

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO PEDRO SANTOS BRITO MICHELETTI

UMA APROXIMAÇÃO INTUITIVA AO CÁLCULO INTEGRAL

CURITIBA

2026

JOÃO PEDRO SANTOS BRITO MICHELETTI

UMA APROXIMAÇÃO INTUITIVA AO CÁLCULO INTEGRAL

AN INTUITIVE APPROACH TO INTEGRAL CALCULUS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientadora: Paula Olga Gneri.

Coorientador: Rodolfo Gotardi Begiato.

CURITIBA

2026



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba**



JOAO PEDRO SANTOS BRITO MICHELETTI

UMA APROXIMAÇÃO INTUITIVA AO CÁLCULO INTEGRAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 02 de Março de 2026

Dra. Paula Olga Gneri, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Marcio Rostirolla Adames, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Olivier Brahic, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 02/03/2026.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Paula Olga Gneri e Rodolfo Gotardi Begiato, por toda ajuda, paciência e companheirismo na elaboração deste trabalho.

Aos colegas de PROFMAT, que fizeram o decorrer do curso fluir de maneira mais agradável.

Aos meus pais, por sempre me incentivarem a estudar.

Aos meus amigos, pelos ótimos momentos que me fizeram viver.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

Há beleza bastante em estar aqui e não noutra parte qualquer.
Alberto Caeiro (Fernando Pessoa): poeta português.

RESUMO

Neste trabalho, elaboramos um conjunto de atividades para o Ensino Médio relacionadas ao cálculo de áreas, visando desenvolver a intuição da integral de funções não negativas. Para isso, apresentamos parte da teoria da integração de funções reais de uma variável real sem recorrer aos conceitos de limite e derivada. Em vez disso, utilizamos o Método da Exaustão e o Método de Equilíbrio, empregados por Arquimedes na antiguidade clássica, que possibilita a resolução de problemas de cálculo de áreas para funções positivas que possuem certa simplicidade em sua lei de formação.

Palavras-chave: Cálculo de Áreas; Integrais; Método da Exaustão; Método de Equilíbrio de Arquimedes; Educação Básica.

ABSTRACT

In this work, we developed a set of activities for high school students related to the calculation of areas, aiming to develop an intuition for the integral of nonnegative functions. To this end, we present part of the theory of integration of real functions of a real variable without resorting to the concepts of limits and derivatives. Instead, we apply the Method of Exhaustion and the Method of Equilibrium, employed by Archimedes in classical antiquity, which allows for the solution of area problems for positive functions that have certain simplicity in their formation rule.

Keywords: Area Calculation; Integrals; Method of Exhaustion; Archimedean Method of Equilibrium; Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – O Crescente Fértil	7
Figura 2.1 – Segmento parabólico	12
Figura 2.2 – Triângulos aproximando a área do segmento parabólico	13
Figura 2.3 – Área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = x^2$, com $x \in [0, b]$	14
Figura 2.4 – Área do segmento parabólico	15
Figura 2.5 – Aproximação: (a) por excesso; (b) por falta	16
Figura 2.6 – refinamento: (a) soma superior; (b) soma inferior	16
Figura 2.7 – Cálculo da área da região limitada pela função x^2 e o eixo x em $[0, b]$	17
Figura 3.1 – Partição de um intervalo real	27
Figura 3.2 – Gráfico de função degrau	28
Figura 3.3 – Soma de funções degrau: $h(x) = f(x) + j(x)$	29
Figura 3.4 – Gráfico da função $f(x) = [x]$, com $x \in [-3, 4]$	29
Figura 3.5 – Gráfico de uma função limitada	30
Figura 3.6 – Função crescente	31
Figura 3.7 – Função estritamente crescente	32
Figura 3.8 – Função decrescente	32
Figura 3.9 – Função estritamente decrescente	33
Figura 3.10 – Função monótona por partes	33
Figura 4.1 – Integral de função degrau	35
Figura 4.2 – Integral da Soma $h(x) = (f + j)(x)$ no intervalo $[0, 6]$	37
Figura 4.3 – Integral da função $(2 \cdot f)(x)$ no intervalo $[0, 6]$	38
Figura 4.4 – Integral de $j(x)$ nos intervalos $[0, 2]$ e $[2, 6]$	40
Figura 4.5 – Invariância da integral sob translação	40
Figura 4.6 – Dilatação do intervalo de integração	41
Figura 4.7 – Aproximação por falta e por excesso	42
Figura 5.1 – Resolução da questão 2 - (b)	59
Figura 5.2 – Solução da questão 3 - (a)	60
Figura 5.3 – Solução da questão 7 - (a)	62
Figura 5.4 – Solução da questão 8 - (a)	62
Figura 5.5 – Área entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = 2x + 3$ em $[0, 1]$	63
Figura 5.6 – Área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[0, 2]$	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Justificativa para a escolha do tema	10
1.2	Objetivo	10
1.3	Estrutura do trabalho	11
2	MEDIDAS DE ÁREAS	12
2.1	O Método de equilíbrio e da exaustão no cálculo da área de um segmento parabólico	12
2.2	Área como função	20
3	CONCEITOS PRELIMINARES	22
3.1	Máximo, Mínimo, Supremo e ínfimo de um conjunto	22
3.2	Teoremas do Supremo e do Ínfimo	23
3.3	Função degrau	26
3.4	Soma e produto de Funções degrau	27
3.5	Função limitada	30
3.6	Funções monótonas	30
4	CÁLCULO INTEGRAL	34
4.1	Integração de funções degrau	34
4.1.1	Propriedades da integral de uma função degrau	36
4.1.1.1	Propriedade aditiva	36
4.1.1.2	Propriedade Homogênea	37
4.1.1.3	Propriedade da Linearidade	37
4.1.1.4	Propriedade da comparação	38
4.1.1.5	Propriedade da Aditividade do Intervalo de Integração	39
4.1.1.6	Propriedade da Invariância sob Translação	39
4.1.1.7	Propriedade da contração/dilatação do intervalo de integração	41
4.1.1.8	Observações	41
4.2	Integração de funções mais gerais	42
4.3	Integral superior e integral inferior	43
4.4	Medida da área entre o eixo x e o gráfico de uma função como uma integral	44
4.5	Teoria e técnica de integração	44
4.6	Integral de uma função monótona e limitada	46
4.7	Propriedades da integral	49
4.7.1	Propriedade da Linearidade	49

4.7.2	Propriedade da Aditividade do Intervalo de Integração	51
4.7.3	Propriedade da Invariância sob Translação	52
4.7.4	Propriedade da Dilatação/Contração do Intervalo de Integração	53
4.7.5	Propriedade da Comparação	53
4.8	Integração de Funções Polinomiais	54
5	ATIVIDADES	56
5.1	Atividade 1 - Funções de grau	56
5.1.1	Resoluções da atividade 1	59
5.2	Atividade 2 - Áreas	63
5.2.1	Resoluções da Atividade 2	66
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

Enquanto realizamos a cadeira de cálculo na universidade nos deparamos com a diferenciação e a integração, duas ideias que surgem como uma quebra de paradigma. Sem percebermos, num primeiro momento, estamos estudando conceitos que foram motivos de intriga entre matemáticos que viveram entre os séculos XVII e XVIII. Estamos diante da famigerada “Guerra do Cálculo”, embate protagonizado por Newton ¹ e Leibniz ² (e também por seus partidários), pela primazia do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, já que “Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou” (Eves, 2011, p. 417). Esse infrutífero, porém fascinante, confronto fez com que os matemáticos ingleses ficassem, até certo ponto, afastados dos que estudavam na Europa continental, até meados do século XVIII (Boyer, 2012). Segundo Bardi (2008) e Eves (2011), podemos considerar que os dois, superlativa e independentemente, desenvolveram o cálculo diferencial e integral. Não obstante a isso, vamos nos concentrar na civilização grega, que viveu entre o Mar Egeu e o Mar Jônico, e lançou os alicerces para que Newton e Leibniz pudessem progredir.

A Idade da Pedra durou de 5 milhões a.C. até 3000 a.C., aproximadamente. Nesse contexto, a humanidade se ocupava basicamente com a sua subsistência, encarregando-se, precipuamente, de colher (em campos desorganizados, que não podem ser confundidos com fazendas) e caçar. Quase ao final da Idade da Pedra o mundo vivenciou uma mudança brusca no clima em diversas de suas regiões. Fugindo da desertificação em várias áreas do planeta, a humanidade foi compelida a viver no entorno de grandes rios, como: Nilo no Egito, Tigre e Eufrates na Mesopotâmia (região onde fica o Iraque hoje), Amarelo na China e Indo na Índia (Eves, 2011).

De acordo com Eves (2011), a densidade populacional desses lugares se tornou alta demais para que os povos que ali viviam pudessem se alimentar caçando e colhendo como antes, dessa forma, fez-se imperativo o desenvolvimento da agricultura, que culminou em profundas mudanças culturais. Não à toa Davis e Hersh (2013) colocam que a matemática, como profissão sistemática, teve sua origem nas civilizações que estabeleceram-se às margens dos rios Nilo, Tigre e Eufrates, na região conhecida como Crescente Fértil, ilustrado na Figura 1.1. Com o desenvolvimento da agricultura, surgiu, no Egito, uma classe de pessoas que podiam se dedicar ao estudo, os chamados sacerdotes, a quem o filósofo Aristóteles atribuiu o início do estudo da geometria (Boyer, 2012).

Por volta de 450 a.C., Heródoto, considerado o pai da História, foi ao Egito. Observou as realizações egípcias e conversou com sacerdotes (Boyer, 2012). Ele relata que, com as cheias do

¹ Sir Isaac Newton (1642-1727): matemático e físico inglês.

² Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): matemático alemão.

Figura 1.1 – O Crescente Fértil



Fonte: Netchev (2020).

rio Nilo, as terras em volta do rio eram modificadas, e, para que a cobrança de impostos fosse ajustada, fazia-se necessária uma nova medição para que o pagamento fosse apropriado, valor que era diretamente proporcional à área da terra de cada agricultor (Lima, 2011). Daí vem a palavra *geometria*, que significa, literalmente, medida da terra. Por este motivo é creditada aos egípcios a origem da geometria (Boyer, 2012).

Com o intercâmbio cultural entre os gregos e os egípcios o estudo da geometria progrediu de maneira diferente da inicial. No princípio a geometria foi estudada para a solução de problemas essencialmente práticos, como o já citado cálculo de áreas de terras, isto é, de maneira algorítmica, pois “Nos mais antigos documentos babilônicos e egípcios (que datam de aproximadamente 1700 a.C.) há apenas enunciados de problemas, e regras apresentadas sob forma de receitas para resolver esses problema” (Lima, 2011, p. 2). Com os gregos, o estudo de geometria atinge outro patamar, desconectando-se de problemas práticos, a geometria possuía apelo heurístico e com isso, era necessário demonstrar afirmações, de maneira lógica-dedutiva (Davis e Hersh, 2013).

Segundo Eves (2011), deve-se a Tales de Mileto (640? - 564? a.C.) a aplicação do raciocínio lógico-dedutivo em matemática, rendendo a ele a designação de primeiro matemático. Doravante, os gregos desenvolveram a geometria organizada de maneira abstrata, com definições, axiomas³, teoremas⁴, corolários⁵ etc, modo em que a matemática é organizada até hoje (Lima, 2011). Esse desenvolvimento culminou na sistematização da geometria dedutiva na obra antológica de Euclides, denominada de *Os elementos* (Davis e Hersh, 2013).

³ Axioma é uma proposição aceita como verdade sem demonstração. É a "regra do jogo matemático".

⁴ Teorema é uma proposição cuja validade foi inferida por um processo demonstração.

⁵ Corolário é uma consequência direta de um teorema.

Informalmente, para realizarmos a integração de uma função (de uma variável real) em um intervalo, devemos subdividi-lo em infinitas partes e somar ilimitadamente o produto dessas partes pelo valor que a função assume em cada uma delas. Processo que modernamente é conhecido como *Integral de Riemann*. De acordo com Eves (2011), o prelúdio dessa ideia é encontrado nas respostas que os gregos deram aos paradoxos ⁶ de Zenão de Eleia (aproximadamente 450 A.C.). Esses paradoxos tratam sobre a impossibilidade do movimento, segundo duas hipóteses. A primeira é considerar que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, e a segunda é acatar que uma grandeza é formada por um número enorme de partes atômicas indivisíveis (Eves, 2011). Dois dos paradoxos de Zenão mais conhecidos, que ilustram cada uma dessas hipóteses, são o da *dicotomia* e o da *flecha*.

- **Dicotomia:** se uma distância pode ser dividida indefinidamente, então deslocar-se por ela é impossível, porque para percorrê-la deve-se andar a sua metade, mas primeiro deve-se andar a sua quarta parte, a sua oitava parte, e assim por diante, indefinidamente. Então, para que algo possa percorrer essa distância, precisa percorrer infinitos intervalos em um tempo finito, mas, como é impossível esgotar uma quantidade infinita, o deslocamento não pode ser iniciado (Boyer, 2012).
- **Flecha:** Se o tempo é constituído de instantes indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, dado que em cada instante de tempo a sua posição está fixa. Portanto, a flecha jamais se move (Eves, 2011).

Os paradoxos foram resolvidos por Eudoxo (408?-355? a.C.), através da adoção do que hoje chamamos de Lema ⁷ de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), que diz que, dada duas grandezas que possuem uma razão (ou seja, nenhuma vale zero), pode-se determinar um múltiplo de uma delas que seja maior do que a outra (Boyer, 2012). Esse teorema embasa a proposição, doravante conhecida como *Método da Exaustão*, que declara que: se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor do que a sua metade, do restante subtrai-se uma parte não menor do que a sua metade, e assim em diante, restará, por fim, uma grandeza menor do que qualquer outra fixada previamente (Eves, 2011). Podemos também enunciar este Método de uma maneira mais moderna: Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza pré-fixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos encontrar N tal que $M(1 - r)^n < \varepsilon$ para todo $n > N$ (Boyer, 2012). Para enfatizar a importância do Método da Exaustão podemos citar que ele foi utilizado, por exemplo, para demonstrar a proposição: dados dois círculos C_1 e C_2 , de áreas com medidas A_1 e A_2 e de diâmetros com medidas d_1 e d_2 , respectivamente, então

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2,$$

⁶ Proposição que leva a uma contradição lógica.

⁷ Lema é um teorema utilizado na demonstração de uma proposição.

cuja demonstração foi efetuada, através de inscrições, nos círculos C_1 e C_2 , de polígonos regulares com cada vez mais lados (isto é, subdividindo cada vez mais a medida dos lados dos polígonos), fazendo com que, negando a tese, se chegasse a uma contradição e, com isso, o resultado foi provado por *redução ao absurdo*⁸.

De acordo com Eves (2011), o método da exaustão atingiu seu ápice com os estudos sobre áreas e volumes de Arquimedes, que provou resultados equivalentes a várias integrais definidas conhecidas hoje. Porém, o método da exaustão serve, assim como o princípio da indução matemática, para provar a validade de uma proposição/fórmula já conhecida. Sendo assim, para que Arquimedes pudesse utilizar o método da exaustão para provar uma fórmula, ele precisava conhecê-la primeiro. Para isso, desenvolveu o que posteriormente ficou conhecido como *método de equilíbrio de Arquimedes*, que consistia em considerar uma área como sendo uma soma de segmentos de reta ou um volume como sendo uma soma de seções planas (basicamente a ideia intuitiva da integral de Riemann) (Boyer, 2012). Como ele achava esse procedimento informal, utilizava o método da exaustão para validar de forma mais rigorosa os resultados obtidos, já que, apenas com a formalização moderna dos limites, o método de equilíbrio de Arquimedes se tornou rigoroso, evoluindo, em essência, para o que hoje se conhece como a moderna integração (Eves, 2011).

Com o apagão no desenvolvimento intelectual na Europa devido à era conhecida como a Idade das Trevas, o método da exaustão e o método de equilíbrio de Arquimedes, que se transformaram gradualmente no que hoje se conhece como *cálculo integral*, só tiveram uma evolução significativa 18 séculos depois de Arquimedes (Apostol, 1984). Esse desenvolvimento culminou com os trabalhos de Newton e Leibniz, desenvolvendo o cálculo diferencial e integral, um fato curioso, já que

[...] o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (Eves, 2011, p. 417).

Para desenvolvermos atividades que promovam a ideia intuitiva de integração, seguindo a origem histórica do cálculo, apresentamos o cálculo integral sem o uso de limites ou derivadas.

⁸ Redução ao absurdo é uma técnica de demonstração em que se nega a tese e, se isso implicar em uma contradição, então a tese é verdadeira.

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

O documento curricular orientador da Educação Básica - Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - na unidade temática de geometria (uma das cinco unidades temáticas da BNCC na parte de matemática), coloca que, “A **Geometria** envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, 2018, p. 271). Aliado a isso, na unidade temática de grandezas e medidas temos que

As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico (Brasil, 2018, p. 273).

Dentro dessas unidades temáticas, destacamos, conforme Brasil (2018), algumas habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante da Educação Básica:

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Considerando essas habilidades, desenvolvemos atividades sobre a integral de funções.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é a apresentação de uma lista de atividades que objetiva introduzir à ideia intuitiva de Cálculo Integral, especificamente integrais definidas, através do Cálculo de áreas de superfícies bidimensionais não triviais. Para elaboração, é considerado um viés histórico, a fim de oferecer aos estudantes a possibilidade de explorar a história e a cultura que a humanidade desenvolveu desde a época do Antigo Egito para resolver o problema de cálculo de áreas, introduzindo o Método de Arquimedes e as integrais de Riemann.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em seis capítulos; são eles:

- Capítulo 1 - Introdução.
- Capítulo 2 - Medidas de áreas: apresentamos formalmente o conceito de área de uma figura. Mostramos como a procura pela medida da área de figuras culmina na necessidade de desenvolver o cálculo integral. Adiante, apresentamos um modelo axiomático para o conceito de área como uma função.
- Capítulo 3 - Conceitos preliminares: enunciamos e provamos teoremas relacionados ao máximo, mínimo, supremo e ínfimo de um subconjunto de números reais. Depois, definimos função limitada, função monótona e função degrau. A função degrau cumpre um papel essencial para a definição de integral para outros tipos de funções.
- Capítulo 4 - Cálculo integral: escrevemos sobre conceitos de integração, sem utilizar limites ou derivadas. Desta maneira, utilizamos os conceitos e teoremas vistos nos capítulos anteriores. Por fim, chegamos ao resultado de que toda função monótona e limitada é integrável, resultado que engloba a maior partes das funções vistas no Ensino Médio.
- Capítulo 5 - Atividades: elaboramos uma série de atividades sobre funções e cálculo de integrais. A primeira atividade é sobre a relação de áreas com funções degrau e suas propriedades. A segunda atividade concerne ao cálculo, por aproximação, de figuras em que já se conhece a área, utilizando a definição de integral para funções degrau.
- Capítulo 6 - Considerações finais do trabalho.

2 MEDIDAS DE ÁREAS

Neste capítulo, descrevemos com a notação moderna o cálculo da área de um segmento parabólico, como realizado por Arquimedes. Adiante, mostramos como suas ideias conectam-se com a integração moderna. Por último, apresentamos uma definição formal de área, que é a base histórica do que conhecemos por integral de uma função.

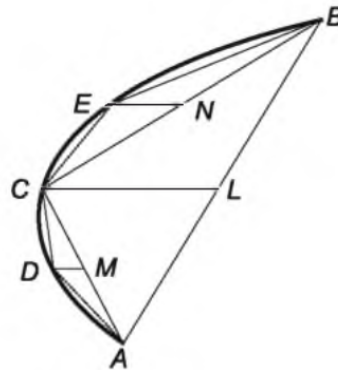
2.1 O MÉTODO DE EQUILÍBRIO E DA EXAUSTÃO NO CÁLCULO DA ÁREA DE UM SEGMENTO PARABÓLICO

Sejam C,D e E pontos do segmento parabólico, ilustrado na Figura 2.1, obtidos traçando-se \overline{LC} , \overline{MD} , \overline{NE} que são paralelos ao eixo da parábola, utilizando os pontos médios L, M, N de \overline{AB} , \overline{CA} , \overline{CB} . Por construção geométrica, Arquimedes mostrou que

$$\text{Área}(CDA) + \text{Área}(CEB) = \frac{\text{Área}(ABC)}{4}. \quad (2.1)$$

Adiante, mostramos um exemplo de (2.1).

