UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Áreas e Perímetros do Círculo Utilizando Aproximações: uma Aplicação do Método da Exaustão.

Novembro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Áreas e Perímetros do Círculo Utilizando Aproximações: uma Aplicação do Método da Exaustão.

Ricardo Medeiros de Andrade Paraizo

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Profa.Dra.Fabiana Magda Garcia Papani
Prof.Dr.Clézio Aparecido Braga
Profa.Dra.Elisangela dos Santos Meza

Cascavel, Novembro de 2025.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Medeiros de Andrade Paraizo, Ricardo
Áreas e Perímetros do Círculo Utilizando Aproximações: uma Aplicação do Método da Exaustão. / Ricardo Medeiros de Andrade Paraizo; orientadora Fabiana Magda Garcia Papani. -- Cascavel, 2025.
49 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2025.

1. Método da Exaustão. 2. Geometria. 3. Limite. I. Garcia Papani, Fabiana Magda, orient. II. Título.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO

Ricardo Medeiros de Andrade Paraizo

Áreas e Perímetros do Círculo Utilizando Aproximações:
uma Aplicação do Método da Exaustão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Ensino de Matemática, linha de pesquisa Ensino básico de Matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
FABIANA MAGDA GARCIA PAPANI
Data: 25/11/2025 11:47:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientadora – Fabiana Magda Garcia Papani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE

gov.br Documento assinado digitalmente
ELISANGELA DOS SANTOS MEZA
Data: 26/11/2025 21:38:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Elisangela dos Santos Meza
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

gov.br Documento assinado digitalmente
CLEZIO APARECIDO BRAGA
Data: 26/11/2025 12:26:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Clezio Aparecido Braga
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE

Cascavel, 25 de novembro de 2025

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo dom da vida e pelos desafios que me concede, pois, por meio deles, encontro oportunidades de crescimento, aprendizado e superação.

À minha esposa, Juliane, e ao meu filho, Guilherme, pela presença constante, pelo apoio incondicional e por me inspirarem, todos os dias, a ser uma pessoa e um profissional melhor.

Aos meus irmãos Marcello, Sueli e Marquinhos, pelo amor, carinho e apoio em todos os momentos.

A minha sogra e ao meu sogro, pelo incentivo aos estudos e pelas palavras sempre encorajadoras.

Às minhas cunhadas e meus cunhados, pela torcida constante e pela alegria que trazem à nossa convivência.

Aos meus amados sobrinhos e afilhados que me preenchem o peito de carinho.

À Profa. Dra. Fabiana, por sua paciência, dedicação e presença constante, oferecendo orientação segura, apoio e incentivo nos momentos mais desafiadores desta jornada acadêmica.

E, de modo muito especial, à minha mãe, que já não está presente fisicamente, mas que, com certeza, continua me acompanhando e abençoando lá do céu.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o Método da Exaustão como a transição entre a geometria clássica e o conceito moderno de limite. Desenvolve-se uma análise histórica e matemática, destacando as contribuições de Eudoxo de Cnido e Arquimedes de Siracusa, que utilizaram esse método para determinar áreas e perímetros de figuras curvas, aproximando o valor do número π. A partir da construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, demonstra-se que, ao aumentar o número de lados, suas áreas e perímetros tendem, respectivamente, aos valores de π e 2π. Essa abordagem mostra a ideia de aproximação sucessiva e a origem intuitiva do conceito de limite. Conclui-se que o Método da Exaustão representa um importante elo entre o pensamento geométrico da Antiguidade e o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, além de constituir uma ferramenta didática relevante para a compreensão dos fundamentos da geometria e da análise matemática.

Palavras-chave: Método da Exaustão; Geometria; Limite.

Abstract

This work aims to present the Exhaustion Method as the transition between classical geometry and the modern concept of limit. It develops a historical and mathematical analysis, highlighting the contributions of Eudoxus of Cnidus and Archimedes of Syracuse, who used this method to determine the areas and perimeters of curved figures, approximating the value of the number π. By constructing regular polygons inscribed and circumscribed within a circle, it is demonstrated that, as the number of sides increases, their areas and perimeters tend, respectively, to the values of π and 2π.

This approach demonstrates the idea of successive approximation and the intuitive origin of the concept of limit. It is concluded that the Method of Exhaustion represents an important link between antique geometric thought and the development of infinitesimal calculus, in addition to constituting a relevant teaching tool for understanding the fundamentals of geometry and mathematical analysis.

Keywords: Exhaustion Method; Geometry;Limit.

Sumário

Introdução **15**

1 Pré-Requisitos Necessários para o Cálculo de Áreas e Perímetros de Polígonos Inscritos ou Circunscritos no Círculo **17**

1.1 Noções Básicas de Trigonometria 18

1.2 Propriedades dos Polígonos Regulares 19

1.3 Áreas e Perímetros de Polígonos Inscritos num Círculo de Raio R 22

1.3.1 Áreas 22

1.3.2 Perímetros 22

1.4 Áreas e Perímetros de Polígonos Circunscritos num Círculo de Raio R . . . 24

1.4.1 Áreas 24

1.4.2 Perímetros 25

2 A ideia de Limite **27**

2.1 A Necessidade de Aproximar. 28

2.2 O Raciocínio da Aproximação 28

2.2.1 O Exemplo da Velocidade Instantânea 28

2.3 A ideia intuitiva de limite 30

3 O Método da Exaustão **31**

3.1 Origem e fundamento do método 31

3.2 Aplicação geométrica 32

4 Área e Perímetro do Círculo por meio do Método da Exaustão **34**

4.1 Definição formal e propriedades fundamentais do limite 34

4.2 Passagem ao limite: áreas e perímetros do círculo 36

4.2.1 Área do Círculo 36

4.2.2 Limite dos Perímetros 37

4.3 Relação com o número π 38

5 Propostas de Atividades Gerais com o GeoGebra **40**

5.1 Atividade 1 – Construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos . 40

5.2 Atividade 2 – Investigação da relação entre o raio e o lado do polígono . . 43

5.3 Atividade 3 – Aproximação da área e do perímetro do círculo 45

6 Considerações Finais **46**

Introdução

O estudo das áreas e dos perímetros de figuras planas acompanha o desenvolvimento histórico da Matemática desde as civilizações antigas. Egípcios e babilônios já realizavam aproximações empíricas para medir superfícies e comprimentos, utilizando procedimentos geométricos rudimentares. Contudo, foi na Grécia Antiga que surgiram os primeiros esforços sistematizados de dedução e demonstração, culminando em uma nova forma de compreender as grandezas contínuas. Nesse contexto, o Método da Exaustão, desenvolvido por Eudoxo de Cnido e aperfeiçoado por Arquimedes de Siracusa, representou um marco na história da Matemática ao introduzir o raciocínio de aproximações sucessivas, antecedendo o conceito moderno de limite.

O Método da Exaustão consiste em determinar áreas por meio da comparação entre figuras conhecidas, reduzindo progressivamente a diferença entre elas até que o valor buscado fosse "exausto", isto é, tão pequeno quanto se desejasse. Esse princípio antecipou as bases do cálculo infinitesimal, criado séculos mais tarde por Newton e Leibniz. Assim, o método da exaustão não apenas contribuiu para a compreensão das medidas geométricas, mas também para a formação do pensamento analítico moderno.

