

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP**  
**Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto**

**LEONARDO BACCO STEIN**

**USO DO JOGO “BATALHA DO MDC” NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DO MÁXIMO DIVISOR  
COMUM**

São José do Rio Preto

2026



**LEONARDO BACCO STEIN**

**USO DO JOGO “BATALHA DO MDC” NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DO MÁXIMO DIVISOR  
COMUM**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Évelin Menegusso Barbaresco.

São José do Rio Preto

2026

S819u Stein, Leonardo Bacco  
Uso do jogo "Batalha do MDC" na perspectiva da Resolução de Problemas como recurso para o ensino do máximo divisor comum / Leonardo Bacco Stein. -- São José do Rio Preto, 2026  
77 p. + objeto educacional

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Évelin Meneguesso Barbaresco

1. Matemática. 2. Jogos no ensino de matemática. 3. Resolução de problemas. I. Título.

**LEONARDO BACCO STEIN**

**USO DO JOGO “BATALHA DO MDC” NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DO MÁXIMO DIVISOR  
COMUM**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Data da defesa: 05/03/2026

Banca Examinadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Évelin Meneguesso Barbaresco (Orientadora)  
UNESP – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Souza Machado da Silva  
UNESP – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Francielle Rodrigues de Castro Coelho  
UFU – Instituto de Matemática e Estatística – Campus Santa Mônica

Dedico este trabalho a todos que caminharam ao meu lado ao longo desta trajetória, oferecendo apoio, incentivo e compreensão nos momentos de desafio.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, pela vida, pela saúde e pela força ao longo desta caminhada, tornando possível a conclusão de mais esta etapa.

À minha família, pelos valores ensinados, pelo apoio incondicional e por, desde sempre, mostrar a importância do papel da educação para a transformação social e para a construção da cidadania.

Ao meu companheiro, pelo apoio constante, pela paciência, pelo incentivo nos momentos de dificuldade e por estar presente em cada etapa desta trajetória, tornando o caminho mais leve e significativo.

À minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Évelin Menegusso Barbaresco, pelas contribuições valiosas, pela dedicação e pela confiança depositada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Às professoras que gentilmente aceitaram compor a Banca Examinadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia da Silva Machado (UNESP – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – São José do Rio Preto) e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Francielle Rodrigues de Castro Coelho (UFU – Instituto de Matemática e Estatística – Uberlândia), pela disponibilidade e pelas importantes contribuições para o aprimoramento desta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – São José do Rio Preto), pela formação acadêmica proporcionada e pelo suporte oferecido ao longo desses anos.

Aos professores do programa, pelos ensinamentos, discussões e experiências compartilhadas, que contribuíram significativamente para minha formação profissional e acadêmica.

Aos meus alunos, que participaram da aplicação da atividade, cuja colaboração e envolvimento foram essenciais para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta didática para o ensino do conceito de máximo divisor comum (MDC), por meio da utilização do jogo “Batalha do MDC” sob a perspectiva da metodologia de Resolução de Problemas. A pesquisa parte da constatação de dificuldades recorrentes dos estudantes na compreensão de conceitos relacionados à divisibilidade, evidenciando a necessidade de estratégias pedagógicas que favoreçam a construção significativa do conhecimento matemático a respeito desse conteúdo. Inicialmente, são abordados os conceitos fundamentais dos números naturais, que constituem a base teórica para o desenvolvimento da proposta. Em seguida, discute-se o uso de jogos como recurso didático no ensino de Matemática, destacando seu potencial investigativo, argumentativo e formativo quando articulado à metodologia de Resolução de Problemas. Por fim, apresenta-se o produto educacional elaborado, uma sequência didática sobre o uso do jogo “Batalha do MDC”, bem como o relato de sua aplicação em turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, evidenciando suas contribuições para a compreensão do conceito do máximo divisor comum.

**Palavras-chave:** máximo divisor comum; jogos matemáticos; metodologia de resolução de problemas; ensino de matemática.

## ABSTRACT

This study aims to present a didactic proposal for teaching the concept of the Greatest Common Divisor (GCD) through the use of the game “*GCD Battle*” from the perspective of the Problem-Solving methodology. The research is based on the observation of recurring student difficulties in understanding concepts related to divisibility, highlighting the need for pedagogical strategies that foster the meaningful construction of mathematical knowledge on this topic. Initially, the fundamental concepts of natural numbers are addressed, providing the theoretical foundation for the development of the proposal. Subsequently, the use of games as a didactic resource in Mathematics Education is discussed, emphasizing their investigative, argumentative, and formative potential when articulated with the Problem-Solving methodology. Finally, the educational product developed is presented, consisting of a didactic sequence centered on the “*GCD Battle*” game, as well as a report of its implementation in sixth-grade elementary school classes, evidencing its contributions to the understanding of the Greatest Common Divisor concept.

**Keywords:** greatest common divisor; mathematical games; problem-solving methodology; mathematics education.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Materiais do jogo	48
Figura 2 – Tabela de Registros	48
Figura 3 – Regras do jogo entregue aos alunos	50
Figura 4 – Alunos fazendo a leitura das regras do jogo	57
Figura 5 – Alunos interagindo durante a execução do jogo	58
Figura 6 – Alunos observando situação particular do jogo	59
Figura 7 – Aluna preenchendo a Tabela de Registros	60
Figura 8 – Projeção da Tabela de Registros	61
Figura 9 – Projeção da Tabela de Registros com números iniciais pares	62
Figura 10 – Projeção da Tabela de Registros com números iniciais múltiplos entre si	63
Figura 11 – Projeção da Tabela de Registros com a lista de divisores de cada valor inicial	64
Figura 12 – Alteração nas regras do jogo	65
Figura 13 – Projeção da Tabela de Registros com a notação do MDC	66

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2 CONTEÚDOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS AO JOGO.....</b>	<b>12</b>
2.1 A CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS NATURAIS .....	12
2.2 ADIÇÃO EM $\mathbb{N}$ .....	14
2.2.1 Definição .....	14
2.2.2 Propriedades da Adição.....	15
2.3 MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{N}$ .....	17
2.3.1 Definição .....	17
2.3.2 Propriedades da Multiplicação .....	18
2.4 RELAÇÃO DE ORDEM EM $\mathbb{N}$ .....	21
2.4.1 Definição .....	21
2.4.2 Propriedades da Relação de Ordem .....	22
2.5 DIVISIBILIDADE EM $\mathbb{N}$ .....	25
2.5.1 Definição .....	25
2.5.2 Propriedades da Divisibilidade .....	26
2.5.3 Algoritmo Euclidiano da Divisão.....	27
2.5.4 Máximo Divisor Comum (MDC).....	29
2.5.5 Números primos .....	33
2.5.6 Critérios de divisibilidade .....	37
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....</b>	<b>40</b>
3.1 O JOGO COMO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM E INVESTIGAÇÃO.....	41
3.2 USO DE JOGOS NA PERSPECTIVA DA METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	42
3.3 A PERSPECTIVA DOS DOCUMENTOS OFICIAIS SOBRE JOGOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	44
3.4 CONCLUSÃO .....	47
<b>4 O JOGO “BATALHA DO MDC” .....</b>	<b>48</b>
4.1 DESCRIÇÃO DO JOGO .....	49
4.2 PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE .....	52
4.2.1 Primeiro encontro: Compreensão das regras e execução do jogo.....	52
4.2.2 Segundo encontro: Questionamentos para exploração do conteúdo.....	53

4.2.3 Terceiro encontro: Formalização do conceito.....	55
4.3 RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE .....	57
4.3.1 Primeiro encontro.....	57
4.3.2 Segundo encontro.....	62
4.3.3 Terceiro encontro .....	66
<b>5 CONCLUSÃO.....</b>	<b>70</b>
REFERÊNCIAS .....	71
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	72
APÊNDICE A – MATERIAIS DO JOGO.....	73
APÊNDICE B – REGRAS DO JOGO.....	76
APÊNDICE C – QUESTIONAMENTOS .....	77

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental apresenta desafios recorrentes, especialmente no que se refere à compreensão de conceitos abstratos e à construção de significados pelos alunos. Tal dificuldade pode ser compreendida pelo fato de que a Matemática escolar, frequentemente desvinculada de contextos significativos e de suas motivações históricas, acaba por se tornar pouco atrativa e distante da realidade dos alunos.

“É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico.”  
(D’AMBROSIO, 2012, P. 29)

Conteúdos relacionados aos números naturais, apesar de introduzidos desde os anos iniciais da escolarização, continuam a demandar abordagens pedagógicas que favoreçam a compreensão conceitual, o raciocínio lógico e a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, uma vez que a simples repetição de procedimentos não garante a construção efetiva de significados. Nesse sentido, torna-se fundamental buscar estratégias pedagógicas que ultrapassem a mera reprodução de procedimentos e promovam uma aprendizagem mais significativa.

“Apesar da grande e reconhecida importância da Matemática, quer pelo desenvolvimento de raciocínio que proporciona ao aluno, quer por suas aplicações nos problemas da vida diária, em geral os alunos, logo nos primeiros contatos com essa ciência, começam a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela. Isso pode ser atribuído ao exagero no treino de algoritmos e regras desvinculados de situações reais, além do pouco envolvimento do aluno com aplicações da Matemática que exijam o raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las.” (DANTE, 1989, p.13)

Uma alternativa a esse cenário consiste na utilização de jogos como recurso didático em sala de aula. Quando inseridos de forma planejada e articulados aos objetivos de aprendizagem, os jogos possibilitam a criação de situações-problema que estimulam o desenvolvimento do raciocínio lógico, a elaboração de estratégias, a tomada de decisões e a reflexão sobre os

próprios erros e acertos. Além disso, favorecem a interação entre os alunos, o trabalho em grupo e o desenvolvimento da autonomia, aspectos essenciais para a formação geral do aluno.

Esta dissertação tem como objetivo investigar as contribuições do uso de jogos matemáticos no ensino de conceitos aritméticos direcionados aos anos finais do Ensino Fundamental, com ênfase em conteúdos relacionados à divisibilidade, ao máximo divisor comum e também à decomposição de números em fatores primos. A proposta parte da compreensão de que a aprendizagem matemática pode ser potencializada quando o aluno é colocado em situação de ação, reflexão e diálogo, assumindo papel ativo na construção do seu conhecimento.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido em uma escola da rede municipal de ensino, envolvendo alunos de duas turmas do sexto ano do Ensino Fundamental. A intervenção pedagógica foi organizada em encontros nos quais um jogo matemático, desenvolvido pelo autor, denominado “Batalha do MDC” foi utilizado como eixo estruturante das atividades. As observações realizadas durante a aplicação, bem como as produções dos alunos, constituem o material de análise deste estudo.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresenta-se a fundamentação matemática necessária para a compreensão dos conceitos abordados na proposta pedagógica; no segundo capítulo, discute-se o uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem no contexto escolar; no terceiro capítulo, descreve-se a atividade desenvolvida, bem como o relato e a análise da aplicação do jogo; por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho, retomando os principais resultados e reflexões.

## 2 CONTEÚDOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS AO JOGO

Neste capítulo, será apresentada a fundamentação dos conceitos matemáticos que sustentam a proposta pedagógica subsequente. A construção teórica deste capítulo tem como principais referências Domingues (1991), Oliveira; Fernández (2010) e Hefez (2011). O objetivo central é estabelecer uma base teórica rigorosa para o conjunto dos números naturais, partindo da construção axiomática proposta por Giuseppe Peano.

A discussão abordará, inicialmente, a formulação moderna dos Axiomas de Peano, que inclui o zero como primeiro número natural, seguindo pela definição e propriedades das operações de adição e multiplicação, além da relação de ordem no conjunto dos números naturais. Serão apresentados também a noção de divisibilidade, dando destaque ao máximo divisor comum (MDC) entre dois números naturais, e os principais critérios que permitem verificar de forma prática quando um número é divisível por outro. Em seguida, será explorado o conceito de números primos e sua relação com a decomposição de um número qualquer em fatores primos, destacando-se o papel central desse conceito na determinação do máximo divisor comum.

Dentre os métodos para a determinação do MDC, será destacada a propriedade associada ao Lema de Euclides, expressa pela identidade  $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$ , cuja eficiência para o cálculo a torna especialmente relevante no ensino do conteúdo abordado. Trata-se de um procedimento eficiente, sistemático e conceitualmente rico, que permite ao estudante compreender a divisibilidade para além da aplicação mecânica de regras, favorecendo a construção do raciocínio lógico. Apesar de sua importância, esse método ainda é pouco explorado na prática escolar, sendo frequentemente substituído por algoritmos descontextualizados, que pouco contribuem para a compreensão do conteúdo. Nesse sentido, a propriedade supracitada constitui o eixo central da proposta pedagógica desta dissertação, por se apresentar como uma estratégia prática e potencialmente significativa para o ensino do máximo divisor comum no contexto da Educação Básica.

### 2.1 A construção axiomática dos números naturais

Com o objetivo de fundamentar logicamente a aritmética, Giuseppe Peano (1858–1932) propôs, no final do século XIX, uma formulação axiomática para os números naturais, enunciando um conjunto de afirmações que conhecemos atualmente como *Axiomas de Peano*.

Na formulação original de Peano, o número 1 é tomado como primeiro número natural.

No entanto, nas formulações modernas, como em Domingues (1991), especialmente quando integradas à linguagem moderna da lógica e da teoria dos conjuntos, é comum considerarmos o zero como primeiro número natural. A seguir, temos os axiomas de Peano:

$A_1$ : Zero é um número natural.

$A_2$ : Se  $a$  é um número natural, então  $a$  tem um único sucessor que também é um número natural.

$A_3$ : Zero não é sucessor de nenhum número natural.

$A_4$ : Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

$A_5$ : Se uma coleção  $S$  de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de  $S$ , então  $S$  é o conjunto de todos os números naturais.

Usaremos a notação  $0$  para indicar o zero,  $a^+$  para indicar o sucessor de um número natural  $a$  e  $\mathbb{N}$  para denotar o conjunto dos números naturais. Assim, podemos reescrever os axiomas da seguinte maneira:

$A_1$ :  $0 \in \mathbb{N}$

$A_2$ :  $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \in \mathbb{N}$

$A_3$ :  $\forall a \in \mathbb{N}, a^+ \neq 0$

$A_4$ :  $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$

$A_5$ : Se  $S \subset \mathbb{N}$ ,  $0 \in S$  e  $a \in S \Rightarrow a^+ \in S$ , então  $S = \mathbb{N}$ .

**Proposição 1:** Se  $a \in \mathbb{N}$ , então  $a^+ \neq a$ .

**Demonstração:** Seja  $S = \{a \in \mathbb{N} \mid a^+ \neq a\}$ , ou seja, o conjunto dos números naturais que são diferentes dos seus sucessores. Pelo axioma  $A_3$ ,  $0$  não é igual a  $0^+$ .

Logo,  $0 \in S$ .

Seja  $a \in S$ . Então  $a^+ \neq a$  e, pela contrapositiva do axioma  $A_4$ , temos  $(a^+)^+ \neq a^+$ .

Logo,  $a^+ \in S$ . Pelo axioma  $A_5$ , concluímos que  $S = \mathbb{N}$ . Portanto,  $a^+ \neq a$  para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 2:** Se  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ , então existe  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $a^+ = b$ .

**Demonstração:** Seja  $S = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{N} \mid y \neq 0 \text{ e } x^+ = y, \text{ para algum } x \in \mathbb{N}\}$ .

Pela construção, temos  $0 \in S$  e  $0^+ \in S$ . Agora, se  $a \in S$  e  $a \neq 0$ , então  $a = b^+$  para algum  $b \in \mathbb{N}$ . Então, temos que  $a^+ = (b^+)^+$  e, portanto,  $a^+ \in S$ .

Pelo axioma  $A_5$ , temos então  $S = \mathbb{N}$  e, portanto, a proposição é verdadeira.

**Proposição 3 (Princípio de Indução Finita):** Suponhamos que a todo número natural  $n$  esteja associada uma afirmação  $P(n)$  tal que:

i)  $P(0)$  é verdadeira.

ii) Para todo  $r \geq 0$ , se  $P(r)$  é verdadeira então  $P(r^+)$  também é verdadeira.

Então,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Basta tomar  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$  e observar que  $0 \in S$  pois  $P(0)$  é verdadeira pela hipótese (i). Além disso, tomando  $n \in S$ , temos que  $P(n)$  é verdadeira e, então,  $P(n^+)$  é verdadeiro por (ii). Logo,  $n^+ \in S$ .

Portanto, pelo axioma  $A_5$ , temos que  $S = \mathbb{N}$  e assim,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Observação:** A condição (ii) da proposição anterior é comumente denominada como hipótese de indução (HI).

## 2.2 Adição em $\mathbb{N}$

### 2.2.1 Definição

**Definição 1:** A operação *adição*  $(a, b) \rightarrow a + b$  em  $\mathbb{N}$  é definida mediante as seguintes condições:

i)  $a + 0 = a$

ii)  $a + b^+ = (a + b)^+$

Na igualdade  $a + b = c$  denominamos  $a$  e  $b$  por *parcelas* e  $c$  por *soma*.

Naturalmente, usaremos a notação  $0^+ = 1, 1^+ = 2, 2^+ = 3, \dots, n^+ = n + 1$ .

Esta última é válida, pois  $n^+ = (n + 0)^+ = n + 0^+ = n + 1$ .

Exemplos:

$$1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$$

$$1 + 2 = 1 + 1^+ = (1 + 1)^+ = 2^+ = 3$$

$$1 + 3 = 1 + 2^+ = (1 + 2)^+ = 3^+ = 4$$

$$1 + 4 = 1 + 3^+ = (1 + 3)^+ = 4^+ = 5$$

Desse modo, podemos denotar o conjunto dos números naturais por  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e também  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

**Proposição 4:** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $0 + a = a$ .

**Demonstração:** Mostraremos, usando o Princípio de Indução Finita (PIF) sobre  $a$ , que a afirmação é verdadeira para todo número natural.

Para o caso  $a = 0$ , temos que  $0 + a = 0 + 0 = 0$ , pela definição da adição. Como  $a = 0$ , segue que  $0 + a = a$ .

Agora, supondo, por hipótese de indução, que exista algum  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $0 + r = r$ , vamos mostrar que o mesmo acontece para  $r^+$ .

De fato, da definição de adição, temos que  $0 + r^+ = (0 + r)^+$  e  $0 + r = r$  pela hipótese de indução. Portanto,  $0 + r^+ = r^+$ , como queríamos demonstrar.

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos que a proposição é verdadeira para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 5:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Então,  $b + a^+ = b^+ + a$ .

**Demonstração:** Mostremos por indução sobre  $a$ .

Para  $a = 0$ , temos  $b + 0^+ = (b + 0)^+ = b^+ = b^+ + 0$ .

Suponhamos, por hipótese de indução, que a proposição é verdadeira para algum  $r \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $b + r^+ = b^+ + r$ .

Temos, para  $(r^+)^+$ , que  $b + (r^+)^+ = (b + r^+)^+$ .

Logo, pela hipótese de indução, temos que  $b + (r^+)^+ = (b + r^+)^+ = (b^+ + r)^+$ .

