

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ELIZEU FELIPE DOS SANTOS

VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE RAÍZES DE
FUNÇÕES POLINOMIAIS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PATO BRANCO

2025

ELIZEU FELIPE DOS SANTOS

**VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE
RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA**

**Visualization and geometric representation of roots of polynomial
functions: a didactic proposal**

Dissertação apresentado como requisito para
obtenção do título de Mestre no programa
de Mestrado Profissional em Matemática-
PROFMAT, da Universidade Tecnológica
Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Michael Santos Gonzales Gargate

Coorientador: Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano

PATO BRANCO

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Pato Branco**



ELIZEU FELIPE DOS SANTOS

VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 12 de Dezembro de 2025

Dr. Michael Santos Gonzales Gargate, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Eliakim Cleyton Machado, Doutorado - Seed - Secretaria Estadual de Educação do Paraná

Dr. Mateus Eduardo Salomao, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 12/12/2025.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus por ter me capacitado desde o início, e também a minha família pelos momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão. Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele esta jornada não seria cumprida. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Michael Santos Gonzales Gargate e ao meu coorientador Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano, pela sabedoria com que me guiaram nesta trajetória. Aos meus colegas de sala, a Secretaria do Curso, pela cooperação. Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio. Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Posso todas as coisas naquele que me fortalece.

Filipenses 4:13

RESUMO

SANTOS, Elizeu Felipe. **Visualização e representação geométrica de raízes de funções polinomiais: uma proposta didática**. 2025. 73 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2025.

A visualização geométrica de raízes de funções polinomiais tem como suporte principal de ensino o GeoGebra que é um software tecnológico matemático dinâmico projetado para ensinar como também aprender matemática. A sua interface permite que os usuários que o acessam visualizem de forma interativa o resultado de suas construções. Neste contexto, a partir das experiências didáticas do autor desta dissertação, esta presente pesquisa tem como objetivo principal apresentar como podemos através de um simples software tecnológico, aprofundar matematicamente o estudo de funções polinomiais garantindo como metodologia principal de ensino a visualização geométrica. Para isso são apresentadas várias concepções de outros autores que tem como tema semelhante em suas dissertações a ideia inicial dessa pesquisa. Por fim as conclusões finais, apresentam o quanto impactou no processo ensino-aprendizagem dos estudantes, a nova metodologia de ensino projetada para ter como foco principal a utilização do software GeoGebra usado como ferramenta metodológica.

Palavras-chave: Visualização. Representação. GeoGebra. Raízes. Função.

ABSTRACT

SANTOS, Elizeu Felipe. **Visualization and geometric representation of function roots polynomials: a didactic proposal**. 2025. 73 p. Dissertation (Professional master's thesis in mathematics) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2025.

The main teaching support for geometric visualization of roots of polynomial functions is GeoGebra, which is a dynamic mathematical technological software designed to teach as well as learn mathematics. Its interface allows users who access it to interactively visualize the results of their constructions. In this context, based on the teaching experiences of the author of this dissertation, the main objective of this present research is to present how we can, through simple technological software, mathematically deepen the study of polynomial functions, guaranteeing geometric visualization as the main teaching methodology. To this end, several concepts from other authors are presented, whose dissertations have a similar theme to the initial idea of this research. Finally, the final conclusions present how much the new teaching methodology designed to have as its main focus the use of GeoGebra software used as a methodological tool impacted on the students' teaching-learning process.

Keywords: Preview. Representation. GeoGebra. Roots. Function.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráficos - Função/Não Função	18
Figura 2 – Função linear crescente e decrescente	22
Figura 3 – $f(x) = x^2 - 3x + 2$ com raízes em $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$	28
Figura 4 – $f(x) = x^3 - 3x - 2$ com raízes em $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$	29
Figura 5 – $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ com raízes em $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = 2$	30
Figura 6 – GeoGebra Classic	31
Figura 7 – Controle deslizante	32
Figura 8 – Controles deslizantes	33
Figura 9 – Controles deslizantes	33
Figura 10 – Função $f(x) = 2x - 4$	35
Figura 11 – Função $f(x) = x^2 - 5x + 6$	36
Figura 12 – Função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	37
Figura 13 – Função $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	39
Figura 14 – Função $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$	41
Figura 15 – Controles deslizantes genéricos da função $f(x) = a_0 + a_1x$	54
Figura 16 – $f(x) = 2x - 4$ com raiz em $x_0 = 2$	55
Figura 17 – $f(x) = -x + 5$ obtida pela manipulação dos deslizantes	56
Figura 18 – $f(x) = x^2 - 4$ com raízes em $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$	59
Figura 19 – Geogebra Classic	60
Figura 20 – $f(x) = x^2 - 3x - 2$ obtida pela manipulação dos deslizantes	60
Figura 21 – $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	62
Figura 22 – $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$	63
Figura 23 – $f(x) = x^3 - 3x - 2$ com raízes em $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$	65
Figura 24 – $f(x) = x^3 - 3x - 2$	66
Figura 25 – $f(x)$ com variações no tamanho do coeficiente a_2	67
Figura 26 – $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$	67
Figura 27 – $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ com raízes em $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = 2$	69
Figura 28 – $f(x) = x^4 + a_2x^2 + a_0$ com variações nos coeficientes a_2 e a_0	69
Figura 29 – $f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$	71
Figura 30 – Destaque do ponto de interseção de f com o eixo Y	72

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	PROBLEMA DE PESQUISA	10
1.2	OBJETIVO DE PESQUISA	10
1.3	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	10
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	11
1.5	VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	11
1.5.1	Visualização de raízes de funções polinomiais e o avanço da tecnologia	12
1.6	O GEOGEBRA E A SUA CONTRIBUIÇÃO NA VISUALIZAÇÃO	12
1.6.1	O que é o software GeoGebra?	12
1.6.2	O uso do software GeoGebra no ensino da matemática	13
1.6.3	O software GeoGebra e a contribuição com a visualização geométrica na educação básica	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	FUNÇÕES POLINOMIAIS	15
2.1.1	Polinômio	15
2.1.2	Função	17
2.1.3	Função Polinomial	18
2.2	FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 1	21
2.2.1	Raiz de uma função polinomial de grau 1	21
2.3	FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 2	22
2.3.1	Raiz de uma função polinomial de grau 2	23
2.4	FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 3	23
2.4.1	Raiz de uma função polinomial de grau 3 pelo método de Cardano-Tartaglia	24
2.5	FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 4	25
2.5.1	Raiz de uma função polinomial de grau 4	26
2.6	FUNÇÕES POLINOMIAIS DE QUINTO GRAU E O TEOREMA DE ABEL-RUFFINI	27
3	FUNÇÕES POLINOMIAIS E GEOGEBRA	28
3.1	CONTROLES DESLIZANTES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO GEOGEBRA	31
4	METODOLOGIA	42
4.1	ABORDAGEM METODOLÓGICA	42
4.2	NATUREZA E OBJETIVO DO PRODUTO EDUCACIONAL	43
4.3	ESTRUTURA DA PROPOSTA DIDÁTICA	43
4.4	FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA DA PROPOSTA	44
4.5	EXPECTATIVAS E CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS	44
4.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	45
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	46
	REFERÊNCIAS	48
5.1	APÊNDICE - PRODUTO EDUCACIONAL	50

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como foco principal demonstrar que a visualização das raízes de funções polinomiais no plano cartesiano constitui uma ferramenta essencial para a compreensão do comportamento dessas funções. Busca-se mostrar que a simples observação gráfica das raízes, por meio de recursos tecnológicos como o software GeoGebra, pode favorecer uma aprendizagem mais significativa, ao permitir que o estudante compreenda não apenas a solução algébrica dos zeros da função, mas também sua representação geométrica e variação nos intervalos reais.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Considerando a relevância das funções polinomiais na Matemática e na resolução de problemas do mundo real, questiona-se: como o uso de um software pode contribuir para o aprofundamento do estudo das funções polinomiais, utilizando a visualização geométrica como metodologia principal de ensino?

1.2 OBJETIVO DE PESQUISA

Desenvolver uma proposta didática, caracterizada como produto educacional, baseada no uso do software GeoGebra como tecnologia digital principal, empregando-o como ferramenta metodológica para explorar, de maneira dinâmica e interativa, as propriedades e os comportamentos das funções polinomiais.

1.3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

O principal propósito desta pesquisa é oferecer ao professor uma estratégia de ensino que favoreça a compreensão, por parte dos alunos, das raízes das funções polinomiais e de sua projeção gráfica. A ausência de abordagens que enfatizem a visualização desse conteúdo em sala de aula pode ocasionar desinteresse e dificuldades no processo de aprendizagem, uma vez que muitos estudantes não compreendem o significado geométrico de uma raiz no plano cartesiano. Diante desse cenário, a proposta busca proporcionar ao professor uma abordagem autoral e fundamentada sobre o estudo das funções polinomiais, evidenciando o uso do GeoGebra como um recurso pedagógico que integra álgebra e geometria, tornando o processo de ensino-

aprendizagem mais dinâmico, significativo e exploratório.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho apresenta uma visão autoral sobre o estudo das raízes de funções polinomiais com o uso do GeoGebra. A introdução contextualiza o problema, os objetivos e a relevância do tema.

Em seguida, o Referencial Teórico expõe as principais definições e fundamentos matemáticos sobre funções e polinômios, destacando conceitos essenciais de crescimento, decréscimo e comportamento das raízes.

O texto também aborda a importância da visualização geométrica, discutindo contribuições de diversos autores sobre o tema e sobre o papel das tecnologias digitais no ensino da Matemática.

Por fim, o trabalho apresenta, como produto educacional, uma proposta didática que oferece ao professor um roteiro de aula voltado à exploração das raízes de funções polinomiais por meio do GeoGebra.

1.5 VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

Frequentemente, não percebemos como a visualização das formas geométricas está presente em nosso cotidiano: ao levantar, observar objetos ou realizar tarefas simples, interagimos constantemente com representações espaciais. No contexto educacional, a visualização desempenha um papel fundamental. segundo (BECKER, 2009), os alunos possuem uma visão projetiva desenvolvida, isto é, uma capacidade natural de representar mentalmente imagens e estruturas geométricas.

De acordo com (SALES, 2013), a visualização é “uma forma de representação em termos de uma figura ou de um objeto”, sendo, portanto, um processo essencial de percepção e interpretação do mundo real.

Para o professor, conduzir essa etapa requer atenção e sensibilidade, pois cada detalhe visual pode influenciar a compreensão conceitual do aluno. Como observam (FLORES et al., 2012), o termo visualização tem origem na psicologia e refere-se às habilidades cognitivas que permitem interpretar imagens e reconhecer padrões visuais.

Com o avanço das tecnologias, surgiram ferramentas capazes de potencializar esse tipo

de aprendizagem. Softwares de matemática dinâmica, como o GeoGebra, favorecem a exploração de funções e figuras geométricas, ampliando as possibilidades de experimentação e análise.

Segundo (CIFUENTES; SANTOS, 2019), a visualização, ao não depender exclusivamente de procedimentos lógicos ou calculísticos, revela uma forma sensível e legítima de acesso ao conhecimento matemático. De modo semelhante, (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991) afirmam que compreender o comportamento de uma função polinomial é um processo que se fortalece por meio da visualização. Para (GUTIÉRREZ et al., 1996), a visualização constitui uma ferramenta poderosa para explorar e solucionar propriedades matemáticas relevantes.

1.5.1 Visualização de raízes de funções polinomiais e o avanço da tecnologia

A visualização geométrica das raízes de uma função polinomial $f(x)$ é um recurso fundamental para que o aluno compreenda o significado dessas raízes no plano cartesiano. Nesse processo, o uso de ferramentas tecnológicas, especialmente o computador, é indispensável.

De acordo com (CAIRES; NASCIMENTO, 2012), o uso do computador permite ao aluno visualizar representações gráficas de funções polinomiais de diferentes graus, ampliando a compreensão do conteúdo. (BRAGA, 2015) reforça que a tecnologia, ao surgir do desejo humano de simplificar tarefas, torna-se um meio essencial para aprimorar o ensino e a aprendizagem.

Nesse contexto, o GeoGebra surge como uma ferramenta que favorece o raciocínio matemático e a visualização gráfica. Conforme (MOLINARI, 2018), o uso do software facilita a comparação entre as representações algébricas e gráficas das funções, contribuindo para um aprendizado mais efetivo.

1.6 O GEOGEBRA E A SUA CONTRIBUIÇÃO NA VISUALIZAÇÃO

1.6.1 O que é o software GeoGebra?

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica e livre, desenvolvido para integrar diferentes áreas da Matemática em um mesmo ambiente interativo. Ele permite a construção e manipulação de objetos geométricos como pontos, segmentos, retas, secções cônicas e gráficos de funções que podem ser modificados em tempo real.

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, o GeoGebra foi desenvolvido com o propósito de unificar recursos de geometria, álgebra e cálculo em um software gratuito e multiplataforma (CAVALCANTE et al., 2013). Essa integração permite que os estudantes construam gráficos de funções polinomiais e observem, com clareza, a localização de suas raízes no plano cartesiano.

Segundo (NASCIMENTO, 2012), o GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em uma única plataforma. Essa característica o torna uma ferramenta didática poderosa, pois possibilita múltiplas representações simultâneas de um mesmo objeto matemático, promovendo uma aprendizagem que articula diferentes registros de representação.

A manipulação de parâmetros por meio do GeoGebra aproxima o estudante de um ambiente de aprendizagem significativa, conforme a teoria de (AUSUBEL, 2000), pois permite relacionar o novo conhecimento (a forma e posição da parábola) com conceitos já conhecidos (raízes, concavidade, simetria).

O professor, nesse contexto, atua como mediador, orientando a exploração e conduzindo o aluno à descoberta autônoma dos padrões matemáticos.

1.6.2 O uso do software GeoGebra no ensino da matemática

O uso do GeoGebra tem se mostrado um importante aliado no ensino da Matemática, tanto pela sua facilidade de manipulação quanto pelo seu potencial de tornar as aulas mais interativas e dinâmicas.

Para (FERRI et al., 2013), o software didático amplia o componente visual da Matemática, atribuindo um papel significativo à exibição matemática, principalmente quando o ambiente de aprendizagem envolve colaboração e reflexão entre os estudantes.

Esse aspecto visual é especialmente relevante para o processo de ensino-aprendizagem, pois favorece a construção do conhecimento por meio da observação e experimentação.

De acordo com (MONTEIRO; SILVA, 2023), o uso do GeoGebra contribui significativamente para o aprendizado, ao estimular os alunos a refletirem e buscarem soluções através da construção e manipulação de objetos geométricos. Essa abordagem fomenta a autonomia e o raciocínio crítico, permitindo que o aluno seja protagonista da própria aprendizagem.

Contudo, é fundamental que o professor esteja atento às dificuldades iniciais dos

estudantes no uso do software, pois o primeiro contato com ferramentas tecnológicas pode gerar insegurança e dúvidas. Cabe ao docente orientar o processo, mediando a interação e explorando o potencial investigativo do ambiente.

1.6.3 O software GeoGebra e a contribuição com a visualização geométrica na educação básica

O GeoGebra tem desempenhado um papel relevante na educação básica, ao tornar o processo de ensino-aprendizagem mais envolvente e acessível.

Segundo (LEITE; MIOLA, 2023), o atual uso das tecnologias digitais na Educação Matemática é resultado de um longo processo histórico de transformação iniciado no Movimento da Matemática Moderna. Nesse cenário, o GeoGebra surge como um recurso que concretiza a integração entre o pensamento algébrico e a visualização geométrica.

A ferramenta tem conquistado a adesão de professores justamente por tornar as aulas mais dinâmicas e intuitivas. Entretanto, a familiaridade dos alunos com o software ainda representa um desafio, exigindo estratégias didáticas que facilitem a adaptação ao ambiente digital.

Para (SIQUEIRA; CAETANO, 2016), o uso do GeoGebra torna o ensino de funções mais significativo, ao conectar o conteúdo matemático à realidade tecnológica vivenciada pelos alunos e ao desenvolver habilidades de leitura e interpretação de gráficos.

De acordo com (COSTA, 2017), o software possibilita a compreensão de propriedades geométricas invariantes, permitindo que o aluno perceba relações que permanecem constantes nas construções dinâmicas.

Em síntese, o uso do GeoGebra como ferramenta de ensino potencializa a aprendizagem e favorece a construção de significados matemáticos por meio da visualização. Conforme (CRUZ, 2018) destaca, “a tecnologia tem facilitado cada vez mais a vida das pessoas e está presente em praticamente todas as nossas ações cotidianas”, tornando-se indispensável também no contexto educacional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos que sustentam a pesquisa, abordando as definições e propriedades essenciais das funções polinomiais, bem como o papel do software GeoGebra na exploração e visualização de seus comportamentos.

2.1 FUNÇÕES POLINOMIAIS

A fundamentação teórica baseia-se, principalmente, em (LIMA et al., 1997), (LATTARI, 2021), (SOUZA, 2021) e (HENNEMANN et al., 2021), autores que discutem de forma sistemática os conceitos de polinômio, função e suas aplicações.

2.1.1 Polinômio

As expressões algébricas desempenham papel central no estudo das funções matemáticas, pois permitem modelar relações entre grandezas e descrever comportamentos observados em diferentes contextos matemáticos e do mundo real. Entre essas expressões, os polinômios ocupam posição de destaque, uma vez que apresentam estrutura algébrica simples, ampla aplicabilidade e propriedades bem definidas, o que os torna fundamentais tanto no ensino básico quanto em estudos mais avançados da Matemática.

Definição 2.1. Um **polinômio** é uma expressão algébrica da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ são os **coeficientes** e $n \in \mathbb{N}$ é o **grau do polinômio**, correspondente ao maior expoente de x com coeficiente não nulo.