Para estabelecer essas aproximações, utilizam-se relações trigonométricas que fazem a relação entre o raio da circunferência aos lados dos polígonos regulares inscritos e circunscritos. A trigonometria, nesse contexto, desempenha papel fundamental ao permitir a determinação das áreas e dos perímetros desses polígonos, fornecendo as ferramentas necessárias para compreender o processo de aproximação que conduz à área e ao comprimento da circunferência.

No ensino contemporâneo, compreender esse processo histórico e conceitual é de grande relevância, sobretudo na Educação Básica, onde a introdução do conceito de limite muitas vezes é percebida de forma abstrata. A utilização do método da exaustão como recurso didático possibilita ao estudante visualizar a transição entre o raciocínio geométrico e o pensamento analítico, favorecendo a compreensão intuitiva de limites, áreas e perímetros por duas relações importantes utilizadas. Ao observar o comportamento das áreas e dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, o aluno pode perceber de maneira natural a ideia de convergência e aproximação.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo apresentar o Método da Exaustão como elo entre a geometria clássica e o cálculo moderno, por meio da análise das aproximações das áreas e dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência.

Algumas dissertações do programa PROFMAT ilustram o uso contemporâneo desse método. Por exemplo, Kazapi(2023) demonstra a determinação da área e do perímetro de uma circunferência por meio do método da exaustão, fazendo uma breve relação entre o contexto histórico e a ideia moderna de limite. Já Silva(2019) apresenta uma análise sobre como matemáticos da Antiguidade, como Eudoxo, Arquimedes e Fermat, utilizaram o método para calcular áreas de regiões planas, e como essa abordagem pode ser explorada no ensino básico sem recorrer ao cálculo diferencial e integral. Por sua vez, Lima (2013)enfatiza o método da exaustão como uma ferramenta histórica e pedagógica, útil para a compreensão das áreas e volumes, estabelecendo um elo entre as ferramentas clássicas e as contemporâneas.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentados os pré-requisitos necessários ao estudo das áreas e dos perímetros de polígonos regulares, com ênfase em propriedades geométricas e relações trigonométricas. O Capítulo 2 aborda a ideia intuitiva de limite, explorando a aproximação entre os polígonos e a circunferência. O Capítulo 3 apresenta o Método da Exaustão, destacando sua fundamentação histórica e matemática, bem como sua aplicação na determinação de áreas e perímetros. No Capítulo 4, é desenvolvido o estudo das áreas e dos perímetros do círculo por meio do Método da Exaustão, relacionando o conceito formal de limite e a aproximação do número π. No capítulo 5 são apresentadas atividades com o uso do GeoGebra e por fim, são apresentadas as considerações finais e as referências utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Pré-Requisitos Necessários para o Cálculo de Áreas e Perímetros de Polígonos Inscritos ou Circunscritos no Círculo

O estudo das áreas e perímetros de polígonos inscritos e/ou circunscritos numa circunferência é sem dúvida um dos grandes assuntos abordados na geometria clássica.O desafio da determinação das áreas remonta à Grécia antiga e ao Egito e se estendem até os dias atuais. Para que possamos entender bem os assuntos que serão abordados adiante, será necessária uma retomada de conceitos fundamentais da geometria plana e também da trigonometria.

A relação entre polígonos e circunferência desempenha papel de grande importância na construção do pensamento matemático. Dito isso, a decomposição de polígonos em triângulos e retângulos, além da utilização das propriedades da trigonometria e das figuras planas regulares, faz com que consigamos obter de maneira mais segura a determinação da área dos polígonos internos e externos à circunferência .

Nesse capítulo serão apresentados alguns dos pré-requisitos necessários ao estudo como as definições e propriedades dos polígonos para que assim possamos identificar com precisão a área dos polígonos regulares.

1.1 Noções Básicas de Trigonometria

A trigonometria estuda as relações entre ângulos e comprimentos de segmentos, especialmente no contexto dos triângulos. No desenvolvimento deste trabalho, a trigonometria é utilizada para estabelecer relações métricas entre o raio de uma circunferência e os lados de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Assim, torna-se necessário retomar alguns conceitos fundamentais, em particular as definições de seno, cosseno e tangente.

Considere um triângulo retângulo ABC, no qual o ângulo reto está em C. Seja α um dos ângulos agudos do triângulo. Denotando por hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto, por cateto oposto o lado oposto ao ângulo α e por cateto adjacente o lado que forma o ângulo α com a hipotenusa, definem-se:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Essas relações dependem apenas do ângulo considerado, e não das dimensões específicas do triângulo.

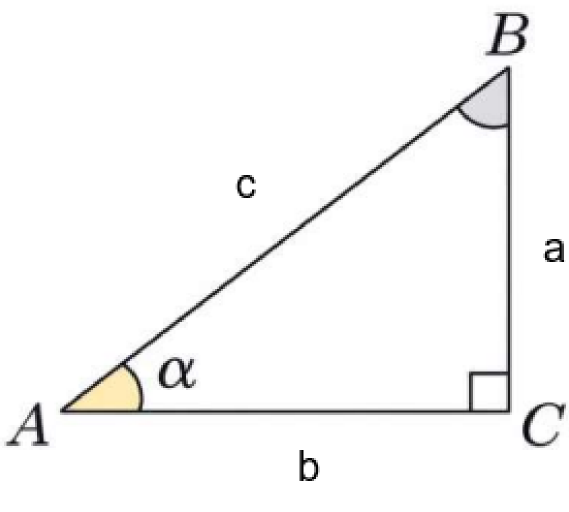

Figura 1.1: Triângulo Retângulo

Dessa forma, considerando as medidas indicadas na Figura 1.1, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{a}}{\text{c}},$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{b}}{\text{c}},$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{a}}{\text{b}}.$$

Duas relações importantes utilizadas nesse texto, e que decorrem diretamente das definições acima, são a identidade trigonométrica fundamental e a relação entre tangente, seno e cosseno.Essas relações serão úteis ao longo do trabalho, especialmente nas deduções envolvendo polígonos regulares.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

e

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}.$$

No estudo de polígonos regulares inscritos em uma circunferência, as funções trigonométricas aparecem ao se considerar os triângulos formados pelos raios da circunferência e pelos lados do polígono. Em particular, ao dividir um triângulo isósceles formado por dois raios consecutivos em dois triângulos retângulos congruentes, obtêm-se relações diretas entre o raio da circunferência, o ângulo central e o comprimento dos lados do polígono.

De maneira análoga, a função tangente surge naturalmente na análise de polígonos circunscritos, quando se considera o triângulo retângulo formado pelo raio da circunferência e pela metade do lado do polígono. Assim, as funções seno, cosseno e tangente constituem ferramentas essenciais para a dedução das expressões geométricas utilizadas neste trabalho. A retomada das definições básicas de seno, cosseno e tangente fornece o suporte conceitual necessário para o desenvolvimento das relações geométricas exploradas nos capítulos seguintes. Essas funções permitem descrever, de forma precisa, as relações entre ângulos e comprimentos em triângulos associados a polígonos regulares e circunferências.

Dessa forma, a trigonometria básica desempenha papel fundamental como pré-requisito matemático para a compreensão das aproximações geométricas e analíticas que serão apresentadas posteriormente, especialmente no contexto do Método da Exaustão.

1.2 Propriedades dos Polígonos Regulares

Iniciaremos essa seção apresentando a definição de polígonos que podemos encontrar em Neto(2022)

Definição 1. *Sejam $m \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \ldots A_m$ é um **polígono** se, para $1 \leq i \leq m$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém* *nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_m$, $A_{m+1} = A_1$ e $A_{m+2} = A_2$).*

Em outras palavras, um polígono pode ser definido como uma figura geométrica plana, formada pela união de três ou mais segmentos consecutivos de modo que dois sucessivos não sejam colineares.

