



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL



O Ensino de Geometria na Educação Básica: Abordagens Históricas, Conceituais e Tecnológicas

Outubro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Ensino de Geometria na Educação Básica: Abordagens Históricas, Conceituais e Tecnológicas

Luana Bontempo

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Amarildo de Vicente - Unioeste (Orientador)

Profa. Dra. Vanessa Largo Andrade (UTFPR - Toledo)

Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga - Unioeste

Cascavel, Outubro de 2025.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Bontempo, Luana

O ensino de geometria na educação básica: abordagens históricas, conceituais e tecnológicas / Luana Bontempo; orientador Amarildo de Vicente. -- Cascavel, 2025.
91 p.

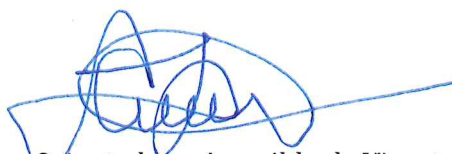
Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2025.

1. Geometria. 2. Estratégias Didáticas. 3. Metodologias Ativas. 4. GeoGebra. I. Vicente, Amarildo de, orient. II. Título.

LUANA BONTEMPO

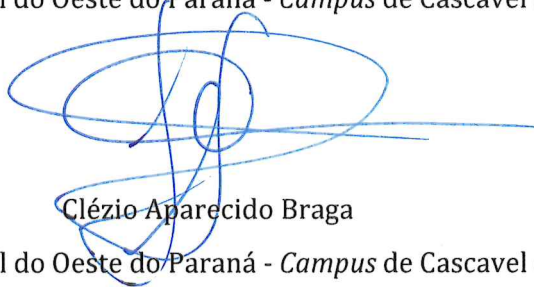
O Ensino de Geometria na Educação Básica:
Abordagens históricas, conceituais e tecnológicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Ensino de Matemática, linha de pesquisa Ensino básico de Matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:



Orientador – Amarildo de Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - *Campus* de Cascavel (UNIOESTE)



Clézio Aparecido Braga

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - *Campus* de Cascavel (UNIOESTE)



Vanessa Largo Andrade

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - *Campus* de Toledo (UTFPR)

Cascavel, 17 de novembro de 2025

Agradecimentos

A Deus, fonte de sabedoria e força, agradeço pela vida, pela saúde e pela oportunidade de trilhar este caminho, iluminando meus passos e sustentando minha caminhada em todos os momentos. Agradeço, à minha família, em especial à minha mãe, que esteve ao meu lado em todos os momentos, oferecendo apoio, força e incentivo incondicional. Ao meu companheiro Anderson, que compartilhou comigo cada etapa desta trajetória do mestrado, agradeço pela compreensão, pelo carinho e pela presença, sempre me motivando a seguir em frente.

Às minhas três Marias, cuja existência enche minha vida de amor e me impulsiona diariamente na busca pelos meus sonhos. Aos colegas de turma: Danielli, Marcos, Ricardo, José, Silvano, Willian, Daniel e Jardel, sou grata pela parceria, pelas trocas de conhecimento, pelos cafés fortalecedores e pelas incontáveis risadas. A presença de vocês tornou esse percurso muito mais leve e especial. Aos colegas de profissão da Escola Municipal Anita Garibaldi e do Colégio Estadual do Campo Olavo Bilac, agradeço pela compreensão e colaboração, sobretudo na organização de horários que me permitiram conciliar trabalho e estudos.

Estendo meu agradecimento a todos os professores que contribuíram com minha formação ao longo deste curso, cada um deixando sua marca por meio de ensinamentos e experiências compartilhadas. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Amarildo de Vicente, pela paciência, pela generosidade e pelo valioso auxílio que foram fundamentais para a concretização deste trabalho.

Resumo

A geometria ocupa papel central na história da matemática e na formação intelectual, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da abstração e da argumentação lógica. Entretanto, seu ensino no Brasil enfrenta desafios, especialmente pela predominância de metodologias tradicionais, que muitas vezes dificultam a compreensão e desmotivam os estudantes. Este trabalho tem como objetivo investigar e propor estratégias didáticas para o ensino da geometria na Educação Básica, articulando três dimensões complementares: histórica, conceitual e pedagógica. No primeiro momento, realiza-se um resgate histórico da evolução da geometria, desde as civilizações antigas até a sistematização grega e suas influências na ciência moderna. Em seguida, são discutidos conceitos fundamentais da geometria plana, como ponto, reta, ângulo, polígonos e triângulos, abordados sob uma perspectiva didática que valoriza a compreensão conceitual e a resolução de problemas. Por fim, apresentam-se metodologias ativas apoiadas em tecnologias digitais, com destaque para o Software GeoGebra, e sua interação a problemas elaborados por mim, que contribui para o ensino em sala de aula, como forma de tornar o aprendizado mais investigativo, interativo e significativo. Assim, a dissertação apresenta a combinação entre fundamentos históricos, conceituais e pedagógicos, mediada por recursos digitais, pode contribuir para superar dificuldades recorrentes no ensino de geometria, promovendo maior engajamento, autonomia e desenvolvimento do pensamento crítico nos estudantes.

Palavras-Chave: Geometria; Estratégias Didáticas; Metodologias Ativas; GeoGebra.

Abstract

Geometry plays a central role in the history of mathematics and in intellectual formation, contributing to the development of spatial reasoning, abstraction, and logical argumentation. However, its teaching in Brazil faces challenges, especially due to the predominance of traditional methodologies, which often hinder understanding and discourage students. This study aims to investigate and propose didactic strategies for the teaching of geometry in Basic Education, articulating three complementary dimensions: historical, conceptual, and pedagogical. Initially, a historical review of the evolution of geometry is carried out, from ancient civilizations to Greek systematization and its influences on modern science. Next, fundamental concepts of plane geometry are discussed, such as point, line, angle, polygons, and triangles, approached from a didactic perspective that values conceptual understanding and problem solving. Finally, active methodologies supported by digital technologies are presented, with emphasis on the GeoGebra software and its interaction with problems designed by the author, which contributes to classroom teaching as a way to make learning more investigative, interactive, and meaningful. Thus, the dissertation shows that the combination of historical, conceptual, and pedagogical foundations, mediated by digital resources, can help overcome recurring difficulties in the teaching of geometry, promoting greater engagement, autonomy, and the development of critical thinking among students.

Keywords: Geometry; Teaching Strategies; Active Methodologies; GeoGebra.

Sumário

Introdução	15
1 Desenvolvimento Histórico da Geometria	17
Egito e Babilônia	18
China e Índia	20
Grécia	22
Atualidade e Educação	24
2 Conceitos Geométricos Básicos	27
Ponto, reta e plano	28
Ângulos	32
Polígonos	38
Triângulos e Quadriláteros	42
Área e Perímetro	47
Circunferência	52
Teoremas Fundamentais: Tales e Pitágoras	56
3 Metodologias Ativas e Softwares Educativos	63
Resolução de Problemas	64
Apresentação do GeoGebra	65
Exemplos de atividades	71
Referências	89

Introdução

A geometria é um ramo fundamental da Matemática, ocupando lugar central na história do pensamento humano e na organização do conhecimento científico. A etimologia da palavra *geometria* é proveniente do grego e significa *medida da terra*, o que revela o vínculo inicial com necessidades práticas de mensuração e construção, demonstrando como o desenvolvimento matemático se deu em resposta às demandas das sociedades antigas (Boyer, 1996). A história da geometria mostra que desde os registros mais remotos, como os papiros egípcios e as tabuletas babilônicas, até a formalização dedutiva da Grécia Antiga, a disciplina constituiu-se como instrumento indispensável para compreender, organizar e transformar a realidade. Esse percurso histórico evidencia não apenas a dimensão utilitária da geometria, mas também sua importância cultural, filosófica e científica, tendo servido de base para avanços em áreas como astronomia, engenharia e arquitetura, além de ter sido fundamental para a consolidação do raciocínio lógico-dedutivo.

No campo educacional, a geometria possui papel decisivo na formação intelectual dos indivíduos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da capacidade de abstração e da argumentação lógica. Conforme salienta Silva (2021, p. 11), a geometria permite “desenvolver a compreensão do mundo em que se vive, aprendendo a descrevê-lo, representá-lo e a se localizar nele, também estimula a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades”. Portanto, podemos afirmar que aprender geometria vai além de cálculos e fórmulas, é compreender formas, espaços e suas relações, contribuindo para uma compreensão de mundo mais estruturada.

Entretanto, apesar de sua relevância, o ensino de geometria no Brasil enfrenta desafios significativos, muitos alunos apresentam dificuldades na compreensão de conceitos geométricos, seja pela natureza abstrata dos conteúdos, seja pela predominância de metodologias tradicionais que pouco dialogam com a realidade dos estudantes (Rogenski e Pedroso, 2019). Nesse contexto, a necessidade de estratégias pedagógicas mais ativas, contextualizadas e apoiadas em recursos tecnológicos torna-se cada vez mais evidente.

A aprendizagem de geometria, em muitos contextos escolares, apresenta-se como um desafio para os alunos, em grande parte devido à pouca exploração prática e à ênfase excessiva em métodos tradicionais de ensino. Frequentemente, os estudantes

demonstram dificuldades em visualizar e compreender conceitos geométricos, o que pode gerar desmotivação e limitar o desenvolvimento do raciocínio espacial. Essa lacuna é agravada pela escassez de experiências que integrem a teoria a situações concretas, explorando a geometria de forma dinâmica e investigativa (Lorenzato, 2006).

Diante desse cenário, o trabalho busca incentivar o estudo e aprendizagem da geometria, através da abordagem histórica, conceitual e pedagógica, elecando estratégias didáticas, por meio do uso de tecnologias digitais, em especial softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Tais ferramentas possibilitam a experimentação, a construção e a manipulação de objetos geométricos de maneira interativa, favorecendo a compreensão conceitual e o engajamento dos alunos.

O presente trabalho está estruturado em três capítulos centrais, que dialogam entre si e busca um panorama amplo acerca da geometria e de seu ensino.

O primeiro capítulo consiste no desenvolvimento histórico da geometria, resgatando a evolução do conhecimento desde as civilizações antigas até a formalização grega e sua influência na ciência moderna. Esse resgate histórico permite compreender como diferentes culturas contribuíram para a consolidação de conceitos que ainda hoje fundamentam o ensino, como o Teorema de Pitágoras e as aproximações da constante π .

O segundo capítulo aborda os conceitos geométricos básicos, indispensáveis para a construção do raciocínio matemático no ensino fundamental e médio. Noções como ponto, reta, plano, ângulo e polígono são apresentadas em perspectiva didática, evidenciando não apenas suas definições formais, mas também suas representações gráficas e aplicações. O estudo de áreas, perímetros, semelhança de figuras e propriedades métricas é fundamental para que os alunos desenvolvam competências cognitivas que vão além da memorização de fórmulas, alcançando a compreensão conceitual e a resolução de problemas.

Por fim, o terceiro capítulo discute o uso de metodologias ativas e de tecnologias digitais no ensino da geometria, com destaque para o software GeoGebra, ferramenta dinâmica que possibilita a visualização, a experimentação e a exploração de conceitos de forma interativa. Tais recursos se alinham às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza o ensino da matemática por meio da resolução de problemas, da modelagem e do uso de recursos digitais. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem um caminho promissor para superar as dificuldades históricas do ensino de geometria, permitindo que os estudantes sejam protagonistas de sua aprendizagem, desenvolvendo autonomia intelectual e capacidade investigativa.

Capítulo 1

Desenvolvimento Histórico da Geometria

A palavra “geometria” deriva do grego *geo* (terra) e *metria* (medida), o que salienta a sua origem prática e construção histórica ligada às necessidades e desenvolvimentos das grandes civilizações antigas. Boyer (1996, p. 1) destaca que:

Noções primitivas relacionadas com os conceitos de números, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade (Boyer, 1996, p. 1).

Notamos que a geometria esteve presente desde o berço da humanidade, inicialmente de forma primitiva, através da construção de ferramentas e a realização da arte rupestre na pré-história, evoluindo juntamente com a humanidade conforme a sua necessidade. Boyer (1996, p. 5) enfatiza que a geometria pode ter surgido como “uma protogeometria relacionada com ritos primitivos”, portanto, além do seu aspecto prático, a geometria possui uma relação mística na história da humanidade, sendo aplicada na construção de altares ritualísticos e símbolos religiosos.

Contudo, o grande desenvolvimento da geometria, conforme afirma Boyer (1996, p. 5), ocorreu “por necessidades práticas de construção e demarcação de terras ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem”. Isso permitiu que algumas civilizações antigas ganhassem grande notoriedade pelo seu alto desenvolvimento conquistado, influenciando a sociedade moderna.

Neste sentido, para analisar o desenvolvimento geométrico de algumas civilizações antigas, consideramos como aspectos para indicar o alto desenvolvimento geométrico dessas civilizações: o seu conhecimento do teorema de Pitágoras, visto que é um símbolo do desenvolvimento da matemática; o conhecimento prático e relevantes aproximações da constante π , pois indica precisas manipulações geométricas.

Egito e Babilônia

A geometria obteve uma das suas maiores aplicações práticas no Egito Antigo, quando surgiu a necessidade da medição de terras, construção de monumentos e organização dos espaços agrícolas.

O Egito é atravessado pelo rio Nilo, que sofria enchentes anuais e apagavam as divisões dos campos utilizados para a agricultura, exigindo um método eficaz e rápido para redefinir os limites das propriedades. Foi dessa necessidade que a geometria passou de princípios primitivos para uma ferramenta tecnológica antiga.

No Papiro de Rhind (1650 a.C.), um dos principais registros matemáticos do Egito, há apresentações de problemas geométricos resolvidos com métodos práticos, como o cálculo de áreas e volumes.



Figura 1.1: Parte do Papiro de Rhind

Fonte: <https://www.matematica.br/historia/prhind.html>

Os egípcios estimavam a área de um círculo através de polígonos, com um número crescente de lados, para obter melhores aproximações, o que resultou na notável aproximação do número π em 3,1605 (Barros e de Sá, 2022).

Outro registro da habilidade geométrica dos egípcios é a construção das pirâmides, especialmente a Quéops, em Gizé, onde o alinhamento da pirâmide com os pontos cardeais (norte, sul, leste, oeste) e a regularidade dos ângulos da base demonstram um conhecimento geométrico avançado para a época.

Os egípcios também desenvolveram a famosa “corda de 12 nós”, usada para medir terras rapidamente, que permitia a criação de triângulos retângulos com lados de 3, 4 e 5 unidades, é uma forma prática do teorema de Pitágoras. De fato, a geometria no

Egito Antigo demonstrava um grau de sofisticação notável e seus métodos influenciaram diretamente o desenvolvimento posterior da geometria grega (Eves, 2008).

A geometria na Babilônia também obteve um papel fundamental no desenvolvimento inicial da matemática, especialmente no que diz respeito à aritmética geométrica e à resolução de problemas práticos envolvendo figuras planas (Boyer, 1996). A civilização babilônica, situada na Mesopotâmia, desenvolveu uma rica tradição matemática registrada em tabuletas de argila escritas em cuneiforme.

A tabuleta Plimpton 322 (1800 a.C.), a mais famosa da geometria babilônica, contém uma lista de triplas pitagóricas, ou seja, conjuntos de números que satisfazem o teorema de Pitágoras. Isso sugere que os babilônios conheciam esse princípio mais de mil anos antes de Pitágoras. Kline (1994, p. 18) afirma que “a tabuleta Plimpton 322 é uma das evidências mais antigas da utilização sistemática de relações pitagóricas”.



Figura 1.2: Tabuleta Plimpton 332

Fonte: <https://rfcia.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322-um-tablete-de-argila-com-escrita-cuneiforme-babilonica-datado-em-3800-anos/>

Algumas outras tabuletas também mostram que os babilônios chegaram, por métodos similares dos egípcios, na ótima aproximação da constante π em 3,125 (Barros e de Sá, 2022). Uma característica marcante dos babilônios é que eles utilizavam técnicas geométricas que hoje seriam resolvidas com equações quadráticas, mas as tratavam de forma aritmética, sem representação simbólica formal (Boyer, 1996).

A matemática babilônica utilizava um sistema numérico de base 60, que permitia divisões exatas por muitos fatores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60). Esse sistema facilitava a elaboração de tabelas trigonométricas primitivas, úteis em cálculos astronômicos e geométricos. O uso desse sistema persiste até hoje em medidas de tempo e ângulos (em graus).

China e Índia

A geometria na China Antiga se desenvolveu independente das civilizações da antiguidade, com características próprias e fortemente ligadas às necessidades práticas do cotidiano, como agricultura e arquitetura. Apesar de não ter adotado uma estrutura dedutiva formal como a dos gregos, os chineses construíram uma tradição matemática sólida, com contribuições significativas para o pensamento geométrico (Boyer, 1996).

Como no Egito Antigo, a matemática chinesa emergiu como um instrumento utilitário voltado à resolução de problemas reais. Isso incluía a medição de campos agrícolas, escavação de canais, construção de muros e organização de cidades. Muitos registros chineses antigos se perderam por serem utilizados madeira, bambu e, posteriormente, seda para a escrita, materiais que não possuem boa resistência ao tempo, mas pelos registros existentes é possível notificar que a China Antiga possuía um ótimo desenvolvimento matemático.

O principal tratado matemático da China Antiga é o “Jiǔzhāng Suànshù”, Os Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, compilado por volta do século I a.C., mas foi baseado em textos mais antigos. Entre os temas tratados estão o cálculo de áreas e volumes, aplicações de figuras geométricas em problemas de transportes e engenharia.



Figura 1.3: Página da edição de Liu Hui do livro Os Nove Capítulos

Fonte: <https://culturacientifica.com/app/uploads/2021/07/imagen-7-1-412x640.jpg>

Este livro sistematiza o conhecimento matemático da época e dedica vários capítulos à geometria prática. Boyer (1996, p. 225) destaca que “a matemática chinesa dos Nove Capítulos era prática, mas não rudimentar. Ela envolvia um raciocínio lógico, ainda que sem provas formais”.

Os chineses também conheciam o teorema de Pitágoras, que eles chamavam de teorema de Gou-Gu, aparecendo no Capítulo 9 dos Nove Capítulos. Eves (2008, p. 134) destaca que “o teorema de Gou-Gu era usado na China muito antes de Pitágoras nascer, com aplicações práticas e tabelas numéricas.”

A matemática chinesa também cresceu notavelmente com os matemáticos que comentaram e expandiram os Nove Capítulos, aprimorando os conhecimentos do livro que serviu como base para os desenvolvimentos futuros, como métodos para cálculo de volumes e aproximações da constante π . Por exemplo, por volta de 220 d.C., o matemático Liu Hui fez diversas contribuições ao livro os Nove Capítulos, inclusive, usando um polígono de 96 lados obteve com notável precisão a aproximação da constante π , em 3,1416 (Barros e de Sá, 2022).

A geometria na Índia Antiga, como na China, teve um desenvolvimento independente de outras civilizações, com origem ligada tanto à prática ritualística quanto à astronomia. Seu surgimento remonta ao período védico (1500 - 500 a.C.), em que a matemática era usada para a construção de altares e templos com dimensões sagradas e precisas. Os indianos usavam folhas de palmeira e tecidos para realizar a escrita, posteriormente, foi trazido de outras regiões o papiro, por esse motivo muitas obras antigas foram perdidas, como ocorreu com a China (Boyer, 1996).

A mais antiga manifestação da geometria indiana está presente nos Vedas, especialmente no Shulba Sutras, que significa “regras da corda”. Esses textos (800–200 a.C.) são tratados que explicam como construir altares com formas específicas utilizando cordas esticadas.

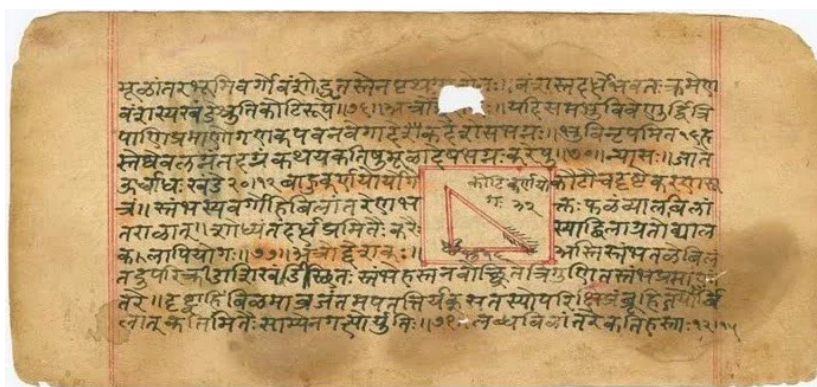


Figura 1.4: Página do Shulba Sutras

Fonte: <https://www.scienceteen.com/mathematics-in-ancient-india/>

Os Shulba Sutras ensinam transformar quadrados em retângulos, retângulos em trapézios, entre outros, utilizando técnicas puramente geométricas. Isso mostra um profundo entendimento das relações de área e simetria. Boyer (1996, p. 213) destaca que “os Shulba Sutras contêm instruções detalhadas sobre como desenhar figuras geométricas

com precisão usando cordas, o que demonstra um notável desenvolvimento geométrico antes mesmo da geometria grega formal”.

O teorema de Pitágoras também já era conhecido e aplicado na Índia Antiga, inclusive, Hayashi (2003, p. 363) destaca que nos Shulba Sutras contém “a expressão verbal existente mais antiga do Teorema de Pitágoras no mundo, embora já tivesse sido conhecido para os antigos babilônicos”. Os indianos usavam essa relação para construir retângulos e triângulos retângulos com precisão, também conheciam várias triplas pitagóricas.

Os indianos também buscavam soluções aproximadas para problemas como quadrar o círculo, isto é, construir um quadrado com a mesma área de um círculo, o que resultou na aproximação do número π em 3,0883 (Kline, 1994). Também já usavam cordas de círculo e noções semelhantes ao seno e cosseno, baseadas em razões geométricas.

Grécia

Apesar das aplicações práticas e desenvolvimentos geométricos mais rudimentares das civilizações antigas, foi na Grécia Antiga que a geometria se desenvolveu como ciência dedutiva, representando um dos marcos mais importante da matemática, pois a transformação da geometria em um conhecimento teórico estruturado, baseado em princípios dedutivos e fundamentos lógicos, moldou a matemática como a conhecemos atualmente (Boyer, 1996).