Figura 2.1 – Segmento parabólico



Fonte: Eves (2011).

Recursivamente, conclui-se que a área do segmento parabólico é

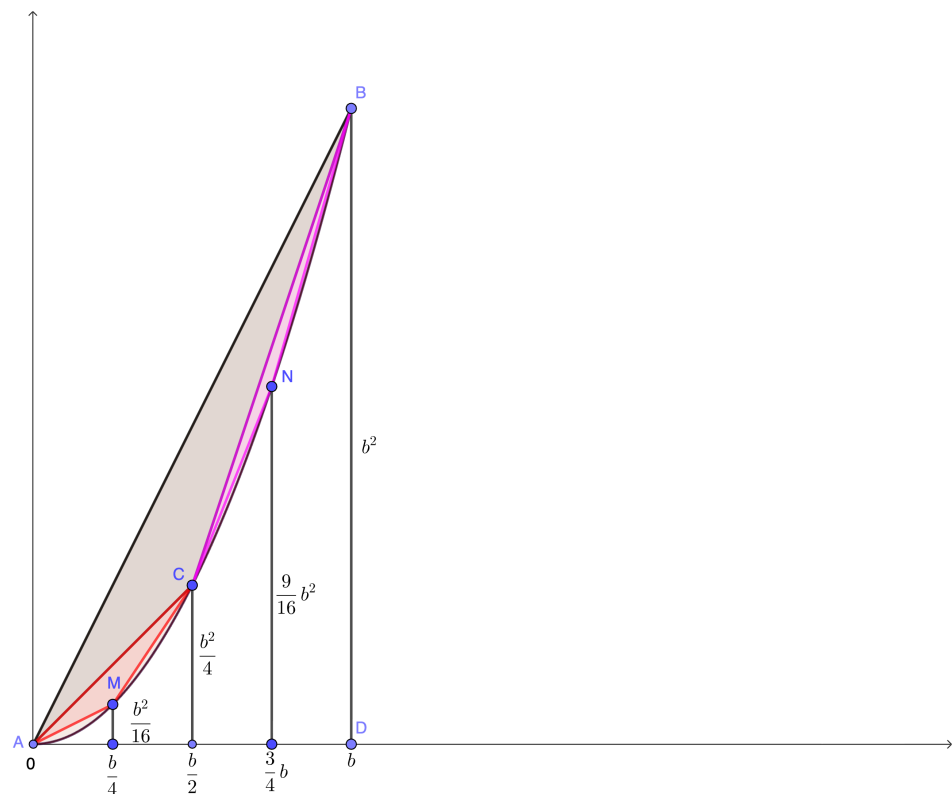
$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) + \frac{\text{Área}(ABC)}{4} + \frac{\text{Área}(ABC)}{4^2} + \frac{\text{Área}(ABC)}{4^3} + \dots \\ = \text{Área}(ABC) \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\ = \frac{4}{3} \text{Área}(ABC). \end{aligned}$$

A última igualdade é inferida, neste trabalho, com base na fórmula da série geométrica, cujo módulo da razão é menor do que 1, neste caso, $\frac{1}{4}$. Arquimedes, no entanto, observando que a

soma $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots\right)$ tendia a $\frac{4}{3}$, utilizava o *método da exaustão*, isto é, procedia por uma dupla *reductio ad absurdum*, para provar que esse valor não podia ser maior nem menor do que $\frac{4}{3}$. Sintetizando: para chegar a uma fórmula para uma área, Arquimedes a via como uma soma infinita de áreas conhecidas (*método de equilíbrio*) e, para provar formalmente que a fórmula estava correta, utilizava uma dupla redução ao absurdo para mostrar que o valor não podia ser maior nem menor do que o determinado (*método da exaustão*) (Eves, 2011).

Agora, traremos uma justificativa, considerando a parábola $y = x^2$, definida em $[0, b]$, para a equação (2.1). Faremos o mesmo processo da Figura 2.1, agora com os pontos A, C e

Figura 2.2 – Triângulos aproximando a área do segmento parabólico



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

sendo as extremidades de três segmentos parabólicos. O triângulo ABC tem coordenadas cartesianas $A = (0, 0)$, $C = \left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$ e $B = (b, b^2)$. Da geometria analítica, obtemos:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b}{2} & \frac{b^2}{4} & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{b^3}{8}.$$

Temos outros dois triângulos: AMC e CNB , como ilustra a Figura 2.2. O triângulo AMC tem coordenadas cartesianas $A = (0, 0)$, $M = \left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{16}\right)$ e $C = \left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$, portanto

$$\text{Área}(AMC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b}{4} & \frac{b^2}{16} & 1 \\ \frac{b}{2} & \frac{b^2}{4} & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{b^3}{64}. \quad (2.2)$$

E o triângulo CNB tem coordenadas cartesianas $C = \left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$, $N = \left(\frac{3}{4}b, \frac{9}{16}b^2\right)$ e $B = (b, b^2)$, logo

$$\text{Área}(CNB) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \left(\begin{bmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b^2}{4} & 1 \\ \frac{3}{4}b & \frac{9}{16}b^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{bmatrix} \right) \right| = \frac{b^3}{64}. \quad (2.3)$$

Com isso, somando (2.2) e (2.3) temos

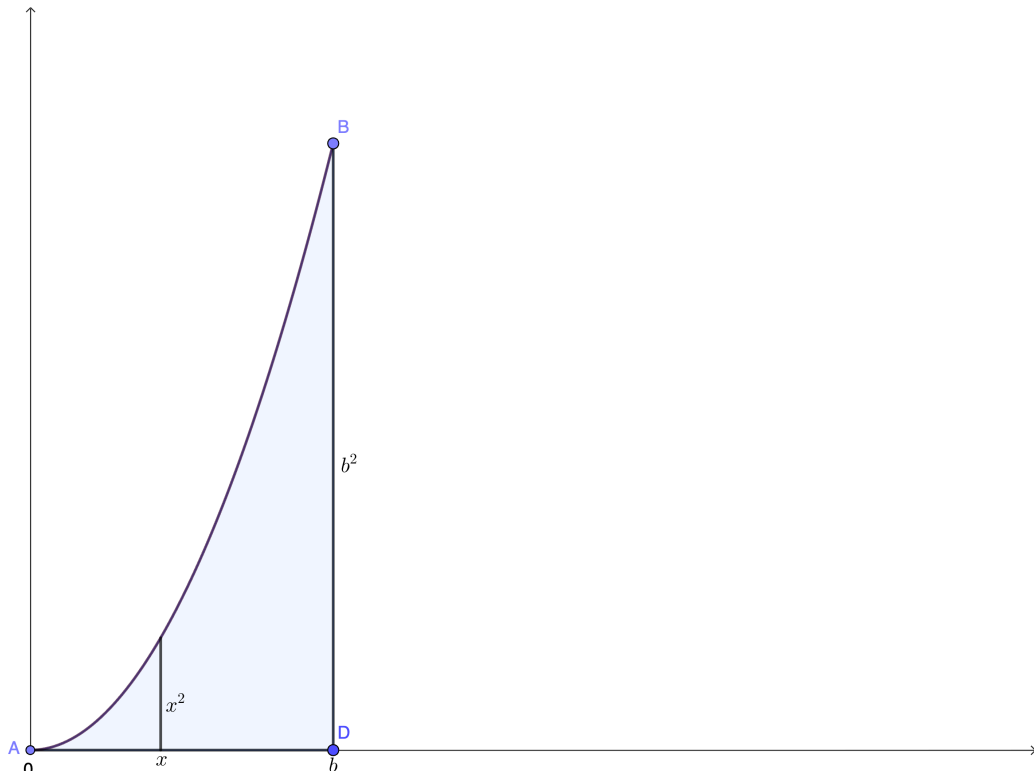
$$\frac{b^3}{64} + \frac{b^3}{64} = \frac{2b^3}{64} = \frac{b^3}{32} = \frac{b^3}{4},$$

isto é, conforme (2.1),

$$\text{Área}(AMC) + \text{Área}(CNB) = \frac{\text{Área}(ABC)}{4}.$$

A fim de fixar ideias para o estudo do cálculo integral, procederemos com o cálculo da área compreendida entre o gráfico da função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, e o eixo x , como representada na Figura 2.3.

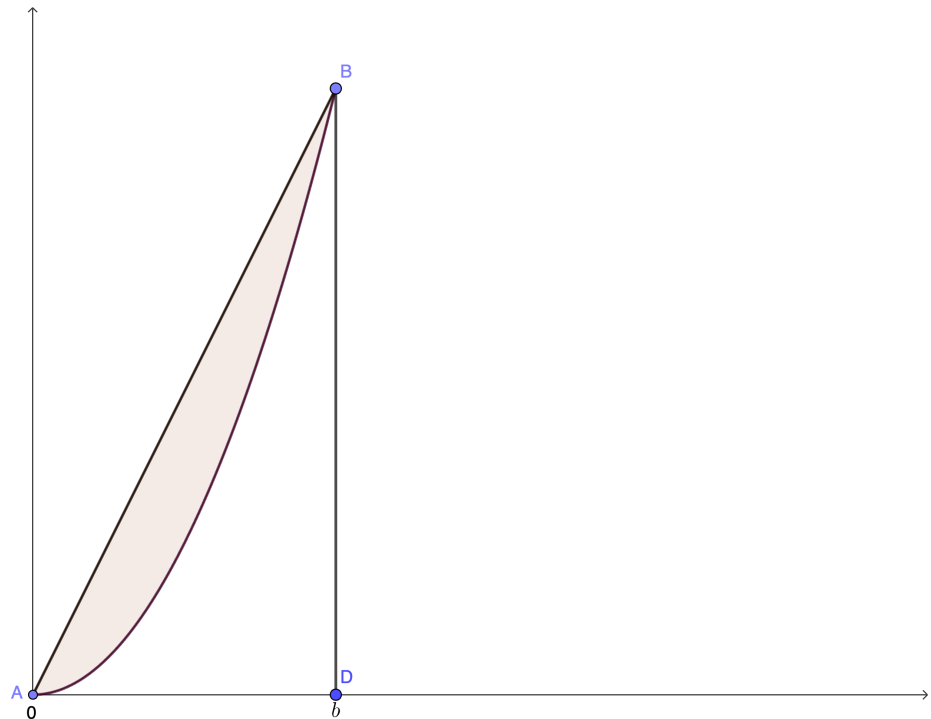
Figura 2.3 – Área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = x^2$, com $x \in [0, b]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Calcularemos essa área, num primeiro momento, utilizando a fórmula determinada por Arquimedes. Podemos calculá-la diminuindo da área do triângulo ABD a área do segmento parabólico representado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Área do segmento parabólico



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Procederemos utilizando as mesmas hipóteses levantadas por Arquimedes, como representadas na Figura 2.1. Obtemos pela construção, o triângulo ABC , como na Figura 2.2. Com isso, temos que a área do segmento parabólico da Figura 2.4 é dada por $\frac{4}{3}\text{Área}(ABC)$. E, portanto, como determinou Arquimedes, a área do segmento parabólico explicitado na Figura 2.1 é obtida por

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{8} = \frac{b^3}{6}.$$

E a área do triângulo ABD , retângulo em D , é

$$\frac{b \cdot b^2}{2} = \frac{b^3}{2}.$$

Com isso, a área compreendida entre o gráfico da função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, e o eixo x (Figura 2.3) será obtida por

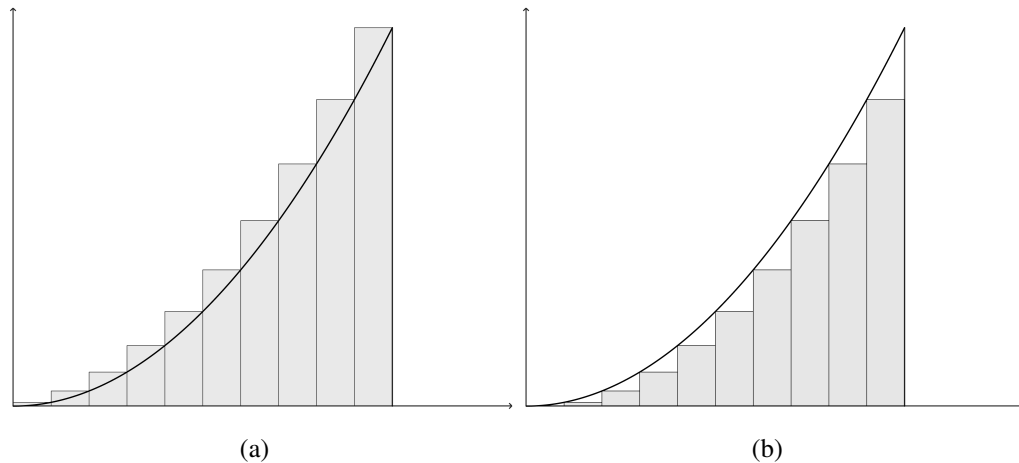
$$\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Note que o método utilizado para calcular a área da Figura 2.3 é pouco eficiente para calcular a área delimitada pelo eixo x e outras curvas. Isso se deve ao fato de que, na maioria das vezes, não obtemos de imediato a área que está acima da curva como representado na Figura 2.4. Para resolvermos essa limitação, procederemos essencialmente como os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat o fizeram por volta de 2000 anos depois de Arquimedes ter determinado a fórmula para calcular a área de um segmento parabólico (Guidorizzi, 2018).

Este segundo método inspira a base teórica que utilizaremos no capítulo.

O método consiste em dividir a região em que se quer calcular a área em retângulos (para simplificar os cálculos) para obter aproximações da área da Figura 2.3, por excesso (soma superior) como indicado na Figura 2.5(a), e por falta (soma inferior) como ilustrado na Figura 2.5(b).

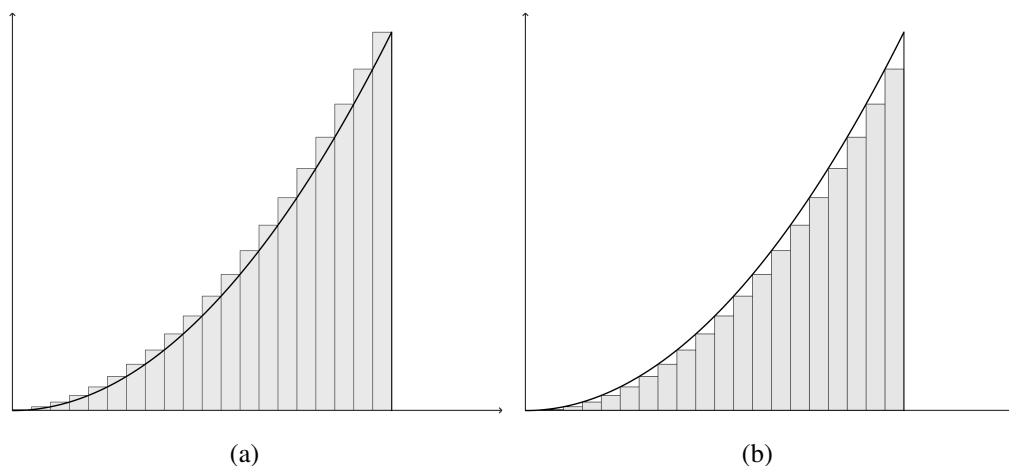
Figura 2.5 – Aproximação: (a) por excesso; (b) por falta



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Observe que a área representada na Figura 2.3 é menor do que a área dada pela soma superior da Figura 2.5(a) e maior do que a área da soma inferior da Figura 2.5(b). Se dividirmos a região em mais retângulos, obtemos uma nova aproximação, em que a área aproximada por excesso diminui como na Figura 2.6(a) e a área aproximada por falta aumenta como na Figura 2.6(b).

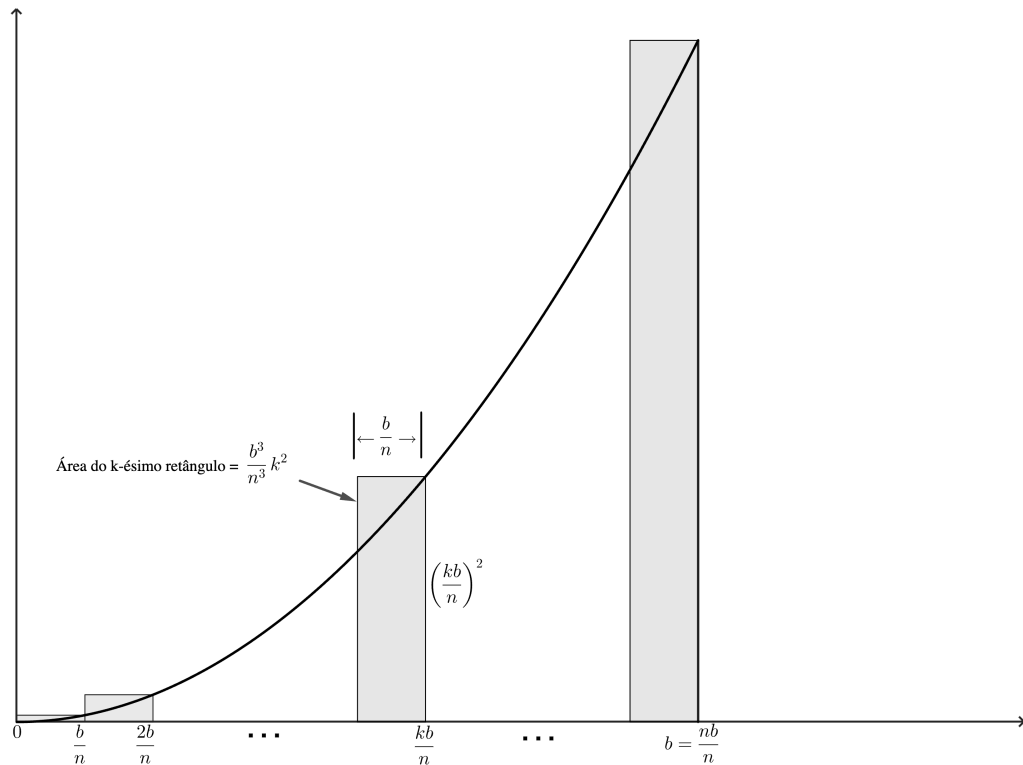
Figura 2.6 – refinamento: (a) soma superior; (b) soma inferior



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Para calcularmos essa área, subdividiremos a região em n retângulos (para facilitar os cálculos), cada um com a largura $\frac{b}{n}$, como indicado na Figura 2.7 (Apostol, 1984).

