicações em Visão Computacional.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/8432199070549609>

1. Como se dá a formação matemática de um estudante que segue a linha da geometria diferencial?

MC: A Geometria Diferencial é uma área clássica da matemática e está diretamente relacionada ao surgimento do cálculo diferencial e integral. Ela possui uma teoria básica importante, envolvendo curvaturas e geodésicas. Após aprender essa teoria fundamental, o estudante tem um leque enorme de possibilidades para seguir. Vejamos algumas delas:

- Geometria Riemanniana, que generaliza a geometria clássica para dimensões maiores;
- Geometrias afim e projetiva, que enfocam propriedades invariantes pelos respectivos grupos de transformações;
- Geometria hiperbólica, também conhecida como geometria não euclidiana;
- Geometria conforme, que considera objetos invariantes pelas transformações de Möbius;
- Geometria de Lorentz–Minkowski, associada à Teoria da Relatividade.

Uma linha mais recente é a chamada **Geometria Diferencial Discreta**, que estuda versões discretizadas dos conceitos da geometria diferencial. Também é importante mencionar que a área está fortemente relacionada às equações diferenciais parciais, pois inúmeras classes relevantes de superfícies são definidas a partir de EDPs.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM MARCOS CRAIZER

2. O toro ainda é um objeto de estudo em geometria diferencial clássica? Há novidades recentes que envolvem essa temática?

MC: O toro é uma variedade compacta muito rica em propriedades matemáticas importantes. Alguns exemplos: ele admite campos de vetores sem singularidades, possui uma forma simplética não degenerada e é um grupo de Lie. Essas características fazem do toro um exemplo fundamental em Topologia Algébrica, Geometria Simplética e na teoria de Grupos de Lie, todas elas áreas que continuam sendo objeto de pesquisa atual em matemática.

3. O senhor acredita que a História da Matemática pode ajudar a despertar interesse pela temática ou mesmo popularizar resultados da geometria diferencial entre alunos de licenciatura em Matemática ou de cursos de Física que não tiveram contato direto com a disciplina na graduação?

MC: Sim. A história é fundamental para que o aluno entenda a evolução da matemática como um todo, em particular da geometria. A geometria diferencial teve início no século XVIII, com Gauss definindo a curvatura gaussiana de uma superfície, definição que permitiu demonstrar a impossibilidade de construirmos mapas planos da Terra sem distorção das distâncias. Como a questão de representar a Terra era muito importante na época, a curvatura gaussiana ganhou grande relevância.

4. É possível abordar temas complexos da geometria diferencial, como as aplicações do toro à Física, junto a alunos de graduação, com o objetivo de despertar interesse pela área?

MC: Sim, é possível. Um exemplo são as séries de Fourier no toro, associadas a funções duplamente periódicas. Essas séries de Fourier, tanto contínuas quanto discretas, têm muitas aplicações práticas em processamento de imagens.

TERMOS-CHAVES:

(1) Geometria diferencial:

Ramo da matemática que estuda curvas e superfícies usando ferramentas do cálculo, como derivadas, curvaturas e equações diferenciais.

(2) Curvatura gaussiana:

Quantidade intrínseca que descreve como uma superfície se curva em cada ponto. É obtida pela segunda forma fundamental e central no Teorema Egregium de Gauss.

(3) Geodésicas:

Curvas de menor comprimento local sobre superfícies, generalizando linhas retas. Marcos as menciona como eixo formativo e de pesquisa.

(4) Superfícies de Riemann:

Superfícies dotadas de estrutura complexa, fundamentais na análise complexa, na geometria conforme e em fenômenos geométricos modernos.

(5) Grupos de Lie:

Estruturas que modelam simetrias contínuas. Aparecem na fala do Marcos ao relacionar geometria diferencial, simetria e análise.

(6) Sistemas dinâmicos:

Estudo da evolução temporal de estados. Surge como ponte entre geometria, física e modelagem, parte importante das respostas dele.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM ALEJANDRO CABRERA

Alejandro Cabrera apresenta uma visão ampla e precisa sobre o toro e suas múltiplas aparições na matemática e na física. Ao discutir movimentos quase periódicos, sistemas integráveis e estruturas modulares, suas respostas mostram como a geometria diferencial dialoga naturalmente com ideias fundamentais da física contemporânea.



Alejandro Cabrera

Doutor pela **Universidad Nacional de La Plata** (Argentina), onde também se formou em **Física** e **professor titular** do Departamento de Matemática da **UFRJ**. Atua em **geometria diferencial**, com foco em **estruturas de Poisson**, **geometria simplética**, **algebroides de Lie** e aplicações à mecânica geométrica e à física matemática.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/3572545055404883>

1. O toro ainda é um objeto de estudo relevante na geometria contemporânea?

2. Quais são os principais resultados em Física que envolvem a geometria do toro?

AC: O toro pode ser pensado como um objeto matemático de grande relevância tanto na geometria contemporânea quanto nas suas aplicações em Física. Suas aparições em diversas teorias são várias, indo da descrição de movimentos periódicos e quase periódicos no contexto da mecânica até o estudo de formas modulares e teorias de cordas. A seguir, descrevo brevemente algumas destas questões.

