

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Anelise Timotheo Moulin Vianna

**MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA PARA ESCOLAS
PÚBLICAS INTERCULTURAIS BASEADA NA
METODOLOGIA CLIL**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Prof.^a Dania González Morales

**Rio de Janeiro,
Março 2025**



Anelise Timotheo Moulin Vianna

**MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA PARA ESCOLAS
PÚBLICAS INTERCULTURAIS BASEADA NA
METODOLOGIA CLIL**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo:

Prof.^a Dania González Morales

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof.^a Juliana Fernandes da Silva Pimentel

Departamento de Matemática – UFRJ

Prof.^a Tatiana Fernandes Sodero

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2025

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autora e do orientador.

Anelise Timotheo Moulin Vianna

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Atualmente exerce o cargo de Docente da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e da Our Lady of Mercy American School, ministrando aulas para o Ensino Médio.

Ficha Catalográfica

Vianna, Anelise Timotheo Moulin

Matemática em língua inglesa para escolas públicas interculturais baseada na metodologia CLIL / Anelise Timotheo Moulin Vianna ; orientadora: Dania González Morales. – 2025.

119 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2025.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Matemática. 3. Metodologia CLIL. 4. Ensino bilíngue. 5. Interdisciplinaridade. 6. Língua inglesa. I. González Morales, Dania. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

À minha querida mãe,
por todo inesgotável amor e cuidado.
Ao meu amor e parceiro de vida Diogo,
por todo amor, incentivo e compreensão.
Aos meus tesouros, meus filhos Victor e Maitê,
que são combustível e força para que eu siga sempre adiante.
Nada disso teria sentido se vocês não existissem na minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de chegar até aqui e concluir mais um ciclo da minha jornada acadêmica.

Agradeço a minha querida mãe, que sempre se esforçou desde o meu nascimento para que eu pudesse usufruir de uma educação de qualidade, me matriculando em boas escolas e no curso de inglês que me permitiu aprender uma nova língua e alcançar voos mais altos.

Agradeço ao meu marido Diogo, que sempre foi a grande paixão da minha vida, por estar ao meu lado nessa linda jornada que é a vida e por ser compreensivo com minha ausência em casa por tantos sábados seguidos e com a minha ansiedade antes das provas.

Agradeço aos meus filhos Maitê e Victor, eles transformaram o sentido da minha vida e me enchem de esperança a cada dia, fazendo com que eu entregue o meu melhor sempre.

Agradeço a minha professora e orientadora Dania González pelo profissionalismo, empatia e cuidado durante o curso e no processo de orientação deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos da turma PROFMAT PUC Rio (2023-2024), sabemos que a trajetória foi árdua, mas sempre nos sustentamos uns aos outros nos momentos desafiadores e difíceis.

Agradeço a minha amiga e professora Elizabeth Freire, que com toda sua experiência e profissionalismo me transferiu muito do seu conhecimento, me ajudando a ser uma profissional mais qualificada e exigente.

Agradeço a todos os meus alunos, nesses quase 20 anos como professora de matemática, pela troca de experiências e saberes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Vianna, Anelise Timotheo Moulin; González, Dania; Matemática em Língua Inglesa para Escolas Públicas Interculturais Baseada na Metodologia CLIL. Rio de Janeiro, 2025. 117 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Desde sua introdução na Finlândia na década de 90, a abordagem CLIL, Aprendizagem Integrada de Conteúdo e Linguagem, tem se expandido para além das fronteiras europeias, estendendo sua influência em diversos países. A implementação bem-sucedida do CLIL na prática educacional é um fenômeno internacional, oferecendo experiências enriquecedoras e resultados mensuráveis. A abordagem CLIL pode ser adaptada de maneira flexível para atender às necessidades de comunidades multiculturais, proporcionando uma experiência educacional abrangente e integradora. Incorporar o CLIL ao ensino de Matemática nas escolas públicas promove simultaneamente o desenvolvimento de habilidades numéricas e linguísticas. Essa integração permite aos alunos aplicar conceitos matemáticos de forma prática e significativa tornando a resolução de problemas matemáticos uma oportunidade para a prática ativa da língua adicional, neste caso a Língua Inglesa e fortalecendo a relação intrínseca entre conteúdo e linguagem. Diante disso, o presente trabalho tem por objetivo apresentar a metodologia CLIL para escolas públicas bilíngues como uma ferramenta para o ensino concomitante da Matemática e da Língua Inglesa através de atividades que conectam cultura, comunicação, cognição e conteúdo.

Palavras Chave

Educação Matemática; Bilinguismo; CLIL; Educação Pública.

Abstract

Vianna, Anelise Timotheo Moulin; González, Dania (Advisor); Mathematics in English Language for Intercultural Public Schools using CLIL Methodology. Rio de Janeiro, 2025. 117 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Since its introduction in Finland in 1994, the CLIL, Content and Language Integrated Learning, approach has expanded beyond European borders, extending its influence to many countries. The successful implementation of CLIL in educational practice is an international phenomenon, offering enriching experiences and measurable results. The CLIL approach can be flexibly adapted to meet the needs of multicultural communities, providing a comprehensive and integrative educational experience. Incorporating CLIL into mathematics teaching in public schools simultaneously promotes the development of numerical and linguistic skills. This integration allows students to apply mathematical concepts in a practical and meaningful way. Solving mathematical problems thus becomes an opportunity for active practice of the additional language, in this case English, strengthening the intrinsic relationship between content and language. In view of this, this text aims to present the CLIL methodology for Public Bilingual Schools as a tool for concomitant teaching of mathematics and English through activities that connect culture, communication, cognition and content.

Key Words

Mathematics Education; Bilingualism; CLIL; Public Education.

Sumário

1. Introdução	11
2. Panorama das Escolas Públicas Bilingües no Brasil	13
3. A Metodologia CLIL	17
3.1. Os Quatro C's	19
3.2. A Taxonomia de Bloom	21
4. Base Nacional Curricular Comum (BNCC)	25
5. Plano de Aula	28
6. Adaptação de Materiais para Aplicação da Metodologia CLIL	32
7. Contexto Matemático	34
7.1. Os Números Reais na Educação Básica	34
7.2. Conceitos Básicos de Probabilidade no Ensino Médio	37
7.3. Introdução à Geometria Analítica no Contexto Escolar	40
8. Aulas de Matemática em Língua Inglesa Baseadas na Metodologia CLIL	47
9. Experiência Pessoal sobre a Metodologia CLIL	51
10. Considerações Finais	53
Referências	54
Apêndice : Produto Educacional: <i>Matemática em Língua Inglesa Para Escolas Públicas Interculturais baseada na Metodologia CLIL: Aulas de Matemática em Língua Inglesa com Abordagens Culturais e Significativas.</i>	56

Lista de Figuras

Figura 1: A Taxonomia de Bloom	22
Figura 2: Sistema de Eixos Ortogonais OXY	42
Figura 2.1: Ponto P no Plano Cartesiano	42
Figura 2.2: Distância entre Dois Pontos	43
Figura 2.3: Círculo no Plano Cartesiano	44
Figura 2.4: Ponto Médio	45
Figura 3: Seven Wonders of the Modern World	48
Figura 4: Cartas de um Baralho Completo	49
Figura 5: Mapa da Espanha com Coordenadas Cartesianas	50

*“Mathematics is the language with
which God has written the universe.”*

Galileo Galilei

1. INTRODUÇÃO

Desde sua introdução por David Marsh na Finlândia em 1994, a abordagem CLIL (Aprendizagem Integrada de Conteúdo e Linguagem) tem se expandido para além das fronteiras europeias, estendendo sua influência ao redor do mundo. O reconhecimento internacional da eficácia do CLIL tem impulsionado a adoção dessa metodologia em sistemas educacionais bilíngues ao redor do mundo.

A implementação bem-sucedida do CLIL na prática educacional é um fenômeno internacional e oferece experiências enriquecedoras e resultados mensuráveis. Essa abordagem pode ser adaptada de maneira flexível para atender às necessidades de comunidades multiculturais, proporcionando uma experiência educacional abrangente e integradora.

O CLIL pode ser eficazmente incorporado em diversas disciplinas, enriquecendo não apenas o conhecimento específico da matéria, mas também as habilidades linguísticas dos alunos. Na prática, a abordagem CLIL promove uma aprendizagem mais profunda e significativa, preparando os estudantes para os desafios de um mundo cada vez mais interconectado e multilíngue.

Incorporar o CLIL ao ensino de Matemática promove simultaneamente o desenvolvimento de habilidades matemáticas e de comunicação. Essa integração permite que os alunos apliquem e compreendam os conceitos matemáticos de forma prática e significativa. A resolução de problemas matemáticos torna-se, assim, uma oportunidade para a prática ativa da língua adicional, neste caso a Língua Inglesa, fortalecendo a relação intrínseca entre conteúdo e linguagem.

Este trabalho surge como uma proposta facilitadora para o ensino da matemática em escolas públicas bilíngues em Língua Inglesa através da metodologia CLIL, entretanto, com a base teórica apresentada sobre o CLIL pode ser facilmente adaptado para qualquer disciplina e idioma.

No segundo capítulo será apresentado um panorama das escolas públicas bilíngues no Brasil, por ser um modelo de educação adotado recentemente, a oferta dessa proposta intercultural e bilíngue está surgindo pouco a pouco nos estados e municípios brasileiros.

Já no terceiro capítulo deste trabalho é possível conhecer a metodologia CLIL de ensino, seus famosos quatro C's que darão base para o planejamento das aulas e a Taxonomia de Bloom, que juntos permitem ao professor delinear uma aula significativa e que contempla tanto o conteúdo quanto a aprendizagem da segunda língua.

No quarto capítulo será apresentada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como documento necessário para a construção do plano de aula cujo passo a passo está no capítulo cinco.

No capítulo seguinte, o sexto, estratégias práticas para a adaptação de materiais didáticos para a aplicação do CLIL são compartilhadas, já que trata-se de uma abordagem moderna e com pouca literatura referente à Matemática disponível.

O contexto matemático referente a esse trabalho foi abordado ao longo do capítulo sete, onde três importantes temas foram desenvolvidos no contexto da educação básica e cujos conceitos precisam ser fielmente consolidados. Os temas são os Números Reais, a Probabilidade e a Geometria Analítica.

Finalizando, no último capítulo deste trabalho são apresentados três temas com suas respectivas associações culturais que serão utilizados no planejamento de aulas baseadas na metodologia CLIL e que estarão disponíveis na íntegra no Produto Educacional de mesma autoria.

2. PANORAMA DAS ESCOLAS PÚBLICAS BILÍNGUES NO BRASIL

A valorização do ensino bilíngue nas escolas é um fenômeno recente, mas a importância de adquirir uma segunda língua surge a partir do século XIX com a abertura dos portos para o comércio internacional.

O então Príncipe Regente do Brasil Dom Pedro I institucionalizou o ensino público de línguas, inicialmente oferecendo inglês e francês, surgindo em 1839, por decreto de Bernardo Pereira de Vasconcelos, o então ministro de Estado dos Negócios do Império, o Imperial Colégio de Pedro II, cuja disciplina obrigatória no programa de ensino era o Inglês.

Este fato marca a introdução da língua inglesa no currículo escolar brasileiro, porém, só com a chegada do cinema falado ao Brasil em 1920 e logo em seguida com a Segunda Guerra Mundial é que o Inglês passa a ter maior aceitação cultural e estratégica e percebe-se o início de um movimento que reflete a crescente demanda por habilidades linguísticas em um mundo globalizado.

No final do século XX, em 1996, o Governo Brasileiro cria a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) que rege a educação no Brasil até os dias atuais. Fica estabelecida a necessidade da implementação de uma língua estrangeira no currículo a partir do ensino fundamental. Como a língua inglesa já possuía grande relevância e importância ao redor do mundo, passou a ser a segunda língua da grade curricular de escolas públicas e privadas.

O conceito de escolas bilíngues no Brasil passa a se estruturar de uma maneira mais formal a partir de 2000, com iniciativas que visam promover o ensino de um segundo idioma de maneira integrada ao currículo escolar. As escolas públicas bilíngues, no entanto, surgem a partir de 2010, inicialmente na região Sudeste do país.

Em 2011, instituiu-se o Programa de Ensino Bilíngue da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo que começou sua expansão com a implementação de turmas bilíngues em escolas estaduais com foco em Inglês.

Em 2013 a prefeitura do Rio de Janeiro instituiu escolas bilíngues para o ensino das línguas inglesa, espanhola, alemã e francesa na educação infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental com o objetivo de não só ensinar uma língua

estrangeira, mas também de apresentar um outro universo cultural para os alunos. As datas comemorativas americanas são celebradas e a escola recebe constantemente a visita de estrangeiros para rodas de conversas com as crianças. Atualmente são 31 escolas bilíngues no Município, dentre elas 14 ensinadas a língua inglesa.

No que se diz respeito ao âmbito estadual, através de parcerias com os consulados americano, espanhol, francês, turco, chinês, italiano, mexicano, alemão, japonês e russo o Governo do Estado do Rio de Janeiro revolucionou a educação no país implementando a partir de 2015 as escolas interculturais integrais. A proposta das escolas interculturais é desenvolver a proficiência em línguas estrangeiras para os alunos do Ensino Médio por meio de ações pedagógicas que valorizam as culturas e a interdisciplinaridade.

A Secretaria do Estado de Educação do Amazonas iniciou a implantação de escolas bilíngues integrais em 2018. Inicialmente oferecendo Japonês como a segunda língua e depois expandindo o programa para outros idiomas como Inglês, Francês, Espanhol e Tukano, a língua indígena regional. Hoje são ao todo 9 escolas que atendem aproximadamente 4000 alunos. Os planos de expansão das escolas públicas bilíngues amazonenses incluem as fronteiras com a Venezuela e as comunidades com imigrantes latinos.

A Educação Bilíngue na Rede Pública Municipal de Ensino de Blumenau, Santa Catarina, teve seu início em 2019 com duas escolas, uma com a segunda língua sendo Inglesa e a outra Alemã, porém atualmente conta com 18 escolas, incluindo também a LIBRAS. A metodologia encontrada nas Instituições de Ensino Bilingue de Blumenau é baseada na abordagem CLIL, permitindo que o aluno desenvolva as habilidades de escrita, leitura, fala e oralidade através de atividades com foco cultural.

Com o objetivo de promover a interculturalidade, diminuir a evasão escolar e formar jovens críticos e autônomos, também em 2019, o Governo do Distrito Federal em parceria com a Embaixada Francesa iniciou o projeto para a implantação de escolas interculturais bilíngues, inicialmente com o Centro Educacional Lago Norte, que oferece ensino público em português e francês. Logo em seguida vieram o Centro Educacional do Lago Sul com foco na Língua Inglesa e o Centro de Ensino Médio em Taguatinga com foco em Espanhol. As três

escolas interculturais do Distrito Federal citadas funcionam em horário integral e atendem alunos do Ensino Médio.

O Governo do Estado do Maranhão através do Programa Educação Digna para a democratização da educação lançou a modalidade integral bilíngue em 2020 no IEMA, Instituto Estadual de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, oferecendo educação pública bilíngue (Português-Inglês) no Ensino Fundamental I. O objetivo do programa é diminuir as diferenças das oportunidades entre crianças carentes e estudantes de classe alta. Atualmente duas unidades do IEMA oferecem o ensino bilíngue : IEMA São Luiz e IEMA Santa Inês.

A rede municipal de educação em Salvador, na Bahia, firmou no final de 2022 uma parceria com a Embaixada do Reino Unido no Brasil e o Conselho Britânico que forneceu materiais didáticos e qualificação profissional para a abertura de dez Centros Municipais de Educação Infantil (CMEIs), atendendo crianças de 2 a 5 anos. O município de Santo Amaro, na Bahia, lançou então em 2023 a primeira escola pública bilíngue da Bahia com a oferta de dois idiomas: português e inglês. A Escola José Raimundo Cândido Sacramento oferece educação infantil bilíngue em tempo integral no Recôncavo Baiano.

No mesmo ano, também em parceria com o governo Britânico no Brasil, a prefeitura de Nova Lima, cidade integrante da Região Metropolitana de Belo Horizonte, em Minas Gerais, inaugurou a Escola Municipal Vera Wanderley Dias oferecendo educação pública bilíngue integral e de qualidade.

A possibilidade de aquisição da segunda língua, mais popularmente o Inglês, gera satisfação e atua como componente importante e indispensável para o mercado de trabalho globalizado. Embora o desenvolvimento das escolas públicas bilíngues no Brasil revele avanços significativos, existem também desafios consideráveis, o panorama das escolas públicas bilíngues ainda é desigual, variando significativamente entre os estados e regiões do país.

Alguns desses desafios são:

- A falta de professores qualificados e capacitados para ensinarem suas disciplinas em uma segunda língua. Muitos professores não receberam treinamento qualificado durante a graduação para este tipo de atuação específica e por este motivo a qualidade do ensino e a atratividade do conteúdo diminuem.