Pela definição de adição,  $(b^+ + r)^+ = b^+ + r^+$ .

Portanto, temos que  $b + (r^+)^+ = b^+ + r^+$ , como queríamos demonstrar.

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a proposição é verdadeira para todo  $a, b \in \mathbb{N}$ .

## 2.2.2 Propriedades da adição

A operação de adição no conjunto dos números naturais possui as seguintes propriedades:

**Propriedade 1 (Associativa):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Então,  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .

**Demonstração:** Mostremos, usando o princípio de Indução Finita sobre  $c$ , que a afirmação é verdadeira para todo número natural.

Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Para  $c = 0$ , temos  $a + (b + 0) = a + b = (a + b) + 0$ .

Agora, supondo que exista  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $(a + b) + r = a + (b + r)$ , queremos mostrar que o mesmo acontece para  $r^+$ .

De fato,  $(a + b) + r^+ = [(a + b) + r]^+ = [a + (b + r)]^+ = a + (b + r)^+ = a + (b + r^+)$ .  
 Portanto, pelo Princípio de Indução Finita,  $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 2 (Comutativa):** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Então,  $a + b = b + a$ .

**Demonstração:** Usaremos novamente o Princípio de Indução Finita sobre  $b$  para mostrar que a proposição é válida para todo o conjunto dos números naturais.

Dado  $a \in \mathbb{N}$ , para o caso  $b = 0$ , temos  $a + 0 = a$  e também  $0 + a = a$ , pela proposição 4.

Logo,  $a + 0 = 0 + a$ .

Agora, supondo que exista  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $a + r = r + a$ , vamos mostrar que o mesmo se aplica para  $r^+$ .

De fato, pela definição,  $a + r^+ = (a + r)^+$  e, pela hipótese de indução, segue que

$$(a + r)^+ = (r + a)^+ = r + a^+.$$

Portanto, temos que  $a + r^+ = r + a^+$ .

Agora, pela proposição 5, temos que  $r + a^+ = r^+ + a$ .

Logo,  $a + r^+ = r^+ + a$ .

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita,  $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 3 (Elemento neutro):** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $a + 0 = a$  e  $0 + a = a$ .

**Demonstração:** Da definição da adição, segue que para todo  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a + 0 = a$ .

Pela propriedade 2 demonstrada anteriormente, temos que  $0 + a = a + 0 = a$ .

Mostremos agora que  $0$  é o único elemento no conjunto dos números naturais, que satisfaz tal propriedade.

Suponha que exista  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a + n = n + a = a, \forall a \in \mathbb{N}$ .

Temos, em particular, que  $0 + n = n + 0 = 0$ , o que implica em  $n = 0$ .

Logo,  $0$  é o único elemento em  $\mathbb{N}$  que satisfaz  $a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 4 (Lei do cancelamento da adição):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Temos que

$$a + b = a + c \implies b = c.$$

**Demonstração:** Demonstraremos essa propriedade usando indução sobre  $a$ .

Para o caso em que  $a = 0$ , temos

$$a + b = a + c \implies 0 + b = 0 + c \implies b = c.$$

Agora, supondo, pela hipótese de indução, que para algum  $r \in \mathbb{N}$  é válido que

$$r + b = r + c \implies b = c,$$

vamos mostrar que o mesmo acontece com  $r^+$ .

De fato,  $r^+ + b = r^+ + c \Rightarrow b + r^+ = c + r^+ \Rightarrow (b + r)^+ = (c + r)^+$ .

Do axioma  $A_4$ , segue que  $b + r = c + r$  e, pela hipótese de indução, temos que  $b = c$ , como queríamos demonstrar.

Portanto, pelo PIF,  $a + b = a + c \Rightarrow b = c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 5:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Se  $a + b = 0$  então  $a = b = 0$ .

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que  $b \neq 0$ . Então, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b = n^+$ .

Logo,

$$0 = a + b = a + n^+ = (a + n)^+,$$

o que não é possível, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural.

Assim, devemos ter  $b = 0$  e, então, como  $a + b = a + 0 = 0$ , temos que  $a = 0$ , uma vez que  $a + 0 = a$ .

## 2.3 Multiplicação em $\mathbb{N}$

### 2.3.1 Definição

**Definição 2:** A operação *multiplicação*  $(a, b) \rightarrow a \cdot b$  de números naturais é definida pelas seguintes condições:

i)  $a \cdot 0 = 0$

ii)  $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$

Na igualdade  $a \cdot b = c$ , dizemos que  $a$  e  $b$  são *fatores* e  $c$  é o *produto*.

Exemplos:

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 0^+ = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 1 \cdot 1^+ = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 0^+ = 2 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1^+ = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

**Proposição 6:** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $0 \cdot a = 0$ .

**Demonstração:** Mostraremos esse fato usando indução finita sobre  $a$ .

Para o caso  $a = 0$ , segue da definição de multiplicação que  $0 \cdot 0 = 0$ .

Agora, supondo por hipótese de indução que  $0 \cdot r = 0$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ , temos:

$$0 \cdot r^+ = 0 \cdot r + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a proposição é verdadeira para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 7:** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $1 \cdot a = a$ .

**Demonstração:** Também usando a indução finita sobre  $a$ , temos, para  $a = 0$ , que  $1 \cdot 0 = 0$  pela própria definição da multiplicação.

Agora, supondo  $1 \cdot r = r$  para algum  $r \in \mathbb{N}^*$ , temos que  $1 \cdot r^+ = 1 \cdot r + 1 = r + 1 = r^+$ , como queríamos demonstrar.

Logo, pelo PIF, podemos afirmar que  $1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{N}$ .

### 2.3.2 Propriedades da multiplicação

A operação de multiplicação no conjunto dos números naturais possui as seguintes propriedades:

**Propriedade 6 (Distributiva da multiplicação em relação à adição):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

Então,  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  e  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

**Demonstração:** Inicialmente, mostraremos por indução sobre  $c$ , que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Para  $c = 0$ , temos que  $a \cdot (b + 0) = a \cdot b = a \cdot b + 0 = a \cdot b + a \cdot 0$ .

Suponhamos, por hipótese de indução, que  $a \cdot (b + r) = a \cdot b + a \cdot r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e provemos que  $a \cdot (b + r^+) = a \cdot b + a \cdot r^+$ .

De fato,  $a \cdot (b + r^+) = a \cdot ((b + r)^+)$ , pois  $b + r^+ = (b + r)^+$  pela definição de adição.

Agora,  $a \cdot ((b + r)^+) = a \cdot (b + r) + a$ , pela definição de multiplicação.

Pela hipótese de indução, segue que  $a \cdot (b + r) + a = a \cdot b + a \cdot r + a$ .

Finalmente, pela definição de multiplicação temos que  $a \cdot r + a = a \cdot r^+$  e, portanto, temos que  $a \cdot (b + r^+) = a \cdot b + a \cdot r^+$ .

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos que  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ , para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

Agora, mostremos que  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  novamente usando indução sobre  $c$ .

Para  $c = 0$ ,  $(a + b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$ .

Suponhamos que  $(a + b) \cdot r = a \cdot r + b \cdot r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e provemos que

$$(a + b) \cdot r^+ = a \cdot r^+ + b \cdot r^+.$$

Temos

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot r^+ &= (a + b) \cdot r + (a + b) = a \cdot r + b \cdot r + (a + b) = \\ &= a \cdot r + a + b \cdot r + b = a \cdot r^+ + b \cdot r^+. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita,  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 7 (Associativa):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Então,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

**Demonstração:** Mostremos, usando o princípio de indução finita sobre  $c$ .

Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Para  $c = 0$ , temos que  $a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0$ .

Por outro lado,  $(a \cdot b) \cdot 0 = 0$ , pela própria definição de multiplicação.

Logo,  $a \cdot (b \cdot 0) = (a \cdot b) \cdot 0$ .

Agora, suponha, por hipótese de indução, que exista  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $a \cdot (b \cdot r) = (a \cdot b) \cdot r$ .

Temos que  $a \cdot (b \cdot r^+) = a \cdot (b \cdot r + b)$ , pela definição de multiplicação.

Agora,  $a \cdot (b \cdot r + b) = a \cdot (b \cdot r) + a \cdot b$ , pela propriedade distributiva.

Da hipótese de indução, temos que  $a \cdot (b \cdot r) + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot r + a \cdot b$ .

Por fim, da definição, temos que  $(a \cdot b) \cdot r + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot r^+$ .

Logo,  $a \cdot (b \cdot r^+) = (a \cdot b) \cdot r^+$ .

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 8 (Comutativa):** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Então,  $a \cdot b = b \cdot a$ .

**Demonstração:** Provemos por indução sobre  $a$ . Se  $a = 0$ , então  $0 \cdot b = 0$ , pela proposição 6.

Por outro lado,  $b \cdot 0 = 0$  pela definição. Logo,  $0 \cdot b = b \cdot 0$ .

Suponha, por hipótese de indução, que exista  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $r \cdot b = b \cdot r$ .

Então,  $r^+ \cdot b = (r + 1) \cdot b = r \cdot b + 1 \cdot b$ , pela propriedade distributiva.

Por hipótese de indução e pela proposição 7, temos que  $r \cdot b + 1 \cdot b = b \cdot r + b = b \cdot r^+$ .

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos  $a \cdot b = b \cdot a$ , para todo  $a, b \in \mathbb{N}$ .

**Propriedade 9 (Elemento neutro):** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $a \cdot 1 = a$ .

**Demonstração:** Da proposição 7, temos que  $1 \cdot a = a$ , para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

Agora, pela propriedade comutativa demonstrada anteriormente, segue que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

Mostremos agora que 1 é o único elemento neutro da multiplicação, ou seja, 1 é o único elemento que satisfaz  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$ .

Suponha que exista  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $a \cdot r = r \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{N}$ .

Em particular, para  $a = 1$ , temos que  $1 \cdot r = 1$ .

Porém, pela proposição 7,  $1 \cdot r = r$ .

Logo, temos que  $r = 1$  e, portanto, 1 é o único elemento neutro para a multiplicação em  $\mathbb{N}$ .

**Propriedade 10 (Lei do anulamento do produto):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Temos que

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $a \cdot b = 0$  e  $b \neq 0$ .

Vamos mostrar que devemos ter  $a = 0$ .

Como  $b \neq 0$ , então  $b = n^+$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Então,  $0 = a \cdot b = a \cdot n^+ = a \cdot n + a$ .

Pela propriedade 5, segue que  $a \cdot n = a = 0$ , como queríamos demonstrar.

As propriedades a seguir serão apenas enunciadas nesse momento. As respectivas demonstrações serão desenvolvidas na seção posterior, quando a relação de ordem estiver devidamente estabelecida.

**Propriedade 11 (Lei do cancelamento da multiplicação):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$  com  $c \neq 0$ .

Temos que  $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ .

**Propriedade 12:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Temos que  $a \cdot b = 1 \Rightarrow a = b = 1$ .

**Definição 3:** Sejam  $a, n \in \mathbb{N}$ , com  $a \neq 0$ . Definimos a *potência  $n$ -ésima de  $a$* , denotada por  $a^n$ , recursivamente por:

i)  $a^0 = 1$ ;

ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a^{n+1} = a^n \cdot a$ .

Isto significa que

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a$$

...

Ou seja, a potência  $n$ -ésima de  $a$ , denotada por  $a^n$ , é o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ . Nessa notação,  $a$  é chamado de *base* e  $n$  é chamado de *expoente*.

**Observações:**

- 1) Podemos estender a definição de potência para o caso em que  $a = 0$  desde que o expoente  $n$  seja não nulo. Dessa forma,  $0^n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 2)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , sempre que  $a \neq 0$ .
- 3)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , sempre que  $a \neq 0$ .
- 4)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , sempre que  $a \neq 0$ .

As propriedades das potências apresentadas acima não serão demonstradas neste trabalho. Entretanto, suas justificativas podem ser obtidas por meio do Princípio de Indução Finita.

**2.4 Relação de ordem em  $\mathbb{N}$** **2.4.1 Definição**

**Definição 4:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $a$  é *menor do que ou igual* a  $b$  se

$$b = a + u, \text{ para algum } u \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, denotamos  $a \leq b$ .

O número natural  $u$  é chamado de *diferença* entre  $b$  e  $a$  e é indicado por  $u = b - a$ , onde  $b$  é o *minuendo* e  $a$  é o *subtraendo*.

**Observações:**

- 1) O caso particular em que  $u = 0$  ocorre quando  $a$  e  $b$  são iguais.
- 2) O caso em que  $a$  e  $b$  são diferentes implica que  $0 \neq u = b - a$ .
- 3) A subtração  $(a, b) \rightarrow a - b$  está definida apenas no caso em que  $b \leq a$ .
- 4)  $0 \leq a, \forall a \in \mathbb{N}$ .
- 5)  $\forall a \in \mathbb{N}^*, a \geq 1$ .

**Definição 5:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $a$  é *menor do que*  $b$ , e denotamos  $a < b$ , se

$$b = a + v \text{ para algum } v \in \mathbb{N}, v \neq 0.$$

**Observações:**

- 6)  $a < b \Leftrightarrow a \leq b \text{ e } a \neq b$ .
- 7) As relações  $\geq$  (maior que ou igual) e  $>$  (maior que) são definidas pelas equivalências:  
 $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$  e  $a > b \Leftrightarrow b < a$ .

### 2.4.2 Propriedades da relação de ordem

A relação  $\leq$  no conjunto dos números naturais possui as seguintes propriedades:

**Propriedade 13 (Reflexiva):** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então,  $a \leq a$ .

**Demonstração:** Segue do fato que  $a = a + 0$ .

**Propriedade 14 (Antissimétrica):** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Temos  $a \leq b$  e  $b \leq a \Rightarrow a = b$ .

**Demonstração:** Da hipótese de que  $a \leq b$  e  $b \leq a$  segue que existem  $u, v \in \mathbb{N}$  tais que

$$b = a + u \text{ e } a = b + v.$$

Assim,  $a = b + v = (a + u) + v = a + (u + v)$  e, pela lei do cancelamento da adição, temos que  $u + v = 0$ .

Logo, pela propriedade 5, temos  $u = v = 0$ .

Portanto,  $a = b$ , como queríamos demonstrar.

**Propriedade 15 (Transitiva):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Temos que  $a \leq b$  e  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ .

**Demonstração:** Pela hipótese,  $a \leq b$  e  $b \leq c$ .

Então,  $b = a + u$  e  $c = b + v$  para certos  $u, v \in \mathbb{N}$ .

Assim,  $c = b + v = (a + u) + v = a + (u + v)$ , onde  $(u + v) \in \mathbb{N}$ .

Logo, temos que  $a \leq c$ .

**Propriedade 16:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Então,  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

**Demonstração:** Para cada  $b \in \mathbb{N}$ , seja  $S_b$  o subconjunto de  $\mathbb{N}$  formado pelos elementos  $n$  para os quais se verifica ao menos uma das seguintes condições.

(i) existe  $u \in \mathbb{N}$  tal que  $b = n + u$ ;

(ii) existe  $v \in \mathbb{N}$  tal que  $n = b + v$

Em outras palavras, podemos escrever

$$S_b = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists u \in \mathbb{N}, b = n + u\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \exists v \in \mathbb{N}, n = b + v\}.$$

Provemos pelo Axioma  $A_5$  que  $S_b = \mathbb{N}$ .

Como para  $n = 0$  a sentença (i) se verifica com  $u = b$ , então  $0 \in S_b$ .

Seja  $r \in S_b$ . Temos os seguintes casos:

- Se  $r = b$ , então  $r^+ = b^+ = b + 1$  e, portanto,  $r^+ \in S_b$  pois se verifica a condição (ii).
- Se  $b = r + q$ , onde  $q \in \mathbb{N}^*$ , então  $q = p^+ = p + 1$  para algum  $p \in \mathbb{N}$ .

Então,  $b = r + q = r + (p + 1) = r + p^+$ . Da proposição 5, segue que  $r + p^+ = r^+ + p$ . Logo,  $b = r^+ + p$ , o que significa que  $r^+ \in S_b$ , pois satisfaz a condição (i).

- Se  $r = b + v$ , para algum  $v \in \mathbb{N}$ ,  $v \neq 0$ . Então  $r^+ = (b + v)^+ = b + v^+$ , o que significa que  $r^+ \in S_b$ , pois cumpre a condição (ii).

Logo,  $S_b = \mathbb{N}$  e, para todo  $b \in \mathbb{N}$ , qualquer que seja o natural  $a$ , temos que ou  $b = a + u$  ou  $a = b + v$ , isto é,  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

**Propriedade 17:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Temos que  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ .

**Demonstração:** Pela hipótese de que  $a \leq b$  segue que  $b = a + u$ , para algum  $u \in \mathbb{N}$ .

Logo, para todo  $c \in \mathbb{N}$ , temos que  $b + c = (a + u) + c = (a + c) + u$ .

Portanto, da igualdade acima, resulta que  $a + c \leq b + c$ .

**Propriedade 18:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Temos que  $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ .

**Demonstração:** Pela hipótese de que  $a \leq b$  segue que  $b = a + u$ , para algum  $u \in \mathbb{N}$ .

Então,  $b \cdot c = (a + u) \cdot c = a \cdot c + u \cdot c$ , onde  $(u \cdot c) \in \mathbb{N}$ .

Portanto, temos que  $a \cdot c \leq b \cdot c$ .

**Observação:** Por serem válidas as propriedades acima, dizemos que a relação  $\leq$  é uma relação de ordem total sobre  $\mathbb{N}$  compatível com a adição e a multiplicação definidas sobre  $\mathbb{N}$ .

**Propriedade 19:** Se  $a < b$  então  $a + 1 \leq b$ .

**Demonstração:** Da hipótese de que  $a < b$  temos que existe  $c \in \mathbb{N}^*$  tal que  $b = a + c$ .

Como  $c \in \mathbb{N}^*$ , segue que  $c \geq 1$ . Então, existe  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $c = 1 + d$ .

Logo, obtemos  $b = a + c = a + (1 + d) = (a + 1) + d$ .

Pela definição, segue então que  $a + 1 \leq b$ , como queríamos demonstrar.

**Definição 6:** Seja  $S \subset \mathbb{N}$ ,  $S \neq \emptyset$ . O elemento  $m \in S$  tal que  $m \leq x$  para todo  $x \in S$ , é chamado *elemento mínimo de S* e é indicado por  $m = \min S$ .

**Proposição 8 (Princípio da Boa Ordem):** Se  $S$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$ , então  $S$  possui um elemento mínimo.

**Demonstração:** Considere o seguinte conjunto  $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in S\}$ .

Temos que  $0 \in H$ , pois  $0 \leq x, \forall x \in S$  tendo em vista que  $0 \leq x, \forall x \in \mathbb{N}$  e  $S \subset \mathbb{N}$ .

Por hipótese, como  $S \neq \emptyset$ , podemos tomar  $s \in S$ .

Então,  $s + 1 \notin H$ , já que  $s + 1 > s$  e  $s \in S$ . Logo,  $H \neq \mathbb{N}$ .