O toro pode ser pensado como parte de uma família de toros n -dimensionais, começando pelo 1-dimensional, que é um círculo. O círculo, em si, já entra em jogo modelando variáveis angulares, movimentos periódicos (como aquele de um pêndulo), modelando condições de contorno periódicas e através da teoria de séries de Fourier, na qual se pode decompor sinais (por exemplo, de som ou de circuitos) em harmônicos. Ainda, o círculo tem aplicações mais sofisticadas, como aquela na qual representa “graus de liberdade internos” na teoria do eletromagnetismo quântico.

O “toro” mais famoso corresponde ao caso 2-dimensional e pode ser pensado como modelando duas variáveis periódicas. Por outro lado, ele já apresenta características mais ricas do que no caso de 1-dimensão, pois essas duas variáveis podem ser combinadas, dando lugar a movimentos mais complexos chamados de quase periódicos. Em casos extremos, nos quais essa combinação é “irracional”, as

trajetórias subjacentes são densas, no sentido de que, sem importar onde começam, elas passam arbitrariamente perto de qualquer outro ponto.

Um lugar onde estes aspectos do toro se realizam, que é um dos meus favoritos, é na teoria dos chamados sistemas completamente integráveis, no contexto amplo da geometria simplética e da física-matemática. Aqui, desenvolvem-se teorias matemáticas nas quais critérios geométrico-diferenciais relativos ao espaço de estados de um sistema mecânico garantem a existência de coordenadas especiais, chamadas de ação-ângulo, nas quais o sistema admite uma descrição explícita. É interessante notar que, nesta teoria, as coordenadas “ângulo” subjacentes de fato correspondem a um toro! As trajetórias correspondentes são movimentos quase periódicos.

Tem muitas outras aplicações dos toros: análogos n -dimensionais da teoria de Fourier; no caso 2-dimensional, o toro pode ser munido de diferentes estruturas de superfície de Riemann, parametrizadas por um “parâmetro modular” que desempenham um papel central na teoria de certas funções especiais; ainda, em um contexto mais sofisticado, o toro entra na famosa teoria de cordas modelando a trajetória periódica de uma corda também periódica, dentre outras.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM ALEJANDRO CABRERA

3. Como a História da Matemática pode contribuir para a popularização desses conhecimentos?

AC: Penso que uma das formas em que a História da Matemática pode contribuir é descrevendo os processos e os contextos nos quais os conhecimentos foram desenvolvidos pela primeira vez, já que essa perspectiva implica percorrer o caminho natural que os pesquisadores tomaram para chegar a essas teorias, antes de serem sofisticadas e tecnicadas, tornando-as mais acessíveis. Ainda, conhecer o percurso que os conceitos tiveram desde seu nascimento até a atualidade também ajudaria na sua compreensão por parte do público não especializado.

4. Esses resultados são de compreensão exclusiva de matemáticos de carreira ou podem ser apresentados, de forma acessível, a estudantes de graduação em Matemática ou Física?

AC: Sim, esses resultados, em sua grande maioria, podem ser apresentados e entendidos por estudantes de graduação em matemática e física. Além disso, isso de fato acontece, embora às vezes de maneira “implícita”, no momento de aprender outras teorias mais gerais (como na teoria de Fourier ou na mecânica clássica, já mencionadas). Uma vez apresentados os elementos mais fundamentais, os estudantes podem ter uma noção de teorias mais avançadas por analogia e extrapolação do que já foi aprendido. Um exemplo disso ocorre quando se explicam fenômenos muito complexos de mecânica quântica ou, ainda, de teoria de campos quântica, por analogia com movimentos harmônicos de um pêndulo. O mesmo também se aplica em contextos de matemática pura.

TERMOS-CHAVES:

(1) Toro n -dimensional:

Produto de n círculos (\mathbb{T}^n). Surge como espaço de fases angulares em sistemas integráveis e em generalizações multidimensionais da teoria de Fourier.

(2) Movimentos quase periódicos:

Dinâmicas com várias frequências independentes. Não são periódicas, mas permanecem em toros invariantes e podem preenchê-los densamente quando há razões irracionais entre as frequências

(3) Trajetória densa:

Órbita que passa arbitrariamente perto de qualquer ponto do toro. Em sistemas integráveis, aparece quando a dinâmica linear nos ângulos tem frequências irracionais.

(4) Sistemas completamente integráveis:

Sistemas hamiltonianos com integrais em involução; pelo teorema de Arnold–Liouville, suas órbitas confinadas vivem em toros invariantes com dinâmica quase periódica.

(5) Coordenadas ação-ângulo:

Coordenadas canônicas nas quais as ações permanecem constantes e os ângulos evoluem linearmente sobre um toro invariante.

