PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Alessandra Soares Miranda

O Infinito no Ensino Fundamental: uma proposta de atividade

Produto Educacional

Orientadora: Tatiana Fernandes Sodero

Rio de Janeiro,

abril de 2025

SUMÁRIO

1. Apresentação

Esta atividade foi criada como produto educacional, para apresentação de um trabalho final de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC. Depois de alguns anos lecionando no Ensino Fundamental, foi possível perceber a dificuldade que os alunos encontram não só na aprendizagem do infinito, como na aprendizagem de assuntos que tenham determinada abstração no ensino da Matemática. Com isso, este produto educacional tem como objetivo introduzir a existência do infinito aos alunos, de maneira mais intuitiva e concreta, através de algumas atividades, em especial a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, utilizando conceitos sobre Números Racionais, gerando neles um senso crítico e de forma concreta, introduzir este conceito, para que eles tenham uma aprendizagem significativa do que é o infinito.

E então, enquanto estudam tais conceitos dos números racionais, como densidade e reta numérica, os alunos percebam a existência do infinito de forma bem prática, tendo um real entendimento do que é de fato este conceito e, assim, diminuindo um pouco a defasagem escolar destes alunos, principalmente, quando for estudar alguns conceitos posteriores, como plano cartesiano, números irracionais, dentre outros. Conseguindo, assim, que eles cheguem a uma aprendizagem mais abstrata, que é de grande importância no ensino da Matemática, analisando a importância do entendimento do infinito para alguns de seus conteúdos, ajudando o aluno a construir um raciocínio mais abstrato e crítico para somar aos seus conhecimentos, desenvolvendo melhor seu raciocínio lógico.

2. Produto Educacional

Este trabalho tem como objetivo a aplicação de um jogo proposto para desenvolvimento e melhor entendimento do conceito de infinito usando como ferramentas conceitos de números racionais.

O objetivo é que este jogo faça com que o aluno tenha uma melhor interação e autonomia na sua aprendizagem e que ela seja mais significativa para ele, podendo desenvolver um melhor raciocínio lógico e abstrato.

A proposta deste trabalho é que sejam 4 aulas que seguem da seguinte maneira:

Aula 1 e aula 2 – aulas introdutórias de conteúdos importantes para aplicação da atividade.

Aula 3 – parte 1 da atividade.

Aula 4 – parte 2 da atividade.

As aulas introdutórias são apresentadas como planos de aula a serem desenvolvidos com os alunos antes da aplicação da atividade.

A atividade é dividida em duas partes, que tratam do infinito em um intervalo limitado. A primeira parte, uma atividade sobre intervalos dos números racionais. A segunda parte, uma continuação da primeira, com utilização de tecnologia. Ambas partes da atividade são voltadas para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, onde se fala sobre a existência de infinitos números racionais entre dois números. Sendo possível também a aplicação destas atividades em séries seguintes, com o objetivo de revisão.

As duas partes da atividade têm como propósito que o aluno consiga, além de fixar tais conceitos, chegar a uma aprendizagem do que é o infinito e a um raciocínio mais abstrato, de uma maneira mais dinâmica e concreta.

Propõe-se que ambas as partes sejam feitas após a apresentação dos conteúdos de números racionais, como um complemento a estas aulas, não impedindo que sejam feitas antes de tal exposição, com o propósito de instigar a curiosidade do aluno sobre os conceitos desenvolvidos, por exemplo. Para realizá-las é necessário que o aluno conheça apenas alguns conceitos, como reta numérica e que tenha conhecimento acerca da existência dos números decimais.

A seguir será apresentada uma proposta de aula a ser ministrada antes da elaboração da atividade.

2.1. Proposta de aula

Antes de desenvolver a atividade, sugere-se expor aos alunos os conceitos sobre números racionais com duas aulas introdutórias, contextualizando o conteúdo que se pretende desenvolver para que o aluno chegue à aprendizagem do que é o infinito e de que ele está presente em diversos momentos no ensino da Matemática. Como por exemplo, ao se tratar da reta numérica, temos várias referências ao infinito, como a infinidade dos elementos dos conjuntos, além da infinidade de números que existem entre dois números inteiros, dentre outros conceitos. Logo, para dar uma coerência à aula e ao ensino, é sugerido que estas aulas se desenvolvam como apresentado a seguir em planos de aula, baseados em Giovanni et. al. 1998, Giovanni Júnior e Castrucci 6º - 2018, Giovanni Júnior e Castrucci 7º - 2018, Malta et. al. 2015 e Niven 1984, seguidas de mais duas aulas contendo a atividade proposta por este trabalho, sendo a primeira da parte 1 da atividade e a segunda da parte 2 da atividade.