O grau de um polinômio é definido como o maior expoente da variável cuja parcela possui coeficiente não nulo. Assim, considerando um polinômio da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

com $a_n \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, diz-se que o polinômio $p(x)$ é de grau n .

Exemplo 2.1. O polinômio $-35x^3 + x^2 - 42x + 11$ possui coeficientes $-35, 1, -42, 11$ e é de grau 3.

Definição 2.2. Um **polinômio identicamente nulo** é aquele cujos coeficientes são todos iguais a zero. Assim,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \text{ se e somente se, } a_i = 0 \text{ para todo } i.$$

As operações fundamentais com polinômios — adição, subtração, multiplicação e divisão — constituem a base da álgebra elementar e são essenciais para o estudo das funções polinomiais.

Segundo (DOLCE; POMPEO, 2013), a compreensão dessas operações permite ao estudante desenvolver segurança algébrica e reconhecer padrões simbólicos, além de preparar o terreno para a fatoração e o estudo de equações polinomiais. (IEZZI et al., 2012) reforçam que esse domínio é um passo fundamental para a construção de modelos matemáticos e para a formação de um raciocínio algébrico consistente.

No contexto das funções polinomiais, as operações algébricas podem ser estendidas de forma natural para funções, sendo definidas ponto a ponto. Assim, sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções polinomiais. A soma e a subtração dessas funções são definidas ponto a ponto, isto é, para todo x do domínio comum, tem-se

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

De modo análogo, o produto de duas funções polinomiais é definido por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

resultando novamente em uma função polinomial. Já o quociente entre duas funções polinomiais é dado por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

sendo definido apenas para os valores de x tais que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 2.2.

- **Adição e subtração:** realizam-se pela combinação de termos semelhantes.

$$(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 + x - 4) = 3x^2 - 2x - 3$$

- **Multiplicação:** aplica-se a propriedade distributiva.

$$(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

- **Divisão de polinômios:** Pode ser realizada pelo algoritmo da divisão, expressando o polinômio como quociente mais resto.

Essas operações formam o alicerce para o estudo gráfico e computacional desenvolvido nas seções seguintes.

2.1.2 Função

O conceito de função está ligado à ideia de dependência entre variáveis. Uma grandeza é dita função de outra quando seus valores variam conforme uma relação predefinida. Esse conceito é amplamente aplicável em situações do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento, como economia, física e biologia.

Definição 2.3 (Função). Uma **função** é uma relação entre dois conjuntos A e B , tal que a cada elemento $x \in A$ corresponde um único elemento $y \in B$. Denotamos:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

O conjunto A é o domínio da função, B é o contradomínio, e o conjunto das imagens de f , denominado imagem da função, é o subconjunto de B formado por todos os elementos $y \in B$ tais que existe pelo menos um $x \in A$ satisfazendo $y = f(x)$.

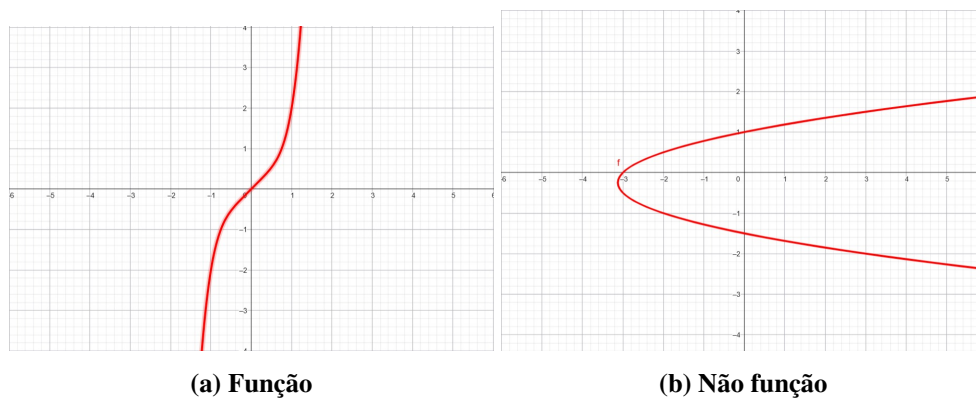
Definição 2.4 (Gráfico de uma função). Gráficos de funções reais são representados no plano cartesiano por pares ordenados $(x, f(x))$, e o conjunto desses pontos forma o gráfico da função, denotado por:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Note que o $Gr(f)$ é um subconjunto do plano \mathbb{R}^2 , formado pelos pares ordenados (x, y) onde a primeira coordenada (x) é um ponto do domínio e a segunda coordenada (y) é a imagem correspondente.

Nem toda curva representada no plano cartesiano corresponde ao gráfico de uma função. Dessa forma, torna-se necessário um critério que permita verificar, a partir de uma representação gráfica, se uma relação satisfaz a definição de função. Um dos critérios mais utilizados para esse fim é o teste da reta vertical, segundo o qual, se uma reta vertical interceptar a curva em dois ou mais pontos distintos, conclui-se que a relação não associa um único valor de y a cada valor de x , não caracterizando, portanto, uma função, ver Figura 1.

Figura 1 – Gráficos - Função/Não Função



Fonte: Produção do próprio autor

2.1.3 Função Polinomial

Dentre os diferentes tipos de funções estudadas em Matemática, destacam-se as funções polinomiais, que constituem um caso particular de grande relevância devido às suas propriedades algébricas e geométricas bem definidas. Neste trabalho, as funções polinomiais configuram-se como o principal objeto de estudo, sendo analisadas sob a perspectiva de suas raízes e de sua representação gráfica.

A compreensão das funções polinomiais, especialmente no que se refere à análise de raízes, concavidade e variação, constitui um desafio comum no ensino médio. Muitos alunos apresentam dificuldades em estabelecer conexões entre as representações algébricas e gráficas. Algumas aplicações das funções polinomiais

As funções polinomiais estão presentes em diversas áreas do conhecimento:

- No cotidiano e em problemas reais:
 - Cálculo de áreas e volumes;
 - Modelagem de trajetórias (como a parábola de um projétil);

- Análise de crescimento e decréscimo de grandezas (lucros, custos, populações).
- Na Física:
 - Funções quadráticas descrevem movimentos uniformemente variados;
 - Polinômios de grau superior podem aproximar curvas de movimento;
 - Modelagem de energia potencial e oscilações.
- Na Economia e Administração:
 - Modelos de receita, custo e lucro;
 - Identificação de pontos de máximo e mínimo;
 - Otimização de recursos e projeção de tendências.
- Na Engenharia e Ciências Exatas:
 - Cálculos de resistência de materiais e eletricidade;
 - Aproximação de curvas complexas por métodos numéricos.
- Na Computação e Estatística:
 - Interpolação e regressão polinomial;
 - Criptografia e codificação de dados;
 - Métodos de aproximação em algoritmos computacionais.

Nesse contexto, o uso do GeoGebra se apresenta como uma ferramenta pedagógica eficaz, pois permite a visualização dinâmica dos fenômenos matemáticos e favorece uma aprendizagem mais intuitiva. Ao manipular os coeficientes de um polinômio e observar, em tempo real, as transformações do gráfico, o estudante desenvolve uma percepção mais clara das relações entre parâmetros e propriedades da função.

Essa abordagem visual estimula o pensamento variacional e a capacidade de interpretar representações gráficas. De acordo com (DUVAL, 2003), o aprendizado matemático requer a coordenação entre diferentes registros de representação, sendo a visualização um elemento essencial desse processo.

Além disso, o ambiente dinâmico do GeoGebra incentiva a exploração e a formulação de hipóteses, alinhando-se à concepção de aprendizagem significativa proposta por (AUSUBEL,

2000). O estudante constrói novos conhecimentos a partir da articulação entre conceitos prévios e novas experiências visuais e simbólicas.

Assim, o uso do GeoGebra no estudo das funções polinomiais não apenas amplia a compreensão conceitual, mas também aproxima o ensino da realidade tecnológica vivenciada pelos alunos. A ferramenta consolida-se, portanto, como um recurso didático que une teoria, prática e visualização no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Definição 2.5. (Função Polinomial) Uma função polinomial é aquela que associa a cada número real x um valor obtido pela substituição de x em um polinômio. Formalmente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ com i variando de 0 até n e $a_n \neq 0$ para algum n .

Se todos os coeficientes são nulos, a função é identicamente nula e seu grau não é definido. Se apenas $a_0 \neq 0$, trata-se de uma função de grau zero (constante).

Exemplo 2.3. As seguintes funções a seguir **são** consideradas funções polinomiais:

- $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
- $f(x) = x^7 - \sqrt{2}x - 9$.

Exemplo 2.4. As seguintes funções a seguir **não** são consideradas funções polinomiais:

- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
- $f(x) = 2^x$.

Definição 2.6 (Raiz de uma função polinomial). Dizemos que α é uma raiz de uma função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ quando $f(\alpha) = 0$, ou seja, quando

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

O estudo das raízes de funções polinomiais está diretamente relacionado a um dos resultados mais importantes da Álgebra, o Teorema Fundamental da Álgebra. Esse teorema estabelece uma relação fundamental entre o grau de um polinômio e a quantidade de suas raízes, fornecendo uma base teórica essencial para a compreensão da estrutura algébrica das funções polinomiais e para a análise de seus comportamentos.

Antes de ilustrar o Teorema Fundamental da Álgebra, é conveniente destacar o conceito de multiplicidade de uma raiz. Diz-se que uma raiz α de um polinômio $f(x)$ possui multiplicidade k quando o fator $(x - \alpha)^k$ divide $f(x)$, mas $(x - \alpha)^{k+1}$ não o divide. A multiplicidade indica, portanto, o número de vezes que uma mesma raiz aparece como solução da equação polinomial.

Teorema 2.1. (Teorema fundamental da Álgebra) Toda função polinomial de grau $n \geq 1$ possui, no máximo, n raízes reais e exatamente n raízes complexas, considerando multiplicidades, demonstração ver em (RIBENBOIM, 2013).

Exemplo 2.5.

- $f(x) = x^3$ tem três raízes iguais a zero (multiplicidade 3).
- $g(x) = x^5 - x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 1)$ tem cinco raízes, sendo três iguais a zero e duas distintas, 1 e -1 .

2.2 FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 1

As funções polinomiais de primeiro grau constituem o ponto de partida para o estudo das funções de graus superiores, pois permitem compreender a relação entre a expressão algébrica e sua representação gráfica.

Definição 2.7. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função polinomial de primeiro grau ou função afim, quando existem números $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, com $a_1 \neq 0$ tais que $f(x) = a_1x + a_0, \forall x \in \mathbb{R}$.

O gráfico dessa função é uma reta no plano cartesiano, onde: a_1 representa o coeficiente angular, indicando a inclinação e o sentido da reta (crescimento ou decrescimento) e a_0 é o coeficiente linear, que corresponde ao ponto em que a reta intercepta o eixo y .

Observação 2.1. Observe que devemos ter $a_1 \neq 0$, pois se $a_1 = 0$ então para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ passaríamos a ter uma função constante, ou seja, $f(x) = a_0$. Aqui, o gráfico de f , quando esboçado no plano cartesiano, será sempre uma reta paralela ao eixo das abscissas, e o ponto de interceptação com o eixo das ordenadas será justamente o valor da constante a_0 .

2.2.1 Raiz de uma função polinomial de grau 1

Vale destacar, pelo Teorema Fundamental da Álgebra 2.1, que se $a_1 = 0$, então a função afim não tem raiz no conjunto dos números reais, isto é, a função função constante $f(x) = a_0$

pode não ter raiz se $a_0 \neq 0$ ou ter infinitas raízes se $a_0 = 0$.

Assim, para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_1x + a_0$ com $a_1 \neq 0$:

- Se x_0 é raiz de f , então $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$.

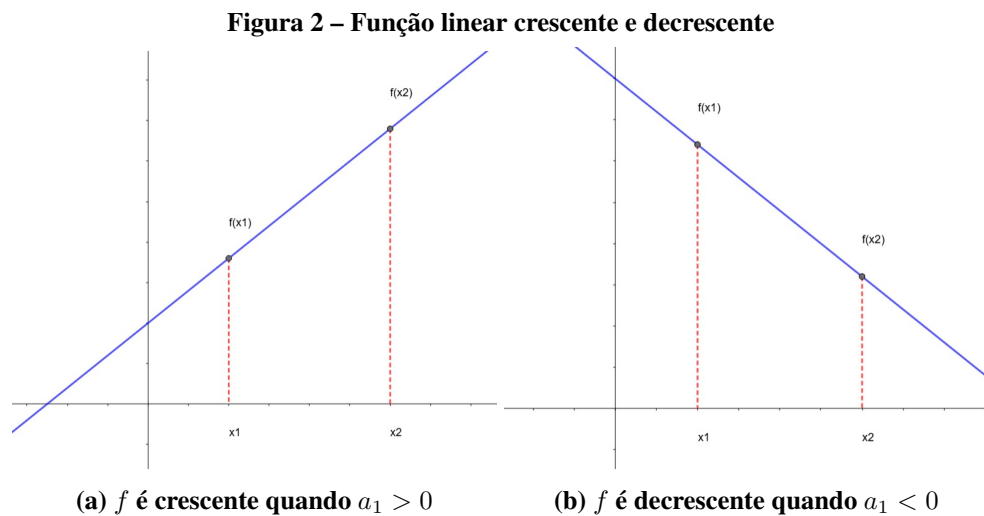
De fato,

$$x_0 \text{ é raiz de } f \iff f(x_0) = a_1x_0 + a_0 = 0 \iff x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$$

- Como $a_1 \neq 0$, temos:

- Se $a_1 > 0$, então f é crescente $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.
- Se $a_1 < 0$, então f é decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Podemos visualizar esses casos utilizando o Geogebra na Figura 2.



Fonte: Produção do próprio autor

2.3 FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 2

O estudo de uma função polinomial de grau 2 ou função quadrática é de grande relevância porque ela descreve inúmeros fenômenos presentes tanto no dia a dia quanto em diferentes áreas do conhecimento, as quais podem ser modeladas por meio desse tipo de função.

As funções quadráticas são representadas pela expressão:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0.$$

O gráfico dessa função é uma parábola, cuja concavidade, entendida como a direção da abertura da curva, depende do sinal do coeficiente a_2 se $a_2 > 0$, a concavidade é voltada para cima, e se $a_2 < 0$, é voltada para baixo.

2.3.1 Raiz de uma função polinomial de grau 2

As raízes reais da função correspondem aos pontos de interseção da parábola com o eixo x . O cálculo dessas raízes é feito pela fórmula de Bhaskara:

$$f(x) = 0 \iff a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \iff x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0}}{2a_2}.$$

A posição desses pontos está diretamente relacionada ao discriminante

$$\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0.$$

Observação 2.2. É importante destacar que f só terá raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$, pois se $\Delta < 0$ então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Assim:

- Se $\Delta > 0$, existem duas raízes reais e distintas, assim a parábola corta o eixo x em dois pontos;
- Se $\Delta = 0$, há uma raiz real dupla, então a parábola toca o eixo x em apenas um ponto (o vértice).
- Se $\Delta < 0$, não há raízes reais, então a parábola não corta ou intersecta o eixo x .

2.4 FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 3

As funções polinomiais de terceiro grau apresentam uma estrutura algébrica rica, permitindo a ocorrência de até dois pontos críticos e, no máximo, três raízes reais. Do ponto de vista histórico e teórico, a resolução das equações polinomiais cúbicas está associada aos trabalhos de (CARDANO, 1545) e (TARTAGLIA, 1551), que desempenharam papel fundamental no desenvolvimento da Álgebra. Embora existam métodos algébricos para a determinação das raízes dessas funções, sua análise gráfica fornece uma compreensão mais intuitiva do comportamento da função e da disposição de suas raízes no plano cartesiano.

A função polinomial de grau 3 ou cúbica tem a forma geral:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0,$$

seu gráfico é caracterizado por uma curva contínua que pode apresentar até dois pontos de inflexão e três raízes reais distintas.

O comportamento da função depende dos sinais e valores dos coeficientes, influenciando as variações de crescimento e decrescimento ao longo do eixo x .

2.4.1 Raiz de uma função polinomial de grau 3 pelo método de Cardano-Tartaglia

O estudo das equações cúbicas representa um marco importante na história da matemática. Durante o século XVI, no período do Renascimento Italiano, matemáticos buscavam soluções gerais para as equações de terceiro grau, um desafio que permanecia sem resposta desde a antiguidade.

Nesse contexto, destacou-se o matemático italiano (TARTAGLIA, 1551), que descobriu um método para resolver um tipo específico de equação cúbica. Mais tarde, o também italiano (CARDANO, 1545) obteve a permissão de Tartaglia para conhecer o método e, posteriormente, publicou-o em 1545 no livro *Ars Magna*, uma das obras mais influentes da história da álgebra.

Apesar da polêmica em torno da divulgação sem crédito completo a Tartaglia, o trabalho de Cardano foi um divisor de águas: pela primeira vez, apresentava-se uma solução geral para equações de terceiro grau. Essa descoberta impulsionou o desenvolvimento da álgebra moderna, introduziu o uso de números complexos e abriu caminho para o estudo de equações de graus mais elevados, como as de quarto grau, posteriormente resolvidas por (FERRARI, 1565), aluno de Cardano.

O estudo das raízes de uma função polinomial cúbica é uma parte fundamental da compreensão do comportamento das funções polinomiais em geral. Esse estudo nos permite observar como o número e a posição das interseções dependem dos coeficientes a_3 , a_2 , a_1 e a_0 . Isso é essencial para entender como as funções polinomiais evoluem de quadráticas para cúbicas.

