UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Danielle Marques Ramos

Equação do 2º Grau: resoluções algébricas alternativas

Juiz de Fora

2025

Danielle Marques Ramos

Equação do 2º Grau: resoluções algébricas alternativas

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica

Orientador: Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Júnior

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ramos, Danielle Marques.
Equação do 2º Grau: resoluções algébricas alternativas / Danielle Marques Ramos. – 2025.
86 f. : il.

Orientador: Nelson Dantas Louza Júnior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2025.

1. Equações do segundo grau. 2. Métodos alternativos. 3. Aprendizagem significativa. I. Júnior, Nelson Dantas Louza, orient. II. Título.

Danielle Marques Ramos

Equação do 2º Grau: resoluções algébricas alternativas

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em 31 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior – Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 25/06/2025.

Documento assinado eletronicamente por Nelson Dantas Louza Junior, Professor(a), em 02/08/2025, às 11:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por Willian Versolati Franca, Professor(a), em 04/08/2025, às 21:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por Eduardo de Amorim Neves, Usuário Externo, em 05/08/2025, às 09:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador 2468046 e o código CRC B659F499.

Dedico este trabalho a todos os professores que acompanharam minha trajetória acadêmica e, com seus ensinamentos e dedicação, contribuíram significativamente para minha formação pessoal e profissional.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por todos os dons concedidos a mim, que foram essenciais para a realização deste trabalho.

Ao meu amado marido Humberto, que sempre esteve ao meu lado, incentivando-me e ajudando na criação dos nossos filhos durante o período dos meus estudos.

Aos meus amados filhos Miguel e Júlia, razão da minha vida, pela compreensão diante da minha ausência nos finais de semana e feriados devido ao tempo dedicado ao PROFMAT, amo vocês até o infinito ida e volta.

À minha mãe, minha referência de mulher forte e guerreira, que sempre fez de tudo pela minha educação e, principalmente, por suas orações durante todo o curso.

Ao meu querido pai, que sempre foi extraordinário em matemática, com raciocínio e memória invejáveis. Ele sempre foi minha inspiração e de onde herdei o gosto e o prazer por aprender matemática. Aos meus irmãos Fabiano, Kátia e Ramon, pelo apoio e incentivo constantes.

Ao coordenador do curso, professor José Barbosa, por todo o incentivo e suporte oferecidos durante o curso, por não medir esforços para que seus alunos pudessem alcançar o sucesso. Ao meu orientador, professor Nelson Dantas Louza Júnior, pela paciência e por todas as orientações tão valiosas para este trabalho.

A todos os meus colegas de curso, Cláudia, Luciana, Sharley, Sonyele pelos momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos, e por todas as alegrias compartilhadas. Em especial, à minha amiga Luciana. Quantos finais de semana, feriados e noites passamos estudando juntas, não é mesmo? Quantas dúvidas, inseguranças, medos e aprendizados. Você é uma pessoa fantástica e uma profissional admirável. Sua parceria foi fundamental nessa conquista! A todos os meus professores de matemática ao longo da vida, sempre falo que durante minha trajetória acadêmica tive excelentes professores de matemática, e por isso me apaixonei por essa disciplina. Agradeço a UFJF e a todos os professores do PROFMAT, que me ajudaram a crescer profissionalmente durante todo o curso. Aos meus colegas de trabalho, pelas palavras de incentivo e apoio nos momentos difíceis ao longo do curso.

Aos meus queridos alunos, pelo carinho e apoio nos dias em que estava ansiosa ou preocupada com alguma avaliação. Vocês são um dos principais motivos desta conquista. E a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho, meu sincero agradecimento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), pela bolsa de estudo recebida.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

Paulo Freire

RESUMO

A resolução de equações do segundo grau é um tema central no currículo de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, frequentemente abordado por meio da aplicação direta da fórmula quadrática. No entanto, essa abordagem tradicional pode limitar a compreensão conceitual dos alunos, levando-os a uma mera memorização de procedimentos, sem uma conexão significativa com os princípios matemáticos subjacentes. Esta dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), investiga alternativas metodológicas para a resolução de equações do segundo grau, explorando suas contribuições para o ensino e a aprendizagem. Inicialmente, realiza-se uma análise da legislação educacional vigente, incluindo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de situar a relevância do tema no contexto escolar brasileiro. Em seguida, são explorados aspectos históricos da Matemática, destacando a evolução das equações quadráticas e sua construção ao longo dos séculos. Além dos métodos tradicionais, são apresentados procedimentos alternativos que ampliam as possibilidades didáticas. A dissertação inclui um relato de experiência sobre a aplicação em sala de aula de três métodos específicos: o método geométrico de Al-Khwarizmi, o método das Aspas Simples e a abordagem desenvolvida por Po-Shen Loh. A análise dos resultados evidencia que a diversificação metodológica não apenas favorece uma compreensão mais profunda dos conteúdos matemáticos, mas também desperta maior interesse dos estudantes e amplia o repertório didático dos professores. Dessa forma, argumenta-se que uma abordagem plural e investigativa pode contribuir para um ensino mais significativo e acessível a diferentes perfis de aprendizagem.

Palavras-chaves: equações do segundo grau; métodos alternativos; ensino de Matemática; aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The resolution of second-degree equations is a central theme in the Mathematics curriculum of elementary and high school, frequently addressed through the direct application of the quadratic formula. However, this traditional approach can limit students' conceptual understanding, leading them to mere memorization of procedures, without a significant connection to the underlying mathematical principles. This dissertation, developed within the framework of the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network (PROFMAT), investigates methodological alternatives for solving second-degree equations, exploring their contributions to teaching and learning. Initially, an analysis of the current educational legislation is conducted, including the Law of Guidelines and Bases of National Education (LDB) and the National Common Curricular Base (BNCC), in order to situate the relevance of the topic in the context of Brazilian schools. Next, historical aspects of Mathematics are explored, highlighting the evolution of quadratic equations and their development over the centuries. In addition to traditional methods, alternative procedures that expand didactic possibilities are presented. The dissertation includes a report of experience regarding the application in the classroom of three specific methods: Al-Khwarizmi's geometric method, the Single Quotation Method, and the approach developed by Po-Shen Loh. The analysis of the results shows that methodological diversification not only favors a deeper understanding of mathematical content but also sparks greater interest among students and expands the didactic repertoire of teachers. Thus, it is argued that a plural and investigative approach can contribute to a more meaningful and accessible education for different learning profiles.

Keywords: quadratic equations; alternative methods; mathematics teaching; meaningful learning

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
EVA	Etil Vinil Acetato

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
Δ	Discriminante de uma equação do segundo grau
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\sqrt{\ }$	Raiz quadrada
r_1, r_2	Raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$
x_1, x_2	Raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações do segundo grau ocupa um papel fundamental no ensino de Matemática, sendo abordada ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Sua recorrência no currículo escolar decorre não apenas da sua importância conceitual, mas também do seu potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da capacidade de resolução de problemas. No entanto, apesar dessa relevância, observa-se que sua abordagem em sala de aula ainda é predominantemente pautada na aplicação mecânica da fórmula de Bhaskara, frequentemente apresentada como o único método de resolução.

Esse enfoque tradicional, embora eficiente para encontrar soluções numéricas, pode comprometer a compreensão conceitual dos estudantes, limitando sua capacidade de interpretar e generalizar os princípios matemáticos subjacentes ao processo. A memorização da fórmula sem um entendimento aprofundado muitas vezes resulta em dificuldades na aplicação do conhecimento em contextos variados, o que leva a erros frequentes e à falta de confiança dos alunos diante de problemas matemáticos. Além disso, a aprendizagem baseada exclusivamente na repetição de algoritmos contribui para a visão fragmentada da disciplina, tornando-a menos acessível e interessante para muitos estudantes.

Diante desse contexto, esta dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), propõe-se a investigar abordagens metodológicas alternativas para a resolução de equações do segundo grau, buscando ampliar as possibilidades didáticas e aprimorar a experiência de ensino e aprendizagem. No segundo capítulo o estudo parte de uma análise dos fundamentos normativos da educação matemática no Brasil, incluindo documentos como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A LDB estabelece princípios e diretrizes para a organização do ensino, enquanto a BNCC define competências e habilidades essenciais, reforçando a necessidade de práticas pedagógicas que promovam a compreensão conceitual e o desenvolvimento do pensamento crítico.

No capítulo 3, a pesquisa percorre aspectos históricos da Matemática, examinando a evolução das equações quadráticas e os diversos métodos de resolução desenvolvidos ao longo dos séculos, desde as contribuições de matemáticos da antiguidade até abordagens modernas. A contextualização histórica possibilita não apenas uma visão mais ampla do desenvolvimento desse conhecimento, mas também reforça o papel da Matemática como um campo dinâmico e em constante transformação. Compreender como diferentes culturas exploraram e aprimoraram os métodos de resolução de equações quadráticas contribui para uma perspectiva mais rica e contextualizada do ensino da disciplina.

No capítulo 4, além da revisão teórica, são apresentados os métodos tradicionais de resolução de equações do segundo grau, amplamente utilizados no ensino atual e comumente abordados nos livros didáticos. Dentre esses métodos, destacam-se a aplicação direta da fórmula quadrática (conhecida como fórmula de Bhaskara), a relação entre os coeficientes e as raízes da equação, bem como o uso da soma e do produto das raízes como estratégia de resolução.

No capítulo 5, são explorados métodos alternativos, que oferecem diferentes abordagens para a resolução das equações quadráticas, contribuindo para o enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem. Esses métodos, muitos dos quais pouco divulgados em materiais didáticos tradicionais, incluem o método de Viéte e o de Euler, ambos consistem em formas distintas de demonstrar a fórmula quadrática, ampliando as possibilidades de compreensão por parte dos alunos e oferecendo alternativas ao modelo algébrico convencional. Também são discutidos o método geométrico de Al-Khwarizmi, que permite uma visualização espacial da resolução por meio da compreensão da área de figuras, o método das Aspas Simples, baseado na fatoração de polinômios, e o método de Poh-Shen Loh, que se destaca por sua simplicidade e abordagem inovadora, ao explorar a simetria das raízes de forma a promover uma compreensão mais profunda e conceitual do problema.

No capítulo 6, para aprofundar a análise, o estudo inclui um relato de experiência sobre a aplicação de três desses métodos em sala de aula: o método geométrico de Al-Khwarizmi, o método das Aspas Simples e a abordagem desenvolvida por Po-Shen Loh. A experimentação em contexto real permitiu observar de forma mais precisa o impacto da diversificação metodológica na aprendizagem dos estudantes, identificando possíveis desafios e benefícios relacionados à implementação de estratégias diferenciadas.

Os resultados indicam que a adoção de múltiplas abordagens pode favorecer a compreensão dos estudantes, estimulando um aprendizado mais ativo e reflexivo. Ao explorar diferentes formas de resolver um mesmo problema, amplia-se o repertório matemático dos alunos, promovendo maior autonomia intelectual e incentivando o desenvolvimento do pensamento crítico. Além disso, o contato com métodos menos convencionais demonstrou potencial para aumentar o interesse dos estudantes pelo conteúdo, tornando a Matemática mais acessível e instigante.

No apêndice, foi incluído um caderno de atividades com o objetivo de oferecer suporte aos professores na aplicação prática dos métodos alternativos de resolução de equações do segundo grau, apresentados ao longo desta dissertação. Esse material busca facilitar a transposição didática dos conteúdos, promovendo abordagens mais diversificadas e significativas para o ensino da Matemática.

Assim, a presente dissertação busca não apenas investigar e sistematizar contribuições de métodos alternativos de resolução de equações do segundo grau, mas também oferecer subsídios para que professores possam diversificar suas práticas pedagógicas e promover um ensino mais significativo. A abordagem proposta dialoga com os princípios da Educação Matemática Crítica, reforçando a importância de um ensino que estimule a construção ativa do conhecimento e a capacidade de argumentação e generalização por parte dos estudantes. Em consonância com as diretrizes da BNCC e com uma perspectiva de ensino voltada para a autonomia e o protagonismo dos estudantes, este estudo evidencia a necessidade de transformar o ensino da Matemática, tornando-o mais dinâmico, contextualizado e alinhado às demandas contemporâneas da educação.

2 A ESTRUTURA E AS DIRETRIZES DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA: LDB E BNCC

Nas últimas décadas, a educação brasileira passou por importantes mudanças voltadas à qualidade e à equidade do ensino. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de 2017, são marcos fundamentais nesse processo. Enquanto a LDB define as diretrizes da educação em todas as etapas, promovendo inclusão e formação integral, a BNCC estabelece competências e conteúdos essenciais ao longo da trajetória escolar. Este capítulo analisa a relação entre esses dois documentos, ressaltando a importância de uma educação que valorize a diversidade e forme cidadãos críticos diante dos desafios atuais.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), oficializada pela Lei nº 9.394/1996, é um marco para a organização da educação no Brasil. Ela estabelece as bases legais e normativas que regulam o sistema educacional, promovendo princípios de igualdade e qualidade (Brasil.Lei nº 9.394, 20 de dezembro de 1996).

Dessa maneira, vale ressaltar alguns aspectos importantes da LDB (Brasil,1996):

Tabela 1 – Aspectos importantes da LDB

Educação Infantil, Básica e Superior: define as etapas do ensino, garantindo o acesso à educação desde a primeira infância até o nível superior, com foco na formação integral do cidadão.
Autonomia para Estados e Municípios: permite que os sistemas de ensino estaduais e municipais desenvolvam suas próprias diretrizes, respeitando as especificidades locais, mas alinhadas às diretrizes nacionais.
Formação de Professores: ressalta a obrigatoriedade de formação adequada e continuada para os docentes, destacando o papel essencial dos profissionais da educação na qualidade do ensino.
Gestão Democrática: incentiva a participação da comunidade escolar na gestão, promovendo a democratização das decisões educacionais.
Inclusão: estabelece a importância de políticas de inclusão e atendimento às necessidades especiais, assegurando o direito de todos à educação.

Fonte: Elaborado a partir da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (LDB)

Nesse sentido, a LDB não é apenas uma regulamentação, mas também um instrumento que visa transformar a educação em um direito efetivamente acessível e de qualidade para todos os brasileiros (Brasil,1996). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por sua vez, é uma extensão dessa lei, com foco na elaboração dos currículos e na uniformização dos conteúdos que devem ser trabalhados nas escolas.

Ademais, enquanto a LDB funciona como uma norma que estabelece a estrutura e o funcionamento da educação no país, a BNCC serve como um guia curricular, determinando os conhecimentos que devem ser ensinados e as habilidades que os estudantes precisam desenvolver ao longo de sua formação. Em síntese, a LDB define os fundamentos da educação enquanto a BNCC específica os conteúdos e orienta a prática pedagógica.

Sendo assim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em linhas gerais, é um documento essencial para a educação brasileira, que define diretrizes claras desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Publicada em 22 de dezembro de 2017, sua principal missão é padronizar e organizar os currículos escolares em todo o Brasil, assegurando que todos os estudantes tenham acesso a uma educação de qualidade, alinhada à diversidade cultural e social do país. Seu propósito é proporcionar uma formação integral aos estudantes, promovendo o desenvolvimento de competências e habilidades fundamentais para a convivência em sociedade. Isso inclui a construção de conhecimentos que vão além do aprendizado acadêmico, abrangendo dimensões sociais, emocionais e culturais.

Buscando criar um padrão de ensino que garanta igualdade de oportunidades de aprendizado para todos os estudantes, independentemente de sua origem, promovendo equidade na educação. Ao mesmo tempo, valoriza as experiências regionais e locais, refletindo a riqueza e a pluralidade cultural brasileira, respeitando as particularidades de cada comunidade. Assim, além de orientar a prática pedagógica, a BNCC contribui para a construção de um ambiente educacional mais inclusivo, diverso e acolhedor. A aplicação da BNCC (Brasil, 2017) é guiada por três pilares fundamentais, que definem sua relevância no cenário educacional:

Tabela 2 – Três Pilares Fundamentais

Educação integral: a visão ampla da educação, considerando o desenvolvimento integral do ser humano. Isso abrange aspectos cognitivos, sociais, emocionais e físicos, com o objetivo de preparar os alunos não apenas no campo acadêmico, mas também para enfrentar os desafios da vida em sociedade.
Diversidade e inclusão: a valorização da diversidade cultural e social do Brasil. Reconhecendo a riqueza de culturas, tradições e modos de vida no país, a BNCC promove uma educação que respeita e celebra essas diferenças, criando um ambiente de aprendizado inclusivo e igualitário.
Currículo integrado e flexível: a abordagem que conecta diferentes áreas do conhecimento, incentivando os alunos a relacionarem os conteúdos aprendidos com a realidade ao seu redor. Além disso, o currículo é projetado para ser flexível, permitindo adaptações às necessidades específicas de cada grupo de estudantes, garantindo relevância e contextualização no ensino.

Fonte: Elaborado a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino da Matemática, especialmente no que se refere às equações do 2º grau, é trabalhado de forma estruturada e progressiva. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o tema é introduzido dentro do eixo de Álgebra, geralmente no 8º ano. No Ensino Médio, a abordagem é ampliada e inserida na área de Matemática, onde o conteúdo é tratado de maneira contextualizada.

O foco principal está no desenvolvimento de competências que vão além do simples uso de fórmulas, incentivando a interpretação, análise e resolução de problemas práticos do cotidiano.

Essas habilidades relacionadas são voltadas para a compreensão de conceitos algébricos e a resolução de problemas, envolvendo relações matemáticas, podendo destacar alguns pontos importantes como:

- Reconhecimento da equação do 2º grau: Identificar o formato geral da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e interpretar seus coeficientes a, b e c.
- Resolução de equações através de métodos de resolução como fatoração, uso da fórmula de Bhaskara ou completando o quadrado, com ênfase na interpretação do discriminante Δ para determinar o número de soluções.
- Apresentação de problemas contextualizados que possam ser modelados por equações do 2º grau, como trajetórias de objetos (movimento parabólico) ou situações financeiras.

De acordo com a BNCC (2017), o objetivo é familiarizar os estudantes com representações algébricas mais complexas e métodos de resolução variados, como a aplicação da fórmula de Bhaskara, a fatoração e o completamento de quadrados.

Além disso, os alunos desenvolvem habilidades para correlacionar as soluções das equações ao comportamento gráfico de funções quadráticas, identificando casos em que as soluções são reais e distintas, reais e iguais, ou inexistentes no conjunto dos números reais. Nesse processo, os problemas propostos envolvem situações práticas, como o cálculo de áreas, movimentos parabólicos e questões financeiras, promovendo uma conexão direta com a vida cotidiana dos estudantes.

Para ilustrar, considere o exemplo de um problema de otimização em que a função $(L(x) = -2x^2 + 40x - 100)$ descreve o lucro de uma empresa. O número de unidades que maximiza o lucro e o valor do lucro máximo pode ser determinado utilizando o vértice da parábola associado à função. Este tipo de atividade demonstra como as funções quadráticas são aplicadas na modelagem matemática para resolver problemas do mundo real (BNCC, 2017). No contexto do Ensino Médio, o estudo das equações do segundo grau é expandido e aprofundado em diversas áreas, como Números e Álgebra, Geometria e Trigonometria, conforme orientado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Este aprofundamento enfatiza tanto os métodos de resolução quanto a análise gráfica detalhada das funções quadráticas, com foco na compreensão do comportamento da função $(y = ax^2 + bx + c)$. Entre os aspectos analisados, destacam-se os vértices, o eixo de simetria, a concavidade e a relação entre as raízes da equação e seus coeficientes (BNCC, 2017). Essa abordagem tem como objetivo integrar conceitos geométricos e algébricos de maneira contextualizada, fortalecendo o raciocínio crítico e a aplicação prática do conhecimento matemático.