- A limitação de recursos é um problema enfrentado pela maioria das escolas públicas. Esse problema, porém, agrava-se quando analisamos a educação pública bilíngue, visto que o investimento em materiais didáticos é consideravelmente superior, já que os materiais didáticos são importados e no caso das escolas bilíngues onde a segunda língua é o Inglês temos como agravante o alto preço do dólar comparado com a nossa moeda vigente. A falta de investimento e infraestrutura adequada pode limitar, impedindo que atue com a qualidade necessária ou até mesmo inviabilizar a implementação de programas bilíngues.
- A concentração de escolas públicas bilíngues apenas em áreas metropolitanas é outro desafio a ser superado. É necessário que os alunos das zonas rurais e periféricas também tenham a oportunidade de desfrutar de uma educação neste nível, que permite uma maior visão de mundo, uma segunda língua além de possibilitar mais oportunidades de trabalho no futuro.
- O sucesso de programas bilíngues, principalmente nas escolas públicas, depende do engajamento dos pais e da comunidade. Por ser um processo lento, porém contínuo e atingível, às vezes cria-se a expectativa de que o aluno irá se comunicar rapidamente na segunda língua, frustrando a família que em alguns casos desiste da educação bilíngue.

A educação pública bilíngue no Brasil avança, porém de forma lenta. É preciso que os resultados dessa formação acadêmica abrangente e intercultural sejam difundidos para que a própria sociedade cobre iniciativas governamentais nessa área.

3. A METODOLOGIA CLIL

A Aprendizagem Integrada de Conteúdo e Linguagem, mais conhecida como CLIL possui diversas definições. Segundo Marsh (2002) é uma abordagem que inclui linguagem, conhecimento intercultural, entendimento e habilidades. Já para Van de Craen (2006) é um método de aprendizagem focado no significado, cujo objetivo é aprender simultaneamente a nova língua e o conteúdo das disciplinas obrigatórias, tais como Matemática, Geografia, Biologia, dentre outros. Para Gajo (2007) o termo CLIL funciona como uma espécie de ferramenta que pode ser usada em determinadas situações da educação bilíngue. É possível definir o CLIL como uma moderna abordagem educacional que integra o ensino do conteúdo específico do currículo com o ensino de uma língua não nativa.

É cada vez mais importante na sociedade globalizada de hoje, que o conhecimento de uma língua estrangeira ajude os alunos a desenvolverem habilidades na língua materna e também ajudem na aquisição de habilidades para que eles expressem suas opiniões sobre artes, ciências e tecnologia para pessoas de todo mundo. Isso possibilita que os alunos tenham uma experiência diferente de aprendizagem comparada com os mais distintos ensinamentos de línguas porque em uma sala de aula onde a metodologia CLIL é adotada, o conteúdo e a nova língua são ensinados de maneira integrada. O raciocínio e a aprendizagem são integrados também, tornando o uso do CLIL desafiador para alunos e educadores, já que ele combina tanto as metodologias de ensino do conteúdo quanto as da segunda língua.

Basta ser professor de alguma disciplina do currículo da educação infantil, dos níveis fundamental ou médio com atuação em escolas bilíngues para utilizar o CLIL como metodologia de ensino. Como já citado, o processo de implantação da utilização do CLIL desafia tanto o professor da disciplina quanto o professor da língua estrangeira, já que o primeiro precisa adquirir o vocabulário necessário para ensinar sua aula em uma segunda língua e o segundo precisa aprender os conteúdos das disciplinas para encorpar suas aulas. O ideal é que ambos estejam integrados e cooperando para uma implementação bem sucedida do CLIL.

Como o uso do CLIL é possível:

- Introduzir novos conceitos do currículo através de uma segunda língua.
- Melhorar a produção linguística dos alunos em todas as disciplinas.

- Melhorar a performance acadêmica tanto nas disciplinas regulares quanto na língua adicional.
- Aumentar a confiança dos alunos tanto na língua materna quanto na segunda língua.
- Fornecer materiais que desenvolvam raciocínio desde o início.
- Encorajar a criação de conexões com a comunidade e cidadania.
- Tornar a disciplina curricular o foco principal dos materiais didáticos.

A metodologia de ensino que o CLIL oferece, onde diversas disciplinas do currículo são ensinadas na língua alvo, se mostra mais eficiente do que somente aulas da segunda língua no estilo de curso de língua estrangeira. (de Graft, Koopman and Westhoff, 2008)

A maioria dos alunos que estudaram através do CLIL na educação infantil são mais confiantes no uso da segunda língua, assim como na sua língua materna. Eles também compreendem melhor o vocabulário e contextos apresentados em ambas as línguas, além de apresentarem um vocabulário mais vasto e também atingem maior proficiência na língua que aqueles que fazem somente a aula ou curso específico do novo idioma. No Ensino Fundamental verifica-se algo semelhante, os alunos que estudam usando o CLIL atingem melhores níveis de proficiência na segunda língua e o uso da metodologia também afeta positivamente a língua materna. Além disso, tanto para alunos do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, o conhecimento específico de cada disciplina é o mesmo do que seria ensinado na língua materna através do ensino regular.

O termo CLIL é abrangente e envolve uma gama de contextos e modelos. Algumas escolas ensinam alguns tópicos do currículo como parte do curso. Neste caso temos o que podemos chamar de CLIL leve. No CLIL leve a duração semana é de até uma hora por semana, a linguagem é o foco principal da aula e somente alguns tópicos do currículo são ensinados através do curso de idiomas. Outras escolas ensinam através de uma imersão parcial onde metade, ou mais da metade, do currículo é ensinado no idioma alvo. Aqui temos o chamado CLIL denso. No CLIL denso o conteúdo é o foco principal da aula. Em muitos casos tem-se o que pode ser denominado como CLIL médio, uma espécie de imersão parcial, com aproximadamente 15 horas de aulas semanais onde apenas duas ou três disciplinas são escolhidas para serem ensinadas na segunda língua.

No que diz respeito ao tempo necessário para o desenvolvimento de habilidades de conversação no idioma alvo uma escala foi criada pelo pesquisador em educação bilíngue Jim Cummins, através das siglas BICS (Habilidades Comunicativas Interpessoais Básicas) and CALP (Proficiência Linguística Acadêmica Cognitiva) para medir apropriadamente a proficiência acadêmica da linguagem.

O aluno desenvolve as habilidades necessárias para situações de comunicação interpessoal entre dois e três anos de estudo no idioma alvo, atingindo o nível BICS da escala. As tarefas desenvolvidas neste nível não são cognitivamente demandantes. Já para atingir o nível exigido para o estudo acadêmico, uma linguagem mais abstrata e formal, que requer vocábulos específicos de cada disciplina, o aluno precisa estar imerso no segundo idioma por mais de 5 anos.

Alunos e professores imersos na metodologia CLIL precisam da linguagem e das estruturas gramaticais necessárias para a disciplina curricular. Isso envolve a linguagem básica do dia a dia e o conhecimento prévio adquirido durante as aulas de Língua Inglesa. O CLIL oferece aos alunos a possibilidade de desenvolver habilidades linguísticas durante as aulas e isso inclui vocabulário e gramática. Entretanto, o foco das aulas baseadas no CLIL é a compreensão do conteúdo disciplinar e não as estruturas gramaticais.

3.1. Os quatro C'S

Popularmente conhecidos como os quatro C's, as componentes do CLIL são: conteúdo, comunicação, cognição e cultura (Coyle, 2007). Esta é uma descrição indispensável porque a integração do conteúdo, da comunicação, cognição e cultura é uma maneira de definir os objetivos do ensino e da aprendizagem. Os quatro C's estão completamente conectados e permitem o enriquecimento da aula tanto no quesito do conteúdo quanto da linguagem.

No que diz respeito ao conteúdo, as disciplinas curriculares ensinadas através da metodologia CLIL incluem matemática, ciências, música, geografia, história, educação física, artes, cidadania, filosofia, sociologia, ensino religioso, design, economia e tecnologia.

Alguns programas educacionais optam pela interdisciplinaridade, onde mais de uma disciplina pode ser contemplada nas atividades e projetos. Em todos os contextos que envolvem a aplicação do CLIL é preciso analisar o conteúdo para que se possa adequar a linguagem necessária para promover uma clara compreensão.

A comunicação é um pilar importante pois os alunos precisam produzir tanto na linguagem de forma oral quanto de forma escrita. É preciso encorajar a interação dos alunos nas aulas e torná-las cada vez mais relevantes e significativas. O objetivo do CLIL, neste caso, é aumentar o tempo de participação oral dos alunos e reduzir o tempo de explanação oral dos professores, encorajando a auto avaliação e os feedbacks em grupo. Quando os alunos produzem na língua alvo enquanto estudam disciplinas da base curricular eles mostram que o conhecimento específico de cada disciplina e a habilidade linguística estão integradas. “Através da linguagem para a aprendizagem de um conteúdo a comunicação se torna significativa porque a linguagem é uma ferramenta para a comunicação, não o fim em si. (Pérez-Vidal, 2009)

O CLIL promove habilidades cognitivas que desafiam os alunos. A cognição inclui as habilidades que incluem raciocínio, criatividade e avaliação. “Uma boa prática do CLIL é guiada pela cognição” (Mehisto, Marsh, Frigols, 2008). É preciso também analisar o processo de pensamento para suprir as demandas da linguagem e para ensinar aos alunos o vocabulário necessário para que possam expressar suas ideias e reflexões.

A abordagem cultural é uma das partes mais importantes do CLIL. “A cultura está no cerne do CLIL” (Coyle, 2007). O aluno precisa compreender sua cultura e ser apresentado às demais culturas. Com a globalização e a ampliação da conectividade através das mídias sociais os alunos estão cada vez mais expostos a situações em que precisam se comunicar em alguma língua estrangeira, além de observar diferentes contextos sociais e culturais. Por esta razão, a abordagem CLIL no ensino da matemática oferece a oportunidade de ampliar o universo cultural do aluno apresentando diversos contextos de cultura ao redor do mundo.

É preciso desenvolver alunos que tenham atitudes positivas e que se conscientizem das suas responsabilidades como cidadãos locais e globais. Dentro da sala de aula, é preciso valorizar as diferentes culturas, elas aparecem quando existem alunos de diferentes cidades ou estados através dos hábitos culturais e

sotaques ou até mesmo alunos estrangeiros, o que tem se tornado mais frequente nas escolas públicas do Brasil após o abrigo de refugiados. Além do ambiente da sala de aula, um grande benefício oferecido pela internet é a possibilidade de parcerias com outras escolas para a criação de projetos interculturais e trocas de experiência.

Com estes quatro pilares da metodologia CLIL bem estabelecidos e integrados, é possível oferecer uma educação bilíngue significativa e de qualidade.

3.2. A Taxonomia de Bloom

A taxonomia dos objetivos educacionais, conhecida como Taxonomia de Bloom (Bloom, Engelhart, Furst, & Krathwohl, 1956) é reconhecida como uma das mais importantes teorias da aprendizagem no campo da educação. Educadores frequentemente utilizam essa teoria para criar objetivos de aprendizagem que alcançam não somente o conteúdo mas também a estabelecem a profundidade da aprendizagem a ser atingida, em seguida criam avaliações que revelarão com precisão o progresso dos alunos.

A taxonomia de Bloom compreende três domínios de aprendizagem: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor e atribui a cada um deles a hierarquia que corresponde aos diferentes níveis de aprendizagem.

É de suma importância saber que diferentes níveis de raciocínio definidos a partir de cada domínio da Taxonomia são hierárquicos. Em outras palavras, cada nível se subordina ao nível anterior, partindo do pensamento de ordem inferior para o pensamento de ordem superior. A hierarquia do domínio cognitivo da taxonomia de Bloom (1956) inclui: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação.

Porém em 2001, David Krathwohl¹ e Lorin Anderson² publicaram a nova versão revisada da hierarquia devido à contribuições de psicologia cognitiva e especialistas em currículo, ensino e avaliação. A versão revisada introduz uma mudança chave no domínio cognitivo da Taxonomia de Bloom. Ela transforma os termos usados de substantivos para verbos e deste modo, tira o foco da aquisição e

¹ David Krathwohl foi um dos colaboradores originais de Bloom.

² Lorin Anderson foi aluno de Benjamin Bloom quando fez doutorado na Universidade de Chicago na década de 70, influenciando a educação ao substituir os substantivos da taxonomia de Bloom por verbos de ação.

coloca o foco na ação dos tipos de aprendizagem envolvidas em cada estágio da hierarquia. A hierarquia de Bloom revisada por Anderson and Krathwohl (2001) inclui: lembrar, compreender, aplicar, analisar, avaliar e criar.

O uso do domínio cognitivo da Taxonomia de Bloom é indispensável no planejamento das aulas que utilizam o CLIL como metodologia de ensino. Por essa razão é necessário compreender profundamente como os níveis hierárquicos funcionam na prática.

O domínio cognitivo é focado nas habilidades intelectuais tais como raciocínio lógico, capacidade de resolução de problemas e criação. Este foi o primeiro domínio criado pela equipe original da pesquisa de Bloom.

A hierarquia cognitiva parte da simples memorização, pensada para construir o conhecimento dos alunos, para a criação de algo referente ao conteúdo aprendido. Neste domínio é esperado que os alunos caminhem de forma progressiva iniciando no “memorizar” e finalizando no “criar” conforme mostra a figura a seguir.



Figura 1: Taxonomia de Bloom

Fonte: Medium. Disponível em:

<https://moraesrafael.medium.com/comece-a-entender-a-taxonomia-de-bloom-e-sua-importancia-para-os-processos-de-ensino-aprendizagem-d6582cff94cd>

Acesso em: 09 Set. 2024

Um desafio enfrentado pelos professores é a escolha dos verbos para estabelecer os objetivos da aprendizagem, o ideal é que eles escolham os verbos que melhor descrevam o que esperado do aluno naquela aula ou atividade específica.

A seguir são apresentados os verbos que refletem cada um dos seis níveis hierárquicos do domínio cognitivo e algumas sugestões de aplicações dentro do campo da matemática.

No primeiro nível, MEMORIZAR, o aluno deve ser capaz de reconhecer informações e conteúdos previamente estudados na aula, como fatos, figuras, datas, lugares, palavras, teorias, métodos, classificações, regras, dentre outros. Os verbos indicados para a construção dos objetivos de aprendizagem neste nível são: escolher, descrever, definir, identificar, omitir, recitar, reconhecer, selecionar, memorizar, nomear, afirmar, rotular, listar, localizar e combinar.

Já no nível COMPREENDER, é esperado que o aluno consiga dar significado ao conteúdo, interpretando o que foi compreendido e empregando em outro contexto. Os verbos para a verificação deste nível são: classificar, defender, demonstrar, distinguir, explicar, ampliar, parafrasear, representar, reafirmar, reescrever, mostrar, resumir, ilustrar, indicar, inter relacionar, interpretar, combinar e traduzir.

No nível APLICAR, o aluno deve ser capaz de utilizar as informações, métodos e conteúdos adquiridos em situações diversas, aplicando as regras, métodos, modelos, conceitos, princípios, leis e teorias. Os verbos indicados para a construção dos objetivos de aprendizagem neste nível são: aplicar, escolher, dramatizar, explicar, generalizar, julgar, organizar, pintar, preparar, produzir, selecionar, mostrar, esboçar, construir, escolher, construir, desenvolver, entrevistar, planejar, eleger, solucionar, utilizar, modelar e identificar.

No quarto nível da Taxonomia de Bloom revisada, ANALISAR, o aluno precisa conseguir subdividir o conteúdo em partes menores, identificando e relacionando-as, para que tenha uma ampla visão do tema geral. Os verbos indicados para a construção dos objetivos de aprendizagem neste nível são: analisar, classificar, categorizar, comparar, contrastar, descobrir, dissecar, dividir, examinar, inspecionar, simplificar, pesquisar, testar, distinguir, inferir, diferenciar e subdividir

No nível AVALIAR, o aluno deve conseguir julgar o valor de informações, ideias e ações baseado em critérios previamente estabelecidos que podem ser tanto internos ou externos (mais abrangentes). Os verbos indicados para a construção dos objetivos de aprendizagem neste nível são: estimar, julgar, criticar, defender, comparar, arbitrar, escolher, concluir, decidir, determinar, interpretar, explicar, contestar, avaliar, justificar, provar, selecionar, recomendar, concordar, estimar, priorizar, deduzir.

Finalmente, no topo da pirâmide, está o nível CRIAR, onde o aluno será capaz de produzir, combinando tudo que foi realizado nos níveis anteriores para formular novas ideias, projetos, produtos ou pontos de vista. Os verbos indicados para a construção dos objetivos de aprendizagem neste nível são: construir, mudar, escolher, combinar, compilar, compor, criar, desenvolver, projetar, fazer, formular, imaginar, melhorar, inventar, refazer, modificar, planejar e produzir.

4. BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM (BNCC)

Antes de planejar as aulas baseadas na metodologia CLIL é preciso identificar os conteúdos e os objetivos de aprendizagem a serem trabalhados nas aulas, para que o foco seja na aprendizagem e não somente no conteúdo ou no professor. No caso do Brasil, as habilidades e competências básicas são estabelecidas pela Base Nacional Curricular Comum, mais conhecida como BNCC (BRASIL, Ministérios da Educação, 2018).

A BNCC é um documento criado para normatizar as habilidades essenciais que os alunos devem desenvolver na educação básica, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

O caráter da BNCC vai muito além, ele não somente lista do que deve ser ensinado mas também traz propostas que visam a integração entre o conteúdo escolar, o cotidiano do aluno e o senso de cidadania utilizando as estratégias fornecidas s disciplinas para melhoria da comunidade na qual o aluno está inserido, indo muito além do conteúdo em si.

Considerado como uma referência nacional, a BNCC descreve o que os alunos brasileiros têm o direito de aprender ao longo da Educação Básica e por este motivo não pode ser confundido com o currículo das escolas das redes pública e privada. Os currículos são documentos personalizados e elaborados pelas redes de ensino, cujo objetivo é respeitar as diversas realidades das cidades do Brasil conectando a aprendizagem com a realidade do aluno.