Como  $0 \in H$  e  $H \neq \mathbb{N}$ , deve existir um certo  $k \in H$  tal que  $k + 1 \notin H$ , pois, caso contrário, pelo axioma  $A_5$ , teríamos  $H = \mathbb{N}$ .

Mostremos que  $k$  é o elemento mínimo de  $S$ .

De fato, como  $k \in H$ , então  $k \leq x, \forall x \in S$ . Supondo  $k \notin S$ , então  $k < x, \forall x \in S$ .

Assim, pela propriedade 19,  $k + 1 \leq x, \forall x \in S$ , o que implica que  $k + 1 \in H$ , o que é absurdo.

Logo,  $k \in S$ .

Portanto, todo subconjunto  $S$  não-vazio dos naturais possui um elemento mínimo.

**Proposição 9 (Lei da Tricotomia em  $\mathbb{N}$ ):** Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{N}$ , vale uma e só uma das relações:  $a = b$ ,  $a < b$  ou  $b < a$ .

**Demonstração:** Pela propriedade 16, temos que  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

Então,  $b = a + u$ , para algum  $u \in \mathbb{N}$  ou  $a = b + v$ , para algum  $v \in \mathbb{N}$ .

Vamos supor, inicialmente,  $a \neq b$ . Então, devemos ter  $u \neq 0$  ou  $v \neq 0$ .

Ou seja, se  $a \neq b$ , então  $a < b$  ou  $b < a$ .

Mostremos, por absurdo, que não ocorre simultaneamente  $a < b$  e  $b < a$ .

Supondo  $a < b$  e  $b < a$ , temos  $b = a + u$  e  $a = b + v$  com  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$ .

Assim,  $a = b + v = (a + u) + v = a + (u + v)$  e, pela lei do cancelamento da adição, temos  $u + v = 0$ .

Agora, pela propriedade 5, segue que  $u = v = 0$ , o que é uma contradição.

Portanto, se  $a, b \in \mathbb{N}$  então  $a = b$ ,  $a < b$  ou  $b < a$ , exclusivamente.

Passamos agora às demonstrações das propriedades 11 e 12 da multiplicação no conjunto dos números naturais, anteriormente enunciadas.

**Propriedade 11 (Lei do cancelamento da multiplicação):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}; c \neq 0$ . Temos que  $a \cdot c = b \cdot c \implies a = b$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $a \neq b$ . Então, devemos ter  $a < b$  ou  $b < a$ .

Se  $a < b$ , então  $b = a + v$  com  $v \neq 0$ . Assim,  $a \cdot c = b \cdot c = (a + v) \cdot c = a \cdot c + v \cdot c$ .

Logo, pela lei do cancelamento da adição, temos que  $v \cdot c = 0$ .

Da propriedade 10, segue que  $v = 0$  ou  $c = 0$ , o que é uma contradição, pois  $c \neq 0$  por hipótese e supomos  $v \neq 0$ . De maneira análoga, mostramos que não ocorre o caso em que  $b < a$ .

Portanto, concluímos que  $a = b$ .

**Propriedade 12:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Temos que  $a \cdot b = 1 \Rightarrow a = b = 1$ .

**Demonstração:** Da hipótese de que  $a \cdot b = 1$  segue que  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .

Logo, devemos ter  $a \geq 1$  e  $b \geq 1$ . Supondo  $a > 1$ , temos que  $a = 1 + v$  para algum  $v \in \mathbb{N}^*$ .

Como  $b = 1 + u; u \in \mathbb{N}$ , pois  $b \geq 1$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot b = (1 + v) \cdot (1 + u) = (1 + v) \cdot 1 + (1 + v) \cdot u = \\ &= 1 \cdot 1 + v \cdot 1 + 1 \cdot u + v \cdot u = 1 + v + u + v \cdot u = 1 + (v + u + u \cdot v). \end{aligned}$$

Pela lei do cancelamento da adição, segue que  $v + u + u \cdot v = 0$  e, pela propriedade 5, temos que  $v +$

$$(u + u \cdot v) = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ e } u + u \cdot v = 0, \text{ o que é absurdo, pois } v \in \mathbb{N}^*.$$

Logo, devemos ter  $a = 1$  e também  $b = 1$ , pois  $1 = a \cdot b = 1 \cdot b = b$ .

## 2.5 Divisibilidade em $\mathbb{N}$

Esta seção destina-se à apresentação do conceito de divisibilidade, considerando sua relevância para a compreensão e fundamentação do produto educacional desenvolvido.

### 2.5.1 Definição

**Definição 7:** Dizemos que um número natural  $a$  *divide* um natural  $b$  se existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $b = a \cdot c$ .

Usaremos a notação  $a \mid b$  para indicar que  $a$  divide  $b$  e, no caso contrário, usaremos  $a \nmid b$ .

Quando  $a \mid b$  dizemos que  $a$  é *divisor* de  $b$ . Também podemos dizer que  $b$  é *múltiplo* de  $a$ , ou ainda que  $b$  é *divisível* por  $a$ .

O elemento  $c$  tal que  $b = a \cdot c$  é chamado *quociente* de  $b$  por  $a$  e é indicado por  $c = \frac{a}{b}$ .

**Exemplo:**  $2 \mid 6$  pois existe  $3 \in \mathbb{N}$  tal que  $6 = 2 \cdot 3$ . No entanto,  $6 \nmid 2$  pois  $\nexists c \in \mathbb{N}$  tal que

$$2 = 6 \cdot c.$$

Nesse caso, dizemos que 2 é divisor de 6; 6 é múltiplo de 2; 6 é divisível por 2; 3 é o quociente de 6 por 2.

**Observação:** É imediato notar que:

- $1 \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$ , pois  $a = 1 \cdot a$ ;
- $a \mid 0, \forall a \in \mathbb{N}$ , pois  $0 = a \cdot 0$ ;
- $0 \nmid b, \forall b \in \mathbb{N}^*$ , pois  $b = 0 \cdot c$  somente se  $b = 0$ .

Indicamos por  $D(a) = \{x \in \mathbb{N}; x \mid a\}$  o conjunto dos divisores do número natural  $a$ .

**Exemplo:**  $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ .

Além disso, indicamos por  $M(a)$  o conjunto dos múltiplos de um número natural  $a$ . Assim,  $M(a) = \{0, a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \dots\}$  e, em particular,  $M(0) = \{0\}$  e  $M(1) = \mathbb{N}$ .

**Exemplo:**  $M(6) = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$ .

**Definição 8:** Os elementos do conjunto  $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$  são chamados de *números naturais pares* e os elementos de  $\mathbb{N} - M(2) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  são chamados de *números naturais ímpares*.

**Observação:** Da definição anterior, podemos escrever todo número natural par da forma  $2 \cdot k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, todo número natural ímpar é escrito da forma  $2 \cdot k + 1$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo:** Todo número natural da forma  $10^n$ ;  $n \in \mathbb{N}$  é um número par.

De fato, seja  $a = 10^n$ ;  $n \in \mathbb{N}$  um número natural qualquer.

Então, podemos escrever

$$a = 10^n = (2 \cdot 5)^n = 2^n \cdot 5^n = (2 \cdot 2^{n-1}) \cdot 5^n = 2 \cdot (2^{n-1} \cdot 5^n), \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $a$  é da forma  $2 \cdot k$ ;  $k \in \mathbb{N}$  e, portanto,  $a$  é um número par.

## 2.5.2 Propriedades da divisibilidade

Para a relação  $a \mid b$  em  $\mathbb{N}$  são válidas as seguintes propriedades:

**Propriedade 20 (Reflexiva):**  $a \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** É imediato, pois  $a = a \cdot 1$ .

**Propriedade 21 (Antissimétrica):**  $a \mid b$  e  $b \mid a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** De fato, se  $a \mid b$  e  $b \mid a$  então existem  $c, d \in \mathbb{N}$  tais que  $b = a \cdot c$  e  $a = b \cdot d$ .

Se  $a = 0$  então temos  $b = 0$ , pois  $b = a \cdot c$ . E assim, temos  $a = b$ .

Se  $a \neq 0$  e como  $a = b \cdot d = (a \cdot c) \cdot d$ , então, pela lei do cancelamento, temos  $1 = c \cdot d$ .

Portanto, pela propriedade 12, temos  $c = d = 1$ .

Logo, também temos  $a = b$  neste caso.

**Propriedade 22 (Transitiva):**  $a \mid b$  e  $b \mid c \Rightarrow a \mid c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** De fato, se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então existem  $r, s \in \mathbb{N}$  tais que  $b = a \cdot r$  e  $c = b \cdot s$ .

Logo,  $c = b \cdot s = (a \cdot r) \cdot s = a \cdot (r \cdot s)$  com  $(r \cdot s) \in \mathbb{N}$ .

Portanto,  $a \mid c$ .

**Propriedade 23:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$  então  $a \mid (b \cdot x + c \cdot y), \forall x, y \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** De fato, temos por hipótese que  $b = a \cdot r$  e  $c = a \cdot s$  com  $r, s \in \mathbb{N}$ .

Assim, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{N}$  temos  $b \cdot x = (a \cdot r) \cdot x$  e  $c \cdot y = (a \cdot s) \cdot y$ .

Então,  $b \cdot x + c \cdot y = (a \cdot r) \cdot x + (a \cdot s) \cdot y = a \cdot (r \cdot x + s \cdot y)$ .

Portanto, temos  $a \mid (b \cdot x + c \cdot y)$ .

**Propriedade 24:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Se  $c \mid a$ ,  $c \mid b$  e  $a \leq b$ , então  $c \mid (b - a)$ .

**Demonstração:** Por hipótese,  $a = c \cdot r$  e  $b = c \cdot s$ , com  $r, s \in \mathbb{N}$ .

Como  $a \leq b$ , então  $b = a + m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

Segue então que  $c \cdot s = c \cdot r + m \Leftrightarrow m = c \cdot (s - r)$ .

Logo,  $c \mid m$  e como  $m = b - a$ , temos a propriedade demonstrada.

**Propriedade 25:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq b$  e  $c \mid a$ . Temos  $c \mid b \Leftrightarrow c \mid (b - a)$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Imediato da propriedade 24.

( $\Leftarrow$ ) Como  $c \mid (b - a)$  e  $c \mid a$ , tomando  $x = y = 1$  na propriedade 23, temos que  $c \mid (b - a + a)$ , isto é,  $c \mid b$ , como queríamos demonstrar.

**Propriedade 26:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Se  $a \mid b$  e  $b \neq 0$ , então  $a \leq b$ .

**Demonstração:** De fato, se  $a \mid b$  e  $b \neq 0$ , então  $b = a \cdot c$  para algum  $c \in \mathbb{N}^*$ .

Como  $c > 0$ , então temos  $c \geq 1$  e, portanto,  $c = 1 + q$ , para algum  $q \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $b = a \cdot c = a \cdot (1 + q) = a + a \cdot q$ , o que implica  $a \leq b$ .

### 2.5.3 Algoritmo Euclidiano da divisão

**Teorema 1:** Dados  $a, b \in \mathbb{N}$  com  $a \neq 0$ , existe um único par de números naturais  $q$  e  $r$  tais que  $b = a \cdot q + r$  com  $0 \leq r < a$ . Se  $a \nmid b$ , então  $r$  satisfaz a desigualdade estrita  $0 < r < a$ .

**Demonstração:** A demonstração do teorema será feita em duas etapas. Mostremos, inicialmente, a existência de tais naturais  $q$  e  $r$ .

Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$  e  $a$  não nulo. Se  $b < a$ , basta tomar  $q = 0$  e  $r = b$ . Se  $b = a$ , então tomamos  $q = 1$  e  $r = 0$ . Assim, vamos também assumir que  $b > a > 0$ .

Consideremos o conjunto  $R = \{b - a \cdot q \in \mathbb{N}; b - a \cdot q \geq 0\} \subset \mathbb{N}$ .

Notemos que o conjunto  $R$  é não vazio, pois  $b - a \in R$ , tendo em vista que  $b - a > 0$ .

Deste modo, pelo Princípio da Boa Ordem, temos que  $R$  admite um menor elemento, que denotaremos por  $r$ . Claramente,  $r = b - a \cdot q \geq 0$ , para algum  $q \in \mathbb{N}; q \geq 0$ . Além disso,  $r < a$  pois, caso contrário

$$r = b - a \cdot q \geq a \Rightarrow b - a \cdot (q + 1) \geq 0.$$

Por outro lado,

$$a > 0 \Rightarrow b - a \cdot (q + 1) < b - a \cdot q.$$

Das desigualdades acima, segue que

$$0 \leq b - a \cdot (q + 1) < b - a \cdot q,$$

contradizendo o fato de que  $r = b - a \cdot q$  é o menor elemento de  $R$ .

Agora, nos concentramos em mostrar a unicidade do par de números naturais  $q$  e  $r$  tais que

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

Suponhamos que existam dois pares distintos  $(q, r)$  e  $(q_1, r_1)$ , que satisfazem as condições do teorema:

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < a$$

$$b = a \cdot q_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < a$$

Igualando as expressões, temos

$$a \cdot q + r = a \cdot q_1 + r_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r - r_1 = a \cdot q_1 - a \cdot q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r - r_1 = a \cdot (q_1 - q)$$

Ou seja, temos que  $a \mid (r - r_1)$  e portanto, pela propriedade 26,  $a \leq (r - r_1)$ , o que é absurdo pois  $r < a$  e  $r_1 < a$ .

Logo, devemos ter  $r = r_1$  e, conseqüentemente  $q = q_1$ .

**Observação:** Os números naturais  $q$  e  $r$  do teorema anterior recebem os nomes, respectivamente, de **quociente** e **resto** da divisão de  $b$  por  $a$ .

### 2.5.4 Máximo Divisor Comum

**Definição 9:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Um número  $d \in \mathbb{N}$  é chamado *máximo divisor comum* de  $a$  e  $b$  se:

i)  $d \mid a$  e  $d \mid b$ ;

ii) se existir um número natural  $c$  tal que  $c \mid a$  e  $c \mid b$ , então  $c \mid d$ .

**Exemplo:** Sejam  $a = 6$  e  $b = 8$ . Temos  $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$  e  $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ .

Daí,  $D(6) \cap D(8) = \{1, 2\}$ . Note que:

i)  $2 \mid 6$  e  $2 \mid 8$

ii) Se tomarmos  $c$  tal que  $c \mid 6$  e  $c \mid 8 \Rightarrow c \in D(6) \cap D(8) \Rightarrow c = 1$  ou  $c = 2 \Rightarrow c \mid 2$ .

Portanto, 2 é o máximo divisor comum de 6 e 8.

**Notação:** Usaremos  $mdc(a, b)$  para indicar o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ . Pela definição, temos que  $mdc(a, b) = mdc(b, a)$ .

**Proposição 10:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Se  $a \mid b$  então  $mdc(a, b) = a$ .

**Demonstração:** É trivial observar que  $a \mid a$  e, pela hipótese,  $a \mid b$ .

Agora, se existe  $c$  natural tal que  $c \mid a$  e  $c \mid b$ , é claro que  $c \mid a$ .

Logo,  $a = mdc(a, b)$ .

**Proposição 11:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$  com  $a \leq b$ . Então,  $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$ .

**Demonstração:** Seja  $d = mdc(a, b)$ . Pela definição, temos  $d \mid a$  e  $d \mid b$ .

Então, pela propriedade 24, temos que  $d \mid (b - a)$ .

Agora, se existir  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \mid a$  e  $c \mid (b - a)$ , podemos escrever, pela propriedade 23, que  $c \mid a + (b - a) = b$ . Como  $d = mdc(a, b)$ , concluímos que  $c \mid d$ .

Assim, como temos  $d \mid a$ ,  $d \mid (b - a)$  e qualquer outro divisor de  $a$  e  $b - a$  divide  $d$ , temos que  $d = mdc(a, b - a)$ , como queríamos demonstrar.

É importante ressaltar que o resultado contido na proposição acima não se mostra tão prático quando se trata da determinação do máximo divisor comum de números significativamente grandes. Assim, o Lema de Euclides descrito a seguir, fundamenta-se em uma generalização dessa propriedade e oferece um procedimento eficiente para a resolução desse tipo de problema.

**Proposição 12 (Lema de Euclides)** Sejam  $a, b, q, r \in \mathbb{N}$  tais que  $a = b \cdot q + r$ ,  $0 \leq r < b$ .

Se  $d = \text{mdc}(a, b)$ , então  $d = \text{mdc}(b, r)$ . E se  $d = \text{mdc}(b, r)$  então  $d = \text{mdc}(a, b)$ .

**Demonstração:** Como  $d = \text{mdc}(a, b)$  então  $d \mid a$  e  $d \mid b$ . Dessa última, resulta que  $d \mid b \cdot q$ .

Logo,  $d \mid (a - b \cdot q)$ , ou seja,  $d \mid r$ .

Assim, se existir  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \mid r$  e  $c \mid b$ , então  $c \mid (b \cdot q + r)$ , isto é,  $c \mid a$ .

Logo,  $c \mid a$  e  $c \mid b$ , o que implica que  $c \mid d$ , pois  $d = \text{mdc}(a, b)$ .

Portanto,  $d = \text{mdc}(b, r)$ .

A segunda afirmação se demonstra de maneira análoga.

### Existência e unicidade do MDC

Mostraremos agora, de modo geral, que o máximo divisor comum entre dois números naturais sempre existe e é único. Primeiramente, vamos analisar o caso em que  $a = 0$  e  $b$  é um número natural qualquer e mostraremos que  $\text{mdc}(0, b) = b$ .

De fato, temos que  $b \mid 0$  e  $b \mid b$ . Agora, se existir  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \mid 0$  e  $c \mid b$ , obviamente  $c \mid b$ . Note que o caso em que  $a = b = 0$ , não há um maior divisor comum. Então, definimos que  $\text{mdc}(0, 0) = 0$ .

Agora, consideremos o caso em que  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $b \leq a$  e aplicaremos, sucessivamente, o algoritmo da divisão a partir de  $a$  e  $b$ :

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \quad (r_1 < b)$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2 \quad (r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 \quad (r_3 < r_2)$$

⋮

É claro que se  $r_1 = 0$ , então a proposição 10 nos garante que  $\text{mdc}(a, b) = b$  e o processo terminaria na primeira etapa.

Mas, na sequência  $b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$  para algum índice  $n$  deverá ocorrer  $r_{n+1} = 0$ , pois se todos os  $r_i$  fossem não nulos, então o subconjunto  $\{b, r_1, r_2, r_3, \dots\}$  não teria elemento mínimo, o que não é possível. Assim, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$$

Logo, pelo Lema de Euclides, obtemos que

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \dots = \text{mdc}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{mdc}(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Agora, mostremos que o *mdc* entre  $a$  e  $b$  é sempre único.

Suponha que existam  $d$  e  $d'$  tais que  $d = \text{mdc}(a, b)$  e  $d' = \text{mdc}(a, b)$ .

Como  $d \mid a$  e  $d \mid b$ , então  $d \mid d'$  pois  $d' = \text{mdc}(a, b)$ .

De maneira análoga, temos que  $d' \mid a$  e  $d' \mid b$  e, portanto,  $d' \mid d$  pois  $d = \text{mdc}(a, b)$ .