Os polígonos convexos são definidos, de acordo com Oliveira(2016) como:

Definição 2. *Um polígono é convexo, se e somente se, todo segmento de reta, que tem as suas extremidades dentro da região interna do polígono, têm todos os seus pontos pertencentes a região interna do polígono, ou seja, não existe ponto que pertence ao segmento de reta e que esteja fora da região interna do polígono.*

De acordo com Manfio(2013), podemos definir os polígonos regulares como:

Definição 3. *Um polígono regular é um polígono convexo no qual todos os lados são congruentes entre si e, também, todos os ângulos internos são congruentes entre si.*

Ainda de acordo com Manfio(2013), podemos definir polígono inscrito e circunscrito numa circunferência da seguinte forma,

Definição 4. *Dizemos que um polígono está inscrito numa circunferência se os seus vértices pertencem à circunferência. Neste caso, dizemos também que a circunferência é circunscrita ao polígono.*

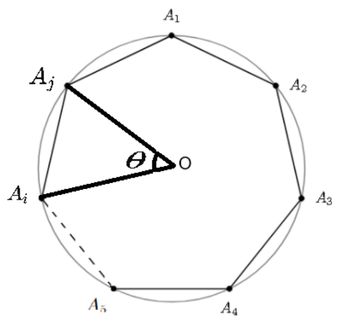

Figura 1.2: Polígono Inscrito

Barbosa(1985) afirma que,

Proposição 1. *Todo polígono regular está inscrito em um círculo.*

Demonstração. Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ um polígono regular. Tracemos o círculo que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3. Seja o ponto O o centro deste círculo. Como $OA_2 = OA_3$, então o triângulo OA_2A_3 é isósceles e logo $O\widehat{A_2}A_3 = O\widehat{A_3}A_2$. Como o polígono é regular, todos os seus ângulos internos tem a mesma medida. Portanto $A_1\widehat{A_2}A_3 = A_2\widehat{A_3}A_4$.

Mas então, $A_1\widehat{A_2}O = O\widehat{A_3}A_4$. Como além disso $A_1A_2 = A_3A_4$ e $OA_2 = OA_3$, então os triângulos OA_1A_2 e OA_4A_3 são congruentes. Daí obtém-se $OA_4 = OA_1$. Portanto, A_4 também é ponto do círculo. O mesmo raciocínio pode agora ser repetido ao provar que A_5 também pertence ao círculo, e assim sucessivamente. Como resultado final, obtém-se que todos os pontos do polígono pertencem ao círculo. □

Iezzi, Dolce e Pompeo(1997) afirma que,

Definição 5. *Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência .*

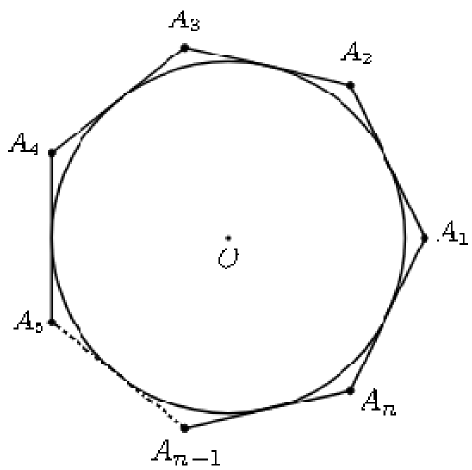

Figura 1.3: Polígono Circunscrito

Barbosa(1985) ainda afirma que,

Corolário 1. *Todo polígono regular possui um círculo inscrito*

Demonstração. Trace o círculo no qual o polígono regular $A_1A_2...A_n$ está inscrito. Seja O o seu centro. Todos os triângulos isósceles A_1OA_2, A_2OA_3,A_3OA_4,... são congruentes. Como consequência suas alturas relativamente às bases são também congruentes. O círculo de centro O e com raio igual ao comprimento destas alturas está inscrito no polígono. □

Cada polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes. Dessa forma, seu ângulo central θ é dado por,

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

.

1.3 Áreas e Perímetros de Polígonos Inscritos num Círculo de Raio R

A divisão do polígono em triângulos permite calcular sua área e seu perímetro por meio dos cálculos da área e do perímetro de um triângulo da partição.

Seja R o raio da circunferência circunscrita e A_i, A_j dois vértices consecutivos. O triângulo $\triangle OA_iA_j$ tem lados $OA_i = OA_j = R$ e ângulo central $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

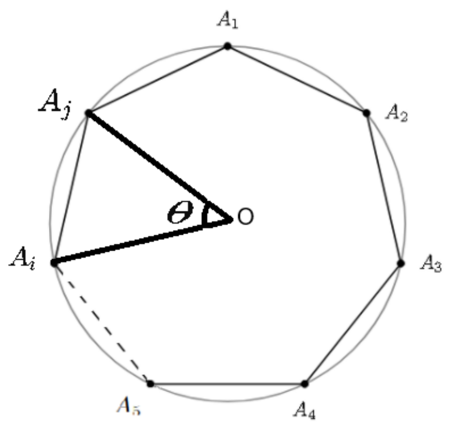

Figura 1.4: Polígono Inscrito

1.3.1 Áreas

Sendo θ o ângulo entre $\overline{OA_i}$ e $\overline{OA_j}$, e considerando o polígono regular de n lados inscrito num circulo de raio R, temos que a área S do triângulo OA_iA_j, é dada por $S = \frac{1}{2}R^2\text{sen}\theta$. Dessa forma o polígono regular de n lados tem área dada por,

$$S_{i,n} = \frac{n}{2}R^2\text{sen}\frac{2\pi}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

1.3.2 Perímetros

O perímetro do polígono inscrito numa circunferência pode ser obtido por meio do produto de n pela medida L_n do lado do polígono.

Pela fórmula da corda, obtemos:

$$L_n = 2R\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Substituindo $\theta = \frac{2\pi}{n}$, segue que

$$L_n = 2R\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Assim, o perímetro do polígono regular de n lados é dado por

$$P_{i,n} = nL_n = 2nR\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Podemos observar na Figura 1.5 que à medida que o número de lados, n, aumenta, o polígono inscrito vai se aproximando do círculo, logo os valores de sua área e seu perímetro também se aproximam da área do círculo dada por $A = \pi R^2$ e do comprimento da circunferência dado por $C = 2\pi R$.

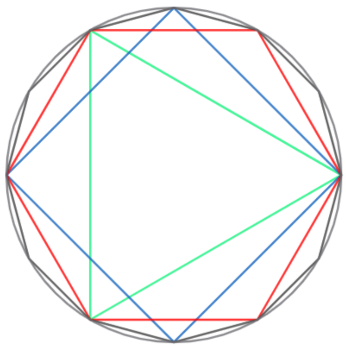

Figura 1.5: Polígonos Inscritos

A tabela a seguir exibe as medidas das áreas e dos perímetros de polígonos inscritos para $R = 1$ e alguns valores de n,

Tabela 1.1: Áreas e perímetros de polígonos regulares de n lados inscritos em uma circunferência de raio $R = 1$.

n	$S_{i,n}$	$P_{i,n}$
3	1,299038	5,196152
4	2,000000	5,656854
5	2,377641	5,877853
7	2,736410	6,074372
10	2,938926	6,180340
20	3,077684	6,264171
50	3,131338	6,279052
96	3,139721	6,282061
120	3,140530	6,282579

1.4 Áreas e Perímetros de Polígonos Circunscritos num Círculo de Raio R

No caso dos polígonos circunscritos a uma circunferência, o raciocínio segue de forma análoga ao dos polígonos inscritos. A principal diferença está na relação entre o raio da circunferência e o apótema do triângulo (que é a altura desse triângulo) formado pelo centro, um vértice e o ponto médio de um lado do polígono. Nesse contexto, o raio da circunferência corresponde ao apótema do triângulo, permitindo compreender geometricamente como as medidas de lados, perímetros e áreas se ajustam de modo que o polígono envolva completamente a circunferência.