Dez competências gerais, que todos os estudantes têm o direito de desenvolver ao longo da Educação Básica, são apresentadas pela BNCC. São elas:

1. Conhecimento - Valorização dos fatos físicos, sociais, culturais e digitais para compreensão da realidade e colaboração para um sociedade mais justa.
2. Pensamento Científico Crítico e Criativo - Exercício da curiosidade intelectual, investigação e reflexão para a criação de soluções com base no conhecimento de diversas áreas.
3. Repertório Cultural - Valorização das diversas manifestações artísticas e culturais, desde as locais até as mundiais.

4. Comunicação - Utilização de diferentes linguagens: verbal, cultural, visual, sonora, digital, artística, matemática e científica.
5. Cultura Digital - Compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica.
6. Trabalho e Projeto de Vida - Valorização da diversidade de saberes e vivências culturais e apropriação de conhecimentos e experiências que possibilitam o entendimento das escolhas dos alunos.
7. Argumentação - Questionamentos com base em fatos e dados para que sejam formuladas ideias, pontos de vista e decisões.
8. Auto Conhecimento e Auto Cuidado - Apreciação e conhecimento da saúde física e emocional reconhecendo e equilibrando emoções e auto crítica.
9. Empatia e Cooperação - Exercício da empatia e do diálogo, promovendo o respeito, o acolhimento e a inclusão.
10. Responsabilidade e Cidadania - Atuação pessoal e coletiva com responsabilidade, flexibilidade e resiliência nas tomadas de decisão pensadas no coletivo.

É possível concluir que as competências gerais se alinham fortemente com a metodologia CLIL, visto que a valorização do conhecimento, da comunicação, da cultura e do raciocínio são o cerne para o desenvolvimento do aluno como cidadão e contribuem de forma valorosa para que o aluno aprenda uma segunda língua de forma significativa.

As aprendizagens necessárias para que o aluno desenvolva as 10 competências são então separadas de acordo com a faixa etária e o ano de escolaridade. No caso deste trabalho, o foco central será no Ensino Médio pois é a etapa onde as atividades sugeridas serão aplicadas, porém as metodologias e propostas aqui apresentadas podem ser facilmente adaptadas para séries do Ensino Fundamental.

Para o Ensino Médio são estabelecidas com clareza pela BNCC as competências e habilidades em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências Humanas e Ciências da Natureza. A interdisciplinaridade pode ser praticada através dos temas transversais propostos pela BNCC, eles são temas que contemplam mais de uma área do conhecimento, como por exemplo,

Meio Ambiente, Economia, Saúde, Tecnologia e Cidadania. Esses temas são muito úteis para o planejamento das aulas através da metodologia CLIL por serem abrangentes e relevantes para a sociedade.

5. PLANO DE AULA

É preciso conhecimento e entusiasmo para planejar uma aula efetiva baseada na metodologia CLIL, de modo que o que esteja sendo ensinado seja efetivamente compreendido pelos alunos e para que os mesmos consigam produzir a partir dessa aprendizagem. Como é preciso integrar a aprendizagem do conteúdo com a linguagem, é preciso seguir uma estrutura prática mínima que aliada com a criatividade permite que os objetivos sejam atingidos com sucesso.

A ideia é compreender as etapas e os instrumentos necessários para que este planejamento se concretize, evitando as famosas burocracias já conhecidas dos planos de aula tradicionais, mas pensando em algo que seja útil, dinâmico, prático e realmente favorável para o processo de ensino-aprendizagem.

O primeiro passo na hora de preparar um plano de aula baseado na metodologia CLIL é definir os objetivos da aprendizagem. Em escolas públicas bilíngues o currículo a ser seguido é fornecido pela BNCC como já abordado anteriormente. Particularmente, em escolas de outras nacionalidades, como as Americanas, por exemplo, temos como base o Common Core Standards³ e as Diretrizes de Aprendizagem de Massachusetts⁴. Neste caso, onde existe a oferta de ambos diplomas, o brasileiro e o estrangeiro, a escola deve cumprir ambos os currículos, tanto o brasileiro, já que deve cumprir a legislação Brasileira representada pelo MEC, quanto o estrangeiro seguindo as diretrizes do país de origem.

A definição dos objetivos envolve duas classificações: o objetivo do conteúdo e o objetivo da linguagem em si. Os objetivos dos conteúdos serão delimitados respeitando a hierarquia do domínio cognitivo da taxonomia de bloom e podem ser atingidos, se e somente se, os objetivos da linguagem também forem alcançados.

³ A Common Core Standards, conhecida simplesmente como Common Core, foi uma iniciativa educacional americana multiestadual iniciada em 2010 com o objetivo de aumentar a consistência entre os padrões educacionais estaduais do que os alunos devem saber sobre Língua Inglesa e Matemática ao final de cada série da jornada escolar.

⁴ As Estruturas Curriculares de Massachusetts contém padrões de aprendizagem que definem os conceitos, habilidades e conteúdos que devem ser ensinados e aprendidos até o final de cada série, da pré escola até o décimo segundo ano.

Explicitando, os objetivos do conteúdo consistem em ações que combinam os verbos sugeridos na Taxonomia de Bloom com os conteúdos da disciplina em questão, no caso deste trabalho a Matemática.

São exemplos do objetivos do conteúdo:

- Analisar tabelas e gráficos, verificando as variáveis e a escala.
(Analyze tables and graphs, checking the variables and the scale.)
- Compreender e converter medidas de acordo com o Sistema Internacional de Unidades.
(Comprehend and convert measurements according to the International System of Units (IS).)
- Encontrar e comparar probabilidades em situações específicas do cotidiano.
(Find and compare probabilities in specific real life situations.)
- Determinar a área da superfície e o volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.
(Determine the surface area and the volume of prisms, pyramids, cylinders, cones and spheres.)
- Ordenar números reais na reta numérica.
(Order real numbers on a number line.)
- Classificar triângulos de acordo com o números de lados e medida dos ângulos.
(Classify triangles by sides and angles.)
- Esboçar o gráfico de funções quadráticas.
(Graph quadratic functions.)
- Escrever a equação da reta nas formas reduzida, fundamental e geral.
(Write the equation of a line in slope-intercept, point-slope or standard form.)
- Realizar transformações de gráficos como translações, reflexões e rotações.
(Perform graph transformations as translations, reflections and rotations.)
- Aplicar as leis do Seno e do Cosseno, determinando ângulos ou lados desconhecidos de um triângulo.
(Apply the law of sines and Cosines, determining missing angles or sides of a triangle.)

- Investigar os dados coletados, calculando média, mediana e moda.

(Investigate the data, calculating mean, median and mode.)

Os objetivos da aprendizagem ajudam a descrever com clareza os conteúdos abordados na disciplina, dando continuidade e permitindo que o ensino seja direcionado para a classe de alunos em sua totalidade, um determinado grupo ou até mesmo para necessidades individuais. Eles expressam o que os alunos devem estar aptos a saber, produzir e avaliar seu conhecimento no tópico abordado após o processo de ensino-aprendizagem.

Os objetivos culturais, ou seja, o resultado esperado referente ao contexto cultural utilizado na aula pode ser definido pelo professor. Eles devem ser pensados de modo a valorizar a cultura local e global, promover a compreensão e o respeito às diferentes culturas e estimular uma reflexão intercultural.

Após a definição desses objetivos é preciso definir como a comunicação será trabalhada na segunda língua durante a aula, ela é um elemento essencial do planejamento já que um dos objetivos do CLIL é promover a aprendizagem de outro idioma.

A comunicação será dividida em três tipos de linguagem: Linguagem da Aprendizagem, Linguagem para o Aprendizado e a Linguagem através da Aprendizagem. Como os professores das disciplinas específicas não são professores da língua inglesa, é indispensável que essa parte do plano de aula esteja bem definida, especificando com clareza e detalhamento cada uma das linguagens.

A primeira delas é a Linguagem do Aprendizado que é representada pelo vocabulário chave da aula em questão, ou seja, o nome do conteúdo, seus respectivos tópicos, as palavras necessárias e usadas com frequência quando o conteúdo é abordado.

Já a Linguagem para o Aprendizado trás as estruturas gramaticais necessárias para a comunicação na aula, nesta parte é necessário especificar as perguntas, respostas e conclusões que surgirão ao longo da aula, para que fiquem bem claras e sejam incorporadas ao vocabulário da segunda língua do aluno.

A última delas é a Linguagem através da Aprendizagem, nesta parte o plano de aula o professor coloca o vocabulário que não está ligados diretamente ao tema mas que pode surgir ao longo dela, nesta parte o professor lista as

palavras revisitadas e também aquelas que surgirão no decorrer dos debates e da aula em si.

A etapa seguinte do plano de aula é listar todos os materiais necessários para a sua execução. Os materiais devem ser especificados, como por exemplo, folhas de atividades, jogos, recursos multimídias, cartões (*Flash Cards*), cartazes, dentre outros.

O tempo de duração da aula influenciará na quantidade de atividades que serão realizadas com a turma. O ideal é que o professor estime o tempo necessário para a execução de cada uma das etapas da aula de modo a concluir a realização da aula, dando um fechamento adequado ao conteúdo do dia. Nesta parte pode-se especificar também se as atividades serão realizadas individualmente, em grupos ou com a turma inteira.

Para finalizar, o professor possui várias ferramentas para avaliar o aluno ao longo da aula, tornando o processo de avaliação contínuo e significativo. As avaliações realizadas para mensurar a aprendizagem podem incluir a participação individual, a performance na execução das atividades, a interação com os demais alunos, a participação nos debates na sala de aula, provas, dentre outros.

6. ADAPTAÇÃO DE MATERIAIS PARA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA CLIL

Conforme exposto anteriormente neste trabalho, o grande desafio do uso da metodologia CLIL é que o professor consiga garantir a integração do ensino de conteúdos curriculares com a aprendizagem de qualquer língua estrangeira utilizando os quatro C's. Com o decorrer dos anos, o professor vai desenvolvendo e testando, a partir das vivências em sala de aula, diversas estratégias práticas para que o CLIL seja utilizado de forma efetiva e tenha o impacto positivo esperado na aprendizagem dos alunos.

Algumas dessas diretrizes e estratégias práticas para a adaptação, não só de conteúdos de Matemática mas também de outras áreas do conhecimento, estão expostos a seguir:

- **Revisão do Conteúdo Curricular:** O professor deve selecionar os pontos mais relevantes e interessantes de cada conteúdo, garantindo que possam ser explorados na segunda língua e que estejam alinhados e inseridos no contexto dos estudantes para que a aprendizagem ocorra de forma significativa.
- **Integração de Linguagem e Conteúdo:** A utilização da língua estrangeira como meio de instrução para ensinar o vocabulário específico e a compreensão dos conceitos de qualquer disciplina.
- **Metodologias Ativas :** As metodologias ativas são estratégias de ensino que têm por objetivo incentivar os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa, por meio de problemas e situações reais, realizando tarefas que os estimulem a pensar além, a terem iniciativa, a debaterem, tornando-se responsáveis pela construção de conhecimento. Neste modelo de ensino, o professor torna-se coadjuvante nos processos de ensino e aprendizagem, permitindo aos estudantes o protagonismo de seu aprendizado. A incorporação de metodologias ativas estimulam e incentivam a participação efetiva dos alunos. A partir de debates sobre temas relevantes ao conteúdo curricular, simulações de situações reais como entrevistas ou negociações, vídeos ou apresentações multimídias, os

alunos desenvolvem as habilidades linguísticas orais e compreendem os conceitos de forma lúdica e significativa.

- *Scaffolding*⁵: É ideal que o professor sempre inicie a aula a partir do que os alunos já têm conhecimento, para que eles se familiarizem com o conteúdo e estabeleça prontamente uma conexão, progredindo assim de algo mais simples e conhecido pelos alunos para o aspecto mais complexo do conteúdo, promovendo o pensamento crítico.
- **Uso de Materiais Autênticos**: A inclusão de materiais autênticos na língua estrangeira como jornais, mapas, artigos, anúncios, comerciais televisivos, animações, vídeos e entrevistas refletem para os alunos o uso real da língua. O uso desses materiais permite que os alunos percebam na prática as estruturas de linguagem escrita e fala melhorando não só a fluência linguística deles mas também tornando a aprendizagem mais relevante.

A adaptação de materiais didáticos para a metodologia CLIL requer um planejamento cuidadoso que considere tanto as necessidades dos alunos quanto os objetivos educacionais das disciplinas envolvidas. Ao integrar conteúdo e linguagem de forma significativa, os educadores podem criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e eficaz que prepare os alunos para um mundo globalizado.

⁵ O conceito de *Scaffolding*, traduzido literalmente como colocação de andaimes, introduzido por Wood et al. (1976) diz respeito às intervenções do professor, ao encontro das necessidades do aluno, ao fornecimento de suporte adequado ao desenvolvimento de competências emergentes que possibilitam ao aluno obter sucesso numa dada tarefa, quebrando inicialmente o todo em pequenas tarefas, contribuindo desta forma para desenvolvimento cognitivo do aluno. Desta forma, é dado ao aluno todo o suporte para que o mesmo possa atingir as metas de aprendizagem.

7. CONTEXTO MATEMÁTICO

O embasamento teórico necessário para o desenvolvimento e execução do produto educacional que será exposto neste trabalho será apresentado a seguir. Alguns tópicos relevantes da matemática muitas vezes são negligenciados no ensino médio das escolas públicas pois exigem uma maturidade matemática que muitas vezes os alunos não possuem por conta de defasagens de conteúdo e diversos outros fatores estruturais como falta de materiais didáticos adequados, número de aulas insuficientes, greves, falta de suporte escolar em casa, dentre outros, fazendo com que o professor faça apenas referências ao assunto, sem aprofundar uma discussão matemática desses temas com os alunos.

Neste capítulo serão apresentados os números reais, a probabilidade de ocorrência de eventos e uma introdução sobre a geometria analítica, fornecendo a fundamentação teórica necessária para a confecção e aplicação do produto educacional sugerido.

7.1. Os Números Reais na Educação Básica

Os números naturais surgiram a partir da necessidade do homem de contar, seja seus rebanhos, alimentos ou objetos, porém com o tempo, com o passar do tempo, os naturais não eram mais suficientes para contar ou até mesmo medir quantidades como comprimento, peso ou tempo. Por essa razão os povos antigos iniciaram o uso das frações e posteriormente consolidaram-se os números racionais, cujos estudos são datados por volta de 300 a.C pelos matemáticos gregos⁶ e indianos.

Problemas mais complexos vão surgindo, como o da diagonal do quadrado de lado unitário, cujo valor é $\sqrt{2}$ e as razões envolvendo os números naturais já não são mais suficientes para suprir toda evolução. Por volta de 420 a.C. Teodoro de Cirene mostra que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais o que mostra indícios de que a irracionalidade de

⁶ Os Elementos revolucionaram a Matemática e servem de referência até os dias de hoje. Euclides de Alexandria escreveu 13 livros para a coleção apresentando postulados e teoremas de Geometria e também a versão grega antiga da Teoria dos Números.

$\sqrt{2}$ já havia sido mostrada anteriormente, mas deixam a dúvida se foi realmente Teodoro que descobriu a irracionalidade de tais números ou apenas demonstrou tal fato. Oficialmente, foi Aristóteles (384-322 a.C.) que posteriormente demonstrou a $\sqrt{2}$.

Outro número irracional, chamado de número de ouro ou razão áurea também gera discussões acerca de sua descoberta, segundo Howard Eves⁷ esse pode ter sido o primeiro número irracional a ser descoberto pelos filósofos matemáticos, muito antes de Aristóteles e Teodoro.

Os irracionais π e e aparecem no quinto livro do Elementos de Euclides, onde o tratamento dessas proporções incomensuráveis foi formulado por Eudoxo⁸, e é possível traçar um paralelo com a exposição moderna dos números irracionais dada pelo matemático alemão Richard Dedekind no século XIX em sua obra mais famosa “A continuidade e os números irracionais”, cujo objetivo era compreender o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue das grandezas representadas pelos números racionais.

O objetivo de Dedekind era compreender como a construção dos irracionais era feita a partir dos racionais, utilizando para isso o conceito de limite. Inspirado por Dedekind, o matemático Cantor⁹ passou a investigar uma forma de contar o infinito. Ele foi o primeiro a perceber que os infinitos não são todos iguais e têm tamanhos diferentes, mostrando primeiramente que o “menor” infinito é o da contagem, do conjunto dos naturais \mathbb{N} , e que ele possui o mesmo tamanho do conjunto dos Inteiros e dos racionais, apesar de um conter o outro, mostrando então que nem sempre a parte é menor que o todo.

Cantor separou os tipos de infinito em infinito enumerável e não enumerável, mostrando que os racionais são um conjunto numérico enumerável enquanto os reais são um conjunto não enumerável, ele usou o método da diagonal para demonstrar esse fato o que posteriormente ficou conhecido como a famosa

⁷ Howard Eves (1911- 2004) foi um matemático americano influente no século XX por seus estudos nas área da Geometria e da História da Matemática.

⁸ Eudoxo de Cnido foi um dos mais importantes matemáticos gregos por volta do séc IV a.c. e suas maiores contribuições foram na área da geometria plana e espacial.

⁹ O matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nascido em 1845 fez grandes contribuições com seus estudos sobre a Teoria dos Conjuntos e Teoria das Séries Trigonômicas. Cantor abriu caminho para uma “nova” Matemática ao enunciar que existe uma infinidade de infinitos.

diagonal de Cantor. Ele também foi o primeiro matemático a usar \mathbb{R} para representar o conjunto dos números reais.