Figura 2.7 – Cálculo da área da região limitada pela função x^2 e o eixo x em $[0, b]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Os pontos de subdivisão no eixo x são:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b. \quad (2.4)$$

A expressão genérica para um ponto da subdivisão é $x = \frac{kb}{n}$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Para cada $x > 0$ em (2.4) construímos um retângulo (superior à curva x^2) de altura $\left(\frac{kb}{n}\right)^2$, como representado na figura 2.7. A área deste retângulo é

$$\left(\frac{b}{n}\right) \left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} k^2.$$

Seja S_n a soma das áreas de todos os retângulos superiores à curva:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{b}{n} - 0\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n} - \frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{nb}{n} - \frac{(n-1)b}{n}\right) \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot 1^2 + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot 2^2 + \dots + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot n^2 = \\ &= \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analogamente, obtemos a soma s_n das áreas de todos os retângulos inferiores à curva:

$$\begin{aligned}
 s_n &= \left(\frac{b}{n} - 0\right) \cdot 0^2 + \left(\frac{2b}{n} - \frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{bn}{n} - \frac{(n-1)b}{n}\right) \cdot \left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot 1^2 + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot 2^2 + \dots + \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot (n-1)^2 = \\
 s_n &= \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Como queremos calcular a área da Figura 2.3, melhorando a aproximação cada vez mais à medida que aumentamos o número n de subdivisões como na Figura 2.7, faz-se necessário uma maneira eficiente de calcular (2.5) e (2.6), já que as somas $(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$ e $[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]$ são extensas para calcular, por soma direta, quando n é "grande". De sorte, conseguimos obter a seguinte identidade:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{2.7}$$

Demonstração:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \Rightarrow 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3. \tag{2.8}$$

Fazendo $k = 1, 2, \dots, n-1$ em (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 &= 2^3 - 1^3 \\
 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 &= 3^3 - 2^3 \\
 &\vdots \\
 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 &= n^3 - (n-1)^3.
 \end{aligned}$$

Somando todos os termos do 1º e do 2º membro das igualdades, temos:

$$3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + 3 \cdot [1 + 2 + \dots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

Note que a segunda soma do 1º membro da igualdade é a soma dos termos de uma progressão aritmética cujo valor é $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$. Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}
 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + 3 \cdot \left[\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right] + (n-1) &= n^3 - 1^3 \\
 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + n - 1 &= n^3 - 1^3 \\
 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2} &= n^3 \\
 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] &= n^3 - \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 &= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

E, adicionando n^2 aos dois membros de (2.9), obtemos (2.7). As fórmulas fechadas (2.7) e (2.9) nos ajudam a deduzir as desigualdades que nos interessam:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2. \quad (2.10)$$

De fato,

$$1 < n \Rightarrow n < n^2 \text{ e } \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n}{6} < \frac{n^2}{2} \Rightarrow \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} < \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \Rightarrow \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} < \frac{n^3}{3}.$$

Logo, por (2.9), $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$. Analogamente, $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Multiplicando essas desigualdades em (2.10) por $\frac{b^3}{n^3}$, temos:

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n.$$

Note que essa desigualdade expressa, para cada valor de n , que o número $\frac{b^3}{3}$ está entre s_n e S_n . Devemos provar, então, que $\frac{b^3}{3}$ é o único número que detém essa propriedade, e que será a medida da área da figura 2.7. Em outras palavras, se existe A tal que

$$s_n < A < S_n, \quad (2.11)$$

$\forall n \geq 1$, então $A = \frac{b^3}{3}$. Com isso, Arquimedes deduziu que a área do segmento parabólico é $\frac{b^3}{3}$. Com efeito, utilizando a desigualdade (2.10), somando n^2 à esquerda, obtemos:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

multiplicando por $\frac{b^3}{n^3}$ obtemos

$$\left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) < \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot \left(\frac{n^3}{3} + n^2\right) \Rightarrow S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}.$$

Analogamente, subtraindo n^2 em (2.10) à direita, temos

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n.$$

Com isso, cada número real A que satisfaça (2.11) deve satisfazer também

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Só há, no entanto, três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3}, \quad A = \frac{b^3}{3}.$$

Contradizendo as duas primeiras opções, inferimos, pela Lei da Tricotomia, que $A = \frac{b^3}{3}$. De fato, suponhamos que $A > \frac{b^3}{3}$, de (2.12), obtemos

$$0 < A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{A - \frac{b^3}{3}}{A - \frac{b^3}{3}} < \frac{\frac{b^3}{n}}{A - \frac{b^3}{3}}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{n} \cdot \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$$

$$\Rightarrow n < \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}} \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que é uma contradição, pois existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$. Com o mesmo raciocínio, concluímos que a desigualdade $A < \frac{b^3}{3}$ também conduz a uma contradição. Portanto, devemos ter que $A = \frac{b^3}{3}$. ■

2.2 ÁREA COMO FUNÇÃO

Nesta seção, apresentamos um modelo axiomático do conceito de área de uma figura plana como uma função, baseado em Apostol (1984). Esta maneira de definir a área de uma figura plana conduz a uma ligação direta com o cálculo integral e, portanto, ao estudo de qualquer função real de uma variável real. Estamos interessados, então, no conjunto M , formado por todos os conjuntos mensuráveis do plano, isto é, conjuntos do plano em que é possível atribuir uma área. Suporemos que existe uma função $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que, para cada $B \in M$, associamos o número real $\alpha(B)$, chamado de área de B . Essa função deve gozar das seguintes propriedades (axiomas):

1. Propriedade da não negatividade. Para todo conjunto $B \in M$, $\alpha(B) \geq 0$.
2. Propriedade aditiva. Sejam $B, C \in M$, então $B \cup C \in M$ e $B \cap C \in M$, e temos

$$\alpha(B \cup C) = \alpha(B) + \alpha(C) - \alpha(B \cap C)$$

3. Propriedade da diferença. Se $B, C \in M$, com $B \subseteq C$, então $C - B \in M$, e temos $\alpha(C - B) = \alpha(C) - \alpha(B)$.

4. Propriedade da invariância por congruência. Se um conjunto $B \in M$ e C é congruente a B , então $C \in M$ e $\alpha(B) = \alpha(C)$.
5. Propriedade da medida. Todo retângulo ¹ $R \in M$. Se os lados do retângulo tem medidas a e b , então $\alpha(R) = a \cdot b$.
6. Propriedade da exaustão. Sejam $B, C, D \in M$ (sendo B e D regiões degraus ²) tal que

$$B \subseteq C \subseteq D. \quad (2.13)$$

Se existe um único número $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisfaz as desigualdades

$$\alpha(B) \leq c \leq \alpha(D)$$

para todas as regiões degrau B e D que satisfaçam (2.13), então C é mensurável e $\alpha(C) = c$.

O axioma 1 estabelece que a área de um conjunto mensurável é maior do que ou igual a zero. O axioma 2 nos diz que, quando um conjunto é formado por duas regiões, que podem ter parte em comum, a área da união das regiões é a soma das áreas de cada uma, menos a área da interseção. Especialmente, quando as áreas não têm parte em comum, a área da união das regiões é a soma da área de cada uma das regiões.

Já o axioma 3 estabelece que, quando fazemos a diferença entre dois conjuntos pertencentes a M , e um deles está contido no outro, essa diferença é mensurável e sua área é dada pelo módulo da diferença entre as áreas dos dois conjuntos. O axioma 4 nos traz que conjuntos com o mesmo tamanho e formato obrigatoriamente devem ter a mesma área.

O axioma 5 implica que todo segmento de reta tem área igual a zero. E, com o uso recorrente do axioma 1, temos que toda região degrau é mensurável e que sua área é a soma das áreas dos retângulos que a compõem.

O axioma 6 nos permite inferir a mensurabilidade de regiões para além das regiões degraus, essencialmente como o *Método da Exaustão* grego era utilizado para determinar a área de regiões desconhecidas, como ilustrado na Figura 2.7.

¹ A palavra retângulo aqui se refere a um conjunto congruente a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, com $a, b \geq 0$.

² Região degrau é a união de retângulos com suas bases no eixo x , como nas Figuras 2.5 e 2.6.

3 CONCEITOS PRELIMINARES

Antes de nos debruçarmos sobre o cálculo integral, faremos uma digressão sobre conceitos que utilizaremos posteriormente. Neste capítulo introduzimos os conceitos de máximo, mínimo, supremo e ínfimo de um subconjunto de números reais, enunciando e provando teoremas correlatos. Adiante, definimos função degrau, função limitada e função monótona.

3.1 MÁXIMO, MÍNIMO, SUPREMO E ÍNFIMO DE UM CONJUNTO

Antes de nos debruçarmos sobre outras propriedades da integral, faremos uma digressão sobre conceitos que utilizaremos posteriormente.

Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Denominamos por máximo de A o maior elemento de A , quando existe, e indicamos este elemento por $\text{máx } A$. O menor elemento de A , quando existe, denominamos por mínimo de A , e denotamos por $\text{mín } A$.

Um número $m \in \mathbb{R}$ é uma *cota superior* de A quando $m = \text{máx } A$ ou $m > x, \forall x \in A$. Analogamente, m é uma *cota inferior* de A quando $m = \text{mín } A$ ou $m < x, \forall x \in A$.

Exemplo 3.1. Tomemos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, temos, então:

- $\text{máx } A = 4$.
- $\text{mín } A = -2$.
- Já, como cotas superiores, podemos tomar qualquer número maior do que ou igual a 4, como 4, 1, $\frac{13}{3}$, 999.
- E, como cotas inferiores, podemos tomar qualquer número menor do que ou igual a -2 , como $-2, 3, -\frac{5}{2}, -\sqrt{10}$.

Observação: todo conjunto não vazio e finito de números reais possui máximo e mínimo.

Exemplo 3.2. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 5\}$. Observe que o número 5 não faz parte do conjunto. Temos

- $\text{mín } A = 3$.
- Vejamos que A não possui máximo. Suponhamos que exista $a \in A$ tal que $a = \text{máx } A$. Temos então,

$$a < 5 \Rightarrow \frac{a}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{5}{2} < \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow a < \frac{a+5}{2} < 5.$$

Mas então, $\frac{a+5}{2} \in A$ e $a < \frac{a+5}{2}$. Desta forma temos um absurdo, que foi supor a existência de um elemento máximo para A .

- Todo número $m \geq 5$ é uma cota superior de A .
- Todo número $m \leq 3$ é uma cota inferior de A .

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ pode não ter um elemento máximo, mas poderá admitir uma menor cota superior. No exemplo anterior, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 5\}$ não admite máximo, mas possui a menor cota superior, que é 5.

A menor cota superior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, quando existe, é denominada de *supremo* de A e designada por $\sup A$. Note que, se o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiver um elemento máximo, esse número será também o supremo de A .

A maior cota inferior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, quando existe, é denominada de *ínfimo* de A e denotada por $\inf A$.

Quando A possuir uma cota superior, diremos que A é *limitado superiormente*. E, se A admitir uma cota inferior, diremos que A é *limitado inferiormente*.

3.2 TEOREMAS DO SUPREMO E DO ÍNFIMO

Axioma 3.1. Existência do Supremo¹: *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Teorema 3.1. Propriedade do ínfimo: *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado inferiormente, admite ínfimo.*

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Como A é limitado inferiormente existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a \forall a \in A \Rightarrow -a \leq -m \forall a \in A$. Tomemos $B = -A$, isto é, $B = \{-a | a \in A\}$. Temos, então, que B é limitado superiormente por $-m$, com isso, inferimos, pelo Axioma do Supremo, que B tem supremo. Definamos $\inf A = -\sup B$. De fato, pela definição de supremo e do conjunto B , temos $-a \leq \sup B \forall a \in A \Rightarrow -\sup B \leq a \forall a \in A \Rightarrow \inf A \leq a \forall a \in A$. Mostramos com isso que $\inf A$ é uma cota inferior de A . Precisamos mostrar que $\inf A$ é a maior das cotas inferiores. Sendo x uma cota inferior de A , então $-x$ é uma superior de B . Com isso, $\sup B \leq -x \Rightarrow x \leq -\sup B = \inf A$. ■

Teorema 3.2 (Unicidade do Supremo e do Ínfimo). *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Se $\sup A$ existe, então ele é único.*

¹ Aqui tomado como axioma, entretanto, pode ser demonstrada através da construção dos números reais pelos Cortes de Dedekind.

Demonstração:

Suponhamos que $a = \sup A$ e $b = \sup A$. Mas então, a é uma cota superior de A , isto é, $b \leq a$, analogamente, $a \leq b$. Portanto, pela Lei da Tricotomia, temos que $a = b$. ■

Teorema 3.3 (Propriedade Arquimediana). *Se $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, então existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nx > y$.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, nx \leq y$. Tomemos o conjunto $A = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, A é não vazio pois $1 \cdot x = x \in A$, e é limitado superiormente por y , com isso, pelo Axioma do Supremo, A possui supremo, denotamos $\sup A = a \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$, $a - x < a$, portanto, $a - x$ não é cota superior de A , pois $\sup A$ é a menor das cotas superiores. Mas então, $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a - x < mx \Rightarrow a < mx + x \Rightarrow a < (m + 1)x$. O que é uma contradição com a nossa suposição, pois $(m + 1)x \in A$ e $a = \sup A$. Com isso, concluímos que $\sup nx \leq y \forall \mathbb{Z}^+$ nos leva a uma contradição, logo, devemos ter $nx > y$ para algum n inteiro positivo. ■

Teorema 3.4. *Se $a, x, y \in \mathbb{R}$ e $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $x = a$.*

Demonstração:

Pela Lei da Tricotomia, basta mostrar que $x < a$ e $x > a$ são falsas. Suponhamos, por absurdo, que $x > a$, logo teríamos que $(x - a) > 0$, portanto, pela *propriedade arquimediana* existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(x - a) > y \Rightarrow (x - a) > \frac{y}{n} \Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$, o que contradiz a hipótese, pois $x \leq a + \frac{y}{n}$. Se supuséssemos $x < a$ contradizeríamos a hipótese $a \leq x$. Logo, $x = a$. ■

Teorema 3.5. *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b, \forall a \in A$ e $b \in B$, então $\sup A$ e $\inf B$ existem e, ademais,*

$$\sup A \leq \inf B.$$

Demonstração:

Cada $b \in B$ é uma cota superior para A . Com isso, A possui supremo que satisfaz a desigualdade $\sup A \leq b \forall b \in B$. Logo, $\sup A$ é uma cota inferior para B , e assim B tem ínfimo, mais ainda, como $\inf B$ é a maior das cotas inferiores, temos $\sup A \leq \inf B$. ■

Teorema 3.6. *Seja $m > 0$ e $A \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Se A possui supremo, então existe $x \in A$ tal que*

$$x > \sup A - m.$$

(b) *Se A tem ínfimo, então existe $x \in A$ tal que*

$$x < \inf A + m.$$

Demonstração:

(a) Suponhamos, por absurdo, que $x \leq \sup A - m$, $\forall x \in A$. Isso faria com que $\sup A - m$ fosse uma cota superior menor que o supremo de A . Com isso, devemos ter $x > \sup A - m$ para algum $x \in A$.

(b) A demonstração é análoga a de (a). ■

Teorema 3.7 (Propriedade Aditiva). *Sejam A e B dois conjuntos de números reais dados. Consideremos o conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) *Se A e B têm supremo, então C possui supremo tal que $\sup C = \sup A + \sup B$.*

(b) *Se A e B possuem ínfimo, então C tem ínfimo tal que $\inf C = \inf A + \inf B$.*

Demonstração:

(a) $a \leq \sup A \forall a \in A$ e $b \leq \sup B \forall b \in B$, logo $a + b \leq \sup A + \sup B$. Ou seja, como $a + b = c \in C$, temos que $\sup A + \sup B$ é uma cota superior de C , isto é, o conjunto C é limitado superiormente. Portanto, pela Propriedade do Supremo 3.1, C possui supremo tal que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

Precisamos provar, agora, que $\sup C = \sup A + \sup B$. Consideremos $n \in \mathbb{Z}^+$ Tomando $m = 1/n$, pelo Teorema 3.6, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \quad b > \sup B - \frac{1}{n}.$$

Somando as desigualdades obtemos

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n} \Leftrightarrow \sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n}.$$

Mas, $a + b \leq \sup C$. Portanto,

$$\sup C \leq \sup A + \sup B \leq \sup C + \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Mas, então, pelo Teorema 3.4, devemos ter $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) A demonstração é análoga a de (a). ■

Teorema 3.8 (Propriedade Multiplicativa-Positiva). *Seja $c > 0$ e $A \subset \mathbb{R}$, um conjunto não-vazio e limitado, considere o conjunto $C = \{c \cdot a \mid a \in A\}$. Então, C é limitado e*

(a) $\sup C = c \cdot \sup A$.

(b) $\inf C = c \cdot \inf A$.

Demonstração:

(a) Considere $a = \sup A$. Pela definição de supremo, temos que $\forall x \in A, x \leq a \Rightarrow c \cdot x \leq c \cdot a$, isto é, $c \cdot a$ é uma cota superior de C . Seja m tal que $m < c \cdot a$, então $\frac{m}{c} < a$, portanto $\frac{m}{c}$ não é cota superior de A , logo, deve existir pelo menos um $x \in A$ tal que $\frac{m}{c} < x \Rightarrow m < c \cdot x$, logo m não é cota superior de $c \cdot A$, assim $c \cdot a$ é a menor cota superior de $c \cdot A$, com isso $\sup C = c \cdot \sup A$.

(b) A demonstração é semelhante a de (a). ■

Teorema 3.9 (Propriedade Multiplicativa-Negativa). *Seja $c < 0$ e $A \subset \mathbb{R}$, um conjunto não-vazio e limitado, considere o conjunto $C = \{c \cdot a \mid a \in A\}$. Então, C é limitado e:*

(a) $\inf C = c \cdot \sup A$.

(b) $\sup C = c \cdot \inf A$.

Demonstração:

(a) Tome $a = \sup A$. Por definição temos $x \leq a \forall x \in A \Rightarrow c \cdot x \geq c \cdot a$, pois $c < 0$. Então, $c \cdot a$ é uma cota inferior de C . Tomando $m > c \cdot a$ temos que $\frac{m}{c} < a$, mas $a = \sup A$, portanto, existe $x \in A$ tal que $\frac{m}{c} < x$, com isso $m > c \cdot x$, ou seja, m não é cota inferior de $c \cdot A$, logo $c \cdot a$ é a menor cota inferior, isto é, o ínfimo do conjunto $c \cdot A$, então $\inf C = c \cdot \sup A$.

(b) A demonstração é análoga a de (a) ■.

3.3 FUNÇÃO DEGRAU

Na teoria da integração de funções de uma variável real, trabalha-se, principalmente, com funções cujo domínio é um intervalo ou uma união de intervalos no eixo x . Esses intervalos são classificados em:

(a) fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(b) aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

(c) semiaberto: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Definição 3.1 (Partição de um intervalo real). *Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto de números reais $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n.$$

Note que a partição P determina n subintervalos fechados contidos em $[a, b]$:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{n-1}, b],$$

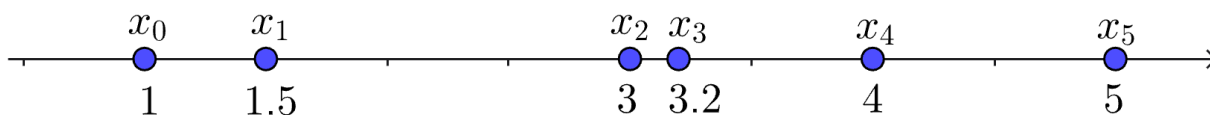
onde $[x_{k-1}, x_k]$ indica o k -ésimo intervalo fechado de P . E n subintervalos abertos contidos em $[a, b]$:

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), \dots, (x_{n-1}, b),$$

onde (x_{k-1}, x_k) indica o k -ésimo intervalo aberto de P .

Exemplo 3.3. Consideremos $[a, b] = [1, 5]$ uma partição possível para essa intervalo é $P = \{1, 1.5, 3, 3.2, 4, 5\}$, onde $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 3, x_3 = 3.2, x_4 = 4$ e $x_5 = 5$. O exemplo está ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Partição de um intervalo real



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Definição 3.2 (Refinamento). Uma subpartição, ou refinamento, P' de uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ é uma partição $P' = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ de $[a, b]$ com $k > n$ e $x_0, x_1, \dots, x_n \in P'$. Note que $P \subset P'$.

Exemplo 3.4. Consideremos a partição do Exemplo 3.3. Uma possível subpartição para ela seria $P' = \{1, 1.1, 1.2, 1.5, 3, 3.2, 4, 4.3, 4.9, 5\}$.

Definição 3.3 (Função degrau). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é degrau, se existe uma partição P de $[a, b]$ tal que f é constante em cada um dos subintervalos abertos de P . Isto é, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, $\exists c_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c_k \text{ se } x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Exemplo 3.5. A função $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, com $P = \{0, 1, 3, 6\}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 2, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$,

cujo gráfico está ilustrado na Figura 3.2.