2.1.1. Aula 1: Conceitos e Números decimais

Objetivo da aula: Os conteúdos apresentados nesta seção são relevantes para que o aluno saiba com que conceito está lidando e possa participar da atividade proposta de uma maneira mais proveitosa.

Público: 8º ano.

Tempo de aula: um tempo de 50 minutos.

Conteúdos: conceitos de números racionais; números decimais e dízima periódica.

Recursos: quadro e caneta de quadro.

Avaliação: através de lista de exercícios.

Conceitos

Definição: Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

A seguir os racionais serão divididos em três grupos: racionais inteiros, racionais na forma decimal finita e racionais na forma decimal infinita periódica.

Racionais que são inteiros:

$\frac{6}{2} = 3;\ \frac{21}{3} = 7;\ \frac{40}{2} = +20;\ \frac{900}{3} = +300$

$-\frac{5}{5} = -1;\ -\frac{10}{2} = -5;\ -\frac{14}{2} = -7;\ -\frac{2000}{2} = -1000$

Racionais que não são inteiros podem ser representados de duas formas:

- Forma decimal finita:

$$-\frac{14}{10} = -1{,}4;\ -\frac{38}{10} = -3{,}8;\ -\frac{781}{100} = -7{,}81$$

- Forma decimal infinita periódica:

$$\frac{13}{9} = 1{,}444\ldots;\ \frac{5}{9} = 0{,}555\ldots;\ \frac{119}{90} = 1{,}3222\ldots\ ;\ \frac{31}{99} = 0{,}313131\ldots$$

O conhecimento a respeito da quantidade de casas decimais, ou se elas são finitas ou infinitas, ajuda o aluno a observar por exemplo que ele pode aumentar a quantidade de casas decimais em um número para que ele 'caiba' dentro do intervalo proposto.

Decimais com finitas e infinitas casas decimais

Sabe-se que toda fração que obtém um número decimal com finitas casas decimais pode ser escrita com seu denominador sendo uma potência de $10\ (10, 100, 1000, \ldots)$.

As frações, que não podem ser representadas dessa forma, tem sua representação decimal com infinitas casas decimais.

Dízima periódica

Uma fração é considerada dízima periódica quando é efetuada a divisão do numerador pelo denominador e em algum momento temos um resto que se repete, descartando o resto zero por ser um decimal infinito.

Podemos representar uma dízima periódica das seguintes formas:

$0{,}3444\ldots$ ou $0{,}3\overline{4}$

O período, que são os algarismos que se repetem, geralmente são repetidos três vezes, seguidos por reticências ou aparece com um traço acima dele.

Pode-se demonstrar que a dízima é um número racional multiplicando-a por dois números e subtraindo um resultado do outro, como no exemplo abaixo:

Exemplo: Considerando o número $2{,}333\ldots$ como x, temos que $x = 2{,}333\ldots$

Multiplicando esta igualdade por 10 temos: $10x = 23{,}333\ldots$

Multiplicando por 100 temos: $100x = 233{,}333\ldots$

Subtraindo as duas equações temos: $90x = 210$

Logo, temos que $x = \frac{210}{90}$, mostrando que $2{,}333\ldots$ é um número racional. Tal passo a passo pode ser feito com qualquer dízima periódica e pode ser utilizado para transformar uma dízima periódica em sua fração geratriz.

Chamamos de dízima periódica simples quando na parte decimal só existe o período da dízima, que é o algarismo (ou algarismos) que se repete. Já quando a parte decimal contém outro algarismo além do período, a mesma é chamada de dízima composta.

2.1.2. Aula 2: Reta numérica e ordenação

Objetivo da aula: Tais conteúdos são de grande importância para que o aluno saiba manipular os números para atividade proposta. Além de entender a ordem dos números, qual número vem antes ou depois na reta numérica e, saber posicioná-lo para participação na atividade.

Público: 8º ano.

Tempo de aula: um tempo de 50 minutos.

Conteúdos: reta numérica; ordenação dos números racionais.

Recursos: quadro e caneta de quadro.

Avaliação: através de lista de exercícios.

Reta Numérica

Historicamente, podemos pensar nos números reais positivos como medidas de comprimento de segmentos de reta. E com isso, identificá-los como pontos de uma reta que chamamos de reta real.

Pode-se associar então, um ponto dessa reta ao número real zero (0) e pegando um ponto a sua direita, ao segmento de reta que representa esta distância, definiremos uma unidade de medida u (segmento unitário).