Existe muita confusão entre os alunos da Educação Básica quando o professor precisa utilizar o conceito de número real na sala de aula. A falta de uma definição mais simples e a representação decimal infinita são barreiras a serem vencidas para que se possa construir um eficiente conceito de número real.

É necessário que o aluno consiga conceituar de forma precisa e simples a ideia de um número real, deste modo é necessário que ele compreenda que os números naturais são números para contar e que os reais são os números para medir.

Muitos livros do Ensino Médio descrevem os números reais como números que completam a reta numérica após a representação dos números racionais, atribuindo exclusivamente à reta, um mero elemento geométrico de representação, a união entre os racionais e irracionais denominada conjunto dos números reais. Fica parecendo então que os reais surgem apenas para completar as lacunas deixadas pelos racionais, fazendo que os alunos, erroneamente, estendam as propriedades dos racionais aos reais. Ao mesmo tempo, reduz-se o conjunto dos números irracionais a simplesmente números não-rationais com representação única na reta.

Outro aspecto importante é que os alunos precisam saber localizar os números na reta real mesmo quando não são racionais, como por exemplo $\sqrt{223}$, 5π e $-5e$ fazendo as aproximações necessárias para que possam ser localizados na reta.

Como todos os irracionais têm representação infinita, sua localização deve ser aproximada e portanto, haveria necessidade de ensinar métodos de aproximação, o que lamentavelmente não é ensinado de forma efetiva. Os motivos, por não serem ensinados, são variados, e vão desde não constar no programa do Ensino Médio de algumas redes até o uso da calculadora, já que muitos professores quando estão trabalhando com o uso desses números permitem o uso dessa ferramenta com o objetivo de avançar mais rapidamente para o próximo tema.

Além disso, alguns irracionais como $\pi = 3,14159265\dots$ ou $e = 2,718281828\dots$ surgem para o aluno de forma obscura impossibilitando sua localização exata já que a cada nova casa decimal surge um número aleatório.

Ao longo da jornada acadêmica ensina-se que o conjunto dos números naturais e dos inteiros é infinito e, qualquer conjunto que contenha eles, como por exemplo o dos racionais, também será infinito, já que um conjunto finito não pode conter um conjunto infinito. Os infinitos elementos do conjunto dos naturais e dos inteiros podem ser listados, mas os infinitos elementos do conjunto dos reais são de tal forma que não podem. Separando-os os infinitos em pelo menos dois tipos: infinito enumerável e infinito não enumerável.

Outra coisa a destacar é que como é sabido, entre quaisquer dois racionais existe pelo menos um racional e por ser um conjunto denso¹⁰, entre seus elementos não existe uma enumeração que preserve a ordem. Apesar disso, os elementos do conjunto dos números racionais podem ser listados já que representam um infinito enumerável. Porém isso não só não é óbvio de maneira geral, como para o aluno parece impossível aceitar a possibilidade de comparar infinitos ou, sequer, conceber a existência de um infinito não contável.

7.2. Conceitos Básicos de Probabilidade no Ensino Médio

O ensino da probabilidade é fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico dos estudantes. Em um mundo cada vez mais baseado em dados e informações, compreender os conceitos de probabilidade permite que os alunos façam análises mais informadas e decisões mais conscientes. A probabilidade oferece uma base sólida para entender fenômenos aleatórios e incertezas, que estão presentes em diversas áreas do conhecimento, como ciências, economia, saúde e até mesmo em situações cotidianas.

Ao aprender sobre esse importante conceito matemático, os alunos são incentivados a desenvolver habilidades analíticas essenciais. Eles aprendem a coletar, interpretar e analisar dados, o que é crucial em um mundo onde a informação é abundante. Essa habilidade não apenas ajuda na resolução de problemas matemáticos, mas também é aplicável em contextos da vida real, como na avaliação de riscos e na tomada de decisões. Por exemplo, ao entender a

¹⁰ Um conjunto S é dito denso em um espaço X se qualquer intervalo aberto ou vizinhança de X contém pelo menos um elemento de S . Em outras palavras, não importa quão pequeno seja o intervalo que você escolher em X , sempre haverá elementos do conjunto S dentro desse intervalo.

probabilidade de eventos como o resultado de um jogo esportivo ou a previsão do tempo, os alunos podem aplicar esse conhecimento para fazer escolhas mais informadas.

Além disso, o ensino da probabilidade tem aplicações práticas que tornam o aprendizado mais relevante. Os alunos podem explorar situações do cotidiano que envolvem incertezas, como jogos de azar, estatísticas esportivas ou até mesmo questões de saúde pública, como a eficácia de vacinas. Essas aplicações ajudam a conectar a teoria à prática, tornando o aprendizado mais interessante e engajador.

A probabilidade trata-se então de um ramo da matemática que estuda a incerteza e a chance de ocorrência de eventos, formalmente representada por um número entre 0 e 1, onde 0 indica que o evento é impossível de ocorrer e 1 representa que é certo que o evento ocorra. Por exemplo, considere um chapéu com 5 bolas pretas, a probabilidade de que alguém escolha ao acaso uma bola e ela seja amarela é zero, já que não existem bolas amarelas no chapéu, tornando esse evento impossível de ocorrer e a probabilidade de que seja retirado ao acaso uma bola preta é 1, já que só existem bolas pretas no chapéu, logo certamente a bola escolhida será preta. A teoria da probabilidade busca então quantificar a incerteza e prever resultados possíveis de eventos aleatórios.

A probabilidade de um dado evento A é dada pela razão entre o número de eventos favoráveis a A e o número total de resultados possíveis quando todos eles possuem a mesma chance de ocorrer, que pode ser calculado através da Análise Combinatória. Desta forma, tem-se que:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número total de eventos possíveis}}$$

Por exemplo, se um baralho de 52 cartas for considerado, excluindo-se o coringa, tem-se 13 cartas de cada naipe, são eles: Ouros, Espadas, Paus e Copas. Neste caso a probabilidade de tirar uma carta de ouros desse baralho é:

$$P(\text{ouros}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

ou seja, 25% de chance de ocorrer.

A abordagem frequentista da probabilidade, que muitas vezes é foco nos estudos iniciais desse tema, interpreta a probabilidade como a frequência relativa de um evento em um grande número de experimentos. Ou seja, se um evento A

ocorre n vezes em um total de N experimentos, a probabilidade de A é aproximadamente $P(A) = \frac{n}{N}$ quando N é grande.

A probabilidade condicional refere-se à probabilidade da ocorrência de um evento A dado que um evento B já ocorreu. Esse conceito é fundamental em diversas abordagens práticas da já que muitos fenômenos observáveis dependem do contexto ou de condições prévias. Matematicamente a probabilidade condicional do evento A dado que o evento B já ocorreu anteriormente é expressa como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) > 0$$

Onde $P(A \cap B)$ é a probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B . Esse conceito é de suma importância para que se possa atualizar a probabilidade de um evento à luz de novas informações.

Os eventos podem ser classificados como dependentes ou independentes, dependendo de como a ocorrência de um evento influencia a probabilidade da ocorrência de outro.

Dois eventos A e B são ditos independentes se a ocorrência do evento A não afeta a ocorrência de B , ou seja $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$, implicando em $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Um exemplo de eventos independentes é o lançamento de uma moeda e a escolha de uma carta do baralho, já que o resultado da moeda não influencia o resultado da escolha da carta.

Os eventos A e B são classificados como dependentes quando a ocorrência de um deles altera a probabilidade de ocorrência do outro. Neste caso:

$$P(A|B) \neq P(A)$$

Por exemplo, se forem retiradas duas cartas do baralho sem reposição, se a primeira for um Ás, a probabilidade de retirar um Ás na segunda tentativa irá mudar, visto que o número de cartas e a composição do baralho mudaram.

É possível combinar dois ou mais eventos através da união e da interseção deles sendo assim classificados como eventos compostos. A união entre dois ou mais eventos é representada pelo evento em que pelo menos um dos eventos A ou B ocorre.

A probabilidade da união de A e B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Caso A e B sejam mutuamente exclusivos, ou disjuntos, ou seja, não ocorrem simultaneamente, de modo que $P(A \cap B) = 0$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A interseção de dois eventos A e B refere-se ao evento em que tanto o evento A quanto o evento B ocorrem simultaneamente. Se A e B forem independentes tem-se que a interseção entre eles é representada por $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ como já citado anteriormente. Se A e B forem dependentes, a propriedade da interseção será ajustada pela probabilidade condicional.

Os conceitos apresentados acima são indispensáveis no estudo da probabilidade e fundamentais para a compreensão de fenômenos aleatórios. Segundo Hazzan¹¹, a ênfase na construção de uma compreensão conceitual e na aplicação prática desses conceitos é essencial para o aprendizado significativo dos alunos. Ao explorar situações do cotidiano e realizar atividades experimentais, os alunos podem desenvolver uma melhor intuição e raciocínio probabilístico, essenciais para a tomada de decisões e para a análise de dados em contextos reais.

7.3. Introdução à Geometria Analítica no Contexto Escolar

René Descartes ao relacionar o estudo da Álgebra e da Geometria desenvolveu uma das mais importantes criações matemáticas: o plano cartesiano, que resultou no que hoje é conhecido como Geometria Analítica.

O Sistema de Coordenadas Cartesianas, assim chamado em homenagem a Descartes, também conhecido como Plano Cartesiano ou Eixos Ortogonais, é formado por dois eixos perpendiculares numerados, onde o eixo horizontal é chamado de abscissa e o eixo vertical é a ordenada.

A função do Plano Cartesiano é permitir a localização e representação de quaisquer pontos do \mathbb{R}^2 . Descartes provou que é possível, através do Plano

¹¹ Samuel Hazzan é um renomado matemático e autor especializado nas áreas de probabilidade, cálculo e matemática financeira. Ele tem influenciado significativamente o ensino da probabilidade tornando-a acessível e relevante para estudantes e profissionais nas áreas de administração, economia e contabilidade.

Cartesiano, representar retas, planos e curvas, dentre elas o círculo utilizando equações matemáticas traduzindo para a álgebra as formas geométricas.

Para compreender a Geometria Analítica é necessário retomar alguns axiomas e conceitos básicos da Geometria Euclidiana:

- Por dois pontos distintos passa uma, e somente uma única reta (Axioma de Incidência).
- Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r , existe uma, e somente uma reta paralela à reta r que passa por P (Axioma das Paralelas).
- Dados um ponto P e uma reta r , existe apenas uma reta perpendicular a r que passa por P .
- Por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um, e somente um plano (Axioma de Incidência).

Outros resultados da Geometria Euclidiana como o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos também serão usados na construção dos conceitos da Geometria Analítica.

Para compreender os conceitos básicos da Geometria Analítica que devem ser abordados nas aulas de Matemática para o Ensino Médio a seguir são demonstrados o ponto médio, a distância entre dois pontos e a equação do círculo em um sistema de eixos ortogonais.

Seja π um plano e sejam dois eixos contidos em π , com unidades de medida de comprimento igual e que perpendicularmente se intersectam no ponto O do plano, chamado de origem comum a esses dois eixos. Convencionou-se que o eixo OX é horizontal e orientado para a direita e sua coordenada é chamada de abscisa, já o outro eixo, OY , é vertical e orientado para cima e a coordenada nesse eixo é a ordenada. É possível então chamar esse sistema de sistema de eixos ortogonais OXY , ou somente sistema OXY e o complementar dele é formado por quatro regiões denominadas quadrantes e numeradas, primeiro quadrante (I), segundo quadrante (II), terceiro quadrante (III) e quarto quadrante (IV), conforme a figura na próxima página:

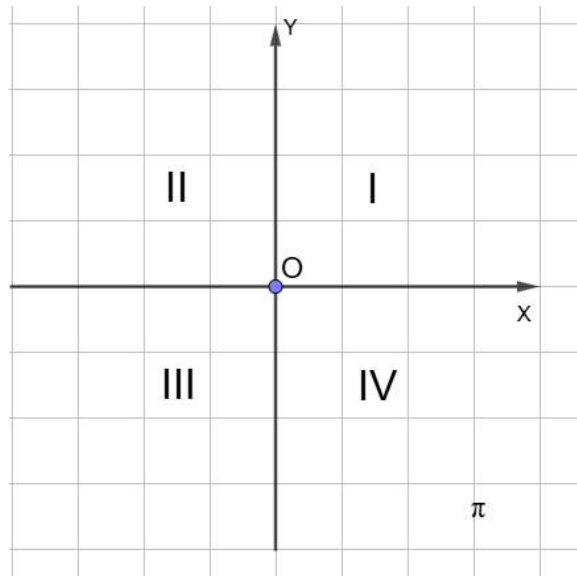


Figura 2: Sistema de Eixos Ortogonais OXY

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados dos números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{ (a, b); a, b \in \mathbb{R} \}$ de modo que para qualquer ponto P do plano π possa ser representado pelo par ordenado (a, b) , onde para qualquer P não localizado nos eixos, a é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo OX por P e b é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo OY por P .

Os números $a, b \in \mathbb{R}$ do par ordenado (a, b) associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P , a é a abscissa ou primeira coordenada de P e b é a ordenada ou segunda coordenada de P , de modo que a recíproca seja verdadeira.

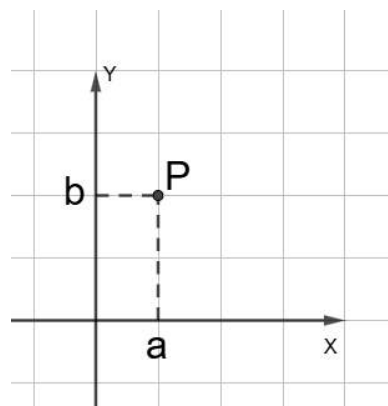


Figura 2.1: Ponto P no Plano

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

É possível concluir de fato que, se P é um ponto que pertence ao plano π ele pode ser escrito da forma de par ordenado $P = (a, b)$ onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e pontos no eixo das abscissas, eixo OX , tem coordenadas do tipo $(x, 0)$ e no eixo das ordenadas, eixo OY , tem coordenadas do tipo $(0, y)$.

Sejam A e B dois pontos quaisquer no plano π representados pelas suas respectivas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em relação ao sistema de eixos ortogonais dado OXY . Seja C um ponto representado por (x_2, y_1) conforme representado na figura abaixo, de modo que a distância entre os pontos A e B que será representada por $d(A, B)$. A distância entre os pontos A e B pode ser descrita como a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle ABC$ de catetos AC e BC . Sendo a distância entre dois pontos em um mesmo eixo representada pelo módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas dos catetos são respectivamente $d(A, C) = |x_2 - x_1|$ e $d(B, C) = |y_2 - y_1|$.

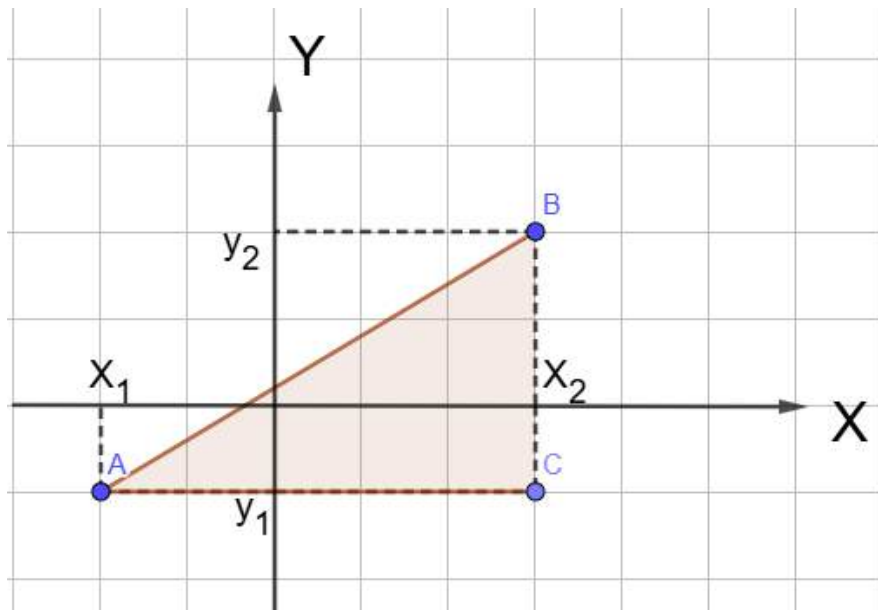


Figura 2.2: Distância entre Dois Pontos

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Aplicando o famoso Teorema de Pitágoras que diz que em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos obtém-se:

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2)}$$

Como qualquer número elevado ao quadrado será positivo, é possível substituir o módulo por parênteses e obter então a fórmula para obter a distância entre dois pontos quaisquer do plano.

Assim a distância de $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O cálculo de distâncias permite uma caracterização algébrica do círculo no plano e do ponto médio, visto que o círculo consiste em um conjunto de pontos equidistantes de um certo ponto denominado centro e o ponto médio é um ponto que separa um segmento em duas partes com o mesmo comprimento.