(6) Parâmetro modular:

Número complexo τ no semiplano superior que classifica as estruturas complexas do toro 2D, até equivalência por transformações modulares.

(7) Teoria das cordas:

Modelo em que cordas 1D substituem partículas. Toros aparecem como superfícies de mundo periódicas de cordas fechadas ou como espaços de compactificação.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM ANDERSON REIS DE VARGAS

O diálogo com Vargas mostra como a História da Matemática pode tornar a Geometria Diferencial acessível e inspiradora. Ao conectar formação docente, modelos geométricos e propostas de sala de aula, a entrevista aproxima ideias como curvatura e geodésicas de um público amplo, destacando o potencial do toro e de outras superfícies como ferramentas de imaginação científica.



Anderson Reis de Vargas

Doutor em Matemática pela **PUC-Rio**, com Licenciatura em Matemática pela UFSC e **Mestrado Profissional em Matemática** pela SBM/PUC-Rio. Bacharel em **Letras – Português/Latim** pela **UERJ**, é **professor** do **Colégio Pedro II**, onde atua no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Especialização em Educação Matemática.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/6047836539674695>

1. Nas grades curriculares da Licenciatura em Matemática no Brasil, a disciplina de Geometria Diferencial está ausente. Como você chegou ao doutoramento em Geometria Diferencial vindo da licenciatura? Quais cursos facilitaram o seu entendimento mais global da disciplina?

AV: Fiz Licenciatura na Universidade Federal de Santa Catarina no início da década de 2000, ano em que começou uma reformulação curricular na qual não havia o curso de Geometria Diferencial, assim como outras disciplinas que constavam apenas da grade do Bacharelado em Matemática.

Com intuito de seguir a carreira acadêmica, fui orientado a fazer eletivas do Bacharelado, o que incluiu quatro disciplinas de Cálculo e duas de Álgebra Linear, que tinham carga horária maior do que as da Licenciatura e apresentavam alguns objetivos diferentes. Além destas, cursei Análise e Equações Diferenciais Ordinárias. Já no IMPA tive a oportunidade de aprofundar os conhecimentos em Análise, Medida, Álgebra e, por fim, Geometria Diferencial.

Acredito que este percurso com bons cursos de Cálculo, Álgebra Linear e, sobretudo, os cursos de Análise, foram fundamentais para a continuidade na área de Geometria Diferencial.

No doutorado, completei esta formação com Geometrias não Euclidianas, Geometria Algébrica e Geometria Riemanniana, e em minha tese trabalhei com Geometria Diferencial Discreta. De modo geral, não acredito que as disciplinas exclusivas da Licenciatura teriam dado a bagagem necessária para encarar a pesquisa em Geometria Diferencial. Entretanto, acredito que o curso de licenciatura provê o professor das ferramentas necessárias para que ele possa ser autodidata em Geometria Diferencial a partir de livros-textos tradicionais da área, pelo menos para entender alguns conceitos importantes, como curvatura e geodésica.

2. Sendo professor da educação básica e da pós-graduação, você acredita que a História da Matemática como metodologia pode despertar no jovem aluno, no futuro professor em formação e no pós-graduando as belezas da Geometria Diferencial, mesmo sem conhecê-la formalmente? Você pode contribuir com alguns exemplos?

AV: Acredito e defendo o uso da História da Matemática (HM) como metodologia no ensino de Matemática, e acho possível utilizá-la em qualquer conteúdo de Matemática do Ensino Básico.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM ANDERSON REIS DE VARGAS

A maior dificuldade se encontra no fato de que, em geral, o professor de Matemática não está habituado com o trabalho de pesquisa necessário para a criação de atividades baseadas em HM, seja por desconhecimento matemático, seja por falta de noções metodológicas, assim como se vê tolhido pelas pressões existentes no cotidiano escolar.

A geometria diferencial é muito rica em exemplos que permitem discussões sobre temas importantes com resultados aparentemente simples, mesmo que a matemática computacional envolvida seja complexa e esteja além da formação inicial do professor. Por exemplo, é possível trabalhar com modelos de Geometria Hiperbólica para a discussão do problema das paralelas, com ou sem uso dos números complexos, com abordagens mais conceituais e com uso de softwares de geometria dinâmica.

A geometria escolar, exclusivamente euclidiana, aponta para resultados que fazem a Matemática parecer acabada. O conceito de geodésica, por exemplo, naturalizado na forma da reta em espaços euclidianos, pode ser facilmente subvertido mudando o espaço, e o conhecimento do professor sobre isso é imprescindível para que atividades sobre o tema sejam construídas e bem executadas.

3. Você pensa ser possível criar alguma atividade envolvendo o toro tradicional canônico no Ensino Fundamental II?

AV: Acredito que um trabalho sobre mapas seria muito interessante com os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental, visto que este é um tema trabalhado em Geografia. Entretanto, é muito comum a discussão em torno de mapas a partir da superfície esférica, visto que este é o formato do nosso planeta. E se nosso planeta tivesse a forma de uma rosquinha de polvilho? Este seria um bom título para um trabalho envolvendo o toro no Ensino Fundamental.