Assim, podemos identificar onde o gráfico corta o eixo x e compreender como a função muda de sinal.

O método de Cardano–Tartaglia resolve equações do tipo:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_3 \neq 0,$$

seguindo os seguintes passos:

1. Primeiro, realiza-se uma mudança de variável $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$ para eliminar o termo quadrático.

2. Substituindo essa expressão na equação, obtém-se a equação cúbica reduzida

$$y^3 + py + q = 0$$

onde os coeficientes p e q dependem de a_3, a_2, a_1, a_0 :

$$p = \frac{3a_3a_1 - a_2^2}{3a_3^2}$$

e

$$q = \frac{2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0}{27a_3^3}$$

3. Logo, Cardano mostrou que, se definirmos $y = u + v$, então a equação pode ser resolvida encontrando u e v tais que:

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad 3uv = -p.$$

4. Isso leva à **fórmula de Cardano**:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

5. Finalmente, retornando à substituição inicial, obtém-se:

$$x = y - \frac{a_2}{3a_3}.$$

Denotando por $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, o número de raízes depende do sinal de Δ

- $\Delta > 0$: uma raiz real e duas complexas;
- $\Delta = 0$: raízes reais múltiplas;
- $\Delta < 0$: três raízes reais distintas.

No software a ser apresentado, a visualização da curva cúbica evidencia essas diferenças, permitindo observar tangências e inflexões associadas a cada tipo de discriminante.

2.5 FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 4

As funções polinomiais de quarto grau ocupam uma posição de destaque no estudo das equações algébricas, uma vez que admitem resolução por meio de fórmulas fechadas. O método

clássico para a resolução de equações polinomiais de quarto grau é atribuído a (FERRARI, 1565), que desenvolveu um procedimento algébrico capaz de reduzir a equação original a uma equação de grau inferior, possibilitando a determinação explícita de suas raízes. Embora a aplicação direta dessas fórmulas seja, em geral, pouco prática em contextos educacionais, seu estudo possui relevância teórica e contribui para a compreensão da estrutura algébrica das funções polinomiais de grau quatro.

As funções de quarto grau, em geral, apresentam a forma:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_4 \neq 0.$$

Seu gráfico pode apresentar até três pontos críticos isto é, pontos nos quais a derivada se anula ou não existe, associados a máximos, mínimos ou mudanças no comportamento da função e até quatro raízes reais distintas, exibindo comportamentos simétricos ou assimétricos de acordo com os valores de seus coeficientes.

2.5.1 Raiz de uma função polinomial de grau 4

O estudo dessas funções costuma ser introduzido a partir dos casos biquadráticos, em que os termos ímpares estão ausentes, isto é:

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0,$$

nesse caso, a substituição $y = x^2$ transforma a equação em uma quadrática, facilitando o estudo de suas raízes. De maneira geral as soluções para $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_4 \neq 0$ consistem em

$$x = -\frac{a_3}{4a_4} \pm S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p \pm \frac{q}{S}}$$

A expressão geral das soluções de uma equação polinomial de quarto grau evidencia a complexidade envolvida em sua resolução algébrica, uma vez que depende de combinações de radicais, raízes quadradas e cúbicas, além de parâmetros auxiliares definidos a partir dos coeficientes do polinômio. Embora essa fórmula permita determinar explicitamente as raízes, sua extensão e o elevado número de operações tornam sua aplicação direta pouco prática em contextos educacionais. Ainda assim, sua apresentação é relevante do ponto de vista teórico, pois garante a existência de uma solução algébrica e reforça a importância de abordagens gráficas para a análise do comportamento da função.

2.6 FUNÇÕES POLINOMIAIS DE QUINTO GRAU E O TEOREMA DE ABEL-RUFFINI

As funções polinomiais de quinto grau apresentam um comportamento significativamente mais complexo, podendo possuir até quatro pontos críticos e, no máximo, cinco raízes reais. Essa complexidade torna sua análise algébrica mais desafiadora, o que reforça a importância de abordagens gráficas e computacionais para a investigação de suas propriedades. Nesse contexto, o estudo do comportamento global do gráfico, da variação da função e da disposição de suas raízes assume papel fundamental para a compreensão dessas funções.

As funções polinomiais de quinto grau são expressas na forma:

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_5 \neq 0.$$

Diferentemente dos casos anteriores (graus 2, 3 e 4), não existe uma fórmula geral em radicais para a resolução algébrica de equações de quinto grau.

Esse resultado é conhecido como o Teorema de Abel-Ruffini, proposto por (RUFFINI, 1799), que apresentou uma tentativa de demonstração da impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por radicais. Mais tarde, o matemático norueguês (ABEL, 1824) publicou, em 1824, uma demonstração completa e rigorosa dessa impossibilidade. Posteriormente, (GALOIS, 1832) ampliou esses resultados ao desenvolver a **Teoria de Galois**, que explica profundamente as condições sob as quais uma equação é ou não resolúvel por radicais.

O Teorema estabelece que:

“Não há fórmula geral, construída apenas com operações algébricas e radicais, capaz de expressar as raízes de uma equação polinomial de quinto grau em função de seus coeficientes.”

Embora algumas equações específicas de quinto grau possam ser resolvidas por métodos particulares, a maioria requer aproximações numéricas, como no exemplo simples $x^5 - 32 = 0$, cuja solução é direta $x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Por outro lado, uma equação como $x^5 - x + 1 = 0$, não pode ser resolvida por radicais, e suas raízes só podem ser expressas de forma aproximada ou por meio de funções especiais, como as funções elípticas.

3 FUNÇÕES POLINOMIAIS E GEOGEBRA

Antes de detalhar o processo de construção na seção 3.1 e exploração dos gráficos no GeoGebra, apresentam-se, de forma sucinta, alguns exemplos de funções polinomiais cujos gráficos já se encontram construídos, bem como as respectivas soluções finais, obtidas por meio de fórmulas fechadas. Esses exemplos contemplam equações polinomiais de segundo, terceiro e quarto graus, para as quais existem métodos algébricos explícitos de resolução. Posteriormente, descreve-se o processo de construção e análise desses gráficos no GeoGebra. Observe que na Figura 3, Figura 4 e Figura 5 a seguir, as raízes em destaque estão indicadas pelas **setas pretas**, e o ponto de interseção com o eixo Y é indicado pelas **setas amarelas**.

Grau 2 – Fórmula de Bhaskara.

Considere a equação quadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$

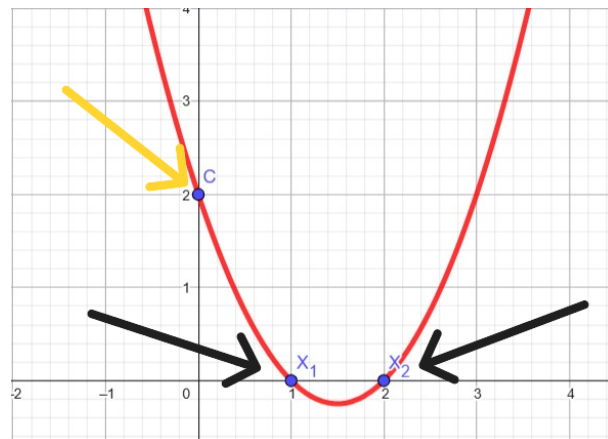
O discriminante é $\Delta = a_1^2 - 4a_2 \cdot a_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$.

Aplicando a fórmula de Bhaskara,

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a_2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

obtemos as raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$. (ver Figura 3)

Figura 3 – $f(x) = x^2 - 3x + 2$ com raízes em $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

No GeoGebra posteriormente mostraremos que além de calcular as raízes algebricamente, o professor poderá criar, ajustar e exibir a parábola e destacar os pontos de interseção com o eixo x , permitindo que os alunos relacionem diretamente o valor de Δ com a existência e a multiplicidade das raízes.

Grau 3 – Fórmula de Cardano (cúbica deprimida).

Considere a cúbica na forma deprimida

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{com} \quad p = -3, q = -2,$$

especificamente,

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

onde $p = -3$ e $q = -2$. O discriminante associado ao método de Cardano é

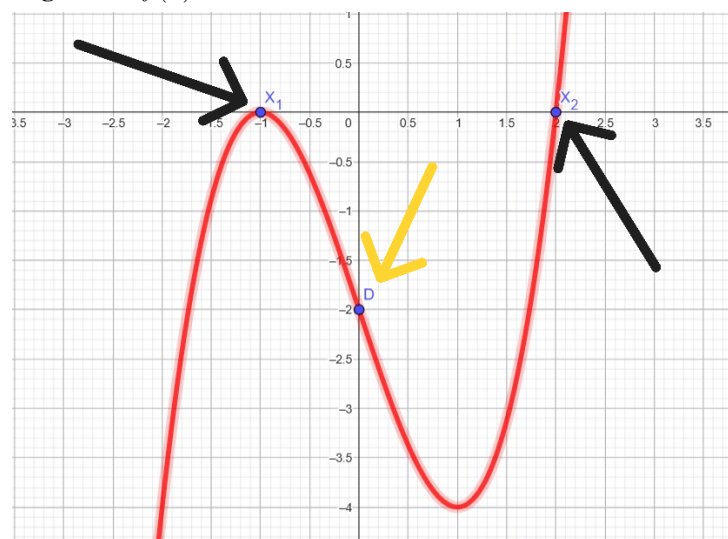
$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0.$$

Com $\Delta = 0$, as soluções pela fórmula de Cardano fornecem

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{1} = 1 \quad e \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

de modo que uma raiz real simples é $x_1 = u + v = 2$. As demais raízes, neste caso, são $x_2 = x_3 = -1$ com multiplicidade dupla, resultando no conjunto de soluções $\{2, -1\}$, (ver Figura 4)

Figura 4 – $f(x) = x^3 - 3x - 2$ com raízes em $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

É importante ressaltar que em situações com $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, a representação gráfica no GeoGebra ajudará os estudantes a visualizar multiplicidades e a existência de raízes complexas, relacionando a forma da curva com as propriedades algébricas da equação.

Grau 4 – Caso biquadrático e observação sobre o método de Ferrari.

Um caso frequentemente abordado em contexto escolar é o biquadrático.

Considere

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

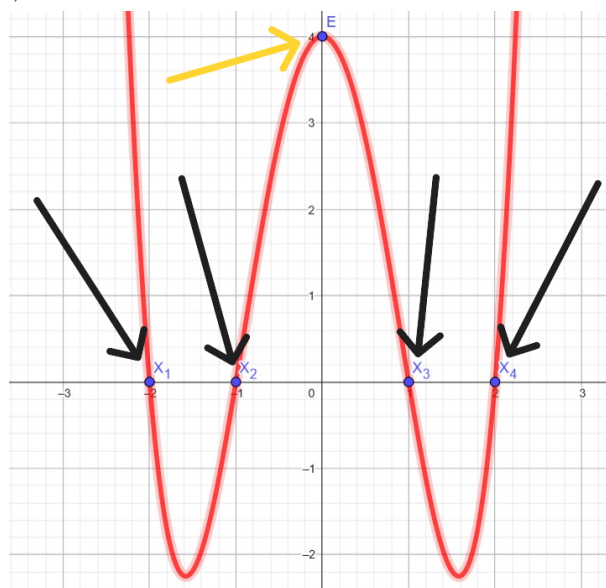
Fazendo a substituição $y = x^2$, obtém-se a quadrática $y^2 - 5y + 4 = 0$, cujas soluções são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Voltando à variável original,

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad e \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2,$$

portanto as raízes reais são $\{-2, -1, 1, 2\}$.

Para quarticas gerais (não biquadráticas), o método fechado histórico é o de Ferrari, que reduz a equação a resoluções quadráticas após uma adequada transformação. No entanto, devido à complexidade algébrica, o estudo e a aplicação completa do método de Ferrari são mais raros em contextos escolares; o GeoGebra permite explorar graficamente esses polinômios e verificar numericamente as raízes encontradas por algoritmos do próprio software. (ver Figura 5)

Figura 5 – $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ com raízes em $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

O exercício de reduzir uma quartica biquadrática à forma quadrática é proveitoso pedagogicamente, pois articula técnicas algébricas elementares já conhecidas em grau 2 com

complementação de observações gráficas, por exemplo, reconhecer simetrias do gráfico que indicam substituições úteis.

3.1 CONTROLES DESLIZANTES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO GEOGEBRA

Em geral, temos da Definição 2.5 que uma função polinomial de grau n é representada pela seguinte expressão

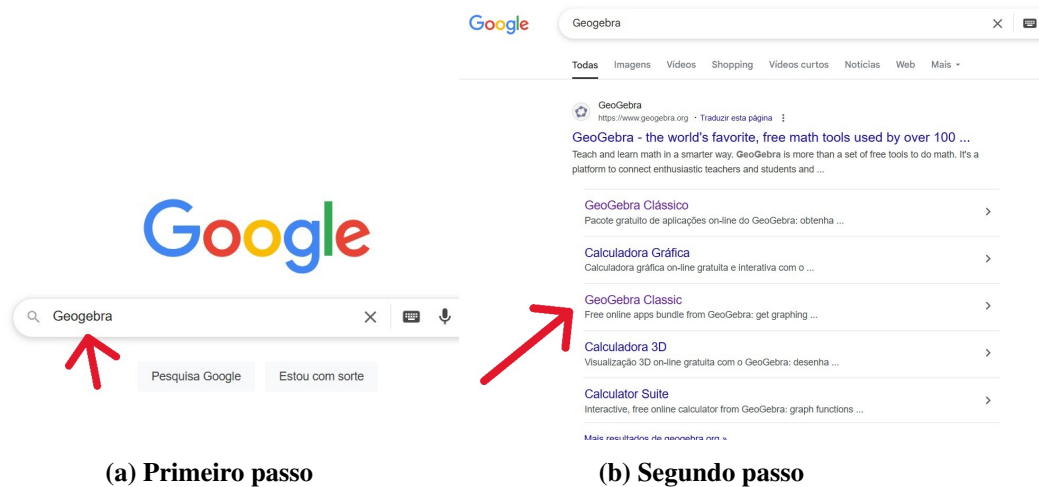
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde n representa o grau desejado do polinômio, sendo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ os coeficientes controláveis por meio dos deslizantes, sendo $a_n \neq 0$. Assim, observamos que para definir um polinômio de grau n precisamos definir $n + 1$ deslizantes (constantes).

A seguir, em cada etapa são descritos os procedimentos necessários para inserir os controles deslizantes (*sliders*) correspondentes aos coeficientes e a definição da função no campo de entrada do GeoGebra. Essa sequência tem como finalidade favorecer a compreensão conceitual do estudante, permitindo que ele visualize a formação do polinômio e entenda o papel de cada coeficiente na transformação do gráfico.

1. Digite no campo de entrada do Google o nome do software Geogebra, em seguida clique em Geogebra Classic como mostra a Figura 6.

Figura 6 – GeoGebra Classic

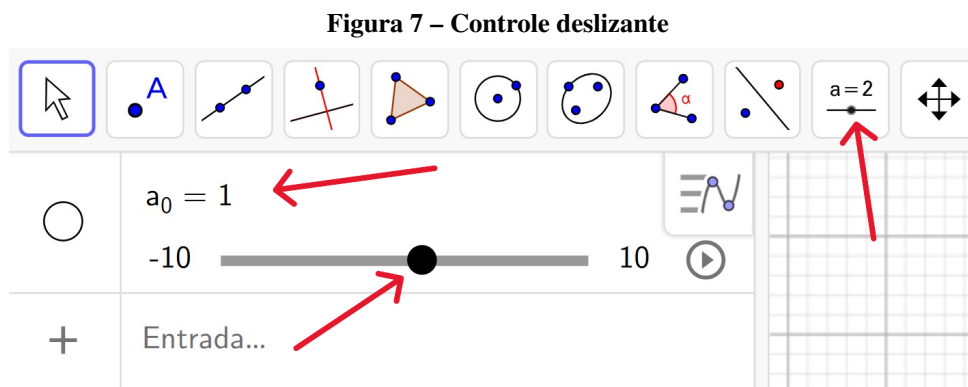


Fonte: Produção do próprio autor

2. **Acesso ao ambiente.** No *GeoGebra Classic* e certifique-se de que as janelas *Álgebra* e *Gráfico* estão habilitadas.

3. Criação do controle deslizante.

- Clique no ícone de *Controle deslizante* (representado por $a = 2$)
- Clique em qualquer lugar na tela para inserir o deslizante.
- Na janela que aparece, defina, por exemplo, o controle denominado a_0 .
- Defina, por exemplo, os seguintes parâmetros:
 - Mínimo: -10
 - Máximo: 10
 - Mostrar rótulo: ativado
- Clique em OK, o deslizante aparecerá na tela e pode ser movido, ver Figura 7.



Fonte: Produção do próprio autor

Agora, podemos criar qualquer polinômio de grau n específico e analisar o comportamento do gráfico.

Exemplo 3.1. Suponhamos $n = 5$, então dessa forma, se $n = 5$ então o polinômio será dado pela expressão

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

Vemos que neste caso precisamos criar no GeoGebra 6 deslizantes os quais corresponderão aos coeficientes:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

A partir dessa construção, poderemos obter, de forma interativa, os casos de graus 1, 2, 3 e 4 apenas zerando alguns coeficientes. (ver Figura 8)

A ideia central dessa construção consiste em definir a função polinomial de forma geral, para um grau arbitrário n . No presente caso, optou-se por trabalhar com $n = 5$, possibilitando a exploração de funções polinomiais de grau até cinco por meio de um único conjunto de controles deslizantes. Essa abordagem evita a necessidade de criar individualmente cada função para diferentes graus, como ocorria na versão inicial da proposta, tornando o processo mais eficiente, organizado e didaticamente mais flexível.