Define-se então o Círculo C de centro no ponto $P \in \pi$ e raio $r > 0$ como o conjunto que consiste dos pontos do plano π situados à distância r do ponto P , ou seja:

$$C = \{A \in \pi \mid d(A, P) = r\}$$

Como mostra a figura abaixo:

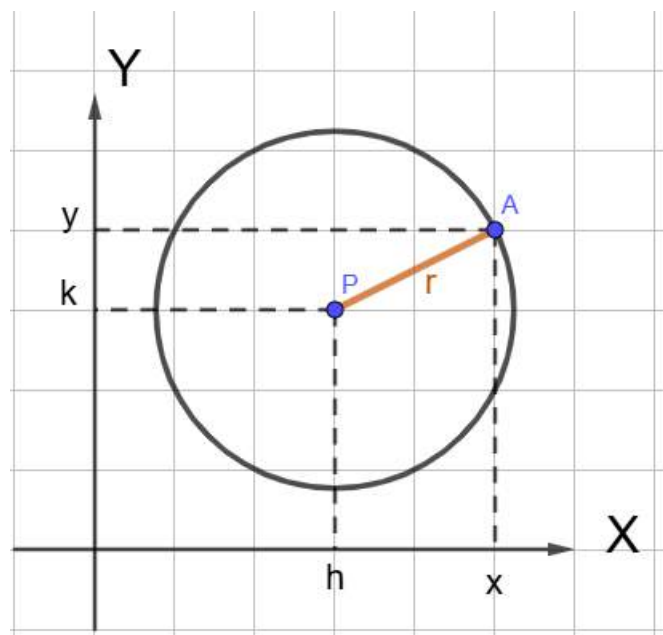


Figura 2.3: Círculo no Plano Cartesiano

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Considerando $P = (h, k)$ e em um sistema de eixos ortogonais XYZ no plano π , existirá $A = (x, y) \in C$ se e somente se $d(P, A) = r$, e de fato como:

$$d(A, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Tem-se:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado obtém-se a equação associada ao círculo C, que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

É de suma importância que o aluno do Ensino Médio absorva esses conceitos de modo a não somente decorar fórmulas e sim compreendê-las a tal ponto que eles mesmos possam deduzi-las.

Por último, mas não menos importante, é possível representar facilmente de forma algébrica as coordenadas do Ponto Médio de um segmento. Suponha um segmento AB representado, cujos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos do plano π representados pelas suas coordenadas em relação um sistema de eixos ortogonais OXY e seja $M = (x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento AB é possível traçar por M um segmento CD, perpendicular ao eixo OX com $C = (x_m, y_1)$ e $D = (x_m, y_2)$.

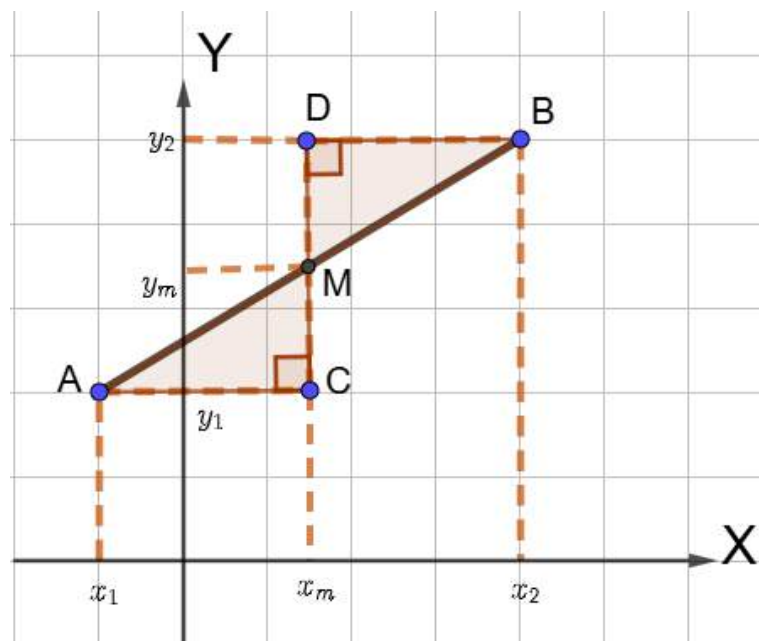


Figura 2.4: Ponto Médio

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Analisando os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMD$ é possível verificar que são congruentes pela condição AAL (dois ângulos e um lado congruentes), visto que:

$$\begin{aligned} \hat{A}MC &\cong \hat{D}MB \text{ (Opostos pelo vértice)} \\ \hat{C} &\cong \hat{D} \text{ (Ângulos retos)} \\ AM &\cong MB \text{ (Definição de Ponto Médio)} \end{aligned}$$

Já que os triângulos são congruentes é possível admitir que todos os lados e ângulos correspondentes também são congruentes, daí analisando os catetos:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= d(B, D) \\ |x_m - x_1| &= |x_2 - x_m| \\ 2x_m &= x_1 + x_2 \\ x_m &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

Analogamente é possível obter y_m , porém agora considerando:

$$\begin{aligned} P(C, M) &= P(D, M) \\ |y_m - y_1| &= |y_2 - y_m| \\ y_m &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

Conclui-se então que o Ponto Médio M de um segmento AB qualquer contido no plano π com coordenadas $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em relação ao sistema de eixos ortogonais OXY é dado por:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

8. AULAS DE MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA BASEADAS NA METODOLOGIA CLIL

Nesta seção serão apresentados três temas que serão utilizados para o planejamento de aulas de matemática em Língua Inglesa para a Educação Básica baseadas na metodologia CLIL. O planejamento e todo material necessário para cada uma dessas aulas estão detalhadamente apresentados e justificados no produto educacional de mesma autoria dessa dissertação.

O grande desafio enfrentado pelos professores de matemática para ensinar em língua inglesa é preparar uma aula que contemple tanto o conteúdo quanto o vocabulário e as estruturas gramaticais necessárias para que os objetivos da aprendizagem sejam atingidos com sucesso. Esse processo exige planejamento, conhecimento do conteúdo, fluência na língua adicional, vivências interdisciplinares e muita criatividade para criar uma aula que não ensina somente matemática, mas também favorece a comunicação, enriquecendo o vocabulário do aluno na segunda língua e abastecendo sua bagagem cultural.

Antes da apresentação das aulas é necessário consolidar que a metodologia CLIL pode ser aplicada a qualquer disciplina, especificamente com a Matemática, a melhor forma de pensar uma “aula CLIL” é pensando em um tema relevante para a sociedade que possa ser conectado com o objetivo do conteúdo a ser ensinado e que gere o debate necessário para promover a comunicação entre os estudantes. O tema central da aula pode ir de algum acontecimento histórico até o processo de fabricação de uma vacina, por exemplo.

O currículo de matemática é vasto e por isso foram selecionados para este trabalho três conteúdos relevantes e indispensáveis para a formação matemática do aluno e para sua performance futura no ENEM. A seguir são apresentadas três temas para aulas de matemática que serão ministradas em língua inglesa baseadas na metodologia CLIL. O primeiro tema foca na importância e no estudo do conjunto dos Números Reais, já o segundo explora o estudo da Probabilidade enquanto o terceiro é uma Introdução à Geometria Analítica.

A descrição detalhada de cada aula e os planejamentos referentes aos temas aqui apresentadas estão no produto educacional, intitulado *Matemática em Língua Inglesa Para Escolas Públicas Interculturais baseadas na Metodologia*

CLIL: *Aulas com Abordagens Culturais e Significativas*, que segue como Apêndice desta dissertação.

Aula 1 : As 7 Maravilhas do Mundo Moderno (*The 7 Wonders of the Modern World*)

Esta aula consiste em explorar os números reais como um conjunto indispensável para a descrição de elementos diversos do cotidiano, tais como medidas de comprimento ou peso, quantidade, valor, categorização dentre outros.

Os números reais podem ser representados geometricamente na reta numérica real e são fundamentais para a análise matemática devido à sua capacidade de representar qualquer medida contínua no espaço físico. Além disso, o conjunto dos números reais contém o conjunto dos números irracionais e o conjunto dos números racionais, que por sua vez contém o conjunto dos números inteiros e conseqüentemente o conjunto dos números naturais.

A parte cultural será voltada para as sete maravilhas do mundo moderno, que são monumentos icônicos que representam a engenhosidade e a criatividade humana e foram eleitas através de votação global em 2007. As sete maravilhas do mundo moderno estão representadas na figura abaixo e são o Cristo Redentor, o Machu Pichu, Petra, Chichen Itza, a Muralha da China, o Taj Mahal e o Coliseu.

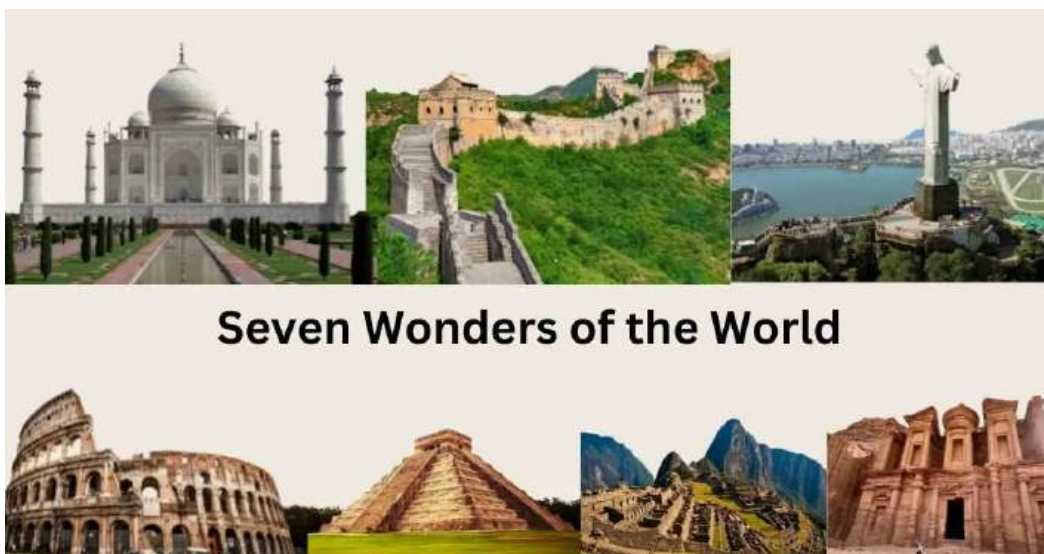


Figura 3: Seven Wonders of the Modern World

Fonte: Jagran Josh Disponível em:

<https://www.jagranjosh.com/general-knowledge/which-are-the-seven-wonders-of-the-world-1697731401-1> Acesso em: 20 Ago. 2024

Aula 2: Probabilidade com Baralho (*Probability with Playing Cards*)

O baralho é um conjunto com 52 cartas, divididas em 4 naipes, muito popular no mundo inteiro e cuja história é rica e complexa. Essa aula consiste em determinar e analisar a probabilidade de eventos que envolvam as cartas do baralho.

Os alunos iniciarão descobrindo um pouco mais sobre a história do baralho ao longo dos séculos, através de uma atividade que favorece a comunicação e amplia o vocabulário. Em seguida, os alunos vão ampliando seus conhecimentos sobre probabilidade, guiados pelo professor e com o desenvolvimento das atividades compreendendo melhor a escala de probabilidade, eventos independentes e dependentes, probabilidade condicional e eventos mutuamente exclusivos ou não disjuntos.

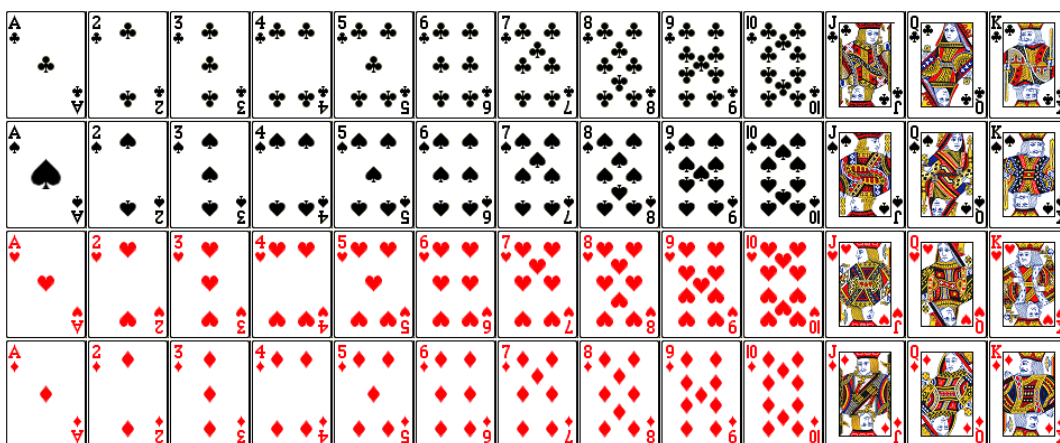


Figura 4: Cartas de um Baralho Completo

Fonte: Reddit. Disponível em:

https://www.reddit.com/r/UnearthedArcana/comments/zm6y63/using_playing_cards_as_a_traveling_alternative/?tl=pt-br&rdt=39976 Acesso em: 18 Set. 2024

Aula 3: Explorando o mapa da Espanha (*Exploring the map of Spain*)

Nesta aula propõe-se aos alunos explorar o mapa da Espanha e suas principais cidades para que seja obtida uma ampliação cultural, mesmo que remota e também para que o aluno compreenda a importância da representação cartesiana de qualquer ponto do plano investigando aspectos relevantes da geometria analítica.

No contexto dessa aula, além da exploração do vocabulário referente à descrição de cidades, será possível explorar a criatividade dos alunos ao criarem

seus próprios países e cidades em um plano cartesiano para explorarem o universo da geometria analítica possível de ser trabalhado no Ensino Médio, como a distância entre dois pontos, o ponto médio e a equação do círculo.



Figura 5: Mapa da Espanha com Coordenadas Cartesianas

Fonte: Pinterest. Disponível em: <https://es.pinterest.com/pin/385620786835640407/>

Acesso em: 24 Nov. 2024

9. EXPERIÊNCIA PESSOAL SOBRE A METODOLOGIA CLIL

Desde 2015 atuo na rede pública de ensino como professora de matemática em língua inglesa. Como o “boom” das escolas bilíngues/interculturais é recente, muitas instituições implementam essa forma de ensino sem muito planejamento e treinamento para os professores. No meu caso ocorreu da mesma forma, eu iniciei nessa área fazendo algo que eu achava que iria funcionar, oferecendo uma aula de matemática tradicional só que em outra língua, onde o vocabulário adquirido pelos alunos nas minhas aulas era relacionado somente a matemática e a cognição envolvida acontecia de forma mais mecânica.

Apenas em 2018 através de uma parceria com o Consulado Americano, recebemos um treinamento sobre a Metodologia CLIL na Arizona State University e pude visitar escolas americanas que usavam o CLIL para o ensino do Espanhol como a segunda língua. A partir daí, ensinar matemática em inglês para alunos do Ensino Médio fez muito mais sentido através da Metodologia CLIL já que o conteúdo e a linguagem integrados através de um viés cultural aumentaram o interesse dos alunos pelas minhas aulas e também melhoraram a comunicação e a interação dos alunos na língua inglesa.

Ao passar dos anos fui percebendo como o uso do CLIL transformou as minhas aulas, fazendo com que a aprendizagem da matemática ocorra de forma significativa e enriquecendo a bagagem cultural dos alunos, já que na maioria dos casos eles não possuem condições financeiras para viagens internacionais, visita à museus e exposições em geral.

Em relação à comunicação, posso afirmar que as metodologias ativas utilizadas na execução das aulas com o CLIL garantem uma interação favorável para a integração da turma, melhorando o relacionamento entre os alunos, contribuindo significativamente para a troca de experiências na língua inglesa além de desenvolver as habilidades de oratória dos alunos em geral, diminuindo a vergonha ao falar em público e aumentando a confiança na hora de compartilhar os diferentes pontos de vista.

Quanto à cognição, consegui observar que os alunos que aprendem através de aulas baseadas na Metodologia CLIL desenvolvem melhor o raciocínio lógico matemático e conseguem fazer conexões interdisciplinares com maior facilidade.

Talvez alguns professores possam achar que o CLIL é uma metodologia trabalhosa de ser usada por necessitar de um planejamento prévio detalhado, mas desde que eu conheci essa metodologia e vi na prática o impacto dela nas escolas públicas me senti motivada a usá-la e continuarei divulgando essa abordagem como uma ferramenta eficaz, inovadora e cultural para entregar uma educação de qualidade.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a expansão das escolas públicas bilíngues a partir de 2010, surge uma grande necessidade de capacitar os professores para que possam ensinar suas disciplinas em outro idioma. Essa dissertação explorou a metodologia CLIL, desenvolvida por David March, apresentando uma abordagem completa e enriquecedora que permite ao professor ensinar um conteúdo novo e ao mesmo tempo uma nova língua, utilizando quatro importantes pilares no planejamento e execução das aulas: conteúdo, comunicação, cultura e cognição.

A aplicação do CLIL no planejamento das aulas permite que a Matemática seja explorada de uma forma mais dinâmica e significativa, tornando-se uma disciplina essencial para a compreensão de fenômenos científicos e culturais além de aprimorar a aprendizagem da língua inglesa em escolas públicas onde na maioria dos casos os alunos não possuem acesso a um segundo idioma desde a primeira infância.

Com o CLIL as aulas ganham uma nova roupagem, ficam mais completas já que os objetivos da aprendizagem passam a incluir tanto os conteúdos curriculares de matemática quanto da linguagem, de modo que o professor defina todo o vocabulário e estruturas gramaticais necessárias para um conteúdo específico.

As aulas propostas neste trabalho, exemplificam a aplicação do CLIL na Matemática e visam inspirar outros professores de matemática que possuem o mesmo desafio, ensinar matemática em língua inglesa ou até mesmo em outro idioma, a produzirem e adaptarem suas próprias aulas baseadas na metodologia CLIL, tornando a sala de aula um ambiente de aprendizagem rico em interação e interdisciplinaridade.