Ainda conforme a BNCC (2017), a interdisciplinaridade é uma diretriz fundamental. Por meio dela, os estudantes são incentivados a aplicar conceitos das equações quadráticas em outras disciplinas, como Física, para descrever trajetórias parabólicas; Geografia, para modelar fenômenos naturais; ou Biologia, para representar variações em populações.

O uso de tecnologias digitais, gamificação e representações múltiplas (algébricas, gráficas e numéricas) reforça a aprendizagem significativa, permitindo que os estudantes desenvolvam competências gerais, como o raciocínio lógico, a autonomia intelectual e a capacidade de tomada de decisão com base em modelos matemáticos.

As atualizações contínuas da BNCC reforçam a importância da formação continuada de professores e a adequação das estruturas escolares às novas demandas curriculares. Essas medidas buscam assegurar que todos os alunos tenham acesso a uma educação que os prepare para enfrentar os desafios do século XXI, valorizando suas experiências e promovendo o desenvolvimento pleno de suas competências.

3 INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

A História da Matemática contribui para uma compreensão mais contextualizada do conhecimento matemático, revelando-o como uma construção humana ligada a diferentes contextos sociais e culturais. Este capítulo analisa a trajetória histórica da matemática e defende sua integração no ensino, com o objetivo de enriquecer a prática pedagógica, despertar o interesse dos alunos e formar cidadãos críticos e conscientes de sua herança cultural.

A compreensão histórica do conhecimento matemático é essencial para ampliar a visão dos estudantes e professores sobre a matemática enquanto construção humana. Conforme definido por Michaelis (2020), História é o "conjunto de fatos ou acontecimentos relevantes, ocorridos no passado da humanidade, destacando-se época, local e dados importantes". A trajetória da Matemática, nesse sentido, insere-se como parte da história cultural da humanidade, refletindo modos de pensar e resolver problemas em diferentes tempos e espaços.

Ao considerar a História da Matemática como um campo de estudo e de ensino, é possível promover reflexões mais profundas acerca da construção do conhecimento matemático. Essa abordagem não apenas permite observar o percurso das ideias e teorias matemáticas, mas também valoriza os contextos sociais, culturais e intelectuais nos quais tais ideias emergiram. Como destaca D'Ambrósio (1996, p. 29), "a história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época." Segundo o autor, isso contribui para que os estudantes compreendam a herança cultural, no intuito de despertar o interesse pela compreensão de aspectos históricos relacionados ao conteúdo matemático.

Entretanto, ainda que se reconheça a importância da História da Matemática, sua presença na formação inicial e continuada de professores no Brasil é relativamente restrita. De acordo com Saito (2013), há poucos especialistas dedicados exclusivamente à pesquisa em História da Matemática no país, sendo que a maioria das produções na área está concentrada no campo da Educação Matemática. Essa relação entre História da Matemática e Educação Matemática tem se mostrado frutífera, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento de propostas pedagógicas que incorporam elementos históricos ao ensino da matemática escolar.

Nas últimas décadas, pesquisadores brasileiros têm aprofundado investigações no campo da História da Matemática no Ensino, explorando tanto o uso da história como recurso didático quanto a análise de aspectos mais amplos do contexto educacional, como métodos de ensino, conteúdos curriculares, trajetórias de educadores e instituições formadoras. Nesse cenário, destaca-se a contribuição de Sad e Lorenzoni (2018), ao evidenciar que a pesquisa em História da Matemática no Ensino vem se consolidando como um campo interdisciplinar, articulando saberes da história, da pedagogia e da matemática. Tal abordagem reforça a importância de integrar o estudo histórico ao ensino, contribuindo para uma prática docente mais crítica, contextualizada e significativa.

Dessa forma, incluir a História da Matemática no contexto escolar não significa apenas revisitar o passado, mas lançar um novo olhar sobre o presente da educação matemática, valorizando a diversidade de caminhos que levaram à construção dos conceitos ensinados hoje. Para o professor de matemática, especialmente no âmbito da educação básica, essa perspectiva pode se tornar um poderoso instrumento de mediação didática, favorecendo o diálogo entre conteúdos, contextos e sujeitos da aprendizagem.

Portanto, segundo as autoras, essas pesquisas buscam promover uma integração entre a história da matemática e o ensino, contribuindo para enriquecer a prática pedagógica e ampliar a compreensão cultural e histórica dos conceitos matemáticos. Essa perspectiva permite repensar os processos de ensino, fortalecendo a formação de educadores e estudantes ao conectar o passado da matemática com as demandas educacionais contemporâneas (Sad; Lorenzoni, 2018).

Nesse sentido, de acordo com Boyer (1996), é relevante destacar que a Matemática primitiva teve suas origens em algumas regiões do Oriente Antigo, desenvolvendo-se principalmente como uma ciência prática voltada para o auxílio em atividades como agricultura e engenharia. Tais atividades exigiam o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas, a ser utilizado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos; além da criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios, bem como para a divisão de terras.

Adicionalmente, foram instituídas práticas financeiras e comerciais com o intuito de promover a arrecadação de taxas e atender a propósitos mercantis. Prata Filho et al. (2022, p. 4) relatam que

> Ao observar a evolução do homem e da sociedade, percebemos a presença de uma matemática prática, mas limitada, devido às condições sociais e econômicas daquela época. E, no decorrer do tempo, por volta de 3.000 a.C, com a transição da sociedade nômade (caçadores) para uma sociedade sedentária (agricultores) emergiram comunidades agrícolas às margens do rio Nilo, na África, dos rios Tigre e Eufrates, no Oriente Médio, e do Rio Amarelo, na China. A partir dessas civilizações, a ciência e a matemática começaram a se desenvolver. Inclusive, vários livros que abordam a história da Matemática relatam apenas a matemática construída por essas civilizações, no entanto, outras civilizações africanas e algumas civilizações do ocidente também desenvolveram noções matemáticas.

Nesse contexto, delinearam-se tendências voltadas à abstração, as quais, em determinado momento, favoreceram o estudo autônomo das ciências. A álgebra foi concebida como uma extensão da aritmética, enquanto a geometria teórica emergiu a partir das práticas empíricas de mensuração. Cabe ressaltar que os exemplos do que atualmente denominamos matemática primitiva não exigiam, necessariamente, fundamentos práticos para seu desenvolvimento. Tal base instrumental passou a ser exigida à medida que as sociedades evoluíram para formas mais estruturadas e complexas.

Ao invés de apresentar um argumento, encontra-se meramente a descrição de um processo, instruindo: "Faça assim e assim". Ademais, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram fornecidas na forma de regras gerais, mas aplicadas a sequências de casos específicos. Por exemplo, ao explicar a resolução de uma equação quadrática, não se encontra nem a dedução do processo utilizado, nem uma descrição geral do processo; ao invés disso, são oferecidas várias equações específicas e instruções detalhadas de como proceder, passo a passo, para resolver cada um dos exemplos (Eves, 2011).

Embora o método "faça assim e assim"; possa parecer insatisfatório, ele não deve surpreender, pois é amplamente empregado no ensino da matemática elementar nos níveis fundamental e médio. As descobertas matemáticas realizadas no Oriente Antigo são de difícil datação, em virtude da estrutura social estática e do isolamento de determinadas regiões. Além disso, de acordo com Eves (2011), os materiais de escrita utilizados variam significativamente. Os babilônios empregavam tábulas de argila, enquanto os egípcios utilizavam pedra e papiros. Por outro lado, chineses e indianos faziam uso de materiais perecíveis, como casca de árvore e bambu. Consequentemente, há mais informações disponíveis sobre a matemática dos babilônios e egípcios do que sobre a dos chineses e indianos do mesmo período.

Ainda conforme o autor, em algumas passagens históricas referentes ao conteúdo matemático dos níveis fundamental e médio, é usada uma fórmula para resolver equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. No livro Bijaganita, Bhaskara apresenta diferentes métodos para resolver equações do segundo grau, incluindo uma fórmula algébrica que corresponde àquela que hoje conhecemos como fórmula de Bhaskara. No entanto, é importante destacar que o próprio Bhaskara não reivindica a autoria dessa fórmula; ele a atribui a Sridhara, um matemático indiano que viveu alguns séculos antes, afirmando que "a fórmula para resolver equações do segundo grau foi desenvolvida por Sridhara" (Eves, 2011). Esse reconhecimento revela não apenas a profundidade do conhecimento matemático já existente na Índia antiga, mas também a postura ética de Bhaskara ao valorizar os trabalhos de seus antecessores.

Curiosamente, "o hábito de dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula na literatura internacional)" (RPM 39), quando livros didáticos começaram a popularizar a expressão "fórmula de Bhaskara". O nome se disseminou rapidamente entre professores e estudantes, até se consolidar como um dos elementos mais conhecidos do ensino de matemática no país. No entanto, essa denominação não encontra respaldo histórico. Esse episódio mostra como certas denominações, ainda que equivocadas, podem se enraizar na cultura educacional, muitas vezes afastando o conhecimento escolar das suas verdadeiras origens e obscurecendo o reconhecimento de outros importantes nomes da história da matemática, como o de Sridhara.

No que tange às equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, o trabalho de Bhaskara não foi além do que já havia sido descoberto por seus antecessores. Os primeiros registros históricos de problemas envolvendo equações do segundo grau encontram- se em documentos antigos de civilizações como Egito, Babilônia, China e Grécia, datando entre os séculos XX e II a.C.

No Egito, destacam-se cinco papiros matemáticos escritos no século XVII a.C. O Papiro de Rhind é o mais famoso, embora não mencione equações do segundo grau. Por outro lado, o Papiro de Moscou contém apenas exercícios do tipo $ax^2 = b$. Os babilônios deixaram diversos exemplos em seus tabletes de escrita cuneiforme, demonstrando seu domínio no uso de equações, incluindo sistemas com duas ou mais incógnitas. Mesmo sem utilizar fórmulas, possuíam um método próprio para resolver equações do segundo grau.

No tablete babilônico registrado como BM 13901, atualmente no museu de Londres, tem cerca de 24 problemas matemáticos com suas soluções, incluindo alguns relacionados a equações quadráticas. Um dos textos matemáticos mais antigos da China é o "Chiu Chang Suan Shu"; ou "Os Nove Capítulos da Arte Matemática". Sua origem é desconhecida, sem informações sobre o autor ou a época exata de sua criação, embora se suponha que seja anterior ao século II a.C.(Eves, 2011)

Sabe-se que o texto passou por várias edições e foi revisado em 263 pelo renomado matemático e astrônomo chinês Liu Hui (século III). Em 1804, o texto foi impresso. Na Grécia Antiga, de acordo com as pesquisas de Eves (2011), há uma vasta quantidade de exemplos de problemas matemáticos focados em equações do segundo grau. Desde os estudos de matemáticos pioneiros, como Tales de Mileto (625-547 a.C.) e Pitágoras (570-497 a.C.), passando pela obra magistral de Euclides (365-300 a.C.), "Os Elementos", até Diofanto (250 d.C.), os gregos desenvolveram importantes estudos sobre a resolução de equações quadráticas. Pitágoras e seus seguidores, ao descobrirem os números incomensuráveis, enfrentaram dificuldades em lidar numericamente com equações do tipo $x^2 = 2$. No entanto, os gregos não encontraram obstáculos ao construir formas geométricas que resolviam essa equação com precisão.

Para isso, simplesmente desenhavam um quadrado com área igual a 2. Nas obras “Os Elementos”; e “Data”, de Euclides, há demonstrações de que todas as equações quadráticas com resultados positivos podem ser resolvidas por meio de construções geométricas.

> Em sua álgebra geométrica os gregos se utilizavam de dois métodos principais para resolver certas equações simples - métodos das proporções e o método da aplicação de áreas. Há indícios que ambos os métodos se originaram com os pitagóricos (Eves, 2011, p.110).

Durante o período da Renascença Europeia, a matemática passou por transformações significativas, sobretudo no campo da álgebra. Foi nesse contexto que se consolidou a resolução de equações do segundo grau em moldes mais próximos dos utilizados no ensino atual. Um dos protagonistas desse avanço foi o matemático francês François Viète (1540–1603), que introduziu uma notação inovadora ao empregar vogais para representar incógnitas e consoantes para quantidades conhecidas, contribuindo decisivamente para a sistematização da álgebra simbólica (Boyer e Merzbach, 2012).

Conforme observado por Boyer (1996), essa convenção foi ligeiramente modificada para utilizar vogais nas quantidades desconhecidas e consoantes nas grandezas conhecidas.

> Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das ideias modernas. A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como Diofante possuíra; no entanto, a álgebra durante o tempo dos árabes, no começo do período moderno, não tinha ido longe no processo de libertação do uso de casos particulares. (Boyer, 1996, p. 208).

Este método foi adotado nas equações do segundo grau, resultando na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, em que as primeiras letras do alfabeto (a, b e c) representam grandezas conhecidas e as últimas letras (como x , y e z) representam quantidades desconhecidas ou indeterminadas.

De acordo com Roque (2012), o estudo das equações do segundo grau no contexto histórico tem como objetivo oferecer ao professor de matemática ferramentas que incentivem os estudantes a formular questionamentos relevantes sobre o tema, despertando seu interesse e, consequentemente, aprimorando o aprendizado.

> Fala- se muito, hoje em dia, em inserir o ensino de matemática em algum contexto. Justamente porque muitos alunos consideram a matemática muito difícil e abstrata. Contudo, a matemática é vista, ao mesmo tempo, como saber abstrato por excelência e, justamente por isso, ao mesmo tempo, ajudaria a desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico. Sendo assim, como seria possível torná- la mais concreta? (Roque, 2012, p.7).

A autora sugere que, ao abordar equações do segundo grau ou qualquer outro tópico, o professor de matemática inicie com uma introdução histórica. Quando essa introdução é bem estruturada e rica em detalhes, tem o potencial de captar o interesse dos alunos pelo tema, facilitando o desenvolvimento do conteúdo e tornando o processo de aprendizado mais atraente e produtivo.

Concluindo, a abordagem histórica das equações do segundo grau transcende a mera exposição de fórmulas, revelando a evolução do pensamento matemático e sua relevância para a compreensão do mundo. Ao situar os estudantes nesse contexto, o professor não só facilita a assimilação dos conceitos, mas também estimula a curiosidade, o pensamento crítico e a conexão entre conhecimentos clássicos e contemporâneos. Dessa forma, a aula deixa de ser um conjunto de regras isoladas para se transformar em um espaço dinâmico de descobertas, aproximando os alunos da trajetória humana por trás da matemática, demonstrando que a teoria e a prática caminham lado a lado para oferecer uma educação mais completa e instigante.

4 MÉTODOS MAIS UTILIZADOS NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

A equação do segundo grau desempenhou um papel importante no desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos. Sua resolução originou-se nas civilizações antigas, passando por aprimoramentos significativos com o avanço da Álgebra. Neste capítulo, exploramos a evolução histórica dos principais métodos de resolução e sua formalização moderna. Serão abordados três métodos fundamentais: a fórmula quadrática, amplamente conhecida e utilizada; a relação entre os coeficientes e as raízes da equação, que oferece uma perspectiva estrutural sobre as soluções; e o método de completamento de quadrados, base conceitual para o desenvolvimento da fórmula geral. Esses métodos não apenas ilustram diferentes abordagens para a resolução de equações quadráticas, mas também refletem o progresso histórico e matemático alcançado ao longo do tempo.

O estudo de equações quadráticas remota aos babilônios (cerca de 2000 a.C.), que resolviam problemas equivalentes à equação do segundo grau por meio de técnicas geométricas e procedimentos numéricos. Utilizavam tábuas de argila com valores pré-calculados para encontrar soluções de equações da forma $ax^2 + bx = c$. Não possuíam uma fórmula geral, mas desenvolviam métodos baseados em tentativa e erro, somados a conhecimentos geométricos rudimentares (Boyer, 1996; Katz, 2009).

No período helenístico, matemáticos gregos como Euclides e Diofanto avançaram no estudo dessas equações, mas ainda sob uma perspectiva geométrica. A solução por completação de quadrados, um dos principais métodos ainda hoje utilizados, surgiu nessa época e foi aperfeiçoado pelos matemáticos árabes durante a Idade Média. Al-Khwarizmi (século IX), em sua obra “Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala”, sistematizou a resolução de equações quadráticas, dividindo-as em casos distintos e resolvendo-as por meio da completação de quadrados, uma técnica que leva diretamente à fórmula quadrática utilizada hoje (Katz, 2009).

O método de completamento de quadrados é um dos mais antigos e fundamentais para a resolução de equações quadráticas. Ele consiste em manipular uma equação algébrica de forma a expressar um trinômio quadrático perfeito, permitindo que a equação seja resolvida extraindo-se a raiz quadrada de ambos os lados. Esse método não apenas fornece uma maneira sistemática de resolver equações quadráticas, mas também estabelece a base para o desenvolvimento da fórmula geral da equação do segundo grau (Boyer, 1996).

Ao longo da história, esse método foi amplamente utilizado por matemáticos islâmicos e renascentistas, que o aplicavam na resolução de problemas geométricos e financeiros. Em particular, os matemáticos medievais empregaram a técnica em contextos como medições de terras e construções arquitetônicas, nos quais era crucial determinar dimensões exatas (Katz, 2009). Essa sistematização foi essencial para a consolidação da Álgebra como área formal da Matemática (Boyer, 1996).

Na atualidade, o completamento de quadrados continua sendo um conceito essencial no ensino de Matemática, servindo não apenas para resolver equações quadráticas, mas também para a análise de funções quadráticas. Ele é amplamente utilizado em cálculo diferencial e integral, especialmente na determinação de pontos de máximo e mínimo de funções quadráticas, bem como na resolução de integrais complexas que envolvem expressões quadráticas. A aplicação desse método transcende a simples resolução de equações, desempenhando um papel fundamental em diversas áreas da Matemática e da Física.

Com a Renascença da Álgebra no Ocidente, matemáticos como Cardano e Viète contribuíram significativamente para a formalização da resolução das equações quadráticas. Viète, em particular, introduziu uma notação simbólica inovadora que possibilitou a expressão de relações gerais entre coeficientes e raízes, consolidando uma abordagem mais sistemática e abstrata para o estudo dessas equações. Como destaca Boyer (1996), a álgebra vietiniana representou um marco na transição entre a álgebra retórica e a álgebra simbólica moderna.

As equações do segundo grau desempenhou um papel importante na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, são amplamente utilizadas em física, engenharia, economia e muitas outras disciplinas. Historicamente, os matemáticos buscaram formas sistemáticas de resolvé-las, resultando em diversos métodos ao longo do tempo. Neste capítulo, abordaremos os principais métodos de resolução dessas equações, analisando suas origens, enunciados, demonstrações formais e exemplos práticos comentados.

4.1 MÉTODO DA FÓRMULA QUADRÁTICA

A fórmula de quadrática é um dos procedimentos mais conhecidos e difundidos para resolver equações do segundo grau. Contudo, já na Antiguidade, matemáticos babilônicos, gregos e chineses utilizavam métodos semelhantes baseados na técnica da completação do quadrado. A fórmula geral da equação do segundo grau, conhecida como fórmula de Bhaskara no Brasil, provém diretamente da técnica de completação de quadrados aplicada à equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. Onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são coeficientes reais e x é a variável desconhecida. O coeficiente a determina a concavidade da parábola associada à função quadrática correspondente.