Observação. A partir deste ponto, nas figuras apresentadas a seguir, as setas **pretas** indicam as interseções do gráfico com o eixo x , as setas **azuis** indicam a interseção com o eixo y , e as setas **vermelhas** destacam os ajustes que devem ser realizados no painel principal do GeoGebra, previamente configurado para funções polinomiais de grau até cinco.

Polinômio de grau 1. Para iniciar a exploração, considera-se a função

$$f(x) = 2x - 4,$$

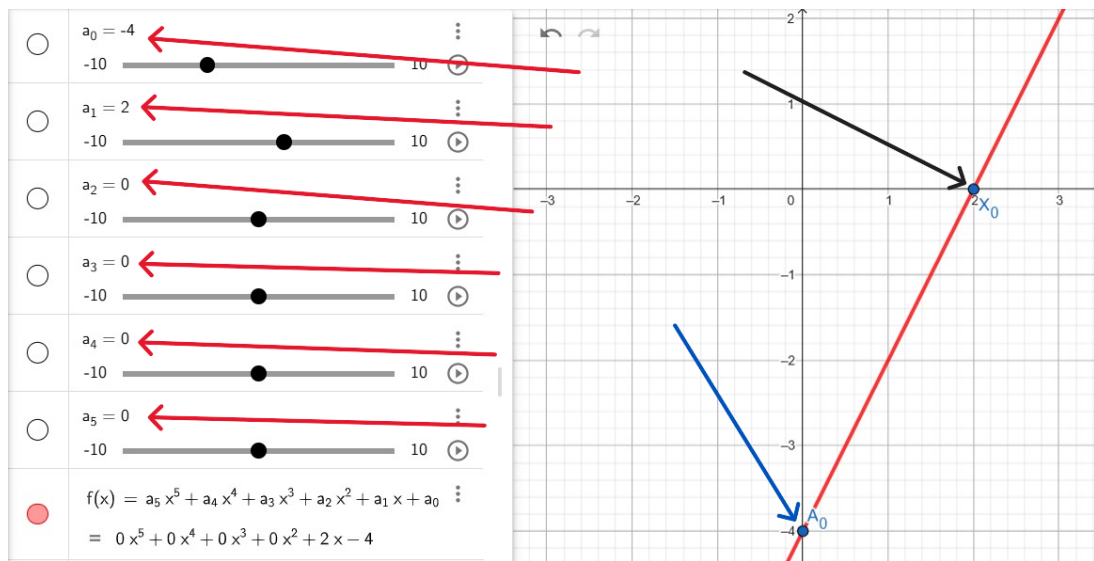
em que $a_1 = 2$ e $a_0 = -4$. A raiz dessa função pode ser determinada algebricamente impondo-se $f(x) = 0$, isto é,

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2.$$

Embora o cálculo algébrico forneça diretamente o valor da raiz, muitos estudantes apresentam dificuldades em interpretar esse resultado e relacioná-lo ao gráfico da função. Por esse motivo, a visualização no GeoGebra é utilizada como complemento, permitindo identificar graficamente o ponto em que a reta intercepta o eixo x .

Como a construção adotada utiliza uma função polinomial geral de grau n (neste caso, $n = 5$), é necessário, no Exemplo 3.1, zerar os coeficientes correspondentes aos termos de grau superior. Assim, devem ser definidos $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, mantendo apenas os coeficientes a_1 e a_0 diferentes de zero. Após esse ajuste, os controles deslizantes passam a representar efetivamente uma função de primeiro grau, possibilitando a manipulação dos valores de a_1 e a_0 e a observação imediata das alterações na inclinação da reta, no ponto de interseção com o eixo y e na posição da raiz. (ver Figura 10)

Figura 10 – Função $f(x) = 2x - 4$



Fonte: Produção do próprio autor

Com a utilização dos controles deslizantes, o aluno pode ajustar dinamicamente os coeficientes da função e perceber, de forma imediata, as variações no ângulo de inclinação da reta, bem como as mudanças nos pontos de interseção com os eixos x e y . Essa manipulação permite relacionar diretamente os coeficientes algébricos ao comportamento geométrico do gráfico, favorecendo uma compreensão mais intuitiva da função polinomial de primeiro grau.

Polinômio de grau 2. Considere a função polinomial de segundo grau

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Para determinar suas raízes, impõe-se $f(x) = 0$, isto é,

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Aplicando a fórmula quadrática, obtém-se

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

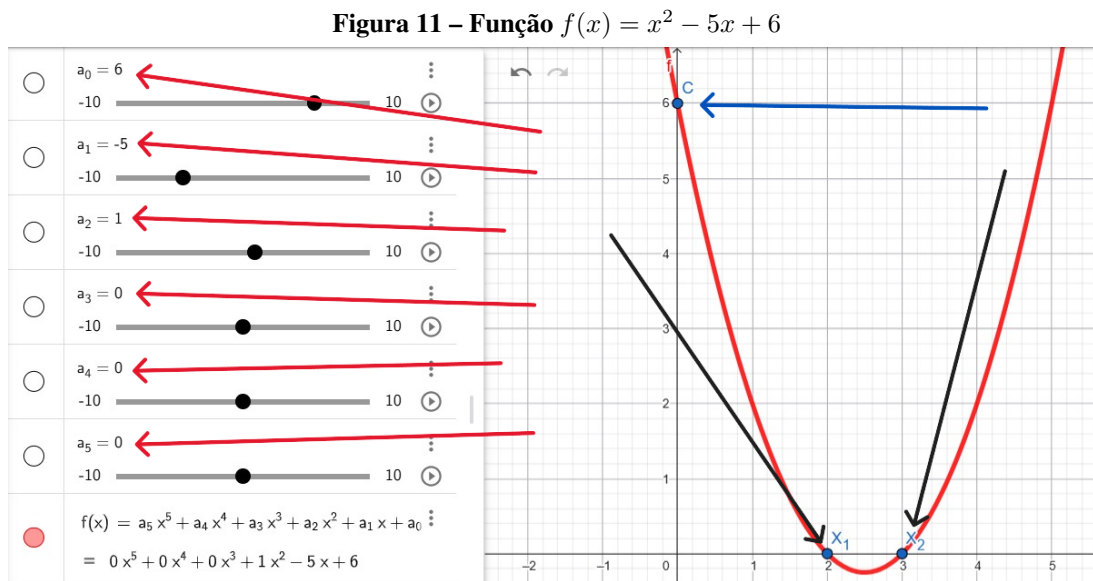
dessa forma, as raízes da função são

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = 3.$$

Embora a resolução algébrica permita determinar as raízes de forma objetiva, é comum que os estudantes apresentem dificuldades em interpretar esses resultados e relacioná-los ao

comportamento do gráfico, especialmente no que se refere aos pontos de interseção com o eixo x .

Para realizar a visualização no GeoGebra utilizando a construção dada no Exemplo 3.1, deve-se manter zerados os coeficientes dos termos de grau superior, isto é, $a_3 = a_4 = a_5 = 0$, e ajustar apenas os coeficientes a_2 , a_1 e a_0 por meio dos controles deslizantes. Após esse ajuste, o gráfico exibido corresponde efetivamente a uma função de segundo grau, possibilitando a observação das interseções com os eixos coordenados. (ver Figura 11)



Fonte: Produção do próprio autor

Com a utilização dos controles deslizantes, o aluno pode variar dinamicamente os coeficientes da função e observar, em tempo real, as alterações na concavidade da parábola, bem como nas posições dos pontos de interseção com o eixo x . Dependendo dos valores atribuídos aos coeficientes, a função pode apresentar duas raízes reais distintas, uma única raiz real (raiz dupla) ou nenhuma raiz real, o que favorece a compreensão da relação entre os coeficientes do polinômio e o comportamento gráfico da função.

Polinômio de grau 3. Considere a função polinomial de terceiro grau

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Para determinar suas raízes, impõe-se $f(x) = 0$, isto é,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Observa-se que $x = 1$ é uma raiz da equação. Assim, efetuando a fatoração, obtém-se

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Resolvendo a equação quadrática associada,

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

tem-se

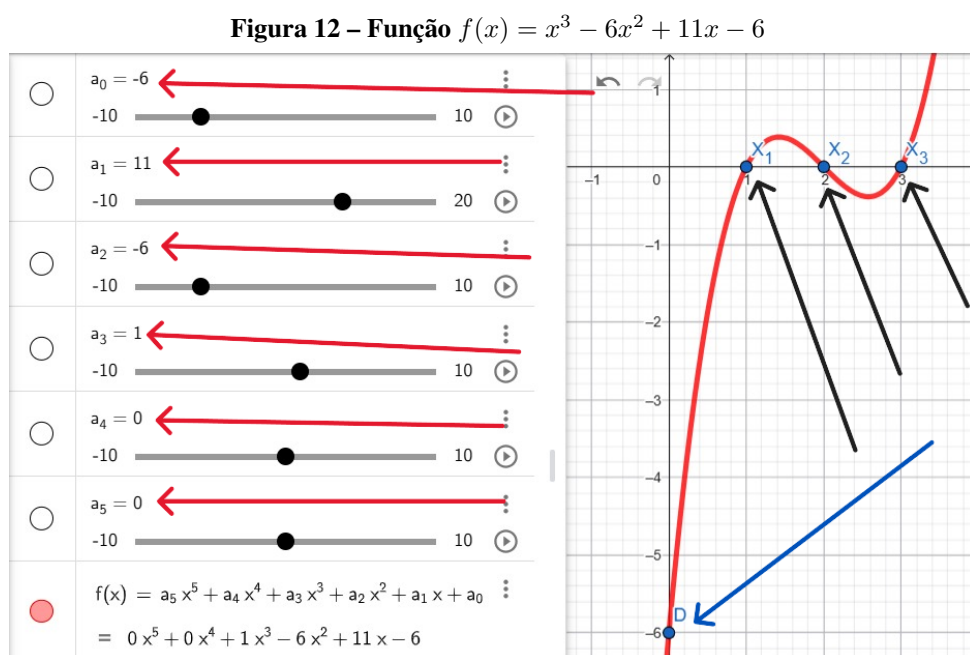
$$x_2 = 2 \quad \text{e} \quad x_3 = 3.$$

Dessa forma, a função apresenta três raízes reais distintas, dadas por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad \text{e} \quad x_3 = 3.$$

Embora a resolução algébrica permita determinar as raízes da função, muitos estudantes apresentam dificuldades em interpretar esses resultados e relacioná-los ao gráfico da função, especialmente quando há mais de uma raiz real.

Para realizar a visualização no GeoGebra utilizando a construção dada no Exemplo 3.1, deve-se manter zerados os coeficientes correspondentes aos termos de grau superior, isto é, $a_4 = a_5 = 0$, e ajustar apenas os coeficientes a_3 , a_2 , a_1 e a_0 por meio dos controles deslizantes. Após esse ajuste, o gráfico exibido corresponde efetivamente a uma função de terceiro grau. (ver Figura 12)



Fonte: Produção do próprio autor

A partir da manipulação dos controles deslizantes, o aluno pode observar de forma dinâmica o comportamento da função polinomial de terceiro grau, identificando as interseções com o eixo x e analisando como variações nos coeficientes influenciam a forma do gráfico. Nesse contexto, destacam-se os pontos críticos da função, entendidos como pontos do gráfico nos quais ocorre uma mudança no comportamento da curva, como a transição de crescimento para decréscimo ou vice-versa, estando associados a máximos e mínimos locais. Além disso, é possível compreender que, dependendo dos valores atribuídos aos coeficientes, a função pode apresentar uma, duas ou três raízes reais, favorecendo a relação entre a expressão algébrica e sua representação geométrica.

Polinômio de grau 4 (biquadrático). Para tornar a abordagem mais didática, considera-se inicialmente uma função polinomial de quarto grau em forma biquadrática, isto é, contendo apenas potências pares de x . Tomemos

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Para determinar suas raízes, impõe-se $f(x) = 0$, ou seja,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Como a equação envolve apenas potências pares de x , faz-se a substituição

$$u = x^2.$$

Dessa forma, a equação passa a ser

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática, tem-se

$$u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4) = 0,$$

logo,

$$u = 1 \quad \text{ou} \quad u = 4.$$

Retornando à variável x , obtém-se

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

e

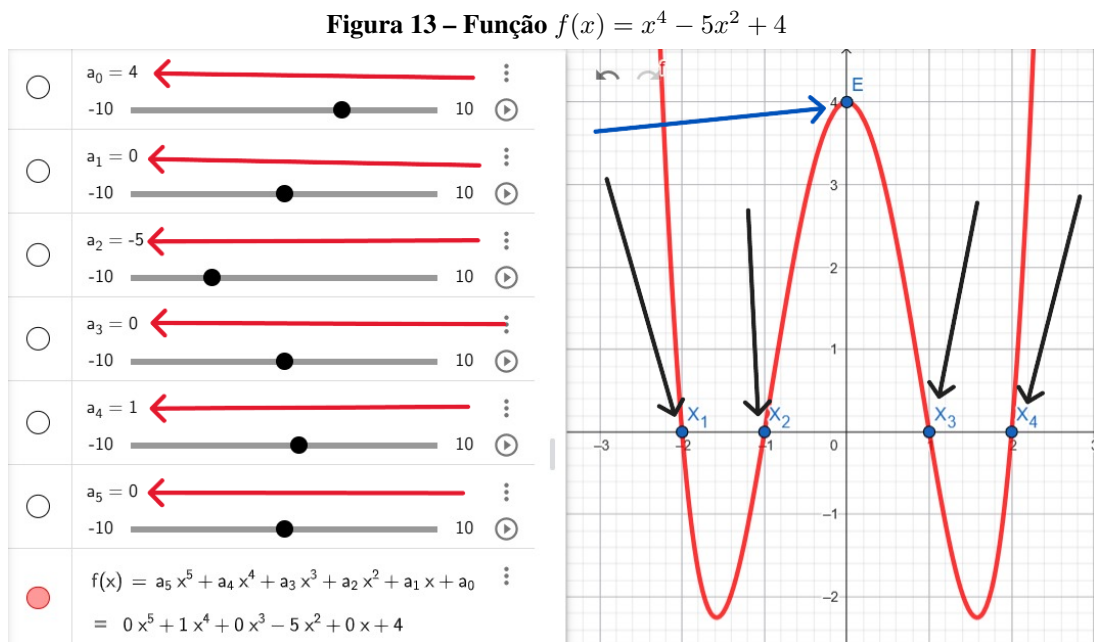
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Assim, as raízes reais da função são

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

De modo geral, funções polinomiais de quarto grau podem apresentar grande complexidade algébrica, o que torna pouco prático trabalhar com sua resolução completa em muitos contextos educacionais. Entretanto, no caso das biquadráticas, a presença exclusiva de potências pares permite reduzir o problema a uma equação do segundo grau por meio da substituição $u = x^2$, tornando a resolução acessível e adequada para explorar a relação entre a expressão algébrica e a representação gráfica.

Para visualizar esse caso no GeoGebra utilizando a construção dada no Exemplo 3.1, deve-se manter zerado o coeficiente do termo de quinto grau, isto é, $a_5 = 0$, e ajustar os coeficientes para que a função permaneça biquadrática, definindo também $a_3 = a_1 = 0$. Em seguida, ajustam-se os coeficientes a_4 , a_2 e a_0 de modo a obter a função desejada. Após esses ajustes, o gráfico exibido permite identificar as interseções com o eixo x e relacioná-las diretamente às raízes calculadas algebricamente. (ver Figura 13)



Fonte: Produção do próprio autor

Esse tipo específico de função polinomial de quarto grau, como as biquadráticas, mostra-se plenamente viável para o trabalho em sala de aula, uma vez que sua resolução se baseia em

procedimentos já conhecidos pelos alunos no estudo de funções de segundo grau. A utilização da substituição permite retomar conceitos previamente trabalhados, reduzindo a complexidade algébrica e exigindo apenas maior atenção na interpretação dos resultados obtidos.

Nesse sentido, a visualização gráfica no GeoGebra contribui para consolidar a compreensão do comportamento da função, auxiliando os estudantes a relacionar as soluções algébricas com as interseções do gráfico com o eixo x e ampliando sua percepção sobre funções polinomiais de grau mais elevado.