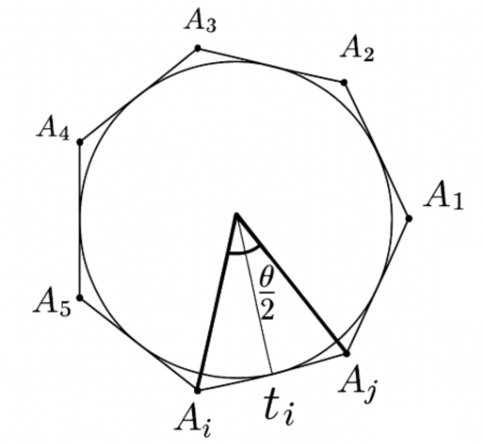

Figura 1.6: Polígono Circunscrito

Seja uma circunferência de centro O e raio R. Considere um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência, com vértices $A_1, \dots, A_i, A_j$ e pontos de tangência $T_1, \dots, T_i$. Denotando por θ o ângulo central entre pontos de tangência consecutivos.

No triângulo retângulo OT_iA_j, em que $OT_i = R$ e $T_iA_j = L_n/2$, obtemos

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{L_n/2}{R},$$

logo

$$L_n = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

1.4.1 Áreas

Agora, analisando o caso do polígono regular circunscrito a uma circunferência de raio R, a circunferência está inscrita no polígono, ou seja, todos os lados do polígono tocam a circunferência em exatamente um ponto.

Seja θ o ângulo entre as semirretas $\overline{OA_i}$ e $\overline{OA_j}$. Observamos que o triângulo OA_iA_j tem o raio R perpendicular ao lado $\overline{A_iA_j}$ no ponto médio desse lado. Assim, podemos considerar o triângulo retângulo formado pelo centro O, pelo vértice A_i e pelo ponto de tangência correspondente. O ângulo em O é igual a $\dfrac{\theta}{2}$.

Assim sendo, cada triângulo OA_iA_j tem base L_n e altura R, e dessa forma sua área pode ser calculada por:

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times L_n \times R = R^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Como o polígono regular é composto por n triângulos iguais, sua área total é:

$$S_{c,n} = nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

1.4.2 Perímetros

O perímetro do polígono regular circunscrito a uma circunferência pode ser obtido multiplicando-se o número de lados n pela medida L_n de cada lado do polígono.

Pelo desenvolvimento anterior, sabemos que o lado do polígono circunscrito é dado por:

$$L_n = 2R\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Substituindo $\theta = \frac{2\pi}{n}$, obtemos:

$$L_n = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Assim, o perímetro do polígono regular circunscrito de n lados será:

$$P_{c,n} = nL_n = 2nR\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Assim como nos casos dos polígonos inscritos para os polígonos circunscritos, à medida que o número de lados, n, aumenta, o polígono circunscrito vai se aproximando do círculo, e portanto sua área e seu perímetro vai se aproximando logo o valor de sua área e seu perímetro também se aproxima do comprimento da circunferência.

A tabela a seguir apresenta as medidas das áreas e dos perímetros dos polígonos circunscritos a uma circunferência de raio $R = 1$, para alguns valores de n.

A análise das Tabelas 1.1 e 1.2 comprovam o fato importante ja mencionado anteriormente: à medida que o número de lados n aumenta, tanto a área quanto o perímetro do polígono se aproximam dos valores correspondentes da circunferência.

Tabela 1.2: Áreas e perímetros de polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio $R = 1$.

n	$S_{c,n}$	$P_{c,n}$
3	5,19615	10,39230
4	4,00000	8,00000
5	3,63271	7,26543
7	3,30151	6,60303
10	3,16524	6,33048
20	3,10896	6,21793
50	3,14474	6,28949
96	3,14191	6,28382
120	3,14169	6,28337

Ainda que nunca se tornem idênticos, a diferença entre eles torna-se cada vez menor, um indício claro da ideia de aproximação sucessiva, que será formalizada no conceito de limite.

Essas expressões geométricas e trigonométricas constituem a base para compreender o raciocínio do Método da Exaustão, que será discutido no Capítulo 3, no qual exploraremos como os antigos gregos utilizaram tais relações para determinar, de forma intuitiva, as medidas exatas do círculo.

Capítulo 2

A ideia de Limite

O conceito de limite é um dos pilares do pensamento matemático moderno e está presente, de maneira intuitiva, em diversas situações cotidianas e geométricas. Antes mesmo de ser formalizado, o raciocínio de limite já aparecia em tentativas antigas de compreender grandezas que não podiam ser medidas diretamente, como o comprimento de curvas ou a área de superfícies circulares.

De maneira formal, o conceito de limite descreve o comportamento de uma sequência ou de uma função à medida que a variável independente se aproxima de determinado valor. Em outras palavras, o limite busca compreender o que acontece quando nos aproximamos indefinidamente de um ponto, sem necessariamente alcançá-lo.

No estudo das figuras planas, como visto no capítulo anterior, é possível calcular com exatidão as áreas e os perímetros de polígonos regulares. No entanto, quando se trata de figuras curvas, como a circunferência, esse cálculo se torna mais complexo. Surge, então, a necessidade de desenvolver estratégias que permitam aproximar essas medidas por meio de figuras conhecidas, esse é um processo que conduz naturalmente à ideia de limite.

Um outro exemplo simples pode ser pensado no contexto da velocidade média e velocidade instantânea. Imagine um carro percorrendo uma estrada: podemos calcular a velocidade média em um intervalo de tempo. No entanto, se diminuirmos cada vez mais esse intervalo, o valor obtido se aproxima da velocidade em um instante exato, é o que chamamos de velocidade instantânea.

2.1 A Necessidade de Aproximar.

Imagine que desejamos determinar a área de um círculo. Como a circunferência não possui lados, não é possível aplicar diretamente as fórmulas de polígonos regulares. Entretanto, podemos inscrever dentro do círculo um triângulo, um quadrado, um hexágono, um dodecágono e assim por diante.

Cada vez que aumentamos o número de lados, a figura resultante se torna mais parecida com o círculo. Observando o contorno dessas figuras, percebe-se que a diferença entre o polígono e a circunferência diminui progressivamente.

Essa percepção visual trata de um princípio importante: quanto mais lados possui o polígono, mais sua área e seu perímetro se aproximam dos valores correspondentes do círculo. Ainda que não possamos alcançar exatamente a forma curva, podemos nos aproximar dela tanto quanto desejarmos. Essa ideia será revista quando falarmos do Método da Exaustão.

2.2 O Raciocínio da Aproximação

A noção de limite também pode ser compreendida por analogia com outras situações. Pense, por exemplo, na medição da velocidade de um carro. Podemos calcular a velocidade média percorrendo certa distância em um tempo determinado. Se diminuirmos o intervalo de tempo considerado, o valor calculado se torna mais próximo da velocidade em um instante exato, chamada de velocidade instantânea.