Essa fórmula pode ser derivada da seguinte maneira: Uma equação do segundo grau é qualquer equação que pode ser escrita na forma geral:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Dividindo todos os termos por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Simplificando os termos para completar o quadrado:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os lados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Escrevendo o lado esquerdo como um quadrado perfeito:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Tomamos a raiz quadrada de ambos os lados e isolamos x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Simplificando, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dentro dessa fórmula, há um elemento de grande importância: a expressão que aparece sob o radical, $b^2 - 4ac$. Esse termo recebe o nome de delta, representado pela letra grega Δ, e é conhecido como o discriminante da equação.

Esse nome não é por acaso. O discriminante é justamente o responsável por indicar que tipo de soluções a equação terá. Ele nos diz se a equação possui duas raízes reais diferentes, uma única raiz real ou nenhuma raiz real. Em outras palavras, é ele quem "discrimina" os diferentes casos possíveis.

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções reais e distintas;
- Se $\Delta = 0$, há apenas uma solução real (ou duas iguais);
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui soluções reais, nesse caso, as raízes são números complexos.

Dessa forma, além de fazer parte da fórmula, o discriminante nos ajuda a compreender melhor a natureza das raízes da equação quadrática, sendo uma ferramenta poderosa tanto do ponto de vista algébrico quanto didático.

Essa fórmula permite a obtenção das raízes de qualquer equação quadrática, e foi essencial para o desenvolvimento da Álgebra moderna. A seguir, usaremos o método quadrático para resolver uma equação do segundo grau.

Determine as raízes da seguinte equação $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned}
a &= 1, \quad b = -5, \quad c = 6 \\
\Delta &= (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2} \\
x_1 &= 3, \quad x_2 = 2.
\end{aligned}$$

Logo, suas raízes serão 2 e 3.

4.2 A RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

As equações quadráticas têm sido objeto de estudo desde as primeiras civilizações que desenvolveram a Matemática. Os babilônios, por volta de 2000 a.C., já resolviam equações do segundo grau utilizando métodos geométricos e procedimentos numéricos. Esses métodos, embora não generalizados, baseavam-se em tábuas de valores e em algoritmos práticos, conforme destacam Boyer (1996) e Katz (2009).

Posteriormente, matemáticos gregos como Euclides e Diofanto também trataram dessas equações, ainda sob uma perspectiva geométrica. No entanto, foi com o desenvolvimento da álgebra no mundo islâmico que se iniciou uma verdadeira sistematização. No século IX, Al-Khwarizmi classificou e resolveu equações quadráticas em sua obra Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala, utilizando o método de completamento de quadrados (Boyer, 1996; Katz, 2009).

Durante o Renascimento, matemáticos europeus como Gerolamo Cardano e Rafael Bombelli aprofundaram-se no estudo das equações algébricas, contribuindo para o surgimento da teoria moderna das equações. A partir desse período, a relação entre os coeficientes de uma equação e suas raízes começou a ser formalmente estudada, culminando nos trabalhos de François Viète (1540–1603), que estabeleceu, de maneira sistemática, a conexão algébrica entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, mesmo sem recorrer explicitamente à resolução da equação (Katz, 2009).

A chamada Relação de Viète permite compreender como as raízes de uma equação polinomial estão relacionadas aos seus coeficientes. No caso específico das equações quadráticas, essas relações são simples e elegantes, oferecendo um recurso poderoso para análise, fatoração e verificação de soluções (Boyer, 1996).

4.2.1 Enunciado das Relações de Viète para Equações Quadráticas

Definimos como polinômio uma expressão matemática formada por variáveis, coeficientes e pelas operações de adição, subtração e multiplicação. De maneira geral, ele pode ser representado pela seguinte forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que x é a variável, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são coeficientes reais e n é um número natural que representa o grau do polinômio, isto é, o maior expoente da variável x com coeficiente diferente de zero.

Dentre os polinômios, destacamos o polinômio do segundo grau, também conhecido como equação quadrática, cuja forma geral é dada por:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são coeficientes reais e $a \neq 0$ para garantir que o termo de maior grau seja, de fato, quadrático.

Assumindo que r_1 e r_2 sejam as raízes dessa equação, podemos expressá-la em sua forma fatorada. Isso se justifica pelo Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual:

Todo polinômio não constante de grau n, com coeficientes complexos, possui exatamente n raízes complexas, contando multiplicidades.

Com base nesse teorema, é possível garantir que qualquer polinômio $P(x)$ de grau n pode ser fatorado no campo dos números complexos como o produto de n fatores lineares:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

em que a_n é o coeficiente líder do polinômio, e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes (complexas ou reais) de $P(x)$.

Aplicando essa ideia à equação quadrática, cuja forma geral é $ax^2 + bx + c = 0$, podemos reescrevê-la na forma fatorada como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

considerando que r_1 e r_2 sejam as raízes da equação. Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2\right]$$

Dividindo todos os termos por a, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2) \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = r_1 r_2$$

As relações entre os coeficientes a, b, c e as raízes r_1 e r_2 são dadas por:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$
$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Estas expressões são conhecidas como as relações de Viète, (também conhecidas como as relações de Girard) para equações de segundo grau.

4.2.2 Interpretação Geométrica das Relações de Viète

As relações de Viète, tradicionalmente tratadas sob uma perspectiva puramente algébrica no contexto das equações do segundo grau, podem ser exploradas de maneira complementar por meio da Geometria Analítica, especialmente quando associadas ao gráfico da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Essa abordagem visual proporciona ao estudante uma compreensão mais intuitiva sobre a existência das raízes reais da equação quadrática e sua relação com os coeficientes da função.

4.2.2.1 A Soma das Raízes e a Simetria da Parábola

A primeira relação de Viète estabelece que, sendo r_1 e r_2 as raízes reais da equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tem-se:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

Geometricamente, a função quadrática é representada por uma parábola, cuja característica principal é a simetria em torno do seu eixo vertical. Esse eixo passa pelo vértice da parábola, cuja abscissa é determinada por:

$$V = -\frac{b}{2a}.$$

No caso de duas raízes reais distintas, elas correspondem aos pontos onde a parábola intercepta o eixo das abscissas. Como a parábola é simétrica, o eixo de simetria divide igualmente a distância entre as raízes r_1 e r_2, ou seja:

$$V = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = 2V = -\frac{b}{a}.$$

Dessa forma, a soma das raízes não é apenas um resultado algébrico, mas revela, geometricamente, que esse valor equivale ao dobro da abscissa do vértice, sugerindo que haja a simetria intrínseca da parábola.

4.2.2.2 O Produto das Raízes e a Interseção com o Eixo das Ordenadas

A segunda relação de Viète determina que:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

Essa relação também pode ser interpretada geometricamente. O coeficiente c representa o valor da função quando $x = 0$, ou seja, o ponto onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Se a função quadrática admite uma forma fatorada, pode ser expressa como:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Ao substituir $x = 0$, obtém-se:

$$f(0) = a(0 - r_1)(0 - r_2) = a \cdot r_1 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \quad c = a \cdot r_1 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

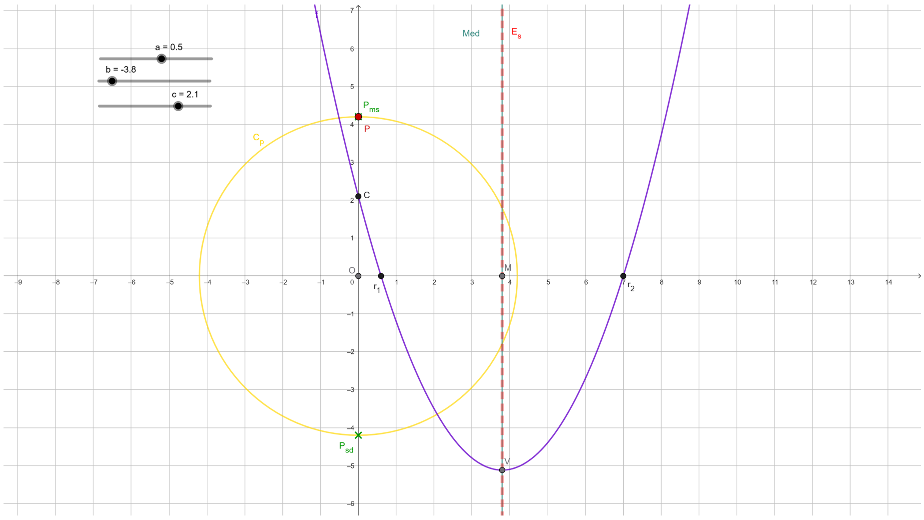
Consequentemente, o produto das raízes está diretamente relacionado à altura da parábola no ponto de interseção com o eixo das ordenadas, indicando que esse comportamento vertical depende diretamente dos zeros da função.

A análise das relações de Viète sob uma perspectiva geométrica promove um aprofundamento na compreensão dos conceitos matemáticos, indo além da mera manipulação algébrica. Essa abordagem favorece uma visão integrada entre a Álgebra e a Geometria Analítica, ampliando a capacidade dos estudantes de estabelecer conexões entre os coeficientes da equação, suas raízes e a forma do gráfico da função.

Além disso, a aplicação dessa abordagem no ensino de funções quadráticas pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático mais abstrato, incentivando o raciocínio visual e conceitual, tornando a aprendizagem mais significativa e intuitiva. Do ponto de vista algébrico, as relações de Viète são ferramentas importantes para a fatoração de polinômios, construção de polinômios a partir de raízes conhecidas e para resolver problemas que envolvem soma e produto de raízes sem necessidade de conhecê-las explicitamente.

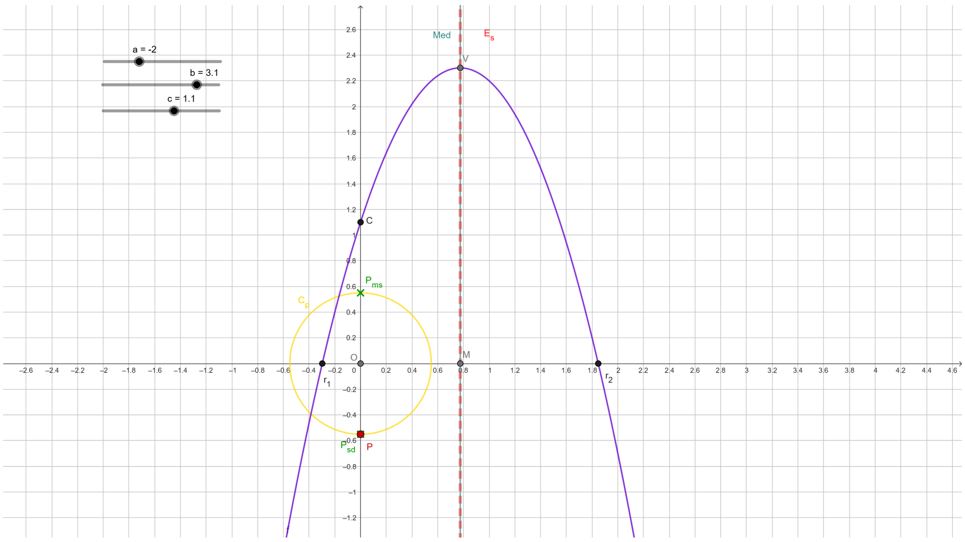
Vejamos a seguir uma representação esquemática, via software Geogebra, das relações geométricas de Viète para a função de segundo grau.

Figura 1 - Relações Geométricas de Viète



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 2 - Relações Geométricas de Viète



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A construção das Figuras 1 e 2 dá-se da seguinte maneira: (1) Construímos o gráfico (roxo) da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com controles deslizantes para os coeficientes. (2) Determinamos as raízes r_1 e r_2 através da interseção do gráfico com o eixo das abscissas e o ponto $C = (0, c)$, interseção do gráfico com o eixo das ordenadas. (3) Delimitamos mais alguns pontos importantes, tais como $O = (0, 0)$ a origem do sistema de coordenadas, V o vértice da parábola e o ponto (vermelho) $P = \left(0, \frac{c}{a}\right)$. (4) Traçamos o eixo de simetria da parábola E_s (linha laranja tracejada) que pode ser realizado de duas maneiras, traçando a reta vertical $x = x_v = -\frac{b}{2a}$ ou a reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo vértice V. (5) Traçamos a reta mediatriz (linha verde) entre as raízes $Med = Mediatriz(r_1, r_2)$ e marcamos o ponto M de interseção entre a mediatriz e o eixo das abscissas. Note que M é o ponto médio entre as raízes r_1 e r_2. (6) Por fim, traçamos um círculo C_p (amarelo) de centro na origem e raio $|r_1 \cdot r_2|$. Esse círculo intercepta o eixo das ordenadas nos pontos (verde-escuro) $P_{ms} = (0, |r_1 \cdot r_2|)$ e $P_{sd} = (0, -|r_1 \cdot r_2|)$.

Em cada figura, observamos que a reta mediatriz entre as raízes r_1 e r_2 e o eixo de simetria da parábola coincidem. Consequentemente, o ponto médio $M = \left(\frac{r_1+r_2}{2}, 0\right)$ e o vértice $V = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}, -\frac{b^2-4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}\right)$ possuem mesma coordenada x, de onde concluímos a relação

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

Notamos, também, que quando a função possui duas raízes de mesmo sinal, seu produto é positivo e, portanto, P e P_{ms} coincidem. Analogamente, quando as raízes da função possuem sinais diferentes P e P_{sd} coincidem. Em ambos os casos observa-se a relação

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

Por fim, para atestar a proposta geométrica, fazemos os cálculos como segue. Para a Figura 1 temos a função $f(x) = 0,5x^2 - 3,8x + 2,1$, cujas raízes são $r_1 = 0,6$ e $r_2 = 7$. Note que:

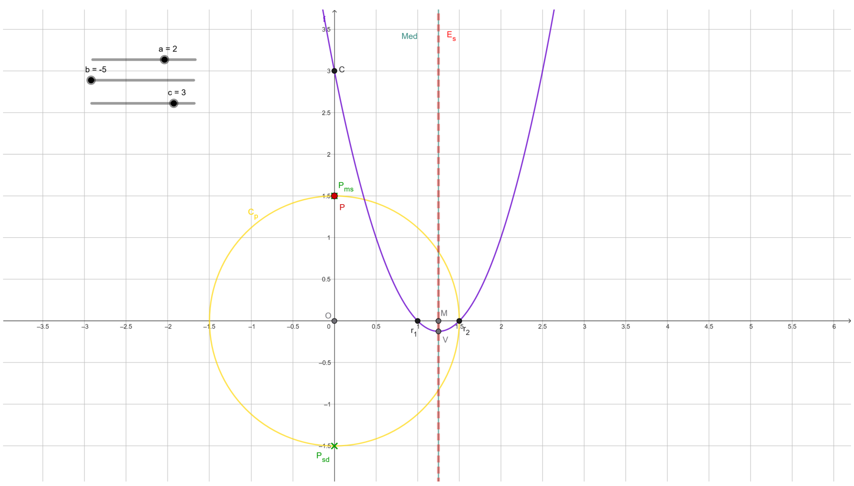
$$r_1 + r_2 = 0,6 + 7 = 7,6 = -\frac{(-3,8)}{0,5} = -\frac{b}{a}$$
$$r_1 \cdot r_2 = 0,6 \cdot 7 = 4,2 = \frac{2,1}{0,5} = \frac{c}{a}.$$

Para a Figura 2 temos a função $f(x) = -2x^2 + 3,1x + 1,1$, cujas raízes são $r_1 = \frac{3,1-\sqrt{18,41}}{4}$ e $r_2 = \frac{3,1+\sqrt{18,4}}{4}$. Disso temos:

$$r_1 + r_2 = \frac{3,1 - \sqrt{18,41}}{4} + \frac{3,1 + \sqrt{18,4}}{4} = \frac{6,2}{4} = \frac{3,1}{2} = -\frac{b}{a}$$
$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3,1 - \sqrt{18,4}}{4} \cdot \frac{3,1 + \sqrt{18,4}}{4} = -\frac{8,8}{16} = -\frac{1,1}{2} = \frac{c}{a}.$$

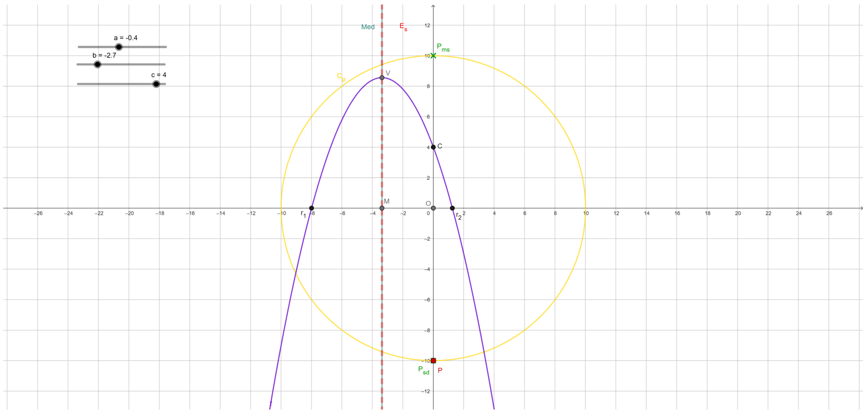
As figuras 3 e 4, a seguir, exibem mais dois exemplos para as funções $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ e $f(x) = -0,4x^2 - 2,7 + 4$, respectivamente.

Figura 3 - Relações Geométricas de Viète



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 4 - Relações Geométricas de Viète



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Exemplos Comentados

Exemplo 1: Vamos determinar a soma e o produto das raízes da equação

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Identificamos:

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 3$$

A soma das raízes é:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

O produto das raízes é:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Comentário: Utilizando apenas as relações sobre os coeficientes da equação podemos determinar que a soma das raízes é $\frac{5}{2}$ e que o produto é $\frac{3}{2}$.

Exemplo 2: Vamos construir uma Equação quadrática de maneira que os números 4 e -1 sejam suas raízes.

Calculamos:

$$r_1 + r_2 = 4 + (-1) = 3$$

$$r_1 \cdot r_2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Como visto em 4.12 a equação quadrática possui a forma:

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$$

Substituindo:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Comentário: Utilizando apenas as relações entre os coeficientes da equação do segundo grau, sabemos que a soma das raízes é 3 e o produto é -4. Com base nessas informações, podemos determinar que a equação correspondente é $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Exemplo 3: Problema com Soma e Produto Conhecidos

Encontre dois números reais cuja soma seja 7 e o produto seja 12, logo:

$$r_1 + r_2 = 7 \quad \text{e} \quad r_1 r_2 = 12$$

Para resolver esse problema precisamos determinar a equação quadrática que tem x_1 e x_2 como raízes.

A equação será:

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$$

Logo:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Comentário: Utilizando apenas as relações entre os coeficientes de uma equação do segundo grau, sabemos que a soma das raízes é 7 e o produto é 12. Dessa forma, concluímos que as raízes da equação são $r_1 = 3$ e $r_2 = 4$, pois $3 + 4 = 7$ e $3 \cdot 4 = 12$.