Logo, como  $d \mid d'$  e  $d' \mid d$ , temos que  $d = d'$  e, portanto, o *mdc* entre dois números naturais quaisquer é sempre único.

**Exemplo:** Calculemos  $\text{mdc}(60, 36)$  utilizando sucessivamente o Lema de Euclides.

$$60 = 36 \cdot 1 + 24$$

$$36 = 24 \cdot 1 + 12$$

$$24 = 12 \cdot 2 + 0$$

Logo,  $\text{mdc}(60, 36) = 12$ , que é o último resto não nulo no processo de divisões sucessivas.

As divisões sucessivas representadas acima podem ser sintetizadas em um dispositivo prático, usualmente organizado na forma de uma tabela, que sistematiza a aplicação do algoritmo da divisão para o cálculo do máximo divisor comum, como na Tabela 1 abaixo. Em cada linha da tabela registra-se uma divisão euclidiana, na qual o dividendo é expresso como o produto do divisor pelo quociente acrescido de um resto estritamente menor que o divisor. O procedimento consiste em substituir, a cada etapa, o par de números considerado pelo par formado pelo divisor e pelo resto da divisão anterior. O processo encerra-se quando o resto obtido é nulo, sendo o último resto não nulo, ou, equivalentemente, o divisor da última divisão realizada, identificado como o máximo divisor comum dos números iniciais.

Tabela 1 – Cálculo do MDC através do Lema de Euclides organizado em tabela

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
$a$	$b$	$q_1$	$r_1$
$b$	$r_1$	$q_2$	$r_2$
$r_1$	$r_2$	$q_3$	$r_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_{n-2}$	$r_{n-1}$	$q_n$	$r_n$
$r_{n-1}$	$r_n$	$q_{n+1}$	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa organização tabular confere maior clareza ao método, evidenciando simultaneamente seu caráter algorítmico e a propriedade matemática que o fundamenta.

**Exemplo:** Representemos o exemplo anterior, no qual calculamos  $mdc(60, 36)$ , através do dispositivo prático ilustrado na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Cálculo do  $mdc(60, 36)$  através do Lema de Euclides organizado em tabela.

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
60	36	1	24
36	24	1	12
24	12	2	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, observa-se que o último resto diferente de zero é 12, que é o máximo divisor comum entre 60 e 36.

**Definição 10:** Dois números naturais  $a$  e  $b$  são ditos *primos entre si* se  $mdc(a, b) = 1$ .

**Exemplo:** Dois números naturais consecutivos são primos entre si.

De fato, mostremos que  $mdc(a, a + 1) = 1$ . É claro que  $1 \mid a$  e  $1 \mid a + 1$ .

Agora, se existe  $c$  natural tal que  $c \mid a$  e  $c \mid a + 1$ , então  $c \mid (a + 1 - a)$ , isto é,  $c \mid 1$ , como queríamos.

**Proposição 13:** Se  $d = mdc(a, b)$ , então  $mdc(n \cdot a, n \cdot b) = n \cdot d$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Multipliquemos por  $s$  cada uma das igualdades obtidas pelo algoritmo euclidiano da divisão no processo das divisões sucessivas que leva a  $d$ , a partir de  $a$  e  $b$ .

$$\begin{aligned}
 s \cdot a &= (s \cdot b) \cdot q_1 + s \cdot r_1 \\
 s \cdot b &= (s \cdot r_1) \cdot q_2 + s \cdot r_2 \\
 &\vdots \\
 s \cdot r_{n-2} &= (s \cdot r_{n-1}) \cdot q_n + s \cdot r_n \\
 s \cdot r_{n-1} &= (s \cdot r_n) \cdot q_{n+1}
 \end{aligned}$$

As proposições 10 e 12 nos garantem que

$$s \cdot d = s \cdot r_n = mdc(s \cdot r_{n-1}, s \cdot r_n) = \dots = mdc(s \cdot b, s \cdot r_1) = mdc(s \cdot a, s \cdot b).$$

**Corolário 1:** Se  $a \mid b \cdot c$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $a \mid c$ .

**Demonstração:** Da hipótese de que  $\text{mdc}(a, b) = 1$  temos, pela proposição 13, que

$$\text{mdc}(a \cdot c, b \cdot c) = c.$$

Como  $a \mid (b \cdot c)$  por hipótese e obviamente  $a \mid a \cdot c$ , então  $a \mid \text{mdc}(a \cdot c, b \cdot c)$ . Ou seja,  $a \mid c$ .

**Corolário 2:** Se  $a$  e  $b$  são divisores de  $c \neq 0$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $a \cdot b \mid c$ .

**Demonstração:** Da hipótese  $\text{mdc}(a, b) = 1$  decorre, pela proposição 13, que

$$\text{mdc}(a \cdot c, b \cdot c) = c.$$

Como  $b \mid c$  então  $a \cdot b \mid a \cdot c$ . Também, como  $a \mid c$  então  $a \cdot b \mid b \cdot c$ .

Logo,  $a \cdot b \mid \text{mdc}(a \cdot c, b \cdot c)$ , isto é,  $a \cdot b \mid c$ .

A definição de máximo divisor comum pode ser estendida para três ou mais números naturais. Para determinar o máximo divisor comum de três números, por exemplo, pode-se lançar mão do seguinte resultado:

**Proposição 14:** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Então,

$$\text{mdc}(a, b, c) = \text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c) = \text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c)).$$

**Demonstração:** Seja  $d = \text{mdc}(a, b, c)$ . Então,  $d \mid a$ ,  $d \mid b$  e  $d \mid c$ .

Das duas primeiras relações, segue que  $d \mid \text{mdc}(a, b)$ . Assim,  $d \mid \text{mdc}(a, b)$  e  $d \mid c$ .

Seja  $k$  um divisor de  $\text{mdc}(a, b)$  e de  $c$ . Como  $\text{mdc}(a, b) \mid a$  e  $\text{mdc}(a, b) \mid b$ , pela transitividade, temos que  $k \mid a$ ,  $k \mid b$  e  $k \mid c$ .

Logo  $k \mid d$ , pois  $d = \text{mdc}(a, b, c)$ . Portanto,  $d = \text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c)$ .

A outra igualdade é demonstrada de maneira análoga.

### 2.5.5 Números primos

**Definição 11:** Um número  $p \in \mathbb{N}$  é chamado *primo* se:

- i)  $p \neq 0$  e  $p \neq 1$ ;
- ii) os únicos divisores de  $p$  são 1 e  $p$ .

Quando um número natural não é primo, dizemos que ele é um número *composto*.

**Exemplo:** O número 43 é primo, pois seus únicos divisores são 1 e 43. E o número 42 é composto, pois possui outros divisores além de 1 e 42, como 2, 3, 6 e 7.

**Observação:** Os números 0 e 1 não são primos e nem compostos.

**Proposição 15:** Sejam  $a, b, p \in \mathbb{N}$ . Se  $p$  é primo e  $p \mid a \cdot b$ , então  $p \mid a$  ou  $p \mid b$ .

**Demonstração:** No caso em que  $a = 0$  ou  $b = 0$  a proposição é imediata. Suponhamos, então,  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .

Vamos admitir que  $p \nmid a$  e provemos que  $\text{mdc}(a, p) = 1$ .

De fato, seja  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c = \text{mdc}(a, p)$ . Temos  $c \mid a$  e  $c \mid p$ .

Então, como  $p$  é primo, devemos ter  $c = 1$  ou  $c = p$ .

Porém,  $p \nmid a$  como admitimos anteriormente. Logo, devemos ter  $c = 1$ .

Então, temos que  $p \mid a \cdot b$  e  $\text{mdc}(a, p) = 1$ . Pelo corolário 1 da seção anterior, segue que  $p \mid b$ .

**Proposição 16:** Seja  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 0$  e  $a \neq 1$ . Então,  $\min S = \{x \in \mathbb{N}; x > 1 \text{ e } x \mid a\}$  é um número primo.

**Demonstração:** Observe que  $S \neq \emptyset$  pois claramente  $a \in S$ . Seja  $p$  o mínimo de  $S$ .

Se  $p$  não fosse primo, como  $p \neq 0$  e  $p \neq 1$ , então existiriam  $b, c \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 1$ ,  $c \neq 1$ , de modo que  $p = b \cdot c$  e daí temos  $b < p$ .

Como  $b$ , por ser um divisor de  $p$ , também divide  $a$ , já que  $p \in S$ , então  $b$  é um divisor de  $a$  menor que  $p$ , o que é absurdo pois supomos  $p$  mínimo de  $S$ . Logo,  $p$  é primo.

**Teorema 2 (Teorema Fundamental da Aritmética):** Todo número natural  $n$  maior do que 1 pode ser escrito como um produto  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}$ , onde  $m \geq 1$  é um número natural,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  e  $p_i$  é primo para todo  $1 \leq i \leq m$ . Além disso, a fatoração é única se exigirmos que  $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ .

**Demonstração:** Seja  $n \in \mathbb{N}$  maior do que 1. Denotando por  $p_1$  seu menor divisor primo, tem-se que  $n = p_1 \cdot \beta_1$ , onde  $1 \leq \beta_1 < n$ .

Se  $\beta_1 = 1$ , então  $n = p_1$  e a fatoração desejada é obtida. Caso contrário, denotando por  $p_2$  o menor divisor de  $\beta_1$ , tem-se que  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \beta_2$ , onde  $1 \leq \beta_2 < \beta_1$ .

Se  $\beta_2 = 1$ , então  $n = p_1 \cdot p_2$  e novamente chegamos à fatoração desejada. Caso contrário, denotando por  $p_3$  o menor divisor primo de  $\beta_2$ , temos  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \beta_3$ , onde  $1 \leq \beta_3 < \beta_2$ . Continuando este processo sucessivamente, obtemos uma sequência estritamente decrescente de números naturais  $\beta_m$ , ou seja,  $n > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots > \beta_m > \beta_{m+1} > \cdots \geq 1$ .

Então, pelo Princípio da Boa Ordem, só pode existir uma quantidade finita de índices  $m$  tais que  $\beta_m > 1$  e, conseqüentemente,  $\beta_{m+1} = 1$ , de onde segue que  $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ .

Notemos que na representação acima, os  $p_i$  podem se repetir, resultando finalmente na fatoração desejada.

Provaremos agora a unicidade de tal fatoração. Com efeito, suponha que existem duas fatorações  $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m} = n = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdots q_s^{\beta_s}$ .

Pela proposição 15, temos que cada  $p_i$  divide algum  $q_j$ . Logo,  $p_i = q_j$ , por serem primos. Portanto, cada  $p_i$  aparece no lado direito da igualdade acima, e, um argumento análogo nos dá que cada  $q_j$  também aparece no lado esquerdo da igualdade. Então, como os  $p_i$  e os  $q_j$  são diferentes dois a dois e organizados crescentemente, temos  $m = s$  e a igualdade se reduz a

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m} = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdots p_m^{\beta_m}.$$

Suponhamos agora que  $\alpha_1$  seja diferente de  $\beta_1$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $\alpha_1 < \beta_1$ . Portanto, dividindo ambos os lados por  $p_1^{\alpha_1}$ , temos que

$$p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m} = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdots p_m^{\beta_m},$$

e como  $\beta_1 - \alpha_1 > 0$ , então, pela proposição 15, temos que  $p_1$  divide algum  $p_j$ , com  $j > 1$ , o que é impossível pois são todos primos. Portanto,  $\alpha_1 = \beta_1$  e de maneira análoga, provamos que  $\alpha_i = \beta_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Este resultado nos mostra que todo número natural maior que 1 pode ser escrito como produto de fatores primos, sendo essa forma de representação denominada **fatoração** ou **decomposição em fatores primos**.

Um processo prático de decomposição em fatores primos consiste em dividir sucessivamente o número natural dado pelos menores números primos possíveis, iniciando pelo 2 e prosseguindo, quando necessário, pelos primos seguintes, até que o quociente obtido seja igual a 1. A cada divisão exata, registra-se o fator primo correspondente, e o procedimento é repetido com o quociente resultante. Ao final do processo, a decomposição em fatores primos é expressa pelo produto de todos os fatores primos encontrados.

**Exemplo:** A decomposição em fatores primos do número 42 é dada por

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

**Observações:**

1) Ao lidar com dois ou mais números naturais maiores que 1, pode ser conveniente escrevê-los como potências dos mesmos números primos, desde que se utilizem expoentes nulos, como no exemplo a seguir.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 \qquad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7$$

2) Dado  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ , então um número  $b$  é divisor de  $a$  se, e somente se,  
 $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$ , onde  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

De fato, se  $b \mid a$ , o Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que não há fatores primos de  $b$  que não sejam fatores primos de  $a$ . Mas, nem todos os fatores primos de  $a$  precisam estar na decomposição de  $b$ . Daí vêm os possíveis expoentes nulos em fatores de  $b$ .

Para a recíproca, tomamos  $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_s^{\gamma_s}$ , onde  $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Então,  $c \in \mathbb{N}$  e  $c \cdot b \mid a$ . Logo,  $b \mid a$ .

**Proposição 17:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$  maiores do que 1. Considere a decomposição em fatores primos de  $a$  e  $b$  dada por

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{e} \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$$

Se  $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ , então  $d = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_s^{\gamma_s}$  é o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

**Demonstração:** Pela observação 2, temos que  $d \mid a$  e  $d \mid b$ .

Agora, se  $c \in \mathbb{N}$  é um divisor de  $a$  e  $b$ , então, também pela observação 4, temos

$$c = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdots p_s^{\lambda_s}$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq \alpha_i$  e  $0 \leq \lambda_i \leq \beta_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Mas então, para cada um desses índices  $i$ , temos

$$0 \leq \lambda_i \leq \min\{\alpha_i, \beta_i\} = \gamma_i$$

Logo, novamente pela observação 2, temos que  $c \mid d$  e, portanto,  $d = \text{mdc}(a, b)$ .

**Exemplo:** Sejam  $a = 48 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^0$  e  $b = 50 = 2 \cdot 3^0 \cdot 5^2$ . Então,

$$\text{mdc}(48, 50) = 2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2.$$

### 2.5.6 Critérios de divisibilidade

A seguir, serão apresentados alguns critérios de divisibilidade, os quais se mostram úteis por possibilitarem a verificação prática da divisibilidade entre números naturais.

No nosso sistema de numeração decimal, todo número  $a$  natural pode ser decomposto da forma

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

O numeral que representa  $a$  é escrito como  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  e cada um dos  $a_i$  é chamado *algarismo* do sistema posicional de base 10.

**Critério de divisibilidade por 2:** Um número natural

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

é divisível por 2 se o algarismo  $a_0$  (o algarismo das unidades de  $a$ ) for um número par.

**Justificativa:** Dado  $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$  um número natural, observamos que toda potência  $10^n$ , com  $n \geq 1$ , é um número par. Então,

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = \\ &= a_n \cdot (2 \cdot q_n) + a_{n-1} \cdot (2 \cdot q_{n-1}) + \dots + a_1 \cdot (2 \cdot q_1) + a_0 = \\ &= 2 \cdot (a_1 \cdot q_1 + \dots + a_n \cdot q_n) + a_0 \end{aligned}$$

Ou seja, podemos escrever  $a = 2 \cdot q + a_0$ , onde  $q \in \mathbb{N}$ . Como  $2 \cdot q$  é divisível por 2, então  $a$  também o é apenas se  $a_0$  é divisível por 2, isto é, se  $a_0$  é um número par.

**Critério de divisibilidade por 3:** Um número  $a = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$  é divisível por 3 se, e somente se,  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$  é divisível por 3.

**Justificativa:** Inicialmente, observamos que qualquer potência de base 10 tem resto 1 na divisão por 3, ou seja, o resto da divisão de  $10^n$  por 3 é sempre 1, para todo  $n \geq 0$ .

Provemos usando o Princípio de Indução Finita. Note que  $10^0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1$ .

Agora, suponha  $10^k = 3 \cdot q + 1$ , para algum  $k \geq 0$ . Então,

$$10^{k+1} = 10^k \cdot 10 = (3 \cdot q + 1) \cdot 10 = 30 \cdot q + 10 = 3 \cdot (10 \cdot q + 3) + 1,$$

ou seja, a divisão de  $10^{k+1}$  por 3 também tem resto 1.

Logo, pelo princípio de indução finita, mostramos que o resto da divisão de  $10^n$  por 3 é 1, para todo  $n \geq 0$ .

Agora, dado um número natural  $a$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
a &= a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = \\
&= a_n \cdot (3 \cdot q_n + 1) + \cdots + a_2 \cdot (3 \cdot q_2 + 1) + a_1 \cdot (3 \cdot q_1 + 1) + a_0 = \\
&= (a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) + 3 \cdot (a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2 + \cdots + a_n \cdot q_n)
\end{aligned}$$

Ou seja,  $a$  é da forma  $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + 3 \cdot q$ , com  $q \in \mathbb{N}$ , e como  $3 \cdot q$  é divisível por 3,  $a$  também o é somente quando  $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$  for divisível por 3.

**Critério de divisibilidade por 4:** Um número natural  $a$ , com mais de 2 algarismos, é divisível por 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

**Justificativa:** Dado um natural  $a$  da forma  $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
a &= 10^2 \cdot (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + (a_1 \cdot 10 + a_0) = \\
&= 100 \cdot k + (a_1 \cdot 10 + a_0); k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Mas, como 100 é divisível por 4, então  $a$  será divisível por 4 se, e somente se,  $(a_1 \cdot 10 + a_0)$  for divisível por 4. Note que  $(a_1 \cdot 10 + a_0) = a_1 a_0$ , ou seja, o número formado pelos dois últimos algarismos de  $a$ , como queríamos.

**Critério de divisibilidade por 5:** Um número natural  $a$  é divisível por 5 se, e somente se, seu último algarismo for 0 ou 5.

**Justificativa:** De maneira análoga ao critério anterior, podemos escrever

$$a = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0 = 10 \cdot k + a_0, \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, como 10 é divisível por 5, então  $a$  será divisível por 5 se, e somente se,  $a_0$  também for divisível por 5. Como  $0 \leq a_0 \leq 9$ , pois é o algarismo das unidades de  $a$ , então  $a$  será divisível por 5 se, e somente se,  $a_0 = 0$  ou  $a_0 = 5$ .

**Critério de divisibilidade por 6:** Um número natural  $a$  é divisível por 6 se, e somente se,  $a$  for divisível por 2 e por 3, simultaneamente.

**Justificativa:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $a$  seja divisível por 6. Assim, existe um número natural  $t$  de modo que  $a = 6 \cdot t$ . Então,  $a = (3 \cdot 2) \cdot t = 3 \cdot (2 \cdot t)$ , isto é,  $a$  é divisível por 3. Analogamente,  $a$  é divisível por 2, pois  $a = (3 \cdot 2) \cdot t = 2 \cdot (3 \cdot t)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $a$  é divisível por 2 e por 3. Então, existem  $t, k \in \mathbb{N}$  com  $k > t$  tais que  $a = 2 \cdot k$  e  $a = 3 \cdot t$ .