Polinômio de grau 5. Considere a função polinomial de quinto grau

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x.$$

Para determinar suas raízes, impõe-se $f(x) = 0$, isto é,

$$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = 0.$$

Inicialmente, observa-se que todos os termos possuem um fator comum x . Assim,

$$f(x) = x(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6).$$

Prosseguindo com a fatoração do polinômio de quarto grau, obtém-se

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1).$$

Portanto,

$$f(x) = x(x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1).$$

Dessa forma, as raízes reais da função são

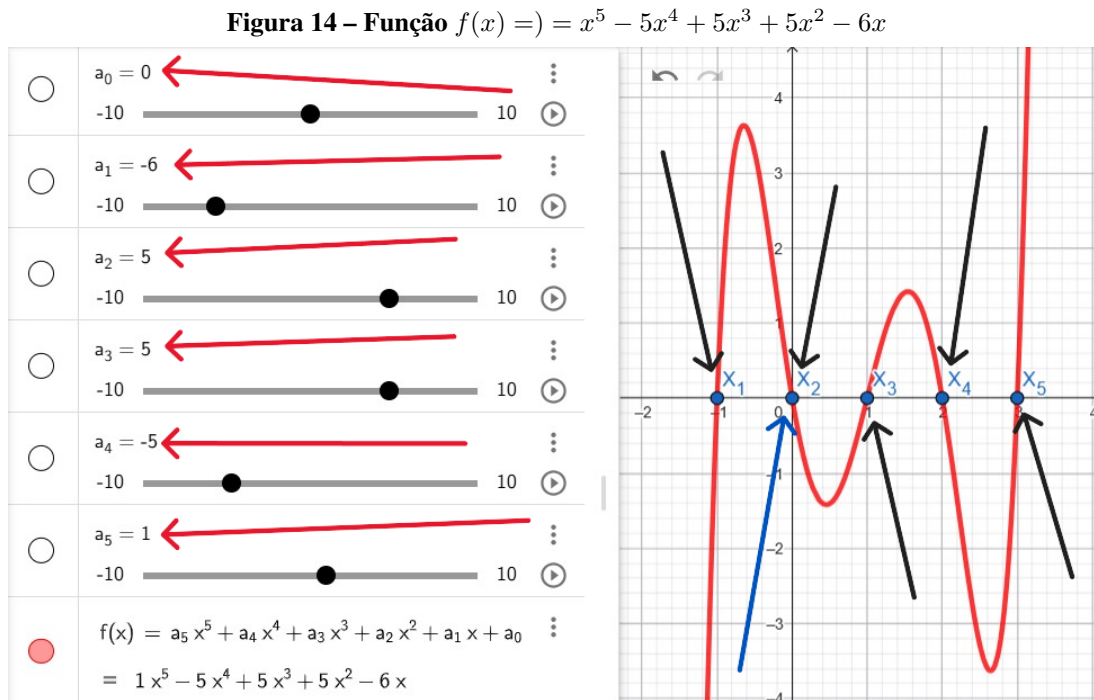
$$x = -1, 0, 1, 2, 3.$$

Embora a fatoração permita obter as raízes de forma objetiva neste exemplo, é comum que os estudantes tenham dificuldades em interpretar esses resultados e relacioná-los ao comportamento global do gráfico, especialmente quando há várias interseções com o eixo x .

Para complementar essa compreensão por meio da visualização no GeoGebra, utiliza-se a configuração dada no Exemplo 3.1 e ajustam-se os coeficientes nos controles deslizantes para

$$a_5 = 1, a_4 = -5, a_3 = 5, a_2 = 5, a_1 = -6, a_0 = 0.$$

Após esse ajuste, o gráfico exibido corresponde à função proposta, permitindo identificar visualmente as interseções com o eixo x e relacioná-las diretamente às raízes obtidas algebricamente. (ver Figura 14)



Fonte: Produção do próprio autor

Com a utilização dos controles deslizantes, o aluno pode manipular os coeficientes e observar, em tempo real, como pequenas variações alteram significativamente o formato do gráfico e, conseqüentemente, o número e a posição das interseções com o eixo x . Essa exploração contribui para consolidar a compreensão de que as raízes reais correspondem aos pontos em que o gráfico intercepta o eixo das abscissas e que diferentes escolhas de coeficientes podem produzir funções de quinto grau com comportamentos bastante distintos, reforçando o papel da visualização como complemento à abordagem algébrica.

GeoGebra

A utilização do GeoGebra possibilita trabalhar com uma função polinomial de grau específico, previamente definido, e explorar casos de menor grau por meio do ajuste dos coeficientes nos controles deslizantes. Essa abordagem permite ao aluno investigar diferentes comportamentos das funções sem a necessidade de reconstruir o gráfico a cada situação, favorecendo a compreensão da relação entre os coeficientes, o formato do gráfico e a posição das raízes.

4 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta os procedimentos metodológicos que orientaram a construção desta pesquisa, cuja natureza é qualitativa e exploratória, centrada na elaboração de um produto educacional voltado para o ensino das funções polinomiais com o apoio do software GeoGebra.

Diferentemente de uma pesquisa empírica de intervenção, este trabalho não envolveu aplicação direta em sala de aula. O enfoque está na proposição teórico-prática de uma metodologia que possa ser implementada por professores da Educação Básica, especialmente do Ensino Médio, como recurso didático para promover o aprendizado visual e investigativo das funções polinomiais e de suas raízes.

4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

A metodologia adotada fundamenta-se em uma perspectiva exploratória e descritiva, adequada a estudos cujo objetivo é propor e analisar práticas pedagógicas baseadas em recursos tecnológicos.

Assim, a pesquisa foi conduzida em três etapas principais:

- Revisão teórica e conceitual, abordando os fundamentos matemáticos das funções polinomiais, o papel das raízes e os princípios didáticos da aprendizagem significativa.
- Estudo e exploração do software GeoGebra, avaliando suas potencialidades para representar graficamente as funções e suas raízes, com foco na manipulação dinâmica de parâmetros e na observação de padrões.
- Elaboração de uma proposta de produto educacional, estruturada como uma sequência de atividades que orienta o professor na utilização do GeoGebra para o ensino das funções polinomiais.

Essas etapas articulam-se para consolidar um material que possa contribuir para o aprimoramento das práticas docentes, integrando teoria, tecnologia e ensino de Matemática.

4.2 NATUREZA E OBJETIVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional proposto consiste em uma sequência didática interativa, construída no ambiente do GeoGebra, destinada a apoiar o professor no ensino das funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau — níveis em que o estudo das raízes é abordado no currículo do Ensino Médio.

O objetivo principal é favorecer a compreensão conceitual das raízes das funções polinomiais por meio da visualização e manipulação dinâmica dos coeficientes da função. A proposta busca romper com o ensino meramente algébrico, priorizando a exploração visual, a formulação de hipóteses e a investigação de padrões.

Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- Proporcionar ao aluno um ambiente de experimentação que favoreça a construção de significados matemáticos;
- Explorar as relações entre os coeficientes de um polinômio e o comportamento de seu gráfico;
- Promover a transição entre os registros algébrico, geométrico e numérico;
- Estimular a reflexão crítica sobre o papel da tecnologia no aprendizado matemático.

4.3 ESTRUTURA DA PROPOSTA DIDÁTICA

A sequência didática proposta está organizada em três blocos de atividades, correspondentes às funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau, alinhando-se à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece o estudo dessas funções como componente fundamental da área de Matemática e suas Tecnologias.

Cada bloco é composto por:

- Apresentação do conceito e contextualização do tipo de função;
- Construção da função no GeoGebra, com criação de deslizadores para os coeficientes;
- Exploração guiada: observação e registro das transformações no gráfico;
- Análise e discussão: identificação de regularidades, formulação de conjecturas e interpretação geométrica das raízes;

- Síntese conceitual, na qual o aluno consolida os aprendizados relacionando a expressão algébrica e o gráfico.

O professor atua como mediador, orientando a investigação e incentivando os alunos a argumentar sobre as relações observadas. O GeoGebra assume, nesse processo, o papel de ferramenta cognitiva, permitindo que os estudantes experimentem a Matemática de forma ativa e significativa.

4.4 FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA DA PROPOSTA

A proposta fundamenta-se nos princípios da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2000), segundo os quais o conhecimento novo deve ser ancorado em estruturas cognitivas já existentes, adquirindo significado por meio da relação com conceitos prévios.

Nesse sentido, o uso do GeoGebra oferece ao aluno experiências visuais e manipulativas que facilitam a assimilação de conceitos abstratos, como variação, concavidade e raiz da função. Concomitantemente, apoia-se na teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003), que destaca a importância de articular múltiplos modos de representação para promover a compreensão matemática.

A abordagem proposta também valoriza a perspectiva da resolução de problemas e da aprendizagem investigativa, incentivando o aluno a explorar, formular hipóteses e construir significados a partir da observação. Assim, o produto educacional propicia uma transição do ensino transmissivo para uma prática exploratória e reflexiva, centrada no aluno.

4.5 EXPECTATIVAS E CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS

Espera-se que o produto educacional proposto contribua para:

- Enriquecer a prática docente, oferecendo subsídios teóricos e práticos para o ensino das funções polinomiais;
- Favorecer o uso pedagógico das tecnologias digitais como instrumentos de visualização e experimentação;
- Ampliar o interesse e a motivação dos alunos pelo estudo da Matemática;

- Estimular a reflexão sobre a integração entre teoria matemática, recursos tecnológicos e prática educativa.

Embora este trabalho não tenha envolvido aplicação direta em sala de aula, sua proposta está estruturada de modo que possa ser implementada e adaptada por professores em diferentes contextos escolares, servindo como referência para futuras investigações empíricas sobre o impacto do uso do GeoGebra no aprendizado de funções polinomiais.

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

A metodologia adotada evidencia o papel do professor como mediador do conhecimento e do aluno como agente ativo no processo de aprendizagem. O GeoGebra, ao ser incorporado como ferramenta de apoio, potencializa o ensino exploratório e investigativo, aproximando os estudantes do raciocínio matemático e promovendo uma aprendizagem mais significativa.

Os fundamentos teóricos e metodológicos apresentados aqui sustentam as análises e reflexões desenvolvidas no capítulo seguinte, dedicado às conclusões e perspectivas do trabalho.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O presente trabalho teve como propósito explorar o estudo das raízes das funções polinomiais por meio da visualização e manipulação dinâmica no software GeoGebra, buscando evidenciar como a integração entre tecnologia e teoria matemática pode favorecer a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

A pesquisa, de caráter qualitativo e exploratório, concentrou-se na elaboração de um produto educacional que propõe uma sequência didática voltada ao ensino das funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau. Essa proposta enfatiza a visualização das raízes, a interpretação geométrica e a construção de significados a partir da interação entre o aluno, o professor e o ambiente digital.

Os fundamentos teóricos abordados — em especial a aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2000) e os registros de representação semiótica (DUVAL, 2003) — sustentam a concepção de que o aprendizado matemático ocorre de forma mais eficaz quando o estudante consegue articular diferentes formas de representação e relacionar conceitos novos com conhecimentos prévios. Nesse sentido, o GeoGebra atua como mediador entre o pensamento algébrico e a visualização geométrica, tornando os conceitos mais acessíveis e intuitivos.

A análise das funções polinomiais, desenvolvida ao longo deste trabalho, demonstrou a progressão conceitual do estudo dessas funções, desde os casos mais simples até os de maior complexidade, incluindo a discussão sobre o Teorema de Abel–Ruffini, que evidencia os limites da resolução algébrica em graus superiores. Essa abordagem amplia a compreensão do aluno e do professor sobre a estrutura e o comportamento dos polinômios, destacando a relevância da tecnologia como meio de investigação e experimentação.

Do ponto de vista pedagógico, o uso do GeoGebra apresenta potencial para promover a aprendizagem ativa, na medida em que possibilita ao aluno observar, manipular e refletir sobre os fenômenos matemáticos. Essa dinâmica pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades de análise, conjectura e validação, fundamentais à formação matemática. Ao mesmo tempo, oferece ao professor um instrumento versátil para contextualizar o ensino, tornar o conteúdo mais atrativo e explorar aspectos visuais frequentemente negligenciados nas abordagens tradicionais.

Embora este estudo não tenha incluído uma aplicação empírica, o produto educacional elaborado constitui uma base sólida para futuras implementações em contextos escolares. Espera-se que professores interessados possam adaptar e aplicar a proposta, avaliando o impacto do uso

do GeoGebra na aprendizagem das funções polinomiais e na formação de conceitos relacionados às raízes e ao comportamento gráfico.

Além disso, este trabalho contribui para a reflexão sobre a integração das tecnologias digitais na educação matemática, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que incentiva o desenvolvimento do pensamento computacional e o uso de ferramentas tecnológicas para a resolução de problemas e a modelagem de situações reais.

Como perspectivas futuras, sugerem-se:

- a aplicação do produto educacional em sala de aula, com análise dos resultados de aprendizagem e percepção dos alunos;
- a ampliação da proposta para funções polinomiais de grau superior, incluindo abordagens numéricas e aproximativas das raízes com o apoio do GeoGebra;
- e o aperfeiçoamento do material didático, incorporando elementos interativos e atividades guiadas que favoreçam a autonomia dos estudantes.

Em síntese, o trabalho reafirma o potencial do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino das funções polinomiais, demonstrando que a visualização dinâmica das raízes e o uso de múltiplas representações contribuem para uma aprendizagem mais significativa, reflexiva e contextualizada.

Conclui-se, portanto, que a integração entre tecnologia, teoria matemática e prática pedagógica representa um caminho promissor para o ensino de Matemática, permitindo que o aluno não apenas aprenda a resolver equações, mas compreenda profundamente o comportamento das funções e o significado de suas raízes.

REFERÊNCIAS

ABEL, Niels Henrik. Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, 1824. Publicação onde Abel demonstrou rigorosamente a impossibilidade de resolver a equação geral de quinto grau por radicais.

AUSUBEL, David P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2000.

BECKER, Marcelo. Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. 2009.

BRAGA, Joana Darc Gomes. O uso do software geogebra como auxílio para o estudo de funções polinomiais de 1º e 2º grau. 2015.

CAIRES, João Batista Silva; NASCIMENTO, Jorge Costa do. Um estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus em ambiente informatizado. **Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 390–409, 2012.

CARDANO, Girolamo. **Ars Magna or The Rules of Algebra**. Nuremberg: Johannes Petreius, 1545. Obra clássica sobre a resolução de equações cúbicas e biquadráticas.

CAVALCANTE, Jefferson; MACENA, Edcarlos; SANTOS, Fábio; PASSOS, Jhennyfe; SANTOS, Thays. O uso do geogebra como recurso didático no ensino de “equações da reta”. **XII ENEM–ANAIS ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Anais, Curitiba, PR**, 2013.

CIFUENTES, José Carlos; SANTOS, ALESSANDRA HENDI DOS. Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. **Educere et Educare**, p. 10–17648, 2019.

COSTA, Andressa Solane Moreira. **A utilização do Geogebra como ferramenta para o ensino de Trigonometria**. 2017. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado) Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

CRUZ, Antônio Silva da. Utilização do geogebra como proposta metodológica para auxiliar alunos da 3ª série do ensino médio na aprendizagem de cônicas. Universidade Federal da Paraíba, 2018.

DOLCE, Osmar; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 7: Polinômios**. São Paulo: Editora Atual, 2013.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Campinas: Papyrus, 2003.

FERRARI, Lodovico. **Solution of the Quartic Equation**. Bologna, Italy: –, 1565.
Mathematician who discovered the general solution to the quartic equation.

FERRI, Julio; SCHIMIGUEL, Juliano; CALEJON, Laura Marisa Carnielo. Uso do geogebra no ensino de matemática. **Revista Gestão Universitária**, v. 1, p. 631–644, 2013.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, 2012.

GALOIS Évariste. **Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux**. Paris, France: Académie des Sciences, 1832. Manuscrito póstumo onde Galois desenvolveu as bases da teoria que hoje leva seu nome.

GUTIÉRREZ, Angel et al. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE. **Pme Conference**. [S.l.], 1996. v. 1, p. 1–3.

HENNEMANN, Vilson et al. Equações polinomiais de até quarto grau: o limite das soluções gerais por radicais. Universidade Federal de Santa Maria, 2021.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PIQUEIRA, Roberto. **Fundamentos de Matemática Elementar – Conjunto Completo**. Sao Paulo: Atual, 2012.

LATTARI, Cleiton Joni Benetti. O zero da função do 2º grau: uma demonstração para o curso de cálculo. **Revista Terra & Cultura: Cadernos de Ensino e Pesquisa**, v. 14, n. 27, p. 33–38, 2021.

LEITE, Antonio Carlos Pereira; MIOLA, Adriana Fátima de Souza. Contribuições do geogebra para o ensino de funções: o que revelam algumas pesquisas brasileiras. **Revista de Iniciação à Docência**, v. 8, n. 1, p. e11945–18, 2023.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1.

MOLINARI, José Robyson Aggio. Investigando o ensino de funções quadráticas com a utilização do software geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 7, n. 3, p. 3–18, 2018.

MONTEIRO, Claudino Luís Tavares; SILVA, Adelino Lopes da. Geogebra como ferramenta facilitadora na resolução de problemas envolvendo função quadrática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 12, n. 1, p. 29–42, 2023.

NASCIMENTO, Eimard GA do. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: **Acta de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra. Uruguay. ISSN**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2301–0185.

RIBENBOIM, Paulo. **Os Números Reais e Complexos e a Introdução à Análise**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

RUFFINI, Paolo. **Teoria generale delle equazioni**. Modena, Italia: Presso la Società Tipografica, 1799. Obra onde Ruffini apresentou uma tentativa de demonstração da impossibilidade de resolver equações de quinto grau por radicais.

SALES, Elielson Ribeiro de. **A visualização no ensino de matemática: uma experiência com estudantes surdos**. 2013.

SIQUEIRA, Dan Nunes de; CAETANO, Joyce Jaquelinne. **O uso do geogebra no ensino de funções no ensino médio**. 2016.

SOUZA, José Wellington Santos de. **Estudo da fórmula de cardano–tartaglia para a resolução de equações do terceiro grau**. Universidade Federal da Paraíba, 2021.

TARTAGLIA, Niccolò Fontana. **General Trattato di Numeri et Misure**. Venezia: Venice: Curtio Troiano, 1551. Tratado em que Tartaglia apresentou métodos para resolução de equações cúbicas.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. **Visualization in teaching and learning mathematics**. [S.l.]: Mathematical Association of America, 1991.

5.1 APÊNDICE - PRODUTO EDUCACIONAL

**UMA AULA SOBRE RAÍZES
DE FUNÇÕES POLINOMIAIS
COM AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

**ELIZEU FELIPE DOS SANTOS
MICHAEL SANTOS GONZALEZ GARGATE
SANTOS RICHARD WIELER SANGUINO BEJARARO**

Tema: Visualização de raízes de funções polinomiais com o uso do software Geogebra

Público alvo: 1º ano do ensino médio

Quantidade de etapas: 3

Duração da atividade proposta: 2 aulas

Objetivos gerais:

- Compreender o conceito de raiz (ou zero) de uma função polinomial, tanto de forma algébrica quanto gráfica.
- Desenvolver a capacidade de identificar e interpretar visualmente as raízes de funções polinomiais utilizando o GeoGebra.
- Relacionar a representação simbólica com a geométrica, fortalecendo a conexão entre teoria e prática.
- Propor atividades exploratórias que envolvam observação, manipulação e reflexão.
- Estimular a discussão coletiva e o raciocínio lógico a partir da análise de exemplos gráficos.