De modo semelhante, quando calculamos áreas ou comprimentos a partir de aproximações sucessivas, estamos nos aproximando de um valor que não é diretamente acessível, mas que pode ser alcançado por meio de repetições cada vez mais refinadas de um mesmo processo.

Essa ideia de repetição e refinamento é o núcleo do conceito de limite. Uma grandeza é dita tender a um valor quando suas aproximações se tornam cada vez mais próximas desse valor, até que a diferença entre elas se torne imperceptível.

2.2.1 O Exemplo da Velocidade Instantânea

Consideremos o movimento de um automóvel em uma estrada retilínea. A posição do carro no instante t é dada por uma função $s(t)$, que representa a distância percorrida desde o ponto de partida, em metros, por exemplo.

De acordo com Filho e José(2018), a velocidade média entre dois instantes t_1 e t_2 é calculada por:

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Esse valor indica a taxa de variação da posição em um intervalo de tempo. Entretanto, se quisermos conhecer a velocidade (em um instante exato), reduzimos o intervalo de tempo considerado, fazendo t_2 cada vez mais próximo de t_1. Assim, a velocidade média se aproxima de um valor limite, que chamamos de velocidade instantânea:

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Por exemplo, suponha que o movimento de um corpo seja descrito por $s(t) = t^2$. Nesse caso, também suponha que o tempo t_2 seja o tempo t_1 acrescido de um tempo h, h>0. Desta forma, fazer t_2 se aproximar de t_1 é fazer h se aproximar de 0. Assim, :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2}{h} = 2t.$$

Portanto, a velocidade instantânea no instante t é $v(t) = 2t$. Isso significa que, quando $t = 3$ segundos, a velocidade é $v = 6$ m/s.

A fim de ilustrar o processo de aproximação, consideremos alguns valores de t_2 próximos de $t_1 = 3$. Os resultados estão apresentados na Tabela 2.1, evidenciando que a velocidade média se aproxima do valor de 6 m/s conforme o intervalo de tempo diminui.

Tabela 2.1: Aproximação da velocidade instantânea em $t = 3$ para $s(t) = t^2$

t_1	t_2	$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ (m/s)	Observação
3,0	4,0	7,0	Intervalo grande
3,0	3,5	6,5	Aproximação mais próxima
3,0	3,1	6,1	Intervalo reduzido
3,0	3,01	6,01	Muito próximo
3,0	3,001	6,001	Quase igual à velocidade instantânea
–	$\lim_{t_2 \to 3}$	**6,0**	Velocidade instantânea

Esse exemplo mostra como o raciocínio de aproximação sucessiva, presente desde os gregos com o método da exaustão, reaparece de forma moderna no conceito de limite. À medida que o intervalo de tempo tende a zero, obtemos um valor exato a velocidade instantânea.

2.3 A ideia intuitiva de limite

No contexto deste trabalho, o limite é abordado sob uma perspectiva geométrica e intuitiva. Ao considerarmos um polígono regular inscrito em uma circunferência, percebemos que, à medida que aumentamos o número de lados, a forma do polígono torna-se cada vez mais semelhante à do círculo. Consequentemente, a diferença entre suas áreas e seus perímetros vai diminuindo progressivamente, aproximando-se dos valores reais da circunferência.

Podemos, então, afirmar que a área do polígono tende à área do círculo e que o seu perímetro tende ao comprimento da circunferência. Essa noção de "tender a" não implica a realização de cálculos infinitos, mas a compreensão de um processo de aproximação sucessiva, no qual cada etapa produz um resultado mais próximo do valor buscado. Essa forma de raciocínio representa o cerne do conceito de limite e será fundamental para a compreensão do Método da Exaustão apresentado nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

O Método da Exaustão

A ideia central deste trabalho é demonstrar que, quando temos um polígono inscrito ou circunscrito a uma circunferência de raio igual a R, ao aumentarmos o número de lados desse polígono, sua área tende ao valor de πR^2 e seu perímetro ao valor de $2\pi R$. Para compreender esse comportamento, optamos pela utilização do método da exaustão, uma das maiores contribuições da matemática grega antiga para a compreensão das grandezas contínuas.

3.1 Origem e fundamento do método

O método da exaustão tem suas origens na Grécia Antiga e foi desenvolvido inicialmente por Eudoxo de Cnido (408 a.C.- 355 a.C.), sendo posteriormente aperfeiçoado por Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), considerado por muitos o maior matemático da Antiguidade.

Segundo Eves(2008), no *Livro X* dos *Elementos* de Euclides encontra-se a base conceitual do método da exaustão. Em sua proposição de abertura (X1), é afirmado que:

> "Se de qualquer grandeza subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do que restar outra parte não menor que sua metade, e assim por diante, chegar-se-á finalmente a uma grandeza menor do que qualquer grandeza fixada da mesma espécie."

Essa proposição demonstra a ideia de aproximação sucessiva, pois trata-se de um processo no qual a diferença entre uma grandeza conhecida e o valor real desejado é progressivamente reduzida. O princípio de Eudoxo permitiu que os gregos tratassem de grandezas contínuas (como áreas e volumes) sem a noção moderna de número real ou de infinito.

De acordo com Silva(2019) O método da exaustão, como o nome sugere, consiste em "esgotar" a diferença entre uma figura geométrica e outra, por meio da soma ou subtração de partes menores. Em essência, trata-se de um precursor do conceito moderno de limite, embora sem o aparato algébrico e analítico desenvolvido séculos mais tarde.

Somente com Arquimedes de Siracusa esse princípio foi aplicado de maneira sistemática. O matemático utilizou o método da exaustão para determinar áreas e volumes de figuras curvas, como o círculo, a parábola e a esfera, alcançando resultados de grande precisão. Embora ainda sem recorrer ao cálculo infinitesimal, sua abordagem já antecipava as ideias de integração e limite, que mais tarde seriam formalizadas por Newton e Leibniz.

3.2 Aplicação geométrica

Do ponto de vista geométrico, o método da exaustão baseia-se na aproximação de figuras curvas por polígonos regulares. Arquimedes aplicou essa técnica para determinar o valor da área do círculo e o comprimento da circunferência, utilizando polígonos inscritos e circunscritos com número crescente de lados.

A aplicação geométrica do método pode ser observada na Figura 3.1, que ilustra um triângulo, um quadrado, um hexágono e um dodecágono inscritos em uma circunferência. Observa-se que as áreas dessas figuras satisfazem a relação:

$$A_{\text{círculo}} > A_{\text{dodecágono}} > A_{\text{hexágono}} > A_{\text{quadrado}} > A_{\text{triângulo}}.$$

Com o aumento do número de lados n, a área do polígono inscrito aproxima-se cada vez mais da área da circunferência, evidenciando o processo de exaustão.

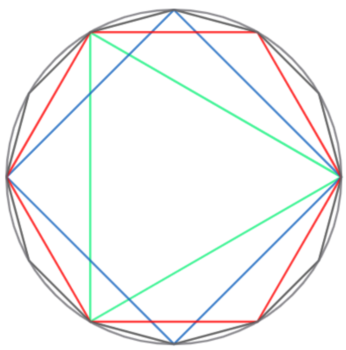

Figura 3.1: Polígonos Inscritos

Arquimedes também utilizou polígonos circunscritos, o que lhe permitiu determinar limites superior e inferior para a medida da área e do perímetro do círculo, uma vez que a área do círculo circunscrito é maior que a área do círculo propriamente dito, enquanto a área do polígono inscrito é menor. Dessa forma, o valor verdadeiro da área do círculo fica compreendido entre essas duas medidas, permitindo obter aproximações cada vez mais precisas. Esse raciocínio possibilitou a Arquimedes estabelecer intervalos numéricos estreitos para o valor de π, demonstrando a eficácia do método da exaustão como instrumento de aproximação e de análise geométrica.