Note que  $3 \cdot k - 2 \cdot k = k$  e como  $a = 2 \cdot k$ , temos  $3 \cdot k - a = k$ .

Por outro lado, como  $a = 3 \cdot t$ , temos  $k = 3 \cdot k - a = 3 \cdot k - 3 \cdot t = 3 \cdot (k - t)$ .

Logo,  $k = 3 \cdot y$ , onde  $y \in \mathbb{N}$  e  $a = 2 \cdot k = 2 \cdot (3 \cdot y) = 6 \cdot y$ .

Portanto,  $a$  é divisível por 6.

### **3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

A busca por metodologias ativas que promovam um aprendizado mais significativo no campo da Matemática tem levado educadores a explorar novas abordagens pedagógicas. A tradicional percepção da Matemática como uma disciplina abstrata, formal e desvinculada do cotidiano dos alunos contribui para a desmotivação e a dificuldade de aprendizagem. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância do desenvolvimento do letramento matemático como condição essencial para que os estudantes compreendam a importância dos saberes matemáticos na interpretação e na intervenção sobre a realidade. Nessa perspectiva, a utilização de jogos em sala de aula se mostra como uma estratégia potente, capaz de transformar a relação dos estudantes com o conhecimento matemático, uma vez que os jogos constituem um ambiente favorável à exploração, à formulação de hipóteses e à resolução de problemas.

Contudo, entende-se que a utilização de jogos como recurso didático deve ser estruturada a partir de uma metodologia pedagógica, que oriente as práticas desenvolvidas em sala de aula. Borin (2007) destaca que os jogos devem ser trabalhados com o intuito de fazer com que o estudante ultrapasse a fase da tentativa e erro e o jogar por mera diversão, possibilitando a reflexão sobre estratégias, a formulação de hipóteses e a construção de conhecimentos matemáticos. Dessa forma, a escolha consciente de uma metodologia torna-se essencial para que os jogos contribuam efetivamente para um melhor desempenho dos alunos e atitudes mais positivas frente a seus próprios processos de aprendizagem.

Nesse sentido, este capítulo explora a fundamentação teórica do uso de jogos no ensino de Matemática sob a perspectiva da metodologia da resolução de problemas, estabelecendo um paralelo entre as etapas metodológicas observadas por Borin (2007) durante o jogo e os quatro passos clássicos para a resolução de problemas propostos por Polya (2006). Analisaremos como a estrutura de um jogo pode guiar os alunos através de um processo análogo ao método de Polya (2006), fomentando uma postura investigativa e autônoma na construção do conhecimento. Adicionalmente, serão abordados os conceitos de Macedo et al. (2000) sobre a aprendizagem com jogos e situações-problema e as orientações da BNCC, organizando os principais conceitos que fundamentam o trabalho do professor em sala de aula.

### 3.1 O Jogo como Ambiente de Aprendizagem e Investigação

Autores como Borin (2007) e Macedo et al. (2000) destacam que, quando inserido em um contexto pedagógico bem planejado, o jogo transcende a mera diversão para se tornar um rico ambiente de aprendizagem.

Borin (2007) observa que, ao jogar, os alunos adotam uma postura semelhante à de um cientista na busca por uma solução, partindo de uma experimentação inicial, levantando dados, formulando e testando hipóteses para atingir um objetivo, que é a vitória no jogo. Essa atitude investigativa contrasta com a passividade frequentemente observada em aulas expositivas.

"De fato, quando analisamos o comportamento e a atividade mental de um jogador disposto a ganhar, verificamos que a postura é a mesma de um cientista em busca de solução para um problema. Os dois, inicialmente, partem para uma experimentação ou tentativa para conhecer o que defrontam, sem muita ordem ou direção. Após essa fase, como numa investigação científica, coletam os dados que podem influenciar ou alterar as várias situações e formulam hipóteses que precisarão ser testadas." (BORIN, 2007, p. 8)

Nesse sentido, o jogo promove o desenvolvimento de um conjunto de habilidades essenciais que, conforme aponta Borin (2007), contribuem para o aprimoramento do raciocínio lógico tanto dedutivo quanto indutivo, da criatividade, da linguagem e da capacidade de descentralização, que é entendida como a habilidade de considerar o ponto de vista do outro, aspecto fundamental para o trabalho em equipe e para a construção de argumentos. O jogo, ao exigir que o aluno se comunique e justifique suas jogadas, favorece o desenvolvimento da argumentação e da capacidade de verificar a veracidade de uma solução.

Além disso, a utilização de jogos atua diretamente na desconstrução da visão de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada. Ao se depararem com a necessidade de experimentar, formular e testar hipóteses, os alunos percebem que o conhecimento matemático é construído ativamente.

“O jogo desenvolveu nos alunos o hábito de explorar as possibilidades ao acaso, sem a preocupação de achar uma fórmula pronta, sem uma técnica específica, exatamente como se inicia a pesquisa matemática.” (BORIN, 2007, p. 5)

Borin (2007) destaca que o erro, nesse contexto, perde seu caráter punitivo e se torna um elemento crucial para a aprendizagem. A derrota, ou uma jogada sem sucesso, funciona como uma indicação clara para que o aluno reveja suas estratégias, e essa constante necessidade de reformulação de hipóteses impulsionam o desenvolvimento da autoconfiança, eliminando os bloqueios, e do senso de que o erro é uma etapa natural do processo de aprendizagem.

### 3.2 Uso de jogos na perspectiva da metodologia da Resolução de Problemas

A escolha da metodologia da Resolução de Problemas para orientar uso de jogos no ensino de Matemática reside na surpreendente sobreposição entre as etapas que os alunos percorrem ao jogar e o método proposto por Polya (2006) para a resolução de um problema, no qual o autor sistematizou o processo em quatro etapas fundamentais, que não se constituem como um algoritmo rígido, mas como um guia para o pensamento.

Borin (2007), ao observar alunos em situações de jogo, identificou que, na tentativa de vencer, eles se organizam e controlam seu comportamento através de ações análogas às etapas de Polya (2006). O quadro a seguir estabelece um paralelo direto entre as duas abordagens.

Quadro 1 – Comparação entre os passos de Polya e as etapas do jogo

Etapas de Polya para Resolução de Problemas	Etapas da Resolução no Jogo (segundo Borin)	Descrição da atividade no contexto do Jogo
Compreender o problema	Exploração dos materiais, leitura atenta das regras do jogo para compreender o que é permitido e possível e entendimento do objetivo.	O aluno entende o objetivo do jogo, as condições (regras) e os recursos disponíveis (dados, peças, cartas).
Estabelecer um plano	Levantamento dos dados e formulação de hipóteses, planejamento de como jogar e proposição de estratégias.	O jogador analisa o estado atual do jogo, antecipa possíveis jogadas do adversário e formula hipóteses sobre qual sequência de ações o levará à vitória.
Executar o plano	Execução da estratégia escolhida a partir da hipótese inicial.	O aluno coloca sua estratégia em prática, movendo as peças, usando as cartas ou realizando as ações permitidas.
Fazer o Retrospecto (Revisar)	Verificação da eficiência da jogada para alcançar a vitória.	Após cada jogada, ou ao final da partida, o aluno analisa o resultado. A derrota é uma indicação para rever as hipóteses, configurando um ciclo de reflexão e aprendizado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Este paralelo demonstra que o jogo, quando bem estruturado, oferece um ambiente concreto e motivador onde os alunos podem vivenciar o método de Polya (2006) de forma intuitiva e aplicada.

Para que o processo de resolução de problemas no jogo seja efetivo e não se perca no esquecimento, Borin (2007) enfatiza a importância do registro das jogadas. A reprodução simples do tabuleiro ou do estado do jogo serve como um dado concreto para análise posterior, permitindo que os alunos revisitem suas decisões e identifiquem os pontos que levaram ao sucesso ou ao fracasso das jogadas.

Além disso, a socialização das descobertas se mostra como um passo metodológico essencial. O professor deve fazer a exposição das estratégias e raciocínios encontrados pelos grupos, transformando a experiência individual em conhecimento coletivo. Essa troca estimula o aprimoramento da capacidade de argumentação pelos alunos e a justificar logicamente suas conclusões, consolidando o aprendizado.

“A necessidade de argumentar para comprovar a veracidade de uma solução para o problema/jogo, ou de respeitar o seu oponente, ante uma dedução mais lógica, fez com que cada aluno perdesse o receio de se expressar para defender seu ponto de vista.” (BORIN, 2007, p. 5)

De forma complementar, Macedo et al. (2000) enfatiza que o objetivo central do trabalho com jogos é fazer com que o jogador tenha uma atuação consciente e intencional. Isto é, se o resultado não for favorável, o aluno é levado a analisar os diferentes aspectos do processo que o impediram de atingir o objetivo, promovendo a regulação das aprendizagens.

Mais ainda, sistematiza o processo de conhecimento com jogos em quatro etapas fundamentais, que reforcem a visão de que o jogo é um ambiente de investigação e construção do saber:

**a) exploração dos materiais e aprendizagem das regras:** momento inicial de domínio da composição e do funcionamento do jogo.

**b) prática do jogo e construção de estratégias:** o jogar propriamente dito, onde se criam formas de vencer.

**c) resolução de situações-problema:** proposições de desafios específicos dentro do contexto do jogo.

**d) análise das implicações do jogar:** reflexão sobre o processo, erros e acertos, e a possibilidade de generalizar as descobertas.

Essa perspectiva reforça a importância do confronto de diferentes pontos de vista no jogo, que é essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico, e destaca o papel do

professor como um profissional que deve ter o domínio da estrutura do jogo para propor novas situações que enriqueçam o trabalho.

Segundo Borin (2007), no contexto do jogo, a barreira entre professor e aluno tende a se atenuar, pois é necessária uma mudança de postura do docente, que deixa de ocupar exclusivamente a posição central no processo de ensino-aprendizagem e passa a atuar como um incentivador na busca pela vitória. Nesse sentido, a autora destaca ainda que, ao utilizar jogos sob a perspectiva da resolução de problemas, cabe ao professor selecionar e estruturar os jogos de modo que favoreçam a investigação, a formulação de hipóteses e a tomada de decisões, ultrapassando a simples prática da tentativa e erro ou do jogar por diversão. Durante e após o jogo, o professor deve propor questionamentos e intervenções que estimulem os estudantes a explicitar raciocínios, justificar escolhas e analisar diferentes estratégias, promovendo momentos de socialização e discussão que favoreçam a argumentação matemática e a construção coletiva do conhecimento. Além disso, é responsabilidade do professor relacionar o jogo aos conceitos matemáticos envolvidos, sistematizando as aprendizagens e articulando-as com os conteúdos curriculares, de modo que o jogo se configure como uma situação-problema efetiva para o desenvolvimento do raciocínio, da autonomia e da postura investigativa dos alunos.

“Essa metodologia representa, em sua essência, uma mudança de postura em relação ao que é ensinar matemática, ou seja, ao adotá-la, o professor será um espectador do processo de construção do saber pelo seu aluno, e só irá interferir ao final do mesmo, quando isso se fizer necessário através de questionamentos, por exemplo, que levem os alunos a mudanças de hipóteses, apresentando situações que forcem a reflexão ou para a socialização das descobertas dos grupos, mas nunca para dar a resposta certa. Ao aluno, de acordo com essa visão, caberá o papel daquele que busca e constrói o seu saber através da análise das situações que se apresentam no decorrer do processo.” (BORIN, apud DINIZ, 1990, p. 10).

### **3.3 A perspectiva dos documentos oficiais sobre Jogos e Resolução de Problemas**

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância de uma abordagem que articula o uso de jogos à metodologia da resolução de problemas ao destacar esta última como um dos processos matemáticos privilegiados, que deve ser, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. O documento defende

o desenvolvimento do letramento matemático, que é a capacidade de "raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos".

A BNCC reconhece os jogos como recursos didáticos que, ao lado de outras ferramentas, têm um "papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas". Mais do que isso, o documento aponta para a necessidade de os alunos perceberem o "caráter de jogo intelectual da matemática", um aspecto que estimula a investigação e pode tornar o aprendizado prazeroso.

“Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.” (BRASIL, 2018, p. 266)

O documento também ressalta que a utilização de jogos, entre outros recursos didáticos, amplia as possibilidades de abordagem dos conteúdos matemáticos e favorece a construção de significados pelos alunos. Todavia, a BNCC pondera que o uso do jogo, de forma isolada, não assegura, por si só, a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Para que cumpra efetivamente sua função pedagógica, torna-se necessário que sua utilização esteja articulada a situações didáticas planejadas, que promovam a reflexão e a formalização de conceitos, evidenciando uma perspectiva metodológica do uso de jogos no ensino de Matemática.

“[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.” (BRASIL, 2018, p. 276)

Dessa forma, a BNCC não apenas valida o uso de jogos, mas o integra a uma visão mais ampla da educação matemática, na qual o aluno participa ativamente do processo visando o

desenvolvimento de competências socioemocionais e cognitivas, como o pensamento crítico, a autonomia e o trabalho em conjunto.

Em consonância com as orientações da BNCC, o Currículo Paulista também atribui papel central à Metodologia da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, compreendendo-a como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos e para o desenvolvimento do pensamento crítico. O documento enfatiza que enfrentar desafios matemáticos possibilita aos estudantes articular e refinar o próprio pensamento, valorizar estratégias pessoais de resolução, conviver com diferentes pontos de vista e ajustar conscientemente seus procedimentos, favorecendo atitudes como persistência, investigação e autonomia intelectual. Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas configura-se como eixo estruturante do processo de aprendizagem, promovendo a participação ativa dos estudantes e o trabalho colaborativo em sala de aula.

“O caminho da Resolução de Problemas como estratégia metodológica tem a perspectiva de tornar os estudantes ativos no processo de aprendizagem, uma vez que um problema é o ponto de partida para a construção de novos conhecimentos. Desenvolver um trabalho em conjunto entre estudantes e professores de forma colaborativa, por meio de problemas que sejam compatíveis com os conhecimentos dos estudantes, possibilita oportunidades para a organização do pensamento lógico.” (SÃO PAULO, 2019, p. 226)

O Currículo Paulista (2019) também destaca que a associação da Resolução de Problemas ao uso de jogos, tecnologias digitais e materiais manipuláveis potencializa o desenvolvimento do raciocínio crítico, da criatividade e da imaginação, além de contribuir para tornar o aprendizado mais significativo e prazeroso. Os jogos, em especial, são apresentados como recursos que favorecem a socialização, o respeito às regras, a cooperação e a reflexão sobre erros e acertos, ampliando não apenas aspectos cognitivos, mas também dimensões socioemocionais do aprender Matemática.

“Os jogos auxiliam na socialização dos estudantes, estimulam o trabalho em equipe, a busca da cooperação mútua, ou seja, estimulam a interação entre os pares. Da mesma maneira, como os jogos estabelecem regras que representam limites, isto concorre para que eles aprendam a respeitar as inúmeras soluções para uma mesma situação, além de questionar os seus erros e acertos.” (SÃO PAULO, 2019, p. 227)

Dessa forma, o documento reforça a compreensão de que o uso de jogos, quando articulado a intencionalidade pedagógica e a situações de investigação, constitui estratégia relevante para a construção de significados e para o engajamento dos estudantes no processo educativo.

### **3.4 Conclusão**

A fundamentação teórica aqui exposta evidencia que o uso de jogos no ensino de Matemática é muito mais do que uma ferramenta lúdica. Quando alinhado à metodologia da Resolução de Problemas, configura-se como uma abordagem pedagógica sólida, alinhada às competências exigidas pela sociedade contemporânea e formalizada em documentos norteadores como a BNCC. A prática com jogos, conforme descrita por Borin (2007) e Macedo et al (2000), cria um microcosmo onde os alunos, movidos pelo desejo de vencer, engajam-se em um ciclo de investigação, planejamento, execução e reflexão.

O paralelo com os quatro passos de Polya (2006) revela que essa atividade instrumentaliza os alunos com um método poderoso para a resolução de problemas, aplicável a uma vasta gama de situações dentro e fora da escola. Ao vivenciar repetidamente esse processo em um ambiente seguro e motivador, onde o erro é visto como parte da aprendizagem, o aluno não apenas aprende Matemática, mas aprende a pensar matematicamente, desenvolvendo autonomia, pensamento crítico e a confiança necessária para enfrentar desafios complexos. Cabe ao educador, portanto, apropriar-se dessas metodologias para orquestrar experiências de aprendizagem que sejam, ao mesmo tempo, prazerosas e profundamente formadoras.

#### 4 O JOGO “BATALHA DO MDC”

Este capítulo trata da apresentação do jogo desenvolvido como produto educacional desta pesquisa, bem como do relato da aplicação junto às turmas participantes. A motivação para elaboração desse material surgiu a partir das dificuldades apresentadas pelos alunos de outros anos da etapa do ensino fundamental, que foram observadas pelo professor nos anos anteriores de sua prática docente. Para além das dificuldades recorrentes na realização do cálculo do máximo divisor comum (MDC), bem como das frequentes manifestações de descontentamento diante da necessidade de aplicá-lo, observou-se que os alunos frequentemente confundiam a decomposição em fatores primos com o procedimento de obtenção do máximo divisor comum por meio da decomposição simultânea, o que evidenciava fragilidades na compreensão desses conceitos.

Com o intuito de enfrentar esse desafio, buscou-se desenvolver um recurso didático que pudesse apoiar o processo de aprendizagem do conceito do máximo divisor comum junto aos alunos de duas turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, às quais o autor lecionou no ano letivo em que este trabalho foi realizado. Embora a Base Nacional Comum Curricular indique que o conteúdo de máximo divisor comum (MDC) deve ser abordado a partir do sétimo ano, por meio da habilidade EF07MA01: “Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos”, o material apostilado utilizado pela rede municipal onde a unidade escolar está inserida apresenta esse conceito já no sexto ano, restringindo-se, inclusive, ao uso do método da decomposição simultânea para o cálculo do MDC.

Nesse contexto, foi elaborado pelo autor um jogo educativo, denominado “Batalha do MDC”, com a finalidade de oferecer um recurso pedagógico alternativo que contribuísse para a compreensão do conceito de máximo divisor comum, estimulando a interação entre os alunos e a construção coletiva de estratégias, além de contemplar o conteúdo previsto no material didático utilizado pelas turmas. O jogo tem como princípio uma propriedade fundamental desse conceito: a possibilidade de determinar o máximo divisor comum por meio de subtrações sucessivas, que permitem reduzir sucessivamente o cálculo do MDC de dois números ao cálculo do MDC de números cada vez menores. Ilustrando, sendo  $a, b \in \mathbb{N}$  tais que  $b \geq a$ , temos

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b - a).$$

#### 4.1 Descrição do jogo

O jogo desenvolvido é composto por um tabuleiro quadriculado 8x8, 60 peças de duas cores distintas (30 de cada cor), uma tabela de registros e dois dados: um tradicional de seis faces numeradas de 1 a 6 e outro contendo as faces numeradas de 1 a 5, sendo a sexta face substituída por um símbolo. As Figuras 1 e 2 abaixo ilustram os materiais utilizados no jogo, que também são apresentados no APÊNDICE A.