O ponto que é associado ao 0 chamamos de ponto de origem da reta real.

Colocando este segmento u sobre a reta real, sendo um de seus extremos no zero, no outro extremo determinamos o número real 1 como ponto.

Esta semirreta com extremo em zero e que contém o número 1 é chamada de semirreta positiva. Logo, todo número real positivo y que pertence a semirreta positiva, tendo sua origem no zero corresponde a um segmento que mede y unidades de comprimento.

Continuando, sequencialmente este processo, partindo agora do 1, e assim por diante, obtendo um número natural n qualquer.

E, considerando números que não pertençam a esta semirreta (à direita do zero), obtemos os números negativos (que estão à esquerda do zero). Convencionamos que a representação dos números reais negativos se obtém acrescentando à esquerda do seu número o sinal $'-'$.

Dividindo um desses segmentos unitários (do zero ao um, por exemplo) em n partes iguais, esses pontos encontrados com esta divisão representam frações com denominador n. E, então, chamamos estes pontos de números racionais. Fazendo isto para cada inteiro, teremos todos os números racionais representados na reta numérica.

Ordenação dos números racionais

Definição: Tendo dois números reais $A \, e \, B$, dizemos que A é menor que B (notação $A < B$), se $B - A > 0$.

B é maior que A quando identificamos que o ponto B está à direita do ponto A na reta real.

Dizemos então que um número racional A é menor que B, se temos como positivo $B - A$. E temos que, se A é menor que B, temos entre esses números, pontos que são maiores que A e menores que B, denominando quaisquer destes pontos como segmento ou intervalo, representado da forma $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$.

Outro fato de grande relevância nos racionais é que eles são densos na reta numérica. Ou seja, dentro de quaisquer intervalos, existem outros números racionais.

Baseado nesses conceitos podemos comparar os números racionais da seguinte maneira, com alguns exemplos.

$2{,}5 < 3{,}4$ pois $3{,}4 - 2{,}5 = 0{,}9 > 0$

$4{,}39 < 4{,}7$ pois $4{,}7 - 4{,}39 = 0{,}31 > 0$

$-1{,}4 < -1$ pois $-1 - (-1{,}4) = 0{,}4 > 0$

$3{,}74 = 3{,}740$

$-10{,}5 > -11{,}2$ pois $-10{,}5 - (-11{,}2) = 0{,}7 > 0$

$14{,}7 < 15$ pois $15 - 14{,}7 = 0{,}3 > 0$

Para facilitar o processo, podemos por exemplo igualar a quantidade de casas decimais da seguinte forma.

$2{,}5 < 3{,}4$	$3{,}740 = 3{,}740$
$4{,}39 < 4{,}70$	$-10{,}5 > -11{,}2$
$-1{,}4 < -1{,}0$	$14{,}7 < 15{,}0$

2.2. Aula 3: Desafio dos Intervalos

A primeira atividade é um jogo que aborda o caso do infinito em um intervalo limitado. Nela, os alunos são divididos em dupla, onde um deles desafia o outro a encontrar um intervalo cada vez ‘menor’ de números, do que o outro aluno encontrou. Um intervalo que esteja contido no intervalo que seu adversário apresentou.

Apesar de serem apresentados aos alunos a regra e o objetivo descritos abaixo, o objetivo principal do jogo é que o aluno perceba que este processo não terá fim, que tem infinitos números dentro de um intervalo limitado, não havendo vencedores neste jogo. Logo, que o aluno perceba que entre dois números racionais existe uma infinidade de números, ou, que basta aumentar a quantidade de casas decimais para obter um intervalo que 'cabe' no outro. Assim, de uma maneira mais simples e concreta, espera-se que o aluno tenha a ideia do que é o infinito e comece a ter uma visão matemática mais abstrata.

É sugerido ao professor terminar o jogo quando a primeira dupla perceber o objetivo principal, sendo possível também que o professor estipule um tempo para que mais duplas possam perceber tal processo. Se, por acaso, nenhuma das duplas tiver tal percepção, o professor encerra o jogo no tempo estipulado e explica o objetivo principal do jogo e o conceito que se pretendia que os alunos percebessem com a atividade.

2.2.1. Passo a passo para o professor:

Material necessário:

- caneta ou lápis
- folha

Tempo gasto: uma aula de 50 minutos

1º Passo**:** Após apresentar os conteúdos referentes à atividade proposta, o professor divide a turma em duplas.

2º Passo: Cada dupla pega uma folha de papel e uma caneta. Fica a critério do professor se os alunos usarão uma folha em branco ou se ele entregará uma folha como o modelo proposto na figura 1.