Boyer (1996, p. 75) destaca que “a geometria grega não surgiu do nada, mas foi moldada pela interação entre tradição prática oriental e reflexão filosófica”. Os gregos possuem destaque na história por serem os primeiros a transformar a geometria de uma ciência empírica e prática em um sistema dedutivo e lógico, baseado em axiomas, definições e demonstrações formais. A partir de pensadores como Tales de Mileto, Pitágoras e, mais tarde, Euclides, a geometria grega não apenas influenciou a matemática ocidental, mas também moldou o pensamento filosófico, arquitetônico e científico por séculos.

Considerado o primeiro matemático grego, Tales de Mileto (624 – 546 a.C.) é conhecido por ter levado à Grécia os conhecimentos geométricos do Egito e por realizar as primeiras demonstrações geométricas formais, buscando sempre justificar os procedimentos com base em princípios racionais.

Outro grande matemático grego com grandes contribuições na geometria foi Pitágoras de Samos (570 – 495 a.C.), fundador da escola filosófico-matemática: os pitagóricos, que tratavam os números e as formas como expressões divinas. Burkert (1995, p. 425) ainda destaca que para os pitagóricos a geometria “não era mera abstração, mas a chave para compreender a estrutura do cosmos. A ordem geométrica dos sólidos e

proporções expressava a harmonia em termos matemáticos”.

Atribui-se a Pitágoras e os pitagóricos, entre diversos estudos matemáticos, o célebre teorema de Pitágoras, que embora conhecido por outras culturas, foi somente provado sistematicamente pelos pitagóricos. Essa escola também explorou com excelência os sólidos regulares e as proporções, chegando a determinar a incommensurabilidade, o que denominamos de números irracionais.

A maior obra da geometria grega, e uma das maiores da história da matemática, é a obra Os Elementos, escrito por Euclides por volta de 300 a.C. em Alexandria, onde Euclides apresenta uma sistematização do conhecimento matemático da época.

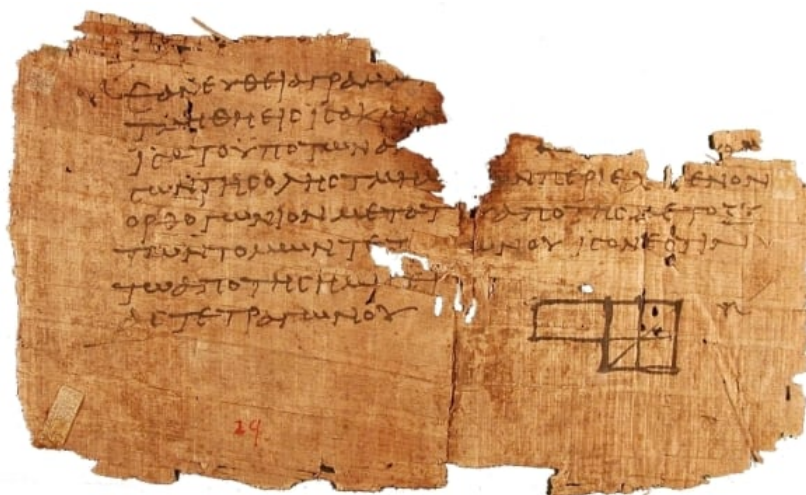


Figura 1.5: Papiro com fragmento do livro Os Elementos de Euclides

Fonte: <https://greciantiga.org/img.asp?num=0719>

Contendo 13 livros com definições, axiomas, postulados e proposições, os Elementos de Euclides, apresenta teoremas e construções geométricas, com provas rigorosas, usando régua e compasso como únicos instrumentos, tornando-se um modelo de raciocínio lógico-dedutivo para a matemática. Kline (1994, p. 142) destaca que “o método axiomático de Euclides influenciou não só a matemática, mas a própria estrutura do pensamento científico”.

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) também foi um dos maiores matemáticos da antiguidade, inclusive, Eves (2008, p. 145) afirma que “Arquimedes é o maior geômetra da Antiguidade, e talvez de toda a história.” Arquimedes desenvolveu métodos para encontrar áreas, volumes e centros de gravidade, estudou espirais, parábolas e aproximações da constante π com grande precisão, em 3,1428 (Barros e de Sá, 2022).

A geometria grega foi preservada durante séculos por estudiosos árabes, como Al-Khwarizmi e Al-Tusi, que também contribuíram com novas ideias e traduções para o árabe dos textos clássicos (Kline, 1994). Mais tarde, os estudos gregos renasceram na

Europa durante o Renascimento, com a redescoberta da cultura clássica, quando houve um ressurgimento do interesse pelas construções geométricas. A aplicação da geometria à arte, especialmente à perspectiva, tornou-se fundamental e artistas como Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer estudaram e utilizaram construções geométricas em suas obras (Hildebrand e Valente, 2019).

A contribuição dos primeiros matemáticos gregos foi extraordinária. Boyer (1996, p. 119) ainda destaca que “durante mais de dois milênios, Euclides foi o símbolo do que significa pensar logicamente”. O legado deixado por Euclides e seus sucessores permanece vivo não apenas na matemática e geometria, mas no desenvolvimento da civilização moderna.

Atualidade e Educação

A geometria na atualidade permanece como uma área essencial da matemática, Kline (1994, p. 614) destaca que “a geometria moderna é uma linguagem universal da ciência, com um alcance que os gregos jamais poderiam imaginar”. De fato, a geometria atualmente está presente no desenvolvimento tecnológico, ciências aplicadas, artes, engenharia e, principalmente, na educação, onde desempenha um papel fundamental na formação do pensamento lógico, espacial e abstrato dos alunos.

Além da geometria clássica de Euclides, desenvolveram-se outros sistemas geométricos, como a geometria não euclidiana, com destaque para a geometria hiperbólica e elíptica que foram fundamentais para a teoria da relatividade e a cosmologia; a geometria analítica que une álgebra e geometria, permitindo representar figuras por equações; a geometria diferencial com aplicação em física, engenharia e modelagem de superfícies curvas; a topologia que estuda propriedades das formas que permanecem inalteradas sob deformações contínuas; e a geometria computacional que é usada em algoritmos, design gráfico e inteligência artificial (Greenberg, 2010).

Além das aplicações óbvias em engenharia civil e arquitetura com construção de estruturas, cálculo de áreas e volumes, a geometria está intrinsecamente presente no desenvolvimento tecnológico, como em design gráfico e arte digital com o uso de formas geométricas na criação visual; na robótica e inteligência artificial com mapeamentos e navegação em espaços tridimensionais; e em geolocalização e GPS que são baseados em princípios geométricos (Greenberg, 2010).

Na educação, mais especificamente no ensino e na aprendizagem, a geometria é usada como ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos (Fainguelernt, 1999). O que é uma habilidade indispensável no desenvolvimento humano, conforme Piaseski (2010, p. 16) salienta:

O ensino da geometria é de grande importância, considerando o desenvolvimento de habilidades e competências, a percepção e a melhor compreensão na resolução de problemas, pois o ensino da geometria oferece uma imensa oportunidade ao aluno, de olhar, comparar, medir, generalizar e abstrair, desenvolvendo o pensamento lógico (Piaseski, 2010, p. 16).

A geometria contribui para o desenvolvimento da linguagem matemática e da argumentação lógica, sendo fundamental no currículo escolar por desenvolver habilidades como a visualização e raciocínio espacial; capacidade de abstração e generalização; competência para resolver problemas reais e matemáticos; compreensão das formas, medidas, localização e transformação dos objetos no espaço.

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta o ensino da geometria desde o Ensino Fundamental, com foco nos seguintes eixos: formas geométricas pela identificação e classificação de figuras planas e espaciais; grandezas e medidas por perímetro, área, volume; localização e movimento pela orientação no espaço e transformações geométricas (reflexão, rotação, translação). No Ensino Médio, os alunos aprofundam os seus conhecimentos em geometria plana e espacial; trigonometria; geometria analítica; geometria como linguagem de representação e modelagem.

Mas apesar de sua relevância, o ensino da geometria enfrenta diversos desafios, Rogenski e Pedroso (2019, p. 18) enfatizam que “muitos alunos enfrentam dificuldades em geometria porque ela é ensinada de maneira descontextualizada e pouco visual”. Primeiramente, a geometria envolve o entendimento de formas, tamanhos, posições e relações espaciais, o que exige uma boa capacidade de visualização mental. Muitos alunos têm dificuldade em imaginar objetos tridimensionais ou em compreender como as figuras se relacionam no espaço, o que pode dificultar a compreensão de conceitos como ângulos, áreas, volumes e simetrias.

Outro ponto importante é que a geometria muitas vezes é apresentada de forma mais abstrata, com conceitos que não estão diretamente ligados ao cotidiano dos estudantes. Essa abstração pode gerar uma sensação de dificuldade ou até de insegurança, especialmente se o aluno não tiver uma base sólida de conceitos básicos de matemática (Lorenzato, 2006).

Além disso, a resolução de problemas geométricos muitas vezes requer raciocínio lógico, atenção aos detalhes e a capacidade de aplicar fórmulas corretamente. Se o aluno não domina bem esses aspectos, pode se sentir perdido ao tentar resolver as questões, acreditando que não é bom na matéria, o que desenvolve um ciclo de insegurança que prejudica o seu desempenho (Pólya, 1978).

Outro fator que contribui para as dificuldades é a falta de prática ou de atividades que tornem a aprendizagem mais concreta e visual. Quando os estudantes não têm acesso a recursos como desenhos, modelos físicos ou softwares de geometria, fica mais

difícil compreender conceitos que poderiam ser mais facilmente assimilados com uma abordagem mais prática (Duval, 2003).

Torna-se evidente que as abordagens excessivamente formais e mecânicas, sem conexão com a realidade do aluno, com pouca ênfase nas construções geométricas e no raciocínio visual, compromete seriamente a aprendizagem dos alunos. Segundo Costa (2016, p. 125), “as construções geométricas favorecem a compreensão dos conceitos fundamentais da geometria e do processo dedutivo”, portanto, é fundamental que o ensino de geometria seja feito de forma lúdica, com exemplos do cotidiano, uso de recursos visuais e atividades práticas, permitindo que os estudantes desenvolvam uma compreensão geométrica sólida, juntamente com as habilidades agregadas que envolvem o desenvolvimento do raciocínio lógico e espacial, da capacidade de visualização, da resolução de problemas, da argumentação matemática, da autonomia intelectual e de competências socioemocionais, como a persistência e a confiança na aprendizagem.

A aprendizagem de geometria se torna mais eficaz quando há uso de materiais concretos e manipulativos (blocos geométricos, dobraduras e malhas), são incorporadas tecnologias digitais, como o GeoGebra, o ensino é baseado na resolução de problemas e na investigação geométrica com situações reais e significativas para o aluno, como construção de maquetes ou análise de mapas.

Em especial, o uso de tecnologias digitais e metodologias ativas tem transformado o ensino da geometria, pois permitem visualizar e manipular figuras interativas, tornando a aprendizagem mais envolvente e contextualizada. Além disso, propostas como a Educação Matemática Crítica reforçam o uso da geometria para interpretar o mundo e desenvolver o pensamento reflexivo (Skovsmose, 2015).

Capítulo 2

Conceitos Geométricos Básicos

Neste capítulo, abordaremos os principais conceitos e fundamentos da Geometria Plana apresentados na sala de aula, os quais são indispensáveis para o desenvolvimento matemático dos alunos no ensino fundamental. Obviamente o conhecimento existente não é abordado em sua totalidade no presente trabalho, apenas alguns dos principais conceitos ensinados na sala de aula estão elencados. Os assuntos iniciais de geometria são abordados, primeiramente, nos anos iniciais do ensino fundamental, mas nos anos finais os assuntos são lembrados e abordados de maneira mais formal e completa.

Ao longo do trabalho, optou-se por apresentar demonstrações matemáticas apenas em determinados momentos, considerando os objetivos didáticos e o nível de aprofundamento conceitual proposto na Educação Básica. Em alguns casos, as demonstrações completas foram essenciais para explicitar o raciocínio lógico-dedutivo e favorecer a compreensão dos fundamentos da geometria, em outros, sua omissão ou apresentação de forma simplificada, construindo os conceitos ao invés de demonstrar formalmente, se mostrou mais adequada, priorizando a intuição geométrica, a visualização e a resolução de problemas.

As principais referências teóricas utilizadas neste trabalho são os livros didáticos amplamente adotados na Educação Básica brasileira, a coleção *Matemática em Cena*, do 6º ao 9º ano, de Savoya, Lalli et al., e a coleção *A Conquista da Matemática*, do 6º ao 9º ano, de Giovanni e Castrucci. Ao longo do desenvolvimento do trabalho, serão empregados os conceitos fundamentais da geometria euclidiana, apresentados de forma atualizada e adaptada às abordagens didáticas desses livros, que servirão como base conceitual para a exposição dos conteúdos, evitando a necessidade de referenciar individualmente cada definição ou conceito utilizado.

Ponto, reta e plano

O estudo da Geometria Plana é iniciado com a abordagem dos conceitos de ponto, reta e plano. Essas abordagens são chamadas de **conceitos primitivos**, pois não há um formalismo teórico que as fundamente, são abordagens aceitas de forma intuitiva, servindo como ponto de partida para a construção dos demais conceitos da Geometria. De acordo com Euclides (2009, p. 97, tradução de Bicudo), as abordagens de ponto, reta e plano são:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte;
2. Linha é comprimento sem largura;
3. E extremidades da linha são pontos;
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
5. E uma superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
6. E extremidades de uma superfície são retas;
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma (Euclides, 2009, p. 97).

Alves (2017, p. 44) apresenta uma descrição mais moderna dos conceitos de ponto, reta e plano, assim como, uma pertinente observação sobre a representação gráfica destes conceitos primitivos:

Ponto é uma representação gráfica que não possui definição, dimensão e forma. E desta maneira não é possível encontrar qualquer medida nele [...]. Para os gregos, o ponto era “o que não pode ser dividido” e teve um papel fundamental no desenvolvimento da geometria, pois é a partir de conjuntos de pontos que são formadas as figuras geométricas. É habitualmente representado por uma marca, ou seja, um “pingo” ou uma “bolinha”, mas é importante saber que isso é apenas uma representação geométrica a qual é utilizada para representar localizações no espaço [...].

A reta é uma representação gráfica formada por um conjunto de pontos onde geometricamente é representada por uma linha reta, ou seja, uma linha unidimensional infinita que não faz curva, que mesmo sendo formada por pontos, não possuem definição [...].

O plano é uma representação geométrica bidimensional infinita formada pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado (Alves, 2017, p. 44).

Portanto, podemos descrever os conceitos de ponto, reta e plano, em um contexto mais moderno e didático, da seguinte forma:

Conceito Primitivo 2.1. *(Ponto) Um elemento geométrico que representa uma localização exata e não tem dimensão (sem comprimento, largura ou altura).*

Conceito Primitivo 2.2. *(Reta) Um elemento geométrico definido como uma sequência infinita de pontos que se estendem em ambas as direções, sem curvas e com uma única dimensão (comprimento).*

Conceito Primitivo 2.3. *(Plano) Um elemento geométrico definido como um conjunto infinito de pontos e retas, formando uma superfície infinita e bidimensional, ou seja, com duas dimensões (largura e comprimento), mas sem espessura (altura).*

A notação para expressar o Ponto são letras maiúsculas do alfabeto (A, B, C); a Reta são letras minúsculas do alfabeto (a, b, c); o Plano são letras gregas (α, β, γ).

De acordo com os conceitos primitivos dos elementos geométricos básicos que estruturam a geometria plana, podemos representá-los graficamente:

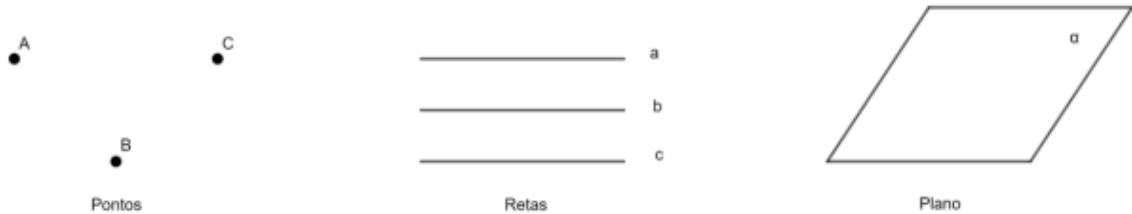


Figura 2.1: Representação de pontos, retas e plano

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Na sequência veremos algumas definições e postulados que são consequências das definições de ponto, reta e plano.

Postulado 2.4. *Dados dois pontos A e B e uma reta r, temos que*

- Ou A e B são coincidentes, $A = B$ (é o mesmo ponto) ou A e B são distintos, $A \neq B$.
- Ou o ponto A está na reta r ($A \in r$) ou o ponto A não está na reta r ($A \notin r$).
- Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- Duas retas r e s são **coincidentes** quando possuem todos os pontos em comum, ou seja, $r = s$.

Definição 2.5. *Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta.*

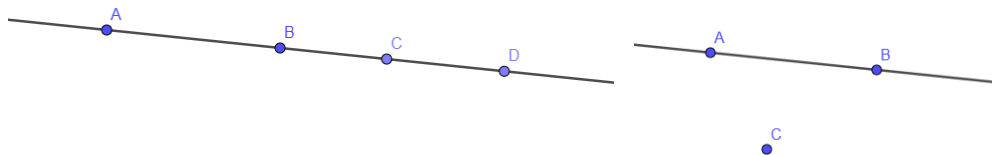


Figura 2.2: Pontos Colineares e Não Colineares, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Postulado 2.6. *Se A , B e C são pontos distintos e colineares, então, um dos pontos, e somente um, está entre os outros dois.*

Postulado 2.7. *(Postulado da determinação de reta) Dois pontos distintos determinam uma, e somente uma, reta.*

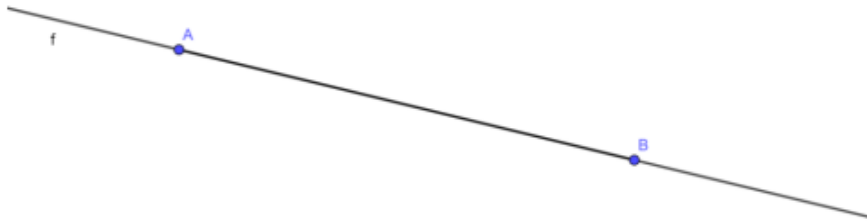


Figura 2.3: Determinação de uma Reta

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por \overleftrightarrow{AB} . Alguns outros postulados importantes são descritos a seguir.

Postulado 2.8.

- *Toda reta do plano possui pelo menos dois pontos distintos.*
- *Por três pontos não colineares passa um único plano.*
- *Para qualquer plano, existem uma reta r contida no plano, um ponto que pertence ao plano, mas não pertence à reta r e um ponto que não pertence ao plano.*

Definição 2.9. *(Segmento de Reta) Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.*



Figura 2.4: Segmento de Reta

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

O segmento de reta formado pelos A e B é indicado por \overline{AB} . Os pontos A e B são as extremidades do segmento \overline{AB} e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento \overline{AB} .

Além disso, para cada par de pontos A e B , existe um único número real associado, chamado de distância entre os pontos A e B , que é exatamente o que definimos

como o comprimento do segmento \overline{AB} , satisfazendo as propriedades: $\overline{AB} \geq 0$; $\overline{AB} = 0$ se, e somente, se $A=B$; $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} dizemos que eles são congruentes se os seus comprimentos são iguais. Já se um ponto M divide o segmento \overline{AB} em dois segmentos \overline{AM} e \overline{MB} congruentes, dizemos que o ponto M é **ponto médio** do segmento \overline{AB} .

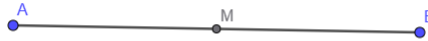


Figura 2.5: Ponto Médio

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Definição 2.10. (*Retas Concorrentes*) Duas retas r e s são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

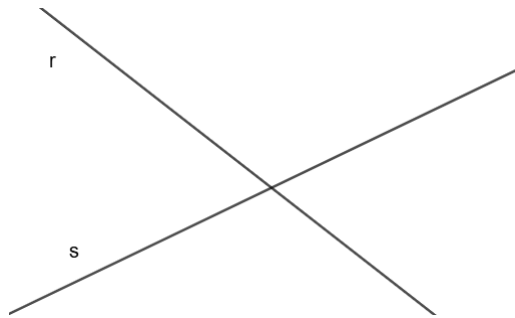


Figura 2.6: Retas Concorrentes

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Definição 2.11. (*Retas Paralelas*) Duas retas r e s que não têm pontos em comum são chamadas de retas paralelas.

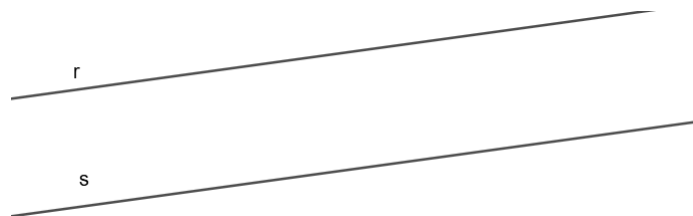


Figura 2.7: Retas Paralelas

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Definição 2.12. (*Semirreta*) Dados dois pontos distintos A e B , a reunião do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é uma semirreta.

Indicamos a semirreta por \overrightarrow{AB} e o ponto A é origem da semirreta.

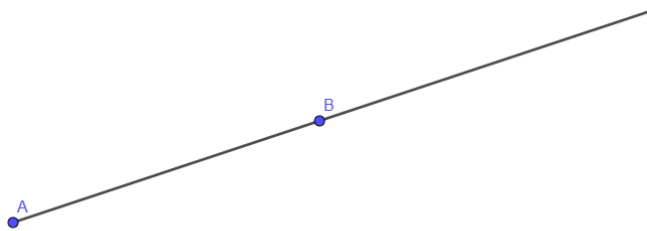


Figura 2.8: Semirreta

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Ângulos

A definição de ângulo é um dos principais conceitos de matemática ensinado na educação básica. Euclides (2009, p. 97, tradução de Bicudo) utilizou as seguintes definições em os Elementos:

8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo (Euclides, 2009, p. 97).

Atualmente, podemos definir ângulos da seguinte forma:

Definição 2.13. *Ângulo é a união, em um plano, de duas semirretas de mesma origem com uma das regiões determinadas por elas.*

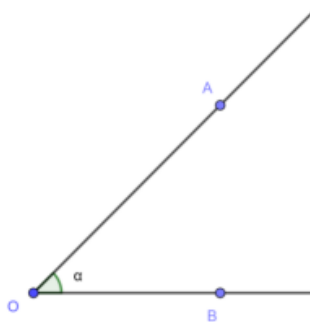


Figura 2.9: Ângulo $A\hat{O}B$

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

As semirretas são os lados do ângulo, e a origem delas é o vértice do ângulo.