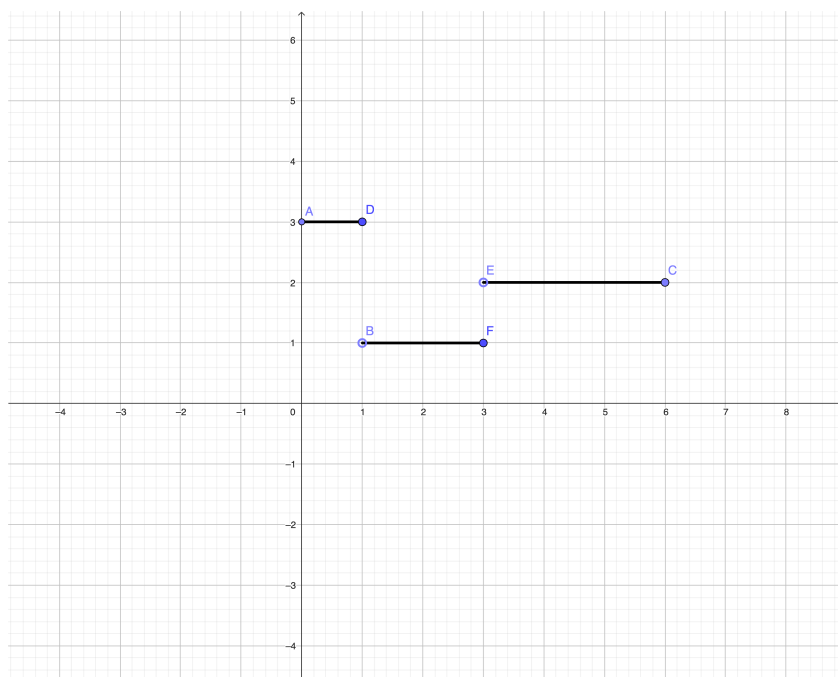
3.4 SOMA E PRODUTO DE FUNÇÕES DEGRAU

Sendo f e g duas funções degrau definidas em um mesmo intervalo $[a, b]$, pode-se formar uma nova função h , degrau, tal que $h(x) = (f + g)(x)$, também definida em $[a, b]$. Sendo P_1 e P_2 , partições de $[a, b]$ de tal forma que f seja constante nos subintervalos abertos de P_1 e g seja constante nos subintervalos abertos de P_2 , definimos $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = f(x) + g(x), \text{ se } x \in [a, b].$$

Para inferirmos que h é uma função degrau, devemos determinar uma partição P tal que h seja constante em todos os subintervalos abertos de P . Para isso, basta tomarmos $P_1 \cup P_2$, doravante chamada de *refinamento comum* de P_1 e P_2 . Como f e g são constantes em todos os subintervalos abertos do refinamento comum, a soma $f(x) + g(x) = h(x)$ também o é.

Figura 3.2 – Gráfico de função degrau



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Exemplo 3.6. Considere as funções definidas em $[0, 6]$. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 2, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$ e

$$j(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \in [0, 2) \\ 5, & \text{se } x \in [2, 4) \\ 6, & \text{se } x \in [4, 6] \end{cases} \Rightarrow h(x) = f(x) + j(x) = \begin{cases} 3 + 4 = 7, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1 + 4 = 5, & \text{se } x \in (1, 2) \\ 1 + 5 = 6, & \text{se } x \in [2, 3] \\ 2 + 5 = 7, & \text{se } x \in (3, 4) \\ 2 + 6 = 8, & \text{se } x \in [4, 6] \end{cases}.$$

Neste caso, a partição P da função soma $h(x) = f(x) + j(x)$ é dada por $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\} = \{0, 1, 3, 6\} \cup \{0, 2, 4, 6\}$. Ilustramos esse exemplo na Figura 3.3.

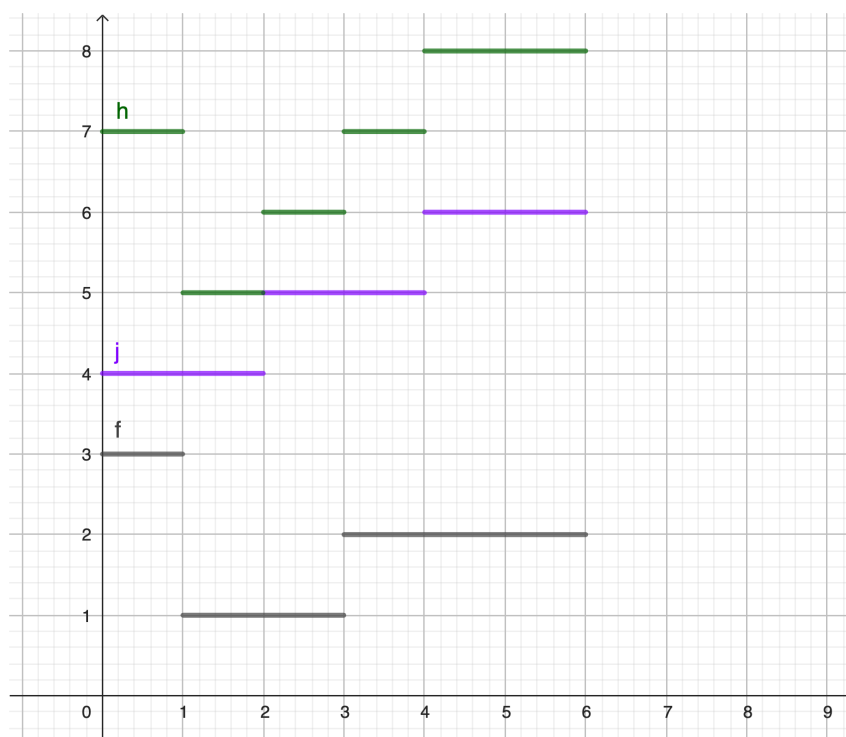
Analogamente, pode-se gerar com f e g uma função degrau $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = f(x)g(x), \text{ se } x \in [a, b],$$

denominada produto de f e g e denotada por $u = f \cdot g$. Um exemplo importante (para a integração) desse produto de funções é quando um dos fatores, por exemplo g , é constante em todo o intervalo $[a, b]$. Suponhamos $g(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, e $a \leq x \leq b$, então todo valor de $u(x)$ se obtém multiplicando $f(x)$ por c .

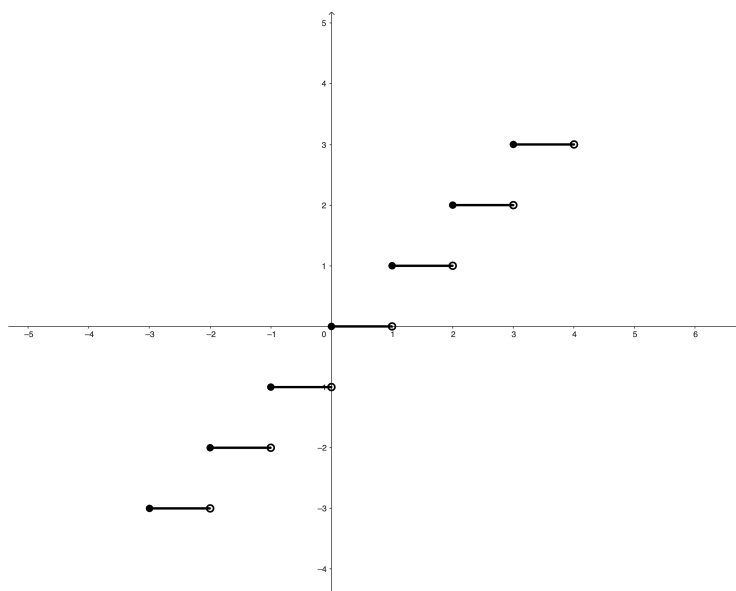
Exemplo 3.7 (Função Maior inteiro). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como função maior inteiro quando associa cada elemento $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $[x]$, que é o maior inteiro menor do que ou igual a x . Sendo $f(x) = [x]$, temos: $f(4,7) = [4,7] = [4 + 0,7] = 4$; $f(-0,6) = [-1 + 0,4] = -1$.

Figura 3.3 – Soma de funções degrau: $h(x) = f(x) + j(x)$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Figura 3.4 – Gráfico da função $f(x) = [x]$, com $x \in [-3, 4]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Note que a função $f(x) = [x]$ é uma função degrau em \mathbb{R} . Basta tomarmos a partição $P = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Com efeito, sendo $0 \leq x \in (x_0, x_0 + 1)$ e $x = x_0, x_1x_2x_3\dots$ sua representação decimal, temos que $f(x) = x_0$. No caso $x < 0$, com $x \in (x_0 - 1, x_0)$, temos que $f(x) = x_0 - 1$.

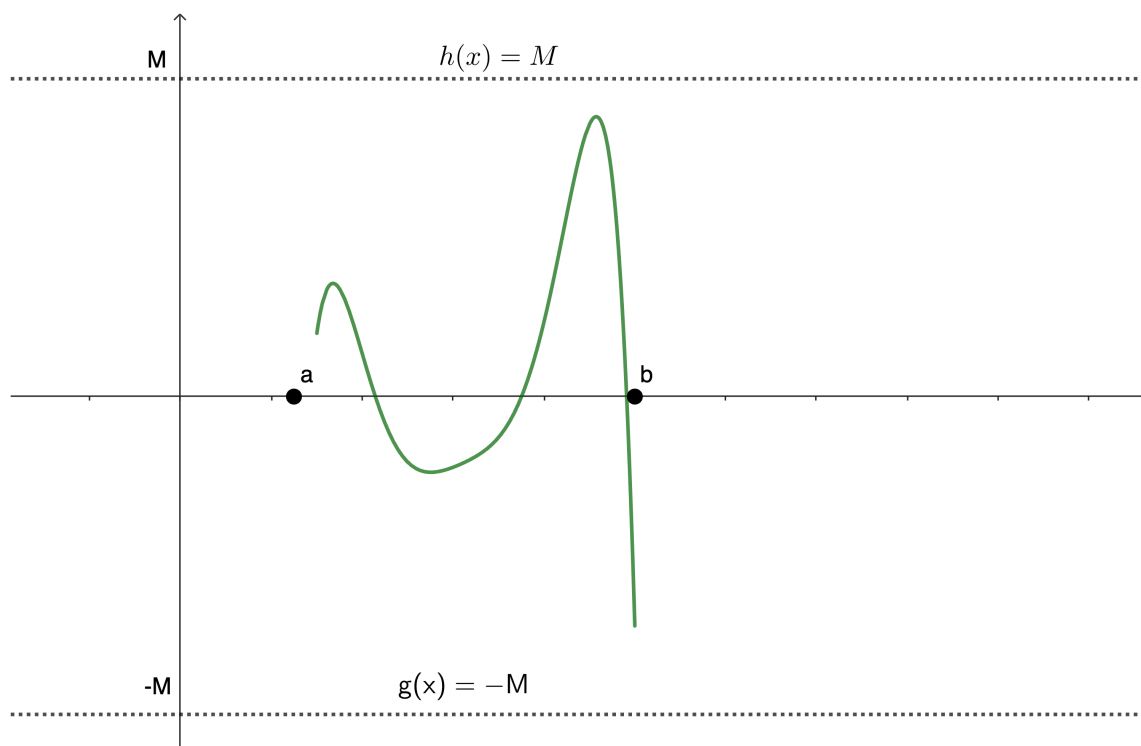
3.5 FUNÇÃO LIMITADA

Definição 3.4 (função limitada). *Uma função é dita limitada em $[a, b]$ se existe um número real $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M \text{ ou, equivalentemente, } -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Geometricamente, o gráfico de funções limitadas está situado entre os gráficos de duas funções constantes (perceba que também são funções degrau) $g(x) = -M$ e $h(x) = M$, como indica a Figura 3.5.

Figura 3.5 – Gráfico de uma função limitada



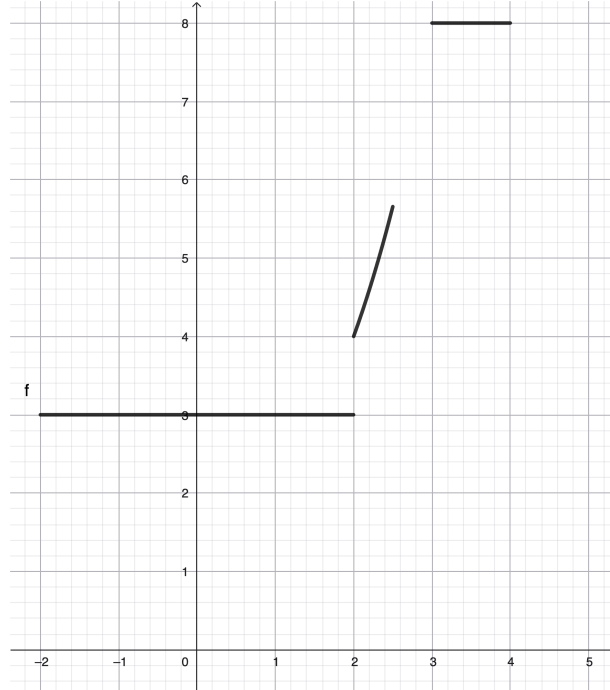
Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

3.6 FUNÇÕES MONÓTONAS

Definição 3.5. *Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente em A quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$. Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$ f é dita estritamente crescente em A . Analogamente f é decrescente em A quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$. A função f é dita estritamente decrescente em A quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$.*

Exemplo 3.8. A função $f : [-2, 2.5] \cup (3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [-2, 2) \\ 2^x, & \text{se } x \in [2, 2.5] \\ 8, & \text{se } x \in (3, 4] \end{cases}$,
é crescente em seu domínio, como representado na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Função crescente



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Exemplo 3.9. A função $f(x) = x^2$ é estritamente crescente em $[0, +\infty)$, como mostra a Figura 3.7.

Exemplo 3.10. A função $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [-2, 0) \\ 2^{-x}, & \text{se } x \in [0, 3] \\ -1, & \text{se } x \in (3, 4] \end{cases}$,
é decrescente em seu domínio, como representado na Figura 3.8.

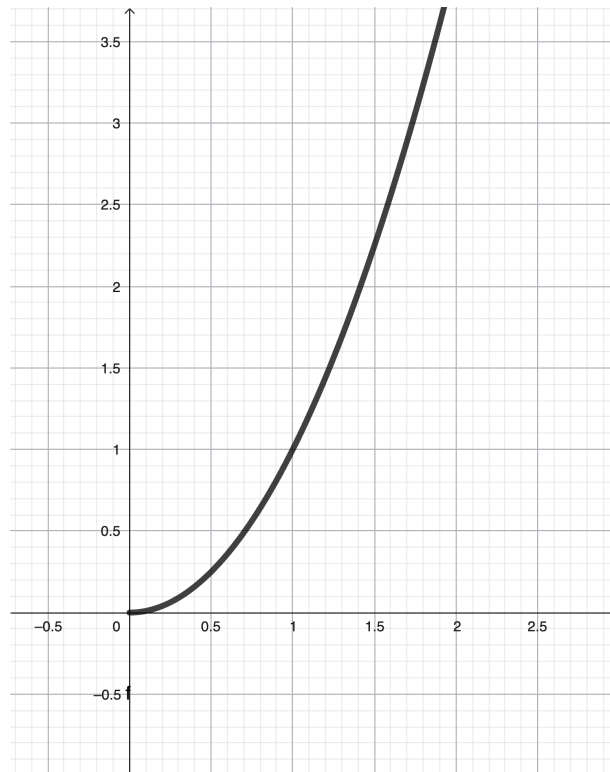
Exemplo 3.11. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente decrescente em $(0, +\infty)$, como ilustra a Figura 3.9. Perceba que essa função não é limitada neste intervalo.

Definição 3.6. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denomina-se monótona em A se for crescente ou decrescente em A . Dizemos que f é estritamente monótona em A se for estritamente crescente ou estritamente decrescente em A .

As Figuras 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 ilustram funções monótonas.

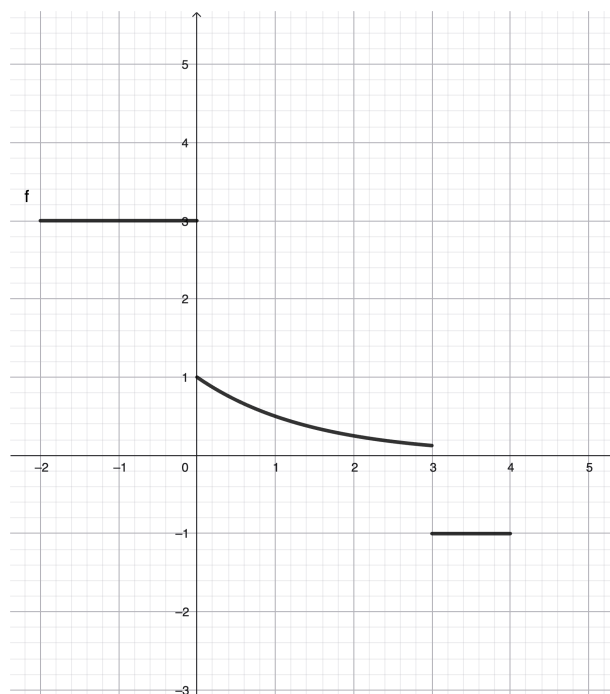
Definição 3.7. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita monótona por partes se existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que f seja monótona em $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, como ilustrado na Figura 3.10. Neste caso, f é crescente em $(x_0, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_6, x_7)$ e decrescente em $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)$.

Figura 3.7 – Função estritamente crescente



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Figura 3.8 – Função decrescente

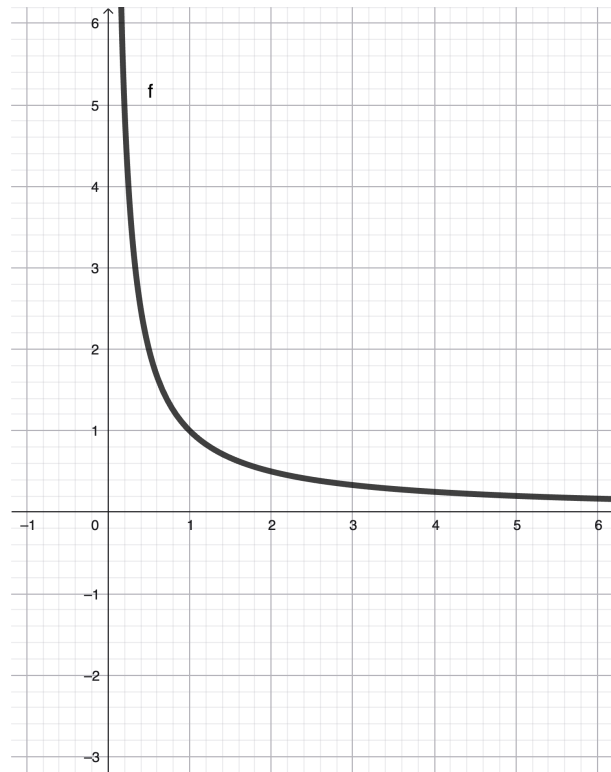


Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Observação: note que funções degrau são funções monótonas por partes.

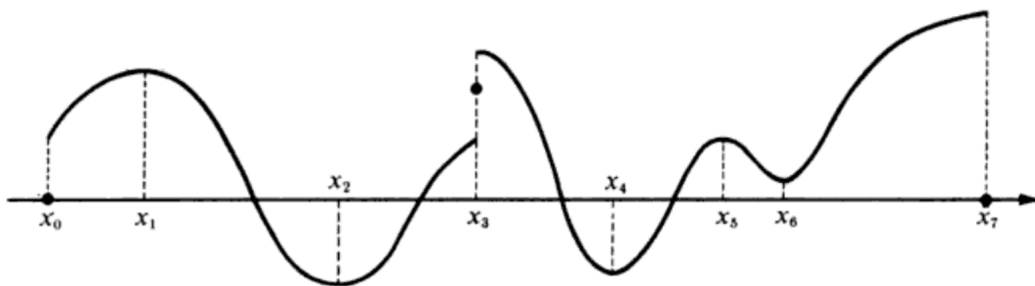
Queremos obter uma maneira de calcular a área entre o eixo x e o gráfico de uma função

Figura 3.9 – Função estritamente decrescente



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Figura 3.10 – Função monótona por partes



Fonte: Apostol (1984).

f definida em algum intervalo fechado $[a, b]$ (essencialmente, isso é o que o Cálculo Integral se ocupa em resolver). Para isso, definiremos primeiramente a integral para funções degrau e, em seguida, utilizaremos essa integral para definir a integral para funções mais gerais, que será o tema do próximo capítulo.