Objetivos específicos:

- Fomentar o pensamento algébrico e a resolução de problemas apoiados na visualização geométrica.
- Desenvolver a criatividade visual e o raciocínio intuitivo para interpretar funções.
- Relacionar os coeficientes das expressões polinomiais ao formato e à posição do gráfico.
- Consolidar o uso do GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem e à exploração matemática.

Habilidades da BNCC Relacionadas aos eixos de Geometria e Álgebra, destacam-se:

- (EM13MAT102) Investigar e interpretar o comportamento de funções a partir de suas representações gráficas e algébricas.

- (EF04MA27) - Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos.
- (EF06MA21) - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, gráficos entre outros.

Materiais necessários:

- Computador, tablet ou celular com acesso ao GeoGebra (versão web ou aplicativo).
- Folhas de registro, lápis, borracha e régua.
- Quadro ou projetor (caso o professor deseje acompanhar as construções coletivamente).

Antes de iniciar as atividades específicas para cada função polinomial, é importante destacar que, neste produto educacional, serão apresentados exemplos apenas até o **quinto grau**. Essa escolha se justifica pelo fato de que, no Ensino Médio, o estudo aprofundado das funções polinomiais costuma abranger, no máximo, funções até o grau três, conforme previsto nas orientações curriculares e nos livros didáticos mais utilizados.

Além disso, funções de graus superiores apresentam estruturas algébricas mais complexas e fórmulas de resolução pouco exploradas nesse nível de ensino, o que poderia desviar o foco principal deste trabalho: a **compreensão visual e conceitual** das raízes e do comportamento gráfico das funções polinomiais. Assim, a abordagem concentra-se nas funções de graus 1, 2, 3, 4 e 5 que permitem uma exploração algébrica acessível e uma análise gráfica significativa no GeoGebra.

Primeiro momento

No início do encontro se deixa claro para o estudante quais são os objetivos gerais dessa aula. Nesse primeiro instante teremos como objetivo específico fomentar o raciocínio lógico do discente para compreender o que a raiz de uma função polinomial representa algebricamente.

A ideia inicial é levar o estudante a compreender como algebricamente a raiz de uma função polinomial se comporta quando aplicada na própria função.

Nesse primeiro momento faça uma breve revisão sobre o que são zeros de uma função polinomial.

ETAPA 1: FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 1

Objetivo: Compreender que a raiz corresponde ao ponto onde a reta intercepta o eixo x .

Atividade Algébrica Inicial

Procedimento:

- Revisão conceitual e cálculo das raízes de uma função.
- Criação de controles deslizantes para a_0 e $a_1 \neq 0$ em $f(x) = a_1x + a_0$ no Geogebra.
- Representação da função polinomial $f(x) = 2x - 4$ no GeoGebra.
- Observação de como a inclinação e o deslocamento vertical alteram o ponto de interseção com o eixo X .

Discussão: O estudante identifica visualmente a única raiz real e compreende a relação entre expressão algébrica e gráfico.

De fato:

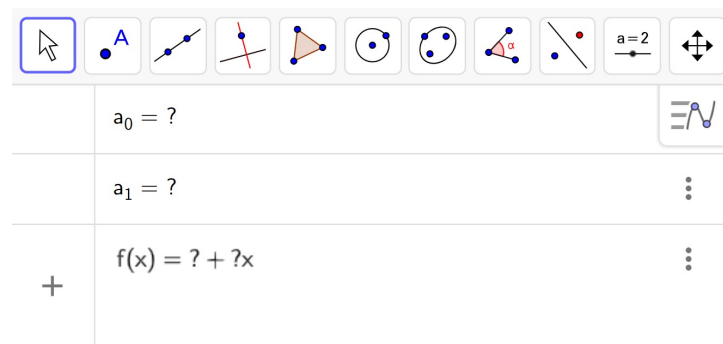
- Determinando sua raiz:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2,$$

assim, a função possui raiz real em $x = 2$.

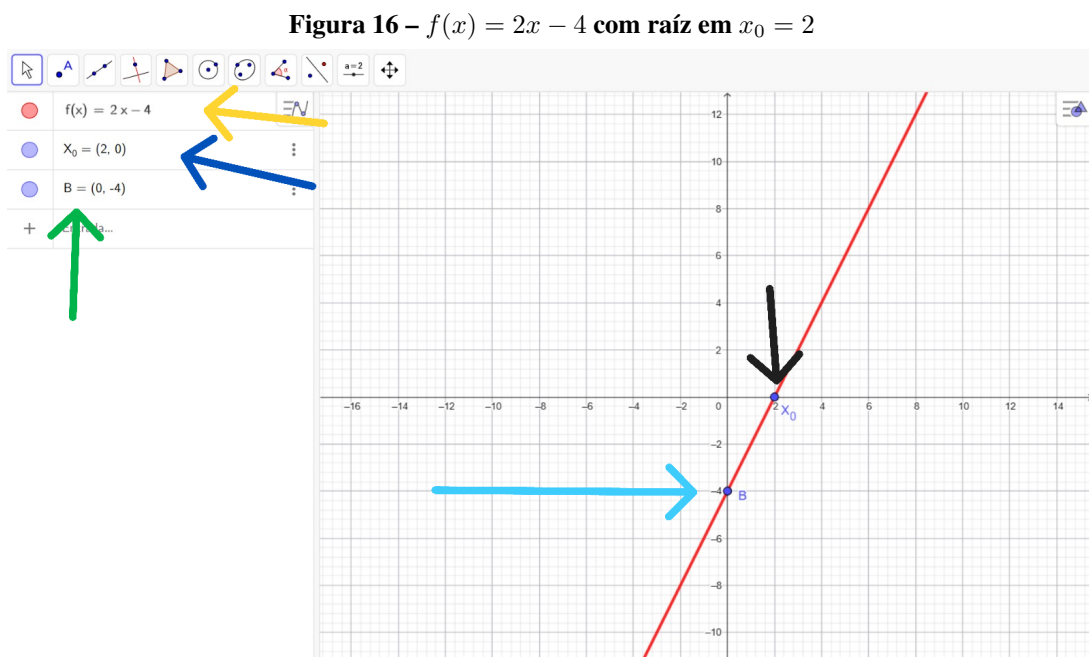
- Com $a_1 \neq 0$, criaremos dois controles deslizantes correspondentes aos coeficientes a_0 e a_1 (Figura 15).

Figura 15 – Controles deslizantes genéricos da função $f(x) = a_0 + a_1x$



Fonte: Produção do próprio autor

- Podemos determinar as interseções com os eixos coordenados:
 - Interseção com o eixo x : $(2,0)$.
 - Interseção com o eixo y : substituindo $x = 0$, $f(0) = -4$, logo o ponto é $(0, -4)$.
- Representação no GeoGebra: Após criar os deslizantes, podemos ajustar seus valores para observar como o gráfico se modifica. Por exemplo, ao posicionar, em particular, $a_0 = -4$ e $a_1 = 2$.



Fonte: Produção do próprio autor

Na Figura 16, destacamos alguns elementos importantes da construção gráfica no GeoGebra:

- **Seta Verde** Indica no painel de objetos, o ponto $B = (0, -4)$ a ser criado.
- **Seta Amarela** Destaca a função $f(x) = 2x - 4$ a ser criada no painel de entrada.
- **Seta Azul Escura** Aponta para o painel de objetos indicando o ponto que se refere a raiz de f , $X_0 = 2$.
- **Seta Azul Clara:** Aponta para o ponto $B = (0, -4)$, que representa a **interseção da reta com o eixo y** . Esse ponto evidencia o coeficiente linear da função, isto é, $f(0) = -4$.

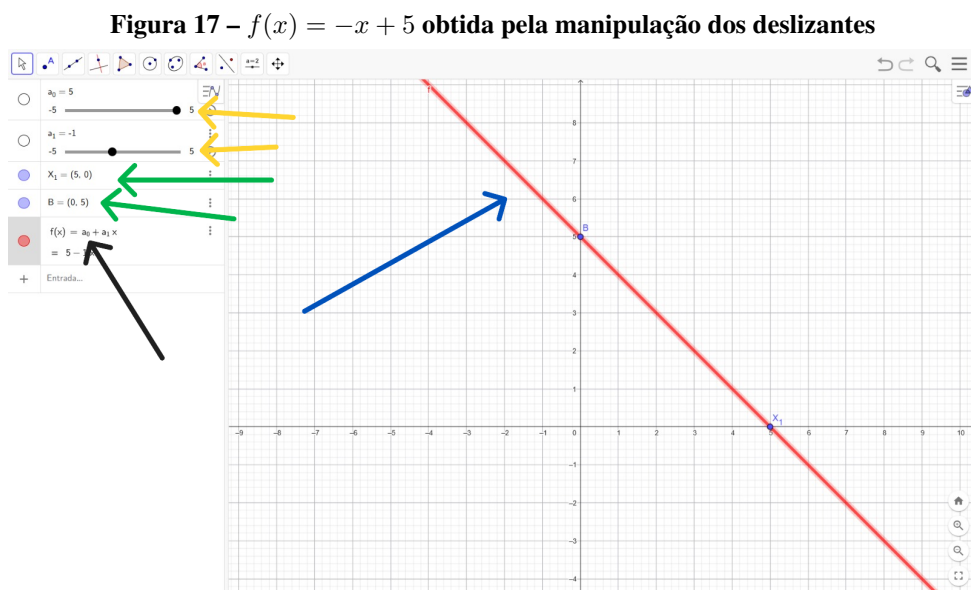
- **Seta Preta** Indica no gráfico, o ponto $X_0 = (2,0)$, correspondente à **raiz da função**, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Esse ponto marca a interseção da reta com o eixo x .

Por outro lado, também podemos observar: Ao movimentar os deslizantes, o estudante pode analisar como cada coeficiente afeta a reta

- o termo a_1 altera a inclinação (coeficiente angular);
- o termo a_0 desloca a reta verticalmente (intercepto em y).

Essa exploração visual reforça a conexão entre a expressão algébrica e a interpretação geométrica, preparando o estudante para a identificação da raiz como a interseção do gráfico com o eixo x .

Por exemplo, se posicionamos os deslizantes para $a_0 = 5$ e $a_1 = -1$, obtemos o seguinte gráfico.



Fonte: Produção do próprio autor

Na Figura 17, destacamos alguns elementos importantes da construção gráfica no GeoGebra:

- **Seta Verde** Indica os pontos de interseções com os eixos X e Y , a serem criados no painel de controle.
- **Seta Amarela** Destaca os controles deslizantes a serem criados no painel de controle.

- **Seta Preta** Aponta para a lei de formação da função $f(x) = a_0 + a_1x$ quando $a_0 = 5$ e $a_1 = -1$.
- **Seta Azul** Aponta para o gráfico sendo projetado no plano cartesiano depois de todos os comandos postos no painel de controle do software GeoGebra.

Discussão Didática

Nesta atividade, o estudante observa que a raiz de uma função afim corresponde ao ponto onde o gráfico intercepta o eixo x . A utilização do GeoGebra favorece a compreensão geométrica do conceito, tornando visível o processo de resolução algébrica e fortalecendo a interpretação gráfica.

O objetivo é permitir que o estudante observe dinamicamente como cada coeficiente influencia o gráfico da função.

Exercício Proposto

A seguir, investigue as seguintes funções afins:

$$f(x) = -3x + 6,$$

$$g(x) = x + 5,$$

$$h(x) = -x - 2.$$

Para cada função:

- determine a raiz de forma algébrica;
- represente no GeoGebra;
- marque o ponto correspondente à raiz no gráfico;
- registre em seu caderno a conclusão observada.

Encerramento da Etapa

Ao concluir esta etapa, o estudante deve compreender que toda função polinomial de grau 1 possui uma única raiz real e que esta pode ser identificada tanto pela resolução algébrica quanto pela análise gráfica, consolidando a conexão entre simbologia e visualização.

ETAPA 2: FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 2

Objetivo: Compreender que a raiz corresponde aos pontos onde a parábola intercepta o eixo x .

Atividade Algébrica Inicial

Procedimento:

- Criação de controles deslizantes para a_0 , a_1 e $a_2 \neq 0$ em $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ no GeoGebra.
- Representação de $f(x) = x^2 - 4$ no GeoGebra.
- Observação de como a variação nos coeficientes a_0 , a_1 , e a_2 alteram o ponto de interseção com o eixo x .

Discussão: O estudante identifica visualmente as raízes reais e compreende a relação entre expressão algébrica e gráfico. De fato:

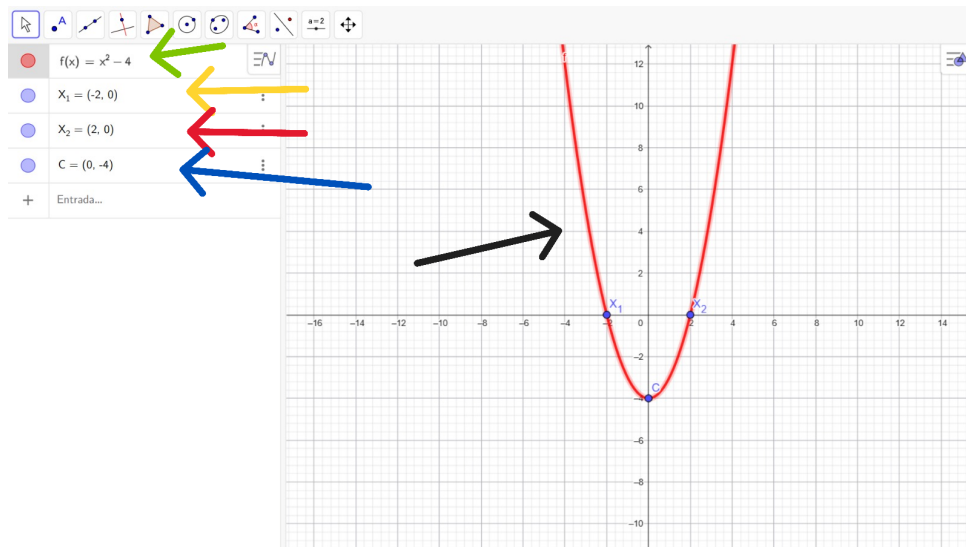
- Calculando as raízes

$$x^2 - 4 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm\sqrt{4} \implies x = \pm 2$$

assim, as raízes de $f(x) = x^2 - 4$ são $x = -2$ e $x = 2$.

- Com $a_2 \neq 0$, criaremos dois controles deslizantes correspondentes aos coeficientes a_0, a_1 e a_2 .
- Representação no GeoGebra: Após criar os deslizantes, posicionamos para, $a_0 = -4$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.
- Na Figura 18 observamos o gráfico gerado:

Figura 18 – $f(x) = x^2 - 4$ com raízes em $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

Aqui, estacamos alguns elementos importantes da construção gráfica no GeoGebra:

- **Seta Verde** Indica no painel de objetos a função f a ser criada.
- **Seta Amarela** Destaca a primeira raiz de f , $X_1 = (-2, 0)$.
- **Seta Vermelha** Destaca a segunda raiz de f , $X_2 = (2, 0)$.
- **Seta Preta** Indica o gráfico de $f(x) = x^2 - 4$ sendo projetada no plano cartesiano, donde as raízes são os pontos em azul X_1 e X_2 e o ponto C sendo a interseção com o eixo y .
- **Seta Azul** Indica no painel de objetos o ponto $C = (0, -4)$ de interseção de f com o eixo das ordenadas.

Discussão Didática

A partir do gráfico, o estudante percebe que:

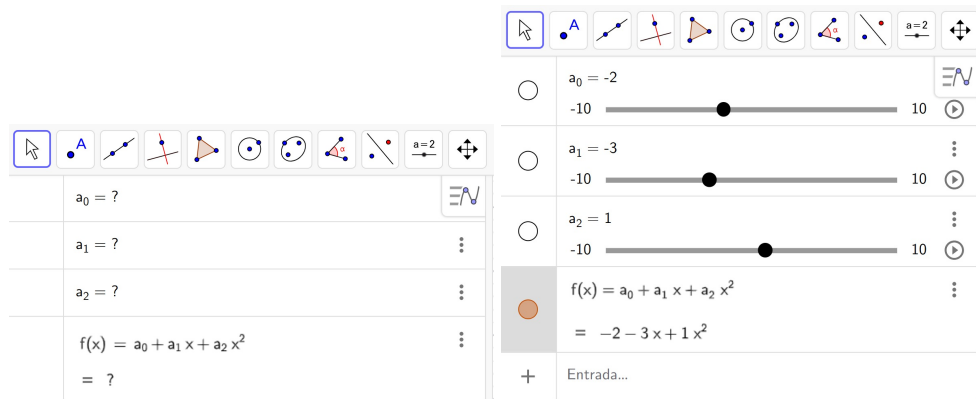
- a parábola possui concavidade voltada para cima (pois o coeficiente de x^2 é positivo);
- o gráfico intercepta o eixo x em dois pontos distintos, correspondendo às raízes reais encontradas;
- existe simetria em relação ao eixo y , característica das funções quadráticas.

Antes de propor exercícios aos alunos, apresentamos abaixo como construir e manipular uma função polinomial de grau 2 no GeoGebra utilizando controles deslizantes. O objetivo é

permitir que o estudante observe dinamicamente como cada coeficiente influencia o gráfico da função.