Na figura acima é ilustrado o ângulo $A\hat{O}B$, cujo vértice O é a origem comum das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , que são os lados do ângulo. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é a grandeza que determina a abertura entre as duas semirretas e é representada por α .

Já o ângulo $\widehat{B\hat{O}A}$ também possui vértice O e é formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , porém, possui valor β . Ressaltamos que o ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é o menor ângulo formado por essas semirretas, enquanto $\widehat{B\hat{O}A}$ é o maior ângulo formado por essas semirretas.

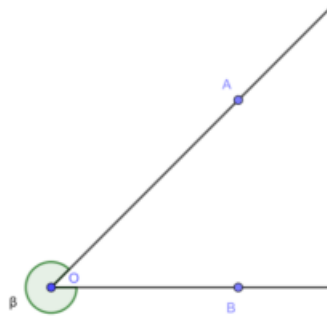


Figura 2.10: Ângulo $\widehat{B\hat{O}A}$

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

A grandeza mais comum utilizada, na educação básica, para representar as medidas de um ângulo é o grau ($^\circ$). O grau é uma medida que corresponde a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. Cada grau pode ser dividido em minutos ($'$), que equivalem a $\frac{1}{60}$ do grau, e segundos ($''$), equivalente a $\frac{1}{60}$ do minuto.

Podemos classificar os ângulo de formas distintas, conforme a sua medida. O menor ângulo formado por semirretas coincidentes é denominado **ângulo nulo** e mede 0° , o maior ângulo formado é chamado de **ângulo completo** e mede 360° .

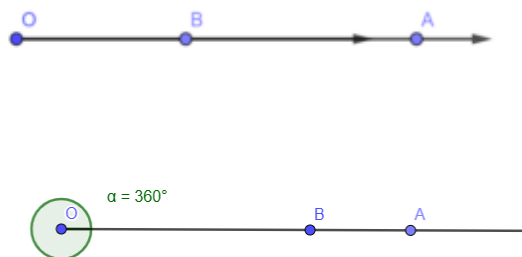


Figura 2.11: Ângulo Nulo e Ângulo Completo, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um **ângulo agudo** é aquele com a medida maior que 0° e menor que 90° .

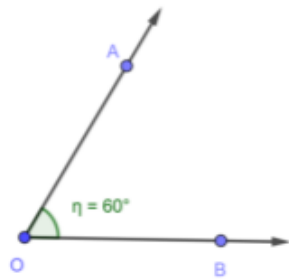


Figura 2.12: Ângulo Agudo
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um **ângulo reto** é aquele que possui a medida igual a 90° .

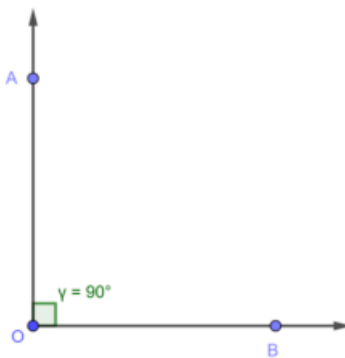


Figura 2.13: Ângulo Reto
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um **ângulo obtuso** é aquele com a medida maior que 90° e menor que 180° .

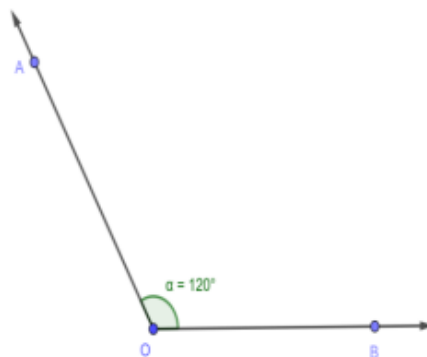


Figura 2.14: Ângulo Obtuso
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

O ângulo que possui medida igual a 180° é denominado **ângulo raso**.

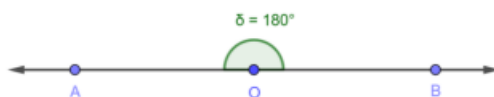


Figura 2.15: Ângulo Raso

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um ângulo que possui medida maior que 0° e menor que 180° também é chamado de **ângulo convexo**. Já um **ângulo côncavo** é aquele com medida maior que 180° e menor que 360° .

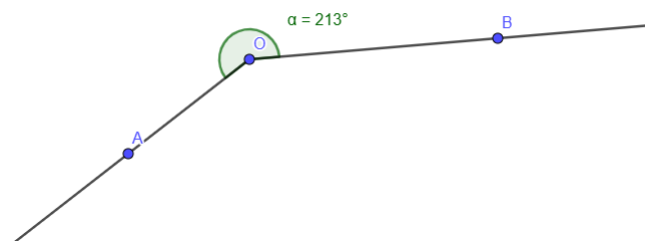


Figura 2.16: Ângulo Côncavo

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Além da classificação com relação a medida dos ângulos, existe uma classificação importante com relação à congruência (igualdade das medidas) desses ângulos e em relação à posição desses ângulos no espaço. Conforme Albuquerque (2017, p. 133):

Dois ângulos são congruentes quando transportados de modo que tenham o mesmo vértice e um dos lados comum, permanecendo ambos no mesmo semi-plano, determinado pela reta que contém os lados comuns necessariamente, o outro lado também coincidiram (Albuquerque, 2017, p. 133).

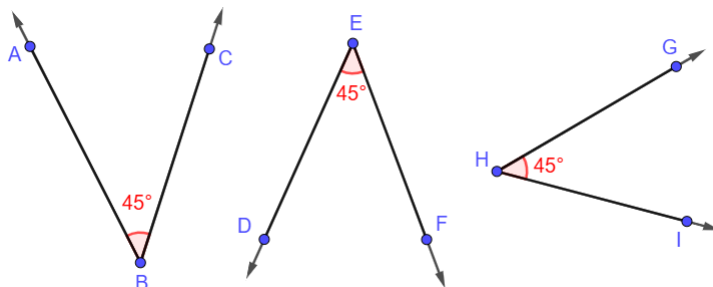


Figura 2.17: Ângulos Congruentes

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Na figura acima observamos três ângulos congruentes. Essa congruência é denotada como $\hat{A}BC \equiv \hat{D}EF \equiv \hat{G}HI$.

Também nomeamos de **ângulos consecutivos** dois ângulos que possuem um lado em comum, possuindo pontos internos comuns ou não, e de **ângulos adjacentes** dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum.

Na figura abaixo observamos que os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$, $P\hat{O}Q$ e $P\hat{O}R$, $Q\hat{O}R$ e $P\hat{O}R$ são ângulos consecutivos, pois possuem as semirretas \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OR} , respectivamente, como lado comum. Já os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$, além de serem consecutivos, não possuem pontos internos em comum, logo, são ângulos adjacentes.

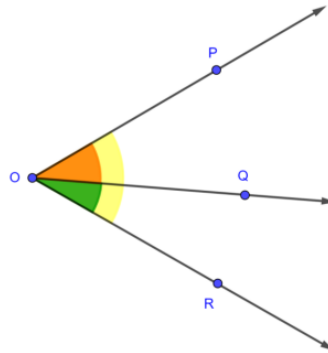


Figura 2.18: Ângulos Consecutivos e Adjacentes

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Três conceitos importantes dos ângulos são a bissetriz de um ângulo, os ângulos complementares e os ângulos suplementares, que definimos a seguir.

Definição 2.14. (*Bissetriz*) A bissetriz de um ângulo é a semirreta que divide esse ângulo exatamente em dois ângulos congruentes.

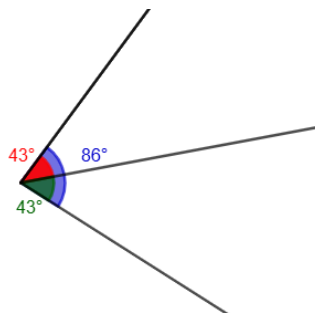


Figura 2.19: Bissetriz de um ângulo

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Definição 2.15. (*Ângulos Complementares*) Dois ângulos que possuem a soma das medidas de abertura igual a 90° , são chamados complementares.

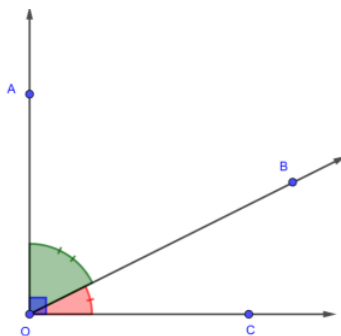


Figura 2.20: Ângulos Complementares

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Definição 2.16. (*Ângulos Suplementares*) Dois ângulos que possuem a soma das medidas de abertura igual a 180° , são suplementares.

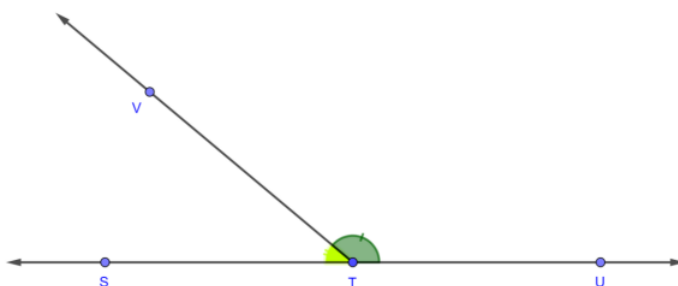


Figura 2.21: Ângulos Suplementares

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Também chamamos dois ângulos que possuem a soma das medidas de abertura igual a 360° de **ângulos replementares**.

Quando temos duas retas r e s paralelas cortadas por uma concorrente t , que chamamos de transversal, conforme figura 2.22, formamos um conjunto de ângulos congruentes ou suplementares entre si, conforme definimos com auxílio da figura abaixo.

Os pares de ângulos \hat{a} e \hat{c} , \hat{b} e \hat{d} , \hat{e} e \hat{g} , \hat{h} e \hat{f} , são *ângulos congruentes* e chamados de **ângulos opostos pelo vértice**.

Os pares de ângulos \hat{c} e \hat{e} , \hat{d} e \hat{f} , são *ângulos congruentes* e chamados de **ângulos alternos internos**. Os pares de ângulos \hat{b} e \hat{h} , \hat{a} e \hat{g} , são *ângulos congruentes* e chamados de **ângulos alternos externos**.

Os pares dos ângulos \hat{d} e \hat{e} , \hat{f} e \hat{c} , são *ângulos suplementares* e chamados de **ângulos colaterais internos**. Os pares de ângulos \hat{a} e \hat{h} , \hat{b} e \hat{g} , são *ângulos suplementares* e chamados de **ângulos colaterais externos**.

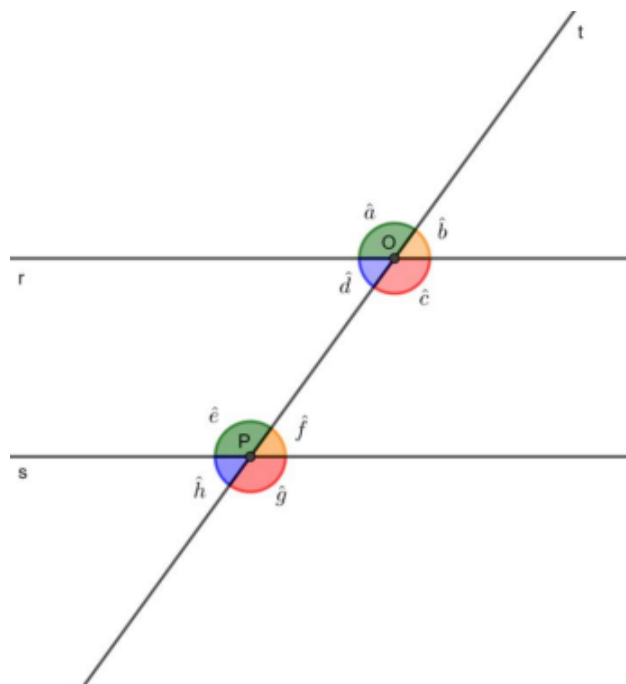


Figura 2.22: Ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Os pares de ângulos \hat{a} e \hat{e} , \hat{d} e \hat{h} , \hat{b} e \hat{f} , \hat{c} e \hat{g} , são *congruentes* e chamados de **ângulos correspondentes**.

A demonstração destas propriedades pode ser encontrada em A. MUNIZ NETO, **Geometria**, 2013; nas páginas 14, 39 e 43.

Por fim, com as classificações de ângulos é possível definir um caso especial de reta concorrente, a **reta perpendicular**, que são retas concorrentes que formam entre si um ângulo reto.

Polígonos

Avançaremos nosso estudo para os polígonos. Euclides (2009, p. 97, tradução de Bicudo) citou que:

- 14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
- 19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas (Euclides, 2009, p. 97).

A abordagem mais moderna consiste em definir inicialmente as linhas poligonais, para então, definir os polígonos.

Uma curva formada por segmentos de reta consecutivos, dois a dois não colineares, é chamada de **linha poligonal**, que pode ser *fechada*: quando começa e termina em um mesmo ponto; ou *aberta*: quando não é fechada. Uma linha poligonal também pode ser *simples*: quando não possui segmentos se cruzando (autointersecção); ou *não simples*: quando não é simples.

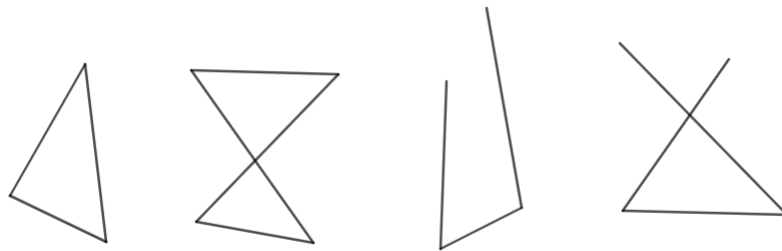


Figura 2.23: Linhas Poligonais
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Na figura acima temos uma linha poligonal fechada simples, fechada não simples, aberta simples e aberta não simples, respectivamente. Linhas poligonais fechadas dividem o plano em duas regiões, uma limitada que é chamada de interior da poligonal e outra ilimitada que é chamada de exterior da poligonal.

Definição 2.17. (*Polígono*) *Uma linha poligonal fechada simples é chamada de polígono.*

Portanto, um polígono é uma figura geométrica plana, fechada, formada pela união de segmentos de reta consecutivos que não se cruzam. Esses segmentos são chamados de lados, e os pontos de encontro entre eles são os vértices do polígono.

Os polígonos são denominados pela quantidade de lados, que é igual à quantidade de ângulos, que possuem. Por exemplo, triângulo: se possui três lados; quadrilátero: se possui quatro lados; pentágono: se possui cinco lados; hexágono: se possui seis lados; n-ágono, se possui n lados.

Os polígonos podem ser classificados como **convexo**, se todos os ângulos são convexos; ou **côncavo**, se pelo menos um ângulo é côncavo. De outra maneira, um polígono é convexo quando dado dois pontos quaisquer no interior do polígono, o segmento de reta resultante permanece totalmente no interior do polígono. Caso o segmento de reta resultante possua pontos no seu exterior, o polígono é côncavo.

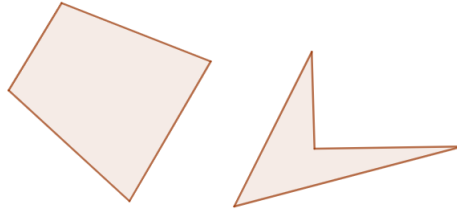


Figura 2.24: Polígono Convexo e Côncavo, respectivamente
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Se α é um ângulo interno de um polígono, chamamos de **ângulo externo** o ângulo β formado pela extensão do lado correspondente a α e o seu lado adjacente, sendo esses ângulos suplementares.

Definição 2.18. (*Polígono Regular*) Se um polígono é convexo e possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes, é chamado de polígono regular.

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono regular é sempre 360° . Temos algumas propriedades importantes dos polígonos, as quais trataremos a seguir. Mais resultados podem ser encontrados no livro Geometria de A. Muniz Neto, 2013.

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento que liga dois vértices não consecutivos. Quando o polígono é convexo, todas as suas diagonais são internas.

Proposição 2.19. O número de diagonais D de um polígono convexo de n lados é dado pela fórmula: $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

Demonstração. Observamos que, pela definição de diagonal, os triângulos não possuem diagonal, assim, considerando polígonos com lados $n \geq 4$, unindo o vértice A_1 aos $n - 1$ vértices restantes, notamos que duas dessas uniões são os lados do polígono, logo, temos $n - 3$ diagonais partindo do vértice A_1 , e analogamente, $n - 3$ diagonais partindo de qualquer vértice, totalizando $n(n - 3)$ diagonais.

Agora, observamos que existe uma duplicidade na quantidade de diagonais contados, pois a diagonal formada pelo segmento $\overline{A_i A_j}$ foi contado partindo do vértice A_i e também partindo do vértice A_j , logo, o número de diagonais de um polígono de n lados é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$. \square

Proposição 2.20. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Demonstração. Seja um triângulo qualquer e uma reta paralela a um dos lados do triângulo e passando pelo vértice oposto a esse lado.

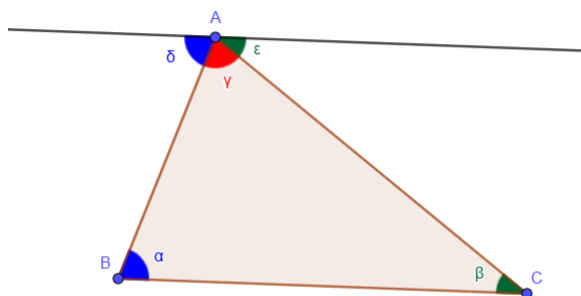


Figura 2.25: Triângulo com paralela
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Observe que os ângulos α e δ , β e ϵ são alternos internos, ou seja, são congruentes, logo, δ , γ e ϵ formam um ângulo raso. \square

Proposição 2.21. *A fórmula da soma S dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por: $S = 180^\circ(n - 2)$.*

Demonstração. Seja P um ponto no interior de um polígono de $n \geq 4$ lados. Formando segmentos de reta dos vértices do polígono com o ponto P , obtemos n triângulos com os lados, dois a dois, adjacentes.

Como a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos é 180° , temos que a soma dos ângulos internos do polígono é $180^\circ n - 360^\circ$. A subtração de 360° é devida ao fato de que os ângulos internos no vértice P dos triângulos não são ângulos internos do polígono e sua soma é um ângulo completo. Portanto, isolando 180° , obtemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dado por $180^\circ(n - 2)$. \square

No caso do polígono regular de n lados, como todos os ângulos internos são congruentes, podemos determinar a medida de cada um dos ângulos internos α utilizando a fórmula: $\alpha = \frac{S}{n}$.

Um conceito fundamental que envolve os polígonos é a **semelhança**.

Definição 2.22. *(Semelhança de Polígonos) Dois polígonos são semelhantes quando possuem os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais, isto é, a razão entre as medidas de qualquer par de lados correspondentes será constante.*

De maneira mais simples, dois polígonos são ditos semelhantes quando possuem a mesma forma, embora possam ter tamanhos diferentes. Um fato interessante é que todos os polígonos regulares de n lados são semelhantes entre si.

Triângulos e Quadriláteros

Os principais polígonos são os triângulos e os quadriláteros, os quais trataremos brevemente a seguir.

Os triângulos são os polígonos mais simples, possuem três lados (três ângulos) e, conforme já vimos, não possuem diagonais e a *soma dos seus ângulos internos é 180°* . Também destacamos que em um triângulo a maior medida de ângulo está sempre oposta ao maior lado. Também temos uma condição de existência para os triângulos, pois conforme vimos anteriormente, três linhas poligonais podem não fechar, ou seja, podem não formar um polígono.

Postulado 2.23. (*Condição de existência de um triângulo*) *Três segmentos de reta podem formar um triângulo se, e somente se, a medida de um deles é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois.*

Os triângulos podem ser classificados de acordo com lados, como:

Triângulo escaleno: não possui lados, dois a dois, congruentes, ou seja, a medida dos três lados são diferentes entre si.

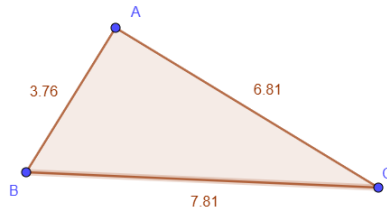


Figura 2.26: Triângulo Escaleno

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Triângulo isósceles: possui pelo menos dois lados congruentes, ou seja, dois lados com medidas iguais. Por consequência, possui dois ângulos internos congruentes.

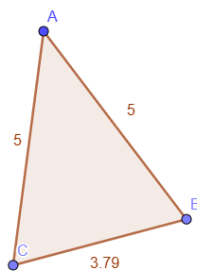


Figura 2.27: Triângulo Isósceles

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Triângulo equilátero: possui todos os lados congruentes, ou seja, os três lados possuem a mesma medida. Por consequência, todos os ângulos internos são congruentes e medem 60° , logo, é um polígono regular.

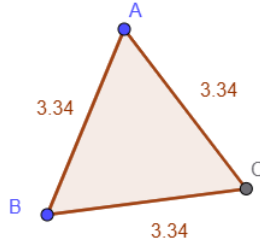


Figura 2.28: Triângulo Equilátero
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Podemos também classificar os triângulos de acordo com ângulos, assim, podem ser classificados como:

Triângulo acutângulo: se todos os seus ângulos são agudos.

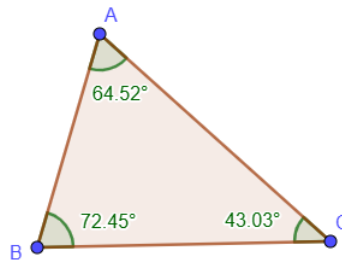


Figura 2.29: Triângulo Acutângulo
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Triângulo obtusângulo: se um de seus ângulos é obtuso.

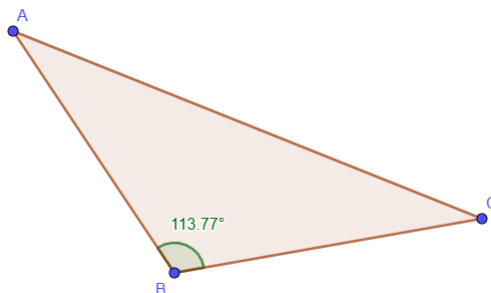


Figura 2.30: Triângulo Obtusângulo
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Triângulo retângulo: se um de seus ângulos é reto.

Em um triângulo retângulo, o maior lado, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos. Pelas propriedades métricas e aplicações, o triângulo retângulo é um dos principais elementos da matemática.