Assim, concluímos que o uso da metodologia CLIL no ensino da Matemática em escolas públicas interculturais é uma poderosa ferramenta na formação de indivíduos críticos, já que possibilita não só a aprendizagem da matemática, fortalecendo a base acadêmica, mas também ofertando a aprendizagem de uma segunda língua, a língua inglesa, com uma abordagem cultural e focada na comunicação, preparando os alunos com qualidade para os futuros desafios de suas jornadas e consequentemente reduzindo as disparidades sócio-educacionais.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, L., & KRATHWOHL, D. A. (2001). *Taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.

ANDRADE, Vera Lúcia Cabana de Queiroz. *Colégio Pedro II: um lugar de memória*. 1999. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em História Social, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

ARMSTRONG, P. (n.d.). *Bloom's Taxonomy*. Center for Teaching, Vanderbilt University.

BLOOM, B. S.; ENGELHART M. D.; FURST, E. J.; HILL, W. H.; KRATHWOHL, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*. Handbook I: Cognitive domain. New York: David McKay Company.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Decreto s/n, de 2 de dezembro de 1837. Convertendo o Seminário de São Joaquim em colégio de instrução secundária, com a denominação de Colégio de Pedro II, e outras disposições. *Coleção das leis do Império do Brasil*, Rio de Janeiro, v.1, parte 2, p. 59-61, 1837.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRITISH COUNCIL. *Demandas de aprendizagem de Inglês no Brasil*. Instituto de Pesquisa Data Popular. 1 ed. São Paulo, 2014. _____. O ensino de inglês na educação pública brasileira. Instituto de Pesquisas Plano CDE. 1. ed. São Paulo, 2015.

COYLE, Do & HOOD, Philip & MARSH, David. *CLIL: Content and Language Integrated Learning*. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

DE OLIVEIRA , L. C. (2023). *Supporting multilingual learners' academic language development: A language-based approach to content instruction*. Routledge.

DE ZAROBÉ, Y. Ruiz. *Which language competencies benefit from CLIL? An insight into applied linguistics research. Content and Foreign Language Integrated Learning, Contributions to Multilingualism in European Contexts*. Bern: Peter Lang, p. 129-153, 2011.

FREEMAN, R. *Bilingual Education and Social Change*. Clevedon: Multilingual Matters, 1998.

GRISTEAD, C.M.; SNELL J.L. *Introduction to Probability*, ed. 1ª, Editora American Mathematical Society, EUA, julho 1997. IEZZI, G. et al. *Fundamentos De Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade*. 8.ed. São Paulo: Atual, 2013.

HARROW, A.J. (1972). *A taxonomy of the psychomotor domain*. New York: David McKay Co.

KLIMOVA, Blanka Frydrychova. *CLIL and the teaching of foreign languages*. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, v. 47, p. 572-576, 2012.

NIVEN, Ivan, *Números Racionais e Irracionais*, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 1984

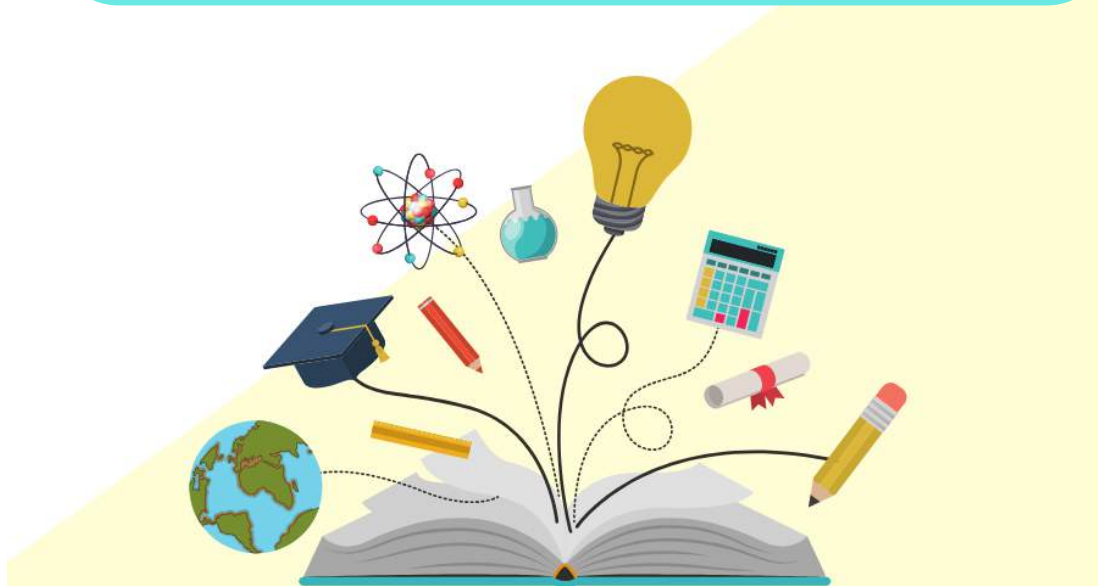
VYGOTSKY, Lev Semenovich. *Thought and Language*. Cambridge MA: MIT Press, 1962. (texto original publicado em russo, 1934).

APÊNDICE

Nesta seção será apresentado o Produto Educacional de título “*Aulas com Abordagens Culturais e Significativas Baseadas na Metodologia CLIL*”, com autoria desta mesma dissertação, requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio, o qual se mostra uníssono ao texto deste documento e, portanto, imprescindível o conhecimento do mesmo.

MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA PARA ESCOLAS PÚBLICAS INTERCULTURAIS BASEADA NA METODOLOGIA CLIL

Aulas de Matemática em Língua Inglesa
com Abordagens Culturais e Significativas



Anelise Timotheo Moulin Vianna
Orientadora: Prof.^a Dania González Morales

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Anelise Timotheo Moulin Vianna

**MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA PARA ESCOLAS
PÚBLICAS INTERCULTURAIS BASEADA NA
METODOLOGIA CLIL**

**Aulas de Matemática em Língua Inglesa
com Abordagens Culturais e Significativas**

Produto Educacional

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós Graduação em Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Prof.^a Dania González Morales

**Rio de Janeiro,
fevereiro de 2025**

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi elaborado a partir da dissertação de mestrado intitulada “Matemática em Língua Inglesa para Escolas Públicas Interculturais Baseada na Metodologia CLIL” produzida por Anelise Timotheo Moulin Vianna e orientada pela Professora Doutora Dania González Morales. Este apresentará três aulas de matemática em língua inglesa baseadas na metodologia CLIL, trazendo uma abordagem mais cultural e significativa ao ensino da matemática para escolas públicas bilíngues, neste caso especificamente para turmas dos Ensinos Fundamental e Médio, variando de acordo com o currículo de cada Secretaria de Educação.

A criação deste produto educacional vem de encontro às necessidades dos professores que ensinam matemática em língua inglesa em escola públicas bilíngues ou interculturais e busca apresentar a metodologia CLIL como uma ferramenta útil e inovadora para o planejamento de aulas, que consiste em combinar o conteúdo, representado pelas competências e habilidades exigidas, com a aprendizagem da língua inglesa através de abordagens culturais e interdisciplinares.

Essas aulas tem como objetivo tornar o ambiente da sala de aula um lugar de aprendizagem completo, formando cidadãos cada vez mais capacitados para o futuro, que compreendem a importância e a aplicação da matemática, além de estarem preparados para o mundo globalizado com a fluência na língua inglesa.

“A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.”(Art. 205 da Constituição Federal)

É importante salientar que o conjunto de aulas aqui apresentadas são uma sugestão de como aplicar a metodologia CLIL e podem ser adaptadas de acordo com as necessidades do professor e as especificidades de cada turma.

É relevante citar também a possibilidade desse material servir como exemplo para a aplicação da metodologia CLIL em outras disciplinas do Ensino Básico, até mesmo para outra língua que não seja a inglesa, já que nele é possível analisar a integração entre a disciplina específica, a cultura global e as quatro

habilidades indispensáveis para a aprendizagem de uma segunda língua, leitura, escrita, fala e compreensão auditiva.

SUMÁRIO

1. A Metodologia CLIL	7
2. Objetivos, Competências e Habilidades	10
3. Aulas de Matemática em Língua Inglesa Baseadas na Metodologia CLIL:	14
AULA 1 - As 7 Maravilhas do Mundo Moderno <i>(The 7 Wonders of the Modern World)</i>	15
AULA 2 - Probabilidade com o Baralho <i>(Probability with Playing Cards)</i>	22
AULA 3 - Explorando o mapa da Espanha <i>(Exploring the map of Spain)</i>	28
4. Referências	34
ANEXOS:	36
I. Material de Apoio para a Aula 1	
II. Material de Apoio para a Aula 2	42
III Material de Apoio para a Aula 3	52

1. A METODOLOGIA CLIL

A metodologia CLIL, Aprendizagem Integrada de Conteúdo e Linguagem, consiste em uma abordagem educacional contemporânea que visa integrar o ensino de conteúdos curriculares específicos com o aprendizado de uma língua não nativa. Essa metodologia promove o desenvolvimento de habilidades linguísticas e cognitivas, além de fomentar a compreensão intercultural.

A relevância do CLIL reside na sua capacidade de proporcionar aos alunos uma experiência de aprendizado diferenciada e completa, na qual o conteúdo e a língua estrangeira são ensinados de forma integrada e com uma contextualização cultural, desafiando tanto alunos quanto educadores ao combinar metodologias de ensino de conteúdo e de segunda língua. Uma implementação bem sucedida dessa metodologia requer dedicação do professor da disciplina já que demanda que ele adquira todo o vocabulário necessário para lecionar na segunda língua, além de pensar nas conexões culturais com o conteúdo.

Os quatro pilares do CLIL são conteúdo, comunicação, cognição e cultura, que se interligam para enriquecer o aprendizado tanto no aspecto do conteúdo quanto da linguagem. O conteúdo abrange diversas disciplinas curriculares, enquanto a comunicação visa encorajar a interação dos alunos e a produção oral e escrita na língua alvo. A cognição promove habilidades como raciocínio, criatividade e avaliação, e a cultura busca enriquecer o conhecimento, desenvolver atitudes positivas e a conscientização sobre a cidadania local e global.

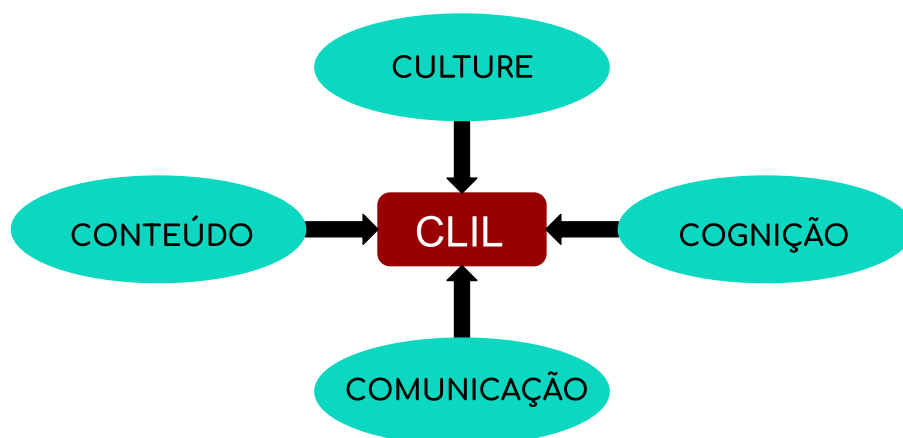


Figura: Os quatro C's do CLIL
Fonte: Criada pela autora (2024)

A Taxonomia de Bloom é uma teoria de aprendizagem indispensável no planejamento das aulas baseadas na metodologia CLIL pois auxilia na definição dos objetivos de aprendizagem. A escala hierárquica do domínio cognitivo da taxonomia é dividida em seis níveis: memorizar, compreender, aplicar, analisar, avaliar e criar, partindo do mais simples ao mais complexo. Cada nível deve ser dominado antes que o aluno prossiga para o próximo e dessa forma o professor pode definir as atividades de forma gradativa, partindo do nível mais simples, onde os alunos devem recordar os fatos e definições trabalhados, praticando através de atividades que incluem listar ou definir termos até o nível mais complexo, onde o aluno consolida todo conhecimento absorvido nos níveis anteriores e torna-se capaz de criar um novo todo de pontos de vistas, ideias e produções.

Os verbos mais utilizados para cada um dos níveis do domínio Cognitivo da Taxonomia de Bloom e que auxiliam o professor a definir os objetivos da aprendizagem são:

CRIAR

Construir, Mudar, Combinar, Compilar, Compor, Criar, Desenvolver, Projetar, Fazer, Formular, Imaginar, Melhorar, Inventar, Refazer, Modificar, Planejar e Produzir.

AVALIAR

Estimar, Julgar, Criticar, Defender, Comparar, Arbitrar, Concluir, Decidir, Determinar, Interpretar, Explicar, Contestar, Avaliar, Justificar, Provar, Recomendar, Concordar, Priorizar e Deduzir.

ANALISAR

Analisar, Classificar, Categorizar, Comparar, Contrastar, Descobrir, Dissecar, Dividir, Examinar, Inspeccionar, Simplificar, Pesquisar, Testar, Distinguir, Inferir e Diferenciar.

APLICAR

Aplicar, Escolher, Dramatizar, Explicar, Generalizar, Julgar, Organizar, Pintar, Preparar, Produzir, Selecionar, Mostrar, Esboçar, Escolher, Desenvolver, Entrevistar, Planejar, Eleger, Solucionar, Utilizar, Modelar e Identificar.

COMPREENDER

Classificar, Defender, Demonstrar, Distinguir, Explicar, Ampliar, Parafrasear, Representar, Reafirmar, Reescrever, Mostrar, Resumir, Ilustrar, Indicar, Relacionar, Interpretar, Combinar e Traduzir.

MEMORIZAR

Escolher, Descrever, Definir, Identificar, Omitir, Recitar, Reconhecer, Selecionar, Memorizar, Nomear, Rotular, Listar, Localizar e Combinar.

Uma aula de matemática baseada na metodologia CLIL exige domínio na língua estrangeira e criatividade para a confecção de materiais autênticos. Esses materiais devem interligar os conceitos matemáticos com a aprendizagem do inglês e são dificilmente encontrados na literatura, desse modo, a professor precisa na maioria das vezes criar seu próprio material, confeccionando-os de uma forma que contemplem os objetivos da aprendizagem, conectem os quatro C's do CLIL, favoreçam a comunicação e tornem os alunos o centro do processo.

2. OBJETIVOS, COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

O planejamento de uma aula CLIL pode parecer complexo mas traz diversas vantagens para os alunos das escolas públicas interculturais ou bilíngues, pois oferece ao aluno uma experiência de aula completa que inclui a introdução de novos conteúdos através da segunda língua, enriquecendo o vocabulário, aumentando a capacidade de comunicação e o raciocínio lógico, além de auxiliar na formação de um cidadão consciente e informado.

Os planejamentos das aulas de matemática baseadas na metodologia CLIL propostas a seguir incluem:

- Os objetivos de aprendizagem do conteúdo e cognição.
- Os resultados culturais a serem alcançados para enriquecer o conhecimento do aluno.
- A comunicação na língua estrangeira que será necessária para a aprendizagem, durante e através dela.
- Os materiais a serem utilizados na aula.
- O tempo de duração de cada atividade que será realizada na aula.
- Os instrumentos de avaliação.

As aulas propostas por esse Produto Educacional tem por objetivo beneficiar professores e alunos da educação pública, levando-os a compreender a necessidade de uma interação vantajosa com o mundo globalizado e incentivando a inserção dos mesmos nessa nova realidade interconectada e universal.

Nas escolas interculturais e bilíngues no Brasil, o currículo das disciplinas deve contemplar tanto o currículo brasileiro, quanto o estrangeiro. Neste caso especificamente é preciso contemplar tanto as competências gerais, quanto as competências e habilidades específicas da Matemática da BNCC.

As competências gerais presentes na BNCC abordadas nas aulas sugeridas neste trabalho são as 1, 2, 3 4 e 6¹², de acordo com a numeração do documento, explicadas detalhadamente abaixo:

1. **Conhecimento:** Valorização dos fatos físicos, sociais, culturais e digitais para compreensão da realidade e colaboração para um sociedade mais justa.

¹² Todas as competências e habilidades da BNCC podem ser visualizados no documento disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

2. **Pensamento Científico Crítico e Criativo:** Exercício da curiosidade intelectual, investigação e reflexão para a criação de soluções com base no conhecimento de diversas áreas.
3. **Repertório Cultural:** Valorização das diversas manifestações artísticas e culturais, desde as locais até as mundiais.
4. **Comunicação:** Utilização de diferentes linguagens: verbal, cultural, visual, sonora, digital, artística, matemática e científica.
6. **Trabalho e Projeto de Vida:** Valorização da diversidade de saberes e vivências culturais e apropriação de conhecimentos e experiências que possibilitam o entendimento das escolhas dos alunos.

As competências específicas da Matemática, regidas pelo BNCC, serão separadas de acordo com o tema de cada aula sugerida.