4 CÁLCULO INTEGRAL

Neste capítulo, Definimos integração de funções degrau e demonstramos as propriedades provenientes dessa definição. Utilizamos a integração de funções degrau para conceituar e demonstrar proposições da integral de funções mais gerais. Para isso, nos baseamos, principalmente, no livro de Apostol (1984), onde ele define integral antes de utilizar limites e derivadas.

4.1 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES DEGRAU

Nesta seção, definimos o conceito de integral para funções degrau. Esta definição é feita de maneira que a integral de uma função não negativa ($f(x) \geq 0$ no intervalo analisado) seja um número que represente a medida da área compreendida entre o gráfico da função e o eixo x .

Definição 4.1 (integral de funções degrau). *Consideremos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função degrau e $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ de tal forma que*

$$f(x) = c_k \in \mathbb{R}, \text{ se } x \in (x_{k-1}, x_k), \forall k = 1, 2, \dots, n$$

A integral de f de a até b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, é definida pela soma:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}). \quad (4.1)$$

Isto é, para calcular o valor da integral, multiplicamos cada valor c_k (constante) pelo comprimento do k -ésimo intervalo correspondente, obtendo o produto $c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, e somando todos os produtos obtidos.

Note que os valores que a função assume nos extremos de cada intervalo não são levados em consideração, já que não aparecem em (4.1). Particularmente, quando f é constante no intervalo aberto (a, b) , isto é, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, se $a < x < b$, temos:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n c \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c \cdot (b - a).$$

Independente de quais sejam os valores $f(a)$ e $f(b)$. Se $c > 0$ e $f(x) = c \forall x \in [a, b]$, a área entre o gráfico f em $[a, b]$ e o eixo x é um retângulo de base $b - a$ e altura c , a integral de f , nesse intervalo, é $c \cdot (b - a)$, exatamente a área deste retângulo. Perceba que, mesmo mudando os valores de f em a ou b , a integral de f e a medida da área entre o gráfico de f em $[a, b]$ e o eixo x não são alteradas.

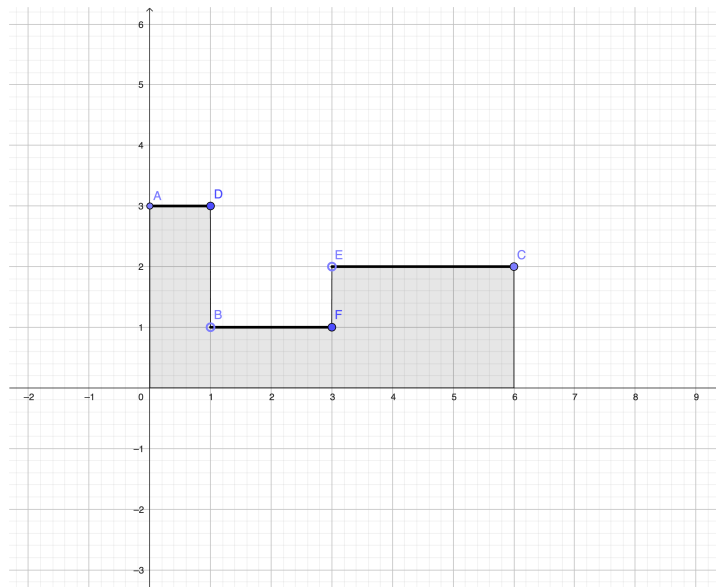
De maneira geral, a área entre o eixo x e o gráfico de qualquer função f degrau é formada pela união de um número finito de retângulos, um para cada intervalo em que a função é

constante. Como não se faz restrição sobre o valor que a função assume nos pontos de subdivisão da partição, a área entre o eixo x e f pode ter segmentos verticais. A integral de f é igual à soma das áreas de cada um desses retângulos, não importando o valor que a função assume nos pontos de subdivisão. Isto se dá devido ao fato de que a área de um segmento de reta é igual a zero.

Exemplo 4.1. Seja $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 2, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$, cujo gráfico está ilustrado

na Figura 4.1. Calcularemos $\int_0^6 f(x) dx$.

Figura 4.1 – Integral de função degrau



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Por (4.1), temos que

$$\int_0^6 f(x) dx = \sum_{k=1}^3 c_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

onde $f_1 = 3$, $f_2 = 1$ e $f_3 = 2$. Como $P = \{0, 1, 3, 6\}$ é uma partição do domínio de f , temos que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 6$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \sum_{k=1}^3 c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= 3 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (3 - 1) + 2 \cdot (6 - 3) \\ &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ &= 3 + 2 + 6 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Observação 4.1. Note que a Fórmula (4.1) não depende de uma escolha particular da partição P , basta que f seja constante nos subintervalos abertos determinado por P . De fato, se substituirmos uma partição P por uma partição refinada P' , adicionando um ponto de divisão

x' tal que $x_{k-1} < x' < x_k$. Teríamos, então, utilizando a Fórmula (4.1), em vez de só o produto $c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, no intervalo $[x_k, x_{k-1}]$, a soma $c_k \cdot (x' - x_{k-1}) + c_k \cdot (x_k - x')$. Que resulta em

$$c_k \cdot (x' - x_{k-1}) + c_k \cdot (x_k - x') = c_k \cdot (x' - x_{k-1} + x_k - x') = c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Portanto, o valor da soma não muda e a integral é a mesma. Analogamente, adicionando mais pontos de subdivisão em uma partição P , temos que a soma (4.1) não é alterada.

4.1.1 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO DEGRAU

Nesta seção, apresentamos as principais propriedades que a integral de uma função degrau goza. Geometricamente, a maioria dessas propriedades é trivial, mas salientamos que a ideia é estender essas propriedades para funções mais gerais, cujas integrais serão definidas a partir da integral de uma função degrau.

Durante toda esta seção, consideraremos que f e j , definidas em $[a, b]$, são funções degrau.

4.1.1.1 PROPRIEDADE ADITIVA

A Figura 4.2 ilustra essa situação para as funções f e j do Exemplo 3.6.

Teorema 4.1.

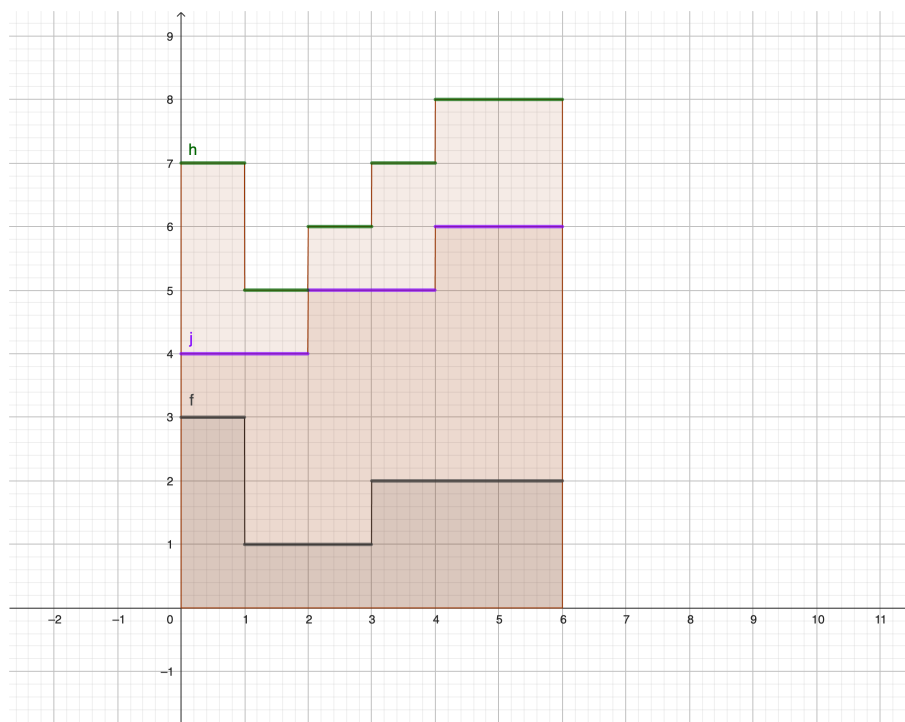
$$\int_a^b [f(x) + j(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b j(x) dx.$$

Demonstração:

Com efeito, sendo c_k, j_k os valores constantes em que as funções f e j assumem, respectivamente, no k -ésimo subintervalo aberto de um refinamento comum $P = \{a = x_0, x_1, \dots, b = x_n\}$, isto é, uma partição onde f e j são ambas constantes nos mesmos subintervalos, como já feito no Exemplo 3.6, por (4.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + j(x)] dx &= \sum_{k=1}^n (c_k + j_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + j_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b j(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Figura 4.2 – Integral da Soma $h(x) = (f + j)(x)$ no intervalo $[0, 6]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

4.1.1.2 PROPRIEDADE HOMOGÊNEA

Na Figura 4.3 ilustramos um exemplo da Propriedade Homogênea para $c = 2$ e f definida como no Exemplo 3.6, isto é, $(2 \cdot f)(x) = \begin{cases} 6, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 4, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$.

Teorema 4.2. *Seja $c \in \mathbb{R}$, temos*

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

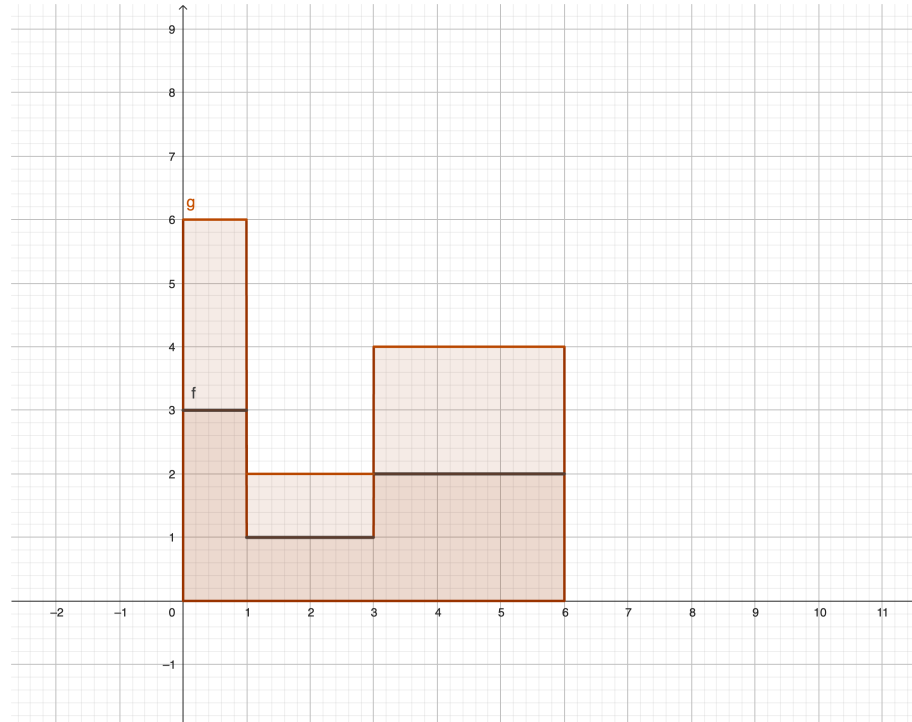
Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_a^b c \cdot f(x) dx &= \sum_{k=1}^n (c \cdot c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c \cdot [c_k \cdot (x_k - x_{k-1})] = \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.1.3 PROPRIEDADE DA LINEARIDADE

Teorema 4.3. *Se c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$, temos:*

Figura 4.3 – Integral da função $(2 \cdot f)(x)$ no intervalo $[0, 6]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 j(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b j(x) dx.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 j(x)] dx &= \sum_{k=1}^n [c_1 c_k + c_2 j_k] \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [c_1 c_k] \cdot (x_k - x_{k-1}) + [c_2 j_k] \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [c_1 c_k] \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n [c_2 j_k] \cdot (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

utilizando as propriedades anteriores, obtemos

$$c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b j(x) dx. \quad \blacksquare$$

4.1.1.4 PROPRIEDADE DA COMPARAÇÃO

Teorema 4.4. Se $f(x) < j(x) \forall x \in [a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b j(x) dx.$$

Demonstração:

Consideremos, também, as hipóteses apresentadas na demonstração da propriedade aditiva.

$$\begin{aligned} c_k < j_k &\Rightarrow c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) < j_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) &< \sum_{k=1}^n j_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b j(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.1.5 PROPRIEDADE DA ADITIVIDADE DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Ilustramos essa situação na Figura 4.4.

Teorema 4.5.

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{se } a < c < b.$$

Demonstração:

Consideremos $P_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_p = c\}$ e $P_2 = \{x_p = c, x_{p+1}, \dots, x_n = b\}$ partições para $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente, de tal forma que a função f seja constante em cada subintervalo gerado pela partição P . Temos, então, que $P_1 \cup P_2 = \{x_0 = a, \dots, x_p = c, \dots, x_n = b\}$ é uma partição para $[a, b]$. Sendo $c_k \in \mathbb{R}$ o valor constante que a função degrau f assume no seu k -ésimo intervalo (x_{k-1}, x_k) , para $k = 1, 2, \dots, n$, pela Fórmula 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ \sum_{k=1}^p c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) &+ \sum_{k=p+1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.1.6 PROPRIEDADE DA INVARIÂNCIA SOB TRANSLAÇÃO

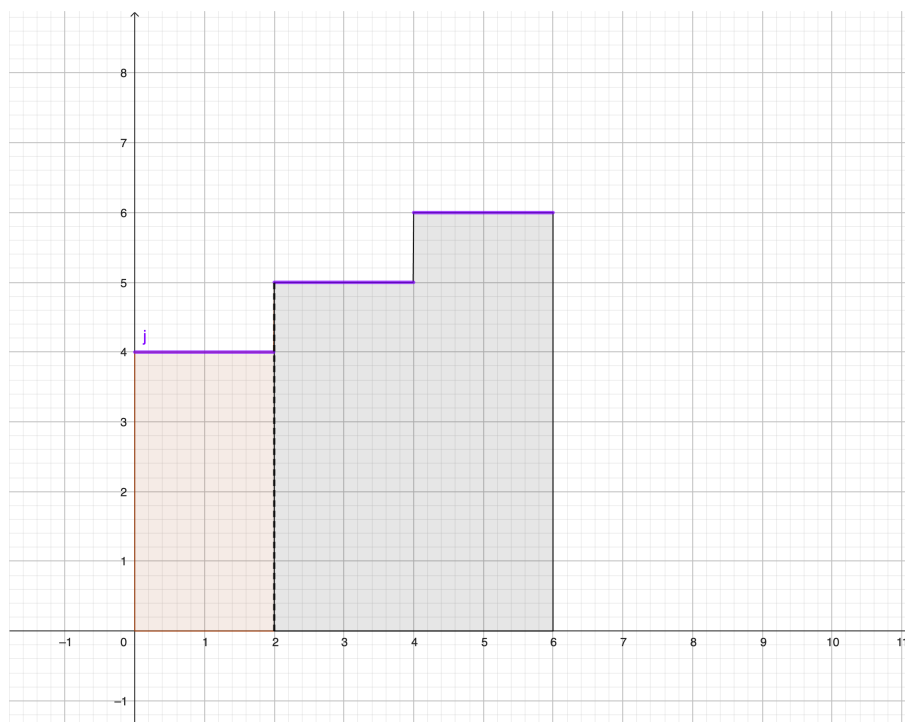
Representamos essa situação na Figura 4.5.

Teorema 4.6.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

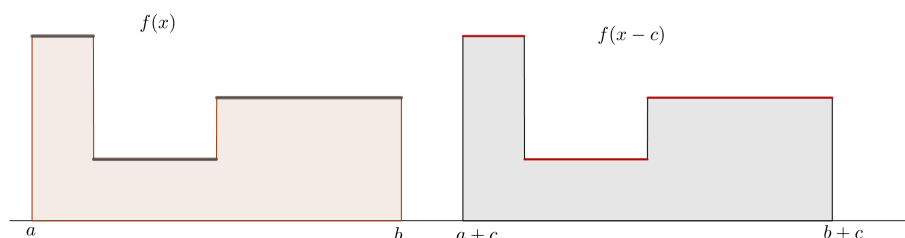
Demonstração:

Sendo $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, então $P_2 = \{x_0 + c, x_1 + c, \dots, x_n + c\}$ é uma partição de $[a + c, b + c]$. Tomemos $a \in (x_{k-1} + c, x_k + c)$, ou seja, $x_{k-1} + c < a <$

Figura 4.4 – Integral de $j(x)$ nos intervalos $[0, 2]$ e $[2, 6]$ 

Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

Figura 4.5 – Invariância da integral sob translação



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

$x_k + c \Rightarrow x_{k-1} < a - c < x_k$. Mas, $a - c$ aplicado em $f(x)$ é igual a $f(a - c)$, por outro lado, a aplicado em $f(x - c)$ é igual a $f(a - c)$. Isto é, as funções assumem os mesmos valores para qualquer número no seu k -ésimo intervalo. Como $f(x)$ é uma função degrau, pondo $c_k = f(x)$ para $x \in (x_{k-1}, x_k)$, temos que $f(x - c) = c_k$ para $x \in (x_{k-1} + c, x_k + c)$, Portanto, pela Fórmula 4.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot [x_k + c - (x_{k-1} + c)] = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.1.7 PROPRIEDADE DA CONTRAÇÃO/DILATAÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Na Figura 4.6 ilustramos esta proposição.

Teorema 4.7.

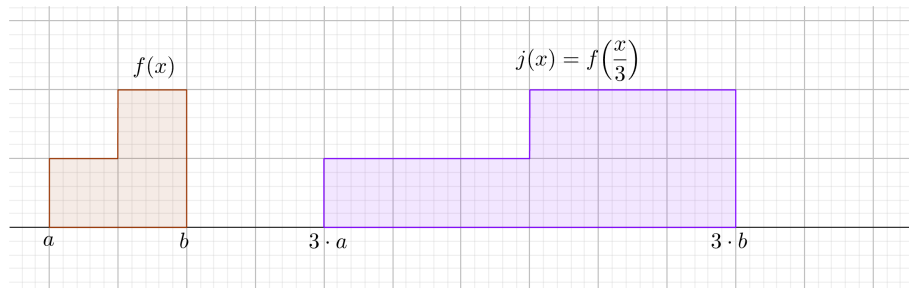
$$\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \forall c \neq 0.$$

Demonstração:

Suponha $c > 0$, a demonstração para $c < 0$ é análoga. Considere $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ de tal forma que $f(x) = c_k$, constante, para $x \in (x_{k-1}, x_k)$, com $k = 1, 2, \dots, n$. Considere agora $j(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$, se $x \in [c \cdot a, c \cdot b]$. Logo, $j(x) = c_k$, com $x \in (c \cdot x_{k-1}, c \cdot x_k)$. com isso $P' = \{c \cdot x_0, c \cdot x_1, \dots, c \cdot x_n\}$ forma uma partição de $[c \cdot a, c \cdot b]$. Logo, j é uma função degrau cujo integral é dado pela Fórmula 4.1, com isso

$$\int_{ca}^{cb} j(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (c \cdot x_k - c \cdot x_{k-1}) = c \cdot \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b f(x) dx. \blacksquare$$

Figura 4.6 – Dilatação do intervalo de integração



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

4.1.1.8 OBSERVAÇÕES

No símbolo \int_a^b chamamos a de limite inferior e b de limite superior. Anteriormente consideramos latentemente que a era menor do que b . Porém, para efeitos de cálculo de integrais é conveniente definir a integral, quando o limite inferior é maior do que o limite superior, da seguinte forma

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \text{ se } a < b.$$

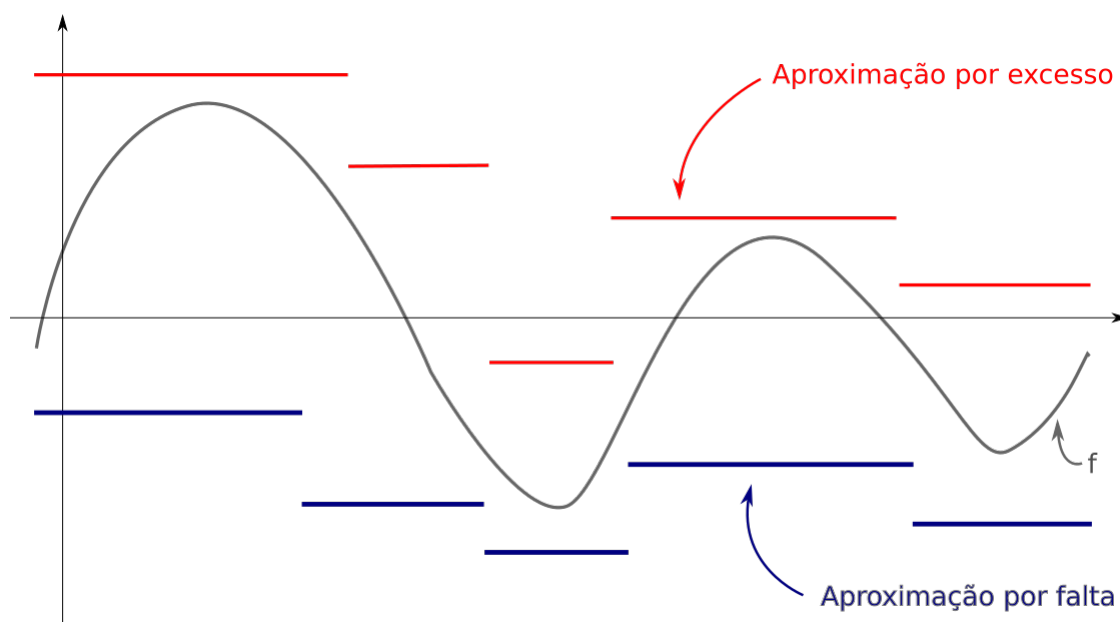
Também definimos

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4.2 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES MAIS GERAIS

Nesta seção, definiremos a integral para funções que não são necessariamente funções degrau. Construiremos essa definição de maneira a preservar todas as propriedades apresentadas para funções degrau.