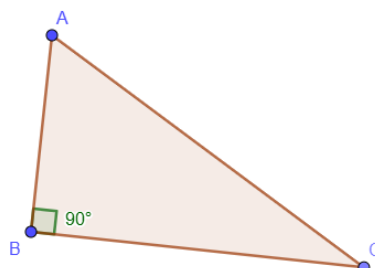


Figura 2.31: Triângulo Retângulo

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Por sua vez, os quadriláteros são polígonos de 4 lados (4 ângulos), possuem 2 diagonais e a soma dos seus ângulos internos é 360° .

Os quadriláteros podem ser classificados como um quadrilátero qualquer: se os seus lados opostos não são paralelos; ou **Trapézio**: se apresenta dois lados opostos paralelos; ou **Paralelogramo**: se possui todos os lados opostos paralelos.

Os lados opostos paralelos de um trapézio são chamados de base maior e menor, de acordo com as medidas, caso não sejam congruentes. Os Trapézios podem ser classificados como:

Trapézio Isósceles: se possui lados não paralelos congruentes.



Figura 2.32: Trapézio Isósceles

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Trapézio Escaleno: se possui lados não paralelos não congruentes.

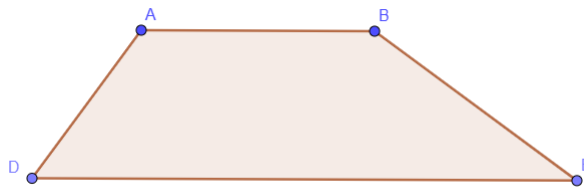


Figura 2.33: Trapézio Escaleno
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Trapézio Retângulo: se possui ângulo reto.

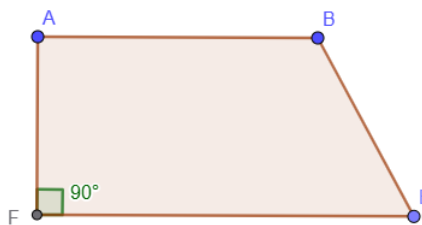


Figura 2.34: Trapézio Retângulo
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Os Paralelogramos têm ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos, dois a dois, suplementares.

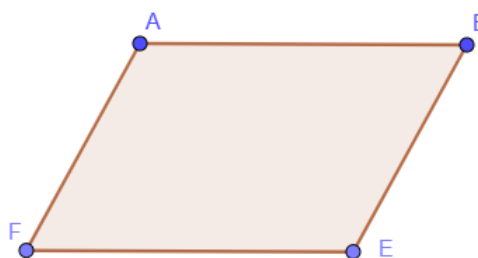


Figura 2.35: Paralelogramo
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Em particular, todo paralelogramo também é um trapézio, mas nem todo trapézio é um paralelogramo.

Os paralelogramos podem ser classificados como:

Retângulo: em que todos os ângulos são retos.



Figura 2.36: Retângulo

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Losango: em que todos os lados são congruentes.

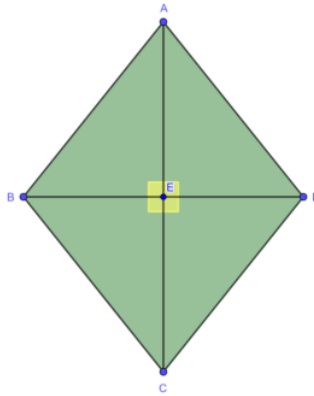


Figura 2.37: Losango

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Quadrado: é um retângulo em que todos os lados são congruentes e, analogamente, um losango em que todos os ângulos são retos. Portanto, é um polígono regular.

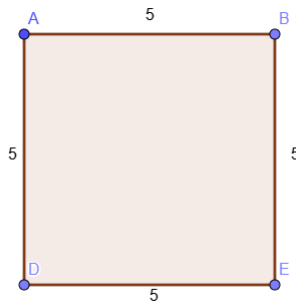


Figura 2.38: Quadrado

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Destacamos as seguintes propriedades de alguns quadriláteros:

- Em todo paralelogramo, os lados opostos, e os ângulos opostos, são congruentes;
- Em todo paralelogramo, os ângulos consecutivos são suplementares.
- Em todo paralelogramo, uma diagonal divide esse paralelogramo ao meio, além disso, as diagonais são concorrentes em seus pontos médios.
- Em um retângulo, as diagonais são iguais;
- E um losango, as diagonais são perpendiculares e bissetam os ângulos;
- O quadrado acumula todas essas propriedades.

Área e Perímetro

Denominamos de **perímetro** P de um polígono, a soma das medidas dos seus lados, ou seja, o perímetro representa a medida total do contorno do polígono. Já o conceito de área A é utilizado principalmente no cálculo da medida da superfície dos polígonos. Definimos **área** como a extensão ocupada por uma superfície (região fechada) plana. A medida da área é a quantidade de vezes que uma unidade de medida de área cabe na superfície.

Normalmente, utilizamos o conceito de malha quadriculada com quadrados 1x1 unidade para determinar a unidade de medida de área, que é 1 unidade ao quadrado, e assim, conseguimos medir a área dos polígonos, que é dado pelo número de quadrados que ela ocupa.

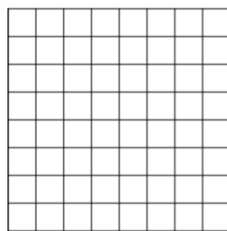


Figura 2.39: Malha quadriculada
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Portanto, temos que a área de um polígono convexo é composta por quadrados, além de triângulos formados pelas diagonais dos quadrados e que têm a metade da área do quadro. O tamanho do quadrado pode ser ajustado conforme o tamanho e necessidade do polígono.

Para desenvolvimento das fórmulas de área dos polígonos, utilizamos os conceitos de **base** de um polígono: que é um dos seus lados escolhido como referência para

a medição da altura; e a **altura**: que é a distância perpendicular de um vértice oposto à base, ou ao prolongamento da base. Apresentamos as fórmulas a seguir:

No retângulo de base b e lado a , notamos que o lado a é perpendicular à base, logo, corresponde à altura h do retângulo ($a = h$), assim, basta contar a quantidade total de quadrados, que é a quantidade b da base vezes a quantidade h , portanto, a sua área é dada por: $A = bh$. Já o perímetro é dado por: $P = 2(b + h)$.

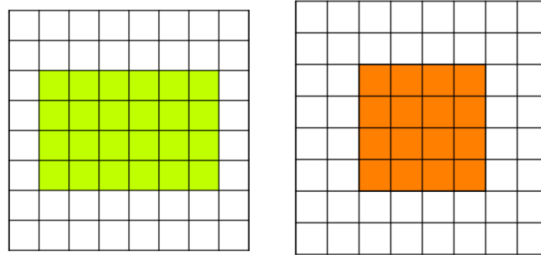


Figura 2.40: Retângulo e Quadrado, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

No quadrado, como os lados l são iguais ($l = b = h$), a área é dada por: $A = l^2$. Já o perímetro é dado por: $P = 4l$.

No paralelogramo de lado a e base b , precisamos notar que, como os lados opostos são paralelos, cada um dos quadrados incompletos de um dos lados possui a sua área faltante em um dos quadrados incompletos do lado oposto. Logo, se deslocarmos os quadrados incompletos correspondentes, unindo-os dois a dois, formaremos um retângulo com a mesma área do paralelogramo. Além disso, notamos que o lado que corresponde à altura h do retângulo formado é exatamente a altura do paralelogramo original, pois é perpendicular à base.

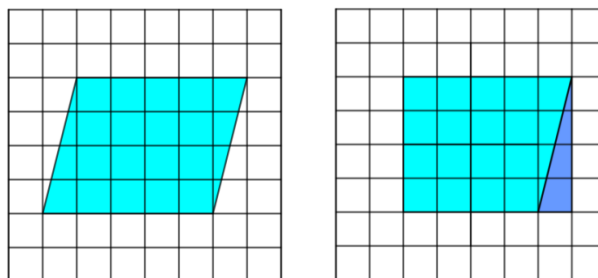


Figura 2.41: Paralelogramo

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Assim, o cálculo da área de um paralelogramo é igual à de um retângulo, sendo dada por: $A = bh$. Já o perímetro, como $a \neq h$, é obtido como: $P = 2(a + b)$.

Para o triângulo de lados a , b e c , inicialmente precisamos definir *ponto*

simétrico, que é o ponto refletido por um eixo, ou seja, que se encontra do outro lado do eixo, tal que é mantida a mesma distância e alinhamento dos pontos em relação ao eixo.

Observamos que se assumirmos o maior lado de qualquer triângulo como eixo e tomarmos o ponto simétrico do vértice oposto à esse lado, conectando os vértices pertencentes ao eixo com o ponto simétrico obtido, formamos um paralelogramo tal que o eixo é uma diagonal desse paralelogramo. Logo, o triângulo é metade do paralelogramo, assim, possui metade de sua área, além disso, ambos possuem base b e altura h comum.

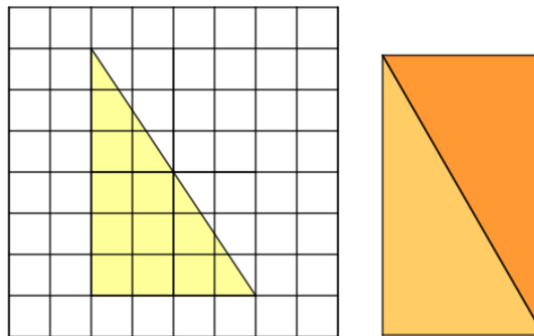


Figura 2.42: Triângulo e triângulos no retângulo, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Portanto, a área de um triângulo pode ser calculada como a metade da área do paralelogramo formado como descrito, ou seja, $A = \frac{bh}{2}$. Já o perímetro é dado pela soma das medidas a , b e c dos lados, isto é, $P = a + b + c$.

Existem muitas fórmulas para calcular a área de um triângulo, entre elas, uma fórmula muito útil utiliza o semiperímetro p do triângulo, isto é, metade do seu perímetro. Essa fórmula é denominada **Fórmula de Herão**¹:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

A fórmula de Herão é útil principalmente quando existe dificuldade de se obter a altura do triângulo, sendo que as medidas dos lados estão todas disponíveis².

Para o Losango de lado l , notamos que a diagonal menor d divide o losango em dois triângulos com bases adjacentes, e a metade da diagonal maior D , pelo fato das diagonais serem perpendiculares e concorrentes no ponto médio, representam a altura de cada triângulo.

¹As grafias Heron e Hero também costumam ser utilizadas.

²Uma demonstração da fórmula de Herão pode ser encontrada em A. MUNIZ NETO, **Geometria**, 2013; página 235.

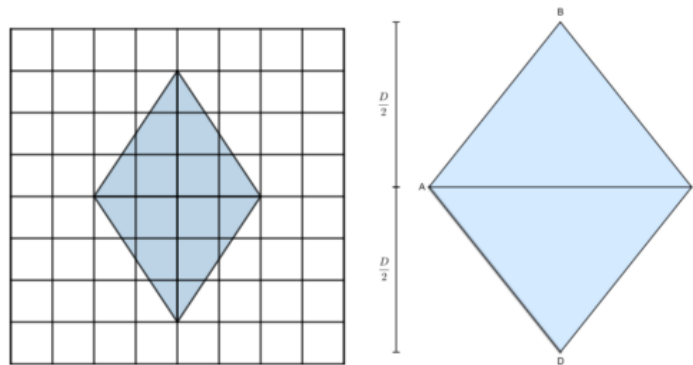


Figura 2.43: Losango

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

A área do losango é dada pela soma da áreas desses dois triângulos, que possuem a mesma base d e alturas $\frac{D}{2}$ iguais, ou seja, $A = \frac{d \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \frac{D}{2}}{2} = \frac{dD}{2}$. Logo, $A = \frac{dD}{2}$. E como o losango tem os 4 lados l iguais, o seu perímetro é dado por: $P = 4l$.

Já com o trapézio de base menor b , base maior B , altura h e lados não paralelos l_1 e l_2 (não necessariamente distintos). Para determinar a sua área é preciso decompor esse trapézio em um retângulo, que é formado utilizando os lados paralelos do trapézio, com um dos lados sendo a base menor b e o outro lado a altura h do trapézio, e formamos também nesse processo dois triângulos retângulos (um triângulo se for trapézio retângulo), com a altura dos triângulos sendo a altura do trapézio h e a base dos triângulos sendo medidas a e c tais que $B = a + b + c$.

Fazendo o somatório das áreas desses polígonos encontramos a área do trapézio.

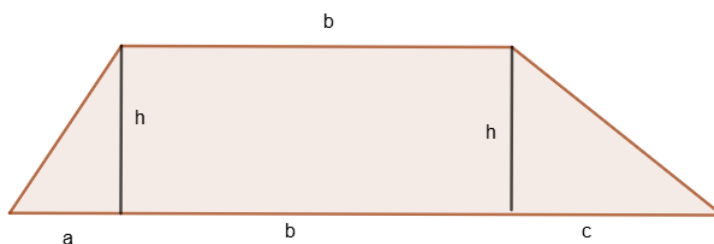


Figura 2.44: Trapézio

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Observe, na imagem acima, que a área do primeiro triângulo é $A_1 = \frac{ah}{2}$, do segundo triângulo é $A_2 = \frac{ch}{2}$, a área do retângulo é dada por $A_3 = bh$. Assim, a área do trapézio é dada por:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{ah}{2} + \frac{ch}{2} + bh = \frac{h(a + b + c + b)}{2} = \frac{h(B + b)}{2}$$

Concluimos que a área de um trapézio é dado por: $A = \frac{h(B+b)}{2}$. Já o perímetro do trapézio é dado por: $P = B + b + l_1 + l_2$.

Para o caso de um polígono regular de n lados de medida l , o seu perímetro é dado por: $P = nl$. Já para a área do polígono regular, podemos utilizar o apótema para determinar a sua área. O **apótema** a é um segmento de reta que parte do centro (ponto equidistante dos vértices) de um polígono regular e forma um ângulo reto (é perpendicular) com um dos seus lados. De outra maneira, podemos dizer que o apótema é a distância do centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados.

Quando selecionamos o centro do polígono regular de n lados, formando segmentos de reta entre o centro do polígono regular e seus vértices, dividimos o polígono em n triângulos de base l e a altura de cada um dos triângulos é o apótema a do polígono regular.

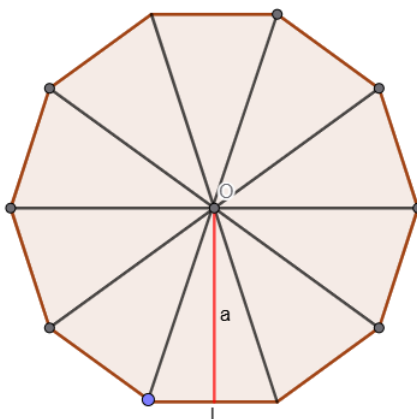


Figura 2.45: Polígono Regular dividido em triângulos e sua apótema

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

A área de cada um dos triângulos é igual e dada por $\frac{la}{2}$, logo, somando a área dos n triângulos formados, obtemos $A = \frac{nla}{2}$. Mas como o semiperímetro do polígono regular é $p = \frac{nl}{2}$, concluimos que a fórmula da área de um polígono regular é: $A = pa$.

Para calcular a área de outros polígonos, não regulares, repete-se o método utilizado com o trapézio, isto é, dividir o polígono original em polígonos mais simples com áreas conhecidas, como triângulos, quadrados ou retângulos, e por conseguinte, somar todas as áreas parciais determinadas para obter a área total do polígono.

Os processos descritos acima tornam as fórmulas obtidas válidas para números inteiros, contudo, é possível realizar a extensão desse método para os números racionais, e posteriormente, estender as mesmas fórmulas para números irracionais, tornando-as válidas para os números reais ³.

³Para esse processo na íntegra, veja A. MUNIZ NETO, **Geometria**, 2013; Capítulo 5.

Circunferência

Outra figura geométrica fundamental para a matemática é a circunferência, que é objeto de estudo desde os primórdios da matemática. A circunferência possui diversos resultados envolvendo-a ou baseados em suas propriedades, mas no presente trabalho seremos sucintos nos conceitos e resultados.

Euclides (2009, p. 97, tradução de Bicudo), em os Elementos, utilizou as seguintes definições para circunferência:

15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo (Euclides, 2009, p. 97 e 98).

De maneira moderna podemos definir:

Definição 2.24. (*Circunferência*) *O conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância, chamada de raio, de um ponto fixo, chamado de centro, é uma circunferência.*

Já o **Círculo** é a região do plano delimitada pela circunferência, incluindo todos os pontos internos a ela. Assim, a circunferência é apenas o contorno que delimita o círculo, enquanto o círculo é toda a região fechada pela circunferência.

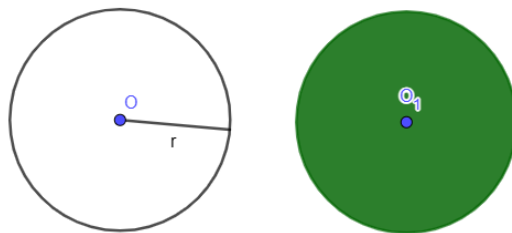


Figura 2.46: Circunferência e Círculo, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Destacamos os seguintes elementos da circunferência:

- Centro O é o ponto fixo de onde se medem as distâncias. Raio r é o segmento que liga o centro a um ponto da circunferência.

- Diâmetro d é o segmento que passa pelo centro e liga dois pontos opostos da circunferência, sendo o dobro do raio, $d = 2r$.
- Chamamos a medida da linha que forma a circunferência de comprimento da circunferência C , ou seja, o comprimento da circunferência é a medida do seu contorno.
- Corda é o segmento que liga dois pontos quaisquer da circunferência.
- Arco é a parte da circunferência delimitada por dois pontos.
- Setor circular é a região do círculo limitada por dois raios e o arco correspondente.
- Segmento circular é a região do círculo limitada por uma corda e o arco correspondente.

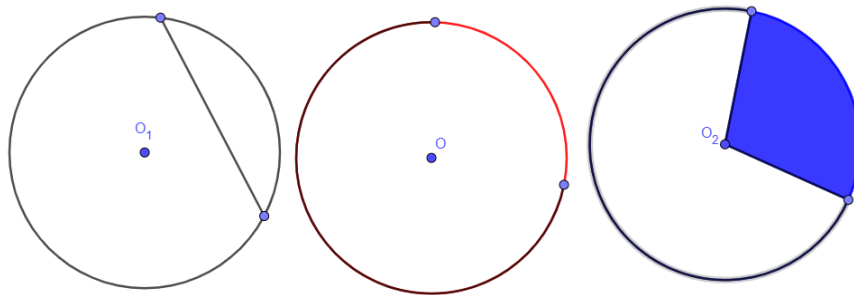


Figura 2.47: Corda, Arco e Setor circular, respectivamente

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Temos algumas posições relativas entre retas e circunferência que são importantes na geometria. Uma reta pode ter três posições em relação a uma circunferência:

Secante quando a reta corta a circunferência em dois pontos. Neste caso, a distância entre o centro da circunferência e a reta é menor que o raio da circunferência.

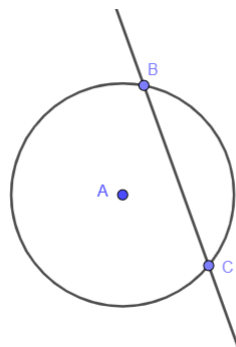


Figura 2.48: Reta Secante

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Tangente quando a reta toca a circunferência em um único ponto. Neste caso, a distância entre o centro da circunferência e a reta é igual ao raio da circunferência.

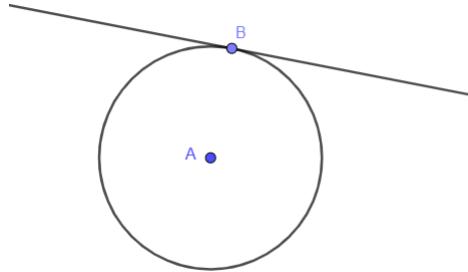


Figura 2.49: Reta Tangente
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um resultado geométrico fundamental afirma que a tangente a uma circunferência é sempre perpendicular ao raio que passa pelo ponto de tangência.

Externa quando a reta não tem pontos em comum com a circunferência. Neste caso, a distância entre o centro da circunferência e a reta é maior do que o raio da circunferência.

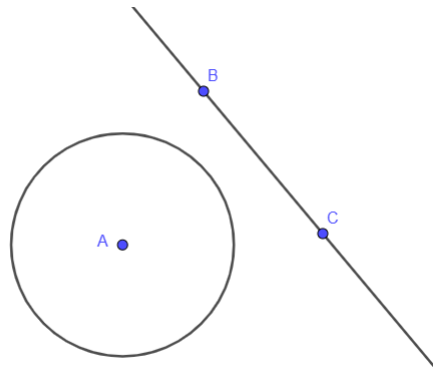


Figura 2.50: Reta Externa
Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Um polígono é dito **inscrito** numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem à circunferência. Por outro lado, um polígono é **circunscrito** a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à circunferência. Todo polígono regular pode ser inscrito e circunscrito em uma circunferência, além disso, as circunferências que inscrevem e circunscvem um polígono regular possuem o mesmo centro.

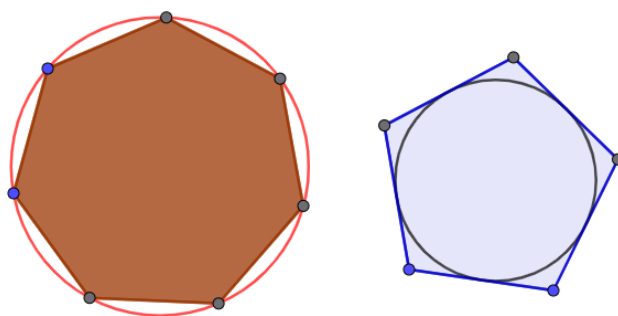


Figura 2.51: Polígonos inscrito e circunscrito na circunferência, respectivamente
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Uma das propriedades mais fantásticas da circunferência é a definição da famosa **constante** π , que definimos como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, ou seja, $\pi = \frac{C}{d}$.

Da fórmula $\pi = \frac{C}{d}$ e sabendo que $d = 2r$, obtemos a fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$.

Podemos aproximar os valores do π através da inscrição de polígonos regulares de n lados na circunferência. Assim, dividimos o perímetro do polígono com o diâmetro da circunferência, obtendo aproximações dessa constante. Obviamente, quanto maior a quantidade de lados do polígono regular, mais precisa se torna a aproximação de π .