Por outro lado, com $a_2 \neq 0$. Posicionamos estes deslizantes para $a_0 = -2$, $a_1 = -3$ e $a_2 = 1$ (ver Figura 19)

Figura 19 – Geogebra Classic



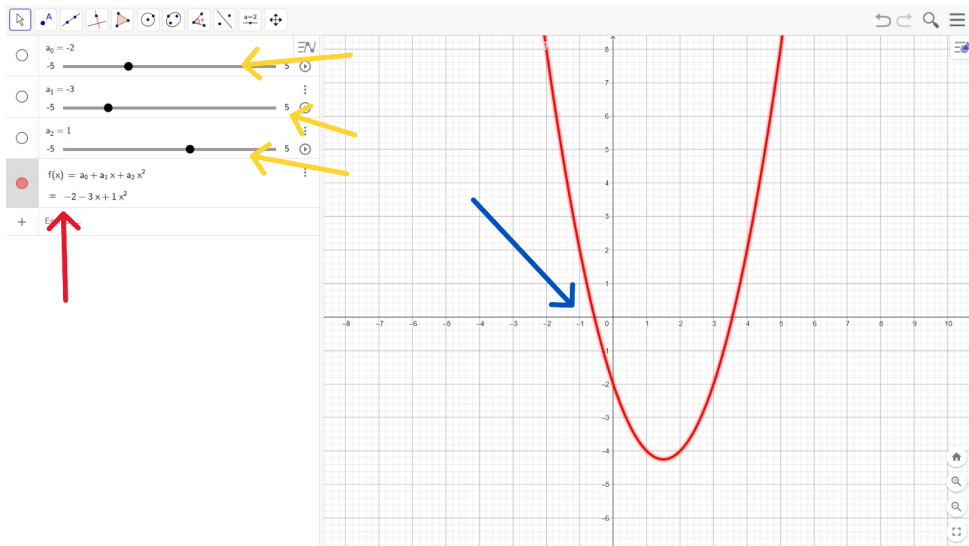
(a) Controles deslizantes genéricos

(b) Controles deslizantes ajustados

Fonte: Produção do próprio autor

Assim, obtemos a função $f(x) = x^2 - 3x - 2$, cujo gráfico é exibido automaticamente pelo GeoGebra, como ilustrado a seguir:

Figura 20 – $f(x) = x^2 - 3x - 2$ obtida pela manipulação dos deslizantes



Fonte: Produção do próprio autor.

Igualmente, na Figura 20, destacamos alguns elementos importantes da construção gráfica no GeoGebra:

- **Setas Amarelas** Destacam os três controles deslizantes a serem criados no painel de controle.

- **Seta Vermelha** Destaca a lei de formação da função $f(x) = x^2 - 3x - 2$ no painel de controle.
- **Seta Azul** Indica o gráfico de $f(x) = x^2 - 3x - 2$ sendo projetada no plano cartesiano.

Portando, ao movimentar os deslizantes, o estudante pode analisar como cada coeficiente afeta o formato da parábola, investigando a concavidade, o deslocamento vertical e a posição das raízes, favorecendo uma compreensão visual e exploratória da função quadrática.

Exercício Guiado

Agora, complemente a atividade considerando a função:

$$g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Solicite aos estudantes que:

- encontrem as raízes de $g(x)$ algebricamente;
- representem $g(x)$ no GeoGebra;
- identifiquem visualmente as raízes no gráfico.

Reflexão Final

Ao concluir esta etapa, o estudante deve reconhecer que:

- funções quadráticas podem apresentar duas, uma ou nenhuma raiz real;
- a interpretação visual no GeoGebra reforça e valida os cálculos algébricos;
- a relação entre formato do gráfico e coeficientes torna a aprendizagem mais intuitiva.

ETAPA 3: FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 3

Função Polinomial de Grau 3

Nesta etapa, trabalhamos a visualização gráfica de funções polinomiais de grau 3. Como os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio ainda não dispõem de métodos algébricos para resolver equações cúbicas, o foco será apenas observar o comportamento gráfico e identificar as raízes visualmente utilizando o software GeoGebra.

Exploração Visual 1

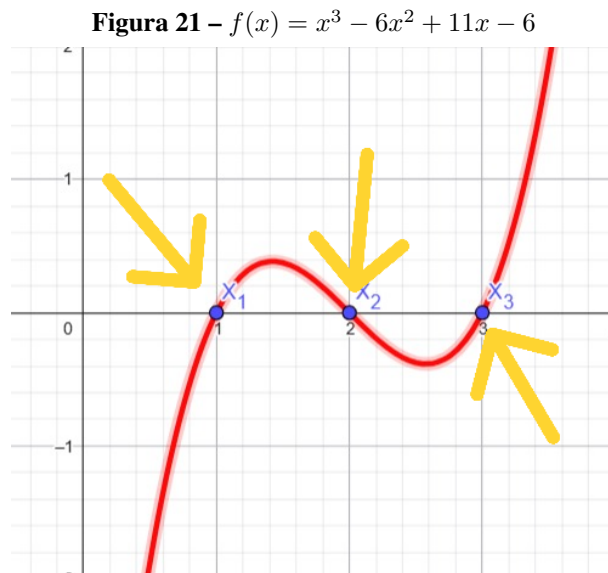
Lembrando que uma função polinomial de grau 3 é da forma

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0.$$

- Precisamos criar no GeoGebra os deslizantes a_0, a_1, a_2 e a_3 .
- Posicionamos, em particular esses deslizantes para $a_0 = -1, a_1 = 11, a_2 = -1$ e $a_3 = 1$, para definir a seguinte função polinomial

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

A qual é representado no GeoGebra pela Figura 21:



Fonte: Produção do próprio autor

Observe o gráfico gerado e identifique visualmente os pontos onde o gráfico intercepta o eixo x , que correspondem às raízes reais da função (ver Figura 21). Onde as **setas amarelas** indicam as três raízes da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Orientação ao estudante: marque os pontos onde o gráfico cruza o eixo x e anote suas coordenadas. Esses valores representam as raízes da função.

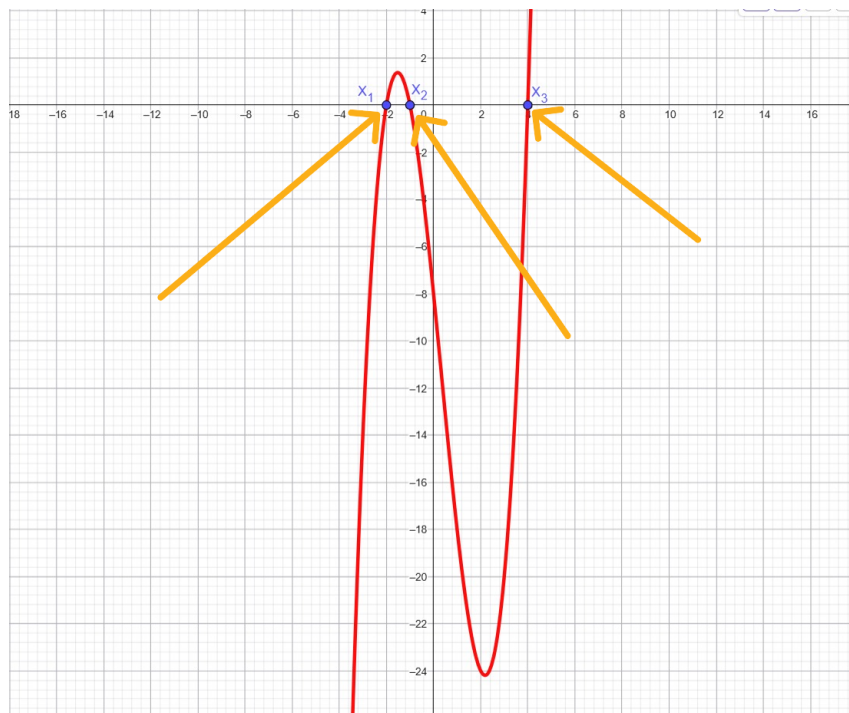
Exploração Visual 2

Agora, posicionamos, em particular os deslizantes para $a_0 = -8, a_1 = -10, a_2 = -1$ e $a_3 = 1$, para definir a seguinte função polinomial

$$f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

A qual é representado no GeoGebra pela Figura 22:

Figura 22 – $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$



Fonte: Produção do próprio autor

Observe o gráfico e identifique onde a curva cruza o eixo x .

Na figura a seguir as **setas amarelas** indicam as três raízes da função

$$f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

Orientação ao estudante: registre os valores aproximados das raízes observadas no gráfico e compare com a função anterior. Reflita sobre semelhanças e diferenças no formato da curva.

Discussão Didática

Nesta atividade, os estudantes:

- observam que funções cúbicas podem apresentar uma ou mais raízes reais;

- identificam visualmente onde o gráfico cruzar o eixo x ;
- percebem a presença de mudanças de concavidade e pontos críticos, mesmo antes de estudar tais conceitos formalmente;
- desenvolvem intuição gráfica para o comportamento de funções polinomiais.

A utilização do GeoGebra possibilita que o aluno tenha um primeiro contato significativo com funções de grau superior, compreendendo suas raízes e forma geral sem necessidade de ferramentas algébricas avançadas.

EXPLORANDO RAÍZES DE POLINÔMIOS DE GRAU SUPERIOR

Nos exemplos a seguir, são apresentados casos de funções polinomiais de graus 3, 4 e 5. Para os polinômios de terceiro e quarto graus, existem fórmulas algébricas específicas que permitem determinar suas raízes de forma exata. Já para os de quinto grau, em geral, não há uma fórmula geral em radicais que possibilite o cálculo direto de todas as raízes, conforme demonstra o Teorema de Abel–Ruffini.

Embora o foco deste produto educacional seja a visualização gráfica e a compreensão conceitual das raízes das funções polinomiais, esses exemplos têm como finalidade contextualizar situações em que a Matemática oferece métodos analíticos completos para a determinação das raízes.

O objetivo desta seção é fornecer ao professor e ao estudante um material complementar que relaciona a exploração visual no GeoGebra com técnicas algébricas mais avançadas, que serão aprofundadas nas séries seguintes do Ensino Médio e no Ensino Superior.

Assim, são apresentados exemplos breves e ilustrativos do uso de fórmulas fechadas na resolução de funções polinomiais de terceiro e quarto graus. Esses casos servem de base para a abordagem visual proposta neste produto educacional, evidenciando que a representação gráfica e a análise algébrica são perspectivas complementares na compreensão das funções polinomiais.

Grau 3 (Fórmula de Cardano em cúbica deprimida)

Considere a cúbica já na forma deprimida $x^3 + px + q = 0$ com $p = -3$ e $q = -2$, isto é, a expressão:

$$x^3 - 3x - 2 = 0,$$

onde, discriminante de Cardano é definido por

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0.$$

Logo, aplicando a fórmula de Cardano, temos

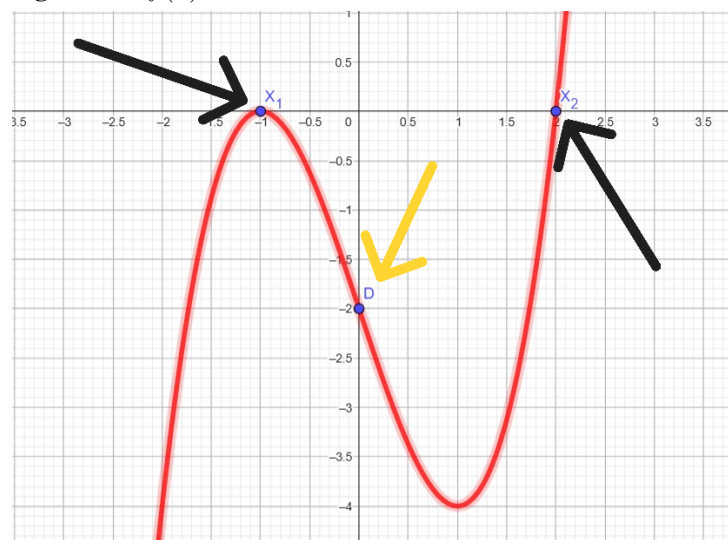
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{1} = 1, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

e obtemos uma raiz real simples $x_1 = u + v = 2$. As demais raízes (neste caso, com multiplicidade) são $x_2 = x_3 = -1$.

No GeoGebra podemos definir uma função polinomial de grau 3, criando os deslizadores a_0, a_1, a_2 e a_3 , com $a_3 \neq 0$. Neste caso particular, posicionamos esses deslizadores para $a_0 = -2, a_1 = -3, a_2 = 0$ e $a_3 = 1$, que define a função polinomial dada acima.

Assim, podemos observar o gráfico gerado no GeoGebra na Figura 23, onde estão sinalizados por **setas pretas** as raízes obtidas (interseção com o eixo X), e além disso, a interseção do gráfico com o eixo Y pela **seta amarela**.

Figura 23 – $f(x) = x^3 - 3x - 2$ com raízes em $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

Quando $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = -3$ e $a_0 = -2$, obtém-se o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x - 2$, cujas raízes são $x_1 = -1, x_2 = 2$.

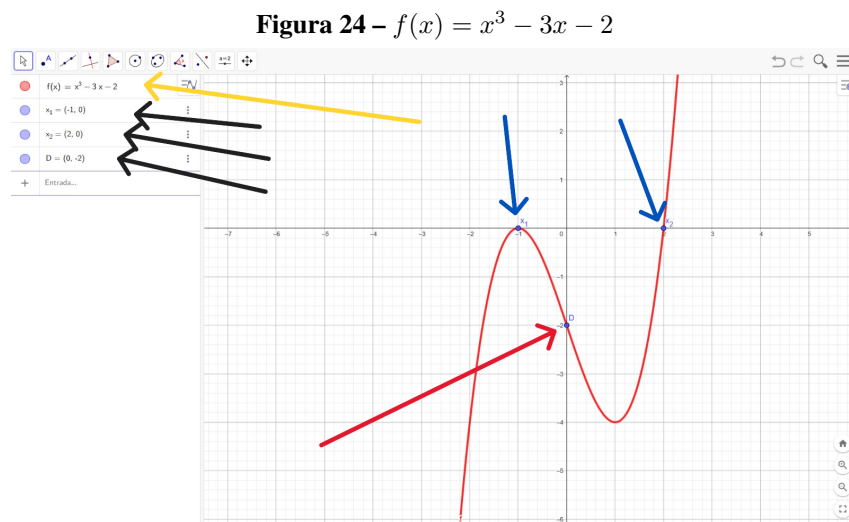
Ao representar essa função no GeoGebra (Figura 24), observamos suas interseções com o eixo X (raízes reais) e os pontos característicos de seu comportamento.

- O gráfico cruza o eixo X em $x = 2$ e tangencia em $x = -1$, evidenciando uma raiz simples e uma dupla.

Sobre o gráfico da Figura 24, destacamos alguns elementos importantes de sua construção no GeoGebra:

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle a lei de formação da função

$$f(x) = x^3 - 3x - 2.$$
- **Seta Vermelha:** Destaca o ponto de interseção com o eixo das ordenadas, ponto $D = (0, -2)$.
- **Setas Azuis:** Destacam os pontos de interseções com o eixo das abscissas no plano cartesiano, ponto $X_1 = (-1, 0)$ e ponto $X_2 = (2, 0)$.
- **Setas Pretas:** Indicam os três pontos de interseções a serem montados no painel de controle do software GeoGebra.



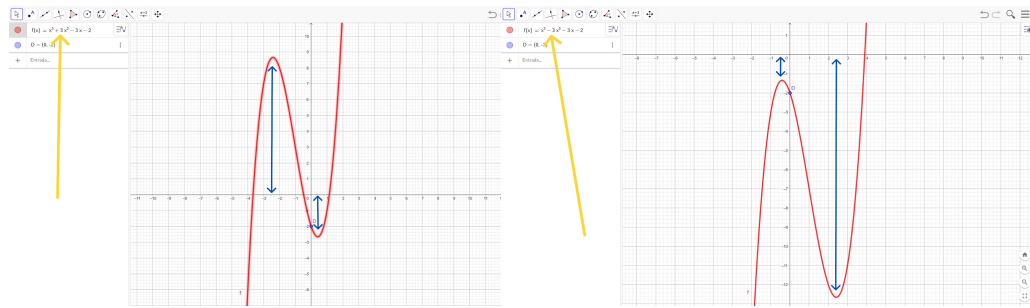
Fonte: Produção do próprio autor

- Ao alterar o coeficiente a_2 , percebe-se o deslocamento do ponto de inflexão, o que favorece discussões sobre a influência dos parâmetros na forma do gráfico.

Sobre o gráfico da Figura 25, destacamos algumas informações importantes:

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle o coeficiente do termo quadrático a_2 .
- **Setas Azuis:** Indicam a distância entre as concavidades da função f ao eixo X , ao variar o coeficiente do termo quadrático a_2 .