Figura 1: Materiais do jogo



Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 2: Tabela de registros

TABELA DE REGISTROS		BATALHA DO MEC		
Rodada	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças sobre o tabuleiro no final da rodada	Vencedor da rodada
1				
2				
3				

Fonte: Elaborado pelo Autor

Com o objetivo de incentivar a cooperação entre os participantes, a argumentação e a tomada de decisões coletivas, favorecendo um aprendizado significativo, a atividade foi estruturada para ser realizada em equipes de dois integrantes.

O jogo se organiza em rodadas e as equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar. As equipes, cada uma na sua vez, devem fazer o lançamento dos dados e o produto resultante da multiplicação dos números sorteados determina a quantidade de peças que a equipe deverá dispor aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro. Após essa etapa de preparação, inicia-se a “batalha”: a equipe com o menor número de peças inicia a rodada, avançando suas peças sobre as peças do adversário. A captura ocorre mediante a substituição das peças da equipe rival por suas próprias, respeitando a condição de que a quantidade de peças utilizadas seja menor ou igual à do oponente.

O processo repete-se alternadamente entre as equipes até que uma delas consiga capturar todas as peças do adversário, mantendo ainda parte de suas peças no tabuleiro. A cada rodada vencida, registra-se na tabela a quantidade de peças restantes e a equipe vencedora. O jogo é finalizado em um sistema de “melhor de três rodadas”, sendo considerada vencedora a equipe que conquistar duas vitórias. A descrição a seguir detalha as regras do jogo, essenciais para o correto desenvolvimento da atividade e para a compreensão de seus objetivos pelos participantes.

### ***Regras do Jogo***

- 1. As equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar.*
- 2. A equipe que iniciar o jogo escolhe a cor das suas peças e faz o lançamento dos dois dados (se no lançamento do dado que contém 5 números sair a face contendo o símbolo, esse dado deverá ser lançado novamente). O produto obtido na multiplicação dos números resultantes do lançamento dos dados será a quantidade de peças que a equipe irá dispor no tabuleiro.*
- 3. Em seguida, a outra equipe lança os dois dados e dispõe no tabuleiro a quantidade de peças igual ao produto obtido na multiplicação dos números que saíram nos dados.*
- 4. Cada equipe deve anotar na tabela de registros o número de peças que irá dispor no tabuleiro.*
- 5. As equipes devem posicionar suas peças aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro.*
- 6. A partir de agora começa a batalha. A equipe que tiver a menor quantidade de peças inicia, avançando todas as suas peças sobre as do adversário. Para isso, deve capturar do tabuleiro as peças do adversário e colocar suas peças na mesma*


posição. Caso as duas equipes obtenham o mesmo produto no lançamento dos dados, a equipe que iniciou o jogo deve iniciar também a batalha.

7. Esse processo deve ser repetido enquanto a quantidade de peças da equipe da vez for menor ou igual a quantidade de peças da equipe adversária.
8. Quando o número de peças da equipe da vez ficar maior que da equipe adversária, a equipe passa a vez.
9. A equipe da vez deve repetir os passos 6, 7 e 8 até que uma das equipes consiga capturar todas as peças da equipe adversária.
10. Vence a rodada a equipe que conseguir capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. Essa quantidade de peças restantes no tabuleiro deve ser registrada na tabela, juntamente com a equipe vencedora da rodada.
11. Ganha o jogo a equipe que vencer a melhor de três rodadas.

A Figura 3 apresenta as regras do jogo impressas, que deverão ser disponibilizadas aos alunos.

Figura 3 – Regras do jogo entregue aos alunos

REGRAS



**BATALHA MDC**



**MATERIAL:** Tabuleiro quadriculado 8x8; 60 peças de duas cores diferentes, sendo 30 de cada cor; tabela de registros e dois dados de 6 faces, sendo um deles com as faces numeradas de 1 a 6 e outro com as faces numeradas de 1 a 5 e uma das faces contendo um símbolo qualquer.

**PARTICIPANTES:** Duas equipes, que alternam as jogadas.

**OBJETIVO:** Capturar todas as peças do adversário.

- 01** As equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar.
- 02** A equipe que iniciar o jogo escolhe a cor das suas peças e faz o lançamento dos dois dados (se no lançamento do dado que contém 5 números sair a face contendo o símbolo, esse dado deverá ser lançado novamente). O produto obtido na multiplicação dos números resultantes do lançamento dos dados será a quantidade de peças que a equipe irá dispor no tabuleiro.
- 03** Em seguida, a outra equipe lança os dois dados e dispõe no tabuleiro a quantidade de peças igual ao produto obtido na multiplicação dos números que saíram nos dados.
- 04** Cada equipe deve anotar na tabela de registros o número de peças que irá dispor no tabuleiro.
- 05** As equipes devem posicionar suas peças aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro.

- 06** A partir de agora começa a batalha. A equipe que tiver a menor quantidade de peças inicia, avançando todas as suas peças sobre as do adversário. Para isso, deve capturar do tabuleiro as peças do adversário e colocar suas peças na mesma posição. Caso as duas equipes obtenham o mesmo produto no lançamento dos dados, a equipe que iniciou o jogo deve iniciar também a batalha.
- 07** Esse processo deve ser repetido enquanto a quantidade de peças da equipe da vez for menor ou igual a quantidade de peças da equipe adversária.
- 08** Quando o número de peças da equipe da vez ficar maior que da equipe adversária, a equipe passa a vez.
- 09** A equipe da vez deve repetir os passos 6, 7 e 8 até que uma das equipes consiga capturar todas as peças da equipe adversária.
- 10** Vence a rodada a equipe que conseguir capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. Essa quantidade de peças restantes no tabuleiro deve ser registrada na tabela, juntamente com a equipe vencedora da rodada.
- 11** Ganha o jogo a equipe que vencer a melhor de três rodadas.

Fonte: Elaborado pelo Autor

## **4.2 Planejamento da atividade**

### **4.2.1 Primeiro encontro: Compreensão das regras e execução do jogo.**

Duração estimada: 2 aulas de 50 minutos.

Nesse primeiro encontro, o objetivo deve ser proporcionar um momento de exploração inicial do material do jogo, aliada à compreensão das regras e à aplicação prática do jogo, etapa fundamental para o desenvolvimento da atividade de forma autônoma e significativa nos encontros seguintes.

Inicialmente, os alunos devem ser organizados em grupos, formados por duas equipes compostas por dois alunos em cada uma, favorecendo a interação, a cooperação e a argumentação entre os participantes. Em seguida, é fundamental que cada aluno realize a leitura individual das regras do jogo, de modo a promover uma compreensão inicial autônoma.

Após esse momento, abre-se espaço para discussões coletivas, nas quais o professor pode esclarecer dúvidas que surgirem e realizar uma leitura em voz alta das regras, assegurando o entendimento comum acerca do que é permitido, dos limites estabelecidos e da dinâmica geral do jogo. A seguir, apresenta-se o arquivo contendo as regras do jogo.

Após a leitura das regras pelos alunos, o professor deve conduzir questionamentos estratégicos para verificar a compreensão das regras. Caso as respostas apresentadas estejam incorretas, recomenda-se que os alunos releiam a regra correspondente à explicação em questão, garantindo assim a correta compreensão do jogo. A seguir, são apresentados os questionamentos sugeridos para serem feitos neste momento.

#### ***Questionamentos para compreensão das regras***

- 1. Como se define quem inicia o jogo?*
- 2. Como as equipes se preparam para iniciar a batalha?*
- 3. Como se define quem começa a batalha?*
- 4. Quantas peças do adversário a equipe deve capturar na sua vez?*
- 5. Em que situação a equipe passa a vez?*
- 6. Quando a rodada termina?*
- 7. Quem vence a rodada?*
- 8. Quem vence o jogo?*

Após a compreensão das regras, as equipes podem iniciar o jogo de maneira autônoma, realizando até três rodadas por disputa. Em cada rodada, os alunos realizam as jogadas conforme as regras previamente estabelecidas e registram seus resultados na tabela fornecida.

Ao longo das partidas, os alunos são orientados a observar atentamente as quantidades de peças envolvidas em cada jogada e os resultados obtidos, de modo a identificar possíveis padrões que possam levá-los a compreender as relações que serão discutidas em momento posterior.

Enquanto o jogo acontece, o professor deve circular pela sala, acompanhando o andamento das partidas e observando as estratégias utilizadas pelos alunos. Sua intervenção deve ocorrer apenas quando necessária, priorizando a formulação de questionamentos que estimulem a reflexão sobre as decisões tomadas e incentivem os alunos a validar suas próprias hipóteses. Além disso, o professor pode promover breves trocas entre as equipes, de forma que os alunos compartilhem suas observações e comparem resultados, favorecendo o diálogo, a argumentação e, conseqüentemente, o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes.

Ao término da atividade, o professor deve recolher todos os materiais utilizados no jogo, incluindo as tabelas de registros, uma vez que esses documentos reúnem as informações necessárias para a etapa posterior de exploração do conteúdo.

#### **4.2.2 Segundo encontro: Questionamentos para exploração do conteúdo**

Duração estimada: 2 aulas de 50 minutos.

No segundo encontro, o objetivo consiste na exploração do conteúdo a partir da discussão coletiva dos resultados obtidos durante as jogadas, promovendo a reflexão sobre as estratégias adotadas e os conceitos utilizados no decorrer da atividade, o que possibilitará a construção do conceito de máximo divisor comum a partir da análise de situações concretas.

Para conduzir a discussão, o professor pode projetar no quadro o arquivo em branco da tabela de registros, e esta poderá ser preenchida a partir de exemplos selecionados das rodadas realizadas pelos grupos. Essa tabela deve conter diferentes resultados observados, servindo como base para a validação de hipóteses e para a identificação de regularidades. A partir dessa projeção, o docente deve propor questionamentos orientadores que estimulem a reflexão, a argumentação e o debate de ideias entre os alunos. Os questionamentos recomendados, os quais constam no APÊNDICE C, são descritos a seguir:

### *Questionamentos para exploração do conteúdo*

- 1. Quem tem mais peças sempre ganha?*
- 2. É possível iniciar o jogo com zero peças?*
- 3. O que aconteceria se alguma equipe iniciasse o jogo com zero peças?*
- 4. Quantas peças restam no tabuleiro quando os dois números iniciais são pares?*
- 5. Quantas peças restam no tabuleiro quando um dos números é múltiplo do outro?*
- 6. Quantas peças restam no tabuleiro se as duas equipes iniciarem com a mesma quantidade de peças?*
- 7. Se uma das equipes iniciar a rodada com 5 peças e a outra com 10 peças, qual será a quantidade de peças que irá restar no tabuleiro?*
- 8. Se uma das equipes iniciar a rodada com 15 peças e a outra com 18 peças, qual será a quantidade de peças que irá restar no tabuleiro?*
- 9. Qual a relação existente entre a quantidade de peças que resta no tabuleiro e os dois números iniciais?*

Esses questionamentos devem ser apresentados gradualmente, acompanhando a análise das situações exibidas na tabela. O papel do professor é conduzir discussão de modo que os alunos testem hipóteses, revisem suas suposições e construam generalizações fundamentadas na observação e na experimentação. Quando surgirem respostas incorretas ou conclusões precipitadas, recomenda-se que o professor proponha novas simulações com diferentes valores, a fim de provocar a reflexão e possibilitar a reconstrução das ideias.

Durante a discussão, é fundamental que o professor valorize o raciocínio dos alunos, estimulando-os a explicitar o pensamento desenvolvido até suas conclusões e a justificar suas respostas com base nas regras do jogo e nos resultados obtidos. Situações em que as equipes identificam relações específicas, como quando os números iniciais são múltiplos entre si ou quando são iguais, devem ser destacadas e exploradas comparativamente, permitindo a percepção de padrões e a generalização.

O professor deve escolher alguns exemplos e, a partir destes, orientar a análise de modo que os alunos percebam que a quantidade de peças que permanece no tabuleiro ao final da

rodada corresponde ao maior divisor comum entre os dois números iniciais. Para favorecer essa compreensão, pode-se solicitar que os alunos listem os divisores de cada número, identifiquem os divisores comuns e observem que o maior deles coincide com a quantidade de peças restantes ao final do jogo.

Ao término dessa discussão, recomenda-se propor um desafio investigativo como forma de fechamento da atividade desse encontro. Os alunos podem ser convidados a refletir sobre possíveis estratégias que garantam a vitória no jogo, considerando o que foi aprendido sobre as relações entre os números iniciais. Essa etapa final serve como ponto de partida para novas investigações, que incluirão variações nas regras do jogo, estimulando a continuidade do raciocínio e o aprofundamento da compreensão do conceito de MDC.

### **4.2.3 Terceiro encontro: Formalização do conceito**

Duração estimada: 2 aulas de 50 minutos.

No terceiro encontro, o objetivo concentra-se na formalização do conceito, sistematizando os conhecimentos construídos nas etapas anteriores e promovendo a consolidação do aprendizado a partir das experiências vivenciadas no jogo.

No último encontro, é sugerido ao professor organizar novamente as equipes e apresentar uma nova versão das regras do jogo, incluindo a modificação que confere à segunda equipe a possibilidade de escolher a quantidade de peças a partir do número obtido pela primeira equipe. Essa alteração tem como objetivo ampliar as possibilidades de análise e favorecer a formulação de novas estratégias, mantendo o caráter investigativo da atividade. O arquivo contendo as regras e alteração mencionada encontram-se no APÊNDICE B.

Antes de iniciar as partidas, o professor pode retomar brevemente as descobertas do último encontro e, a partir delas, propor um novo desafio, incentivando os alunos a pensar em outras estratégias que possam garantir a vitória, além das já conhecidas.

Durante essa fase, o professor deve ouvir as hipóteses dos estudantes e valorizá-las como ponto de partida para novas explorações. Caso não surja a percepção de novas estratégias, o professor pode propor um novo questionamento, perguntando, por exemplo, o que aconteceria se a segunda equipe escolhesse um número que fosse um múltiplo do número escolhido pela primeira equipe, acrescido de uma unidade (um caso particular desta situação ocorre quando os números escolhidos pelas equipes são números consecutivos).

Em seguida, o professor deve orientar as equipes a simular novas rodadas considerando essa estratégia e observar os resultados obtidos. Espera-se que os alunos percebam, pela

experimentação, que essa escolha garante a vitória, pois, quando os números iniciais são consecutivos, o resultado final sempre corresponde a uma peça restante no tabuleiro. Essa descoberta pode ser explorada por meio de uma discussão orientada, destacando que, ao dividir o maior número pelo menor, o quociente é igual a 1 e o resto também é 1, o que caracteriza a relação entre números consecutivos.

Após essa exploração, o professor deve conduzir o grupo à formalização do conceito de máximo divisor comum, mostrando como a dinâmica do jogo permite determinar o MDC entre quaisquer dois números naturais. Para isso, é recomendável projetar novamente a tabela de registros e introduzir a notação do MDC para os valores obtidos durante as partidas.

Nesse momento, o professor pode sistematizar as principais observações em linguagem acessível aos alunos, destacando que:

1. O MDC entre qualquer número e zero é o próprio número;
2. O MDC entre qualquer número e um é sempre um;
3. O MDC entre dois números consecutivos é sempre um;
4. O MDC entre dois números múltiplos entre si é o menor deles;
5. O MDC entre um número e ele mesmo é o próprio número.

Em seguida, recomenda-se que o professor proponha algumas situações para ilustrar o processo de determinação do MDC a partir do contexto do jogo. Por exemplo, para calcular o máximo divisor comum entre os números 4 e 10, o professor pode relacionar os valores iniciais à quantidade de peças de cada uma das equipes disputando a batalha. Então, naturalmente, a equipe com 4 peças inicia, já que possui a menor quantidade, deixando a outra equipe com 6 peças.

Para melhor ilustrar a situação, é recomendado utilizar a notação do máximo divisor comum adotada anteriormente e escrever a igualdade

$$mdc(4,10) = mdc(4,6)$$

Agora, a equipe com 4 peças pode novamente capturar 4 peças da equipe adversária, que passa a contar com 2 peças sob o tabuleiro.

$$mdc(4,10) = mdc(4,6) = mdc(4,2)$$

Nesse momento, o professor pode retomar a uma das observações sintetizadas anteriormente para determinar o máximo divisor comum entre os dois últimos valores.

Nesse caso, pela observação de número 4, conclui-se que

$$mdc(4,10) = mdc(4,6) = mdc(4,2) = 2.$$

Generalizando, dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , supondo  $b \geq a$ , o professor pode simular a situação perguntando: “*Se uma equipe tiver  $a$  peças e a outra equipe tiver  $b$  peças, quem deve jogar primeiro?*”, levando os alunos a concluir que a equipe com  $a$  peças inicia, por ter o menor número. A partir daí, pode-se questionar quantas peças restarão ao final da jogada, chegando a conclusão de que restarão no tabuleiro  $b - a$  peças. Desse modo, podemos formalizar essa relação da seguinte forma:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b - a).$$

Repetindo o raciocínio, o professor deve orientar as próximas etapas até que se obtenha uma das situações destacadas acima, de modo que seja possível determinar o máximo divisor comum entre  $a$  e  $b$ .

Essa abordagem permite que os alunos compreendam intuitivamente o processo de cálculo do MDC, percebendo que a sequência de jogadas do jogo reproduz o mesmo raciocínio presente num algoritmo formal, ainda que sem recorrer à linguagem simbólica. Dessa forma, o jogo promove a construção significativa do conceito a partir da ação, da experimentação e da reflexão orientada.

### **4.3 Relato da aplicação da atividade**

A atividade foi desenvolvida com alunos de duas turmas do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal, nas quais o autor atuou como docente durante o ano letivo.

#### **4.3.1 Primeiro encontro**

Inicialmente, os alunos foram divididos em equipes formadas por dois integrantes e, posteriormente, foram organizados grupos compostos por duas equipes que competiriam entre si. Os alunos receberam as regras impressas, de modo que pudessem realizar a leitura e discutir as possíveis dúvidas, como ilustrado na Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Alunos fazendo a leitura das regras do jogo



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Também foi mostrado para os alunos os materiais do jogo, de forma coletiva, conforme eram descritos nas regras. Esse momento mostrou-se fundamental, pois, na ansiedade de começar o jogo, muitos tendem a se concentrar apenas na ordem em que as regras estão descritas sem compreender plenamente o jogo de modo geral.

Durante a leitura das regras, os alunos levantaram dúvidas principalmente sobre quando uma equipe deveria passar a vez. Foi necessário explicar detalhadamente que isso só ocorria quando a equipe adversária possuísse menos peças, já que a regra permitia continuar jogando enquanto uma equipe tivesse quantidade de peças menor ou igual que a outra. Após esse momento de esclarecimento, realizamos uma série de questionamentos para verificar a compreensão das regras, e a grande maioria conseguiu responder corretamente.

Para a primeira pergunta, sobre quem inicia o jogo, um grupo respondeu que quem iniciaria seria aquela equipe que tirasse o maior número no lançamento do dado enquanto os outros grupos responderam que se definiria no par ou ímpar. Diante da divergência das respostas obtidas, foi esclarecido que aquele grupo decidiu iniciar a jogada fazendo o lançamento de um dado, pois o par ou ímpar não era obrigatório.