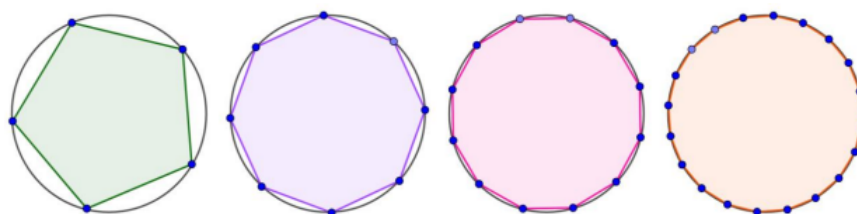


Figura 2.52: Polígonos inscritos, aproximando-se da circunferência com o aumento dos lados
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Ao inscrever um polígono numa circunferência de raio r é possível dividir esse polígono em vários setores circulares, todos congruentes, e a área de cada setor circular se aproxima da área de um triângulo, com altura sendo o raio r e a base sendo a corda que une os dois pontos de delimitam o arco formado na divisão dos triângulos.

Obviamente, quanto maior a quantidade de lados do polígono inscrito, maior a quantidade de setores circulares formados e mais esses setores circulares se aproximarão de triângulos, já que a corda se aproximará mais do arco formado.

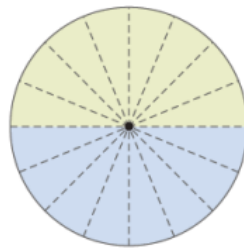


Figura 2.53: Circunferência repartida em setores circulares

Fonte: Giovanni e Castrucci, 2018, p.257

Assim, se reagruparmos adequadamente esses setores circulares, obtemos a aproximação de um paralelogramo.

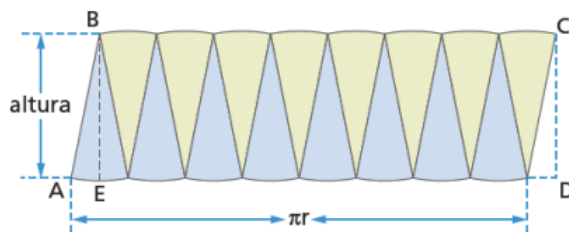


Figura 2.54: Paralelogramo formado pelos setores circulares

Fonte: Giovanni e Castrucci, 2018, p.257

Tendendo a quantidade de lados do polígono regular ao infinito, a quantidade de setores circulares tenderá ao infinito, conseqüentemente, a corda e o arco formados tendem a se coincidirem, ou seja, a aproximação do paralelogramo formado inicialmente tenderá, de fato, a um paralelogramo onde pelo menos um dos lados é de medida irracional.

Esse paralelogramo formado possui altura igual a r e base igual a $\frac{C}{2} = \pi r$. Além disso, pela construção realizada, a área desse paralelogramo é igual à área da circunferência, ou seja, $A = bh = \pi r r = \pi r^2$, logo, a fórmula da área da circunferência é $A = \pi r^2$.

Teoremas Fundamentais: Tales e Pitágoras

Dois dos teoremas mais simbólicos e fundamentais da geometria plana são o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras. Ambos os teoremas são resultados bastante utilizados na educação básica, obviamente, devido a sua importância matemática.

O Teorema de Tales remonta ao matemático grego Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.), considerado um dos primeiros a sistematizar conhecimentos matemáticos de forma dedutiva. Ainda que não existam registros escritos do próprio Tales, sua contribuição foi preservada por autores posteriores, como Aristóteles e Proclo, que destacaram

seu papel pioneiro na transição do pensamento prático para o matemático abstrato.

Já o Teorema de Pitágoras é associado a Pitágoras de Samos (570 a.C. – 495 a.C.) e à escola pitagórica, que via na matemática não apenas uma ciência, mas também uma forma de compreender a harmonia do universo. Embora, como constatado no primeiro capítulo, indícios históricos mostrem que outrass antigas civilizações já utilizavam relações semelhantes muito antes de Pitágoras, foi a tradição grega que lhe conferiu o caráter de teorema demonstrado.

A importância desses teoremas atravessou séculos, tornando-se um dos pilares da geometria euclidiana e influenciando o desenvolvimento da matemática ocidental. A seguir serão enunciados e demonstrados esses teoremas.

Teorema 2.25. (*Teorema de Tales*) *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois pares ordenados de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

De maneira mais informal, o teorema de Tales afirma que se duas retas são cortadas por retas paralelas, então, os segmentos determinados sobre uma delas são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.

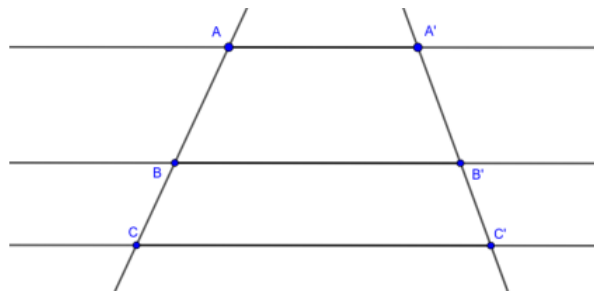


Figura 2.55: Retas transversais intersectando retas paralelas

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Para demonstrar o teorema de Tales, utilizaremos a proposição a seguir:

Proposição 2.26. *Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 as respectivas áreas dos triângulos ABC e A'B'C', tais que os triângulos ABC e A'B'C' têm altura de mesma medida h , relativa às bases BC e B'C', de comprimentos a e b , respectivamente. A área A_1 é dada por $A_1 = \frac{ah}{2}$ e a área A_2 é

dada por $A_2 = \frac{bh}{2}$, logo, dividindo A_1 por A_2 , obtemos

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2}} = \frac{a}{b}$$

□

Uma consequência dessa proposição é o fato de que dois triângulos com as medidas da base e altura iguais, possuem áreas iguais.

Seguimos para a demonstração do teorema de Tales.

Demonstração do Teorema de Tales. Sejam r , s e t retas paralelas entre si, m e n retas transversais tais que m intersecta r , s e t nos pontos A , B e C , respectivamente, e n intersecta r , s e t nos pontos A' , B' e C' , respectivamente. Determinam-se os segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ e $\overline{C'B}$.

Sejam A_1 , A_2 , A_3 e A_4 as áreas dos triângulos formado pelos vértices A, B, B' ; A', B, B' ; B, C, B' e B, B', C' . Como r é paralelo a s , os triângulos ABB' e $A'BB'$ possuem a mesma altura, além disso, o segmento $\overline{BB'}$ é a base comum entre esses triângulos. Logo, a área do triângulo ABB' é igual à área do triângulo $A'BB'$. Analogamente, concluímos que a área do triângulo BCB' é igual à área do triângulo $BB'C'$.

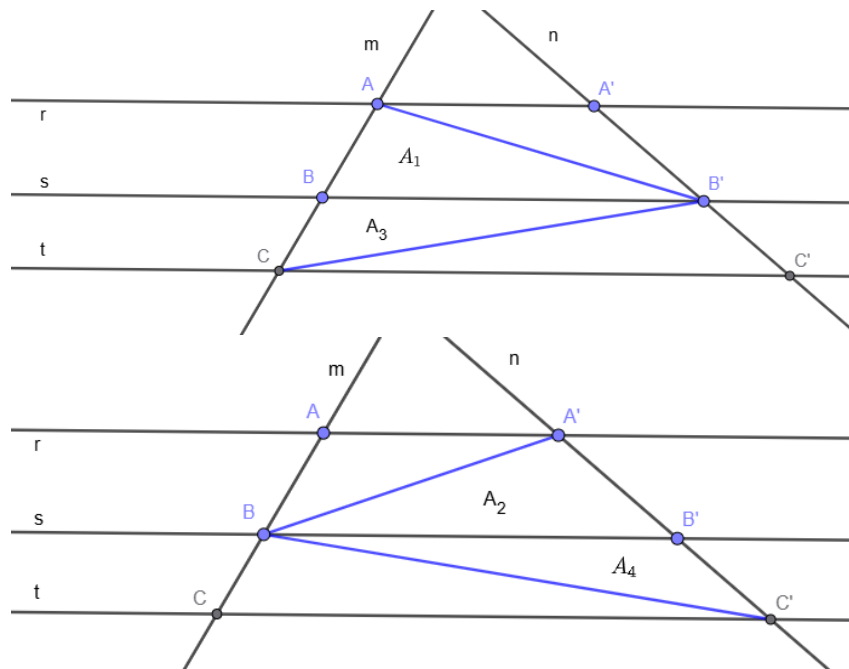


Figura 2.56: Demonstração do Teorema de Tales: parte 1

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Logo, temos que $A_1 = A_2$ e $A_3 = A_4$. Dividindo a primeira igualdade pela segunda, obtemos $\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}$.

Formando de B' um segmento perpendicular ao segmento \overline{AC} , obtemos a altura $\overline{B'H}$ do triângulo ABB' , por conseguinte, nota-se que essa altura é também a altura do triângulo BCB' . Analogamente, formando de B um segmento perpendicular ao segmento $\overline{A'C'}$, obtemos a altura $\overline{BH'}$, que é a altura do triângulo $A'BB'$ e do triângulo $B'BC'$.

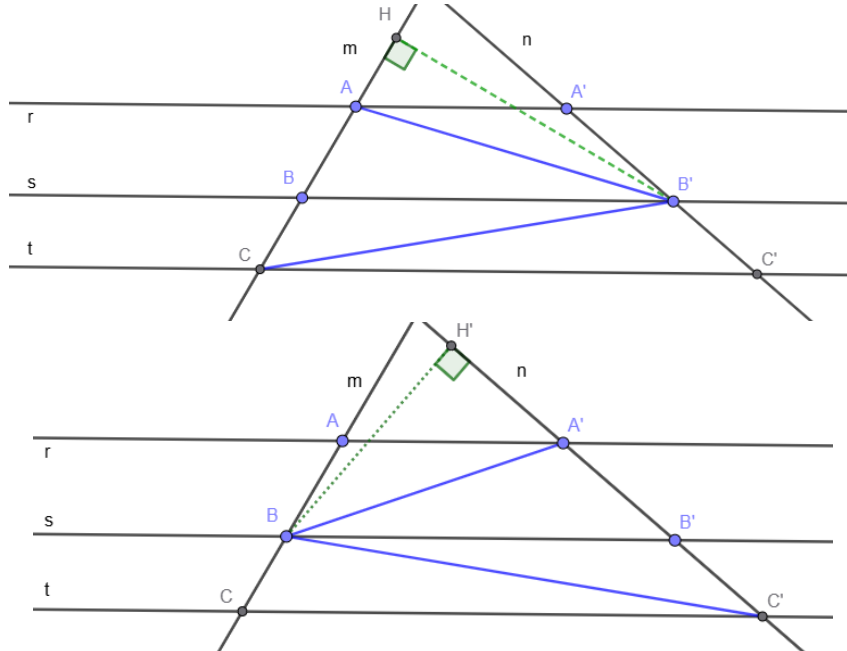


Figura 2.57: Demonstração do Teorema de Tales: parte 2

Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

Portanto, pela Proposição acima, como os dois triângulos têm a mesma altura, a razão entre as áreas dos triângulos é igual à razão entre as suas bases, isto é, $\frac{A_1}{A_3} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ e $\frac{A_2}{A_4} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Logo, concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

□

Um resultado igualmente importante ao teorema de Tales é a sua recíproca, apesar de ser pouco utilizada na educação básica. Enunciaremos a recíproca do teorema de Tales, mas não a demonstraremos, apenas indicaremos a referência para a demonstração.

Teorema 2.27. (Recíproca do Teorema de Tales) Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, então, a reta formada pelos pontos B e B' é paralela às retas formadas pelos pontos A e A' e pelos pontos C e C' , que são também paralelas entre si.⁴

O teorema de Tales possui aplicações em diversas situações (Silva, 2024):

⁴A demonstração é encontrada em A. MUNIZ NETO, **Geometria**, 2013; Corolário 4.4, p. 125.

- Escalas de Mapas: quando é feito um mapa, a distância real entre duas cidades é representada de forma proporcional no papel e o teorema de Tales justifica a relação entre a distância no mapa e a distância real.
- Medição de alturas: é possível calcular a altura de árvores, postes ou prédios apenas usando semelhança de triângulos, normalmente com o caso Ângulo-Ângulo (AA), os quais são derivados do teorema de Tales.
- Arquitetura e Engenharia: o teorema de Tales garante que estruturas estejam proporcionais e paralelas e auxilia no alinhamento de muros, janelas e colunas.
- Fotografia e Desenho: técnicas de perspectiva no desenho artístico usam o teorema de Tales, fazendo objetos mais distantes parecerem menores, mas mantendo a proporção em relação aos objetos mais próximos.

O próximo teorema é o famoso teorema de Pitágoras.

Teorema 2.28. (*Teorema de Pitágoras*) *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa c é igual à soma dos quadrados dos catetos a e b , isto é, $a^2 + b^2 = c^2$.*

O clássico livro *The Pythagorean Proposition* de E. Loomis, apresenta 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. Para demonstrar esse teorema no presente trabalho, selecionamos a demonstração apresentada por Garfield (Loomis, 1968).

Demonstração do Teorema de Pitágoras. Dados dois triângulos congruentes ABC e EDC, tal que os pontos B, C e D são colineares e os triângulos retângulos em B e D, respectivamente, com catetos a , b e hipotenusa c , e ângulos α e β , marcamos o segmento \overline{AE} formando um triângulo ACE isósceles e um trapézio ABDE, de base maior b , base menor a e altura $a+b$; conforme imagem a seguir.

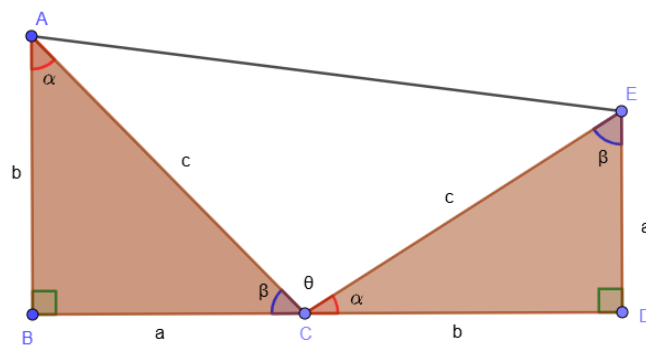


Figura 2.58: Demonstração do teorema de Pitágoras
Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Seja o ângulos θ do triângulo isósceles, observamos que $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ e como $\alpha + \beta = 90^\circ$, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos que $\theta = 90^\circ$ e o triângulo isósceles ACE é retângulo de catetos c .

A área desse trapézio é dada por:

$$A = \frac{(b+a)(a+b)}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

Mas a área do trapézio também é dada pela soma da área dos três triângulos que o formam, e como são triângulos retângulos, a sua base e altura é dada por seus catetos. Logo,

$$A = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

Portanto, das expressões das áreas A , temos que

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \implies a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2$$

Assim, concluímos que $a^2 + b^2 = c^2$. □

O teorema de Pitágoras também possui a sua recíproca, como também, é menos utilizada na educação básica e quando utilizada é geralmente de maneira indireta. Aqui será enunciado a recíproca do teorema de Pitágoras, mas não demonstrada, apenas indicado a referência para a demonstração.

Teorema 2.29. *(Recíproca do teorema de Pitágoras) Seja um triângulo de lados medindo a , b e c . Se $a^2 + b^2 = c^2$, então, o triângulo é um triângulo retângulo em c .*⁵

O teorema de Pitágoras também possui aplicações em diversas situações (Magalhães, 2023):

- Engenharia e arquitetura: o teorema de Pitágoras é utilizado para garantir ângulos retos em obras e também para calcular rampas e inclinações.
- Medição de alturas: também é possível medir a altura de árvores, prédios ou torres com o teorema de Pitágoras, utilizando a sombra do objeto.
- Navegação e distâncias: quando não é possível medir uma distância em linha reta, o teorema de Pitágoras é utilizado para determinar essa medida. A própria determinação da distância de dois pontos deriva do teorema de Pitágoras.

⁵A demonstração é encontrada em A. MUNIZ NETO, **Geometria**, 2013; Proposição 4.13, p. 135.

- Astronomia e satélites: para calcular a distância entre corpos celestes ou encontrar trajetórias e posicionamento de satélites em órbita, o teorema de Pitágoras é útil pela determinação da distância entre pontos.

Capítulo 3

Metodologias Ativas e Softwares Educativos

As metodologias ativas são abordagens pedagógicas que colocam o estudante como protagonista do processo de aprendizagem, incentivando sua participação, autonomia e reflexão crítica. Quando combinadas com softwares educativos, essas metodologias se tornam ainda mais significativas, pois utilizam a tecnologia como recurso mediador, ampliando as possibilidades de interação, exploração e construção do conhecimento. Moran (2015, p. 27) reforça que “as metodologias ativas favorecem a participação dos estudantes em atividades que exigem reflexão, tomada de decisão, solução de problemas e criação de produtos, com ou sem mediação tecnológica.”

O uso de tecnologias digitais, programas ou softwares, está em conformidade com uma das competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde diz:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BNCC, 2017, p. 9).

No contexto digital, os softwares educativos possibilitam experiências de aprendizagem interativas e personalizadas, alinhadas a metodologias como a *aprendizagem baseada em problemas*, onde o aluno é desafiado a resolver problemas reais ou simulados, utilizando os recursos digitais, como GeoGebra ou o canva, como apoio visual e experimental na resolução dos problemas. Onuchic e Allevato (2011, p. 35) reforçam que “o trabalho com problemas, especialmente quando apoiado por recursos tecnológicos, contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia do aluno.”

Outra metodologia ativa que é amplamente apoiada por recursos tecnológicos é a *aprendizagem por projetos*, onde os estudantes desenvolvem projetos que envolvem

pesquisa, planejamento e apresentação de resultados. Os softwares de simulação, como PhET, e de criação, como Scratch, tornam-se aliados nesse processo. Esta metodologia pode ser utilizada simultaneamente ou separadamente com a *sala de aula invertida*, onde o conteúdo teórico é explorado em casa, com vídeos, simulações e softwares educativos, e o tempo em sala de aula é dedicado à resolução de dúvidas e problemas. Schneiders (2018, p. 22) ainda enfatizam que “a sala de aula invertida libera tempo para atividades mais significativas em classe, como experimentação, investigação e colaboração.”

Por fim, uma metodologia ativa que está sendo bastante utilizada na educação básica é a *gamificação*, onde o uso de softwares que aplicam dinâmicas de jogos (pontuação, desafios e rankings) estimula a motivação e o engajamento. Os softwares como Kahoot e Quizizz são exemplos muito utilizados (Alves, Minho e Diniz, 2014).

Sousa, Santiago e Alves (2022, p. 34-35) destacam “a importância do desenvolvimento de competências e habilidades geométricas, a partir da visualização, da argumentação e formulação de hipóteses lógicas e da compreensão de figuras geométricas.” Portanto, podemos notar que o uso das metodologias ativas alinhado com os softwares educacionais fornece vários benefícios educacionais, como permitir maior engajamento dos alunos, que participam ativamente em ambientes digitais atrativos; aprendizagem personalizada, pois o aluno pode avançar no seu próprio ritmo; integração teoria e prática, já que softwares simulam situações reais e permitem a experimentação; desenvolvimento de competências digitais, essenciais no século XXI.

Resolução de Problemas

Entre todas as metodologias existentes, considerando o desenvolvimento geométrico dos alunos e principalmente com o auxílio dos recursos digitais, o método de resolução de problemas é uma das estratégias de ensino mais bem sucedidas e interessantes que podemos considerar, pois coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem, propondo situações desafiadoras para que ele investigue, formule hipóteses, teste soluções e reflita sobre os resultados.

O método de resolução de problemas é uma metodologia que transforma o ensino em um processo investigativo, reflexivo e ativo. A ideia central é que aprender matemática significa resolver problemas e compreender os conceitos a partir deles, em vez de apenas memorizar regras e fórmulas.

George Pólya é considerado o principal teórico, com a obra: *A Arte de Resolver Problemas*, de 1945, que sistematizou etapas para o processo de resolução. Pólya (1978, p. 15) destaca que “resolver um problema significa encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, encontrar um meio para chegar a um objetivo que não é imediatamente

atingível.”

Pólya, em *a arte de resolver problemas*, propôs quatro etapas fundamentais para a resolução de problemas matemáticos:

- **Compreensão do problema:** identificar os dados, a incógnita e as condições.
- **Elaboração de um plano:** escolher uma estratégia ou método de ataque, seja por desenho, analogia, equações.
- **Execução do plano:** colocar em prática o raciocínio escolhido, passo a passo.
- **Revisão da solução:** verificar se a resposta obtida é coerente, se há outro caminho mais simples ou se o resultado pode ser generalizado.

Enfatizamos que essa metodologia, utilizada para resolver desde problemas simples até os mais complexos, favorece o pensamento crítico e criativo, pois estimula o aluno a buscar estratégias próprias; desenvolve autonomia no estudo, já que o estudante deixa de ser apenas receptor e passa a ser agente ativo; conecta a matemática à realidade, por meio de problemas contextualizados e significativos; integra conceitos matemáticos, pois muitos problemas exigem a articulação de diferentes conteúdos.

Dante (1991, p. 20) intensifica que “resolver problemas é o ponto de partida e de chegada da atividade matemática; é a razão de ser da Matemática, seu objetivo maior.” Por esse motivo a metodologia de resolver problemas não se torna ultrapassada e tem se provado fundamental para o desenvolvimento matemático, principalmente nos tempos modernos, com a utilização dos recursos tecnológicos e digitais para potencializar o ensino e aprendizagem.

Apresentação do GeoGebra

Uma das ferramentas que podemos utilizar como recurso para abordagem de conteúdos geométricos é o software matemático chamado GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg. O GeoGebra é um software dinâmico que combina elementos de geometria, álgebra, estatística e cálculo em um único ambiente interativo, gratuito e multiplataforma, funciona em computadores, tablets e celulares.

Muitos conceitos geométricos são difíceis de compreender apenas com explicações verbais ou desenhos estáticos no quadro. O GeoGebra permite que o aluno explore figuras de forma dinâmica, observando propriedades invariantes, como ângulos, paralelismo e simetria. O estudante pode experimentar hipóteses, manipular construções e

verificar resultados, o que favorece a aprendizagem investigativa, desenvolvendo raciocínio lógico e científico.

Outro benefício de utilizar o GeoGebra para resolver problemas geométricos é que as atividades que demandariam tempo com régua e compasso podem ser feitas com maior agilidade e precisão no software, liberando espaço para discutir conceitos mais profundos. Como o GeoGebra conecta álgebra e geometria, é possível explorar problemas que envolvem funções, equações e transformações geométricas, mostrando ao aluno a interligação entre diferentes ramos da matemática.