Exemplo 4: Aplicação em Problemas de Raciocínio Algébrico

Considere a equação:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Sabemos que:

$$r_1 + r_2 = 8$$
$$r_1 r_2 = 15$$

Pergunta-se: qual é a soma dos quadrados das raízes, ou seja, $r_1^2 + r_2^2$?

Sabemos que:

$$(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$8^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cdot 15 \Rightarrow 64 = r_1^2 + r_2^2 + 30$$

Portanto, a soma dos quadrados das raízes é:

$$r_1^2 + r_2^2 = 64 - 30 = 34$$

Comentário: Utilizando as relações entre os coeficientes de uma equação do segundo grau, sabemos que a soma das raízes é 8 e o produto é 15. Aplicando o produto notável do quadrado da soma, obtemos que $r_1^2 + r_2^2 = 34$.

As relações de Viète para equações do segundo grau revelam a íntima conexão entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, proporcionando uma ferramenta eficaz para a resolução de problemas algébricos e para a análise qualitativa de equações. No ensino da Matemática, essas relações oferecem oportunidades para explorar conceitos fundamentais, como simetria, fatoração e construção de equações, de modo acessível e intuitivo.

4.3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR SOMA E PRODUTO

A partir da relação entre os coeficientes da equação quadrática e suas raízes, é possível aplicar o método conhecido como soma e produto, que se baseia diretamente nas Relações de Viète. Esse procedimento permite encontrar as raízes da equação sem recorrer à fórmula geral, bastando identificar dois números que:

- tenham soma igual a $-\frac{b}{a}$;
- e produto igual a $\frac{c}{a}$.

Essa abordagem é especialmente eficaz quando os coeficientes da equação são inteiros e de pequena magnitude, o que permite resolver o problema por meio de simples tentativa fundamentada em raciocínio lógico.

Exemplo 1. Considere a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Deseja-se encontrar dois números cuja soma seja 5 e o produto 6. Os números 2 e 3 satisfazem essas condições:

$$2 + 3 = 5 \quad \text{e} \quad 2 \cdot 3 = 6.$$

Portanto, as raízes da equação são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$.

Exemplo 2. Considere agora a equação:

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Aqui, os números devem ter soma igual a -1 (pois $b = 1$) e produto igual a -6. Os números 2 e -3 satisfazem essas condições:

$$2 + (-3) = -1 \quad \text{e} \quad 2 \cdot (-3) = -6.$$

Assim, as raízes serão $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$.

Exemplo 3. Considere a equação:

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Deseja-se encontrar dois números cuja soma seja 8 e o produto 15. Os números 5 e 3 atendem a essas condições:

$$5 + 3 = 8 \quad \text{e} \quad 5 \cdot 3 = 15.$$

Logo, as raízes da equação serão $r_1 = 5$ e $r_2 = 3$.

O método da soma e produto é uma ferramenta valiosa no ensino da álgebra elementar, pois permite aos estudantes compreender intuitivamente a relação entre os coeficientes da equação e suas soluções, fortalecendo a análise algébrica e promovendo autonomia na resolução de problemas. No entanto, esse método é mais eficaz quando as raízes são números inteiros ou racionais simples. Em situações em que os valores da soma S e do produto P são irracionais, negativos ou frações complexas, a identificação direta das raízes torna-se mais difícil ou inviável por tentativas. Nesses casos, é recomendável utilizar métodos algébricos ou abordagens alternativas que simplifiquem o processo de resolução.

4.4 MÉTODO DE COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Esse método é usado para resolver equações quadráticas, tornando os cálculos mais simples. Ele consiste em interpretar a equação como um trinômio quadrado perfeito e escrevê-la em sua forma fatorada. Em alguns casos, esse simples procedimento já revela as raízes da equação.

Por isso, é importante ter conhecimentos básicos sobre produtos notáveis, trinômios quadrados perfeitos e fatoração de polinômios para aplicar essa técnica corretamente. Muitas vezes, no entanto, ela permite que os cálculos sejam feitos mentalmente.

Portanto, vamos relembrar os dois casos de produtos notáveis antes de apresentar o método de completar quadrados, que será exposto em três situações distintas.

4.4.1 Produtos Notáveis e Trinômios Quadrados Perfeitos

Na álgebra, um trinômio quadrado perfeito é uma expressão que surge quando elevamos um binômio ao quadrado. Isso significa que ele é resultado direto do produto de uma soma ou de uma diferença por ela mesma.

Por exemplo, quando calculamos

$$(a + b)^2,$$

obtemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Da mesma forma, ao calcular

$$(a - b)^2,$$

temos:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Nesses dois casos, a expressão final, chamada trinômio, tem três termos bem característicos: o quadrado do primeiro termo, o dobro do produto dos dois termos, e o quadrado do segundo termo. Quando essa estrutura aparece, podemos reconhecer que se trata de um trinômio quadrado perfeito, e isso nos permite reescrevê-lo como o quadrado de um binômio. Essa reescrita é conhecida como um produto notável, um padrão algébrico muito comum e útil.

A seguir, veja o produto notável, o trinômio quadrado perfeito que é equivalente a ele e a forma fatorada desse trinômio, respectivamente. Para tanto, considere que x é incógnita e k é um número real qualquer.

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)(x+k)$$
$$(x-k)^2 = x^2 - 2kx + k^2 = (x-k)(x-k)$$

Se uma equação do segundo grau for um trinômio quadrado perfeito, então será possível identificar seus coeficientes como: $a = 1$, $b = 2k$ ou $-2k$ e $c = k^2$. Para verificar isso, basta comparar uma equação do segundo grau com um trinômio quadrado perfeito.

Sendo assim, na solução da equação do segundo grau:

$$\begin{aligned} x^2 + 2kx + k^2 &= 0 \\ (x+k)^2 &= 0 \\ \sqrt{(x+k)^2} &= \sqrt{0} \\ |x+k| &= 0 \\ x+k &= 0 \\ x &= -k \end{aligned}$$

De forma análoga, resolvendo a equação $x^2 - 2kx + k^2 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2kx + k^2 &= 0 \\ (x-k)^2 &= 0 \\ \sqrt{(x-k)^2} &= \sqrt{0} \\ |x-k| &= 0 \\ x-k &= 0 \\ x &= k \end{aligned}$$

Exemplo:: Encontre as raízes da equação $x^2 + 16x + 64 = 0$?

Observe que a equação representa um trinômio quadrado perfeito, pois $2k = 16$, o que implica que $k = 8$ e, consequentemente, $k^2 = 64$. Assim, poderemos escrever:

$$\begin{aligned} x^2 + 16x + 64 &= 0 \\ (x+8)^2 &= 0 \\ \sqrt{(x+8)^2} &= \sqrt{0} \\ x + 8 &= 0 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Assim, a raiz será -8.

Aqui o resultado foi simplificado, pois já sabemos que as duas soluções serão iguais ao mesmo número real.

Esse princípio está intimamente ligado a um importante método utilizado na resolução de equações quadráticas: o método de completar quadrados. Esse método consiste em transformar uma equação do segundo grau que não é um trinômio quadrado perfeito em uma que seja, a fim de facilitar sua resolução.

Nos casos em que a equação do segundo grau não possui, inicialmente, a estrutura de um trinômio quadrado perfeito, podemos reescrevê-la na forma:

$$x^2 + 2kx + C = 0 \tag{4.1}$$

Para completar o quadrado, somamos k^2 em ambos os lados da equação, de modo a criar o trinômio quadrado perfeito:

$$\begin{aligned} x^2 + 2kx + C + k^2 &= 0 + k^2 \\ x^2 + 2kx + k^2 &= k^2 - C \end{aligned}$$

Agora, o lado esquerdo pode ser fatorado como o quadrado de um binômio:

$$\begin{aligned} (x+k)^2 &= k^2 - C \\ \sqrt{(x+k)^2} &= \pm\sqrt{k^2 - C} \\ x + k &= \pm\sqrt{k^2 - C} \\ x &= -k \pm \sqrt{k^2 - C} \end{aligned}$$

Com isso, a equação admite duas soluções reais e distintas quando $k^2 - C > 0$, uma solução real quando $k^2 - C = 0$, ou nenhuma solução real quando $k^2 - C < 0$. Assim, o método de completar quadrados não apenas fornece um caminho alternativo à fórmula quadrática, como também oferece uma compreensão geométrica e estrutural mais profunda da equação do segundo grau.

Exemplo: Calcule as raízes da equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Sabemos que $6 = 2 \cdot 3$, então $k = 3$ e $k^2 = 9$. Assim, somamos 9 em ambos os membros:

$$\begin{aligned}
x^2 + 6x + 8 + 9 &= 0 + 9 \\
x^2 + 6x + 9 &= 9 - 8 \\
(x+3)^2 &= 1 \\
\sqrt{(x+3)^2} &= \pm 1 \\
x + 3 &= \pm 1 \\
x &= -3 \pm 1 \\
x_1 &= -2, \quad x_2 = -4
\end{aligned}$$

Caso em que $a \neq 1$

Se o coeficiente a da equação do segundo grau for diferente de 1, basta dividir toda a equação por a antes de aplicar o método, conforme o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 24x + 72 &= 0 \\
\frac{2x^2 + 24x + 72}{2} &= 0 \\
x^2 + 12x + 36 &= 0 \\
(x+6)^2 &= 0 \\
x + 6 &= 0 \\
x &= -6
\end{aligned}$$

Assim, sua raiz será -6.

Na solução da equação $2x^2 + 16x - 18 = 0$, temos as raízes -9 e 1, pois:

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 16x - 18 &= 0 \\
\frac{2x^2 + 16x - 18}{2} &= 0 \\
x^2 + 8x - 9 &= 0 \\
x^2 + 8x + 16 &= 25 \\
(x+4)^2 &= 25 \\
x + 4 &= \pm 5 \\
x &= -4 \pm 5
\end{aligned}
$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -9$$

Os métodos apresentados neste capítulo constituem a base para a resolução de equações quadráticas utilizados mais comumente. Cada um deles tem suas vantagens e desvantagens, sendo mais adequado para diferentes situações. O método da fórmula quadrática é o mais direto e aplicado amplamente, enquanto a completação do quadrado é fundamental para a compreensão estrutural das equações quadráticas.

5 MÉTODOS ALTERNATIVOS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Este capítulo tem como propósito apresentar e analisar diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau, articulando aspectos teóricos, históricos e didático-pedagógicos. Inicialmente, são exploradas estratégias algébricas clássicas, com destaque para contribuições históricas relevantes como o Método de Viète, o Método de Euler e a abordagem geométrica proposta por Al-Khwarizmi, evidenciando o desenvolvimento gradual da Álgebra ao longo dos séculos.

Na sequência, o capítulo aborda métodos alternativos contemporâneos que oferecem diferentes perspectivas para a resolução de equações quadráticas. Entre eles, destacam-se o Método das Aspas Simples (ou Método da Lâmina), técnica pouco difundida no contexto educacional brasileiro, mas que apresenta potencial didático significativo, e o Método de Po-Shen Loh, proposta recente que explora a simetria das raízes e a média aritmética como fundamentos conceituais.

A análise desses métodos visa não apenas discutir sua fundamentação matemática, mas também refletir sobre sua aplicabilidade no processo de ensino-aprendizagem, ampliando as possibilidades de abordagem das equações do segundo grau no ambiente educacional.

Ao longo da história, matemáticos de diferentes culturas desenvolveram diversos métodos para resolver equações do segundo grau, indo além da conhecida fórmula quadrática. Muitos desses métodos surgiram da necessidade prática de lidar com problemas geométricos e, especialmente, financeiros. Por exemplo, na antiga Babilônia (2000 a.C.), equações quadráticas eram aplicadas em cálculos de juros compostos e na divisão de bens, como demonstrado em tábuas cuneiformes que tratam da soma entre um número e seu quadrado para fins de partilha de terras ou quitação de dívidas (Katz, 2009). No mundo islâmico medieval, Al-Khwarizmi apresentou soluções para problemas semelhantes ao tratar de dívidas e pagamentos em seu tratado Al-Jabr, utilizando técnicas como o "completar o quadrado" (Boyer & Merzbach, 2012). Esses avanços foram posteriormente refinados por matemáticos indianos e europeus, motivados tanto por desafios teóricos da Álgebra quanto pelas exigências comerciais de seus tempos.

Na Grécia Antiga, matemáticos como Euclides e Diofanto desenvolveram métodos geométricos para a resolução dessas equações. Diofanto, em sua obra Arithmetica, contribuiu significativamente para a Álgebra, ao propor soluções para equações polinomiais, incluindo as quadráticas (Boyer, 1996; Boyer & Merzbach, 2012).

No mundo islâmico medieval, Al-Khwarizmi sistematizou o método da completação do quadrado, além de explorar a redução de casos particulares, consolidando uma abordagem algébrica para a resolução de equações quadráticas. Seu tratado *Al-Kitab* *al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala* é fundamental para a história da álgebra (Al-Khwarizmi, 1831; Rashed, 1994; Rashed, 2007) .

Durante o Renascimento, matemáticos europeus como Cardano e Viète aprimoraram a notação algébrica e formalizaram métodos de solução para equações do segundo grau, contribuindo para o ensino e desenvolvimento da matemática moderna (Boyer & Merzbach, 2012; Roque, 2012).

5.1 MÉTODO DE VIÈTE

François Viète (1540–1603) foi um matemático francês que, apesar de formado em Direito e membro do Parlamento da Bretanha, dedicou-se intensamente à matemática, destacando-se nas áreas de Geometria, Trigonometria, Aritmética e, especialmente, Álgebra. Conforme Boyer e Merzbach (2012) e Katz (2009), Viète foi pioneiro ao introduzir o uso sistemático de letras para representar quantidades conhecidas e incógnitas, estabelecendo pela primeira vez uma clara distinção entre parâmetros e incógnitas. Essa inovação no simbolismo matemático europeu atualizou os métodos para a resolução de equações quadráticas, cúbicas e quárticas, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da álgebra moderna.

Vamos apresentar o Método de Viète para resolução da equação do 2° grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{1.1}$$

De acordo com Amaral (1988, p.18-20), o método consiste na mudança da variável x para novas variáveis auxiliares u e v. Inicialmente fazemos $x = u + v$ na equação (1.1), obtendo:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \quad \text{ou} \quad au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Reescrevemos a igualdade acima como uma equação na variável v:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \tag{1.2}$$

Viète transformou a equação (1.2) numa equação incompleta do 2° grau, anulando o coeficiente de v, $2au + b$, escolhendo $u = -\frac{b}{2a}$. Assim, a equação (1.2) fica:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Longleftrightarrow$$
$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Longleftrightarrow$$
$$av^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

Isolando v, chega-se a:

$$v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{com } b^2 - 4ac \geq 0.$$

Como mencionado na seção anterior, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante.

Lembrando que $x = u + v$, com $u = -\frac{b}{2a}$ e $v = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, segue a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.3}$$

que é a Fórmula Quadrática, concluindo a demonstração.

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, usando o Método de Viète.

Inicialmente, substituímos $x = u + v$ na equação dada, obtendo:

$$(u + v)^2 - 5(u + v) + 6 = 0 \Longleftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 - 5u - 5v + 6 = 0.$$

Reescrevendo na variável v, temos $v^2 + (2u - 5)v + u^2 - 5u + 6 = 0$. Escolhemos $u = \frac{5}{2}$ para anular o coeficiente $2u - 5$ de v, chegando em

$$v^2 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = 0 \quad \text{ou ainda} \quad v = \pm\frac{1}{2}$$

Então, de $x = u + v, u = \frac{5}{2}$ e $v = \pm\frac{1}{2}$, vem $x = \frac{5\pm1}{2}$. Daí, chegamos às soluções da equação, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

O método de Viète é uma alternativa para quem não quiser decorar a fórmula quadrática, embora exija operar com o produto notável $(u + v)^2$. Também pode ser utilizado como uma forma de demonstrar a dedução dessa fórmula.

É interessante discutir, em sala de aula, a mudança de variáveis $x = u + v$ e a escolha $u = -\frac{b}{2a}$. O uso da mudança para as variáveis auxiliares não altera o valor das raízes da equação original em x. É apenas um artifício com o objetivo de facilitar a resolução. A escolha $u = -\frac{b}{2a}$ pode levar o aluno a pensar que “sumiu” algo no meio da equação e, com isso, o resultado final ficará comprometido. No entanto, deve-se ressaltar que u é uma variável auxiliar e poderíamos escolher outras expressões para ela, mas a escolha sugerida pelo Método de Viète é a melhor pois transforma uma equação completa numa incompleta do 2° grau, que é notoriamente mais fácil de se resolver.

François Viète estabeleceu relações fundamentais entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes. Para uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, as fórmulas de Viète afirmam que:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a}, \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Conforme demonstrado no Capítulo 4. Veja a Seção 4.2.1 para mais detalhes.

Essas relações são úteis para encontrar raízes rapidamente, sem resolver diretamente a equação.

Exemplo: Consideremos $x^2 - 5x + 6 = 0$. Pela fórmula de Viéte:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 5, \\ r_1 \cdot r_2 &= 6. \end{aligned}$$

As soluções são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, pois $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$.

5.2 MÉTODO DE EULER

Leonhard Euler, importante matemático do século XVIII, apresentou uma nova demonstração da fórmula quadrática por meio de um método baseado na substituição de variáveis. Para aprimorar essa abordagem, utilizou também conceitos de sistemas lineares e determinantes, integrando diferentes áreas da Matemática na resolução das equações do segundo grau.

A seguir, apresentamos sua demonstração. Considere a equação expressa por, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e fazendo $x = u + v$, na qual aplicamos a substituição de variáveis. Elevando ambos os membros ao quadrado, chegamos à seguinte expressão $x^2 = (u + v)^2$. A partir desse resultado, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x - (u + v) &= 0 \\ x^2 - (u + v)x &= 0 \end{cases}$$

Ao multiplicarmos todas as equações do sistema homogêneo por x , obtemos um novo sistema que mantém as características do anterior.

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx &= 0 \\ x^2 - x(u+v) &= 0 \\ x^3 - x^2(u+v) &= 0 \end{cases}$$

Com base na teoria dos determinantes, Euler reconheceu que uma das soluções seria trivial ou nula, pois o sistema em questão era homogêneo. A segunda solução só poderia existir se o determinante dos coeficientes fosse igual a zero. Dessa forma, ele definiu que:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+v) \\ 1 & -(u+v) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$a\left[-(u+v)^2\right] - b(u+v) - c = 0$$

Daí vem que:

$$-au^2 - 2auv - v^2 - bu - bv - c = 0$$

Ao multiplicar toda a equação por -1 e, em seguida, reestruturá-la na variável u, obtemos uma nova forma que facilita sua análise e resolução:

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$$

Para reescrever a equação original em uma forma incompleta na variável desejada, Euler adotou uma estratégia específica, que o levou à expressão $2av + b = 0$. A partir dela, determinou o valor de v, obtendo $v = -\frac{b}{2a}$. Substituindo esse valor na equação original, ele conseguiu transformá-la em uma nova forma, mais simples e adequada para a resolução do problema.