A primeira aula irá explorar a importância geral dos Números Reais como elementos indispensáveis para descrever, quantificar e medir. As competências e habilidades dessa aula em concordância com o BNCC, juntamente com seus códigos de referência serão descritas a seguir:

Competências Específicas da Matemática:

1¹³. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

As habilidades juntamente com seus respectivos códigos de referência na BNCC são:

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas

¹³A numeração das competências está de acordo com a numeração original no documento da BNCC.

representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF09MA01) Ampliar os campos numéricos, reconhecendo a necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta e identificando números reais em suas diferentes representações.

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Já a segunda aula deste produto educacional abordará o estudo da Probabilidade como uma importante ferramenta para a tomada de decisões e análise de dados.

Competências específicas da Matemática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades:

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Na terceira e última aula deste trabalho serão abordados tópicos relevantes referentes à Geometria Analítica, muitas vezes negligenciados na Educação Básica e que são importantes para a compreensão espacial e o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno.

Competências Específicas da Matemática:

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

3. AULAS DE MATEMÁTICA EM LÍNGUA INGLESA BASEADAS NA METODOLOGIA CLIL

A seguir serão apresentadas três aulas de matemática em Língua Inglesa que exemplificam como a metodologia CLIL pode ser aplicada de forma prática e eficaz através de um viés cultural e significativo, onde cada aula foi cuidadosamente planejada para promover tanto o conhecimento matemático quanto o desenvolvimento linguístico necessários para a formação do cidadão globalizado.

As etapas descritas em cada uma das aulas foram compiladas em um plano de aula detalhado em Língua Inglesa. O plano de aula contempla os 4 C's do CLIL, segue os níveis do Domínio Cognitivo da Taxonomia de Bloom, especifica o vocabulário e as construções gramaticais necessárias para uma comunicação clara, descreve também, passo a passo, as atividades e finaliza com as formas de avaliação.

AULA 1

As 7 Maravilhas do Mundo Moderno

(The 7 Wonders of the Modern World)

O objetivo desta aula é mostrar a importância dos números reais no cotidiano para descrever, quantificar ou medir, além de explorar a classificação dos números de acordo com seus respectivos conjuntos numéricos (dos naturais até os reais) e a prática de localizar os números na reta numérica.

A aula possui 4 etapas: Apresentação, Leitura, Classificação e Ordenação.

ETAPA 1: Na primeira etapa, o professor deve perguntar aos alunos se eles conhecem as 7 Maravilhas do Mundo Moderno. (*“Have you ever heard about the seven wonders of the modern world?”*). Eles começam a listar os principais pontos turísticos mundiais e conforme forem acertando cada uma das maravilhas o professor vai escrevendo no quadro até completarem as sete. Caso fique alguma das 7 maravilhas faltando, o professor pode fornecer pistas do país em que estão localizados ou da aparência arquitetônica deles.

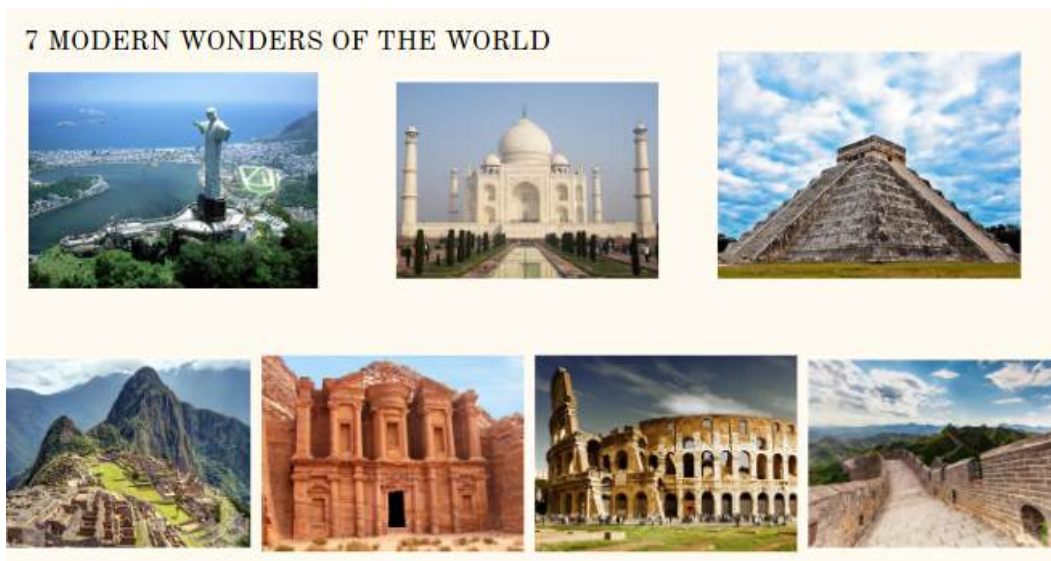


Figura: Seven Modern Wonders of the World

Fonte: Montagem criada pela autora (2024)

ETAPA 2 : Em seguida o professor separa a turma em grupos com 4 alunos cada e distribui um cartão para cada aluno com uma informação numérica

importante sobre alguma das 7 Maravilhas do Mundo Moderno, mas sem especificar exatamente qual delas.



Foto: Sugestão de como confeccionar os cartões da Aula 1

Fonte: Foto da Autora (2024)

Cada grupo tem aproximadamente 1 minuto para que cada aluno faça a leitura e tente descobrir qual das 7 Maravilhas o cartão descreve. Caso a turma possua algum aluno com necessidades especiais esse tempo pode ser estendido de acordo com a acomodação de cada um.

Após esse momento, os alunos lerão seus cartões, um a um, em voz alta para que a turma também tente adivinhar o lugar cuja informação foi lida pelo colega. O professor tem uma lista com todas as respostas e fornece fita adesiva para que o aluno coloque o cartão junto com a Maravilha do Mundo Moderno em questão, já que todas as fotos delas estarão projetadas no quadro.

É importante neste momento que o professor corrija sutilmente a pronúncia das palavras após a leitura completa de cada aluno, relendo

pausadamente para a turma em voz alta e explicando novos vocábulos se necessário.

ETAPA 3: O professor perguntará sobre os números usados nas descrições das 7 Maravilhas e permitirá que os alunos relatem sobre as frações, decimais, raízes quadradas e inteiros que estavam nos cartões representando quantidades, medidas e também porcentagens.

Aqui é necessário que o professor explique a composição de cada conjunto numérico: *Natural, Whole, Integer, Rational, Irrational e Real*. Explicitando as especificidades de cada um deles e apresentando um pouco da história por trás do surgimento de cada um deles. Essa parte pode estar nos slides, mas caso a escola não possua equipamento projetor pode ser narrada pelo professor.

Real numbers may be classified as:		
Natural Numbers	Counting numbers from one to infinity.	1, 2, 3, ...
Whole Numbers	Counting numbers from zero to infinity.	0, 1, 2, 3, ...
Integers	Positive and negative numbers (excluding fractions) and zero.	... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Rationals	Integers, fractions, terminating and repeating decimals.	... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... $\frac{1}{4}$, 0.5 $\frac{1}{7}$, 0.142857142857...
Irrationals	Non-terminating and non-repeating decimals.	3.14159265359... π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

Figura: Classification of Real Numbers

Fonte: Jenny Eather 2014

Nesse momento, o professor projeta ou desenha o diagrama de Venn no quadro e solicita que os alunos, um de cada vez, escolham um cartão, (no verso de cada cartão tem o número ampliado) e coloque o cartão, colando com fita adesiva, dentro do respectivo conjunto de cada número.

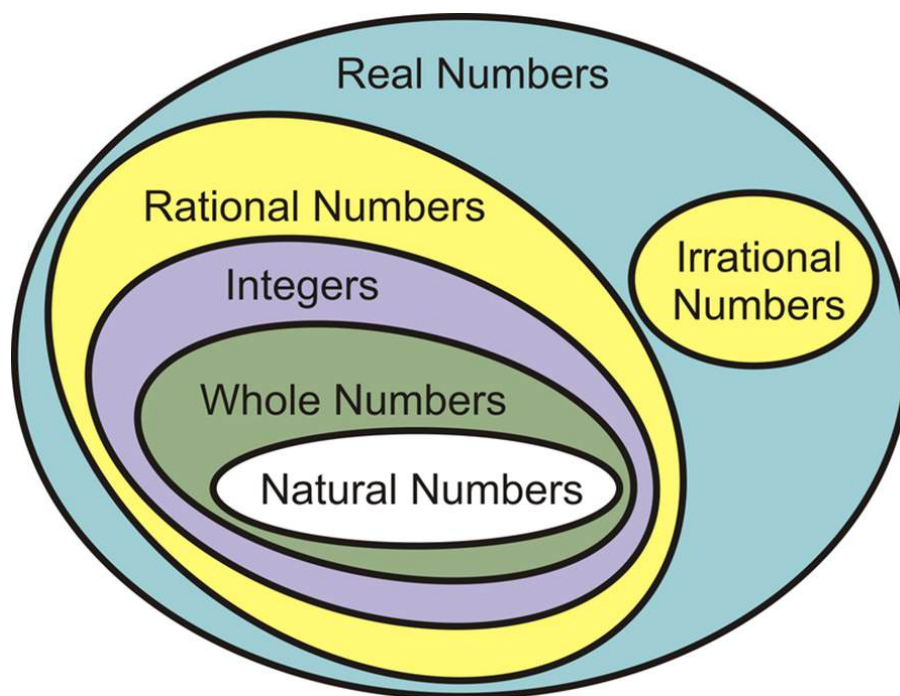


Figura: Real Numbers in the Venn Diagram

Fonte: CK-12 Foundation. Disponível em:

<http://image.tutorvista.com/cms/images/38/positive-and-negative-number-line.jpg>; Acessado em:

13 de Setembro de 2024

ETAPA 4: A última etapa da atividade consiste na ordenação dos números reais com o auxílio na reta numérica Real. Nesta etapa os alunos são separados em grupos com 4 alunos cada e recebem uma folha com uma lista contendo diversos números, incluindo alguns números utilizados na atividade, e uma reta sem números. Eles precisam transformá-la em uma reta numérica, colocando todos os números na reta de maneira ordenada. (Em anexo)

O professor pode sugerir outros números e fazer um exemplo com os alunos antes para que aprendam a ordenar os números, mesmo quando estão em diferentes formas (decimais, frações, dízimas e radicais).

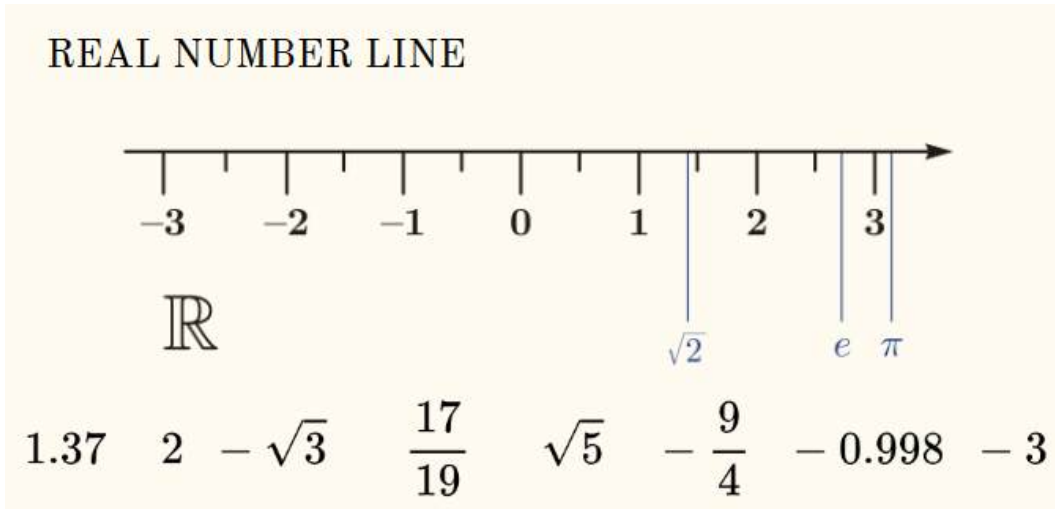


Figura: Sugestão de Números Reais para localização na Reta Numérica.

Fonte: Autora 2025

Para finalizar, cada aluno deve compartilhar alguma informação numérica importante sobre algum ponto turístico que ele já tenha visitado. Os alunos podem pesquisar a informação durante a aula se tiverem acesso à internet ou o professor pode recomendar como uma atividade para a casa e iniciar a aula seguinte com as apresentações de cada aluno.

As etapas acima descritas foram compiladas em um plano de aula detalhado em Língua Inglesa contemplando os 4 C's do CLIL, especificando o vocabulário e as construções gramaticais necessárias para uma comunicação clara, além da descrição das atividades e as formas de avaliação.

LESSON PLAN 1

THE SEVEN WONDERS OF THE MODERN WORLD

Name:	Content of Lesson: Numerical Sets	
Date:	Length: 50 minutes	Class: Math

Content/Cognition Learning Outcomes (content combined with thinking skills)

By the end of the lesson(s), students will be better able to:

- Classify numbers into a Venn diagram.
- Identify the numerical sets.
- Assess the various options to write the same number.
- Rank numbers using a number line.
- Compare numbers, fractions, roots, decimals.

Culture Outcomes (to raise awareness of cultures)

By the end of the lesson(s), students will be better able to:

- Recognize the importance of preserving historical heritage.
- Identify attractions from different cultures.
- Share their experiences on travel.

Communication

<p>Language of learning: <i>(Key Vocabulary)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Natural ● Whole ● Integer ● Rational ● Negative ● Irrational ● Real ● Numerical sets ● Wonders of the World 	<p>Language for Learning: <i>(Functions & Structures)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Classifying: “This number belongs to the set of numbers.” ● Asking each other: “Is it a counting number?”, “Is it a decimal end/repeat number?”, “Is the number a fraction?”. ● Debat to find the wonder of the world matching the tips of the group. 	<p>Language through Learning <i>(Incidental & Revisited (Recycled) Language During the Lesson)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Statistic ● Numbers ● Fractions ● Decimals ● Percentages ● Geometry ● Shapes
---	---	--

Materials

- Cards with data about the 7 wonders of the modern world.
- Number Line.

- A large Venn diagram.
- Pictures of the 7 wonders of the modern world.

Teaching/Learning Activities

5 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher introduces the process of choosing the 7 Wonders of the Modern World and explains about the importance of numbers.
5 minutes	Groups	<ul style="list-style-type: none"> ● Have Ss groups discuss in groups to discover the 7 wonders of the world that they have the specific information.
10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Have Ss groups read and match the specific information with its Wonder.
10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Introduces numerical sets and Venn diagram.
5 minutes	Individual	<ul style="list-style-type: none"> ● Students have a number about one of the 7 wonders of the world and need to find the set according to the number property.
5 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher orders some examples of numbers on the number line.
5 minutes	Individual	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students localize numbers on the number line.
5 minutes	Groups	<ul style="list-style-type: none"> ● Have Students share to their group a fantastic place that they have already traveled and one important numerical information about that place.

Instruments for Assessment (how you will measure if outcomes met)

- Teachers monitor group and individual activities.
- Ss successfully fill out the number line.
- Ss interaction with partners/groups.
- Ss participation in whole class discussions.
- Ss successfully completed the Venn diagram.

AULA 2

Probabilidade com o Baralho

(Probability with Playing Cards)

Muitos professores e livros de matemática utilizam os baralhos em exemplos nas aulas sobre probabilidade, mas qual é a história por trás do baralho? Onde ele foi inventado? Por que ouros, copas, espada e paus? Por que o Rei, a Rainha e o Valete?

Embora a maioria dos alunos já tenha jogado algum jogo utilizando o baralho, muitas são as perguntas que podem surgir quando o professor fomenta a discussão acerca da invenção do baralho e sua utilidade lúdica e educativa.

O objetivo desta aula é apresentar para os alunos o conceito de probabilidade de uma maneira significativa através do uso do baralho e de sua história ao longo dos séculos.

A aula possui 4 etapas: História, Conceito, Prática e Criação.

ETAPA 1: Na primeira etapa desta atividade o professor pergunta ao aluno se ele já jogou alguma vez qualquer jogo usando o baralho. O professor pode escolher alguns alunos para que compartilhem essa informação, indicando o nome do jogo escolhido por eles. Após este momento, o professor pergunta aos alunos se eles sabem como as cartas de baralhos surgiram, por que os naipes são ouro, paus, espada e copas?, por que o Rei, a Rainha e o Valete?

Caso algum aluno saiba alguma dessas respostas ele pode compartilhar com a turma, caso isso não ocorra, o professor dividirá a turma em grupos, cada um com quatro alunos em média. Uma forma prática de fazer essa divisão e evitar os mesmos grupos de sempre, por afinidade, é associando uma letra do alfabeto para cada grupo e pedir aos alunos que memorize a letra que o professor atribuiu para cada um. Por exemplo, se forem 5 grupos, o professor distribuirá aleatoriamente as letras A, B, C, D e E para os alunos, ao final ele pede para que todos aqueles que receberam a letra A fiquem juntos, após o grupo A ser montado ele chama os alunos que receberam a letra B e assim por diante até que os cinco grupos sejam formados.

Cada grupo receberá uma informação importante sobre a história da criação do baralho, porém as frases estão incompletas e as palavras chave estão na

mesa de cada grupo. O grupo deve ler e completar as frases. Assim que todos os grupos tiverem concluído a tarefa cada grupo compartilhará com os demais, fazendo a leitura em voz alta. É importante que o professor verifique se as palavras foram corretamente encaixadas nas frases antes da leitura em voz alta para a turma.