Figura 4.7 – Aproximação por falta e por excesso



Fonte: O autor com o Inkscape (2025).

A construção aqui apresentada está essencialmente baseada no *método da exaustão* de Arquimedes. No sentido de que a ideia é aproximar o valor da integral de uma função f , utilizando funções degrau, por falta e por excesso, como ilustrado na Figura 4.7.

Utilizando funções degrau g , cujos gráficos estão abaixo do gráfico f , e funções degrau h , cujos gráficos estão acima do gráfico f . Os números $\int_a^b g(x) dx$ e $\int_a^b h(x) dx$ obtidos utilizando todas as combinações possíveis de g e h , satisfazem, pela Propriedade da Comparação,

$$\int_a^b g(x) dx < \int_a^b h(x) dx.$$

Então, cumprindo a Propriedade da Comparação, a integral de f , se existir, tem de ser um número entre $\int_a^b g(x) dx$ e $\int_a^b h(x) dx$, para qualquer par g e h de funções degrau. Quando existe um único número que cumpre esta propriedade, ele será tomado como definição da integral de f .

Como nem toda função pode ser aproximada por funções degrau e para não fugirmos do escopo deste trabalho, concentrar-nos-emos em funções limitadas, em algum intervalo $[a, b]$, conforme a Definição 3.4, que constituem a maior parte das funções vistas a nível de Ensino Médio.

Definição 4.2 (integral de uma função limitada). *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Sejam g e h funções degrau quaisquer definidas em $[a, b]$ tais que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Se existe um único número $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b g(x) dx \leq I \leq \int_a^b h(x) dx, \quad (4.3)$$

para cada par de funções degrau g e h que satisfaçam (4.2), então esse número I denomina-se integral de f de a até b , denotado pelo símbolo $\int_a^b f(x) dx$. Quando I existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$, ou que a integral $\int_a^b f(x) dx$ existe. A função f é chamada de integrando, os números a e b são os limites de integração, e o intervalo $[a, b]$ é o intervalo de integração.

Definimos ainda $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$, e que $\int_a^a f(x) dx = 0$.

4.3 INTEGRAL SUPERIOR E INTEGRAL INFERIOR

Consideremos uma função f limitada em $[a, b]$. se g e h são funções degrau que gozam das desigualdades em 4.2, dizemos que g é inferior a f e h é superior a f , denotamos $g \leq f \leq h$.

Seja G o conjunto de todos os números reais $\int_a^b g(x) dx$ obtidos de todas as funções degrau g tais que $g \leq f$. Seja H o conjunto de todos os números reais $\int_a^b h(x) dx$ obtidos de todas as funções degrau h com $f \leq h$. Isto é

$$G = \left\{ \int_a^b g(x) dx \in \mathbb{R} \mid g \leq f \right\}, \quad H = \left\{ \int_a^b h(x) dx \in \mathbb{R} \mid f \leq h \right\}.$$

Os conjuntos G e H são não vazios, já que supomos f limitada. E também, pela Propriedade da Comparação (Teorema 4.4) $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$, ou seja, todo número de G é menor do que ou igual a qualquer número de H . Com isso, pelo Teorema (3.5), G tem um supremo e H tem um ínfimo que satisfazem

$$\int_a^b g(x) dx \leq \sup G \leq \inf H \leq \int_a^b h(x) dx, \quad \forall g, h \text{ tais que } g \leq f \leq h.$$

Logo, os números $\sup G$ e $\inf H$ satisfazem (4.3). Consequentemente, f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, $\sup G = \inf H$. No caso, teremos:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup G = \inf H.$$

O número real $\sup G$ chama-se *integral inferior* de f e simboliza-se por $\underline{I}(f)$, e o número real $\inf H$ denomina-se *integral superior* de f e representa-se por $\bar{I}(f)$. Temos, então,

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \leq f \right\}, \quad \bar{I}(f) = \inf \left\{ \int_a^b h(x) dx \mid f \leq h \right\}.$$

Isto é, a função f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, a sua integral inferior e a sua integral superior forem iguais. Daí, temos que

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

4.4 MEDIDA DA ÁREA ENTRE O EIXO x E O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO COMO UMA INTEGRAL

Vimos que a integral de uma função degrau não negativa é a medida da área definida pelo eixo x e o gráfico da função (no mesmo intervalo $[a, b]$), como exemplifica a Figura 4.1. Mostraremos que o mesmo é válido para qualquer função não negativa integrável.

Teorema 4.8. *Se f é uma função não negativa, integrável no intervalo $[a, b]$ e C é a área entre o eixo x e o gráfico de f em $[a, b]$, então C é mensurável e a medida da sua área é igual a integral $\int_a^b f(x) dx$.*

Demonstração:

Sejam B e D duas regiões degrau tais que $B \subseteq C \subseteq D$. Então existem duas funções degrau, g e h , definidas em $[a, b]$ com $g \leq f \leq h$ tais que

$$\alpha(B) = \int_a^b g(x) dx \quad \text{e} \quad \alpha(D) = \int_a^b h(x) dx, \quad (4.4)$$

onde α é a função área definida na Seção 2.2. Como supomos f integrável em $[a, b]$, existe um único número $I = \int_a^b f(x) dx$ satisfazendo as desigualdades

$$\int_a^b g(x) dx \leq I \leq \int_a^b h(x) dx$$

para todas as funções degrau g e h com $g \leq f \leq h$. E, como a medida da área de cada região degrau B e D é dada por (4.4), concluímos que I é o único número real tal que $\alpha(B) \leq I \leq \alpha(D)$, para todas as regiões degrau B e D tais que $B \subseteq C \subseteq D$. Logo, pela Propriedade da Exaustão (2.13), temos que C é mensurável e que $\alpha(C) = I = \int_a^b f(x) dx$.

4.5 TEORIA E TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO

Anteriormente, definimos a integral de uma função real, de uma variável real, apenas para funções limitadas. É importante salientar que a integrabilidade pode ser definida para outros tipos funções. Como a ideia do trabalho é fornecer uma compreensão intuitiva da integral das funções que são mais estudadas a nível de Ensino Médio, apresentaremos um resultado que é suficientemente abrangente nesse contexto. Ressaltamos que a condição mais geral de integrabilidade para uma função real de uma variável real depende de uma teoria que foge do escopo desse trabalho. Desta forma, veremos, a seguir, que toda função monótona e limitada é

integrável. Resultado que abrange as funções mais vistas no Ensino Médio (em um determinado intervalo), são elas: função afim, função quadrática, funções trigonométricas, função exponencial e função logarítmica.

Em seguida, mostramos como calcular a integral $\int_0^b x^p dx$, quando $p \in \mathbb{Z}^+$. Adiante, utilizando as propriedades da integral, mostramos como calcular a integral de funções polinomiais.

Teorema 4.9. *Se f é limitada e monótona no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração:

Demonstraremos o teorema para funções crescentes, o raciocínio é análogo para funções decrescentes. Para demonstrar a integrabilidade de f devemos provar que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Produzimos, então, duas funções degrau g_n e h_n de forma que ambas tenham a mesma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho, isto é, $|x_k - x_{k-1}| = \frac{b-a}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos g_n e h_n pelas leis de formação

$$g_n(x) = f(x_{k-1}), \quad h_n(x) = f(x_k) \quad \forall x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Já nos pontos de divisão da partição, definimos g_n e h_n de modo que tenhamos $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$ em todo intervalo $[a, b]$, notemos que a hipótese de f ser limitada e monótona nos garante que funções degrau definidas desta forma existam.

Temos, para essas funções degrau, a seguinte relação

$$\begin{aligned} \int_a^b h_n(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})] = \\ &= \frac{(b-a) \cdot [f(x_n) - f(x_0)]}{n} = \frac{(b-a) \cdot [f(b) - f(a)]}{n}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Podemos escrever a igualdade (4.5) como

$$\int_a^b h_n(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx = \frac{C}{n}, C \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

As integrais superior e inferior de f , pela escolha das funções, satisfazem as desigualdades

$$\int_a^b g_n(x) dx \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b h_n(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b g_n(x) dx \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b h_n(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Multiplicando o primeiro conjunto de desigualdades por -1 , temos $-\underline{I}(f) \leq -\int_a^b g_n(x) dx$. E, como $\bar{I}(f) \leq \int_a^b h_n(x) dx$, adicionando ambas as desigualdades, obtemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b h_n(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx.$$

Mas, como $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ e por (4.6), concluímos que

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b h_n(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx = \frac{C}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Portanto, pelo Teorema 3.4, $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Logo, f é integrável em $[a, b]$.

4.6 INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO MONÓTONA E LIMITADA

Com a demonstração do Teorema 4.9 obtemos, além da existência da integral para funções monótonas e limitadas, um método para calcular o valor da integral. A ideia intuitiva é preencher a área entre o eixo x e o gráfico de f em $[a, b]$ por retângulos de largura $\frac{b-a}{n}$ e alturas $g_n(x)$ e $h_n(x)$, como no Teorema 4.9.

Teorema 4.10. *Considere f limitada e crescente (o caso decrescente é análogo) no intervalo $[a, b]$ e $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Se $I \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.7)$$

então $I = \int_a^b f(x) dx$.

Demonstração:

Consideremos $g_n(x)$ e $h_n(x)$ como no Teorema 4.9. Por (4.7), temos que

$$\int_a^b g_n(x) dx \leq I \leq \int_a^b h_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.8)$$

Mas, $\int_a^b g_n(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \Rightarrow -\int_a^b f(x) dx \leq -\int_a^b g_n(x) dx$. Somando essa desigualdade à segunda desigualdade de (4.8), obtemos

$$I - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h_n(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx.$$

E, por (4.6), inferimos que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{C}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Mas, pelo Teorema 3.4, concluímos que $\left| I - \int_a^b f(x) dx \right| = 0$, logo, $I = \int_a^b f(x) dx$. ■

Antes de utilizarmos o Teorema 4.10 em um exemplo, precisamos provar as seguintes desigualdades:

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p, \quad (4.9)$$

para $k, p \in \mathbb{Z}^+$. Faremos a prova por indução finita da segunda desigualdade (a primeira é análoga).

Demonstração:

Para $n=1$, temos $\frac{1^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1} < 1^p = 1$.

Suponhamos que a propriedade seja válida para n , isto é,

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p. \quad (4.10)$$

Mostremos que a propriedade é válida para $n+1$, ou seja,

$$\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n+1} k^p$$

Pela hipótese de indução (4.10), temos que

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p < \sum_{k=1}^n k^p + (n+1)^p = \sum_{k=1}^{n+1} k^p.$$

Basta mostrarmos, então, que

$$\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} < \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p. \quad (4.11)$$

De fato, multiplicando ambos os membros da desigualdade (4.11) por $(p+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} (n+1)^{p+1} &< n^{p+1} + (p+1) \cdot (n+1)^p \Leftrightarrow \\ (n+1)^{p+1} - n^{p+1} &< (p+1) \cdot (n+1)^p \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Pelo binômio de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^k - n^{p+1} &< (p+1) \cdot \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k &< \sum_{k=0}^p (p+1) \cdot \binom{p}{k} n^k. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Mas,

$$\begin{aligned} (p+1) \cdot \binom{p}{k} &= (p+1) \cdot \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{(p+1)!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{(p+1)!}{k! \cdot (p-k)!} \cdot \frac{p-k+1}{p-k+1} = \\ &= (p-k+1) \cdot \frac{(p+1)!}{k! \cdot (p-k+1)!} = (p-k+1) \cdot \binom{p+1}{k} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Portanto, substituindo (4.13) em (4.12), inferimos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k &< \sum_{k=0}^p (p-k+1) \cdot \binom{p+1}{k} n^k \Leftrightarrow \\ 0 &< \sum_{k=0}^p (p-k+1) \cdot \binom{p+1}{k} n^k - \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k \Leftrightarrow \\ 0 &< \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k+1-1) \Leftrightarrow \\ 0 &< \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) \end{aligned}$$

Vejamus que esta última desigualdade é sempre verdadeira:

Notemos que

$$\sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k)$$

pois quando $k = p$ temos $p - k = 0$.

Logo basta provar que o lado direito da igualdade anterior é positivo. Vamos abrir em dois casos:

Para $p = 1$

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) = \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} n^0 \cdot (1-0) = 1 > 0.$$

Para $p > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) &= \binom{p+1}{0} n^0 \cdot (p-0) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) \\ &= p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k \cdot (p-k) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado está provado. ■

Exemplo 4.2 (uso do Teorema 4.10). *Calculemos a integral $\int_0^b x^p dx$ para $p \in \mathbb{Z}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$. Particionando $[0, b]$ em n intervalos, temos a partição $P = \{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n} = b\}$. A ideia é aplicar a função $f(x) = x^p$ em cada um dos pontos de divisão da partição e multiplicar os valores obtidos pelo comprimento de cada subintervalo de P , isto, é multiplicar por $\frac{b}{n}$. Formando, assim, retângulos que estão acima (quando utilizamos k) e abaixo (quando utilizamos $k-1$) do gráfico de f em $[0, b]$. Multiplicando as desigualdades em (4.9) por $\left(\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\right)$ obtemos*

$$\begin{aligned} \left(\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\right) \cdot \sum_{k=1}^n (k-1)^p &< \left(\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\right) \cdot \frac{n^{p+1}}{p+1} < \left(\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\right) \cdot \sum_{k=1}^n k^p \Rightarrow \\ \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\frac{b(k-1)}{n}\right]^p &< \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\frac{bk}{n}\right]^p \end{aligned} \quad (4.14)$$

Tomando $f(x) = x^p$ e $x_k = \frac{bk}{n}$ em (4.14) concluímos que

$$\frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Logo, pelo Teorema 4.10, com $f(x) = x^p$, $a = 0$ e $I = \frac{b^{p+1}}{p+1}$, temos que $\int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$.

4.7 PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Nesta seção demonstraremos algumas propriedades básicas da integração. Utilizaremos para as demonstrações os resultados da Seção 4.3, um deles diz que toda função f limitada em um intervalo $[a, b]$ tem integral inferior $\underline{I}(f)$ e integral superior $\bar{I}(f)$ tais que

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \leq f \right\}, \quad \bar{I}(f) = \inf \left\{ \int_a^b h \mid f \leq h \right\},$$

onde g e h são funções degrau quaisquer, de maneira que sejam inferiores e superiores a f , respectivamente. O outro resultado da Seção 4.3 enuncia que a função f é integrável se, e somente se, $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, isto é, a integral de f tem o mesmo valor das integrais inferior e superior de f .

4.7.1 PROPRIEDADE DA LINEARIDADE

Teorema 4.11. *Sejam f e j integráveis em $[a, b]$, então $c_1 \cdot f + c_2 \cdot j$ também o é, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. E também:*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 j(x)] dx = c_1 \cdot \int_a^b f(x) dx + c_2 \cdot \int_a^b j(x) dx.$$

A demonstração será separada em duas partes:

$$(a) \int_a^b (f + j)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b j(x) dx;$$

$$(b) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstração:

(a) Denotemos $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ e $I(j) = \int_a^b j(x) dx$. Devemos mostrar que $\underline{I}(f + j) = \bar{I}(f + j) = I(f) + I(j)$.

Tomemos g_1 e g_2 funções degrau quaisquer que sejam inferiores a f e j , respectivamente. Como f e j são integráveis, então

$$I(f) = \sup \left\{ \int_a^b g_1 \mid g_1 \leq f \right\}, \quad I(j) = \sup \left\{ \int_a^b g_2 \mid g_2 \leq j \right\}.$$

Mas, então, pela Propriedade Aditiva do supremo, Teorema 3.7, temos que

$$I(f) + I(j) = \sup \left\{ \int_a^b g_1 + \int_a^b g_2 \mid g_1 \leq f, g_2 \leq j \right\}. \quad (4.15)$$

Como $g_1 \leq f$ e $g_2 \leq j$, então $g = g_1 + g_2$ é uma função degrau tal que $g \leq f + j$, portanto, pelo Teorema 4.1, inferimos

$$\int_a^b g_1(x) + \int_a^b g_2(x) = \int_a^b g(x) \leq \underline{I}(f + j).$$

Logo, o número real $\underline{I}(f + j)$ é uma cota superior para o conjunto que aparece no segundo membro de 4.15. Esta cota superior não pode ser menor do que o supremo do conjunto, com isso temos que

$$I(f) + I(j) \leq \underline{I}(f + j). \quad (4.16)$$

Analogamente, se utilizarmos

$$I(f) = \inf \left\{ \int_a^b h_1 \mid f \leq h_1 \right\}, \quad I(j) = \inf \left\{ \int_a^b h_2 \mid j \leq h_2 \right\},$$

onde h_1 e h_2 são funções degrau quaisquer que sejam superiores a f e j , respectivamente, obtemos a desigualdade

$$\bar{I}(f + j) \leq I(f) + I(j). \quad (4.17)$$

Mas, $\underline{I}(f + j) \leq \bar{I}(f + j)$, pelo exposto na Seção 4.3, juntando isso com 4.16 e 4.17 concluímos que $\underline{I}(f + j) = I(f) + I(j) = \bar{I}(f + j)$. Portanto $(f + j)(x)$ é integrável e $\int_a^b (f + j)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b j(x) dx$

(b) Para $c = 0$ temos que $\int_a^b 0 \cdot f(x) dx = \int_a^b 0 dx = 0 = 0 \cdot \int_a^b f(x) dx$.