Ao substituir esse valor na equação:

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$$

obteve:

$$au^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]u + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

que ficou reduzida a:

$$au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

e, portanto:

$$u^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}$$

que é equivalente a:

$$u^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ou seja,

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os valores de v e u em $x = u + v$, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como esse método requer o uso de determinantes, ele não é viável para os alunos do ensino fundamental, porque ainda não aprenderam esse conteúdo. No entanto, pode ser apresentado como uma curiosidade matemática para os estudantes do ensino médio, oferecendo uma perspectiva mais ampla sobre diferentes formas de resolver equações

5.3 MÉTODO GEOMÉTRICO DE AL-KHWARIZMI

O estudo das equações do segundo grau tem origem em civilizações como os babilônios, egípcios e gregos. Porém, um nome se destaca na história dessa área: Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, matemático do século IX, considerado um dos fundadores da álgebra. Al-Khwarizmi trabalhou na famosa biblioteca de Bagdá, conhecida como Casa da Ciência ou Casa da Sabedoria, onde traduziu para o árabe importantes obras matemáticas oriundas da Grécia e da Índia (Katz, 2009).

Entre suas principais contribuições está a disseminação do sistema numérico indo-arábico, base do sistema decimal que utilizamos atualmente, por meio de sua obra sobre o cálculo com numerais hindus. Além disso, seu nome deu origem a termos como algoritmo, algarismo e logaritmo. A palavra "álgebra" também tem origem no título de sua principal obra, *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala* (O Compêndio do Cálculo por Completamento e Balanço), escrita por volta do ano 825 (Boyer & Merzbach, 2012).

Embora sua influência tenha se estendido a diversos campos do conhecimento, neste capítulo o foco recai sobre a contribuição específica de Al-Khwarizmi para a resolução das equações do segundo grau. No contexto do século IX, o estudo desse tipo de equação estava diretamente associado a aplicações práticas da vida cotidiana, como partilhas de heranças, transações comerciais e problemas relacionados à medição de terrenos. Em sua obra Al-Jabr wa'l-Muqabala, Al-Khwarizmi apresenta exemplos que envolvem a divisão equitativa de bens entre herdeiros, o cálculo do valor de mercadorias com base em proporções e a determinação de áreas de terrenos a partir de dados parciais, todos esses problemas levavam naturalmente a equações quadráticas. Tais aplicações evidenciam o caráter utilitário da matemática desenvolvida nesse período, refletindo as necessidades administrativas e econômicas da sociedade islâmica medieval (Rashed, 1994).

Até então, os métodos utilizados para resolver equações eram essencialmente geométricos, baseados na tradição grega, especialmente nas obras de Euclides e Diofanto (Katz, 2009). Al-Khwarizmi foi inovador ao propor uma abordagem algébrica estruturada, na qual os problemas eram classificados e resolvidos por meio de procedimentos padronizados, descritos em linguagem retórica e fundamentados em construções geométricas que justificavam cada passo (Al-Khwarizmi, 1831).

Sua obra Al-jabr wa'l-muqābala representa um marco na sistematização da álgebra, ao estabelecer um novo modo de organizar o pensamento matemático, caracterizado pela generalização das operações e pela independência em relação à representação numérica específica (Rashed, 2007). Essa contribuição foi fundamental para o surgimento da Álgebra como campo autônomo dentro da matemática, influenciando profundamente os desenvolvimentos posteriores na tradição islâmica e europeia.

Entre suas contribuições mais notáveis, destaca-se a classificação das equações quadráticas em seis tipos fundamentais, elaborados sob critérios que refletiam as concepções matemáticas de sua época. Todas as equações foram formuladas com coeficientes positivos, uma vez que os números negativos ainda não eram aceitos ou manipulados matematicamente. O coeficiente do termo quadrático (x^2) era sempre considerado igual a 1, enquanto os coeficientes dos termos lineares (b) e constantes (c) eram números inteiros positivos. Além disso, suas soluções assumiam apenas valores positivos, compatíveis com sua interpretação geométrica. Segundo Rashed (2007), essa preferência por coeficientes positivos e pela unidade no termo quadrático expressa os fundamentos geométricos e a estrutura normativa da álgebra em sua forma primitiva.

Os seis tipos de equações considerados por Al-Khwarizmi são:

$$x^2 = bx$$
$$x^2 = c$$
$$bx = c$$
$$x^2 + bx = c$$
$$x^2 + c = bx$$
$$bx + c = x^2$$

Qualquer outra equação só poderia ser resolvida depois de ser reduzida a uma dessas formas. Para cada tipo de equação, ele desenvolveu um método específico de resolução, com base na técnica de completar o quadrado, apoiada por construções geométricas. Al-Khwarizmi não utilizava símbolos como os que usamos hoje, suas demonstrações eram feitas em linguagem retórica, mas os raciocínios são equivalentes ao que hoje conhecemos como solução algébrica por meio da transformação da equação em um quadrado perfeito (Al-Khwarizmi, 1831).

Segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 252), "Al-Khwarizmi resolveu as equações por um processo geométrico equivalente ao método moderno de completar o quadrado". Esse procedimento aparece de forma recorrente em sua obra e é considerado uma das raízes do pensamento algébrico sistemático.

O impacto de sua obra foi tão significativo que ela serviu de base para os estudos posteriores da álgebra no mundo islâmico e, posteriormente, na Europa medieval, após traduções para o latim durante o século XII (Katz, 2009).

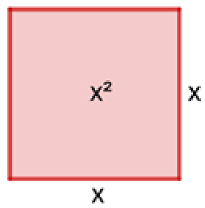
A seguir, será apresentado um exemplo de resolução geométrica proposto por Al-Khwarizmi, adaptado à simbologia algébrica moderna, com o objetivo de ilustrar sua metodologia e evidenciar sua relevância histórica na evolução da resolução de equações quadráticas. Optou-se por esse método por sua abordagem visual e concreta, que pode ser reproduzida em sala de aula com o uso de materiais manipuláveis, como o EVA, facilitando a compreensão dos alunos e reduzindo a dependência da memorização de fórmulas.

Dada a equação:

$$x^2 + 12x = 28$$

- Construímos um quadrado, cuja área vai ser o termo x^2.

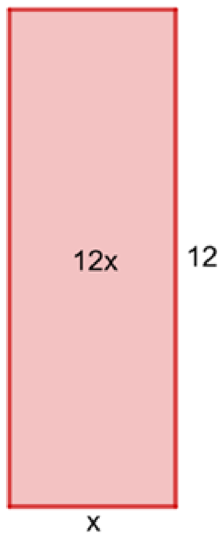
Figura 5 - Quadrado de área igual a x^2



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

- O termo $12x$ significa a área de um retângulo, cujos lados valem 12 e x.

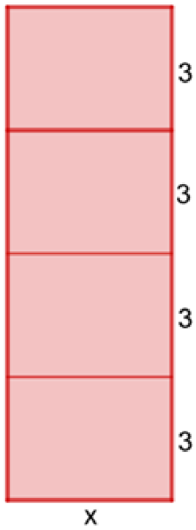
Figura 6 - Retângulo de área igual a $12x$



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

- Dividimos esse retângulo em quatro retângulos de mesma área.

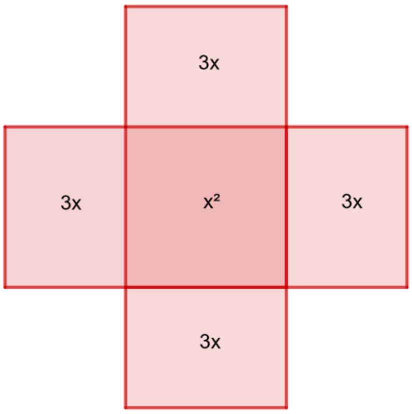
Figura 7 - Retângulo dividido em quatro retângulos de área igual a $3x$



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

- Colocaremos um retângulo de área 3x em cada lado do quadrado,completando o quadrado, conforme a figura abaixo:

Figura 8 - Retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

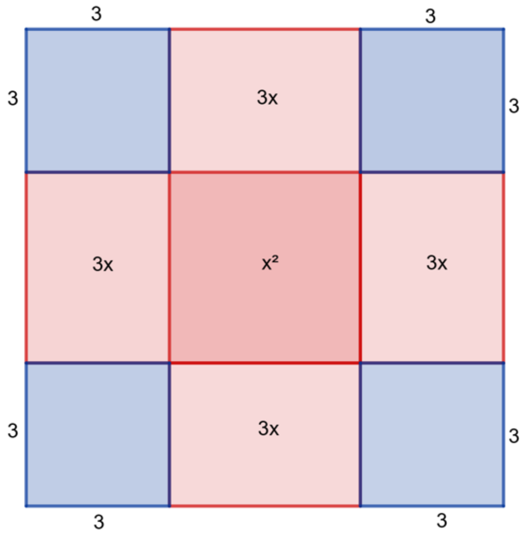
Agora a área formada pelo quadrado e pelos quatro retângulos será:

$$x^2 + 4 \cdot 3x = x^2 + 12x$$

A equação do segundo grau $x^2 + 12x = 28$, portanto, a área encontrada acima $x^2 + 12x$ será igual a 28.

Completaremos a figura anterior com quadrados de tamanho 3×3 para obter um quadrado de lado $x + 6$, conforme a figura abaixo:

Figura 9 - Completando o quadrado



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A área desse quadrado corresponde à área da figura 8, dada por $x^2 + 12x = 28$, acrescida da parte que foi adicionada:

$$28 + 4 \cdot (3 \cdot 3) = 28 + 36 = 64$$

Portanto, esse quadrado terá área igual a 64.

A resolução da equação termina quando encontramos o valor de x. Então, devemos encontrar quanto vale cada lado desse quadrado. Sabemos que sua área é 64, portanto, seu lado será igual à raiz quadrada de 64, ou seja:

$$\sqrt{64} = 8.$$

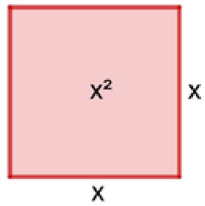
Pela figura observamos que o lado do quadradado será $3 + x + 3 = 8$, portanto:

$$x = 2.$$

Além do método de resolução de equação polinomial do segundo grau já apresentado, Al-Khwarizmi também propõe uma abordagem alternativa, exemplificada com a equação $x^2 + 12x = 28$. Essa técnica consiste em dividir o retângulo em duas partes, em vez de quatro como no método anteriormente descrito, e pode ser aplicada a outras equações de estrutura semelhante. Vejamos a resolução alternativa para a equação $x^2 + 12x = 28$.

- Construímos um quadrado, cuja área vai ser o termo x^2.

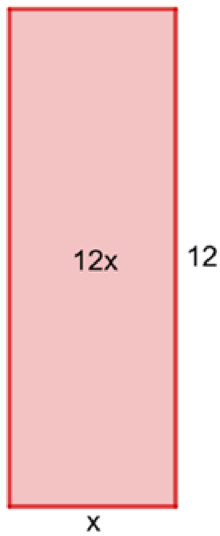
Figura 10 - Quadrado de área igual a x^2



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

- O termo $12x$ significa a área de um retângulo.

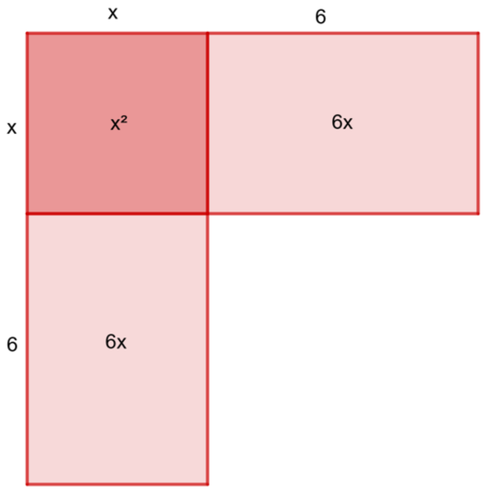
Figura 11 - Retângulo de área igual a $12x$



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Dividimos esse retângulo em dois retângulos de mesma área, ou seja, $6x$. Em seguida, aplicamos cada um deles sobre dois lados consecutivos do quadrado de área x^2, conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 12 - Os dois retângulos sobre os lados consecutivos do quadrado de área x^2



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Agora, a área formada pelo quadrado e pelos dois retângulos será:

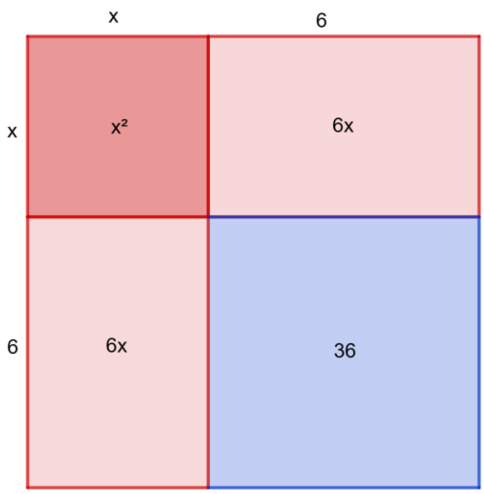
$$x^2 + 2 \cdot 6x = x^2 + 12x$$

Sabemos, no entanto, que essa área total também é igual a 28. Portanto, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 + 12x = 28$$

Completaremos a figura anterior com um quadrado de lado 6, de modo a formar um quadrado maior, com lado $x + 6$, conforme a figura abaixo:

Figura 13 - Completando o quadrado de lado $x + 6$



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A área desse quadrado corresponde à área da figura 12, dada por $x^2 + 12x = 28$, acrescida da parte que foi adicionada:

$$28 + 36 = 64$$

Portanto, esse quadrado terá área igual a 64, e seu lado será:

$$\sqrt{64} = 8.$$

Pela figura observamos que o lado do quadrado será $x + 6 = 8$, portanto:

$$x = 2.$$

5.4 MÉTODO DAS ASPAS SIMPLES OU MÉTODO DA LÂMINA

O método das Aspas Simples, também conhecido como método da lâmina ou popularmente chamado de método peruano utilizado para resolver equações do segundo grau, é uma técnica empregada na fatoração de polinômios nas formas:

$$ax^{2n} + bx^n + c \quad \text{ou} \quad ax^{2n} + bx^n y^n + cy^{2n}$$

O método das Aspas Simples é utilizado em casos em que os polinômios não apresentam as características de um trinômio quadrado perfeito. Para que a fatoração seja possível por esse método, é necessário que a equação possua coeficientes inteiros e que o discriminante $b^2 - 4ac$ seja um quadrado perfeito. Neste capítulo, o objetivo é explorar as fatorações de polinômios do segundo grau e, consequentemente, determinar suas raízes.

Proposição: Seja $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ um polinômio do segundo grau com $A, B, C \in \mathbb{Z}$ e $A \neq 0$. Se $B^2 - 4AC$ é um quadrado perfeito então $Ax^2 + Bx + C$ possui duas raízes racionais.

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podemos fatorar o polinômio $Ax^2 + Bx + C$ como:

$$Ax^2 + Bx + C = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

com $a_1, c_1, a_2, c_2 \in \mathbb{C}$.

Observe que:

$$Ax^2 + Bx + C = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2.$$

Obtemos que $A = a_1a_2$, $B = a_1c_2 + a_2c_1$ e $C = c_1c_2$ são números inteiros com $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$.

Pela fatoração anterior, temos que:

$$x_1 = -\frac{c_1}{a_1} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{c_2}{a_2}$$

são as raízes de $P(x)$.

Como

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= (a_1c_2 + a_2c_1)^2 - 4(a_1a_2)(c_1c_2) \\
&= (a_1c_2 - a_2c_1)^2,
\end{aligned}
$$

é um quadrado perfeito, segue que $a_1c_2 - a_2c_1$ é um número inteiro.

Por outro lado, sabemos que $a_1c_2 + a_2c_1$ é um número inteiro, logo a_1c_2 e a_2c_1 são números inteiros.

Como o quociente de números inteiros é um número racional, obtemos que:

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{a_2c_1}{a_1a_2} \quad \text{e} \quad \frac{c_2}{a_2} = \frac{a_1c_2}{a_1a_2} \tag{5.1}$$

são racionais, logo x_1 e x_2 são números racionais. ■

Vamos apresentar o Método das Aspas Simples para resolução da equação do 2° grau.

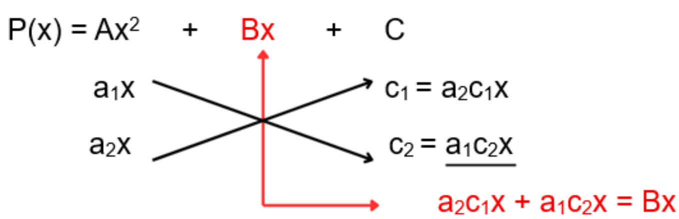
Procedimentos: Seja $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ um polinômio do segundo grau com $A, B, C \in \mathbb{Z}$ e $A \neq 0$, tais que:

- Decompondo o coeficiente do termo de segundo grau e o termo independente como um produto de dois fatores:

$$A = a_1a_2, \quad C = c_1c_2$$

- Multiplicaremos em "aspas" (cruz) como na figura abaixo e verificaremos se a soma desses produtos resulta no termo central:

Figura 14 - Método das Aspas simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

$$B = a_1c_2 + a_2c_1$$

- O resultado final será o produto da soma dos fatores tomados horizontalmente.

A forma fatorada será:

$$P(x) = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

Logo, conseguimos fatorar um polinômio quadrático da forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em:

$$P(x) = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

Assim, determinamos os valores de x que satisfazem:

$$x = -\frac{c_1}{a_1}, \quad x = -\frac{c_2}{a_2}$$

Exemplo 1: Determinar as raízes do polinômio $P(x) = 6x^2 + 11x + 4$ pelo Método das Aspas.

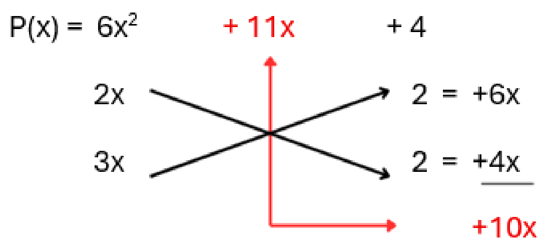
Verificamos se $b^2 - 4ac$ é um quadrado perfeito:

$$11^2 - 4(6)(4) = 121 - 96 = 25$$

Como 25 é um quadrado perfeito, aplicamos o método.

De acordo com a demonstração da proposição (5.8), podemos decompor o coeficiente do termo de segundo grau e o termo independente como um produto de dois fatores. Observando a imagem abaixo, percebemos que os valores escolhidos para a fatoração de A e C não foram adequados, pois ao multiplicarmos em "aspas"(cruz) a soma $a_1c_2 + a_2c_1$ não resultou no termo do meio, ou seja, Bx. Sendo assim, será necessário reorganizar os fatores de um dos termos (a_1 e a_2 ou c_1 e c_2), ou ainda utilizar uma nova decomposição.

Figura 15 - Método das Aspas simples

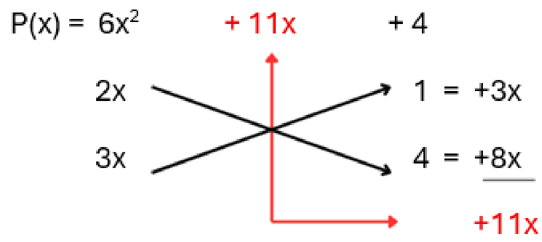


Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Conforme podemos observar, $6x + 4x = 10x$, e esse resultado é diferente do termo central, $11x$, o que indica que os valores escolhidos para a fatoração não foram adequados.