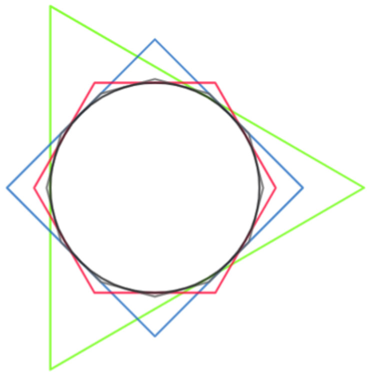

Figura 3.2: Polígonos Circunscritos

Do mesmo modo, a aplicação geométrica do método pode ser observada na Figura 3.2, que ilustra um triângulo, um quadrado, um hexágono e um dodecágono circunscritos em uma circunferência. Observa-se que as áreas dessas figuras satisfazem a relação:

$$A_{\text{círculo}} < A_{\text{dodecágono}} < A_{\text{hexágono}} < A_{\text{quadrado}} < A_{\text{triângulo}}.$$

Capítulo 4

Área e Perímetro do Círculo por meio do Método da Exaustão

O estudo desenvolvido até aqui permitiu compreender, de forma geométrica e histórica, como o Método da Exaustão conduz à determinação aproximada das medidas do círculo. No entanto, para justificar matematicamente essas aproximações, é necessário formalizar o conceito de limite, que constitui a base do cálculo diferencial e integral.

Neste capítulo, o raciocínio intuitivo apresentado anteriormente será traduzido numa linguagem mais formal. Consideraremos o comportamento das áreas e dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio R quando o número de lados n cresce indefinidamente ($n \to \infty$).

A partir dessa análise, será possível demonstrar que as áreas e os perímetros dos polígonos regulares de n lados tendem aos valores πR^2 e $2\pi R$, mostrando a relação entre o método geométrico de Arquimedes e o formalismo moderno do cálculo.

Na Seção 4.1, apresentamos a definição formal de limite e as propriedades que serão utilizadas nas demonstrações. Em seguida, aplicamos esses resultados para calcular os limites das áreas e dos perímetros, evidenciando a convergência das aproximações obtidas pelo Método da Exaustão.

4.1 Definição formal e propriedades fundamentais do limite

O conceito intuitivo de limite, já discutido anteriormente, pode agora ser formalizado de maneira mais precisa.

De modo geral, é interessante compreender o comportamento de certas expressões quando a variável tende ao infinito, como ocorre quando o número de lados de um polígono regular cresce indefinidamente. De acordo com Neto(2014),

Definição 6. *Dizemos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se, para todo número $\varepsilon > 0$*, existe um número* $\delta > 0$ *tal que, sempre que* $0 < |x-a| < \delta$*, tem-se* $|f(x) - L| < \varepsilon$*. Em outras palavras, os valores de* $f(x)$ *podem ser tornados tão próximos de* L *quanto se deseje, bastando tomar* x *suficientemente próximo de* a*.*

As propriedades fundamentais que serão utilizadas ao longo das demonstrações são as seguintes:

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;
4. Se c é uma constante, então $\lim_{x\to a} c = c$;
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$; (Primeiro Limite Fundamental)
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

As demonstrações das propriedades de 1 a 5 podem ser encontradas em livros de Cálculo Diferencial e Integral para uma variável, como por exemplo Simmons(1987), Leithold(1977), entre outros. A demonstração da propriedade 6 é consequência direta do primeiro limite fundamental, como podemos ver a seguir.

Sabemos que:

$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}.$$

Logo,

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\text{sen}x}{x\cos x}.$$

Como $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, aplicando a propriedade do produto de limites, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

portanto,

$$lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

4.2 Passagem ao limite: áreas e perímetros do círculo

Nesta seção, utilizaremos os resultados obtidos nas seções 1.1.2 e 1.3.2 para as áreas e os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio R, a fim de estabelecer a conexão entre o raciocínio geométrico do método da exaustão e o conceito analítico de limite.

A partir das expressões obtidas para as áreas e perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é possível estabelecer uma relação direta entre o raciocínio geométrico do método da exaustão e o conceito moderno de limite. Essa abordagem evidencia como a repetição sucessiva de aproximações conduz, no limite, aos valores exatos de área e comprimento da circunferência.

4.2.1 Área do Círculo

A área do polígono regular inscrito de n lados é

$$S_{i,n} = \frac{n}{2} R^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Usando a identidade trigonométrica $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\theta \cos\theta$, obtemos

$$S_{i,n} = nR^2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Façamos a mudança de variável $x = \frac{\pi}{n}$. Quando n tende ao infinito, temos $x \to 0^+$ ("x"tende a 0 pela direita) e $n = \frac{\pi}{x}$. Assim:

$$S_{i,n} = \frac{\pi}{x} R^2 \text{sen} x \cos x = \pi R^2 \left(\frac{\text{sen} x}{x}\right) \cos x.$$

Pelo primeiro limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$ e pela continuidade de $\cos x$ em 0 (onde $\cos 0 = 1$), segue que

$$\lim_{n\to\infty} S_{i,n} = \pi R^2.$$

De modo análogo, para o polígono circunscrito, a área é dada por

$$S_{c,n} = nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Com a mesma substituição $x = \frac{\pi}{n}$, temos:

$$S_{c,n} = \pi R^2 \left(\frac{\tan x}{x}\right) \text{sen} x.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}x = 1$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S_{c,n} = \pi R^2.$$

Logo, as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos convergem para o mesmo valor, demonstrando que a área do círculo é o limite comum dessas aproximações, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_{i,n} \leq \; S_c \leq \lim_{n\to\infty} S_{c,n}$$

$$\pi R^2 \leq \; S_c \leq \pi R^2$$

Portanto, $S_c = \pi R^2$.

4.2.2 Limite dos Perímetros

O perímetro do polígono inscrito é

$$P_{i,n} = 2nR\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Com $x = \dfrac{\pi}{n}$, obtemos

$$P_{i,n} = 2\frac{\pi}{x}R\text{sen}x = 2\pi R\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right),$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,n} = 2\pi R.$$

Para o polígono circunscrito, o perímetro é dado por

$$P_{c,n} = 2nR\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

De modo análogo, com $x = \dfrac{\pi}{n}$,

$$P_{c,n} = 2\frac{\pi}{x}R\tan x = 2\pi R\left(\frac{\tan x}{x}\right),$$

e, usando $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} P_{c,n} = 2\pi R.$$

Como,

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,n} \leq \; P_c \leq \lim_{n\to\infty} P_{c,n}$$

$$2\pi R \leq \ P_c \leq 2\pi R$$

Portanto, $P_c = 2\pi R$.

Os valores obtidos evidenciam que, à medida que o número de lados aumenta, o perímetro do polígono inscrito tende por baixo a $2\pi R$, enquanto o do polígono circunscrito tende por cima ao mesmo valor. O círculo, portanto, é o limite dessas aproximações.

O raciocínio revela o mesmo princípio do método da exaustão: à medida que as subdivisões se tornam infinitamente pequenas, as aproximações sucessivas "exaurem" a diferença entre o polígono e a circunferência, alcançando o valor exato das grandezas contínuas.

4.3 Relação com o número π

Um resultado importante obtido a partir do que mencionamos anteriormente é a aproximação do número π, definido como a razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro.