A geometria se preocupa em grande parte do conceito de medida e isto se aplica diretamente a mapas. A partir de objetos do cotidiano, como uma boia infantil ou um pneu, podem ser levantadas algumas perguntas: como poderíamos pensar em distâncias nesse universo? o que seriam as "retas"? como a forma do planeta afetaria a realidade de seus moradores? como esta forma afetaria os resultados geométricos aos quais estamos habituados?

Para tratar o tema da distância, os estudantes poderiam riscar os caminhos no toro e medir o comprimento com o uso de um barbante, por exemplo. Isso permitira a exploração de conjecturas essenciais para a construção do conhecimento a ser formalizado pelo professor.

Este tema já foi explorado na ficção científica, em livros e séries, que podem agregar valor à discussão do professor e potencializar o interesse dos estudantes. A série televisiva *The Magicians* apresenta um planeta toroidal, por exemplo. A série *Halo* possui vários planetas construídos em formato de anel. Embora não sejam toroidais, mas cilíndricos, podem enriquecer as discussões com os estudantes. Há um vídeo bastante curioso no YouTube que explora questões físicas no caso de uma Terra toroidal. Estes são apenas alguns exemplos que me vem a memória, mas tenho certeza que muito pode ser encontrado e usado para enriquecer o repertório do professor nesse tema.

BOX: Ficção científica e o toro

- *The Magicians* (trilogia de Lev Grossman e adaptação para TV)
- Halo (franquia de jogos e série)
- Vídeo: "E se a Terra tivesse a forma de um donut?" ([YouTube](#))

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

No diálogo com Ferreira, a História da Matemática surge como chave para compreender as transformações do século XIX. Suas reflexões sobre práticas matemáticas, circulação de ideias, mudanças de rigor e atuação de figuras centrais revelam o movimento intelectual que sustentou a formação da matemática moderna.



Magno Luiz Ferreira

Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física pela **UFRJ**, com Mestrado em Ensino de Matemática pela **UFRJ** e Licenciatura em Matemática pela **UFRRJ**. **Professor do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)**, atua principalmente em **História da Matemática, teoria dos invariantes, comunidades de práticas e polinômios homogêneos**.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/6047836539674695>

1. Como se dá a formação de um historiador da matemática?

MF: A formação do historiador da matemática *no Brasil* ocorre de modo difuso. Não há um percurso único ou institucionalizado; o que existe são trajetórias que convergem, por diferentes caminhos, para esse campo de pesquisa.

Geralmente, tudo começa com um interesse inicial pela história, muitas vezes um interesse quase romântico, alimentado por biografias de matemáticos, narrativas históricas e curiosidades sobre descobertas. Esse impulso primeiro conduz o futuro historiador a determinados grupos acadêmicos, e é essa aproximação inicial que molda as direções da formação.

Dependendo do grupo ao qual o estudante se vincula, caminhos distintos se abrem. Em espaços dedicados à **história dos conceitos matemáticos**, o foco recai sobre as **práticas matemáticas**, expressão que utilizo para designar as ações, técnicas e modos de argumentar característicos de cada período histórico. Já em grupos voltados à história da educação matemática, as preocupações se deslocam para fontes institucionais, trajetórias biográficas e processos de circulação do conhecimento. Trata-se igualmente de história da matemática, mas com ênfases diferentes.

Por isso digo que **a formação é difusa: ela depende de onde esse interesse inicial conduz o pesquisador**. No meu caso, essa aproximação ocorreu pela via da história dos conceitos; em outras trajetórias, o ponto de partida é a história institucional ou educacional.

Após essa primeira etapa, surge um momento decisivo: o contato com as **técnicas historiográficas**. Para quem vem de outras áreas, como eu, que vim da educação, essa descoberta é transformadora. **O trabalho histórico exige aprender a olhar o passado com os olhos do passado**, evitando anacronismos e reconhecendo que **práticas matemáticas e instituições são inseparáveis** dos contextos sociais em que se inserem.

Por fim, há a etapa em que o historiador encontra suas **ferramentas metodológicas**: análise de redes de textos, hermenêutica, estudo de obras completas, investigação de materiais didáticos, entre outras. A escolha dessas ferramentas define, em grande medida, o tipo de historiador que cada um se tornará.

Assim, Magno pensa a formação do historiador da matemática em três grandes etapas:

- O despertar do interesse pela história;
- A descoberta de diferentes modos de fazer história da matemática;
- A aprendizagem das técnicas de investigação, que configuram a identidade do pesquisador.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

2. O que há de curioso ou importante na geometria do século XIX sob o olhar da história da matemática?

MF: Ao olhar para a geometria do século XIX, destaco especialmente o cenário do Reino Unido, que apresenta um desenvolvimento marcado por tensões entre uma **tradição sintética** e a chegada de **métodos analíticos** provenientes do continente europeu. Durante muito tempo, o prestígio de Newton influenciou fortemente o ensino e a produção científica britânica, sustentando uma percepção geométrica fortemente ligada às abordagens sintéticas.