Portanto, será necessário reorganizar os produtos de $6x^2$ ou 4, ou utilizar uma nova fatoração para esses termos, conforme imagem abaixo:

Figura 16 - Método das Aspas simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Ao alterar a fatoração de $2 \cdot 2 = 4$ para $1 \cdot 4 = 4$, percebemos que os valores escolhidos para a decomposição de $6x^2$ e 4 agora estão corretos. Isso porque, ao realizarmos o produto em "aspas" (cruz) e somarmos os termos resultantes, obtemos $11x$, que corresponde exatamente ao termo central da equação, indicando que a fatoração foi realizada corretamente.

Portanto, o resultado final será expresso pelo o produto da soma dos fatores tomados horizontalmente,

$$P(x) = (2x + 1)(3x + 4)$$

e suas raízes são:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = -\frac{4}{3}$$

Exemplo 2: Resolva a equação $x^2 - 4x - 5 = 0$ pelo Método das Aspas.

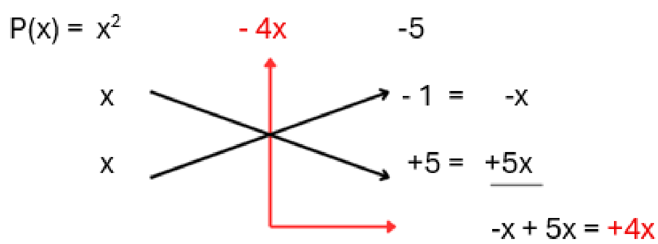
Observe que $b^2 - 4ac$ é um quadrado perfeito:

$$(-4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$$

Como 36 é um quadrado perfeito, aplicamos o método.

Observando a imagem abaixo, percebemos que os valores escolhidos para a fatoração de x^2 e -5 não foram adequados, pois ao multiplicarmos em "aspas" (cruz) , obtemos a soma $-x + 5x = 4x$, que é diferente do termo central, $-4x$. Portanto, será necessário reorganizar os fatores de um dos termos ou utilizar uma nova decomposição.

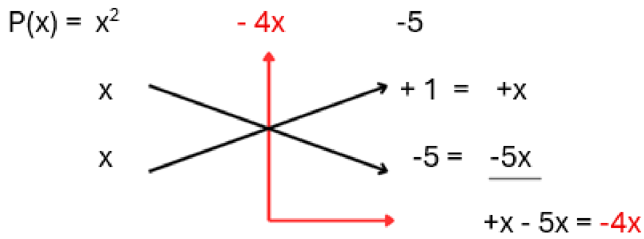
Figura 17 - Método das Aspas simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Ao realizarmos a multiplicação em "aspas" (cruz) , obtemos a soma $-x + 5x = 4x$, que é diferente do termo do meio, $-4x$. Isso indica que apenas o sinal do resultado está incorreto. Para corrigir, basta trocar os sinais dos fatores escolhidos anteriormente: em vez de $(-1) \cdot (+5) = -5$, utilizamos $(+1) \cdot (-5) = -5$, como ilustrado na imagem abaixo.

Figura 18 - Método das Aspas simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Portanto, o resultado final será expresso pelo o produto da soma dos fatores tomados horizontalmente,

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) = 0$$

e suas raízes serão:

$$x = -1, \quad x = 5$$

5.5 MÉTODO DE PO-SHEN LOH

Po-Shen Loh, nascido em 18 de junho de 1982, é um matemático americano com ascendência cingapuriana, cujo impacto vai além das salas de aula e competições. Desde 2010, integra o corpo docente da Carnegie Mellon University, conciliando atividades de pesquisa com uma atuação marcante no ensino universitário (Loh, 2020a). Entre 2014 e 2023, exerceu o cargo de treinador principal da equipe americana da Olimpíada Internacional de Matemática, liderando o time em conquistas históricas e encerrando um jejum de vitórias que se estendia desde 1994 (Loh, 2020a).

Loh construiu uma carreira acadêmica sólida desde muito jovem. Graduou-se em Matemática com distinção no Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech), onde foi reconhecido com diversos prêmios. Foi contemplado com a bolsa Churchill para estudos na Universidade de Cambridge e, posteriormente, concluiu seu doutorado em Matemática na Universidade de Princeton, sob orientação do professor Benny Sudakov, com uma tese na área de combinatória (Loh, 2020a). Até 2023, Loh já havia publicado mais de 40 artigos científicos.

Sua atuação não se limita ao meio acadêmico. É fundador das plataformas educacionais *Expii* e *Live*, que têm como objetivo democratizar o ensino da Matemática por meio de recursos digitais interativos. Durante a pandemia de COVID-19, criou o aplicativo *NOVID*, com o objetivo de identificar redes de contato e notificar os usuários sobre eventuais riscos de contaminação antes da ocorrência de sintomas, proposta que recebeu destaque por sua abordagem inovadora (Loh, 2020a).

Além de pesquisador, Loh tem se destacado na divulgação científica da Matemática. O canal de Loh no YouTube, intitulado *Daily Challenge with Po-Shen Loh*, reúne milhões de acessos, oferecendo explicações didáticas com recursos visuais atrativos. Por meio dessa iniciativa, ele tem contribuído significativamente para transformar a forma como a Matemática é ensinada, aprendida e compartilhada em escala global (Loh, 2020a).

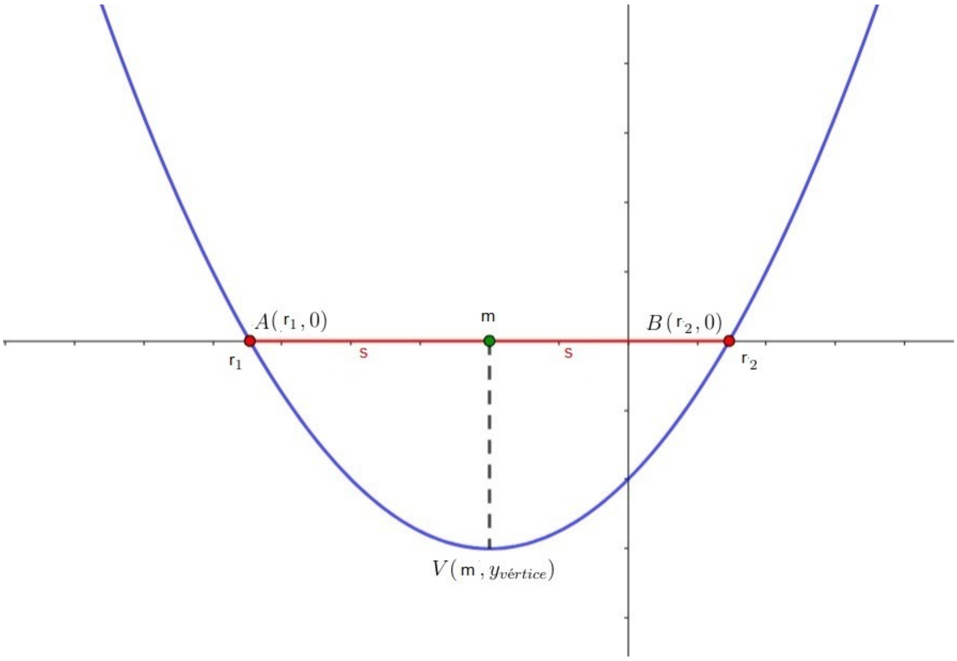
No ano de 2019, Loh propôs uma abordagem alternativa para resolver equações quadráticas, fundamentada na análise da simetria característica das parábolas – proposta que constitui o foco deste estudo. Reconhecido por sua abordagem criativa no ensino da Matemática, o professor tem promovido o desenvolvimento da criatividade, do raciocínio lógico e das habilidades de resolução de problemas, elementos essenciais para a compreensão de equações do segundo grau e de outros conceitos matemáticos. Sua atuação como educador tem impactado profundamente a forma como os estudantes se envolvem com a Matemática, favorecendo uma aprendizagem mais compreensível, lógica e significativa (Loh, 2019).

Segundo o autor, trata-se de uma solução "computationally-efficient, natural, and easy-to-remember" (Loh, 2019, p. 1). Loh observa ainda que nunca havia encontrado tal abordagem nos livros didáticos, mesmo sendo uma dedução simples: "I came up with a simple way to solve quadratic equations that I had never seen before . . . I was very surprised, as this method was easier to understand than what is typically written in textbooks" (Loh, 2020b).

Em sua pesquisa publicada no repositório acadêmico da Universidade de Cornell, Po-Shen Loh apresenta um método alternativo para a resolução de equações quadráticas, no qual detalha cada etapa do processo e propõe uma dedução baseada na simetria das raízes. Ao lado da nova proposta algébrica, Loh também revisita os conhecimentos desenvolvidos por civilizações antigas, como as culturas babilônica, chinesa e grega, que já se utilizavam de conceitos envolvendo médias e produtos para lidar com equações do segundo grau. Ao reconhecer essas contribuições, Loh estabelece uma conexão entre os fundamentos clássicos da Álgebra e sua proposta contemporânea, destacando que "many millennia before the modern quadratic formula, various ancient civilizations had already developed ingenious methods to solve quadratic equations" (Loh, 2020b).

Demonstração:

Figura 19 - Método de Po-Shen Loh com raízes reais



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Dada a equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$, onde o coeficiente de x^2 é igual a 1, considere r_1 e r_2 sendo as raízes desta equação, onde S é a soma das raízes e P o produto destas raízes. Resolver a equação pelo Método de Soma e Produto se torna extremamente simples dependendo dos valores de S e P.

Como apresentado na Seção 4.3, embora o método da soma e produto seja eficaz em muitos casos, ele nem sempre se mostra viável, especialmente quando os valores da soma S e do produto P dificultam a identificação direta das raízes. Neste contexto o Método de Po-Shen Loh, torna esse cálculo mais simples independente dos valores de S e P.

A resolução de equações quadráticas tem suas origens na Antiguidade, onde civilizações como a babilônica e a egípcia já utilizavam técnicas algébricas e geométricas para lidar com esse tipo de problema (Katz, 2009; Boyer,1991). O surgimento de fórmulas gerais para encontrar raízes, como a tradicional fórmula de Bhaskara, representou um avanço importante no desenvolvimento da Álgebra (Katz, 2009).

Mais recentemente, em 2019, o matemático Po-Shen Loh apresentou uma abordagem inovadora para resolver equações do segundo grau. Seu método se diferencia do clássico completar quadrados ao explorar a simetria das raízes e o conceito de média aritmética, oferecendo uma perspectiva mais intuitiva e conceitual para o ensino dessa matéria (Loh, 2019; Loh, 2020b). Além de proporcionar uma nova forma de entender as soluções quadráticas, essa abordagem também facilita a aprendizagem ao destacar princípios matemáticos fundamentais.

Método

Considere a equação do segundo grau na forma geral:

$$x^2 + bx + c = 0,$$

a qual é um caso particular da equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$, sob a restrição de que $a = 1$. O método de Loh se baseia na seguinte observação: as raízes r_1 e r_2 de uma equação quadrática são simétricas em torno de sua média aritmética. Definimos essa média como

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

e a distância de cada raiz até a média como s, isto é,

$$r_1 = m - s, \qquad r_2 = m + s$$

Com essas definições, temos:

$$r_1 + r_2 = 2m = -b \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{b}{2}$$
$$r_1 r_2 = (m - s)(m + s) = m^2 - s^2 = c$$

Assim, a distância s pode ser determinada por

$$s^2 = m^2 - c$$

e, portanto,

$$s = \sqrt{m^2 - c}$$

As soluções r_1 e r_2 são, então,

$$r_1 = m - s, \qquad r_2 = m + s$$

5.5.1 Enunciado do Método de Po-Shen Loh

Dada a equação quadrática $x^2 + bx + c = 0$, suas raízes podem ser obtidas da seguinte forma:

1. Calcule a média $m = -\frac{b}{2}$;
2. Calcule $s = \sqrt{m^2 - c}$;
3. As raízes são $r_1 = m - s$ e $r_2 = m + s$.

Demonstração Matemática do Método

Considerando a equação geral

$$x^2 + bx + c = 0$$

suas raízes r_1 e r_2 satisfazem:

$$r_1 + r_2 = -b$$
$$r_1 r_2 = c$$

Se representarmos as raízes como

$$r_1 = m - s, \quad r_2 = m + s$$

então:

$$r_1 + r_2 = (m - s) + (m + s) = 2m = -b \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{b}{2}$$
$$r_1 r_2 = (m - s)(m + s) = m^2 - s^2 = c \quad \Rightarrow \quad s^2 = m^2 - c$$

Logo, $s = \sqrt{m^2 - c}$ e as raízes podem ser determinadas por:

$$r_1 = m - s = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$r_2 = m + s = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

O método de Loh, portanto, recupera de maneira conceitual a fórmula quadrática tradicional:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mas com uma abordagem que enfatiza a simetria das raízes e sua relação com a média aritmética.

Essa demonstração evidencia que o método proposto por Po-Shen Loh não apenas conduz à obtenção das raízes da equação quadrática, como também oferece uma interpretação conceitual alternativa à fórmula tradicional.

Esse processo destaca, portanto, não apenas a validade matemática do procedimento, mas também seu valor pedagógico, por favorecer o raciocínio lógico e a visualização geométrica envolvida nas equações do segundo grau.

5.5.2 Exemplos Comentados

Exemplo 1: Resolver a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$:

- Identificamos $b = -6$ e $c = 5$.
- Calculamos a média:
$$m = -\frac{b}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$
- Calculamos s:
$$s = \sqrt{m^2 - c} = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$
- Assim, as raízes são:
$$r_1 = m + s = 3 + 2 = 5$$
$$r_2 = m - s = 3 - 2 = 1$$

Portanto, as soluções são $x = 1$ e $x = 5$.

Exemplo 2: Resolver a equação $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$:

- Identificamos $b = -4\sqrt{2}$ e $c = 6$.
- Calculamos a média:
$$m = \frac{-b}{2} = 2\sqrt{2}$$
- Calculamos s:
$$s = \sqrt{m^2 - c} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 6} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}$$
- Assim, as raízes são:
$$r_1 = m + s = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$r_2 = m - s = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Portanto, as soluções são $x = 3\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$.

Exemplo 3 (Raízes Complexas): Resolver a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$:

- Identificamos $b = -2$ e $c = 5$.
- Calculamos a média:
$$m = -\frac{b}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$$
- Calculamos s:
$$s = \sqrt{m^2 - c} = \sqrt{1^2 - 5} = \sqrt{-4} = 2i$$

- Assim, as raízes são:

$$r_1 = m + s = 1 + 2i$$
$$r_2 = m - s = 1 - 2i$$

As soluções são números complexos: $x = 1 + 2i$ e $x = 1 - 2i$.

O método de Po-Shen Loh destaca-se por sua elegância e simplicidade, oferecendo uma alternativa pedagógica que explora a simetria das raízes quadráticas e proporciona uma compreensão geométrica e conceitual mais profunda. Além disso, o método é flexível e pode ser aplicado a qualquer equação quadrática, incluindo aquelas com coeficientes complexos ou irracionais.

6 RELATO DE EXPERIÊNCIA: MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Neste capítulo, apresento um relato de experiência sobre a aplicação em sala de aula de métodos alternativos para a resolução de equações do segundo grau. Foram explorados três métodos específicos: o método geométrico de Al-Khwarizmi, o Método das Aspas Simples (ou Método da Lâmina) e o Método de Po-Shen Loh. A proposta foi implementada com alunos do Ensino Fundamental e Médio, buscando ampliar o repertório metodológico dos estudantes, incentivar uma compreensão mais profunda do conteúdo e promover uma aprendizagem mais significativa e reflexiva.

6.1 INTRODUÇÃO DA ATIVIDADE

As atividades relacionadas aos métodos alternativos para a resolução de equações do segundo grau foram desenvolvidas em duas instituições de ensino na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais: a Escola Municipal Amélia Mascarenhas e a Escola Estadual Duque de Caxias. A proposta foi implementada em quatro turmas, abrangendo duas do 9º ano do Ensino Fundamental e duas do 1º ano do Ensino Médio.

O objetivo primordial da iniciativa foi explorar abordagens variadas para a resolução de equações do segundo grau, ampliando o repertório dos estudantes e promovendo uma compreensão mais significativa desse conteúdo matemático. Tradicionalmente, o ensino tende a se concentrar na fórmula de Bhaskara como método exclusivo. Essa atividade visou demonstrar que há diversas maneiras de abordar o problema, tornando o aprendizado mais dinâmico e reflexivo.

A estrutura da atividade foi dividida em dois momentos. O primeiro, de caráter diagnóstico, propôs aos alunos a resolução de três equações do segundo grau, permitindo-lhes utilizar os métodos que julgassem mais adequados, sem orientação prévia. Essa etapa teve como objetivo identificar quais estratégias já estavam consolidadas no repertório dos discentes.

Na segunda etapa, foram apresentados três métodos alternativos de resolução: o método geométrico de Al-Khwarizmi, conhecido como “completar quadrados”; o método da lâmina (ou das aspas simples); e o procedimento desenvolvido por Poh-Shen Loh. Além de serem explorados em seus aspectos práticos, esses métodos foram contextualizados historicamente, proporcionando uma experiência de aprendizagem enriquecedora.

Nessa perspectiva, a abordagem adotada buscou estimular o pensamento matemático e evidenciar a multiplicidade de caminhos possíveis para a solução de um mesmo problema, promovendo um ensino mais amplo e investigativo.

6.2 OBJETIVOS

A atividade desenvolvida teve como principais objetivos:

- Diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da resolução de equações do segundo grau, identificando os métodos mais frequentemente utilizados e o nível de compreensão associado a cada abordagem;

- Apresentar métodos alternativos de resolução que possuam relevância histórica e conceitual, promovendo uma aprendizagem que transcenda a simples memorização mecânica de fórmulas;

- Estimular o pensamento crítico e a autonomia intelectual dos estudantes, incentivando a comparação entre diferentes estratégias de resolução e a reflexão sobre suas vantagens e limitações;

- Valorizar a história da Matemática como ferramenta pedagógica, evidenciando a diversidade de métodos desenvolvidos ao longo do tempo para a solução de um mesmo tipo de problema, ampliando a percepção dos alunos sobre a construção do conhecimento matemático.

6.3 ETAPAS DA ATIVIDADE

As atividades didáticas foram desenvolvidas ao longo de cinco aulas, cada uma com duração de 50 minutos, sendo aplicadas de forma semelhante nas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, em duas instituições públicas da cidade de Juiz de Fora (MG). A seguir, descreve-se detalhadamente cada etapa do trabalho pedagógico.

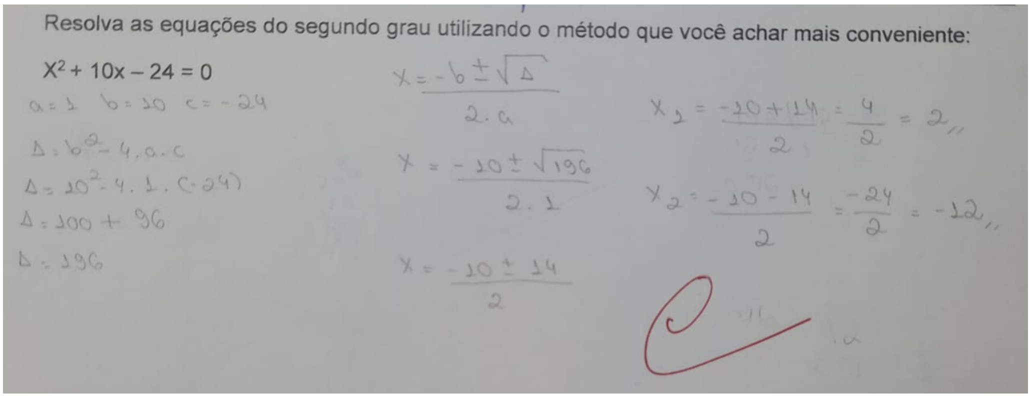
Aula 1: Diagnóstico Inicial e Contextualização Histórica (50 minutos)

A primeira aula teve início com uma breve contextualização histórica da Matemática, com foco no surgimento e desenvolvimento das equações do segundo grau, conforme discutido no Capítulo 3 desta dissertação. Em seguida, os estudantes receberam uma folha com três equações quadráticas, sendo orientados a resolvê-las da forma que julgassem mais adequada, sem intervenção direta da professora. Essa atividade inicial teve como objetivo diagnosticar os conhecimentos prévios e as estratégias já internalizadas pelos alunos.