O GeoGebra é uma plataforma muito completa e suas ferramentas variam um pouco dependendo da versão, Clássico 5, Clássico 6, ou os apps separados: Geometria, Gráficos ou 3D. Mas no módulo de geometria, que é o mais usado no ensino, as ferramentas podem ser organizadas em grupos. Apresentamos a seguir as principais ferramentas do GeoGebra clássico, versão online, para o uso geométrico:

1. **Ferramentas de Ponto:** são a base para qualquer construção geométrica, simulando o papel do compasso e régua.

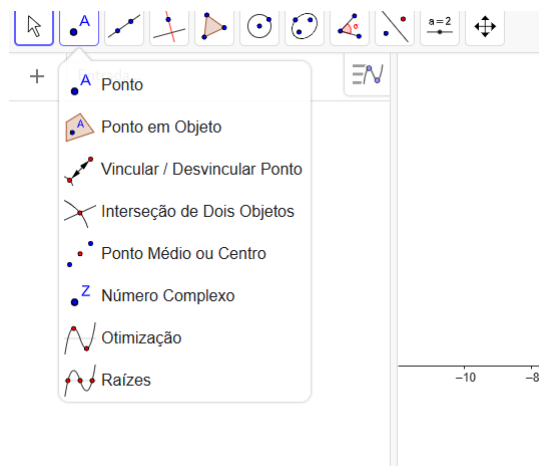


Figura 3.1: Ferramenta de Ponto

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

- Ponto: cria um ponto em qualquer lugar do plano.
- Ponto em objeto: coloca o ponto restrito a uma reta, segmento, circunferência, etc.
- Interseção de dois objetos: cria o ponto de interseção entre retas, circunferências ou outros objetos.
- Ponto médio ou centro: gera o ponto central de um segmento, polígono ou círculo.

- Números complexos: possibilita representar e manipular números reais e complexos no plano complexo.
- Otimização: é utilizada para determinar valores máximos ou mínimos de funções ou expressões algébricas.
- Raízes: permite calcular e representar raízes quadradas, cúbicas, entre outras, de números ou expressões algébricas.

2. **Ferramentas de Reta:** para construções clássicas da geometria euclidiana.

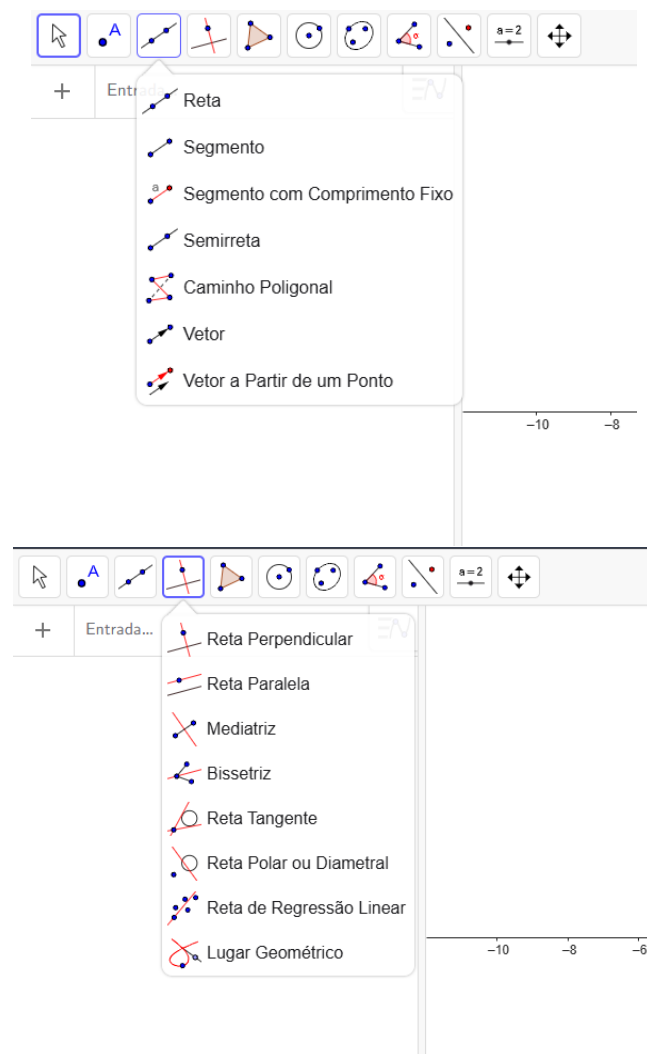


Figura 3.2: Ferramentas de Reta
 Fonte: Arquivo Pessoal da autora, 2025

- Reta: constrói uma reta passando por dois pontos.
- Segmento: constrói um segmento definido por dois pontos.
- Segmento com comprimento fixo: cria um segmento a partir de um ponto inicial com medida exata dada.

- Semirreta: cria uma semirreta com origem em um ponto e direção de outro.
- Caminho poligonal: permite criar uma sequência de segmentos de reta ligados consecutivamente, formando uma linha poligonal aberta ou fechada.
- Vetor: possibilita representar vetores no plano ou no espaço.
- Vetor a partir de um ponto: permite construir um vetor com direção, sentido e comprimento definidos, tendo como origem um ponto escolhido.
- Reta perpendicular: constrói a reta perpendicular à outra por um ponto dado.
- Reta paralela: constrói uma reta paralela a outra passando por um ponto.
- Mediatriz: cria a mediatriz de um segmento.
- Bissetriz de ângulo: constrói a bissetriz de um ângulo dado.
- Reta Tangente: cria a reta tangente à circunferência ou curva em um ponto.
- Reta polar ou diametral: constrói, em relação a uma circunferência, a reta polar de um ponto externo ou a reta diametral associada a um ponto da circunferência.
- Reta em regressão linear: ajusta uma reta a um conjunto de pontos a partir do método dos mínimos quadrados.
- Lugar geométrico: permite determinar e visualizar o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma determinada condição ou dependência geométrica.

3. Ferramentas de Polígonos: propriedades de polígonos.

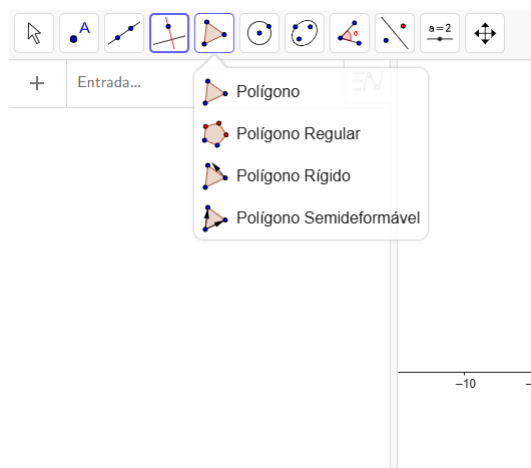


Figura 3.3: Ferramentas de Polígonos

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

- Polígono: cria polígonos ao selecionar pontos consecutivos.
- Polígono regular: constrói polígonos regulares (ex.: hexágono, pentágono) a partir de dois pontos e número de lados.

- Polígono rígido: cria um polígono que pode ser movimentado mantendo forma e tamanho.
- Polígono semideformável: permite construir um polígono cujos vértices podem ser movimentados, mantendo certas propriedades geométricas, como paralelismo ou alinhamento de lados.

4. **Ferramentas de Circunferência:** explorar relações métricas, arcos, ângulos, áreas circulares e cônicas.

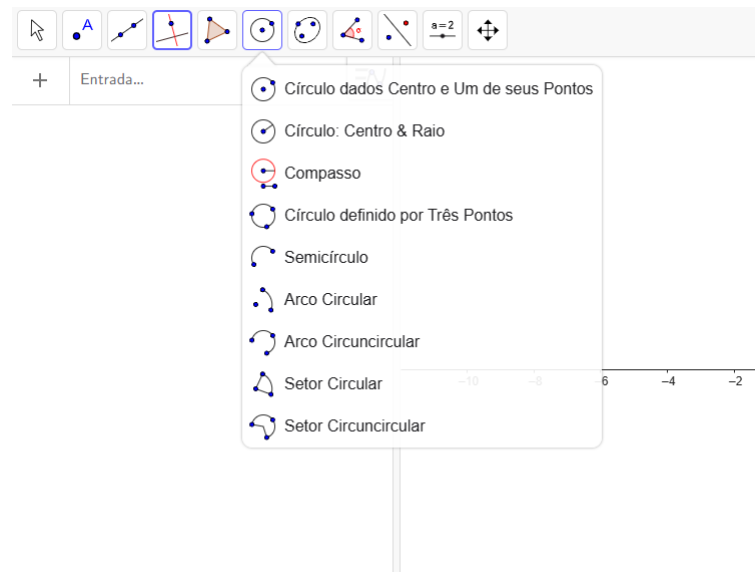


Figura 3.4: Ferramentas de Circunferência

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

- Circunferência dado centro e um dos seus pontos: cria uma circunferência a partir do ponto que será o centro e de um ponto pertencente à circunferência.
- Circunferência com centro e raio: cria uma circunferência a partir do ponto que será o centro e a medida do raio.
- Circunferência definido por três pontos: cria uma circunferência a partir de três pontos pertencentes à circunferência.
- Semicírculo: cria um semicírculo a partir de dois pontos.
- Arco de circunferência: cria um arco a partir do centro e dos pontos do extremo do arco.
- Setor circular: cria um setor circular a partir do centro e de dois pontos.
- Setor circuncircular: constrói a região limitada por dois raios e pelo arco correspondente de uma circunferência.

5. **Ferramentas de Medida:** relacionar construções geométricas com cálculos.

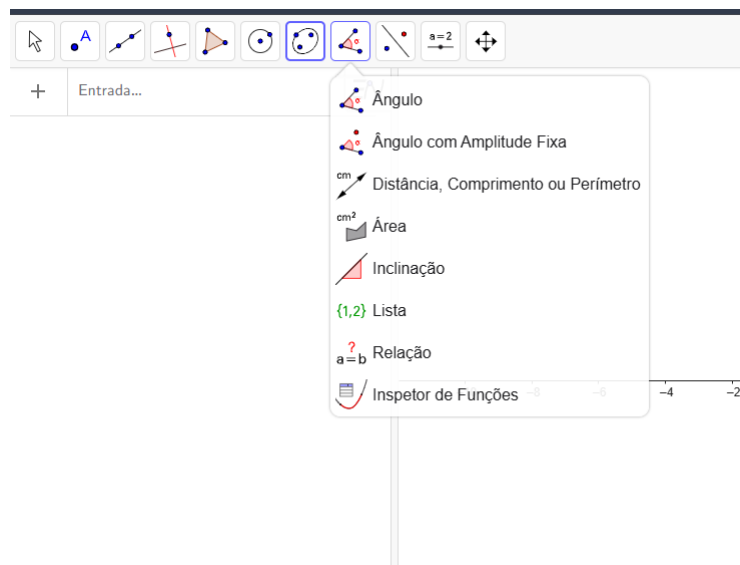


Figura 3.5: Ferramentas de Medida
Fonte: Arquivo Pessoal da autora

- **Ângulo:** mede ângulos entre retas ou pontos.
- **Ângulo com amplitude fixa:** mede ângulos com medida fixa dada.
- **Distância, comprimento ou perímetro:** determina essas medidas do elemento geométrico selecionado.
- **Área:** determina a área da região selecionada.
- **Inclinação:** mede a inclinação de uma reta em relação ao eixo.
- **Lista:** possibilita criar e manipular conjuntos de objetos, como números, pontos, funções ou outros elementos, facilitando a organização de dados e a realização de operações repetitivas.
- **Relação:** permite verificar e analisar relações matemáticas entre dois objetos, como igualdade, paralelismo, perpendicularidade ou pertencimento de propriedades geométricas e algébricas.
- **Inspecor de função:** é usado para analisar o comportamento de uma função, permitindo identificar intervalos de crescimento e decréscimo, máximos e mínimos, zeros, concavidade e outros aspectos importantes de funções.

6. **Ferramentas de Transformação:** estudar isometrias e transformações geométricas, fundamentais na geometria.

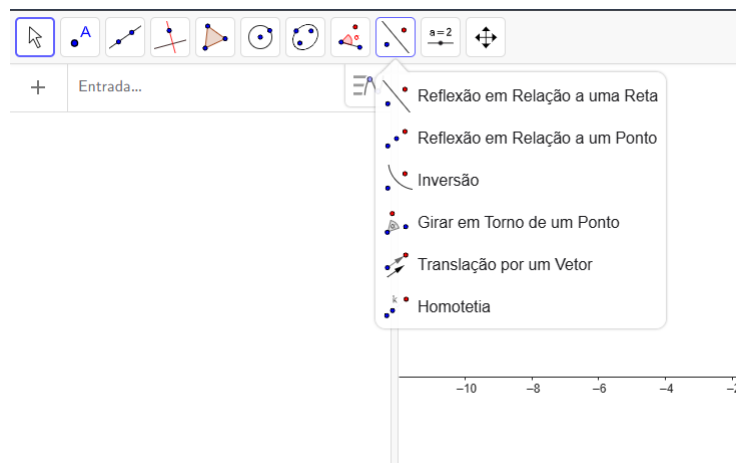


Figura 3.6: Ferramentas de Transformação

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

- Reflexão em torno de uma reta: cria a imagem de um objeto (ponto, reta, polígono, circunferência, etc.) em relação a uma reta dada, funcionando como um "espelho".
- Simetria em torno de um ponto: gera a imagem de um objeto em relação a um ponto fixo, como se fosse uma "rotação de 180°" em torno desse ponto.
- Girar em torno de um ponto: move um objeto ao redor de um ponto fixo, girando-o por um ângulo escolhido.
- Homotetia (dilatação ou redução em relação a um centro): amplia ou reduz um objeto em relação a um ponto fixo (o centro da homotetia), de acordo com um fator k . Se $k > 1$ ocorre dilatação; se $0 < k < 1$ ocorre redução; se $k < 0$ há também uma inversão em relação ao centro.

Exemplos de atividades

A seguir será apresentada uma lista com 10 questões, elaboradas pela própria autora, que é utilizada como exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas pelos alunos utilizando o GeoGebra. O objetivo consiste em resolver as questões usando o GeoGebra para construir as figuras e explorar as soluções geométricas. Cada questão envolve assuntos que devem ser previamente trabalhados em sala de aula.

Exemplo 3.1. *Construa um quadrado de lado 5 cm, trace as diagonais e encontre o ponto de interseção. Qual a distância do ponto de interseção aos vértices?*

Solução (Algébrica). Trace um segmento de reta de 5 cm com a régua, determine o ângulo de 90° com o transferidor e trace o outro segmento de reta de 5 cm, repita o processo até formar o quadrado. Trace as diagonais com a régua e determine o ponto de interseção das diagonais. Pode-se medir a distância do ponto de interseção aos vértices com a régua ou determinar algébricamente, sendo a medida da diagonal d dada pelo teorema de Pitágoras, resultando $d = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$. A distância da interseção das diagonais aos vértices é a metade da medida da diagonal, logo, $\frac{d}{2} \approx 3,54$.

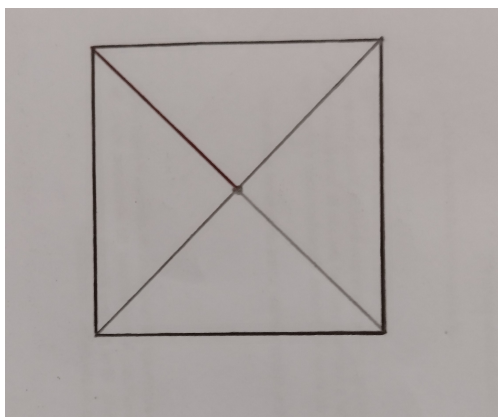


Figura 3.7: Exemplo 1 - Tradicional
Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Solução (Software). Inicialmente, no menu de ferramentas do GeoGebra, seleciona-se a opção “Polígono Regular”. Essa ferramenta permite construir polígonos com lados congruentes e ângulos internos iguais, assegurando que a figura obtida seja um quadrado perfeito.

Clica-se em um ponto do plano cartesiano para definir o primeiro vértice do quadrado. Em seguida, clica-se em um segundo ponto, que determina o comprimento do lado. Ao surgir a caixa de diálogo, insere-se o número 4, correspondente à quantidade de lados do polígono.

O GeoGebra gera automaticamente o quadrado, nomeando seus vértices, por exemplo, como A, B, C e D. Observa-se que os vértices A e C são opostos entre si, assim como os vértices B e D. Esses pares de vértices serão utilizados para traçar as diagonais do quadrado.

Seleciona-se a ferramenta “Segmento”. Traça-se o primeiro segmento ligando o vértice A ao vértice C, formando a primeira diagonal do quadrado. Em seguida, traça-se o segundo segmento ligando o vértice B ao vértice D, formando a segunda diagonal. As duas diagonais traçadas se cruzam em um único ponto. Esse ponto de interseção surge automaticamente no GeoGebra ou pode ser destacado com a ferramenta “Interseção”.

O ponto de interseção das diagonais é denominado ponto E . Esse ponto representa o centro geométrico do quadrado, pois as diagonais se cruzam em seus respectivos pontos médios, dividindo-se mutuamente em partes iguais.

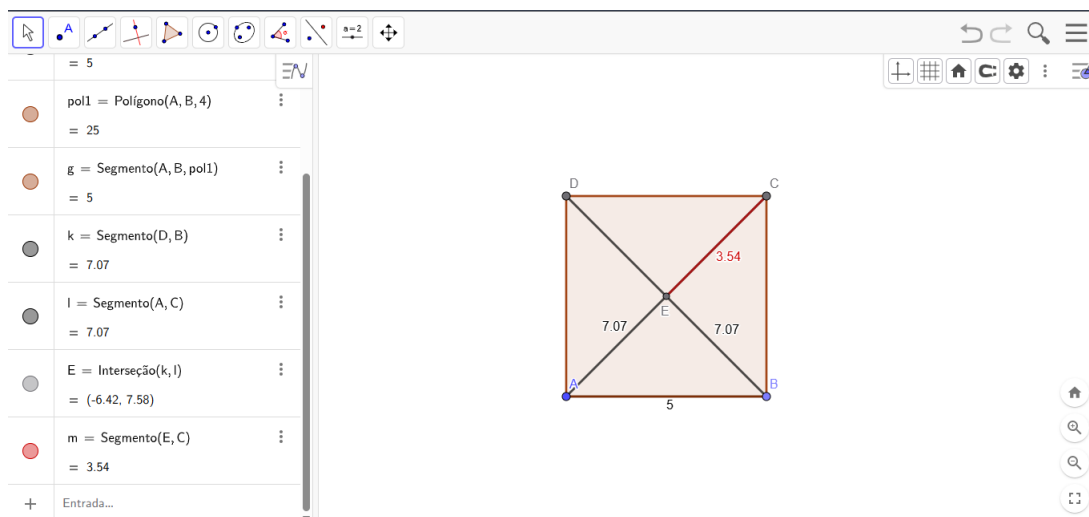


Figura 3.8: Exemplo 1 - GeoGebra
Fonte: Arquivo Pessoal da autora

A medida da distância do ponto de interseção e o vértice do quadrado é obtido traçando um segmento entre esses pontos, observando a janela de entrada no lado esquerdo da tela, ou ainda, clicando no botão direito do mouse sobre o segmento e selecionando a ferramenta “Configurações” e na opções “Mostrar Rótulos”, selecionar “Valor” para o valor da medida do segmento ser descrito ao seu lado.

A construção evidencia algumas propriedades fundamentais do quadrado: as diagonais são congruentes, cruzam-se perpendicularmente e intersectam-se exatamente no centro da figura; confirmando que o ponto E é equidistante de todos os vértices.

Exemplo 3.2. Desenhe uma circunferência de raio 4 cm e marque um ponto A na circunferência. Construa o ponto médio do segmento \overline{OA} e a mediatriz de \overline{OA} .

Solução (Algébrica). Com a régua trace um segmento de reta de 4 cm, que será o raio da circunferência, com o compasso tome essa medida e desenhe a circunferência. Determine o ponto A e observe que o segmento \overline{OA} é o raio da circunferência e o ponto médio é a metade o raio, 2 cm do centro O . Determine o ponto médio e com um transferidor obtenha um ângulo reto com o ponto médio como vértice. Trace uma reta perpendicular a partir do ângulo reto determinado. A reta traçada é a mediatriz de \overline{OA} .

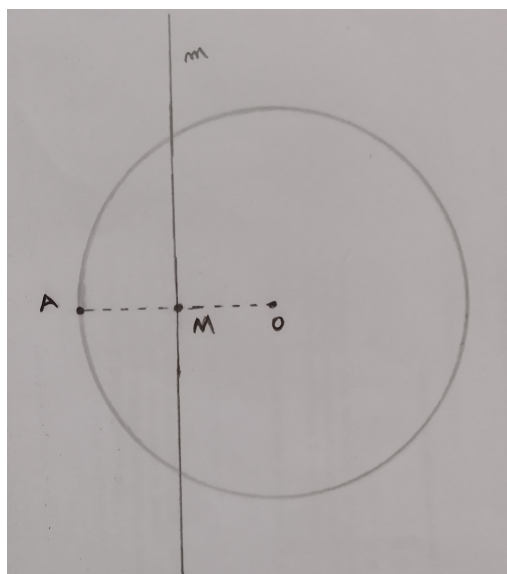


Figura 3.9: Exemplo 2 - Tradicional

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Solução (Software). *Inicialmente, no menu de ferramentas do GeoGebra, seleciona-se a opção “Circunferência dado Centro e Raio”, que permite construir uma circunferência a partir da definição direta de seu centro e de seu raio. Clica-se em um ponto qualquer do plano para definir o centro da circunferência, que é identificado como ponto O. Ao surgir a caixa de diálogo para a medida do raio, digita-se o valor 4 cm e confirma-se a operação. O GeoGebra desenha automaticamente a circunferência com centro em O e raio igual a 4 cm.*

Seleciona-se a ferramenta “Ponto”. Clica-se em qualquer posição sobre a circunferência para marcar o ponto A, garantindo que esse ponto pertença à circunferência construída. O segmento \overline{OA} liga o centro da circunferência O ao ponto A sobre a circunferência e possui comprimento igual ao raio, isto é, 4 cm. Para determinar o segmento \overline{OA} , utiliza-se a ferramenta “segmento” selecionando os pontos A e O, o segmento será traçado automaticamente.