Outro momento que deve ser levado em consideração foi relacionado ao terceiro questionamento, sobre como se define quem iniciaria a batalha. A grande maioria dos alunos respondeu, imediatamente, que a equipe que venceu o par ou ímpar era quem iniciaria. Então, pudemos notar que a sutileza entre o início do jogo e o início da batalha não havia sido percebida

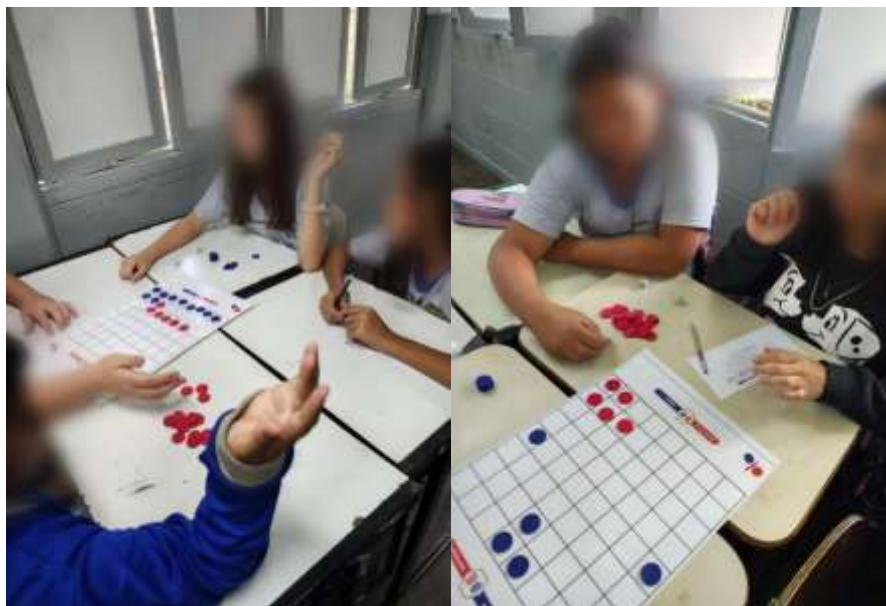
pela maioria dos alunos. Nesse momento, houve uma intervenção para esclarecer a diferença entre cada um desses momentos do jogo.

Como houve dúvidas no momento da leitura das regras sobre passar a vez, os alunos foram questionados novamente para verificar a compreensão, destacando a grande importância desse momento do jogo. Para um grupo de alunos em específico isso ainda não estava claro o bastante, e os mesmos responderam que “uma equipe passa a vez quando pegar todas as peças do adversário”. Então, para que não houvessem mais dúvidas quanto ao momento de passar a vez, foi feita uma representação do tabuleiro no quadro para simular uma situação de jogo.

Após essa explicação, finalmente foi compreendido que a equipe passa a vez somente quando ficar com mais peças do que a equipe adversária. Dúvidas adicionais, inclusive algumas que já tinham sido esclarecidas anteriormente, foram sanadas por meio de situações hipotéticas, construídas coletivamente, e por meio de consulta às regras.

Em seguida, cada equipe recebeu o restante do material: tabuleiro, peças e a tabela de registros. Alguns grupos solicitaram uma rodada-teste sob supervisão do professor, enquanto outros, mais confiantes, iniciaram o jogo de imediato. O professor circulou pela sala durante o desenvolvimento do jogo, acompanhando os grupos, observando como os alunos lidavam com o desafio e intervindo apenas quando necessário. Na Figura 5, é possível observar os alunos jogando o jogo, enquanto o professor circula pela sala, acompanhando o desenvolvimento das rodadas.

Figura 5 – Alunos interagindo durante a execução do jogo



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Um ponto interessante a observar foi a atenção inicial dos alunos em relação a quais peças deveriam ser retiradas, ainda que já tivesse sido discutido que a disposição das peças no tabuleiro deveria ser feita de forma aleatória. Com o avanço da atividade, compreenderam que o aspecto relevante não era a posição das peças, mas sim a quantidade. A presença de dois integrantes em cada equipe também colaborou para a garantia da correta execução dos movimentos, permitindo que um aluno acompanhasse e conferisse as retiradas realizadas pelo adversário, assegurando assim a fidelidade às regras do jogo.

As disputas foram organizadas em até três rodadas, sendo considerada vencedora a equipe que obtivesse vantagem em duas delas, e rapidamente os alunos perceberam que, no momento em que sobrava apenas uma peça em uma das equipes, esta automaticamente se tornava vencedora, já que conseguiria capturar todas as peças adversárias com essa única peça, conforme ilustrado na Figura 6 a seguir. Essa observação levou vários grupos a chamar o professor para validar sua conjectura, sendo incentivados a testá-la repetidamente até consolidar a conclusão.

Figura 6 – Alunos observando situação particular do jogo



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Outra percepção que os alunos tiveram foi a de que, quando ambas as equipes iniciavam a batalha com a mesma quantidade de peças, a equipe que começava a rodada sempre vencia, pois poderia capturar todas as peças do adversário em uma única jogada. Os alunos relataram, com suas próprias palavras, que nesse caso particular, “quem coloca as peças no tabuleiro primeiro ganha e também fica com todas (as peças) no tabuleiro”.

Inicialmente, o professor não confirmou essa observação. Os alunos foram incentivados a testá-la em mais rodadas para validar essas constatações e sempre eram questionados pelo professor se o que haviam percebido estava sendo comprovado.

Em uma das turmas, surgiu uma situação particular: um dos grupos obteve números múltiplos entre si no lançamento dos dados de todas as rodadas, o que levava à vitória a equipe que começava com menos peças. Intuitivamente, observaram que “quem tem menos sempre ganha”.

O professor aproveitou a oportunidade para explicar que isso acontecia porque os números obtidos por eles eram números bem peculiares e foi rapidamente interrompido por um aluno que disse: “são múltiplos”. Então, o grupo foi desafiado a jogar novamente para verificar se a quantidade inicial de peças pode determinar o vencedor. Já na primeira rodada, as equipes obtiveram os números 8 e 9, que são consecutivos, e a equipe com maior número de peças venceu, contrariando a hipótese inicial. A experiência foi recebida com entusiasmo, e mesmo após o término das três rodadas previstas, os alunos desejaram continuar jogando, investigando quais condições poderiam garantir a vitória, além da situação já consolidada de quando se iniciava com apenas uma peça. As equipes seguiram disputando outras rodadas até o fim do período de aulas, quando se deu o fim da atividade. Os materiais do jogo foram recolhidos juntamente com as tabelas de registros preenchidas para que fosse feita a exploração do conceito do máximo divisor comum, como ilustrado na Figura 7 abaixo.

Figura 7 – Aluna preenchendo a Tabela de Registros



Fonte: Arquivo pessoal do autor

### 4.3.2 Segundo encontro

Nas duas aulas do dia seguinte foi realizada uma discussão coletiva sobre as observações que tiveram acerca do jogo. Para orientar a discussão, foram feitos alguns questionamentos para exploração do conteúdo juntamente com a projeção no quadro da tabela de registros, que foi preenchida com algumas situações vivenciadas pelos grupos, para ilustrar o que se queria validar.

Em relação ao primeiro questionamento, sobre a equipe vencedora ser a que possui mais peças, quase todas as equipes observaram situações em suas rodadas que respondiam corretamente a essa pergunta. Então, para que não houvesse dúvidas de que iniciar a rodada com mais peças não garante a vitória, foi utilizado o projetor para exibir a tabela de registros que foi preenchida com alguns exemplos das rodadas disputadas pelas equipes, como na Figura 8 a seguir.

Figura 8 – Projeção da Tabela de Registros

Rodada	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças capturadas e eliminadas no final da rodada	Vencedor da rodada
1	5	12	1	Vermelha
2	25	6	1	Vermelha
3	8	12	4	Azul

Fonte: Arquivo pessoal do autor

Destacar essa questão mostrou-se importante, pois, intuitivamente, os participantes tendem a acreditar que iniciar a partida com mais peças representa uma vantagem, considerando que o objetivo do jogo é capturar todas as peças do adversário.

Ao serem questionados sobre a possibilidade de iniciar o jogo com zero peças, os alunos afirmaram de forma categórica que isso não seria possível, justificando que o número zero não

poderia ser obtido na multiplicação dos valores sorteados nos dados. Então, foi feito o terceiro questionamento, que considera a situação hipotética de se iniciar a rodada com zero peças.

Inicialmente, os alunos demonstraram estranhamento e não conseguiram deduzir o que deveria ser feito nesse caso. Para auxiliá-los na reflexão, o professor releu a regra 10, que estabelece que a equipe vencedora será aquela que capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. A partir dessa releitura, os alunos concluíram que a batalha não seria iniciada, uma vez que apenas uma das equipes teria peças no tabuleiro, sendo, portanto, declarada vencedora.

No momento do quarto questionamento, que trata da quantidade de peças restantes quando os dois valores iniciais são pares, o professor apresentou algumas jogadas realizadas pelas equipes cujos números iniciais atendiam a essa condição, registrando-as na tabela projetada no quadro. Coincidentemente, os resultados observados terminavam com duas peças restantes no tabuleiro. Diante disso, os alunos foram levados a concluir, de forma equivocada, que sempre restariam duas peças quando ambos os números iniciais fossem pares. A Figura 9 a seguir ilustra essa situação.

Figura 9 – Projeção da Tabela de Registros com números iniciais pares

Número	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças sobre o tabuleiro ao final da rodada	Vencedor da rodada
1	8	10	2	Azul
2	6	4	2	Vermelha
3	10	12	2	Azul

VENCEDOR DA RODADA: Azul

Fonte: Arquivo pessoal do autor

A fim de esclarecer o equívoco, o professor sugeriu novas combinações numéricas, e os alunos realizaram a simulação das jogadas. Primeiramente, consideraram a situação em que uma equipe possuía 4 peças e a outra, 12, observando que, nesse caso, restariam 4 peças no

tabuleiro, contrariando a hipótese anterior. Em seguida, simularam uma nova configuração com 6 e 24 peças, percebendo novamente que o resultado não correspondia a duas peças, mas que o número de peças restantes se mantinha par. A partir dessas observações, os alunos reformularam sua conclusão, compreendendo que, quando ambos os números iniciais são pares, o número de peças que permanecem no tabuleiro também é par, embora não necessariamente igual a dois.

Aproveitando os dois exemplos que já estavam registrados no quadro, o professor apresentou o quinto questionamento: “*Quantas peças restam no tabuleiro quando um dos números é múltiplo do outro?*”. Rapidamente, a equipe que havia identificado esse padrão durante as jogadas respondeu que, nesses casos, sempre restaria no tabuleiro o número de peças correspondente ao menor dos dois números iniciais. Esta situação está ilustrada na Figura 10 a seguir.

Figura 10 – Projeção da Tabela de Registros com números iniciais múltiplos entre si

Rodada	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças que o jogador Azul tirou ao final da rodada	Número de peças restantes
1	4	12	4	Vermelha
2	6	24	6	Vermelha
3				

SELECIONEI EQUIPE Vermelha

Fonte: Arquivo pessoal do autor

Para que os demais alunos se convencessem dessa relação, o professor sugeriu a realização de novas simulações. A repetição das jogadas confirmou a regularidade observada, fortalecendo a compreensão de que, quando um número é múltiplo do outro, o número de peças restantes ao final da rodada corresponde ao menor valor entre eles.

Quando questionados sobre quantas peças permaneceriam no tabuleiro caso as duas equipes iniciassem com a mesma quantidade de peças, os alunos responderam prontamente que sobrariam todas as peças da equipe que iniciou a jogada. Essa resposta foi imediata, pois

algumas equipes já haviam percebido esse fato durante as partidas anteriores. Assim, concluiu-se que, quando os dois números iniciais são iguais, a quantidade de peças restantes corresponde ao próprio número, e o vencedor será aquele que conseguir dispor suas peças primeiro sobre o tabuleiro.

Os questionamentos 7 e 8 fazem referência a novas combinações de valores iniciais que os alunos foram incentivados a testar. As duplas de números escolhidas, 5 e 10 e 15 e 18, foram selecionadas intencionalmente, de modo a favorecer a percepção de que a quantidade de peças que permanece no tabuleiro ao final da rodada corresponde ao maior divisor comum entre os dois números. Essa escolha deve-se ao fato de serem números cujos divisores comuns podem ser identificados com relativa facilidade.

Em seguida, foi apresentado o questionamento 9, que trata explicitamente da relação entre os números iniciais e a quantidade de peças restantes no tabuleiro. Inicialmente, os alunos não conseguiram estabelecer tal relação. Para auxiliá-los, o professor propôs que, para cada combinação de números, fossem listados os divisores de ambos, identificados os divisores comuns e, por fim, verificado que o maior entre eles correspondia exatamente ao número de peças restante no tabuleiro, como na Figura 11 abaixo.

Figura 11 – Projeção da Tabela com a lista de divisores de cada valor inicial

Divisores de 5: 1, 5  
 Divisores de 10: 1, 2, 5, 10

TABELA DE REGISTROS				
Rodada	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças sobre o tabuleiro ao final da rodada	Resultado
1	4	12	4	Deverão
2	6	24	6	Vermelha
3	5	10	5	Vermelha

VENCEDOR: VERMELHA

Fonte: Arquivo pessoal do autor

Ao final da exploração do conteúdo, foi proposto aos alunos um desafio antes do encerramento do período de aulas. Eles foram convidados a refletir sobre possíveis estratégias que pudessem garantir a vitória no jogo e informados de que, no dia seguinte, haveria uma nova

disputa com uma pequena modificação nas regras. A alteração consistia em que, após a primeira equipe realizar o lançamento dos dados e dispor no tabuleiro a quantidade de peças correspondente ao produto dos números obtidos, a segunda equipe poderia escolher quantas peças colocaria, tendo como referência a quantidade da primeira equipe.

### 4.3.3 Terceiro encontro

No dia seguinte, na primeira aula, os alunos foram novamente organizados em equipes e receberam o arquivo com as regras atualizadas, contendo a modificação no item 3 das regras como indicado na Figura 12.

Figura 12 – Alteração nas regras do jogo

## REGRAS





**MATERIAL:** Tabuleiro quadriculado 8x8; 60 peças de duas cores diferentes, sendo 30 de cada cor; tabela de registros e dois dados de 6 faces, sendo um deles com as faces numeradas de 1 a 6 e outro com as faces numeradas de 1 a 5 e uma das faces contendo um símbolo qualquer.

**PARTICIPANTES:** Duas equipes, que alternam as jogadas.

**OBJETIVO:** Capturar todas as peças do adversário.

**01** As equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar.

**02** A equipe que iniciar o jogo escolhe a cor das suas peças e faz o lançamento dos dois dados (se no lançamento do dado que contém 5 números sair a face contendo o símbolo, esse dado deverá ser lançado novamente). O produto obtido na multiplicação dos números resultantes do lançamento dos dados será a quantidade de peças que a equipe irá dispor no tabuleiro.

**03** Em seguida, a outra equipe pode escolher a quantidade de peças que irá dispor no tabuleiro.

**04** Cada equipe deve anotar na tabela de registros o número de peças que irá dispor no tabuleiro.

**05** As equipes devem posicionar suas peças aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro.

**06** A partir de agora começa a batalha. A equipe que tiver a menor quantidade de peças inicia, avançando todas as suas peças sobre as do adversário. Para isso, deve capturar do tabuleiro as peças do adversário e colocar suas peças na mesma posição. Caso as duas equipes obtenham o mesmo produto no lançamento dos dados, a equipe que iniciou o jogo deve iniciar também a batalha.

**07** Esse processo deve ser repetido enquanto a quantidade de peças da equipe da vez for menor ou igual a quantidade de peças da equipe adversária.

**08** Quando o número de peças da equipe da vez ficar maior que da equipe adversária, a equipe passa a vez.

**09** A equipe da vez deve repetir os passos 6, 7 e 8 até que uma das equipes consiga capturar todas as peças da equipe adversária.

**10** Vence a rodada a equipe que conseguir capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. Essa quantidade de peças restantes no tabuleiro deve ser registrada na tabela, juntamente com a equipe vencedora da rodada.

**11** Ganha o jogo a equipe que vencer a melhor de três rodadas.

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir das experiências anteriores, os estudantes já haviam identificado que a equipe com apenas uma peça sempre seria a vencedora, uma vez que, com essa única peça, era possível capturar todas as peças do adversário. Também recordaram que, nos casos em que os números eram múltiplos entre si, a equipe com menor número de peças sairia vencedora.

Diante disso, o professor lançou um novo desafio, pedindo que pensassem em outras estratégias, além das já conhecidas, que pudessem garantir a vitória. Imediatamente, um dos alunos afirmou que “não poderia pegar um múltiplo da outra equipe”, demonstrando compreensão do conceito anteriormente trabalhado e reconhecendo que, nessa situação, a vantagem seria do oponente.

As equipes buscaram diferentes estratégias para assegurar a vitória, mas inicialmente não obtiveram êxito. Em seguida, o professor interveio retomando o comentário do colega sobre os múltiplos e acrescentando uma nova provocação: “*O que aconteceria se a segunda equipe escolhesse um múltiplo mais um da quantidade do adversário?*”. A partir dessa sugestão, os alunos organizaram novas rodadas seguindo a regra modificada e observaram que, ao adotar essa estratégia, a equipe conseguia, de fato, garantir a vitória.

Para finalizar, o professor apresentou um último questionamento: “*Quantas peças restam no tabuleiro quando os dois números iniciais são consecutivos?*”. Destacou-se, nesse momento, que o fato de os números serem consecutivos implica que um deles é um múltiplo mais um do outro, uma vez que, ao dividir o maior pelo menor, o quociente é igual a 1 e o resto também é 1. Assim, os alunos foram levados a inferir que, nessas situações, sempre restará uma peça no tabuleiro, independentemente dos números escolhidos.

Quando a exploração do conteúdo foi finalizada, os alunos foram conduzidos à formalização do conceito de máximo divisor comum (MDC), compreendendo que, por meio da dinâmica do jogo, seria possível determinar o MDC de quaisquer dois números naturais. O professor, então, projetou novamente a tabela de registros no quadro e, com base nos valores nela registrados, explicitou a notação do máximo divisor comum entre dois números naturais, como mostra a Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Projeção da Tabela de Registros com a notação do MDC

Rodada	Número de peças da equipe VERMELHA	Número de peças da equipe AZUL	Número de peças sobre o tabuleiro no final da rodada	Vencedor da rodada
1	5	6	1	Azul
2	4	3	1	Vermelha
3				

mdc(5,6) = 1  
mdc(4,3) = 1

VENCEDOR: EQUIPE: \_\_\_\_\_

Fonte: Arquivo pessoal do autor

Em seguida, o professor retomou as discussões e sistematizou os resultados em um conjunto de observações que sintetizavam as propriedades identificadas ao longo das jogadas:

1º) O máximo divisor comum entre qualquer número e zero é o próprio número.

$$\text{mdc}(a, 0) = a, \forall a \in \mathbb{N}.$$

2º) O máximo divisor comum entre qualquer número e um é sempre um.

$$\text{mdc}(a, 1) = 1, \forall a \in \mathbb{N}.$$

3º) O máximo divisor comum entre dois números consecutivos é sempre um.

$$\text{mdc}(a, a + 1) = 1, \forall a \in \mathbb{N}.$$

4º) O máximo divisor comum entre dois números múltiplos entre si é sempre o menor deles.

$$b = a \cdot q; q \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{mdc}(a, b) = a.$$

5º) O máximo divisor comum entre um número e ele mesmo é o próprio número.

$$\text{mdc}(a, a) = a, \forall a \in \mathbb{N}.$$

É importante destacar que a linguagem algébrica não foi apresentada aos alunos do sexto ano; as observações anteriores foram registradas apenas em forma textual, de modo acessível à faixa etária. A partir desse momento, o cálculo do MDC passou a ser explorado de maneira prática, com base nas situações vivenciadas durante o jogo.