Figura 20 - Alunos resolvendo equações quadráticas utilizando o método que desejassem empregar

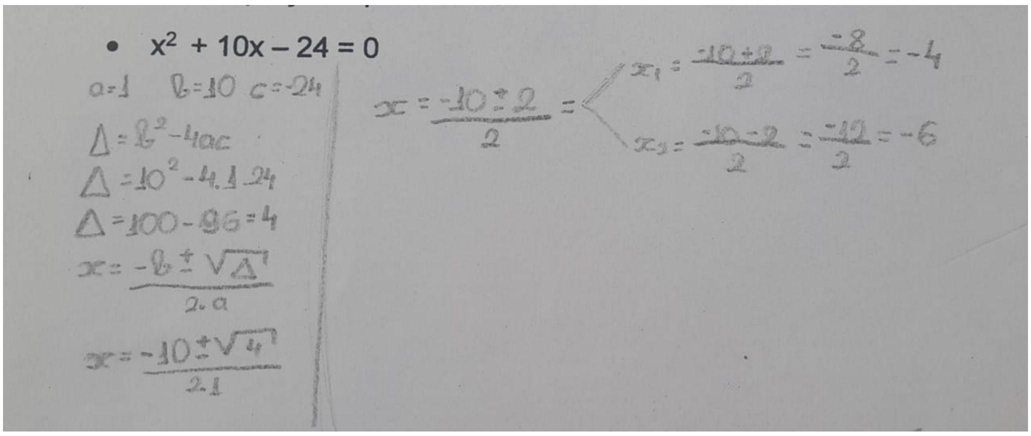
Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 21 - Equação resolvida de forma correta utilizando o fórmula quadrática



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 22 - Trata-se de uma equação que revela um erro comum entre os alunos ao multiplicarem números inteiros, errando o sinal do resultado, o aluno também utilizou a fómula quadrática



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Como esperado, a maioria optou por utilizar a fórmula tradicionalmente ensinada no contexto escolar brasileiro, comumente referida como "fórmula de Bhaskara". Alguns estudantes não recordavam o nome do método, enquanto outros o chamavam de "fórmula do delta", o que evidencia uma assimilação fragmentada e centrada em elementos isolados do processo, como o discriminante.

Partia-se da hipótese de que os estudantes não enfrentariam grandes dificuldades, considerando que o conteúdo havia sido trabalhado recentemente nas turmas do 9º ano e, no ano anterior, com os alunos do 1º ano do Ensino Médio. Contudo, observou-se que poucos alunos conseguiam recordar os procedimentos de forma clara e precisa. Vários apresentaram apenas uma noção vaga e, diante da dificuldade de recordar a fórmula, solicitaram auxílio docente.

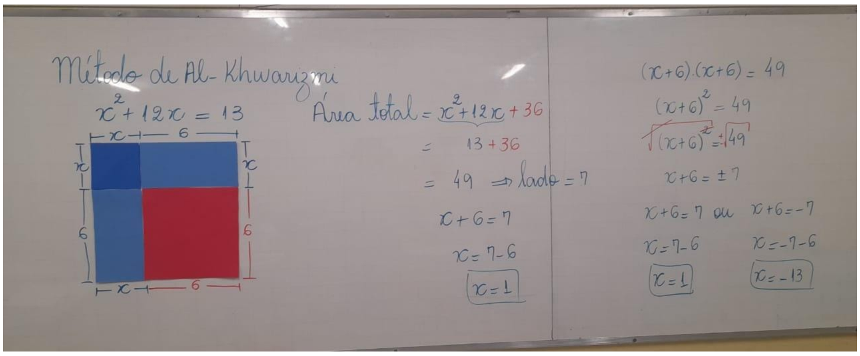
Esse diagnóstico revelou a fragilidade de um ensino pautado prioritariamente na memorização mecânica, que tende a se esvair com o tempo. Muitos alunos aparentavam ter decorado a fórmula apenas para atender a exigências avaliativas, sem, de fato, compreenderem os fundamentos matemáticos que a sustentam. Tal constatação reforça a necessidade de práticas pedagógicas que privilegiem o entendimento conceitual e o protagonismo discente na construção do conhecimento matemático.

Aula 2: Método de Al-Khwarizmi: Completamento de Quadrados (50 minutos)

A segunda aula foi dedicada à introdução do método de Al-Khwarizmi, baseado na técnica de completar quadrados. Com o objetivo de tornar o raciocínio geométrico mais acessível, foram utilizados materiais manipuláveis confeccionados em EVA, como quadrados e retângulos, permitindo uma abordagem visual e concreta, conforme descrito na Seção 5.3 desta dissertação.

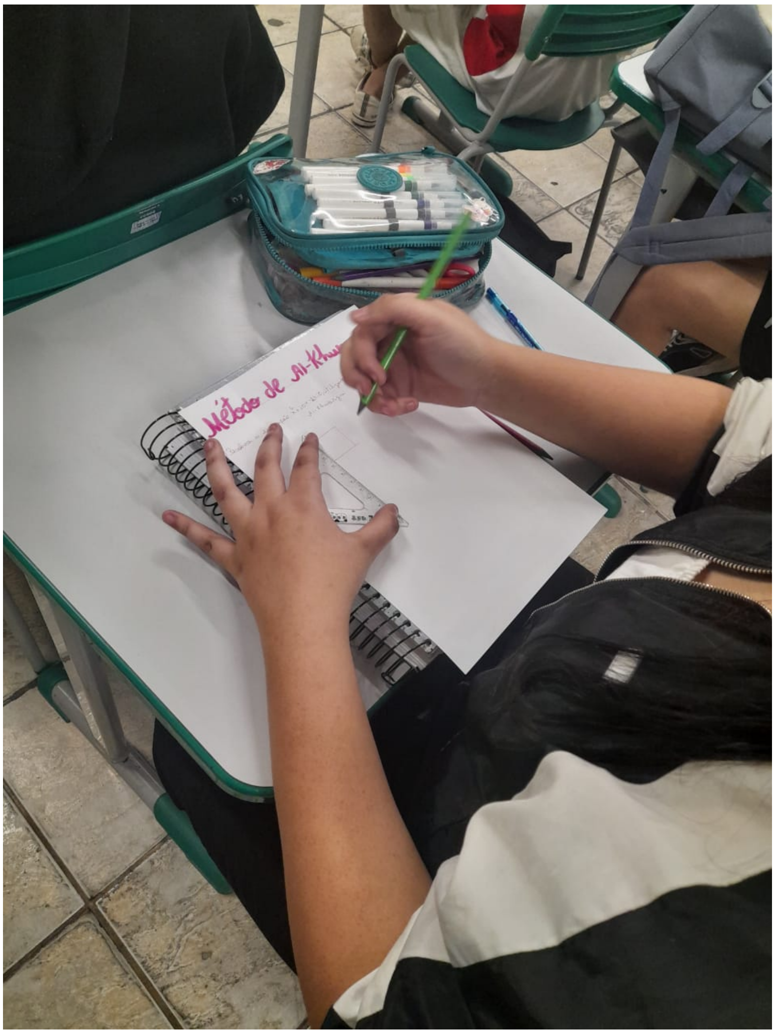
Após a explicação feita no quadro com o auxílio dos materiais, os estudantes receberam uma nova folha de atividades, na qual deveriam resolver equações do segundo grau por meio de desenhos que representassem as construções geométricas discutidas. A proposta visava explorar o raciocínio visual e estimular a percepção das relações entre as áreas envolvidas.

Figura 23 - Quadro com a explicação do método, utilizando E.V.A para construção dos quadrados e retângulos



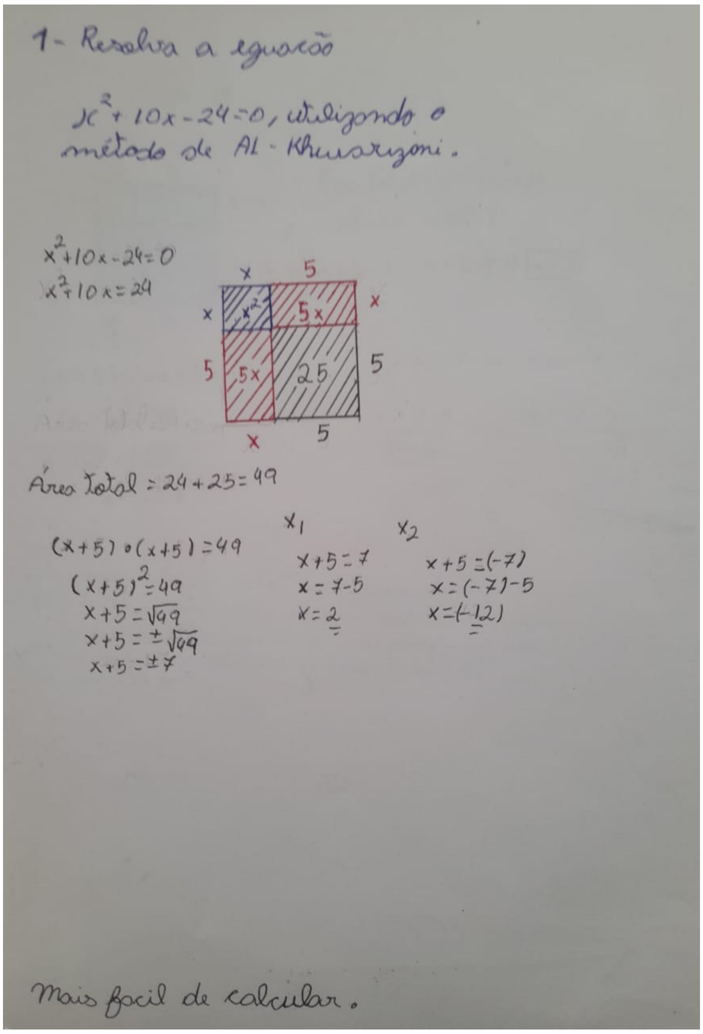
Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 24 - Aluno resolvendo equações utilizando o Método de Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 25 - Resolução de uma equação quadrática apresentada por um aluno utilizando o Método de Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

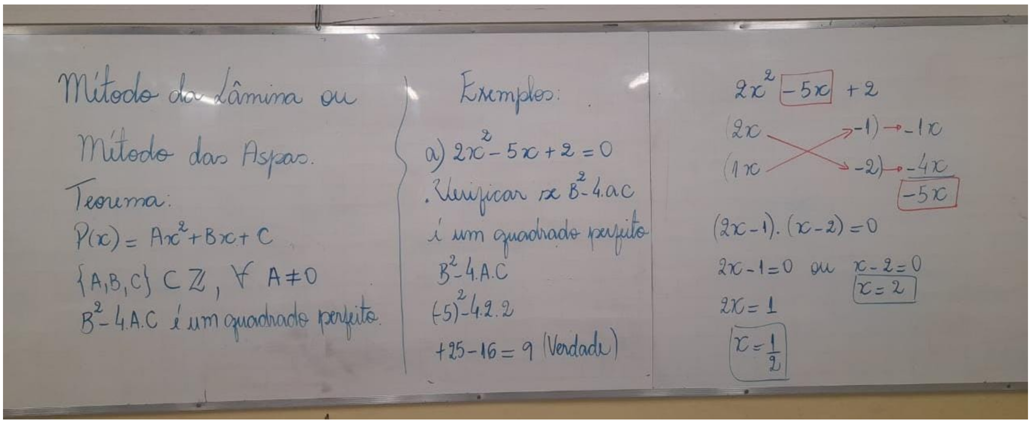
A ausência de fórmulas prontas e a simplicidade da abordagem despertaram grande interesse nos estudantes. Muitos demonstraram surpresa ao perceber que era possível resolver equações do segundo grau utilizando apenas construções geométricas, sem recorrer a expressões algébricas decoradas. A atividade favoreceu uma compreensão mais profunda do processo e promoveu o envolvimento efetivo da turma.

Diversos alunos relataram nunca terem tido contato com esse método de forma prática, embora ele seja ocasionalmente citado em livros didáticos. A experiência promoveu uma aprendizagem mais significativa e permitiu a construção de conexões intelectuais mais sólidas, ao evidenciar os fundamentos lógicos da resolução algébrica.

Aula 3: Método das Aspas Simples (ou da Lâmina) (50 minutos)

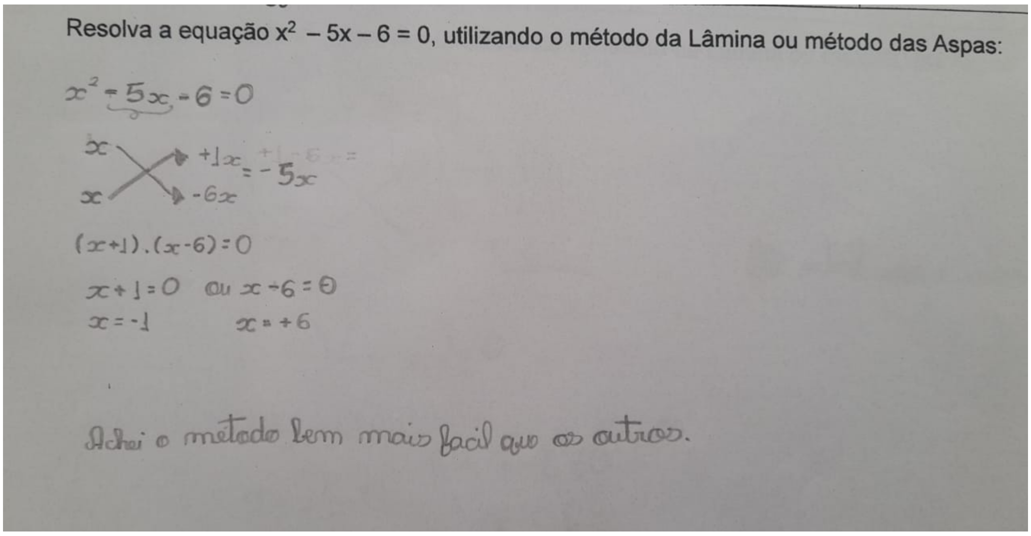
Na terceira aula, foi apresentado o chamado método das aspas simples, também conhecido como método da lâmina. A proposta consistia em reescrever a equação de forma fatorada, identificando diretamente suas raízes. A explicação foi feita por meio de exemplos resolvidos no quadro, seguida da distribuição de uma folha de atividades com equações para serem resolvidas utilizando essa abordagem.

Figura 26 - Quadro com a explicação do Método das Aspas Simples



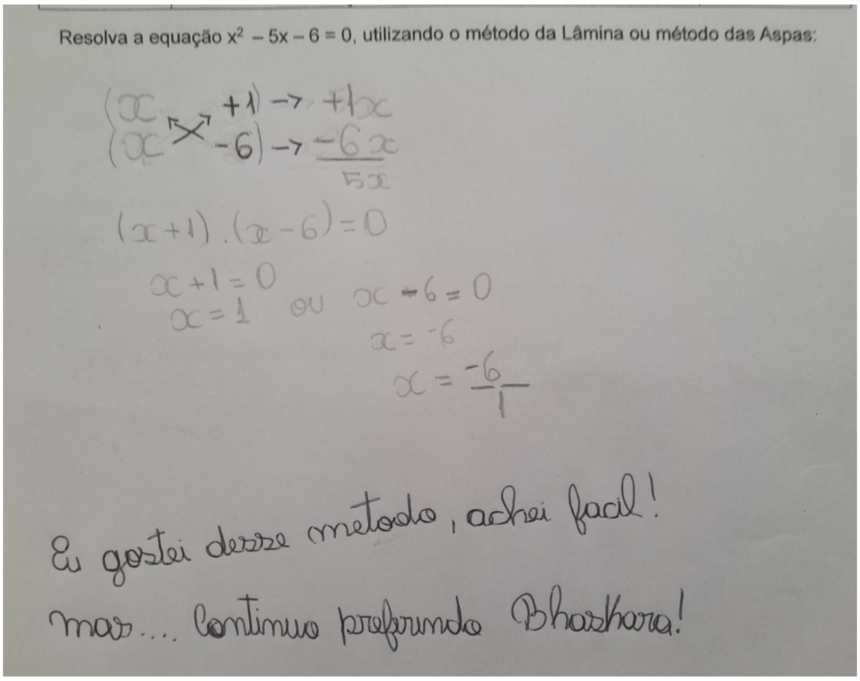
Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 27 - Resolução de uma equação quadrática apresentada por um aluno utilizando o Método das Aspas Simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 28 - Resolução de uma equação quadrática apresentada por um aluno utilizando o Método das Aspas Simples



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A recepção dos alunos foi bastante positiva. Muitos se mostraram entusiasmados com a simplicidade e eficiência do método, compreendendo rapidamente o procedimento e aplicando-o com sucesso. Esse resultado revela o potencial didático da fatoração como estratégia alternativa à fórmula tradicional, especialmente em equações com coeficientes inteiros e de fácil manipulação.

Houve relatos espontâneos de estudantes que buscaram mais informações sobre o método fora do ambiente escolar, mesmo enfrentando dificuldades para encontrar materiais disponíveis. Esse interesse evidencia o potencial das abordagens alternativas em despertar a curiosidade e fomentar a autonomia intelectual dos discentes. Foi, inclusive, o método com maior índice de acertos, contribuindo para o fortalecimento da autoconfiança dos alunos em relação à Matemática.

Aula 4: Introdução ao Método de Po-Shen Loh (50 minutos)

A quarta aula teve como foco a introdução ao método desenvolvido por Po-Shen Loh. Utilizou-se, inicialmente, o software GeoGebra para ilustrar graficamente a parábola associada a uma função quadrática e discutir visualmente o significado das soluções da equação. Essa abordagem proporcionou aos alunos uma compreensão mais clara da simetria da parábola e da média entre as raízes.

Em seguida, foi apresentada a dedução algébrica do método, conforme descrito na Seção 5.5, evidenciando sua base na simetria e na média aritmética das raízes. Explicou-se que, em uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, as raízes são equidistantes da média $-\frac{b}{2a}$, conceito que se mostrou intuitivo e acessível aos estudantes.

O interesse foi imediato, especialmente por se tratar de um método contemporâneo, desenvolvido por um matemático vivo, o que gerou identificação e curiosidade nos alunos. A proposta de reinterpretação da fórmula tradicional por meio de um raciocínio lógico e visual contribuiu para tornar o conteúdo mais significativo e atrativo.