Enquanto isso, na Alemanha e em outros centros europeus, a geometria avançava rapidamente com o uso de métodos analíticos, **coordenadas homogêneas** e o estudo das **curvas algébricas**. Os trabalhos de Plücker, publicados entre 1828 e 1829, são fundamentais nesse processo ao introduzir novas formas de representação geométrica e abrir caminho para uma geometria projetiva analítica.

Essas ideias chegam gradualmente ao **Reino Unido** ao longo das décadas de 1810, 1820 e 1830. Em determinado momento, matemáticos britânicos reconhecem que as abordagens analíticas eram essenciais para investigar problemas geométricos mais amplos. A partir da década de 1850, observa-se uma produção intensa envolvendo geometrias em duas, três e mais dimensões, em conjunto com o desenvolvimento da **teoria dos invariantes**, impulsionada pelos trabalhos de Sylvester e Cayley.

Destaque histórico:

No século XIX, a geometria passa por três viradas fundamentais:

- a descoberta e classificação das geometrias não euclidianas;
- a reformulação do rigor matemático;
- o surgimento das bases da álgebra linear.

Essas transformações redefinem o que se entende por “fazer matemática” e moldam profundamente o século XX.

De modo geral, Magno destaca três contribuições centrais do século XIX:

- as geometrias não euclidianas e sua classificação no Programa de Erlangen;
- a nova noção de rigor introduzida por Cauchy;
- as práticas que constituem os pilares da álgebra linear moderna.

Essa base prepara o terreno para uma das contribuições mais emblemáticas do século: o **Programa de Erlangen**, de Felix Klein, que propõe uma classificação das geometrias a partir de grupos de transformações. Nesse enquadramento, a **geometria projetiva** aparece como a geometria mais geral, da qual a euclidiana é um caso particular.

Fora do contexto britânico, outras contribuições também merecem destaque. Os trabalhos de Cauchy inauguram uma nova noção de rigor matemático, redefinindo limites, derivadas e integrais e lançando bases que seriam consolidadas no início do século XX. A álgebra dos polinômios ganha novos rumos com as contribuições de Abel e Galois, fundamentais para a teoria das extensões de corpos.

Finalmente, no final do século XIX, surgem práticas que se tornarão os alicerces da álgebra linear moderna: determinantes, sistemas lineares, eliminação e vetores, presentes nos trabalhos de Hamilton, Sylvester, Cayley, Grassmann e outros.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

3. Quais figuras e resultados mais importantes do século XIX merecem ser levados para o ensino básico e para a formação universitária?

MF: Ao pensar nas figuras mais importantes do século XIX, costumo organizá-las de forma cronológica, pois **as contribuições desse período se encadeiam e ajudam a compreender a estruturação da matemática moderna.**

No início do século, destacam-se personagens como Olry **Terquem** (1782–1862) e Joseph **Liouville** (1809–1882), muito influentes na França. No Reino Unido, figuras como Duncan **Gregory** (1813–1844) e Archibald **Smith** (1813–1872), embora menos conhecidas, desempenharam papel essencial ao fundar e manter periódicos especializados que impulsionaram a circulação de ideias matemáticas e fortaleceram o ambiente científico britânico.

Também merecem atenção os compiladores, responsáveis por organizar e apresentar o que estava sendo produzido. Na França, Michel **Chasles** (1793–1880) reuniu contribuições fundamentais sobre geometria. No Reino Unido, George **Salmon** (1819–1904) sistematizou a teoria dos invariantes e as formas algébricas; e, na Alemanha, Wilhelm **Meyer** (1856–1934) elaborou um levantamento abrangente sobre a relação entre invariantes e geometria projetiva no final do século.

Entre os grandes nomes amplamente reconhecidos, Augustin-Louis **Cauchy** (1789–1857) é incontornável. Suas contribuições reformularam noções básicas de limite, derivada e integral, instaurando um novo rigor matemático que marcaria profundamente o século XX. Na álgebra, Niels Henrik **Abel** (1802–1829) e Évariste **Galois** (1811–1832) transformaram a teoria dos polinômios e inauguraram novos caminhos conceituais.

No contexto britânico, o trio Arthur **Cayley** (1821–1895), James Joseph Sylvester (1814–1897) e o já mencionado George Salmon exerceu papel central no desenvolvimento da teoria dos invariantes e na inserção da matemática britânica no cenário internacional. Na França, Jean-Victor **Poncelet** (1788–1867) contribuiu decisivamente para a geometria projetiva, ainda antes de sua consolidação analítica. Charles **Hermite** (1822–1901) também se destaca por seus trabalhos sobre polinômios homogêneos e curvas algébricas.

Destaco ainda Jean-Gaston **Darboux** (1842–1917), cuja obra extensa atravessa o final do século XIX e reúne estudos de geometria, análise e teoria das superfícies. Seu conjunto de cursos e pesquisas permanece como referência importante.