Figura 25 – $f(x)$ com variações no tamanho do coeficiente a_2



(a) $f(x)$ com $a_2 = -3$

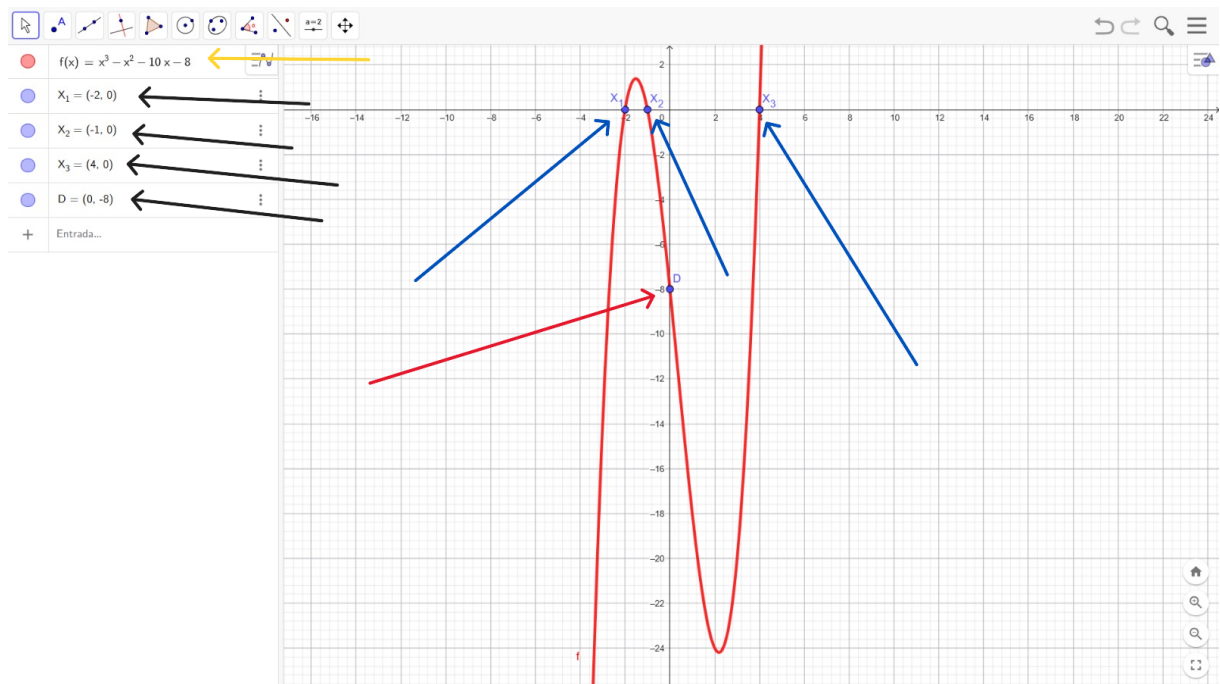
(b) $f(x)$ com $a_2 = 3$

Fonte: Produção do próprio autor

Similarmente, quando $a_3 = 1$, $a_2 = -1$, $a_1 = -10$ e $a_0 = -8$, obtém-se o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, cujas raízes são $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 4$.

Ao representar essa função no GeoGebra (Figura 26), observamos suas interseções com o eixo X (raízes reais) e os pontos característicos de seu comportamento.

Figura 26 – $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$



Fonte: Produção do próprio autor

Sobre este gráfico (Figura 26), destacamos alguns elementos importantes de sua construção no GeoGebra:

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle a lei de formação da função

$$f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

- **Seta Vermelha:** Destaca o ponto de interseção com o eixo das ordenadas, ponto $D = (0, -8)$.
- **Setas Azuis:** Destacam os pontos de interseções com o eixo das abscissas no plano cartesiano, ponto $X_1 = (-2, 0)$, $X_2 = (-1, 0)$ e o ponto $X_3 = (4, 0)$.
- **Setas Pretas:** Indicam os quatro pontos de interseções a serem montados no painel de controle do software GeoGebra.

Atividade proposta: O professor pode propor que o aluno encontre valores de a_2 e a_1 que façam o gráfico ter uma única raiz real. Essa atividade estimula a exploração investigativa e o desenvolvimento do pensamento analítico.

Grau 4 (caso biquadrático; método de Ferrari em casos gerais)

Um caso frequente de quartica resolúvel por redução é o biquadrático. Para isto, escrever uma função polinomial de grau 4, precisamos criar os 5 deslizadores a_4, a_3, a_2, a_1 e a_0 no GeoGebra, sendo $a_4 \neq 0$. Em particular, posicionamos esses deslizadores para $a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -5, a_1 = 0$ e $a_0 = 4$, onde obtemos o seguinte polinômio biquadrático:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Para achar as raízes neste caso, fazemos a substituição $y = x^2$, para obter a quadrática $y^2 - 5y + 4 = 0$, cujas soluções são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Portanto, voltando à variável x temos:

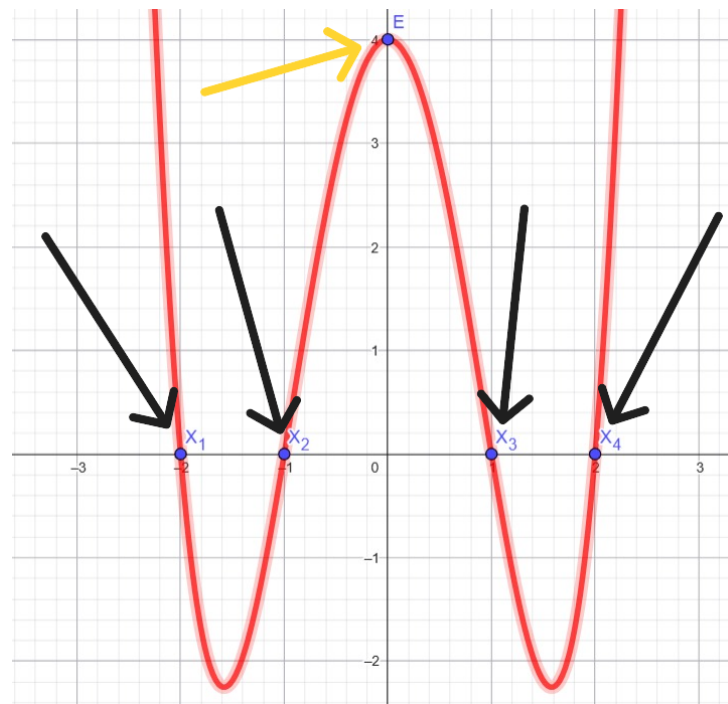
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Observação: Em quarticas gerais (não biquadráticas), pode-se empregar o *método de Ferrari*, que reduz a equação a resoluções quadráticas após adequada decomposição.

Observe na Figura 27, o gráfico de este polinômio gerado no GeoGebra, cujas as raízes em destaque são indicadas pelas **setas pretas**, e o ponto de interseção com o eixo Y sendo indicado pela **seta amarela**.

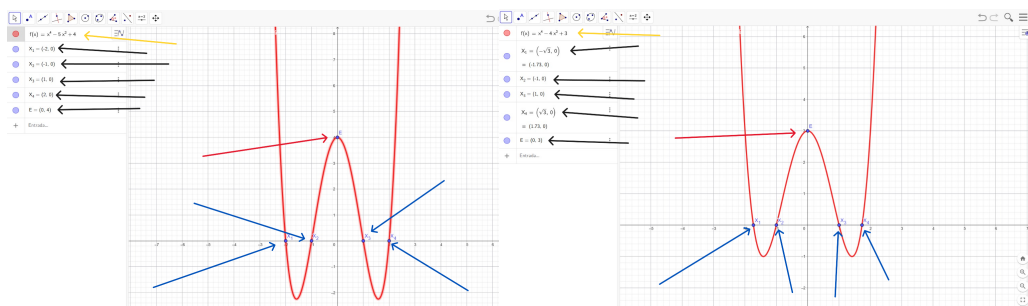
Sobre este exemplo, podemos mudar o valor dos deslizantes, mudando o valor nos deslizadores a_2 e a_0 . Por exemplo, posicionamos para $a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -4, a_1 = 0$ e $a_0 = 3$ e observamos, que essas variações influenciam no deslocamento vertical e o formato da curva (ver Figura 28).

Figura 27 – $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ com raízes em $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = 2$



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 28 – $f(x) = x^4 + a_2x^2 + a_0$ com variações nos coeficientes a_2 e a_0



(a) $f(x)$ com $a_2 = -5$ e $a_0 = 4$

(b) $f(x)$ com $a_2 = -4$ e $a_0 = 3$

Fonte: Produção do próprio autor

Sobre o gráfico da Figura 28(a), destacamos alguns elementos importantes de sua construção no GeoGebra.

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle a lei de formação da função $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
- **Seta Vermelha:** Destaca o ponto de interseção com o eixo das ordenadas, ponto $E = (0, 4)$.
- **Setas Azuis:** Destacam os pontos de interseções com o eixo das abscissas no plano cartesiano, ponto $X_1 = (-2, 0)$, $X_2 = (-1, 0)$, $X_3 = (1, 0)$ e o ponto $X_4 = (2, 0)$.

- **Setas Pretas:** Indicam os cinco pontos de interseções a serem montados no painel de controle do software GeoGebra.

Sobre o gráfico da Figura 28 (b), destacamos a variação realizada nos deslizadores a_2 e a_0 .

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle a lei de formação da função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.
- **Seta Vermelha:** Destaca o ponto de interseção com o eixo das ordenadas, ponto $E = (0, 3)$.
- **Setas Azuis:** Destacam os pontos de interseções com o eixo das abscissas no plano cartesiano, ponto $X_1 = (-\sqrt{3}, 0)$, $X_2 = (-1, 0)$, $X_3 = (1, 0)$ e o ponto $X_4 = (\sqrt{3}, 0)$.
- **Setas Pretas:** Indicam os cinco pontos de interseções a serem montados no painel de controle do software GeoGebra.

Grau 5 (Exploração visual)

Existem funções polinomiais de grau 5 que têm raízes que podem ser encontradas, mas não existe uma fórmula geral para encontrar todas as raízes de uma função polinomial de grau 5 usando apenas operações algébricas e radicais.

Para equações específicas, as raízes podem ser encontradas por meio de métodos específicos, dependendo função polinomial estudada.

Lembrando que para para escrever no GeoGebra uma função polinomial de grau 5 precisamos criar os deslizadores a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 e a_0 . Em particular, posicionando eles para $a_5 = 1, a_4 = -15, a_3 = 85, a_2 = -225, a_1 = 27$ e $a_0 = -120$, obtemos o seguinte polinômio

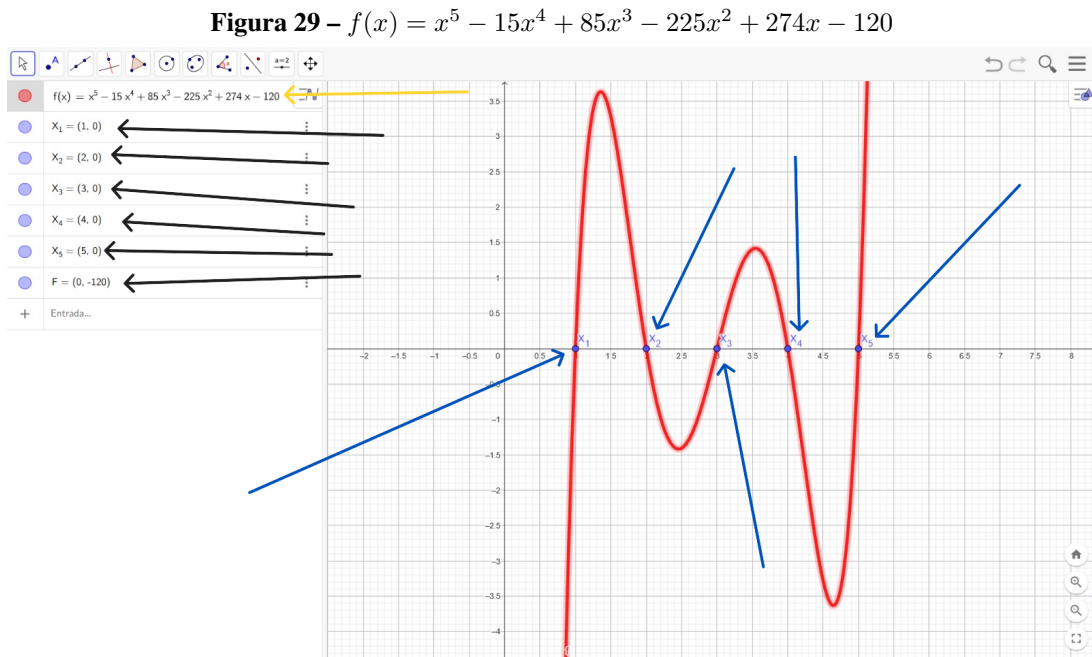
$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120.$$

Observe que nesse caso a expressão $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0$ pode ser fatorada como $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5)$, conseqüentemente gerando as raízes

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4 \text{ e } x_5 = 5.$$

Na Figura 29 vemos o gráfico gerado no GeoGebra:

Sobre este gráfico, destacamos alguns elementos importantes de sua construção no GeoGebra:



Fonte: Produção do próprio autor

- **Seta Amarela:** Destaca no painel de controle a lei de formação da função

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120.$$

- **Setas Azuis:** Destacam os pontos de interseções com o eixo das abscissas no plano cartesiano, ponto $X_1 = (1, 0)$, $X_2 = (2, 0)$, $X_3 = (3, 0)$, $X_4 = (4, 0)$ e o ponto $X_5 = (5, 0)$.
- **Setas Pretas:** Indicam os seis pontos de interseções a serem montados no painel de controle do software GeoGebra.

Por outro lado, o ponto de interseção com o eixo Y da mesma função é o valor de y tal que $x = 0$, isto é,

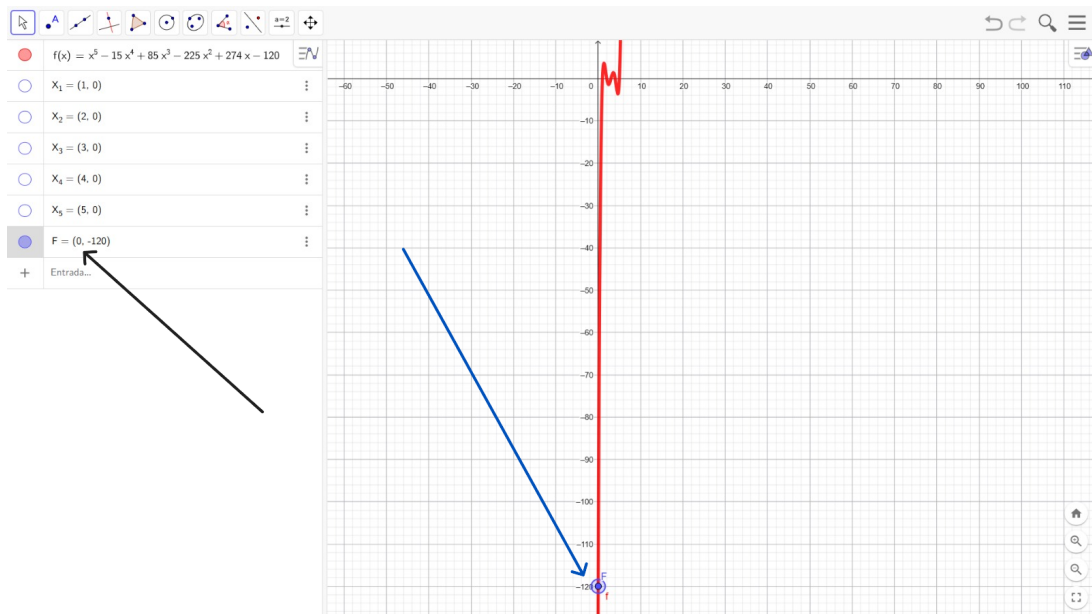
$$y = f(0) = 0^5 - 15 \cdot 0^4 + 85 \cdot 0^3 - 225 \cdot 0^2 + 274 \cdot 0 - 120 = -120,$$

ou seja o ponto é $F = (0, -120)$ como mostra a Figura 30.

Sobre a Figura 30, destacamos alguns elementos importantes de sua construção no GeoGebra:

- **Seta Azul:** Destaca no plano cartesiano o ponto de interseção com o eixo Y , ponto $F = (0, -120)$.
- **Seta Preta:** Indica a construção deste mesmo ponto no painel de controle do software GeoGebra.

Figura 30 – Destaque do ponto de interseção de f com o eixo Y



Fonte: Produção do próprio autor

COMPLEMENTAÇÃO FINAL DO PRODUTO EDUCACIONAL

Para complementar apresentamos um resumo dos passos para inserir funções polinômiais de diferentes graus no GeoGebra, permitindo ao estudante visualizar seu gráfico e explorar suas raízes.

1. Abra o **GeoGebra Calculadora Gráfica**.
2. Localize a barra de entrada na parte inferior da tela.
3. Para definir a função polinomial de grau n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

precisamos criar os $n+1$ deslizadores $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ e a_n , com $a_n \neq 0$ e assim podemos analisar o comportamento da função, para cada variação destes deslizadores.

4. Uma vez fixado um valor para cada deslizador, o Geogebra vai nos mostrar o gráfico da função polinomial que tem como coeficientes aqueles valores fixados nos deslizadores criados.

Exemplos práticos: Crie no GeoGebra as seguinte funções polinômias.

- **Grau 1:** $f(x) = 2x - 4$

- **Grau 2:** $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- **Grau 3:** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- **Grau 4:** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
- **Grau 5:** $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + x^2 + 1$
- **Grau 6:** $f(x) = 2x^6 - x^5 + 5x^4 - 9x^2 + 4x + 8$

Caso deseje utilizar valores específicos para observar o comportamento da função, altere os coeficientes conforme necessário.

Dica: Após criar a função, é possível clicar nos pontos onde a curva intercepta o eixo x para visualizar suas raízes, ou ainda utilizar a ferramenta “Interseção” do GeoGebra.

Observações finais ao professor

Este plano de aula pode ser adaptado conforme o ritmo e perfil da turma. Recomenda-se que o docente incentive os estudantes a explorar diferentes funções no GeoGebra e registrar suas observações, favorecendo a aprendizagem ativa e o desenvolvimento da autonomia investigativa.