Para exemplificar o procedimento, o professor propôs o cálculo do MDC entre dois números quaisquer. O primeiro exemplo, cujos valores foram escolhidos pelos próprios alunos, foi calcular o máximo divisor comum entre os números 6 e 10.

O professor, então, simulou uma situação no contexto do jogo, dizendo: *“Imaginem que essa é uma rodada em que uma equipe possui 6 peças e a outra, 10. Qual das equipes vai ser a primeira a jogar? A que possui 6 ou a que possui 10 peças?”* Os alunos responderam prontamente: *“O 6 começa porque tem menos.”* Em seguida, o professor perguntou: *“Quantas peças vão sobrar para a outra equipe?”*, ao que os alunos responderam: *“Quatro.”*

Dessa forma, o professor registrou no quadro a relação observada:

$$\text{mdc}(6,10) = \text{mdc}(6,4).$$

Repetindo o procedimento, os alunos observaram que, nessa nova situação, a equipe que possuía 4 peças seria a próxima a jogar e retiraria essa mesma quantidade de peças da equipe adversária, que então passaria a ficar com 2 peças. Assim, a sequência de igualdades foi sendo construída no quadro da seguinte forma:

$$\text{mdc}(6,10) = \text{mdc}(6,4) = \text{mdc}(4,2).$$

Nesse momento, o professor retomou a observação de número 4, que tratava do MDC entre dois números múltiplos entre si. Destacou-se que, ao chegar à relação  $\text{mdc}(4,2)$ , temos exatamente essa situação, pois 4 é múltiplo de 2. Assim, aplicando a conclusão anteriormente estabelecida, os alunos reconheceram que o MDC entre esses dois números seria o menor deles, ou seja, 2.

Com essa análise, os alunos puderam compreender, de maneira intuitiva e contextualizada, o funcionamento do processo de cálculo do máximo divisor comum, percebendo que as etapas sucessivas do jogo reproduzem o raciocínio necessário para sua determinação, ainda que sem o uso formal da linguagem algorítmica.

## 5 CONCLUSÃO

Os resultados deste trabalho indicam que o uso de jogos matemáticos em sala de aula constitui uma estratégia pedagógica significativa para o ensino de conceitos aritméticos no sexto ano do Ensino Fundamental. A atividade desenvolvida possibilitou aos alunos vivenciar situações que exigiram análise, tomada de decisões e elaboração de estratégias, contribuindo para uma participação mais ativa no processo de aprendizagem.

A aplicação do jogo favoreceu a compreensão de conteúdos relacionados à divisibilidade e ao máximo divisor comum, ao permitir que esses conceitos fossem explorados de forma prática e contextualizada. Observou-se que, com o uso do jogo, os alunos demonstraram maior envolvimento com as atividades propostas, bem como avanços na argumentação matemática e na organização do raciocínio.

Além dos aspectos conceituais, a proposta contribuiu para o desenvolvimento de habilidades como o trabalho em grupo, o respeito às regras e a cooperação entre os participantes. Esses elementos reforçam a importância de práticas pedagógicas que considerem não apenas o domínio de conteúdo, mas também a formação integral do aluno.

Embora os resultados obtidos sejam positivos, é importante reconhecer que o estudo se limita a um recorte específico de conteúdo e contexto escolar. Dessa forma, novas investigações podem ampliar a aplicação de jogos matemáticos para outros temas e níveis de ensino, bem como explorar diferentes formatos de atividades.

Conclui-se, portanto, que a inserção de jogos no ensino de Matemática, quando planejada de forma intencional e alinhada aos objetivos de aprendizagem, pode contribuir significativamente para a construção do conhecimento matemático, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo e participativo.

## REFERÊNCIAS

- BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de Matemática.** 6ª edição. São Paulo: CAEM-IME / USP, 2007.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 26 jan. 2026.
- D'AMBROSIO, U.; **Educação matemática: Da teoria à prática.** 23ª edição. Campinas: Papyrus, 2012.
- DANTE, L. R.; **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 1989.
- DINIZ, M. I. S. V.; **A Resolução de Problemas.** In: Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério. Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo, CENP, 1990.
- DOMINGUES, H. H.; **Fundamentos de Aritmética.** São Paulo: Atual, 1991.
- HEFEZ, A.; **Elementos de Aritmética.** 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com Jogos e Situações-Problemas.** Porto Alegre: Artmed, 2000.
- OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C.; **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- SÃO PAULO (ESTADO). **Currículo Paulista: Educação Infantil e Ensino Fundamental.** São Paulo: SEDUC-SP, 2019. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>. Acesso em 10 fev. 2026.

**BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

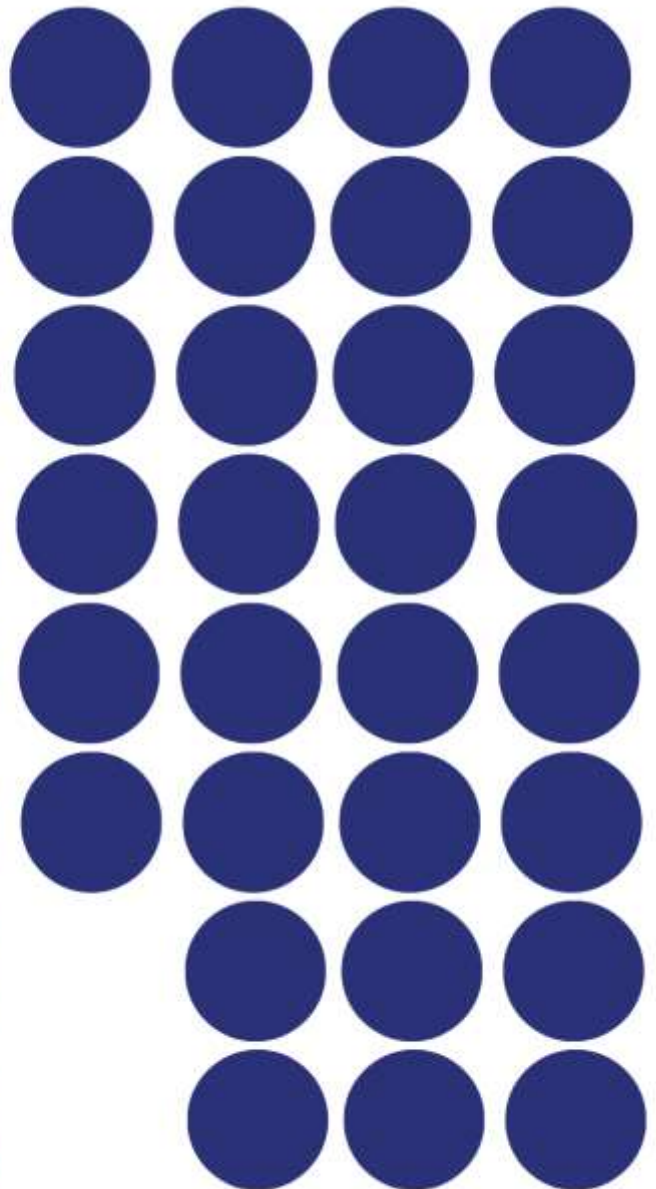
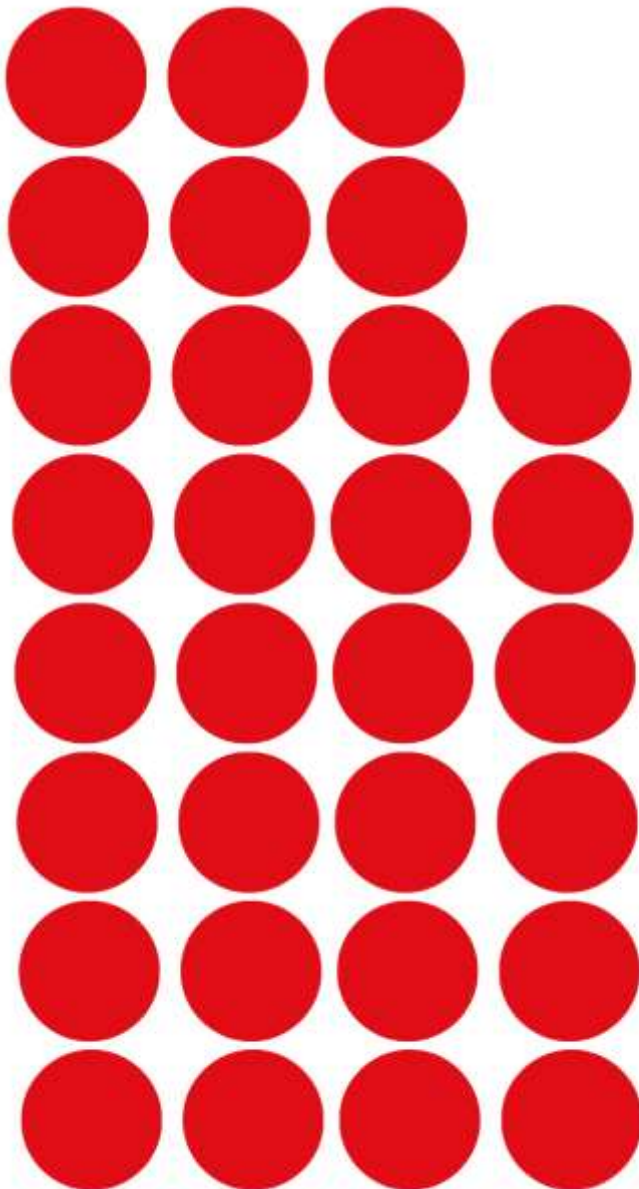
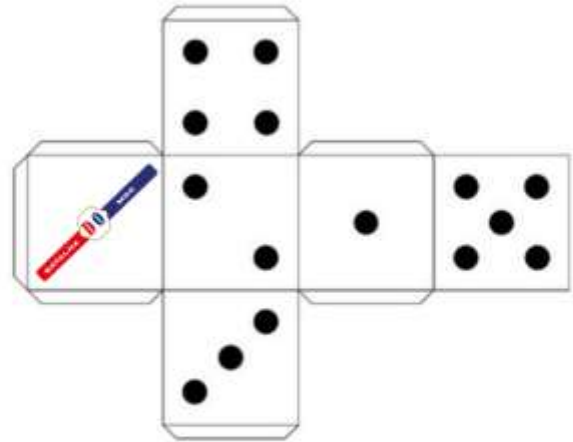
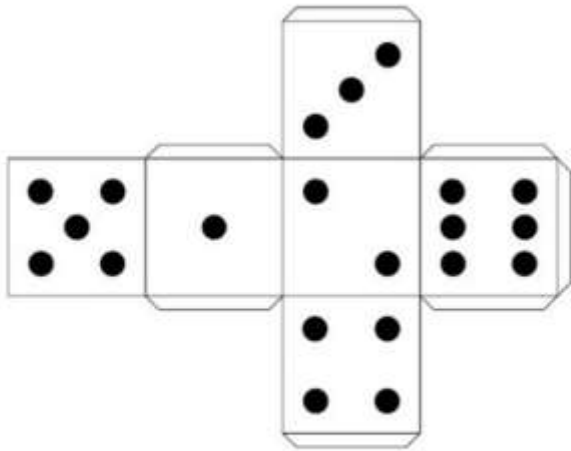
CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Um pouco sobre divisibilidade: critérios de divisibilidade**. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/teoria-dos-numeros-um-pouco-sobre-divisibilidade-parte-2/um-pouco-sobre-divisibilidade-criterios-de-divisibilidade/>. Acesso em 23 jan. 2026.

HEFEZ, A.; **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MUNIZ NETO, A. C.; **Tópicos de Matemática Elementar – Volume 5: Teoria dos Números**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.


SAMPAIO, J. C. V.; CAETANO, P. A. S. **Introdução à Teoria dos Números: um curso breve**. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

### APÊNDICE A – MATERIAIS DO JOGO








<b>TABELA DE REGISTROS</b>				
<b>Rodada</b>	<b>Número de peças da equipe VERMELHA</b>	<b>Número de peças da equipe AZUL</b>	<b>Número de peças sobre o tabuleiro no final da rodada</b>	<b>Vencedor da rodada</b>
<b>1</b>				
<b>2</b>				
<b>3</b>				

**VENCEDOR: EQUIPE \_\_\_\_\_**

## APÊNDICE B – REGRAS DO JOGO

### REGRAS

BATALHA



MDC



**MATERIAL:** Tabuleiro quadriculado 8x8; 60 peças de duas cores diferentes, sendo 30 de cada cor; tabela de registros e dois dados de 6 faces, sendo um deles com as faces numeradas de 1 a 6 e outro com as faces numeradas de 1 a 5 e uma das faces contendo um símbolo qualquer.

**PARTICIPANTES:** Duas equipes, que alternam as jogadas.

**OBJETIVO:** Capturar todas as peças do adversário.

- 01** As equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar.
- 02** A equipe que iniciar o jogo escolhe a cor das suas peças e faz o lançamento dos dois dados (se no lançamento do dado que contém 5 números sair a face contendo o símbolo, esse dado deverá ser lançado novamente). O produto obtido na multiplicação dos números resultantes do lançamento dos dados será a quantidade de peças que a equipe irá dispor no tabuleiro.
- 03** Em seguida, a outra equipe lança os dois dados e dispõe no tabuleiro a quantidade de peças igual ao produto obtido na multiplicação dos números que saíram nos dados.
- 04** Cada equipe deve anotar na tabela de registros o número de peças que irá dispor no tabuleiro.
- 05** As equipes devem posicionar suas peças aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro.
- 06** A partir de agora começa a batalha. A equipe que tiver a menor quantidade de peças inicia, avançando todas as suas peças sobre as do adversário. Para isso, deve capturar do tabuleiro as peças do adversário e colocar suas peças na mesma posição. Caso as duas equipes obtenham o mesmo produto no lançamento dos dados, a equipe que iniciou o jogo deve iniciar também a batalha.
- 07** Esse processo deve ser repetido enquanto a quantidade de peças da equipe da vez for menor ou igual a quantidade de peças da equipe adversária.
- 08** Quando o número de peças da equipe da vez ficar maior que da equipe adversária, a equipe passa a vez.
- 09** A equipe da vez deve repetir os passos 6, 7 e 8 até que uma das equipes consiga capturar todas as peças da equipe adversária.
- 10** Vence a rodada a equipe que conseguir capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. Essa quantidade de peças restantes no tabuleiro deve ser registrada na tabela, juntamente com a equipe vencedora da rodada.
- 11** Ganha o jogo a equipe que vencer a melhor de três rodadas.

### REGRAS

BATALHA



MDC



**MATERIAL:** Tabuleiro quadriculado 8x8; 60 peças de duas cores diferentes, sendo 30 de cada cor; tabela de registros e dois dados de 6 faces, sendo um deles com as faces numeradas de 1 a 6 e outro com as faces numeradas de 1 a 5 e uma das faces contendo um símbolo qualquer.

**PARTICIPANTES:** Duas equipes, que alternam as jogadas.

**OBJETIVO:** Capturar todas as peças do adversário.

- 01** As equipes definem quem inicia o jogo, podendo ser no par ou ímpar.
- 02** A equipe que iniciar o jogo escolhe a cor das suas peças e faz o lançamento dos dois dados (se no lançamento do dado que contém 5 números sair a face contendo o símbolo, esse dado deverá ser lançado novamente). O produto obtido na multiplicação dos números resultantes do lançamento dos dados será a quantidade de peças que a equipe irá dispor no tabuleiro.
- 03** Em seguida, a outra equipe pode escolher a quantidade de peças que irá dispor no tabuleiro.
- 04** Cada equipe deve anotar na tabela de registros o número de peças que irá dispor no tabuleiro.
- 05** As equipes devem posicionar suas peças aleatoriamente sobre as casas vazias do tabuleiro.
- 06** A partir de agora começa a batalha. A equipe que tiver a menor quantidade de peças inicia, avançando todas as suas peças sobre as do adversário. Para isso, deve capturar do tabuleiro as peças do adversário e colocar suas peças na mesma posição. Caso as duas equipes obtenham o mesmo produto no lançamento dos dados, a equipe que iniciou o jogo deve iniciar também a batalha.
- 07** Esse processo deve ser repetido enquanto a quantidade de peças da equipe da vez for menor ou igual a quantidade de peças da equipe adversária.
- 08** Quando o número de peças da equipe da vez ficar maior que da equipe adversária, a equipe passa a vez.
- 09** A equipe da vez deve repetir os passos 6, 7 e 8 até que uma das equipes consiga capturar todas as peças da equipe adversária.
- 10** Vence a rodada a equipe que conseguir capturar todas as peças do adversário e ainda possuir peças no tabuleiro. Essa quantidade de peças restantes no tabuleiro deve ser registrada na tabela, juntamente com a equipe vencedora da rodada.
- 11** Ganha o jogo a equipe que vencer a melhor de três rodadas.

## APÊNDICE C – QUESTIONAMENTOS

### *Questionamentos para compreensão das regras*

1. *Como se define quem inicia o jogo?*
2. *Como as equipes se preparam para iniciar a batalha?*
3. *Como se define quem começa a batalha?*
4. *Quantas peças do adversário a equipe deve capturar na sua vez?*
5. *Em que situação a equipe passa a vez?*
6. *Quando a rodada termina?*
7. *Quem vence a rodada?*
8. *Quem vence o jogo?*

### *Questionamentos para exploração do conteúdo*

1. *Quem tem mais peças sempre ganha?*
2. *É possível iniciar o jogo com zero peças?*
3. *O que aconteceria se alguma equipe iniciasse o jogo com zero peças?*
4. *Quantas peças restam no tabuleiro quando os dois números iniciais são pares?*
5. *Quantas peças restam no tabuleiro quando um dos números é múltiplo do outro?*
6. *Quantas peças restam no tabuleiro se as duas equipes iniciarem com a mesma quantidade de peças?*
7. *Se uma das equipes iniciar a rodada com 5 peças e a outra com 10 peças, qual será a quantidade de peças que irá restar no tabuleiro?*
8. *Se uma das equipes iniciar a rodada com 15 peças e a outra com 18 peças, qual será a quantidade de peças que irá restar no tabuleiro?*
9. *Qual a relação existente entre a quantidade de peças que resta no tabuleiro e os dois números iniciais?*