Suponhamos $c > 0$, temos, então, que cada função degrau g_1 inferior a $c \cdot f$ é da forma $g_1 = c \cdot g$, onde g é uma função degrau inferior a f . De fato, $g_1(x) \leq (c \cdot f)(x) \Rightarrow \left(\frac{g_1}{c}\right)(x) \leq f(x)$, tomando $\left(\frac{g_1}{c}\right) = g$, temos que $c \cdot g = g_1 \leq (c \cdot f)$, onde g é uma função degrau, pois, como $g_1(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, para algum subintervalo de uma partição de $[a, b]$, $g(x) = \frac{\alpha}{c}$ para este mesmo subintervalo. Por outro lado, sendo g degrau e inferior a f , temos que $g(x) \leq f(x) \Rightarrow (c \cdot g)(x) \leq (c \cdot f)(x)$, assumindo $g_1 = c \cdot g$ obtemos que $g_1 \leq (c \cdot f)$, sendo g_1 degrau pelo mesmo raciocínio anterior.

Analogamente, para cada função degrau h_1 superior a $c \cdot f$ temos $h_1 = c \cdot h$, onde h é uma função degrau superior a f . Logo, pelos Teoremas 4.2 e 3.8, temos

$$\underline{I}(c \cdot f) = \sup \left\{ \int_a^b g_1 \mid g_1 \leq c \cdot f \right\} = \sup \left\{ c \cdot \int_a^b g \mid g \leq f \right\} = c \cdot I(f)$$

e

$$\bar{I}(c \cdot f) = \inf \left\{ \int_a^b h_1 \mid c \cdot f \leq h_1 \right\} = \inf \left\{ c \cdot \int_a^b h \mid f \leq h \right\} = c \cdot I(f).$$

Portanto, $\underline{I}(c \cdot f) = \bar{I}(c \cdot f) = c \cdot I(f)$.

Suponhamos agora $c < 0$, temos então que cada função degrau g_1 inferior a $c \cdot f$ é da forma $g_1 = c \cdot h$, onde h é uma função degrau superior a f . Analogamente, para cada função degrau h_1

superior a $c \cdot f$ temos $h_1 = c \cdot g$, onde g é uma função degrau inferior a f . Logo, pelos Teoremas 4.2 e 3.9, temos

$$\underline{I}(c \cdot f) = \sup \left\{ \int_a^b g_1 \mid g_1 \leq c \cdot f \right\} = \sup \left\{ c \cdot \int_a^b h \mid f \leq h \right\} = c \cdot \inf \left\{ \int_a^b h \mid f \leq h \right\} = c \cdot I(f)$$

e

$$\bar{I}(c \cdot f) = \inf \left\{ \int_a^b h_1 \mid c \cdot f \leq h_1 \right\} = \inf \left\{ c \cdot \int_a^b g \mid g \leq f \right\} = c \cdot \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \leq f \right\} = c \cdot I(f).$$

Com isso, $\underline{I}(c \cdot f) = \bar{I}(c \cdot f) = c \cdot I(f)$. Isto é, (b) é válida $\forall c \in \mathbb{R}$ ■

4.7.2 PROPRIEDADE DA ADITIVIDADE DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Teorema 4.12. *Se duas das três integrais a seguir existem, então a terceira também existe e*

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Note que não se supõe qualquer ordem entre a, b e c .

Demonstração:

Para a demonstração consideraremos $a < c < b$, e que $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ existem. Os outros casos são análogos. Tomemos $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ as integrais inferior e superior de f , respectivamente, no intervalo $[a, b]$. Devemos provar que

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Seja g uma função degrau inferior a f em $[a, b]$, escolhida arbitrariamente. Com isso, pelo Teorema 4.5, temos

$$\int_a^c g(x) dx + \int_c^b g(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Mas, tomando $g_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_1(x) = g(x) \forall x \in [a, c]$ e $g_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_2(x) = g(x) \forall x \in [c, b]$, temos que g é uma função degrau que satisfaz, pelo Teorema 4.5, o seguinte

$$\int_a^c g_1(x) dx + \int_c^b g_2(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Mas então, pelo Teorema 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \underline{I}(f) &= \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \leq f \right\} = \sup \left\{ \int_a^c g_1 \mid g_1 \leq f \right\} + \sup \left\{ \int_c^b g_2 \mid g_2 \leq f \right\} = \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio, podemos provar que

$$\bar{I}(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Portanto, concluímos que f é integrável em $[a, b]$ e sua integral é dada pela soma

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

4.7.3 PROPRIEDADE DA INVARIÂNCIA SOB TRANSLAÇÃO

Teorema 4.13. *Se f é integrável em $[a, b]$, então $\forall c \in \mathbb{R}$ temos*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx.$$

Demonstração:

Tomemos $j : [a+c, b+c] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x-c)$. Consideremos $\underline{I}(j)$ e $\bar{I}(j)$ as integrais inferior e superior de j , no intervalo $[a+c, b+c]$, respectivamente. Devemos mostrar que

$$\underline{I}(j) = \bar{I}(j) = \int_a^b f(x) dx.$$

Seja g uma função degrau inferior a j no intervalo $[a+c, b+c]$. Logo, a função g_1 definida em $[a, b]$ por $g_1(x) = g(x+c)$ é uma função degrau inferior a f em $[a, b]$. Mas, toda função degrau g_1 inferior a f em $[a, b]$ tem essa forma para alguma g inferior a j em $[a+c, b+c]$. De fato, tomando $[a+c = x_0+c, x_1+c, \dots, x_n+c = b+c]$ uma partição de $[a+c, b+c]$, de modo que $g(x)$ seja degrau, temos que $g(x) = \alpha_k \in \mathbb{R}$ para $x \in (x_k+c, x_{k-1}+c)$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Temos que $\exists! \bar{x} \in (x_k, x_{k-1})$ tal que $\bar{x} = x - c$, com $x \in (x_k+c, x_{k-1}+c) \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo, $g_1(\bar{x}) = g_1(x-c) = g([x-c]+c) = g(x) = \alpha_k \leq j(x) = f(x-c) = f(\bar{x})$, portanto g_1 é constante em (x_k, x_{k-1}) , $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, com isso g_1 é degrau em $[a, b]$ e inferior a f . Pelo Teorema 4.6 temos

$$\int_{a+c}^{b+c} g(x) dx = \int_a^b g(x+c) dx = \int_a^b g_1(x) dx.$$

Consequentemente obtemos

$$\underline{I}(j) = \sup \left\{ \int_{a+c}^{b+c} g \mid g \leq j \right\} = \sup \left\{ \int_a^b g_1 \mid g_1 \leq f \right\} = \int_a^b f(x) dx.$$

Analogamente, concluímos que

$$\bar{I}(j) = \int_a^b f(x) dx,$$

e, com isso, inferimos que

$$\int_{a+c}^{b+c} j(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

4.7.4 PROPRIEDADE DA DILATAÇÃO/CONTRAÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Teorema 4.14. *Se f é integrável em $[a, b]$, então $\forall c \in \mathbb{R}^*$ temos*

$$c \cdot \int_a^b f(x) dx = \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} f\left(\frac{x}{c}\right) dx.$$

Demonstração:

Para a demonstração suporemos $c > 0$. A demonstração com $c < 0$ é análoga. Definimos j no intervalo $[c \cdot a, c \cdot b]$ pondo $j(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$. Consideremos $\underline{I}(j)$ e $\bar{I}(j)$ as integrais inferior e superior de j no intervalo $[c \cdot a, c \cdot b]$, respectivamente. Precisamos provar que

$$\underline{I}(j) = \bar{I}(j) = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Considere g uma função degrau inferior a j no intervalo $[c \cdot a, c \cdot b]$. Definimos a função g_1 , em $[a, b]$, por $g_1(x) = g(c \cdot x)$, isto é, g_1 é uma função degrau inferior a f em $[a, b]$. Porém, toda função degrau g_1 inferior a f em $[a, b]$ tem essa forma para alguma g inferior a j em $[c \cdot a, c \cdot b]$, pelo mesmo raciocínio exposto na demonstração do Teorema 4.13. Pelo Teorema 4.7 temos

$$\int_{c \cdot a}^{c \cdot b} g(x) dx = c \cdot \int_a^b g(c \cdot x) dx = c \cdot \int_a^b g_1(x) dx.$$

Com isso, pelo Teorema 3.8, obtemos

$$\underline{I}(j) = \sup \left\{ \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} g \mid g \leq j \right\} = \sup \left\{ c \cdot \int_a^b g_1 \mid g_1 \leq f \right\} = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Analogamente provamos que

$$\bar{I}(j) = c \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

e, portanto, temos que

$$\int_{c \cdot a}^{c \cdot b} j(x) dx = \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} f\left(\frac{x}{c}\right) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

4.7.5 PROPRIEDADE DA COMPARAÇÃO

Teorema 4.15. *Se f e j são funções integráveis em $[a, b]$ e se $j(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$ então*

$$\int_a^b j(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Demonstração:

Consideremos $j \leq f$ no intervalo $[a, b]$. Sendo g uma função degrau inferior a j , e h uma função

degrau superior a f , temos, pelo Teorema 4.4, $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$, e junto com o Teorema 3.5, obtemos

$$\int_a^b j(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \leq j \right\} \leq \inf \left\{ \int_a^b h \mid f \leq h \right\} = \int_a^b f(x) dx,$$

portanto, $\int_a^b j(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$. ■

4.8 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Definição 4.3 (Função Polinomial). *É uma função $p : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_n \in \mathbb{R}^*$ e $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.*

Estabelecemos no Exemplo 4.2 que

$$\int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}, \quad (4.18)$$

para $p \in \mathbb{Z}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$. Para $b = 0$ a Fórmula 4.18 também é válida, pois ambos os membros da igualdade são zero. Já, utilizando o Teorema 4.14, podemos provar que a Fórmula (4.18) também é válida pra $b < 0$. De fato, tomando $c = -1$ no Teorema 4.14 temos que

$$\begin{aligned} \int_0^b x^p dx &= - \int_0^{-b} (-x)^p dx = - \int_0^{-b} (-1)^p \cdot x^p dx = (-1)^{p+1} \cdot \int_0^{-b} x^p dx = \\ &= (-1)^{p+1} \cdot \frac{(-b)^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

Servindo-nos do Teorema 4.12 temos

$$\int_a^b x^p dx = \int_0^b x^p dx - \int_0^a x^p dx = \quad (4.19)$$

$$= \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e qualquer inteiro } p \geq 0. \quad (4.20)$$

Utilizamos o símbolo

$$P(x) \Big|_a^b$$

para representar a diferença $P(b) - P(a)$. Então, a Fórmula 4.20 é escrita como

$$\int_a^b x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Com esta fórmula e a Propriedade da Linearidade (Teorema 4.11), podemos integrar qualquer função polinomial.

Exemplo 4.3. Para calcular a integral $\int_2^4 (2x^3 - 3x^2 + x + 4) dx$, determinamos a integral de cada termo e depois adicionamos os resultados. Logo, temos

$$\begin{aligned} \int_2^4 (2x^3 - 3x^2 + x + 4) dx &= 2 \cdot \int_2^4 x^3 dx + (-3) \cdot \int_2^4 x^2 dx + \int_2^4 x dx + \int_2^4 4 dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_2^4 + (-3) \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 + 4x \Big|_2^4 = \\ &= 2 \cdot \frac{4^4 - 2^4}{4} + (-3) \cdot \frac{4^3 - 2^3}{3} + \frac{4^2 - 2^2}{2} + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2. = \\ &= 78. \end{aligned}$$

Generalizando, para integrar uma função polinomial, em um intervalo $[a, b]$, cuja lei de formação é dada por $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$, integramos termo a termo:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Com isso, é possível integrar qualquer polinômio sem utilizarmos limites ou derivadas.

5 ATIVIDADES

Neste capítulo, propomos uma série de atividades que visa permitir ao aluno ter uma intuição sobre o conceito de integral de funções reais de uma variável real. Para isso, utilizamos a interpretação geométrica da integral. Consideramos a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores e recomendamos ao professor adaptar e utilizar as partes que lhe forem convenientes, conforme o método de ensino adotado. Ressaltamos que a definição de integral utilizada nos exercícios é a mesma que a exposta na Fórmula 4.1.

5.1 ATIVIDADE 1 - FUNÇÕES DEGRAU

Objetivo: Esta primeira atividade tem por objetivo calcular e analisar propriedades da integral de funções degrau.

Para isso, o aluno precisa ter conhecimento prévio de alguns conceitos: partição de um intervalo, refinamento de uma partição e função degrau. Esses conceitos devem ter sido introduzidos antes de sugerir a atividade, que foi projetada para reforçar esses conceitos.

1. Considere o intervalo real $[2, 10]$.

(a) Determine uma partição P deste intervalo.

(b) Determine um refinamento P' de P .

(c) Faça uma partição do intervalo em duas, e depois em quatro partes, de modo que os subintervalos estabelecidos sejam do mesmo tamanho.

2. Considere a função $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 5, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$.

(a) Mostre que a função f é uma função degrau determinando uma partição P do intervalo $[0, 6]$, de modo que a função f seja constante nos subintervalos determinados pela partição.

(b) Esboce o gráfico da função f .

(c) Calcule $\int_0^6 f(x) dx$. O que este número representa?

(d) Faça uma subpartição da partição P determinada no item (a). Escreva a lei de formação da função f definida nessa subpartição. O que aconteceu com o valor de $\int_0^6 f(x) dx$, calculada utilizando essa subpartição?

3. Considere a função $g : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 3, & \text{se } x \in (1, 3] \\ -2, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}$.

(a) Esboce o gráfico da função g .

(b) Calcule $\int_0^6 g(x) dx$. Este número representa a medida da área entre o eixo x e o gráfico da função g em $[0, 6]$? Por quê?

(c) Determine a área entre o eixo x e o gráfico de g em $[0, 6]$.

4. Considere $h : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Escreva a lei de formação da função h .

(a) Calcule $\int_0^6 h(x) dx$. Este número representa a medida da área entre o eixo x e o gráfico da função h em $[0, 6]$? Por quê?

(b) Considere uma função degrau definida em um intervalo real $[a, b]$. Qual requisito a lei de formação dessa função deve cumprir, em $[a, b]$, para que a integral calculada nesse intervalo corresponda a área entre o eixo x e o gráfico da função em $[a, b]$?

(c) Qual relação você pode observar entre as integrais calculadas de f , g e h ?

5. Considere a função $j : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = (2 \cdot f)(x)$. Escreva a lei de formação da função j .

(a) Calcule $\int_0^6 j(x) dx$

(b) Qual a relação entre a integral das funções j e f ? Qual é a interpretação geométrica dessa relação?

6. Calcule $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$.

(a) Qual a relação dessas somas com $\int_0^6 f(x) dx$? Qual é a interpretação geométrica dessa relação?

7. Considere a função $f(x - 3)$ definida em $[0 + 3, 6 + 3] = [3, 9]$. Escreva a lei de formação da função $f(x - 3)$.

(a) Esboce o gráfico de $f(x - 3)$.

(b) Calcule $\int_3^9 f(x - 3) dx$. Qual a relação entre $\int_0^6 f(x) dx$ e $\int_3^9 f(x - 3) dx$?

(c) Qual é a interpretação geométrica dessa relação?

8. Seja a função $f\left(\frac{x}{2}\right)$ definida em $[0 \cdot 2, 6 \cdot 2] = [0, 12]$. Escreva a lei de formação da função $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Esboce o gráfico de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

(b) Calcule $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$. Qual a relação entre $\int_0^6 f(x) dx$ e $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$?

(c) Qual é a interpretação geométrica dessa relação?

5.1.1 RESOLUÇÕES DA ATIVIDADE 1

1 – (a) Uma partição possível é $P = \{2, 3, 4, 5.3, 6, 8.9, 9.8, 10\}$.

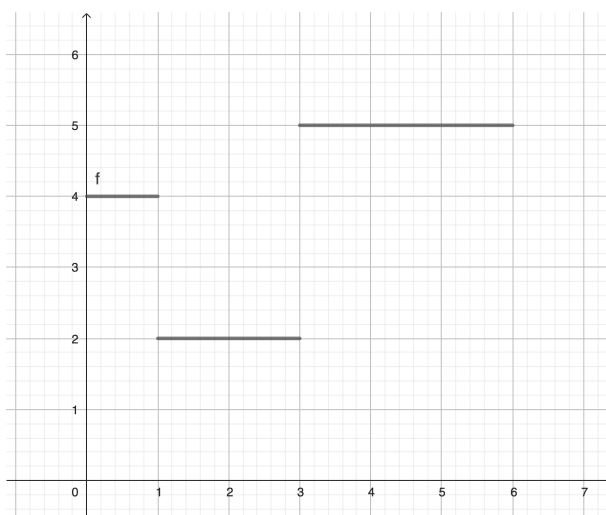
1 – (b) Um possível refinamento de P seria $P' = \{2, 3, 4, 5, 5.3, 6, 8.9, 9, 9.8, 9.9, 10\}$.

1 – (c) O comprimento total do intervalo é $|10 - 2| = 8$. Portanto, como o intervalo será dividido em duas partes, cada parte deverá ter $\frac{8}{2} = 4$ unidades de comprimento. Logo, dividindo em duas partes, a partição seria $P = \{2, 6, 10\}$. Analogamente, dividindo o intervalo em quatro partes, devemos ter em cada parte um $\frac{8}{4} = 2$ unidades de comprimento. Portanto, dividindo em quatro partes, a partição seria $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

2 – (a). Uma partição possível é $P = \{0, 1, 3, 6\}$, onde $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6$ e $f(x) = c_1 = 4 \forall x \in (0, 1)$, $f(x) = c_2 = 2 \forall x \in (1, 3)$ e $f(x) = c_3 = 5 \forall x \in (3, 6)$.

2 – (b). O gráfico está ilustrado na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Resolução da questão 2 - (b)



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

2 – (c). $\int_0^6 f(x) dx = \sum_{k=1}^3 c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 4 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (3 - 1) + 5 \cdot (6 - 3) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 4 + 4 + 15 = 23$. Este número, em unidades de área, é a medida da área

entre o eixo x e o gráfico da função em $[0, 6]$.

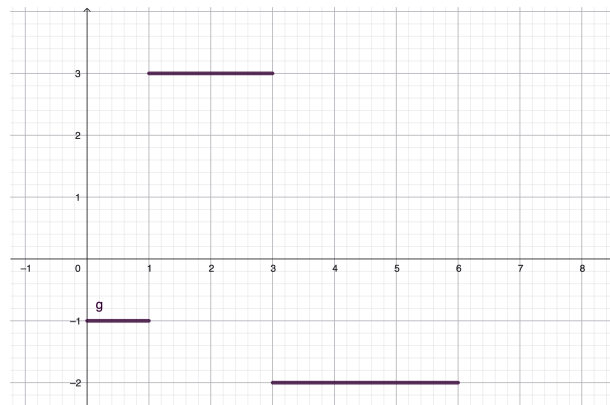
2 – (d). Uma possível subpartição seria $P' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nessa subpartição a função f seria definida como $f(x) = \begin{cases} c_1 = 4, & \text{se } x \in [0, 1] \\ c_2 = 2, & \text{se } x \in (1, 2) \cup (2, 3] \\ c_3 = 5, & \text{se } x \in (3, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6] \end{cases}$. Então, teríamos

$$\int_0^6 f(x) dx = \sum_{k=1}^6 c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 4 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (3 - 2) + 5 \cdot (4 - 3) + 5 \cdot (5 - 4) + 5 \cdot (6 - 5) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4 + 2 + 2 + 5 + 5 + 5 = 23.$$

Portanto, concluímos que os valores das duas integrais calculadas são os mesmos.

3 – (a). O gráfico da função g está ilustrado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Solução da questão 3 - (a)



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

3 – (b). $\int_0^6 g(x) dx = \sum_{k=1}^3 c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = -1 \cdot (1 - 0) + 3 \cdot (3 - 1) + (-2) \cdot (6 - 3) = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = -1 + 6 - 6 = -1$. Não representa a medida da área, pois, no intervalo em que a função é negativa, não estamos calculando a medida da área do retângulo correspondente.

3 – (c). $\sum_{k=1}^3 |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) = |-1| \cdot (1 - 0) + 3 \cdot (3 - 1) + |-2| \cdot (6 - 3) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 + 6 = 13$.

$$4. h(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 5, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 3, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases}.$$

4-(a). $\int_0^6 h(x) dx = 3 \cdot (1-0) + 5 \cdot (3-1) + 3 \cdot (6-3) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 3 + 10 + 9 = 22$.
 Sim, representa a medida da área pois a função é positiva em todo o intervalo $[0, 6]$.