3º Passo: O professor explica as regras do Jogo e pede que cada dupla defina qual jogador irá começar.

4º Passo: O professor dá início ao desafio.

Fica a critério do professor se ele definirá o primeiro intervalo ou, se cada dupla o fará.

Regras do Jogo: O primeiro jogador cria um intervalo entre dois números quaisquer e o representa no topo do papel. O segundo jogador tem o desafio de, abaixo do intervalo que seu colega escreveu, representar outro intervalo que 'caiba' no intervalo representado por seu colega. E assim, sucessivamente, conforme mostrado na figura 2.

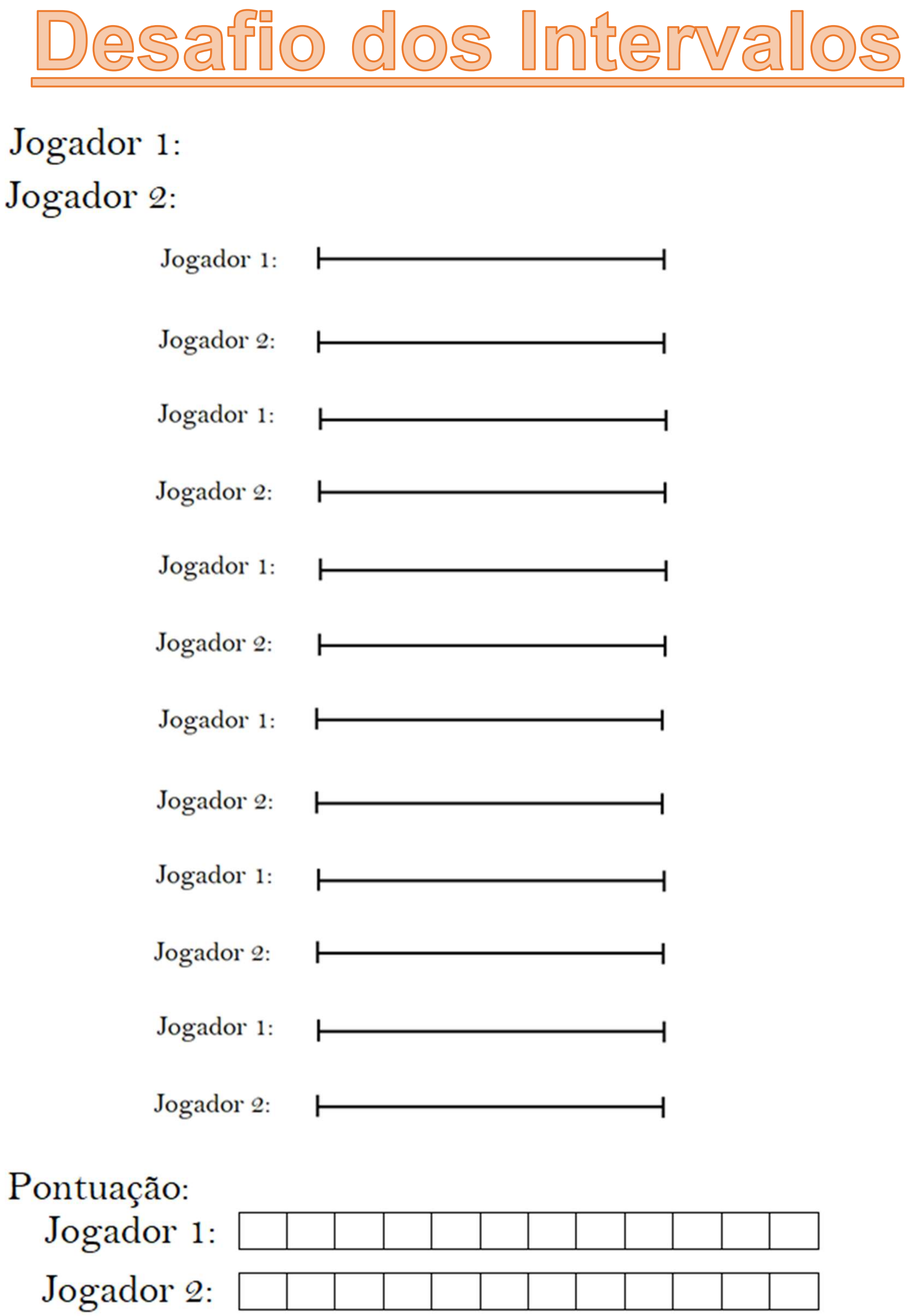

Figura 1: Modelo para parte 1 da atividade

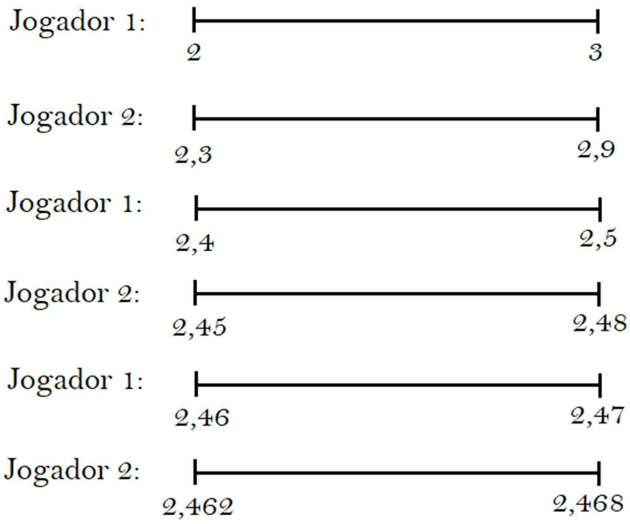

Figura 2: Demonstração da parte 1 da atividade

Objetivo: Para o jogador o objetivo é que encontre dois números que façam com que seu adversário não encontre mais nenhum intervalo que esteja entre esses números, vencendo o jogo quem encontrar um intervalo que faça com que seu adversário não consiga encontrar nenhum outro.

2.3. Aula 4: Tecnologia

Em um outro momento (outra aula), quando o professor for fazer a conclusão da atividade, se a escola possuir ferramentas como tablets ou um laboratório de informática, por exemplo, ele pode fazer com os alunos a parte 2 da atividade, que é uma continuidade da parte 1. Mostrando aos alunos, com o auxílio de algum aplicativo ou programa Matemático, o infinito na reta numérica, de uma maneira simples, utilizando a ferramenta de zoom no plano cartesiano.

2.3.1. Passo a passo para o professor:

Material utilizado:

- tablets ou computadores
- internet

Tempo gasto: uma aula de 50 minutos

1º Passo: Ao chegar ao laboratório ou entregar as ferramentas aos alunos, o professor os separa nas mesmas duplas da atividade anterior. Não tendo problema se as duplas mudarem caso algum aluno falte a esta aula, por exemplo.

2º Passo: O professor apresenta o aplicativo ou programa para os alunos.

3º Passo: O professor pede que o aluno manipule a parte do eixo ou da reta no local que se encontra o intervalo que ele sugeriu na outra atividade. E que assim ele faça com os seguintes intervalos, usando a ferramenta de zoom quando não for possível visualizá-lo.

As figuras 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 mostram, no Geogebra[1], como o aluno pode representar os intervalos que criou com sua dupla na primeira parte da atividade. É possível perceber como o aluno pode visualizar e ter uma melhor ideia de que um intervalo está dentro do outro, usando a ferramenta de zoom.

Na figura 9 pode-se perceber a dificuldade de visualização do aluno sem utilizar a ferramenta de zoom, para perceber que um intervalo se encontra dentro do outro. Comparando com as outras figuras (3, 4, 5, 6, 7 e 8) pode-se perceber a importância da complementação da atividade com o uso da tecnologia.

Ao final da atividade, espera-se que o aluno tenha entendido que apesar de não serem sempre visíveis, existem infinitos números dentro de um intervalo e, que assim, reforce a aprendizagem que teve na primeira parte da atividade.