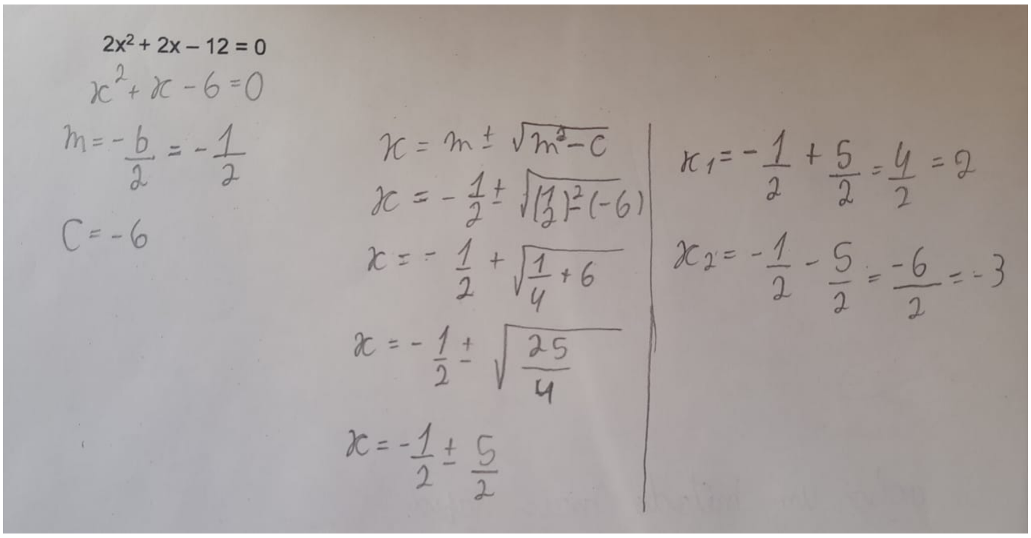
Aula 5: Aplicação Prática do Método de Po-Shen Loh (50 minutos)

Na quinta e última aula, os estudantes receberam uma nova lista de equações quadráticas para resolverem utilizando o método de Po-Shen Loh, com o intuito de consolidar os conhecimentos abordados na aula anterior. A atividade prática permitiu verificar a internalização do procedimento e a autonomia dos alunos na sua aplicação.

Figura 29 - Alunos resolvendo equações quadráticas utilizando o Método de Poh Shen Loh

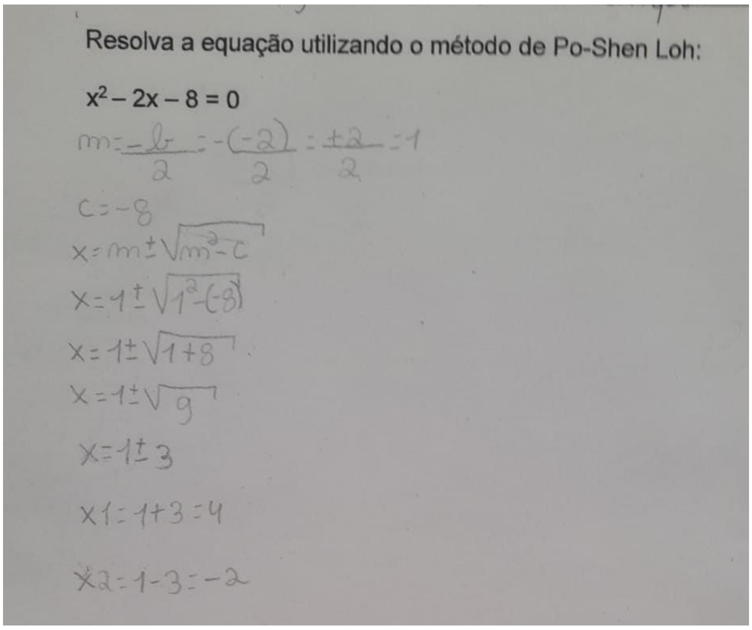
Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 30 - Resolução de uma equação quadrática apresentada por um aluno utilizando o Método de Poh-Shen Loh



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Figura 31 - Resolução de uma equação quadrática apresentada por um aluno utilizando o Método de Poh-Shen Loh



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Observou-se uma redução significativa na ocorrência de erros, em especial em equações que envolviam coeficientes negativos, indicando uma melhor compreensão dos conceitos subjacentes. O ambiente em sala tornou-se mais participativo, com os alunos demonstrando maior segurança e interesse na resolução dos problemas propostos.

Durante as atividades, diversos alunos relataram que, pela primeira vez, compreenderam de fato a origem da fórmula quadrática, superando a ideia de que a resolução dependia exclusivamente de memorização. Esse resultado revela o potencial do método de

Po-Shen Loh para promover uma aprendizagem significativa e desenvolver o pensamento matemático de forma mais crítica e reflexiva.

6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência descrita evidenciou o potencial pedagógico da abordagem baseada na diversidade de métodos para a resolução de equações do segundo grau, ultrapassando a tradicional aplicação da fórmula de Bhaskara. A apresentação de alternativas, como o método geométrico de Al-Khwarizmi, o método da lâmina e o método de Poh-Shen Loh, proporcionou aos alunos não apenas a ampliação de seu repertório matemático, mas também a oportunidade de desenvolver uma compreensão mais profunda e significativa do conteúdo, favorecendo uma aprendizagem mais reflexiva e crítica.

Ficou evidente, ao longo da atividade, que muitos estudantes viam a equação do segundo grau como um procedimento decorado, sem grande conexão com os conceitos que a fundamentam. Ao confrontarem diferentes estratégias de resolução, foram convidados a refletir, comparar, testar e argumentar, passando de uma postura passiva para uma atitude investigativa e ativa diante da Matemática. Essa mudança de postura está diretamente alinhada com os princípios da Educação Matemática crítica, que busca desenvolver, além das habilidades técnicas, a autonomia e a capacidade de reflexão (Skovsmose, 2000).

A concepção educacional apresentada por Freire (1996) ressalta a importância de um ensino que vá além da mera transmissão de informações, possibilitando um ambiente propício à construção ativa do conhecimento. Esse princípio ficou evidente na atividade ao permitir que os alunos escolhessem e comparassem diferentes métodos de resolução, favorecendo não apenas a assimilação do conteúdo matemático, mas também o fortalecimento de sua autonomia intelectual. Ao assumirem um papel protagonista em seus próprios processos de aprendizagem, os estudantes demonstraram maior engajamento e uma compreensão mais aprofundada dos conceitos trabalhados.

A variedade de métodos apresentados não teve a intenção de substituir o ensino tradicional, mas sim de desafiar a abordagem única e, por vezes, excludente que prevalece na prática pedagógica. Ao oferecer alternativas, a proposta buscou contemplar diferentes estilos de aprendizagem e formas de raciocínio, permitindo que cada aluno se identificasse com um caminho específico. Esse processo contribuiu para o fortalecimento da autoconfiança dos estudantes e para o estabelecimento de uma relação mais positiva com a Matemática.

A aprendizagem matemática se aprofunda quando o aluno consegue articular aspectos visuais, simbólicos e conceituais na resolução de problemas, promovendo uma compreensão mais integrada e significativa do conhecimento. A contextualização histórica dos métodos também demonstrou ser uma ferramenta poderosa. Ao situar cada estratégia no tempo e no espaço, os alunos puderam perceber que a Matemática é uma construção humana, dinâmica, plural e em constante transformação, como propõe D'Ambrosio (1996), ao defender uma Matemática que respeite as diversas formas culturais de pensar e resolver problemas.

Esse olhar cultural e histórico contribui para desmistificar a Matemática como um saber rígido ou inacessível, revelando-a como parte da experiência humana. Por fim, o aspecto mais significativo da atividade não se restringiu apenas à aquisição de novos métodos de resolução, mas à renovação do interesse, ao despertar da curiosidade e ao protagonismo evidenciado pelos alunos ao longo do processo.

A experiência ressaltou a relevância de uma Matemática que transcenda a mera técnica, valorizando o raciocínio lógico, o contexto histórico, a diversidade de abordagens e o respeito às individualidades. Ao explorar diferentes caminhos para a solução de um mesmo problema, ampliam-se as possibilidades de aprendizagem, reafirmando que a Matemática pode ser criativa, acessível e significativa para todos.

REFERÊNCIAS

1 AL-KHWARIZMI, Muhammad ibn Musa. **The algebra of Muhammad ben Musa**. Trad. Frederic Rosen. Londres: Oriental Translation Fund, 1831.

2 BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **A history of mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.

3 BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

4 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 01 jun. 2025.

5 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 07 fev. 2025.

6 BRASIL. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 01 jun. 2025.

7 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações, ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

8 D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática.17.ed. Campinas: Papirus, 1996.

9 EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004. 844p.

10 FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996. KATZ, Victor J. A history of mathematics: an introduction. 3. ed. Boston: Pearson, 2009.

11 GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da Matemática**: 9º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

12 KATZ, Victor J. **A history of mathematics**: an introduction. 3. ed. Boston: Pearson, 2009.

13 MICHAELIS, H. **Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2020.

14 PO-SHEN LOH. **A Simple Proof of the Quadratic Formula**. Artigo científico, 16 dez. 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1910.06709. Acesso em: 18 mar. 2025.

15 PO-SHEN LOH. **A New Way to Solve Quadratic Equations**. 2020b. Disponível em: https://poshenloh.com/quadratic/. Acesso em: 18 mar. 2025.

16 LOH, Po-Shen. **Po-Shen Loh Biography**. 2020a. Disponível em: https://poshenloh.com. Acesso em: 18 mar. 2025.

17 PRATA FILHO, G. A.; SAD, L. A.; THIENGO, E. R. Sistema de numeração Maia, Inca e Asteca: um pouco de matemática das civilizações pré-colombianas. **Research, Society and Development**, v. 11, n. 10, e145111032265, 2022. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/32265/27632. Acesso em: 04 fev. 2025.

18 RASHED, Roshdi. **Al-Khwarizmi, le commencement de l'Algèbre**. Paris: Librairie Scientifique Et Technique Albert Blanchard (Sciences Dans L'histoire), 2007.

19 RASHED, Roshdi. **The development of Arabic mathematics**: between arithmetic and algebra. New York: Springer, 1994.

20 ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

21 SAD, Lígia Arantes; LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo. História da matemática e o "fazer matemática" na educação básica. HISTEMAT – **Revista de História da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de História da Matemática**, Ano 4, n. 1, 2018.

22 RPM **Revista do Professor de Matemática**. A Fórmula é de Bhaskara? Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n.39, p.54, 1999. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/39/12.htm. Acesso em: 23 jun. 2025.

23 SAITO, Nélia M. M. A História da Matemática na formação de professores: possibilidades e limites. In: MENDONÇA, Maria Helena; SAITO, Nélia Maria M. (Orgs.). **História da Matemática e Formação de Professores**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

24 SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democratização do conhecimento. Campinas: Papirus, 2000.

APÊNDICE A - Caderno de atividades

Apresentação

Este Caderno de Atividades foi elaborado como material de apoio ao trabalho docente, reunindo sugestões de práticas pedagógicas que envolvem métodos alternativos para a resolução de equações do segundo grau. As propostas aqui apresentadas são voltadas a turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, podendo ser adaptadas conforme os objetivos específicos de cada turma e o nível de aprofundamento desejado.

O principal propósito deste material é explorar abordagens variadas para esse conteúdo, ampliando o repertório dos estudantes e promovendo uma compreensão mais significativa da Matemática. Tradicionalmente, o ensino tende a se concentrar na aplicação direta da fórmula quadrática como único caminho para a resolução de equações do segundo grau. Este caderno propõe uma ruptura com essa perspectiva única, buscando estimular o pensamento matemático, valorizar a diversidade de estratégias e incentivar um ensino mais investigativo, reflexivo e conectado com a história da Matemática.

As atividades foram pensadas com os seguintes objetivos:

- Diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da resolução de equações do segundo grau, identificando os métodos mais frequentemente utilizados e o nível de compreensão associado a cada abordagem;
- Apresentar métodos alternativos de resolução que possuam relevância histórica e conceitual, promovendo uma aprendizagem que transcenda a simples memorização mecânica de fórmulas;
- Estimular o pensamento crítico e a autonomia intelectual dos estudantes, incentivando a comparação entre diferentes estratégias de resolução e a reflexão sobre suas vantagens e limitações;
- Valorizar a história da Matemática como ferramenta pedagógica, evidenciando a diversidade de métodos desenvolvidos ao longo do tempo para a solução de um mesmo tipo de problema, ampliando a percepção dos alunos sobre a construção do conhecimento matemático.

As atividades propostas neste caderno foram adaptadas a partir do livro A Conquista da Matemática – 9º ano (edição de 2022), de Giovanni e Castrucci, respeitando seus contextos originais e integrando-os aos objetivos desta dissertação. Espera-se que este material contribua para enriquecer a prática pedagógica e possibilite aos estudantes uma vivência mais ampla, crítica e significativa da Matemática.

Atividades propostas:

Atividade 1: Resolva as equações do 2^{o} grau com uma incógnita no conjunto dos números reais.
(Orientar os alunos a escolherem livremente o método que desejarem utilizar).

a) $x^2 + 10x - 24 = 0$

b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

d) $x^2 + 12x + 32 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

f) $x^2 + 2x + 1 = 0$

g) $x^2 + 10x + 25 = 0$

2) Resolva os problemas:

a) O quadrado de um número real inteiro é igual a sete vezes o número menos 6.
Qual é esse número?

b) O quadrado da diferença entre um número real x e 3 é igual a cinco vezes o número x subtraído de 1.
Qual é esse número x?

c) Um terreno retangular tem $1\,100\,\text{m}^2$ de área. A medida da frente desse terreno tem 28 metros a menos que a medida da lateral.
Quais são as dimensões desse terreno?

Atividade 2: Realizar uma contextualização histórica sobre Al-Khwarizmi é fundamental para compreender a origem de conceitos fundamentais da Matemática.

Neste caderno, é apresentada uma atividade baseada em um de seus processos de resolução de equações do segundo grau, conforme detalhado na página 51. Esse método, conhecido como completamento de quadrados, consiste em transformar a equação em uma igualdade entre áreas de figuras geométricas, facilitando a identificação da solução.

Essa abordagem não apenas evidencia a lógica geométrica por trás da resolução, como também proporciona aos alunos uma conexão com a história da Matemática, destacando a evolução dos métodos algébricos ao longo do tempo.

Atividades propostas:

1) Usando o método geométrico de Al-Khwarizmi, determine as raízes de cada uma das seguintes equações do 2º grau com uma incógnita no conjunto dos números reais:

   a) $x^2 + 10x - 24 = 0$

   b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

   c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

   d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Atividade 3: Introdução ao Método das Aspas Simples ou Método da Lâmina

O método das Aspas Simples, também conhecido como método da lâmina ou, popularmente, método peruano, é uma estratégia alternativa para a resolução de equações do segundo grau por meio da fatoração de polinômios. Destaca-se por sua simplicidade e praticidade, o que o torna uma ferramenta acessível e eficaz em sala de aula.

A proposta central desse método consiste em reescrever a equação do segundo grau em sua forma fatorada, possibilitando a identificação direta de suas raízes, sem a necessidade de utilizar a fórmula quadrática tradicional. Ao trabalhar com esse procedimento, os alunos são incentivados a experimentar diferentes combinações numéricas e a desenvolver o raciocínio algébrico com base na observação de padrões e na análise estrutural dos polinômios.

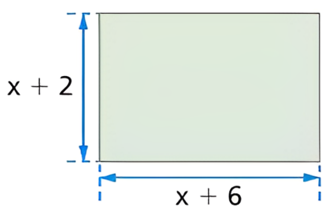
No contexto deste caderno de atividades, o método das Aspas Simples é apresentado como uma alternativa pedagógica valiosa, contribuindo para a diversificação das estratégias de ensino e para a promoção de uma aprendizagem mais significativa, crítica e investigativa das equações do segundo grau.

Uma aplicação mais detalhada desse método encontra-se na página 59 desta dissertação.

Atividades propostas:

1) Um painel retangular tem 140 m2 de área. As medidas dos lados desse painel, em metros, estão indicadas na figura.

Figura 28 - Exercício 1/ atividade 3



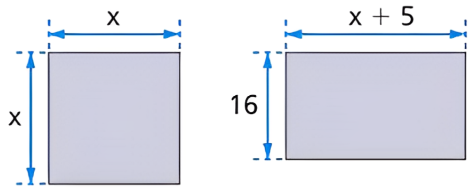
Fonte: Livro A Conquista da Matemática 9º ano, p.105

a) Quais são as medidas dos lados desse painel?

b) Formule uma pergunta relacionada à figura. Troque de caderno com um colega e cada um responde a pergunta que o outro criou.

2) O quadrado e o retângulo seguintes têm a mesma área.

Figura 29 - Exercício 2/ atividade 3



Fonte: Livro A Conquista da Matemática 9º ano, p.105

a) Qual é a medida do lado e o perímetro do quadrado?

b) Qual é o perímetro do retângulo?

Atividade 4: Introdução ao Método de Po-Shen Loh

Em 2019, o matemático e educador Po-Shen Loh apresentou uma proposta inovadora para a resolução de equações do segundo grau, fundamentada na ideia de simetria das raízes de uma parábola. Essa abordagem, ao mesmo tempo simples e elegante, oferece uma alternativa conceitualmente rica à tradicional fórmula quadrática, destacando relações estruturais entre os coeficientes da equação e suas soluções.

Po-Shen Loh é amplamente reconhecido por seu compromisso com o ensino da Matemática de forma criativa e acessível. Sua metodologia valoriza o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e da habilidade de resolver problemas, aspectos essenciais não apenas para a compreensão das equações quadráticas, mas também para uma aprendizagem matemática mais profunda e significativa.

Uma aplicação mais detalhada desse método encontra-se na página 66 desta dissertação.

Atividades propostas:

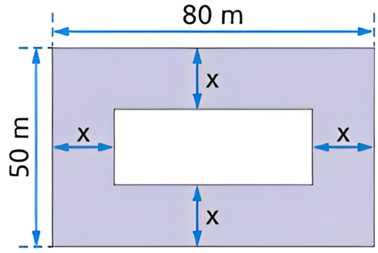
1) Determine as raízes de cada uma das equações a seguir, utilizando o método de Po-Shen Loh:

   a) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 3 = 0$

   b) $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$

2) Em um terreno retangular de 80 m por 50 m, foi construído um depósito que ocupa uma área de 1 000 m^2. Nesse depósito, há uma faixa de x metros de largura, destinada ao embarque de produtos, conforme indicado na figura. Qual é a medida de x?

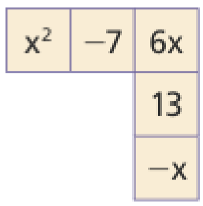
Figura 30 - Exercício 2/ atividade 4



Fonte: Livro A Conquista da Matemática 9º ano, p.105

3) Na figura a seguir, a soma dos números que estão na linha é igual à soma dos números que estão na coluna. Quais são os valores reais que tornam verdadeira essa afirmação?

Figura 31 - Exercício 3/ atividade 4

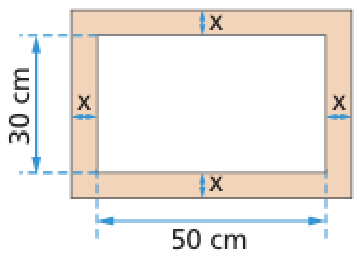


Fonte: Livro A Conquista da Matemática 9º ano, p.105

4) A tela retangular mede 50 cm × 30 cm. Nessa tela, foi colocada uma moldura de largura x.

Calcule x, sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de 2 400 cm^2.

Figura 32 - Exercício 4/ atividade 4



Fonte: Livro A Conquista da Matemática 9º ano, p.105