No Reino Unido, Augustus De **Morgan** (1806–1871) simboliza a figura do professor de matemática do período: matemático influente, primeiro presidente da London Mathematical Society e responsável por consolidar uma rede institucional duradoura.

No final do século, Felix **Klein** (1849–1925) desempenha papel decisivo. Seu *Programa de Erlangen* redefine a classificação das geometrias e estabelece a geometria projetiva como a mais geral, propondo uma reorganização profunda do campo e influenciando reformas educacionais que alcançaram o ensino secundário europeu.

Outras figuras relevantes incluem Paul **Gordan** (1837–1912), com resultados sobre a finitude da teoria dos invariantes; Alfred **Clebsch** (1833–1872), que articulou invariantes e geometria; e Edwin **Elliot** (1851–1935), autor de um importante tratado de 1895 sobre a teoria dos invariantes.

Esses personagens, cada um à sua maneira, compõem o panorama vibrante da matemática do século XIX e ajudam a compreender por que esse período permanece tão influente para o ensino e para a pesquisa contemporânea.

Figuras-chave do século XIX:

- Cauchy (rigor analítico)
- Plücker (geometria projetiva)
- Abel e Galois (estruturas algébricas)
- Cayley e Sylvester (teoria dos invariantes)
- Hermite (formas algébricas)
- Klein (classificação das geometrias)

SEÇÃO DIDÁTICA

SEÇÕES TÓRICAS NO GEOGEBRA

As seções do toro estudadas por Jean-Gaston Darboux em 1864 podem ser visualizadas com precisão no ambiente tridimensional do GeoGebra. Esta primeira parte apresenta uma exploração direta: um modelo pronto, acessível por link ou QR Code, que permite observar como a inclinação de um plano transforma a curva de interseção com o toro.

A proposta é simples, mas revela de forma imediata a riqueza geométrica do toro como laboratório natural de curvas clássicas.

1. Acesse a construção

Escaneie o QR Code ou utilize o link abaixo para abrir o modelo:

- toro já construído,
- plano secante controlado por um deslizante,
- curva de interseção atualizada em tempo real.

2. O que observar na exploração

A variação contínua do ângulo φ gera diferentes morfologias de curvas. O modelo permite visualizar três fenômenos centrais descritos por Darboux:

A. Seções verticais – Ovais de Cassini

O plano vertical produz:

- duas componentes desconexas,
- lemniscata crítica,
- oval convexa simples.

B. Ponto crítico – Lemniscata de Bernoulli

As duas componentes se unem por simetria, formando o laço característico.

C. Seção especial – Círculos de Villarceau

Apenas um ângulo produz duas circunferências perfeitas na superfície. É o caso em que a quártica se degenera em duas cônicas, um dos resultados mais elegantes do artigo de Darboux.

3. Tarefas sugeridas

- Mover o controle deslizante e registrar as mudanças na curva.
- Identificar quando surgem duas componentes desconexas.
- Observar o instante em que aparece a lemniscata.
- Localizar o ângulo correspondente aos círculos de Villarceau.
- Comparar cada transição com as figuras e explicações das páginas matemáticas da revista.

Explore no
GeoGebra:



[Click aqui](#)

BNCC: Competências

EF06MA16

Padrões geométricos com tecnologia.

EF07MA12

Geometria dinâmica no digital.

EM13MAT303

Exploração tecnológica de figuras e superfícies.

CG5 – Cultura Digital

Uso crítico e criativo de tecnologias.

SEÇÃO DIDÁTICA

CONSTRUINDO O TORO NO GEOGEBRA 3D

Construção dinâmica das seções tóricas: o surgimento das Ovais de Cassini e da Lemniscata de Bernoulli

Nesta atividade, o leitor constrói um **toro de revolução** e um **plano secante móvel** que percorre sua superfície, revelando uma família de curvas conhecidas desde o século XVII e analisadas em profundidade por Jean-Gaston Darboux em 1864.

O objetivo é oferecer aos professores e estudantes uma visualização acessível, dinâmica e rigorosa das **seções tóricas**, destacando fenômenos geométricos que não emergem facilmente em abordagens exclusivamente algébricas.

1. Circunferência geratriz

Para que o toro seja produzido corretamente por rotação, a circunferência menor precisa estar em um plano perpendicular ao eixo de rotação. Como queremos rotacionar em torno do eixo z, utilizamos como direção o **EixoY**, que determina um plano perpendicular ao eixo z.

Na barra de entrada:

$$c = \text{Círculo}[(R, 0, 0), r, \text{EixoY}]$$

O GeoGebra criará automaticamente os controles **R** e **r**. Escolha valores com $R > r$ para evitar autointerseções e garantir a forma clássica do toro.

2. Gerando o toro por rotação

Com a circunferência **c** definida, construímos o toro usando a superfície de revolução.