Por conseguinte, no menu de ferramentas, escolhe-se a opção “Ponto Médio”. Com a ferramenta ativa, clica-se primeiro no ponto O e, em seguida, no ponto A. O GeoGebra constrói automaticamente um novo ponto, situado exatamente à mesma distância de O e de A. O ponto obtido é denominado M e corresponde ao ponto médio do segmento \overline{OA} .

Em seguida, seleciona-se a ferramenta “Reta Perpendicular”, utilizada para traçar uma reta que forma um ângulo de 90° com um segmento ou reta de referência. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” ativada, clica-se sobre o segmento \overline{OA} . Depois, clica-se no ponto M, determinando que a reta perpendicular deve passar por esse ponto.

O GeoGebra traça automaticamente a reta perpendicular ao segmento \overline{OA} passando por M .

A reta construída é a mediatriz do segmento \overline{OA} , pois é perpendicular a esse segmento e passa pelo seu ponto médio. Todo ponto pertencente à mediatriz de \overline{OA} está à mesma distância dos pontos O e A .

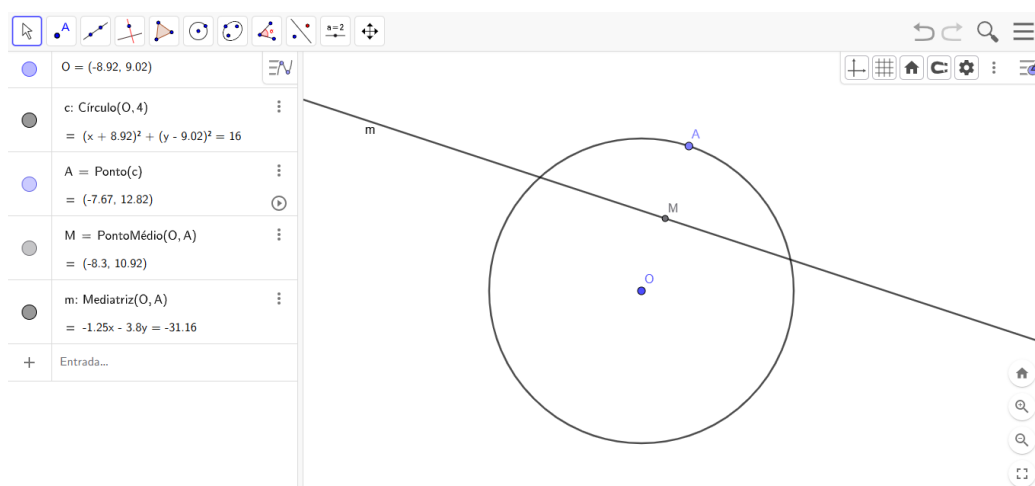


Figura 3.10: Exemplo 2 - GeoGebra

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Observamos na resolução dos exemplos acima que existe uma praticidade no uso do GeoGebra ou outros softwares similares na resolução dos problemas, podemos citar como benefícios:

- Rapidez na construção: enquanto com régua e compasso cada traçado exige tempo e cuidado, no software os comandos permitem construções geométricas quase instantâneas.
- Correção de erros: caso haja algum erro, basta um ajuste no ponto ou comando, não é necessário refazer toda a figura, como acontece no papel.
- Flexibilidade: é possível mover elementos (pontos, linhas, círculos) sem perder a precisão matemática da construção. Isso ajuda na exploração de propriedades dinâmicas da geometria.
- Visualização dinâmica: o estudante pode “arrastar” pontos e observar como as relações geométricas permanecem ou se modificam, compreendendo conceitos que seriam abstratos no papel.
- Exploração de conjecturas: o ambiente digital permite experimentar e testar hipóteses rapidamente, estimulando o raciocínio investigativo.

- Precisão matemática: elimina imprecisões comuns no uso manual de régua e compasso, evitando que falhas gráficas atrapalhem a compreensão teórica.

Também podemos citar o engajamento dos alunos, já que os softwares interativos costumam motivar mais os alunos, pois unem tecnologia e matemática em uma experiência mais lúdica. Além disso, a acessibilidade e economia de material é um fator relevante, como não há gasto com papel, régua e compasso, e os arquivos podem ser facilmente compartilhados em ambientes virtuais de aprendizagem e auxiliando na preservação do meio ambiente (Alves, 2017).

Obviamente, o uso tradicional de régua e compasso ainda tem valor didático, pois desenvolve coordenação motora, atenção aos detalhes e ajuda a compreender historicamente como a geometria foi construída. Porém, como constatado acima, no contexto atual, os softwares como o GeoGebra oferecem maior praticidade, interatividade e aplicabilidade em situações de ensino, pesquisa e até em contextos profissionais.

Para os próximos exemplos será apresentada apenas a solução com a utilização do software GeoGebra.

Exemplo 3.3. *Desenhe duas circunferências com centro A e B , mesmo raio 3 cm, que se cruzam. Trace o segmento pelos pontos de interseção das circunferências. Qual é a relação desse segmento formado pelos pontos de interseção com o segmento \overline{AB} ?*

Solução. *Inicialmente, no menu de ferramentas do GeoGebra, seleciona-se a opção “Círculo com centro e raio”. Essa ferramenta permite construir uma circunferência a partir da definição direta de seu centro e do valor do raio. Clica-se em um ponto qualquer do plano para definir o centro da primeira circunferência, que é identificado como A . Ao surgir a caixa de diálogo, insere-se o valor do raio igual a 3 cm e confirma-se a operação. O GeoGebra desenha automaticamente a circunferência com centro em A e raio 3 cm.*

Utilizando novamente a ferramenta “Círculo com centro e raio”, clica-se em outro ponto do plano para definir o centro da segunda circunferência, identificado como B . A posição do ponto B é escolhida de modo que a distância entre A e B seja menor que 6 cm, garantindo que as duas circunferências se intersectem em dois pontos distintos. Insere-se novamente, na caixa de diálogo, o valor do raio 3 cm.

Seleciona-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Clica-se sobre a circunferência de centro A e, em seguida, sobre a circunferência de centro B . O GeoGebra marca automaticamente os dois pontos de interseção entre as circunferências, que podem ser denominados por C e D .

Escolhe-se a ferramenta “Segmento”. Clica-se no ponto C e depois no ponto

D , criando o segmento \overline{CD} , que liga diretamente os dois pontos de interseção das circunferências. Para fins de comparação geométrica, traça-se também o segmento \overline{AB} utilizando a ferramenta “Segmento”, ligando os centros das duas circunferências.

Observando a construção, verifica-se que o segmento \overline{CD} é perpendicular ao segmento \overline{AB} , formando um ângulo reto entre eles. O ângulo é construído utilizando a ferramenta “Ângulo”, com a ferramenta ativada, seleciona-se os segmentos de reta que formarão o ângulo desejado. Além disso, o segmento \overline{CD} passa exatamente pelo ponto médio do segmento \overline{AB} , o que pode ser verificado obtendo o ponto médio do segmento \overline{AB} , através da ferramenta “Ponto Médio”, e observando que é exatamente o mesmo ponto de interseção do segmento \overline{AB} com o segmento \overline{CD} , o que pode ser verificado com a ferramenta “Interseção”, comparando as coordenadas, na janela à esquerda da tela, do ponto médio e do ponto de interseção. Pode-se também obter o ponto de interseção E dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} e traçar os segmentos \overline{AE} e \overline{EB} , obtendo as medidas desses segmentos e verificando que são medidas iguais.

A justificativa da relação observada consiste nas duas circunferências possuírem o mesmo raio, assim cada ponto de interseção está à mesma distância de A e de B . Portanto, os pontos C e D pertencem à mediatriz do segmento \overline{AB} . O segmento \overline{CD} , ao ligar esses dois pontos, coincide com parte dessa mediatriz.

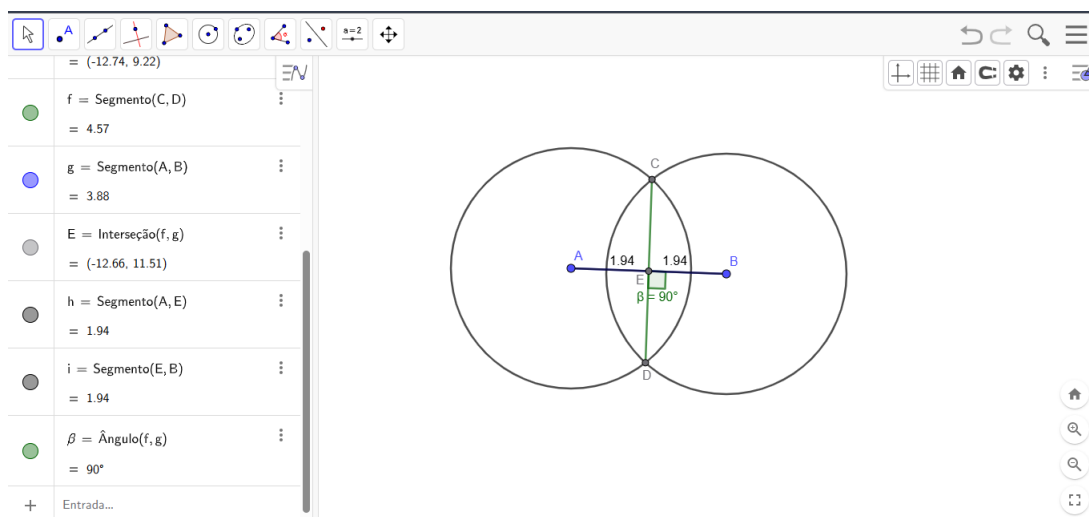


Figura 3.11: Exemplo 3

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.4. Em um triângulo obtusângulo e escaleno, trace a altura relativa à base. Determine o valor da altura.

Solução. Inicialmente, constrói-se um triângulo qualquer no plano utilizando a ferramenta “Polígono” ou “Segmento”, marcando três pontos não colineares A , B e C . Em seguida, ligam-se esses pontos formando o triângulo ABC .

Seleciona-se a ferramenta “Distância, comprimento”. Mede-se o comprimento de cada lado do triângulo, isto é, o comprimento dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . Compara-se os valores obtidos e verifica-se que os três comprimentos são distintos entre si, confirmando que o triângulo é escaleno, se necessário, seleciona-se um dos vértices do triângulo e desloca-o para modificar as medidas dos lados.

Seleciona-se a ferramenta “Ângulo”. Mede-se cada um dos ângulos internos do triângulo. Observa-se que um dos ângulos apresenta medida maior que 90° , caracterizando o triângulo como obtusângulo, se necessário, seleciona-se um dos vértices do triângulo e desloca-o para modificar a medida do ângulo.

Escolhe-se um dos lados do triângulo como base, por exemplo, o segmento \overline{BC} . Essa escolha é fundamental para determinar a altura relativa a esse lado. Caso a projeção da altura não caia diretamente sobre o segmento \overline{BC} , seleciona-se a ferramenta “Reta”. Traça-se a reta suporte do segmento \overline{BC} , isto é, a reta que contém esse segmento e o prolonga para além de seus extremos.

Seleciona-se a ferramenta “Reta Perpendicular”. Clica-se primeiro sobre a base \overline{BC} ou sobre sua reta suporte e, em seguida, no vértice oposto à base, o ponto A. O GeoGebra traça automaticamente uma reta que passa por A e é perpendicular à base escolhida. A interseção entre a reta perpendicular traçada e a base define o ponto D, chamado de pé da altura relativa à base \overline{BC} . Seleciona-se a ferramenta “Segmento”. Constrói-se o segmento \overline{AD} , que liga o vértice A ao ponto D de interseção da altura com a base do triângulo. Esse segmento representa geometricamente a altura do triângulo relativa à base \overline{BC} .

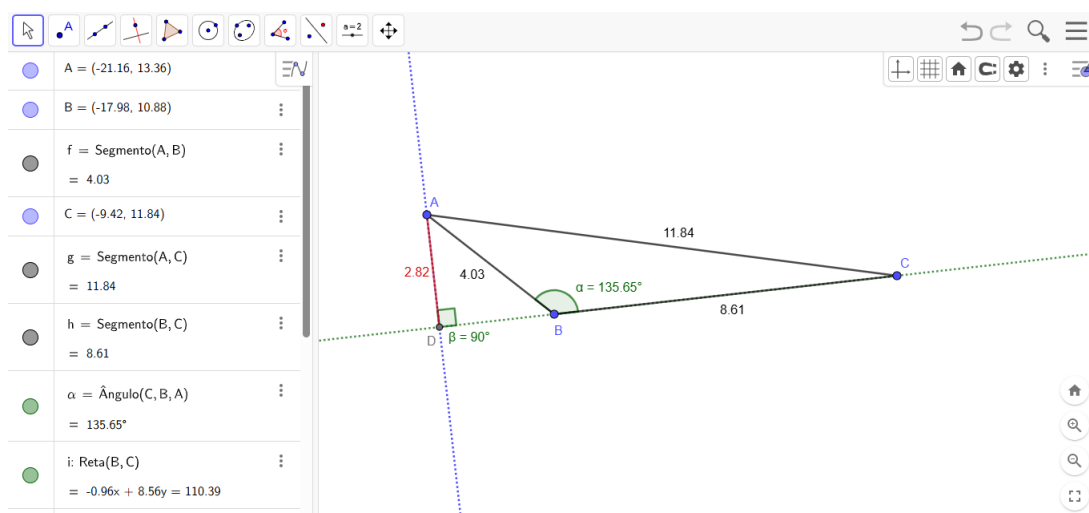


Figura 3.12: Exemplo 4

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Utiliza-se novamente a ferramenta “Distância, comprimento”. Mede-se o comprimento do segmento \overline{AD} . O valor numérico exibido corresponde à medida da altura do triângulo relativa à base. Como o triângulo é obtusângulo, observa-se que o pé da altura pode estar localizado fora do segmento da base, dependendo da escolha do segmento da base, sendo necessária a utilização da reta suporte.

Exemplo 3.5. Desenhe dois triângulos semelhantes e trace segmentos ligando os vértices correspondentes. Qual é a relação desses segmentos de reta?

Solução. Inicialmente, constrói-se um triângulo qualquer no plano utilizando a ferramenta “Polígono”. Marca-se três pontos não colineares A , B e C , e unem-se esses pontos, formando o triângulo ABC . No menu de transformações do GeoGebra, seleciona-se a ferramenta “Homotetia”. Essa ferramenta permite construir uma figura semelhante a outra a partir de um centro de semelhança, também chamado de centro de homotetia, e de uma razão de semelhança previamente definida.

Escolhe-se um ponto do plano para atuar como centro de semelhança, que pode ser um ponto já existente ou um novo ponto criado para esse fim, no caso, foi selecionado um novo ponto D . Esse ponto será responsável por determinar a posição relativa entre o triângulo original e o triângulo semelhante.

Após selecionar o triângulo ABC , o GeoGebra solicita a razão de semelhança. Insere-se um valor real positivo, maior que zero e diferente de 1, conforme o objetivo da construção: um valor maior que 1 produz uma ampliação do triângulo; um valor entre 0 e 1 produz uma redução do triângulo. O GeoGebra gera automaticamente o triângulo semelhante, cujos vértices podem ser denominados A' , B' e C' .

Observa-se que cada vértice do triângulo original possui um correspondente no triângulo semelhante: A corresponde a A' , B corresponde a B' , C corresponde a C' . Seleciona-se a ferramenta “Segmento”. Traça-se o segmento $\overline{AA'}$, ligando o vértice A ao vértice A' . Repete-se o procedimento para os pares e pontos (B, B') e (C, C') , construindo os segmentos $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$.

Observando a construção, nota-se que quando a razão de semelhança é diferente de 1, os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ concorrem em um mesmo ponto, que é o centro de semelhança. Todos esses segmentos passam por esse ponto, evidenciando que os vértices correspondentes estão alinhados com o centro de semelhança. Um caso particular ocorre se a razão de semelhança for igual a 1, assim, os triângulos são congruentes, isto é, possuem mesma forma e mesmo tamanho. Nesse caso, os segmentos que ligam vértices correspondentes são paralelos entre si, não existe um único ponto de interseção comum, pois não ocorre ampliação nem redução, apenas uma translação.

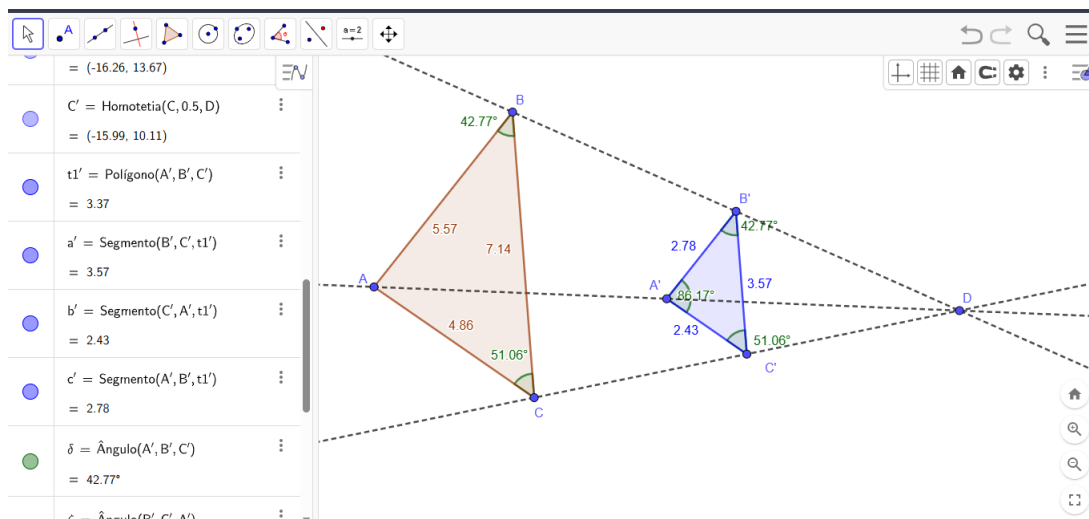


Figura 3.13: Exemplo 5

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.6. *Desenhe um quadrado e construa uma circunferência inscrita. Determine o ponto de tangência com os lados.*

Solução. *Inicialmente, no menu de ferramentas do GeoGebra, seleciona-se a opção “Polígono Regular”, que permite construir polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos internos iguais. Clica-se em um ponto do plano para definir o primeiro vértice do quadrado. Em seguida, clica-se em um segundo ponto, que determina o comprimento do lado. Ao ser solicitada a quantidade de lados, insere-se o valor 4. O GeoGebra constrói automaticamente o quadrado, cujos vértices podem ser identificados como A, B, C e D.*

Seleciona-se a ferramenta “Segmento”. Traça-se o segmento ligando os vértices opostos A e C, formando a primeira diagonal \overline{AC} . Em seguida, traça-se o segmento ligando os vértices opostos B e D, formando a segunda diagonal \overline{BD} . As diagonais do quadrado se interceptam em um único ponto. Esse ponto de interseção surge automaticamente ou pode ser destacado com a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Esse ponto é identificado como O e representa o centro do quadrado. Esse mesmo ponto será o centro da circunferência inscrita.

Seleciona-se a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”. Aplica-se essa ferramenta a cada lado do quadrado: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} . O GeoGebra cria automaticamente os pontos médios desses segmentos, que podem ser denominados por H, G, F e E, respectivamente. Cada ponto médio obtido corresponde a um ponto de tangência entre a circunferência inscrita e o respectivo lado do quadrado. Isso ocorre porque, em um quadrado, a circunferência inscrita toca cada lado exatamente no seu ponto médio.

Existem duas formas equivalentes de realizar a construção da circunferência

inscrita, uma é utilizando “Círculo dados centro e um de seus pontos”. Seleciona-se a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”. Clica-se no ponto O , centro do quadrado. Em seguida, clica-se em um dos pontos médios de um lado, por exemplo, o ponto E . O GeoGebra constrói a circunferência com centro em O e raio igual à distância \overline{OE} , que corresponde à distância do centro do quadrado até um de seus lados. Outra maneira é utilizando “Círculo definido por três pontos”. Seleciona-se a ferramenta “Círculo definido por três pontos”. Clica-se em três pontos médios distintos dos lados do quadrado. O GeoGebra constrói automaticamente a circunferência que passa por esses três pontos, coincidindo com a circunferência inscrita.

Observa-se que a circunferência construída: toca cada lado do quadrado exatamente em um ponto; esses pontos são justamente os pontos médios dos lados; o raio da circunferência é perpendicular a cada lado do quadrado no ponto de tangência.

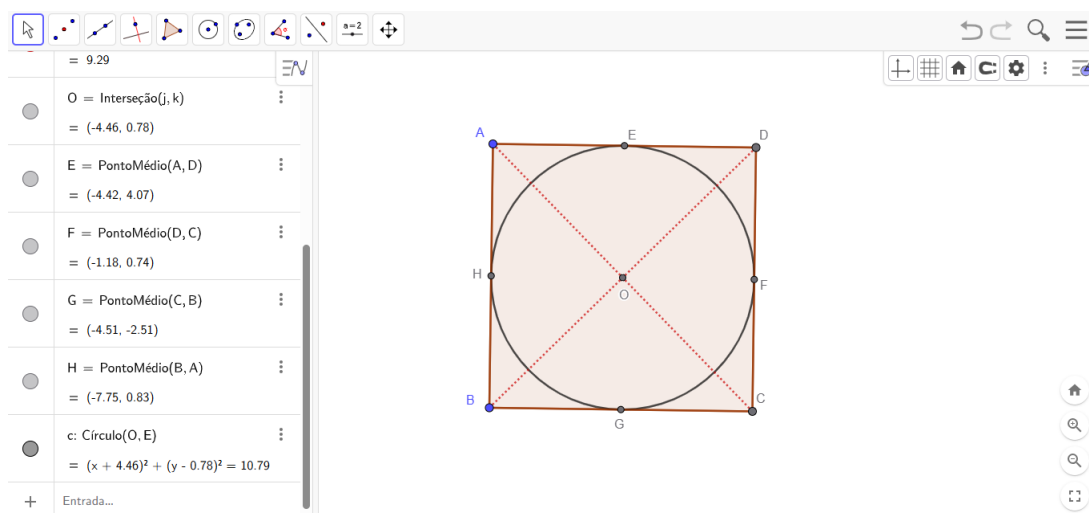


Figura 3.14: Exemplo 6

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.7. Desenhe um triângulo e trace suas três mediatrizes. Determine o ponto de interseção, o circuncentro. Desenhe a circunferência que circunscreve o triângulo.