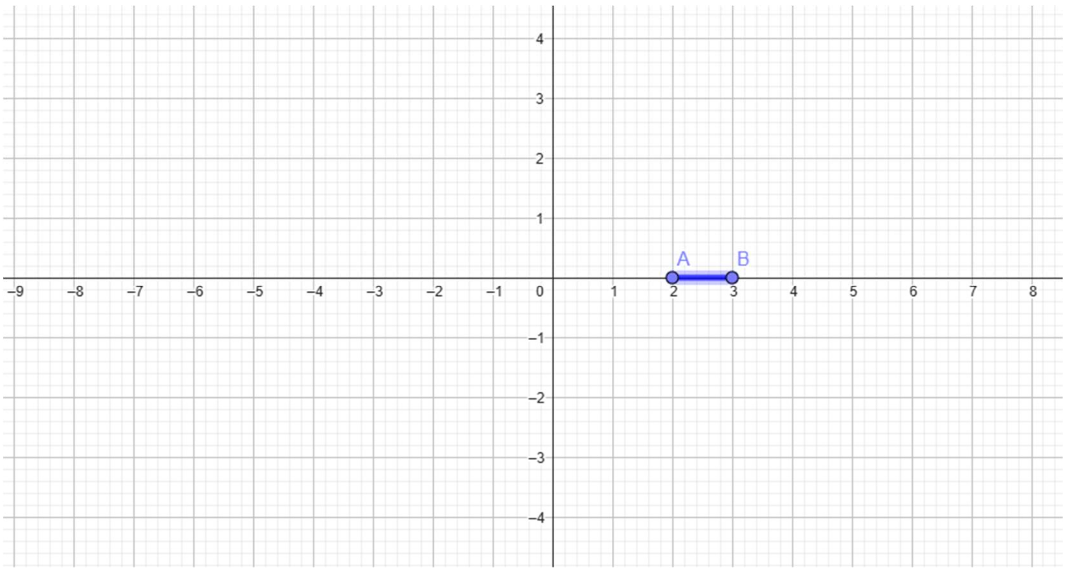

Figura 3: intervalo de 2 a 3

[1] Geogebra: software de Matemática utilizado no Ensino.