Digite:

$$\text{Toro} = \text{Superfície}(c, 360^\circ, \text{EixoZ})$$

Agora temos o toro com raio maior **R** e raio menor **r**, fiel à construção clássica e compatível com a apresentação feita por Darboux em *Sur les sections du tore*.

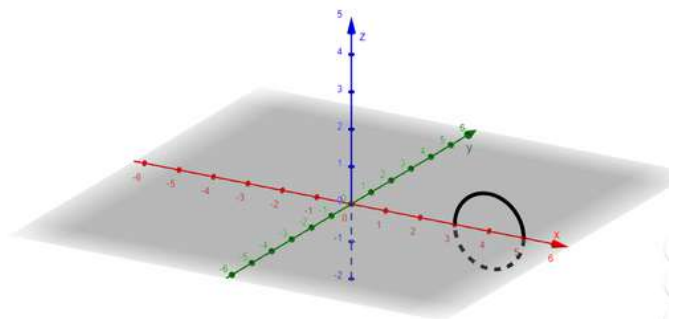


Figura 4.1 - Circunferência c no plano YZ vista em perspectiva

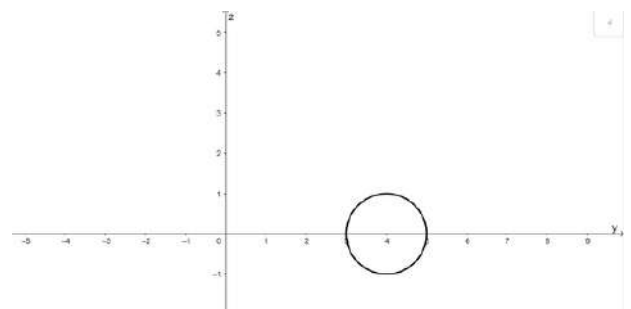


Figura 4.2 - Circunferência c no plano YZ vista em perspectiva

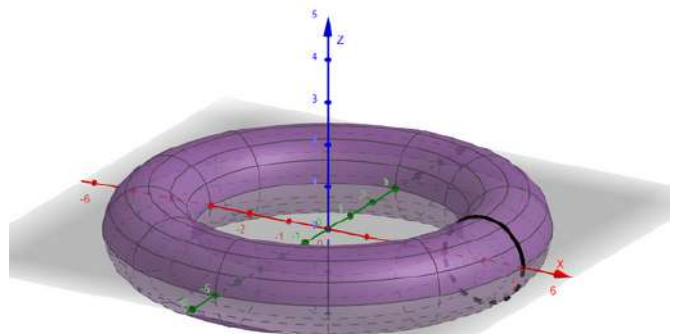


Figura 4.3 - toro final em vista isométrica

SEÇÃO DIDÁTICA

CONSTRUINDO O TORO NO GEOGEBRA 3D

3. Construindo o plano secante móvel

Criamos agora um plano vertical, paralelo ao plano YZ, que se desloca ao longo do eixo x.

3.1. Controle deslizante a :

a de $-(R + r)$ a $(R + r)$, passo 0.1

3.2. Ponto móvel Q :

$Q = (a, 0, 0)$

3.3. Plano perpendicular ao eixo x que passa por Q :

$p = \text{PlanoPerpendicular}(Q, \text{EixoX})$

Esse plano atravessa o toro continuamente conforme a varia.

4. Definindo as curvas de interseção

As seções tóricas possuem dois ramos simétricos. Definimos cada ramo como uma curva paramétrica em t .

4.1. Primeiro ramo:

```
c1 = Curva[
  a,
  (R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sin(t),
  t, 0, 2π
]
```

4.1. Segundo ramo:

```
c1 = Curva[
  a,
  (R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sin(t),
  t, 0, 2π
]
```

Quando o plano atravessa o toro:

- valores pequenos de $|a|$ produzem **ovais de Cassini**;
- o valor crítico de a gera a **lemniscata de Bernoulli**;
- valores maiores produzem **dois laços desconectados**, cada um situado em uma região distinta do toro

O caso crítico ocorre quando o plano tangencia o furo interno da superfície.

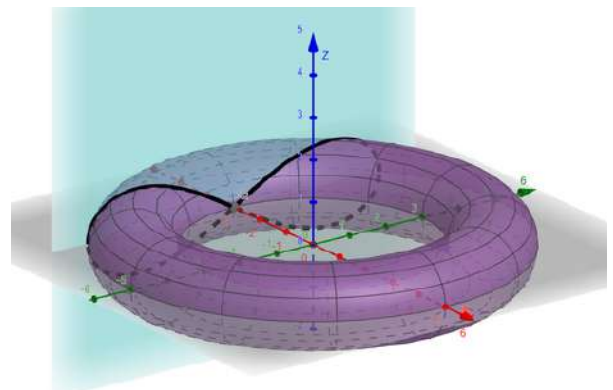


Figura 4.4 - toro final em vista isométrica

5. Perguntas investigativas

- 5.1. O que acontece com a curva quando o plano está próximo do centro do toro?
- 5.2 Em que valor de a a curva atinge seu estreitamento máximo?
- 5.3. Por que esse valor crítico produz uma lemniscata?
- 5.4. O que muda quando o plano atravessa o furo e se desloca para a parte externa do toro?
- 5.5 Como a variação de R e r altera o formato das seções?