4 - (b). A função deve ser não negativa em todo o intervalo $[a, b]$.

4 - (c). $\int_0^6 h(x) dx = \int_0^6 f(x) dx + \int_0^6 g(x) dx = 23 + (-1) = 22$. A integral da soma (da função h) é a soma das integrais (das funções f e g).

$$5. j(x) = (2 \cdot f)(x) = 2 \cdot f(x) = \begin{cases} 8, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 4, & \text{se } x \in (1, 3] \\ 10, & \text{se } x \in (3, 6] \end{cases} .$$

5 - (a). $\int_0^6 j(x) dx = 8 \cdot (1 - 0) + 4 \cdot (3 - 1) + 10 \cdot (6 - 3) = 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 8 + 8 + 30 = 46$.

5 - (b). $\int_0^6 j(x) dx = 2 \cdot \int_0^6 f(x) dx = 2 \cdot 23 = 46$. A medida da área entre o eixo x e o gráfico de j é o dobro da de f em $[0, 6]$.

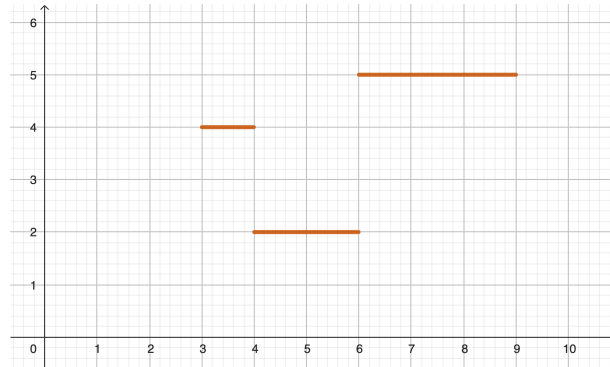
6. $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = [4 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (3 - 1)] + [5 \cdot (6 - 3)] = [4 + 4] + [15] = 8 + 15 = 23$.

6 - (a). $\int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$. A soma das medidas das áreas entre o eixo x e o gráfico de f em $[0, 3]$ e $[3, 6]$ é igual a medida da área entre o eixo x e o gráfico de f em $[0, 6]$.

$$7. f(x - 3) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \in [3, 4] \\ 2, & \text{se } x \in (4, 6] \\ 5, & \text{se } x \in (6, 9] \end{cases} .$$

7 - (a). O gráfico da função $f(x - 3)$ está ilustrado na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Solução da questão 7 - (a)



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

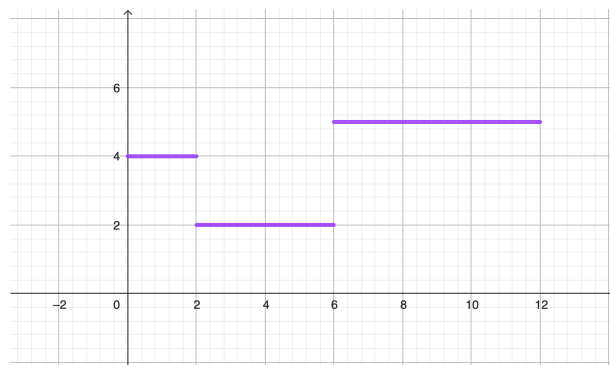
$$7 - (b). \int_3^9 f(x-3) dx = 4 \cdot (4-3) + 2 \cdot (6-4) + 5 \cdot (9-6) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 4 + 4 + 15 = 23. \int_3^9 f(x-3) dx = \int_0^6 f(x) dx.$$

7 - (c). A área entre o eixo x e o gráfico de $f(x-3)$ em $[3, 9]$ é área entre o eixo x e o gráfico de f em $[0, 6]$ transladado 3 unidades para a direita.

$$8. f\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \in [0, 2] \\ 2, & \text{se } x \in (2, 6] \\ 5, & \text{se } x \in (6, 12] \end{cases}.$$

8 - (a). O gráfico da função $f\left(\frac{x}{2}\right)$ está ilustrado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – Solução da questão 8 - (a)



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

$$8 - (b). \int_0^{12} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4 \cdot (2-0) + 2 \cdot (6-2) + 5 \cdot (12-6) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 8 + 8 + 30 = 46. 2 \cdot \int_0^6 f(x) dx = 2 \cdot 23 = 46 = \int_0^{12} f\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

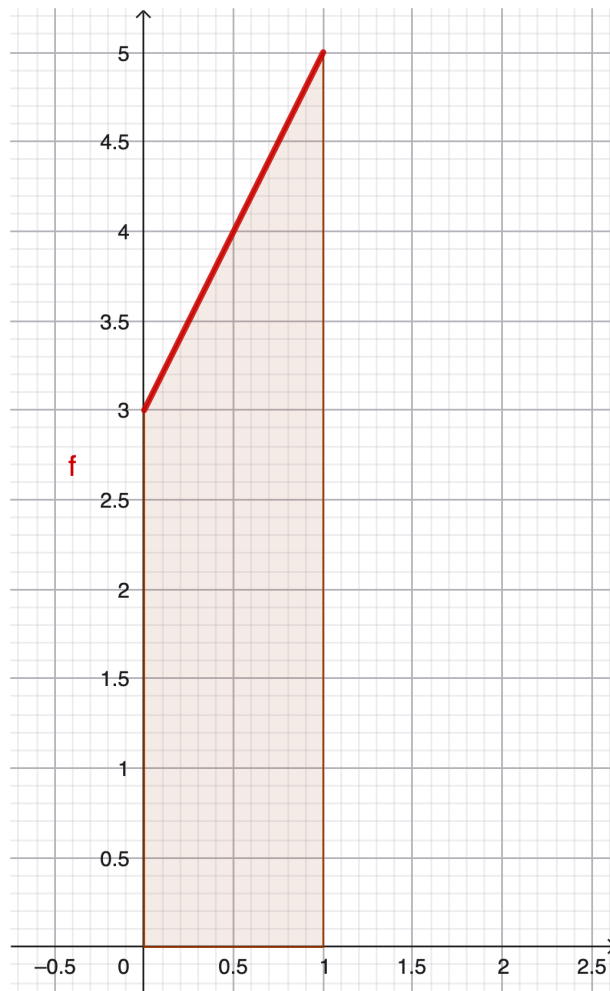
8 – (c). É como se a área entre o eixo x e o gráfico de $f\left(\frac{x}{2}\right)$ em $[0, 12]$ fosse dilatado em duas vezes com relação a área entre o eixo x e o gráfico de f em $[0, 6]$.

5.2 ATIVIDADE 2 - ÁREAS

Objetivo: Nesta atividade, o objetivo é utilizar integrais de funções degrau para estimar áreas de figuras cujas áreas já são conhecidas. Dessa forma, o aluno se conscientiza de que a integral é uma ferramenta importante para o cálculo de áreas.

1. Considere área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = 2x + 3$ em $[0, 1]$, representado na Figura 5.5.

Figura 5.5 – Área entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = 2x + 3$ em $[0, 1]$

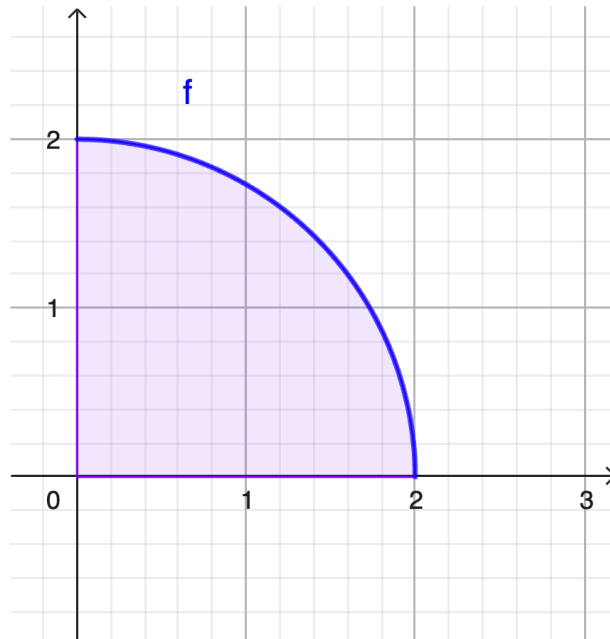


Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

- (a) Determine a medida da área dessa figura.

- (b) Divida o intervalo $[0, 1]$ em dois intervalos com o mesmo comprimento. Crie uma função degrau. Para cada um dos intervalos multiplique o comprimento do intervalo pelo menor valor que a função assume neste intervalo, após isso, faça a soma desses valores. O que esta soma representa?
- (c) Divida o intervalo $[0, 1]$ em dois intervalos com o mesmo comprimento. Para cada um dos intervalos multiplique o comprimento do intervalo pelo maior valor que a função assume no mesmo intervalo, após isso, faça a soma desses valores. O que esta soma representa?
- (d) Divida, agora, o intervalo $[0, 1]$ em quatro intervalos com o mesmo comprimento. Realize os mesmos processos dos itens (b) e (c). O que aconteceu com os valores obtidos neste item, comparados aos itens anteriores?
- (e) Divida, agora, o intervalo $[0, 1]$ em oito intervalos com o mesmo comprimento. Realize o mesmo processo do item (d).
- (f) Divida, agora, o intervalo $[0, 1]$ em n intervalos com o mesmo comprimento. Realize o mesmo processo do item (d).
- (g) O que acontece com os valores obtidos no item (f), quando n é um número "grande"?
2. Considere a área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[0, 2]$, representado na Figura 5.6.
- (a) Determine a medida da área dessa figura.
- (b) Divida o intervalo $[0, 2]$ em dois intervalos com o mesmo comprimento. Para cada um dos intervalos multiplique o comprimento do intervalo pelo menor valor que a função assume neste intervalo, após isso, faça a soma desses valores. O que esta soma representa?

Figura 5.6 – Área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[0, 2]$



Fonte: O autor com o GeoGebra (2025).

- (c) Divida o intervalo $[0, 2]$ em dois intervalos com o mesmo comprimento. Para cada um dos intervalos multiplique o comprimento do intervalo pelo maior valor que a função assume no mesmo intervalo, após isso, faça a soma desses valores. O que esta soma representa?
- (d) Divida, agora, o intervalo $[0, 2]$ em quatro intervalos com o mesmo comprimento. Realize os mesmos processos dos itens (b) e (c). O que aconteceu com os valores obtidos neste item, comparados aos itens anteriores?
- (e) Divida, agora, o intervalo $[0, 2]$ em oito intervalos com o mesmo comprimento. Realize o mesmo processo do item (d).
- (f) Divida, agora, o intervalo $[0, 2]$ em n intervalos com o mesmo comprimento. Realize o mesmo processo do item (d).
- (g) O que acontece com os valores obtidos no item (f), quando n é um número "grande"?

5.2.1 RESOLUÇÕES DA ATIVIDADE 2

1 – (a). A figura é um trapézio, de base menor 3, base maior 5 e altura 1. Portanto, a medida da sua área é dada por $\frac{(3+5) \cdot 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ u.a.

1 – (b). $[0, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{2}$. O menor valor da função em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ é $f(0) = 3$ e em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ é $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$. Logo, temos $\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$. Este valor representa uma aproximação, por falta, para a área da figura.

1 – (c). $[0, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{2}$. O maior valor da função em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ é $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$ e em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ é $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$. Logo, temos $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$. Este valor representa uma aproximação, por excesso, para a área da figura.

1 – (d). $[0, 1] = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{4}$. Realizando o mesmo processo do item anterior, temos:

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^3 \left[2 \cdot \frac{i}{4} + 3\right] = 3,75.$$

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \left[2 \cdot \frac{i}{4} + 3\right] = 4,25.$$

Os valores obtidos desse item se aproximam mais da medida da área da figura. O valor obtido utilizando o menor valor em cada intervalo aumenta, enquanto o valor obtido utilizando o maior valor em cada intervalo diminui.

1 – (e). $[0, 1] = \left[0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right] \cup \left[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right] \cup \left[\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right] \cup \left[\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{7}{8}, 1\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{8}$. Realizando o mesmo processo do item anterior, temos:

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=0}^7 \left[2 \cdot \frac{i}{8} + 3\right] = 3,875.$$

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 \left[2 \cdot \frac{i}{8} + 3 \right] = 4,125.$$

Os valores obtidos desse item se aproximam mais da medida da área da figura. O valor obtido utilizando o menor valor em cada intervalo aumenta, enquanto o valor obtido utilizando o maior valor em cada intervalo diminui.

1 – (f). $[0, 1] = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{n}$. Realizando o mesmo processo do item anterior, temos

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[2 \cdot \frac{i}{n} + 3 \right] = \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \dots + \frac{2 \cdot (n-1)}{n} \right) + \frac{1}{n} \cdot 3n$$

pela soma da P.A, obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot (n-1)}{n} + 0\right)}{2} \cdot n + 3 = \frac{n-1}{n} + 3 \\ &= 1 - \frac{1}{n} + 3 = 4 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left[2 \cdot \frac{i}{n} + 3 \right] = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \dots + \frac{2 \cdot n}{n} \right) + \frac{1}{n} \cdot 3n$$

pela soma da P.A., obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(2 + \frac{2}{n}\right)}{2} \cdot n + 3 = \frac{n+1}{n} + 3 \\ &= 1 + \frac{1}{n} + 3 = 4 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

1 – (g). Para um n "grande" esses valores tendem a medida da área da figura, que igual a 4.

2 – (a). A figura é um setor circular cuja medida da área equivale a $\frac{1}{4}$ da medida da área de um círculo com raio igual a 2 u.c. Portanto, temos $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi \approx 3,14$ u.a.

2 – (b). $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$. O comprimento de cada intervalo é 1. Como a função f é decrescente nesse intervalo, o menor valor da função em $[0, 1]$ é $f(1) = \sqrt{4-1^2} = \sqrt{3} \approx 1,73$,

e no intervalo $[1, 2]$ é $f(2) = \sqrt{4 - 2^2} = \sqrt{4 - 4} = \sqrt{0} = 0$. Logo, temos $1 \cdot 1,73 + 1 \cdot 0 = 1,73$. Este valor representa uma aproximação, por falta, para a área da figura.

2 - (c). $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$. O comprimento de cada intervalo é 1. Como a função f é decrescente nesse intervalo, o maior valor da função em $[0, 1]$ é $f(0) = \sqrt{4 - 0^2} = \sqrt{4} = 2$, e no intervalo $[1, 2]$ é $f(1) = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \approx 1,73$. Obtemos, então, $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1,73 = 3,73$. Este valor representa uma aproximação, por excesso, para a área da figura.

2 - (d). $[0, 2] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{2}{2}] \cup [\frac{2}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{2}$. Realizando o mesmo processo do item anterior (lembre que a função é decrescente), temos:

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^3 \sqrt{4 - \left(\frac{i}{2}\right)^2} \approx 3,5.$$

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 \sqrt{4 - \left(\frac{i}{2}\right)^2} \approx 2,5.$$

Os valores obtidos desse item se aproximam mais da medida da área da figura. O valor obtido utilizando o menor valor em cada intervalo aumenta, enquanto o valor obtido utilizando o maior valor em cada intervalo diminui.

2 - (e). $[0, 2] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}] \cup [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, \frac{4}{4}] \cup [\frac{4}{4}, \frac{5}{4}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{6}{4}] \cup [\frac{6}{4}, \frac{7}{4}] \cup [\frac{7}{4}, 2]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{1}{4}$. Realizando o mesmo processo do item anterior, temos:

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^7 \sqrt{4 - \left(\frac{i}{4}\right)^2} \approx 3,34.$$

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^8 \sqrt{4 - \left(\frac{i}{4}\right)^2} \approx 2,84.$$

Os valores obtidos desse item se aproximam mais da medida da área da figura. O valor obtido utilizando o menor valor em cada intervalo aumenta, enquanto o valor obtido utilizando o maior valor em cada intervalo diminui.

$2 - (f). [0, 2] = \left[0, \frac{2}{n}\right] \cup \left[\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n} = 2\right]$. O comprimento de cada intervalo é $\frac{2}{n}$. Realizando o mesmo processo do item anterior, temos:

- **Para o maior valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{4 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2}.$$

- **Para o menor valor da função em cada intervalo:**

$$\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2}.$$

Perceba que nem sempre (na verdade, na maioria das vezes) é possível obter uma fórmula fechada para as somas anteriores (com a matemática vista a nível de Ensino Médio). Daí a dificuldade em calcular a área entre o eixo x e o gráfico de uma função, em um dado intervalo, da maior parte das funções.

$2 - (g)$. Para um n "grande" esses valores tendem a medida da área da figura, que igual a π .

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Relatando episódios da história da Matemática antiga, vimos que a Matemática grega destacou-se das demais, devido ao deslocamento da Matemática de uma ferramenta para resolver problemas do mundo para a Matemática como abstração. Com isso, Arquimedes conseguiu provar vários resultados usando o Método da Exaustão e o Método de Equilíbrio, sendo esses métodos os precursores do que hoje chamamos de cálculo integral.

O cálculo de integrais definidas está intimamente relacionado ao cálculo de medida de áreas. Neste sentido foram provados uma série de resultados sobre o tema, sem recorrer aos conceitos de limite e derivada, afim de que tais assuntos possam ser abordados por estudantes de ensino médio, com o objetivo de que eles desenvolvam certas intuições para facilitar a compreensão do Cálculo Integral no futuro. Com esta finalidade, a abordagem utilizada para buscar os resultados desejados foi introduzido o conceito de supremo de um conjunto, bem como as propriedades relacionadas. Os resultados aqui apresentados não são tão fortes quanto aqueles estudados no Cálculo integral, mas permite trabalhar com grande parte das funções reais trabalhadas até o Ensino Médio.

A conclusão deste estudo consiste na apresentação de uma série de atividades relacionadas ao cálculo de áreas, onde procurou-se que os estudantes desenvolvam a ideia intuitiva das integrais definidas através do acesso a um método para obter áreas de figuras com contorno não poligonais.

A primeira atividade foi organizada para que o estudante inicie trabalhando com gráficos de funções degrau, analisadas como funções definidas sobre intervalos fechado, de forma que eles possam ter a compreensão de uma função em várias sentenças, também buscou-se possibilitar uma visão concreta sobre as funções degrau. Intenciona-se, ainda, que nesta primeira atividade ocorra o aprendizado e posterior apropriação da terminologia.

A segunda atividade apresenta exercícios para estimar cálculo de áreas de figuras em que já se conhece a área, utilizando a Soma de Riemann. Desta forma, é possível comparar as aproximações obtidas com a área exata das figuras, o que ajuda a entender como as somas de Riemann funcionam e encorajar o estudante a aplicar o método estudado em áreas de figura para os quais ele não conhece nenhuma fórmula. Pretende-se, assim, que haja a percepção da necessidade de novas técnicas para a obtenção da medida da área e o entendimento da conexão entre as integrais e o cálculo de área, colaborando com o desenvolvimento da intuição do estudante sobre integração e os conceitos correlatos.

REFERÊNCIAS

- APOSTOL, T. M. **Calculus**. Barcelona: Reverté, 1984. 9, 16, 20, 33, 34
- BARDI, J. S. **A guerra do cálculo**. Rio de Janeiro: Record, 2008. 6
- BORGES, D. **Crescente fértil, o que é? Definição e história do berço da civilização**. 2020. Disponível em: <<https://conhecimentocientifico.r7.com/crescente-fertil/>>. Acesso em: 04 nov. 2024. 7
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. 6, 7, 8, 9
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. 10
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2013. 6, 7
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. 6, 7, 8, 9, 12, 13
- GEOGEBRA. **GeoGebra: aplicativos matemáticos**. 2025. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em: 25 abr. 2025. 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 41, 59, 60, 62, 63, 65
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 15
- INKSCAPE. **Inkscape: um editor de gráficos vetoriais de código aberto**. 2025. Disponível em: <<https://www.inkscape.org>>. Acesso em: 15 dez. 2025. 42
- LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 7