Arquimedes aplicou o Método da Exaustão para calcular os limites superior e inferior para π, chegando à aproximação:

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429.$$

Esse cálculo foi obtido utilizando polígonos inscritos e circunscritos com 96 lados, constituindo uma das aproximações mais precisas conhecidas na Antiguidade.

Podemos observar, utilizando os dados obtidos nas tabelas 1.1 e 1.2 que 3,13972$< \pi <$ 3,14191.

Nesse caso, utilizando $n = 96$, encontramos uma aproximação para π com 1 casa decimal, isto é, $\pi = 3,1$. Se quisermos melhorar esta aproximação podemos utilizar o mesmo procedimento considerando polígonos com número de lados maior. Por exemplo, se utilizarmos as expressões obtidas para polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência de raio $R = 0{,}5$, podemos obter as aproximações para π de acordo com a tabela abaixo. Por exemplo se considerarmos $n = 400$ temos que $\pi = 3{,}1415$ com erro na 5° casa decimal.

Tabela 4.1: Perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência de raio $R = 0{,}5$.

n	$P_{i,n}$	$P_{c,n}$
3	2,598076	5,196152
4	2,828427	4,000000
5	2,938926	3,632713
10	3,090170	3,196226
12	3,105829	3,215390
20	3,132628	3,173078
96	3,141031	3,141913
100	3,141032	3,141608
200	3,141477	3,141545
400	3,141558	3,141588

Capítulo 5

Propostas de Atividades Gerais com o GeoGebra

Uma possibilidade didática para explorar o Método da Exaustão no contexto da Educação Básica consiste na utilização do software GeoGebra, que permite a construção dinâmica de figuras geométricas e a investigação de propriedades métricas de maneira visual e interativa.

A proposta aqui apresentada tem como objetivo possibilitar aos estudantes a construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, bem como a análise de suas áreas e perímetros, favorecendo a compreensão intuitiva da ideia de aproximação sucessiva e, consequentemente, do conceito de limite.

A atividade pode ser desenvolvida com estudantes do Ensino Médio, especialmente em turmas nas quais já tenham sido trabalhados conteúdos como circunferência, polígonos regulares, perímetro, área e noções básicas de trigonometria. Como recursos, são necessários computadores ou celulares com acesso ao GeoGebra, além de uma tabela de registro para anotação das medidas obtidas.

A proposta está organizada em três atividades investigativas, descritas a seguir.

5.1 Atividade 1 – Construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos

Nesta atividade, propõe-se que os estudantes construam, no GeoGebra, polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio fixo, com o objetivo de observar e comparar suas áreas e perímetros.

Inicialmente, recomenda-se a construção de um quadrado inscrito e de um quadrado circunscrito, de modo que os alunos compreendam o procedimento antes de generalizá-lo para outros polígonos regulares, como triângulo equilátero, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono.

Construção do quadrado inscrito

Para a construção do quadrado inscrito, sugere-se o seguinte roteiro no GeoGebra:

1. Utilize a ferramenta *Circunferência (centro e raio)* para construir uma circunferência de centro O e raio fixo.
2. Utilize a ferramenta *Ponto* para marcar um ponto A sobre a circunferência.
3. Construa a reta que passa pelos pontos O e A utilizando a ferramenta *Reta*.
4. Construa a reta perpendicular à anterior passando por O, utilizando a ferramenta *Reta perpendicular*.
5. Determine os pontos de interseção entre as retas e a circunferência com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*.
6. Utilize a ferramenta *Polígono* para unir os pontos obtidos, formando o quadrado inscrito.
7. Calcule a área utilizando a ferramenta *Área*.
8. Determine o perímetro utilizando a ferramenta *Perímetro*.

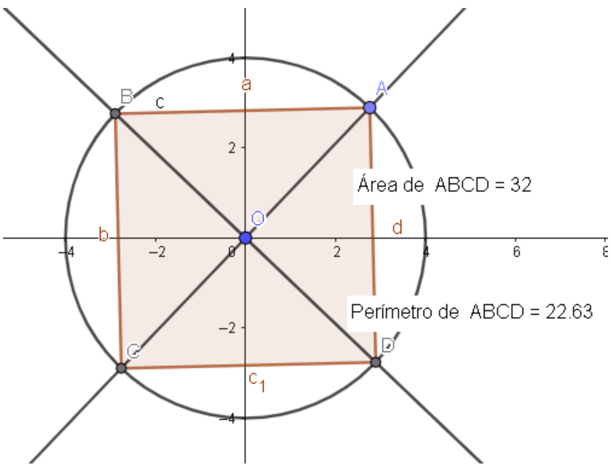

Figura 5.1: Quadrado Inscrito na Circunferência com Centro na Origem e Raio 4

Construção do quadrado circunscrito

Após a construção do quadrado inscrito, propõe-se a construção do quadrado circunscrito à mesma circunferência.

1. Considere a circunferência de centro O e raio R já construída.
2. Construa duas retas perpendiculares que se intersectam em O, utilizando a ferramenta *Reta perpendicular*.
3. Determine os pontos de interseção dessas retas com a circunferência utilizando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*
4. Por cada um desses pontos, construa retas paralelas às retas perpendiculares traçadas anteriormente, utilizando a ferramenta *Reta paralela*.
5. Determine os pontos de interseção entre essas retas paralelas.
6. Utilize a ferramenta *Polígono* para unir esses pontos e formar o quadrado circunscrito.
7. Calcule a área utilizando a ferramenta *Área*.
8. Determine o perímetro utilizando a ferramenta *Perímetro*.

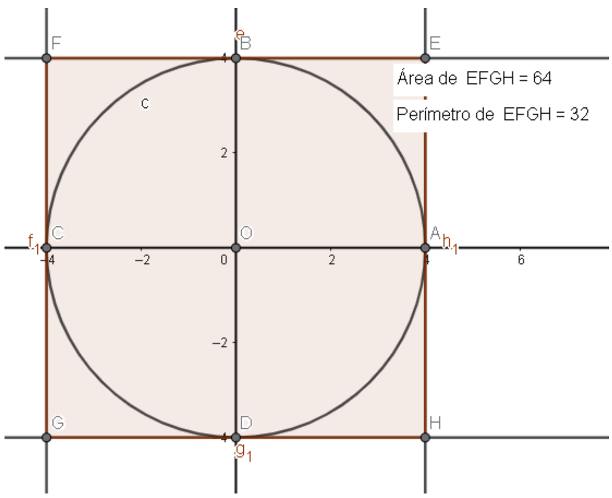

Figura 5.2: Quadrado Circunscrito numa circunferência com Centro na Origem e Raio 4.

Tabela de registro da Atividade 1

Os estudantes podem organizar os dados obtidos em uma tabela como a seguir:

Tabela 5.1: Registro das áreas e perímetros dos polígonos construídos.

Nº de lados	**Área inscrita**	**Perímetro inscrito**	**Área circunscrita**	**Perímetro circunscrito**
3				
4				
5				
6				
8				
12				

Questões investigativas da Atividade 1

Ao final da atividade, o professor pode propor questões como:

1. O que acontece com a área do polígono inscrito quando aumentamos o número de lados?
2. E com a área do polígono circunscrito?
3. O que se observa em relação aos perímetros?
4. A área do círculo parece estar entre quais valores?
5. O perímetro da circunferência parece estar entre quais valores?