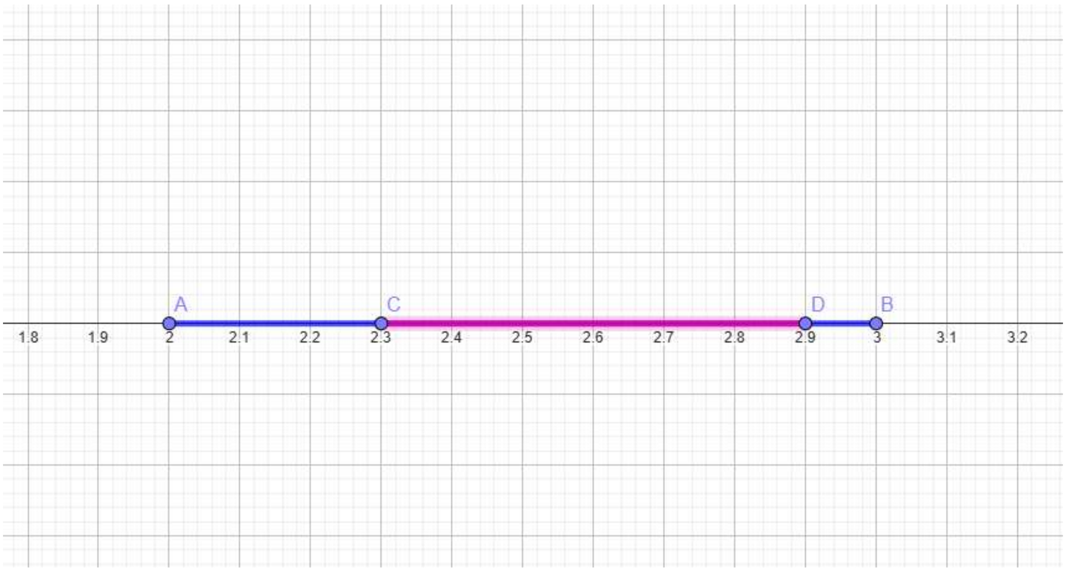

Figura 4: intervalo de 2,3 a 2,9

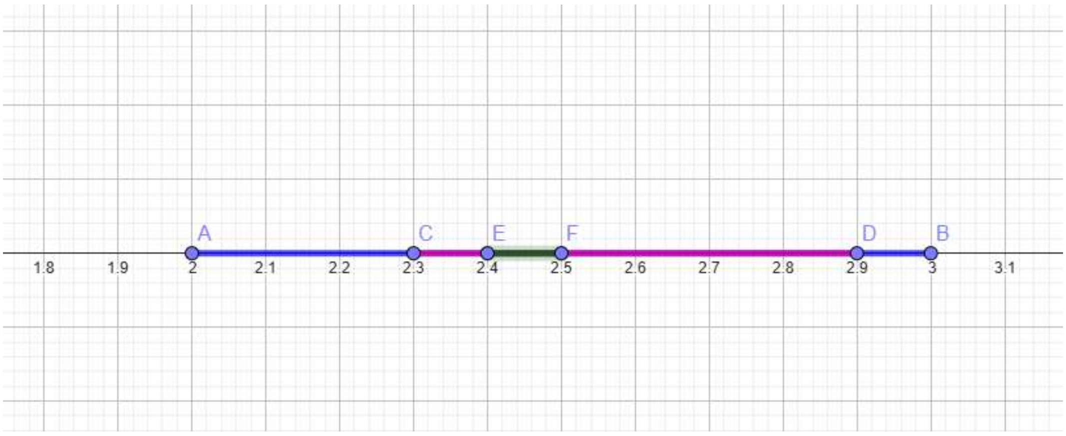

Figura 5: intervalo 2,4 a 2,5

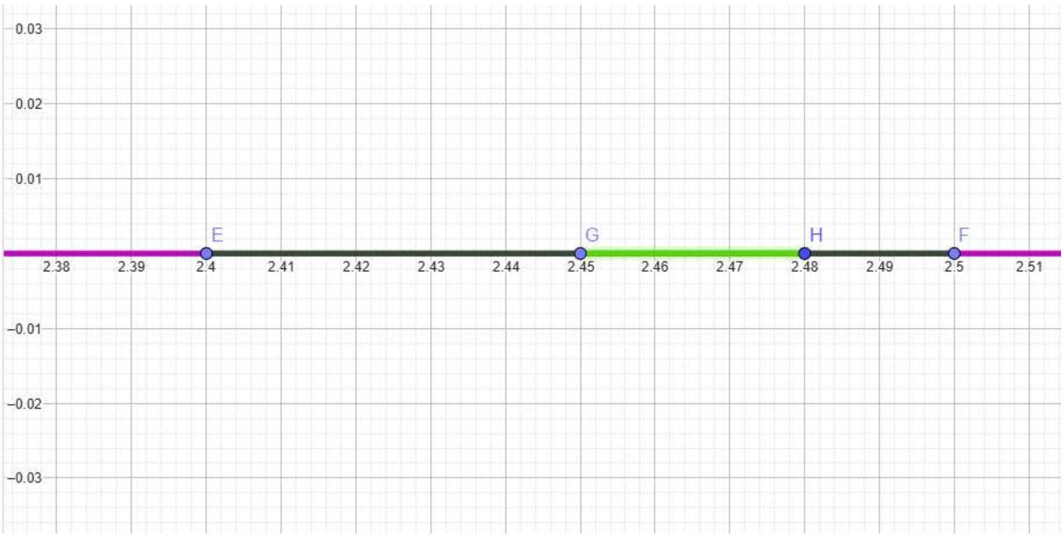

Figura 6: intervalo 2,45 a 2,48

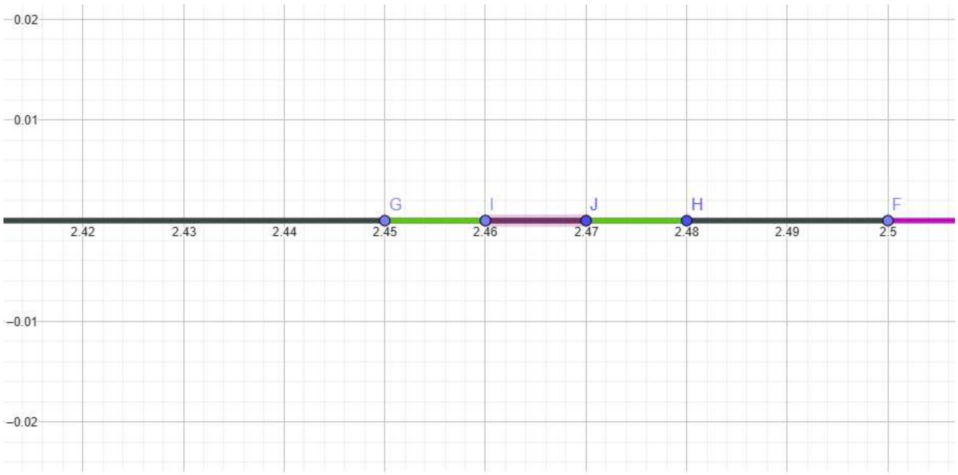

Figura 7: intervalo 2,46 a 2,47

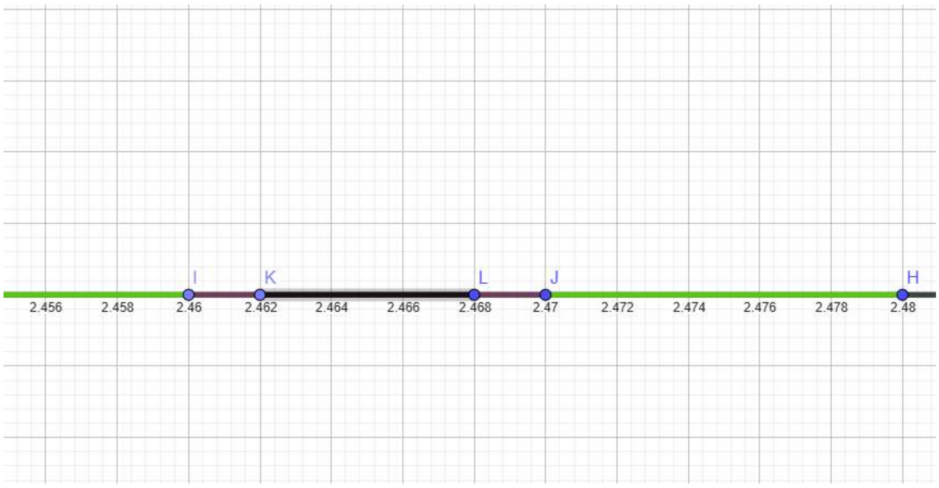

Figura 8: intervalo 2,462 a 2,468

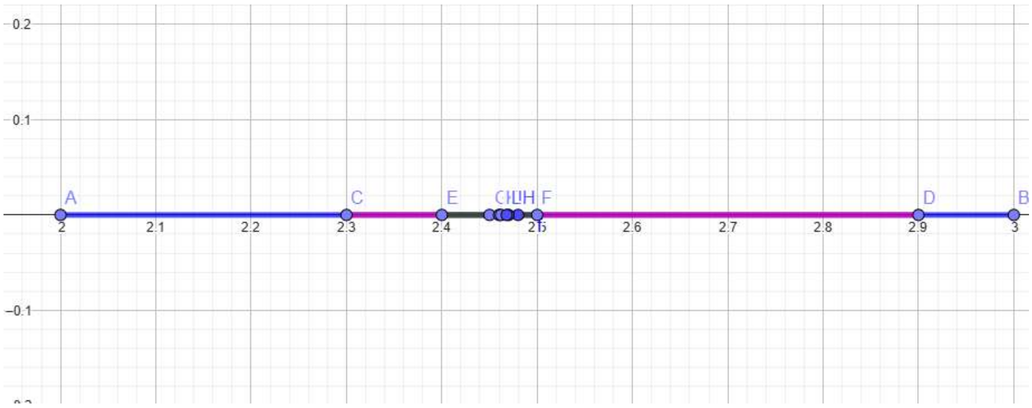

Figura 9: todos os intervalos

3. Considerações finais

A aprendizagem sobre o conceito do infinito, além de colaborar com diversos outros conceitos matemáticos que inclusive estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também colabora para o melhor entendimento abstrato que a Matemática possui.

Este senso de abstração é de grande importância para diversos outros conteúdos que o aluno ainda estudará, inclusive conteúdos que precisam do conhecimento do que é o infinito, como o estudo dos múltiplos, do plano cartesiano, da reta numérica, da dízima periódica, dos