Solução. Sabendo que o circuncentro é o ponto de interseção das mediatrizes. Inicialmente, constrói-se um triângulo qualquer no plano utilizando a ferramenta “Polígono” ou “Segmento”. Marca-se três pontos não colineares A , B e C , e unem-se esses pontos, formando o triângulo ABC . Os lados do triângulo são os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} . Cada um deles servirá de base para a construção de sua respectiva mediatriz.

Seleciona-se a ferramenta “Mediatriz” no menu de ferramentas do GeoGebra. Aplica-se essa ferramenta a um dos lados do triângulo, por exemplo, o segmento \overline{AB} . O GeoGebra constrói automaticamente a reta perpendicular a \overline{AB} que passa por seu ponto

médio, ou seja, a mediatriz desse lado. Repete-se o procedimento para os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} , obtendo assim as três mediatrizes do triângulo.

Seleciona-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Clica-se sobre duas das mediatrizes traçadas. O GeoGebra marca automaticamente o ponto de interseção entre essas retas. Esse ponto é identificado como D e corresponde ao circuncentro do triângulo. O ponto D é equidistante dos três vértices do triângulo, pois pertence às mediatrizes de todos os lados. Por essa razão, ele é o centro da circunferência que passa pelos vértices A , B e C .

Seleciona-se a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”. Clica-se no ponto D , definido como o centro da circunferência. Em seguida, clica-se em um dos vértices do triângulo, por exemplo, o ponto A . O GeoGebra constrói a circunferência com centro em D e raio igual à distância \overline{DA} . Observa-se que a circunferência construída passa exatamente pelos três vértices A , B e C do triângulo, confirmando que se trata da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

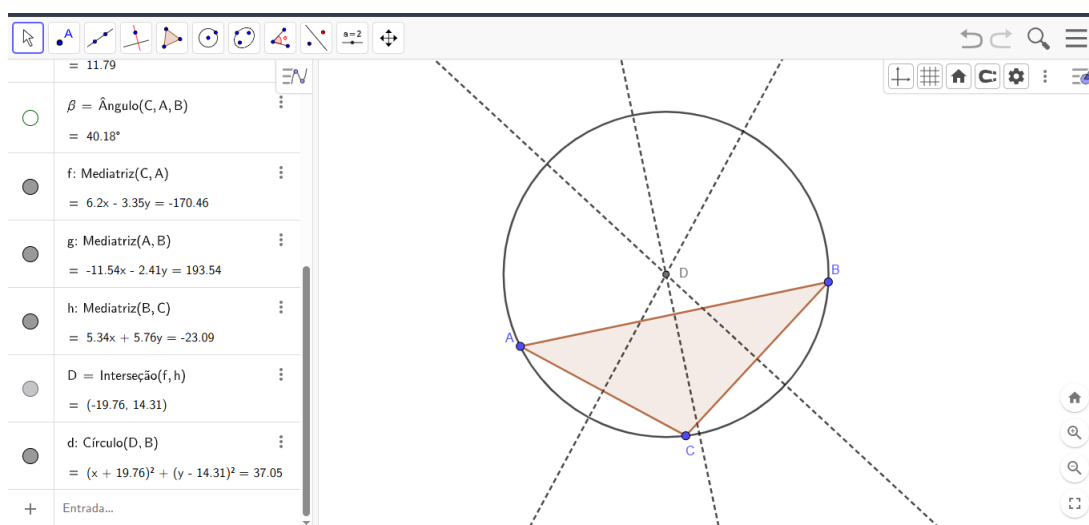


Figura 3.15: Exemplo 7

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.8. Construa um triângulo e trace o incentro, que é a interseção das bissetrizes. Construa a circunferência inscrita.

Solução. Sabendo que o incentro é equidistante dos lados e é obtido pela interseção das bissetrizes. Inicialmente, constrói-se um triângulo qualquer no plano utilizando a ferramenta “Polígono” ou “Segmento”. Marca-se três pontos não colineares A , B e C , e unem-se esses pontos, formando o triângulo ABC . Os ângulos internos do triângulo estão localizados nos vértices A , B e C . Cada um desses ângulos será utilizado como base para a construção das bissetrizes.

Seleciona-se a ferramenta “Bissetriz” no menu de ferramentas do GeoGebra. Aplica-se essa ferramenta a um dos ângulos do triângulo, por exemplo, no ângulo $\hat{A}BC$, com a ferramenta “Bissetriz” ativada, basta selecionar os vértices A , B e C , respectivamente, para traçar a bissetriz do ângulo $\hat{A}BC$. Repete-se o procedimento para os outros ângulos do triângulo. Embora três bissetrizes possam ser traçadas, apenas duas já são suficientes para determinar o ponto de interseção comum.

Seleciona-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Clica-se sobre duas das bissetrizes construídas. O GeoGebra marca automaticamente o ponto de interseção dessas retas, que é identificado como ponto O . Esse ponto O corresponde ao incentro do triângulo.

O incentro é equidistante de todos os lados do triângulo. Essa propriedade garante que a circunferência com centro no incentro e raio igual à distância até qualquer lado do triângulo será tangente aos três lados e inscrita no triângulo.

Seleciona-se a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”. Clica-se no ponto O , definido como centro da circunferência. Em seguida, move-se o cursor sobre um dos lados do triângulo até localizar o ponto em que a circunferência será tangente a esse lado. Ao clicar nesse ponto do lado, o GeoGebra constrói a circunferência com centro em O e raio igual à distância do incentro ao lado escolhido.

Observa-se que a circunferência construída: é tangente a um dos lados do triângulo no ponto selecionado; devido à equidistância do incentro aos lados, também se torna tangente aos outros dois lados do triângulo; está totalmente contida no interior do triângulo, caracterizando a circunferência inscrita.

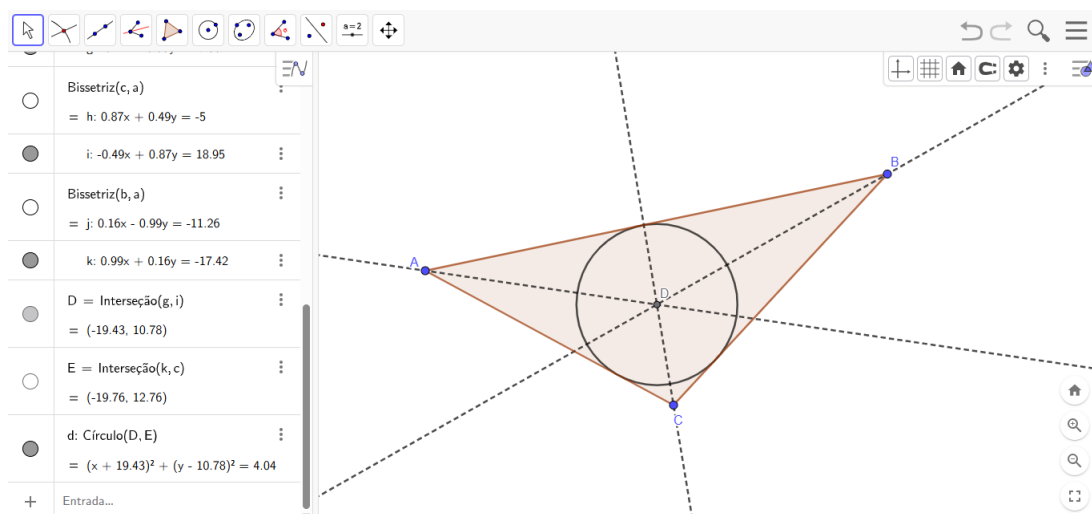


Figura 3.16: Exemplo 8

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.9. *Construa um pentágono regular e trace todas as diagonais. Determine o ponto de interseção das diagonais e note que é formado outro pentágono. Repita o processo no pentágono menor.*

Solução. *Inicialmente, no menu de ferramentas do GeoGebra, seleciona-se a opção “Polígono Regular”, que permite construir polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos internos iguais. Clica-se em um ponto do plano para definir o primeiro vértice do pentágono. Em seguida, clica-se em um segundo ponto, determinando o comprimento do lado. Quando solicitado, insere-se o número 5, correspondente à quantidade de lados. O GeoGebra constrói automaticamente o pentágono regular, cujos vértices podem ser nomeados por A, B, C, D e E.*

Em um pentágono, as diagonais são os segmentos que ligam vértices não adjacentes. Assim, cada vértice pode ser ligado a dois outros vértices não consecutivos, formando as diagonais do pentágono. Seleciona-se a ferramenta “Segmento”. Traça-se cada uma das diagonais do pentágono, ligando os pares de vértices não adjacentes \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} e \overline{CE} . Ao final desse processo, todas as diagonais do pentágono estarão desenhadas, formando uma figura estrelada no interior do polígono.

Seleciona-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Clica-se sobre pares de diagonais que se cruzam no interior do pentágono. O GeoGebra marca automaticamente os pontos de interseção entre as diagonais como F, G, H, I e J. Esses pontos são dispostos de maneira simétrica e formam os vértices de um novo polígono no interior do pentágono original.

Observando a figura resultante, nota-se que os pontos de interseção das diagonais determinam um novo pentágono regular, menor e semelhante ao pentágono inicial. Esse pentágono interno surge naturalmente da interseção das diagonais. Utilizando novamente a ferramenta “Segmento”, ligam-se os pontos de interseção consecutivos das diagonais. Forma-se, assim, o contorno do pentágono menor, inscrito no pentágono original.

No pentágono menor recém-formado, traçam-se novamente todas as suas diagonais com a ferramenta “Segmento”. Em seguida, utiliza-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos” para marcar os novos pontos de interseção entre essas diagonais. Esses novos pontos de interseção formam outro pentágono ainda menor, também regular e semelhante aos anteriores.

Ao repetir sucessivamente esse procedimento, observa-se um processo iterativo de formação de pentágonos regulares cada vez menores, todos semelhantes entre si. Essa construção evidencia uma estrutura auto-semelhante, associada à razão áurea, ca-

racterística das diagonais do pentágono regular ¹.

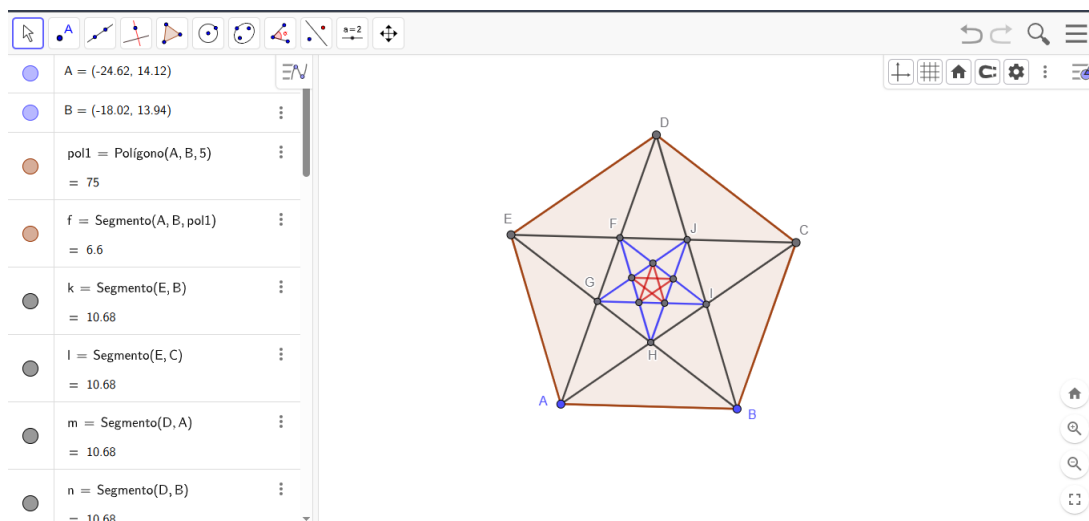


Figura 3.17: Exemplo 9

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Exemplo 3.10. *Desenhe um triângulo qualquer. Construa o ortocentro, que é interseção das retas que contêm as alturas do triângulo. Verifique se o ortocentro está dentro do triângulo.*

Solução. *Inicialmente, desenha-se um triângulo qualquer no plano utilizando a ferramenta “Polígono” ou “Segmento”. Marcam-se três pontos não colineares A , B e C , e unem-se esses pontos, formando o triângulo ABC . Os lados do triângulo são os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} . Cada um desses lados servirá de referência para a construção das alturas.*

Para a determinação das retas suporte dos lados, seleciona-se a ferramenta “Reta”. Traça-se a reta que contém o segmento \overline{AB} , isto é, sua reta suporte. Repete-se o procedimento para os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} . Essas retas permitem prolongar os lados do triângulo quando necessário, o que é essencial principalmente no caso de triângulos obtusângulos.

Seleciona-se a ferramenta “Reta Perpendicular”. Clica-se sobre a reta suporte de \overline{BC} e, em seguida, no vértice oposto A . O GeoGebra traça a reta perpendicular à base \overline{BC} passando pelo vértice A . Essa reta corresponde à altura relativa ao lado \overline{BC} . Repete-se o procedimento traçando a perpendicular à reta suporte de \overline{AC} passando pelo vértice B , e à reta suporte de \overline{AB} passando pelo vértice C . As três retas obtidas são as retas que contêm as alturas do triângulo.

¹A razão entre a diagonal e o lado de qualquer pentágono regular é sempre a razão áurea ϕ , uma constante irracional que vale aproximadamente 1,618. A razão áurea também aparece no pentagrama, a estrela de cinco pontas, formado pelas diagonais, onde os segmentos se dividem nessa mesma razão.

Em cada caso, a altura é o segmento que liga o vértice ao ponto de interseção da reta perpendicular com o lado oposto ou sua reta suporte. Esse ponto pode estar sobre o próprio lado ou fora do segmento, exigindo o prolongamento da reta suporte.

Para a determinação do ortocentro, seleciona-se a ferramenta “Interseção entre dois objetos”. Clica-se sobre duas das retas que contêm as alturas. O GeoGebra marca automaticamente o ponto de interseção dessas retas, que é identificado como O . Esse ponto O corresponde ao ortocentro do triângulo. A terceira altura também passa por esse ponto, confirmando a concorrência das alturas.

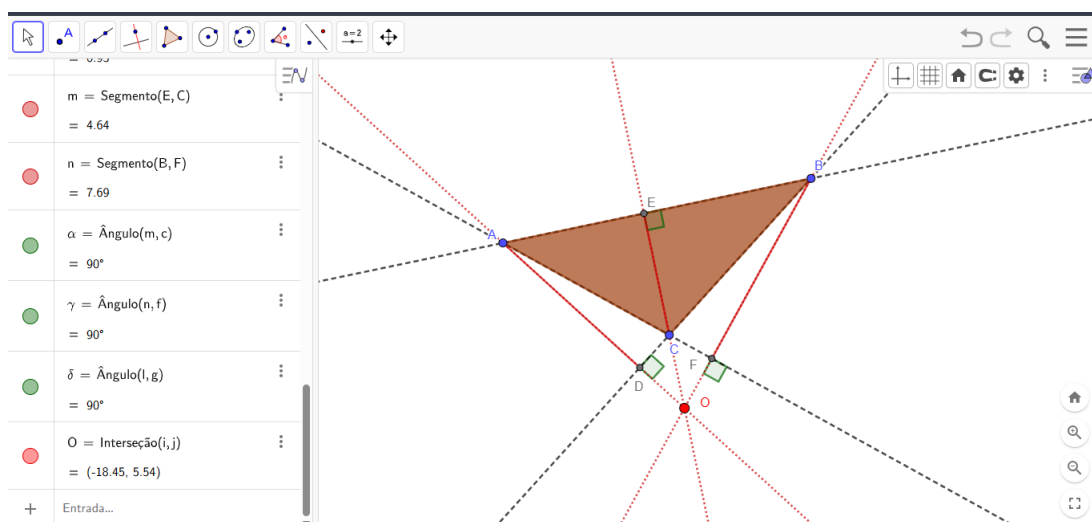


Figura 3.18: Exemplo 10

Fonte: Arquivo Pessoal da autora

Observa-se a posição do ponto O em relação ao interior do triângulo ABC , verificando se ele está dentro, sobre ou fora da região delimitada pelo triângulo. A localização do ortocentro depende diretamente do tipo de triângulo construído:

- Triângulo acutângulo: todas as alturas e o ortocentro estão localizados no interior do triângulo.
- Triângulo retângulo: o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.
- Triângulo obtusângulo: as alturas relativas aos lados adjacentes ao ângulo obtuso encontram-se fora do triângulo, e o ortocentro localiza-se na região exterior.

Os alunos são orientados a comparar seus desenhos e a posição do ortocentro com os resultados obtidos pelos colegas. A partir dessa comparação, podem: formular hipóteses sobre a posição do ortocentro; testar essas hipóteses construindo triângulos de diferentes tipos; confirmar ou refutar as conjecturas observando os resultados geométricos.

Conclusão

Este trabalho apresentou que a geometria não pode ser compreendida apenas como um conjunto de fórmulas e técnicas, mas como um campo do saber historicamente construído, dotado de grande potencial formativo. Este estudo articulou três dimensões complementares: a dimensão histórica, que situa a geometria em sua trajetória cultural e científica; a dimensão conceitual, que aborda os fundamentos necessários para a aprendizagem escolar; e a dimensão pedagógica, que discute práticas inovadoras mediadas por tecnologias. A integração desses aspectos oferece uma compreensão mais ampla da geometria, tanto como conhecimento científico consolidado quanto como objeto de ensino em constante transformação, reafirmando sua importância para a formação integral do sujeito e para o desenvolvimento social contemporâneo.

O estudo de sua evolução histórica demonstra que diferentes civilizações contribuíram para o avanço do pensamento geométrico, oferecendo soluções originais para problemas práticos e estabelecendo as bases para o raciocínio lógico-dedutivo que se consolidou com os gregos e permanece como referência até hoje. No âmbito educacional, os conceitos geométricos básicos se configuram como pilares do pensamento matemático, sendo indispensáveis para a construção de competências relacionadas à abstração, à visualização espacial e à resolução de problemas. A forma como esses conteúdos são trabalhados em sala de aula, entretanto, é determinante para o sucesso ou fracasso da aprendizagem. Quando tratados de forma descontextualizada e excessivamente mecânica, os conceitos geométricos perdem significado para o aluno, gerando desmotivação e dificuldade de compreensão.

Nesse cenário, o uso de metodologias ativas e de tecnologias digitais, como o GeoGebra, apresenta-se como uma alternativa didático-pedagógica potente, capaz de aproximar o estudante da geometria de forma mais interativa, visual e significativa. Ao promover a investigação, a manipulação de figuras e a exploração de propriedades geométricas em tempo real, tais ferramentas favorecem a construção do conhecimento de maneira autônoma e colaborativa. Além disso, contribuem para a formação de habilidades essenciais no século XXI, como pensamento crítico, criatividade e capacidade de resolver problemas complexos.

A integração entre a dimensão histórica, conceitual e pedagógica da geometria permite não apenas compreender a relevância dessa área no desenvolvimento humano e científico, mas também repensar o seu ensino à luz das demandas contemporâneas. Valorizar a história da matemática, consolidar os conceitos fundamentais e incorporar práticas inovadoras constituem um caminho fecundo para tornar o ensino da geometria mais eficiente, motivador e socialmente relevante.

Referências

- ALBUQUERQUE, E. S. C. **Geometria e arte: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no sexto ano.** Alagoas: UFAL, 2017.
- ALVES, F.; MINHO, M. S.; DINIZ, M. C. **Gamificação: diálogos com a educação.** Minas Gerais: Revista Tecnologias na Educação, n. 11, 2014.
- ALVES, W. F. M. **Uso do GeoGebra no ensino de geometria plana no ensino básico.** Goiás: UFG, 2017.
- AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V.; OLIVEIRA, J. C. **OBMEP e teoria das situações didáticas: uma proposta para o professor de matemática.** Porto Alegre: Educação Matemática em Revista, v. 2, n. 19, 2018.
- BARROS, R. L.; DE SÁ P. F. **Incrível História do Número π .** Revista História da Matemática para Professores. v. 8, n.1, p. 1-11, 2022.
- BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** MEC, 2018.
- BURKERT, W. **The orientalizing revolution: Near Eastern influence on Greek culture in the early archaic age.** Universidade de Harvard, 1995.
- COSTA, J. L. **Prática de ensino: construções geométricas.** Cabo Frio: Visão Editora, 2016.
- DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Ática, v. 1, 1991.
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Tradução de M. Moretti. Florianópolis: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 9–35, 2003.
- EUCLIDES, **Os elementos.** Tradução de I. Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo: UNICAMP, 2008.

- FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria.** Porto Alegre: Artmed, 1999.
- GIOVANNI, J.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática: Ensino Fundamental Anos Finais.** São Paulo: FTD, 2018.
- GREENBERG, M. J. **Old and new results in the foundations of elementary plane Euclidean and non-Euclidean geometries.** American Mathematical Monthly, v. 117, n. 3, p. 198-219, 2010.
- HAYASHI, T. **Indian mathematics.** The Blackwell Companion to Hinduism, p. 360-375, 2003.
- HILDEBRAND, H. R.; VALENTE, J. A. **As Artes, a Matemática e o Pensamento Computacional por Meio das Mídias.** São Paulo: UNICAMP, 2019.
- IEDE. **O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil: desafios, boas práticas e impacto da OBMEP.** Portal Iede, 2024.
- KLINE, M. **El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días** Madrid: Alianza Editorial, 1994.
- LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition.** 1968.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** São Paulo: Educação Matemática em Revista, n. 11, p. 13-16, 2006.
- MAGALHÃES, C. E. C. **O Teorema de Pitágoras e algumas aplicações.** Tocantins: UFT, 2023.
- MORAN, J. **Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens.** Ponta Grossa: PROEX/UEPG, 2015.
- NETO, A. C. M. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Boletim de Educação Matemática, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.
- PIASESKI, C. M. **A Geometria no Ensino Fundamental.** Erechim: Universidade do Alto Uruguai, 2010.
- PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: interciência, v. 2, 1978.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades.** Dia a Dia Educação. Ponta Grossa, PR. v. 13, p. 4-44, 2019.

SAVOYA, F. *et. al.* **Matemática em Cena: Ensino Fundamental Anos Finais.** São Paulo: Editora Wisdom, 2022.

SCHNEIDERS, L. A. **O método da sala de aula invertida (flipped classroom).** Lajeado: UNIVATES, 2018.

SILVA, S. R. F. C. **O ensino da geometria no ensino fundamental e sua importância.** Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, MG. 2021.

SILVA, W. C. **Teorema de Tales de Mileto e suas principais consequências.** Maranhão: UFMA, 2024.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica.** Papirus editora, 2015.

SOUZA, R. T.; SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. **Modelagem matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do software GeoGebra.** Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, No. 32, 2022.