Essa atividade permite ao estudante perceber, de forma concreta, que os polígonos inscritos fornecem aproximações por falta, enquanto os circunscritos fornecem aproximações por excesso, retomando a essência do Método da Exaustão.

5.2 Atividade 2 – Investigação da relação entre o raio e o lado do polígono

Nesta atividade, propõe-se que os estudantes investiguem a relação entre o raio da circunferência e o comprimento do lado de um polígono regular inscrito ou circunscrito.

Inicialmente, os alunos devem construir um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio conhecido e medir, com o auxílio da ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*, tanto o raio quanto o lado do polígono.

Em seguida, devem repetir o processo para diferentes números de lados, registrando os dados obtidos.

Tabela de registro da Atividade 2

Tabela 5.2: Relação entre o raio da circunferência e o lados dos polígonos circunscritos.

Número de lados n	**Raio** R	**Lado inscrito** l_i	**Lado circunscrito** l_c
3			
4			
5			
6			
8			
12			

Questões investigativas da Atividade 2

1. Existe alguma relação entre o raio da circunferência e o lado do polígono inscrito?
2. O que muda quando o polígono é circunscrito?
3. O lado do polígono inscrito é maior ou menor que o lado do polígono circunscrito?
4. Como o número de lados interfere no comprimento do lado do polígono?

Com a realização das medições, os estudantes podem ser conduzidos à formulação das expressões:

$$l_i = 2R\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e

$$l_c = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

onde l_i representa a medida do lado do polígono inscrito, l_c a medida do lado do polígono circunscrito, R o raio da circunferência e n o número de lados do polígono.

Essa atividade favorece a compreensão de que as fórmulas geométricas podem ser construídas a partir da observação, da medição e da generalização de padrões.

5.3 Atividade 3 – Aproximação da área e do perímetro do círculo

Na terceira atividade, propõe-se que os alunos construam polígonos regulares com um número elevado de lados, tanto inscritos quanto circunscritos, a uma mesma circunferência. Sugere-se utilizar valores como $n = 20$, $n = 30$, $n = 50$ e, se possível, valores ainda maiores.

O objetivo é que os estudantes observem como as áreas e os perímetros desses polígonos se aproximam, progressivamente, da área e do comprimento da circunferência.

Tabela de registro da Atividade 3

Tabela 5.3: Aproximação da área e do perímetro do círculo por polígonos regulares.

n	**Área inscrita**	**Área circunscrita**	**Perímetro inscrito**	**Perímetro circunscrito**
10				
20				
30				
50				
100				

Questões investigativas da Atividade 3

1. O que acontece com a área do polígono inscrito quando n aumenta?
2. O que acontece com a área do polígono circunscrito quando n aumenta?
3. O que acontece com os perímetros?
4. Os valores obtidos parecem se aproximar de quais medidas conhecidas?
5. O que essa aproximação sugere sobre a área e o perímetro do círculo?

Nesta etapa, os alunos podem ser conduzidos à compreensão de que as áreas dos polígonos de n lados inscritos e circunscritos numa circunferência de raio R tendem a πR^2 e que os perímetros dos polígonos de n lados inscritos e circunscritos numa circunferência de raio R tendem à $2\pi R$.

Assim, essa atividade permite que os estudantes visualizem concretamente a ideia de aproximação sucessiva e compreendam, de forma intuitiva, a noção de limite.

Capítulo 6

Considerações Finais

O que apresentamos neste trabalho tem grande conexão com o ensino de geometria, e da matemática de um modo geral, à nível básico, além de seu valor histórico e matemático, o método da exaustão apresenta grande potencial pedagógico. Por meio dele, é possível introduzir aos alunos noções intuitivas de aproximação, limite e continuidade, sem recorrer diretamente ao formalismo do cálculo diferencial e integral.

Como destaca Silva(2019), compreender o Método da Exaustão auxilia na formação de um pensamento geométrico mais profundo, permitindo ao estudante perceber o raciocínio que levou ao desenvolvimento do cálculo moderno. Atividades que envolvem a construção de polígonos inscritos e circunscritos em um círculo, com o auxílio de softwares como *GeoGebra* ou materiais concretos, podem favorecer o raciocínio investigativo e visual.

A proposta didática com o GeoGebra apresenta grande potencial pedagógico por articular visualização, experimentação, conjectura e formalização matemática.

Ao construir e manipular polígonos regulares associados a uma circunferência, os estudantes não apenas executam procedimentos geométricos, mas também desenvolvem a compreensão conceitual das ideias de aproximação, convergência e limite.

Além disso, essa abordagem favorece uma aprendizagem investigativa, na qual o aluno assume papel ativo na construção do conhecimento, observando padrões, registrando resultados, comparando valores e formulando hipóteses.

Do ponto de vista da formação conceitual, a proposta constitui uma forma acessível de introduzir noções que futuramente estarão relacionadas ao cálculo diferencial e integral, estabelecendo uma ponte entre a geometria clássica e a análise matemática moderna.

Dessa forma, o uso do GeoGebra no estudo de polígonos inscritos e circunscritos se apresenta como uma estratégia didática relevante para o ensino da geometria e para a compreensão intuitiva do Método da Exaustão.

Ao observar o comportamento das áreas e perímetros de polígonos regulares , aumentando gradativamente o número de lados, o aluno passa a compreender que a diferença entre as áreas (ou perímetros) dos polígonos e da circunferência se tornam cada vez menor, aproximando-se do conceito de limite.

Segundo Lima(2013), o Método da Exaustão pode ser visto não apenas como uma técnica matemática, mas como uma ferramenta didática, capaz de aproximar o estudante do pensamento geométrico clássico e, ao mesmo tempo, das ideias do cálculo.

Dessa forma, o uso pedagógico do Método da Exaustão pelos professores em sala de aula, permite contextualizar a história da matemática e estimular a curiosidade e a compreensão conceitual, cumprindo um papel essencial no ensino da geometria e da análise moderna.

Bibliografia

Barbosa, João Lucas Marques (1985). *Geometria euclidiana plana*. SBM.

Eves, Howard (2008). *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP.

Filho, Gabriel e Hilson José (2018). "Velocidade instantânea". Em.

Iezzi, Gelson, Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo (1997). *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9*. 7ª ed. Editora Atual: São Paulo.

Kazapi, Juliano (2023). "Contribuições para o ensino-aprendizagem de geometria: cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência pelo método da exaustão". Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, p. 99.

Leithold, Avila e (1977). *Cálculo com geometria analítica*. Vols. I–II. Harper & Row do Brasil Ltda: São Paulo.

Lima, Francisco do Nascimento (2013). "Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri". Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). João Pessoa - PB: Universidade Federal da Paraíba, p. 54.

Manfio, Fernando (2013). "Fundamentos da geometria". Em: *São Paulo: ICMC-USP. Disponível em: http://www. icmc. usp. br/pessoas/manfio/Fundamentos. pdf Ultimo acesso* 12.

Neto, Antonio Caminha Muniz (2014). "Fundamentos de Cálculo". Em: *Coleçao Profmat, SBM, Rio de Janeiro*.

Neto, Antonio Caminha Muniz (2022). "Geometria, coleçao profmat". Em: *Rio de Janeiro, SBM*.

Oliveira, Rubens Gualberto de (2016). "O baricentro dos polígonos convexos". Em.

Silva, João Dantas Almeida (2019). "Sobre o método da exaustão de Eudoxo e o cálculo de áreas de regiões planas". Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Feira de Santana - BA: Universidade Estadual de Feira de Santana, p. 67.

Simmons, George F. (1987). *Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 2. McGraw-Hill: São Paulo.