CONCLUSÃO

Encerramos esta edição de *Trajelórias* retomando o propósito apresentado no editorial: aproximar a matemática do professor e da sala de aula por meio de um diálogo equilibrado entre história, rigor conceitual e exploração geométrica. Ao revisitar o *toro de revolução* e suas *seções tóricas*, buscamos mostrar como temas clássicos podem sustentar práticas formativas profundas e acessíveis, capazes de inspirar novas leituras e experiências de ensino.

As três seções centrais da revista, histórica, matemática e didática, foram concebidas de forma integrada. A contextualização do trabalho de Jean-Gaston Darboux apresenta o nascimento das ideias; o tratamento matemático organiza o toro como superfície, lugar geométrico e quártica; e a abordagem com GeoGebra oferece caminhos diretos para que o professor transforme esse conteúdo em investigação, visualização e descoberta em sala de aula.

As entrevistas que integram *Trajelórias em Diálogo* ampliam esse percurso. Suas vozes mostram que o toro permanece presente tanto na pesquisa contemporânea quanto nas aplicações em física matemática, revelando a vitalidade de temas que atravessam séculos sem perder relevância. Essa interlocução reforça uma dimensão essencial deste produto educacional: aproximar a formação docente de reflexões acadêmicas atuais, sem abrir mão da clareza necessária ao ensino básico.

Como produto do PROFMAT, esta revista busca contribuir para uma prática docente mais informada, criativa e historicamente situada. Que este material sirva de referência e convite à experimentação, ao uso de tecnologias e ao diálogo com a *História da Matemática*. Se a geometria nasce de boas perguntas, esperamos que estas páginas ajudem a formulá-las e a encontrar, nelas, caminhos férteis para compreender e ensinar com mais profundidade.

REFERÊNCIAS

- AMBROZIO, Lucas.** Materiais de geometria diferencial para superfícies. IMPA, 2018.
- APPELL, Paul.** Obituary of Gaston Darboux. Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris, 1918. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Darboux_Appell>. Acesso em: 8 jul. 2025.
- BERNOULLI, Jakob.** Curva lemniscata e estudos de quadratura. Basileia, 1694.
- CASSINI, Giovanni Domenico.** De visu planetarum e trabalhos sobre curvas focais. Paris, 1680.
- CABRERA, Alejandro.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, nov. 2025.
- CRAIZER, Marcos.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, nov. 2025.
- DARBOUX, Jean-Gaston.** Sur les sections du tore. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, v. 58, p. 104–110, 1864.
- FERREIRA, Magno Luiz.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, dez. 2025.
- FRIEZE, Kátia; LIMA, Ronald F.** Notas de aula sobre superfícies de revolução. UFF/UFBA, anos diversos.
- MONERA, Luis; MONTERDE, Joaquín.** *Surfaces with Villarceau Circles*. *Journal for Geometry and Graphics*, v. 15, n. 1, p. 63–75, 2011. Disponível em: <<https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg15/j15h1mone.pdf>>. Acesso em: 9 set. 2025.
- MORONI, Luca.** The toric sections: a simple introduction. arXiv:1901.10368, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org>. Acesso em: 18 nov. 2025.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F.** *Gaston Darboux*. MacTutor History of Mathematics Archive. Disponível em: <<https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Darboux>>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- O'NEILL, Barrett.** *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, 1966.
- PRESSLEY, Andrew.** *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2010.
- STRUİK, Dirk J.** *Lectures on Classical Differential Geometry*. 2. ed. New York: Dover, 1988.
- SYM, Antoni.** *Darboux's Greatest Love*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, p. 404001, 2009. DOI: 10.1088/1751-8113/42/40/404001.
- TATON, René.** *Gaston Darboux (1842–1917)*. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, Paris, t. 7, n. 3, p. 197–214, 1954.
- VILLARCEAU, Jean-Baptiste.** *Note sur une propriété du tore*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, v. 27, p. 207–209, 1848.
- VARGAS, Anderson Reis de.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, dez. 2025.

FICHA TÉCNICA

Título da revista:

Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica

Título da edição:

As Seções do Toro: Jean-Gaston Darboux e a Geometria no Século XIX

Edição:

1ª edição – 2025

Produção, texto, pesquisa e diagramação:

Wallace da Silva

Orientação acadêmica:

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Entrevistas:

Prof. Dr. Alejandro Cabrera
Prof. Dr. Anderson Reis de Vargas
Prof. Dr. Magno Luiz Ferreira
Prof. Dr. Marcos Craizer

Imagens, diagramas e GeoGebra:

Wallace da Silva

Apoio:

PROFMAT – Colégio Pedro II

© 2025 Wallace da Silva. Uso educacional permitido com citação da fonte.

endapendicesenv