números irracionais. A BNCC reforça essa importância que a abstração tem, além de ressaltar a importância do desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática do aluno. Sendo esperado também que ele relacione a Matemática com o mundo e perceba sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico e senso crítico.

A atividade proposta a ser desenvolvida com os alunos, tem o intuito de lhes trazer um senso mais crítico e um raciocínio abstrato, além de ser possível observar o engajamento e comprometimento dos alunos com a proposta apresentada.

Exposto o conceito de infinito desta maneira, espera-se obter uma aprendizagem mais concreta do que é abstrato. Pode-se sanar dúvidas que surgem no momento da atividade de acordo com os questionamentos e observações feitos pelos alunos.

Espera-se que em algum momento da atividade os alunos observem e percebam que nunca acabam os intervalos, que ‘não para nunca’, que não tem fim.

Sendo assim, a referida atividade tem relevância tanto para fixação do conteúdo, como para interação e autonomia dos alunos, além de criar um senso crítico e observador nos mesmos, que através da prática com atividades mais concretas podem desenvolver uma aprendizagem abstrata e mais significativa.

4. Bibliografia

BNCC: Base Nacional Comum Curricular. Site: www.gov.br/mec

GIOVANNI, J., R.; CASTRUCCI, B.; JÚNIOR, J. R. G.: A Conquista da Matemática - 7. Editora FTD, 1998.

JÚNIOR, J., R. G.; CASTRUCCI, B.: A Conquista da Matemática – 6º ano. Editora FTD, 2018.

https://www.todamateria.com.br/fracao-geratriz/ consultado em 24/03/2025.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B.: A Conquista da Matemática – 7º ano. Editora FTD, 2018.

MALTA, I.; PESCO, S.; LOPES H.: Cálculo a uma variável: uma introdução ao cálculo, volume 1. Editora PUC Rio, 2015.

NIVEN I.: Números: racionais e irracionais. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984, c1961. Título original: Numbers: rational and irrational.