ETAPA 2: Após este momento, o professor saca um baralho com 52 cartas, seleciona um aluno de cada grupo e brinca um pouco com a turma dizendo que se eles tirarem o Rei de Ouro ganharão um ponto extra. Os alunos do ensino médio já possuem uma noção de probabilidade e ajudarão o professor na apresentação desse conceito, juntamente com o vocabulário específico referente às probabilidades obtidas para um determinado evento. No caso do Rei de Ouro, dirão que será improvável, mas se fosse uma carta com um qualquer número entre 2 e 10 seria muito provável que ocorresse.

O professor então introduz o conceito de probabilidade explicitando o espaço amostral, diferenciando os eventos e com alguns exemplos usando o baralho. Após isso, é necessário esclarecer a diferença entre eventos mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos, além de probabilidade condicional. Ao final desta etapa os alunos preenchem a escala de probabilidade que vai de impossível a certo de que o evento ocorra.

ETAPA 3: Nesta etapa os alunos resolvem uma lista de exercícios previamente planejados com a temática do baralho. Eles podem discutir sobre as questões, mas cada aluno deve fazer sua tarefa individualmente. A ideia aqui é identificar se eles compreenderam bem os conceitos apresentados na etapa 2. Para verificar o resultado de cada grupo, o professor pode trocar as folhas de exercícios dos alunos, para que cada um não corrija sua própria atividade e sim de um colega de turma, enquanto voluntários são selecionados para resolverem cada uma das questões no quadro auxiliando na correção.

ETAPA 4: Nesta parte, cada grupo precisa pensar e criar uma questão para cada um dos demais grupos, se forem 5 grupos por exemplo, no total eles deverão criar 4 questões sobre probabilidade envolvendo o baralho que ainda não

tenham usadas na atividade, cada uma escrita em um cartão diferente com as respostas separadas em uma lista de respostas.

Pode ser que neste momento os alunos criem questões mais complexas, que eles ainda não tenham as ferramentas necessárias para resolver e é necessário que o professor esteja circulando pelos grupos para direcioná-los melhor ou até mesmo para manter essas questões como um aquecimento para os conteúdos seguintes.

Cada um dos cartões irá para os outros grupos de modo que todos grupos tenham um cartão que foi confeccionado por cada grupo. Eles discutem as perguntas e devem responder utilizando respostas completas de acordo com o vocabulário adequado para cada probabilidade obtida, como por exemplo: É improvável tirar dois reis seguidos do deck de cartas sem reposição pois a probabilidade de que isso ocorra é de 0,4%.

LESSON PLAN 2

PROBABILITY AND PLAYING CARDS

Name:	Content of Lesson: Probability	
Date:	Length: 100 minutes	Class: Math

Content/Cognition Learning Outcomes

By the end of the lesson(s), students will be better able to:

- Determine the probability of a certain event happening.
- Differentiate mutually and not mutually exclusive events.
- Understand the difference between independent and dependent events.
- Discuss the chance that an event will occur.
- Compare probabilities.
- Rank according to the probability scale.

Culture Outcomes

By the end of the lesson(s), students will be better able to:

- Analyze the socio-political aspects of the creation of playing cards.
- Understand the importance of using probability as a useful tool in games.
- Share their experiences on playing cards.

Communication

<p>Language of learning: <i>(Key Vocabulary)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Probability ● Dependent / Independent Event ● Mutually Exclusive / Disjoint ● Queen / King / Jack / Ace ● Face / Number Cards ● Impossible / Certain ● Unlikely / Likely ● Even Chance 	<p>Language for Learning: <i>(Functions & Structures)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Asking each other: “What is the probability of getting a/an <u>(Event involving playing cards)</u>?” ● Making conclusions: “This event is <u>(Likely / Unlikely/ Even chance/ Impossible / Certain)</u> to occur.” ● Differentiating events: “These events are <u>(non mutually exclusive/ disjoint).</u>” 	<p>Language through Learning <i>(Incidental & Revisited (Recycled) Language During the Lesson)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Statistic ● Numbers ● Fractions ● Decimals ● Percentages
---	---	--

Materials

- Cards with data about the Playing Cards history
- Probability Scale
- A standard deck of Playing Cards (without jokers)
- Worksheet
- Paper

Teaching/Learning Activities

Teaching/Learning Activities		
10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher starts the class asking: “Have you ever played cards?”” Which game?” while students share their experiences with playing cards.
10 minutes	Groups	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students divide into groups of 4 to read the information about the history of the playing cards creation and fill key words in the blanks.
10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher selects one student from each group to pick a King of Diamonds and discusses with them the results.
20 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher introduces probability, giving some examples related to playing cards. Explains the difference between non mutually exclusive and disjoint events, Dependent and independent events, and exemplifying Compound Probability.
15 minutes	Groups	<ul style="list-style-type: none"> ● Have Ss complete the probability table involving playing cards.
10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher solves the questions with the class. Have students correct the probability table involving playing cards.
10 minutes	Groups	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students create questions involving not yet used with playing cards.
10 minutes	Individual	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students solve questions from the other group.
5 minutes	Individual	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students correct the answers of the questions they have created and give a score (Correct questions out of total.)

Instruments for Assessment

- Teacher monitors group and individual activities.
- Students successfully fill out the Playing Cards Probability Table.
- Students successfully fill out the Probability Scale.
- Group creation of questions about probability with Playing Cards.
- Group performance in solving questions.
- Students' interaction with groups.
- Students' participation in whole class discussions.

AULA 3

Explorando o mapa da Espanha

(Exploring the map of Spain)

Os primeiros mapas foram traçados por volta de 500 a.c. para auxiliar na navegação e na conquista de novos territórios. Antes mesmo da invenção da escrita o homem já desenhava nas paredes das cavernas por meio das pinturas rupestres com o objetivo de auxiliar os demais a encontrarem a caça. Os mapas são, então, uma representação gráfica, em escala reduzida de uma superfície parcial ou total da terra e representam a forma que o homem criou para se localizar no espaço.

Por esse motivo é importante que os alunos saibam interpretá-los, compreender as escalas no qual foram construídos e obter a distância aproximada entre dois lugares no mapa, sejam eles ruas, cidades ou até mesmo países.

Para essa aula é importante que os alunos tenham uma noção mínima de escala, já que o objetivo neste caso é introduzir a geometria analítica, abordada através do cálculo da distância entre dois pontos, ponto médio e equação do círculo.

As etapas dessa aula são: Turismo, Conceito, Prática e Criação.

ETAPA 1: Na primeira parte dessa aula os alunos são divididos em duplas, o professor neste caso pode escolher as duplas ou deixar que os alunos dividam-se livremente, isso vai variar de turma para turma, para que se mantenha o bom andamento da aula.

O professor inicia a aula projetando o mapa da Espanha ou caso não possua projetor com uma ampliação impressa do mapa, debatendo com os alunos sobre a importância dos mapas para a sociedade. No mapa da Espanha apresentado aos alunos estão destacadas 16 cidades: A Coruña, Oviedo, Palencia, Pamplona, Zaragoza, Salamanca, Madrid, Barcelona, Cáceres, Toledo, Cuenca, Valencia, Murcia, Almería, Málaga e Sevilha. Cada dupla recebe a descrição com nome e as fotos dos pontos turísticos das cidades em questão.

O número de fotos e pontos turísticos que cada dupla receberá vai depender do número de duplas formados em cada turma. São um total de 16 fotos

e 16 nomes de pontos turísticos, impressos separadamente. Cada dupla deverá descobrir a qual cidade(s) sua(s) foto(s) e ponto(s) turístico(s) pertence(m). Na primeira rodada eles relacionam as fotos com os pontos turísticos, e depois tentam adivinhar a cidade. O professor verifica os resultados e corrige-os caso haja necessidade.

ETAPA 2: Na segunda etapa, o professor instiga os alunos a descobrirem uma maneira de obter a distância entre duas cidades usando uma linha reta, ou um ponto ao meio do caminho entre duas cidades e também a comparar as distâncias entre elas. Como obter essa distância sem uma régua? É possível utilizar o sistema de coordenadas cartesianas como aliado?

Neste ponto da aula o professor escolhe duas cidades aleatoriamente, que não estejam na atividade obviamente, para mostrar que é possível aplicar o Teorema de Pitágoras para obter a distância, visto que ela é representada como a hipotenusa de um triângulo retângulo formado pelos pontos das cidades e a interseção das retas vertical e horizontal, generalizando a partir daí para qualquer dois pontos do plano. Além disso, através da revisão da congruência de triângulos é possível mostrar para os alunos como obter a fórmula do ponto médio.

Finalizando esta parte, através da fórmula da distância entre dois pontos é possível obter facilmente a equação do círculo, um conceito muito utilizado nesse contexto dos mapas, atualmente presente em diversos aplicativos onde é possível delimitar um raio de distância aceitável para pesquisas de produtos ou serviços.

ETAPA 3: Na terceira parte da aula os alunos simulam que vão viajar e que devem escolher uma das cidades da Espanha apresentadas no início da aula como destino, justificando suas escolhas, seja pelos pontos turísticos, clima ou beleza de cada uma. Em seguida, eles fazem a lista de exercícios juntos, encontrando as distâncias entre algumas delas, encontrando cidades que estão a meio caminho de outras duas e comparando distâncias.



STUDENT 1: _____ STUDENT 2: _____

Observe this map of Spain. Knowing that each square of the plane represents 45 kilometers, answer the questions below.

1) If you had to choose one of these cities to live in, which would you choose? Discuss with your friend about it.

Student 1: _____ Student 2: _____

2) Find the distance between the cities chosen in question 1: _____ kilometers.

3) Find the distance between Oviedo and Almería: _____ kilometers.

4) What is the closest city to Oviedo, A Coruña or Palencia?

5) If you are traveling from Salamanca to Valencia and intend to stop halfway, What is the nearest city? How many kilometers?

_____ is the nearest city. _____ kilometers

6) Which cities are less than 225 km from Madrid? HINT: Use the equation of the circle with center in Madrid and radius 225 km.

Figura: Atividade de Geometria Analítica envolvendo o Mapa da Espanha

Fonte: Autora (2024)

ETAPA 4: Nesta etapa os alunos têm aproximadamente 10 minutos para confeccionar seus próprios mapas a partir de um plano cartesiano contendo a malha quadriculada que será oferecido pelo professor. Eles precisam criar o nome do país e localizar seis cidades através das coordenadas cartesianas escolhendo a escala mais adequada. Além disso, ao final, eles precisam escolher cidades para formular 3 perguntas :

1. Qual a real distância entre (Cidade 1) e (Cidade 2) ?
2. Onde está localizada no mapa a metade do caminho entre (Cidade 3) e (Cidade 4) ?
3. Quem fica mais distante da (Cidade 1), (Cidade 5) ou (Cidade 6), quanto a mais?

Após essa parte, as duplas trocam seus mapas junto com a folha com as perguntas e respondem às perguntas feitas por outra dupla. O professor pode atuar nesse momento fazendo a diferenciação caso haja algum aluno com necessidades especiais. Ao final as duplas corrigem as questões e o professor fica com a atividade feita na etapa 3 como instrumento avaliativo a ser corrigido posteriormente.

LESSON PLAN 3

EXPLORING THE MAP OF SPAIN

Name:	Content of Lesson: Analytic Geometry (Introduction)	
Date:	Length: 100 minutes	Class: Math

Content/Cognition Learning Outcomes		
<p><i>By the end of the lesson(s), students will be better able to:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Determine the distance between two points on the coordinate plane. ● Find the midpoint coordinates. . ● Compare distances. ● Write the equation of a circle. 		
Culture Outcomes		
<p><i>By the end of the lesson(s), students will be better able to:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Understand the importance of maps for the development of society. ● Interpret political maps. ● Recognize the main cities of Spain. 		
Communication		
<p>Language of learning: <i>(Key Vocabulary)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Analytic Geometry ● Distance between two points ● Midpoint ● Halfway ● Equation of a circle ● Futher / Closer ● Scale 	<p>Language for Learning: <i>(Functions & Structures)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Recognizing cities of Spain: “<i>This photo is from (City 1)</i>”, “<i>This attraction is in (City 2)</i>”. ● Asking each other: “<i>What is the distance between (City 1) and (City 2) ?</i>” ● Defending their point of view: “<i>I prefer (City 1) than (City 2)</i>” ● Comparing distances: “<i>(City 1) is farther from (City 3) than (City 2)</i>”. ● Describing a circle: “<i>Circle with center (h, k) and radius r.</i>” 	<p>Language through Learning <i>(Incidental & Revisited (Recycled) Language During the Lesson)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Pythagorean Theorem ● Congruent Triangles ● Conversion of Units of Distance. ● Simplifying Radicals.

Materials

- Gridded Map of Spain.
- Posters with photos and attractions of Spanish cities.
- Worksheet
- Coordinate Plane
- Paper

Teaching/Learning Activities

10 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher starts the class by discussing the importance of maps.
10 minutes	Partners	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students divide into pairs to match photos in the first round and attractions in the second round to their respective Spanish cities.
20 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Introduce Analytic Geometry using Pythagorean Theorem to determine the distance between any two points, using congruence to determine midpoint and the distance between two points to define the equation of a circle.
15 minutes	Partners	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students solve the worksheet about distance between two points, midpoint and equation of a circle.
15 minutes	Whole Class	<ul style="list-style-type: none"> ● Teacher corrects the questions on the board.
15 minutes	Partners	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students create a map of an imaginary country on a grid with 6 cities and three questions with answers related to their map.
10 minutes	Partners	<ul style="list-style-type: none"> ● Have students exchange their maps and questions to solve the problems.
5 minutes	Partners	<ul style="list-style-type: none"> ● Have pairs correct each other's work.

Instruments for Assessment

- Teacher monitors pairs and individual activities.
- Ss successfully fill out the Activity.
- Ss interaction with partners.
- Ss participation in whole class discussions.

4. REFERENCIAS

ANDERSON, L., & KRATHWOHL, D. A. (2001). *Taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

COYLE, Do & HOOD, Philip & MARSH, David. *CLIL: Content and Language Integrated Learning*. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

HARGRAVE, Catherine Perry- *A History of Playing Cards and a Bibliography of Cards and Gaming*, Literary Licencing, 2012.

HOFFMANN, D. A., & HOFFMANN, I. *A história por trás das 7 maravilhas do mundo*. Repositório UNINTER

SPECTOR, Sam. *Spain: A Traveler's Guide to the Must See Cities in Spain!* Paperback, 2015.

VIANNA, Anelise Timotheo Moulin - *Matemática em Língua Inglesa para Escolas Públicas Interculturais Baseada na Metodologia CLIL* - Rio de Janeiro 2025. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ANEXOS

ANEXO I

Material de Apoio para a AULA 1

As 7 Maravilhas do Mundo Moderno

(The 7 Wonders of the Modern World)

MATERIAL DA ETAPA 2: Dicas das 7 Maravilhas (7 Wonders Tips)

Sugestão: Imprima e corte separadamente cada uma das dicas sobre as maravilhas do mundo moderno. Para uma maior durabilidade e uso em turmas futuras, plastifique esse material.

1. THE STRUCTURE SAT NEARLY **50,000** SPECTATORS.
2. THE LENGTH MEASURES **13,171** MILES AND CAN BE VIEW OF THE MOON.
3. **1.3** MILLION PEOPLE VISITED IT LAST YEAR, IT'S LOCATED IN THE MOUNTAINS OF SOUTH AMERICA.
4. IN **1812** A SWISS EXPLORER NAMED JOHANNES BURCKHARDT REDISCOVERED THIS WONDER.
5. THIS WONDER WEIGHTS **1145** TONS.
6. WAS A MAUSOLEUM COMMISSIONED IN **1632** FOR THE WIFE OF MUGHAL EMPEROR SHAH JAHAN.
7. THIS WONDER LIES **7,970** FEET ABOVE SEA LEVEL.
8. IF YOU WANT TO VISIT THIS WONDER YOU NEED TO BUY THE TICKET IN ADVANCE BECAUSE IF YOU LEAVE TO BUY THE SAME DAY OF THE VISIT YOU WILL BE SURPRISED WITH **0** TICKETS AVAILABLE.
9. WAS A MAUSOLEUM COMMISSIONED IN **1632** FOR THE WIFE OF MUGHAL EMPEROR SHAH JAHAN.
10. THE PRODUCTION COST OF THIS WONDER WAS ESTIMATED AT **1500** MILLION DOLLARS.
11. THIS WONDER IS MORE THAN **2,300** YEARS OLD AND WAS USED AS A FORTIFICATION.
12. IT WAS WITH OPENED ARMS AND RECEIVED **23.5%** OF THE VOTES TO BE ELECTED ONE OF THE 7 WONDERS OF THE WORLD.
13. TICKETS TO VISIT THIS PLACE COSTS **54.5** JD. AND YOU CAN SEE A

IMPRESSIVE NUMBER OF INCREDIBLE STRUCTURES CARVED INTO STONE.

14. LAY UNDISCOVERED BY WESTERN CIVILIZATION FOR **461** YEARS.

15. THE DIAGONAL OF THE BASE OF THIS WONDER MEASURES $2\sqrt{1529}$ METERS.

16. THE SQUARE BASE OF THIS WONDER OF MAYAN CULTURE MEASURES **55.3** M.

17. NEARLY **1/3** OF THIS WONDER DISAPPEARED WITHOUT TRACE.

18. THE CIRCUMFERENCE OF THIS WONDER IS **1230 π** FT.

7 MODERN WONDERS OF THE WORLD



7 Modern Wonders of the World

Fonte: Wikipedia - Montagem criada pela Autora (2024)

MATERIAL DA ETAPA 3: Diagrama de Venn (Venn Diagram)

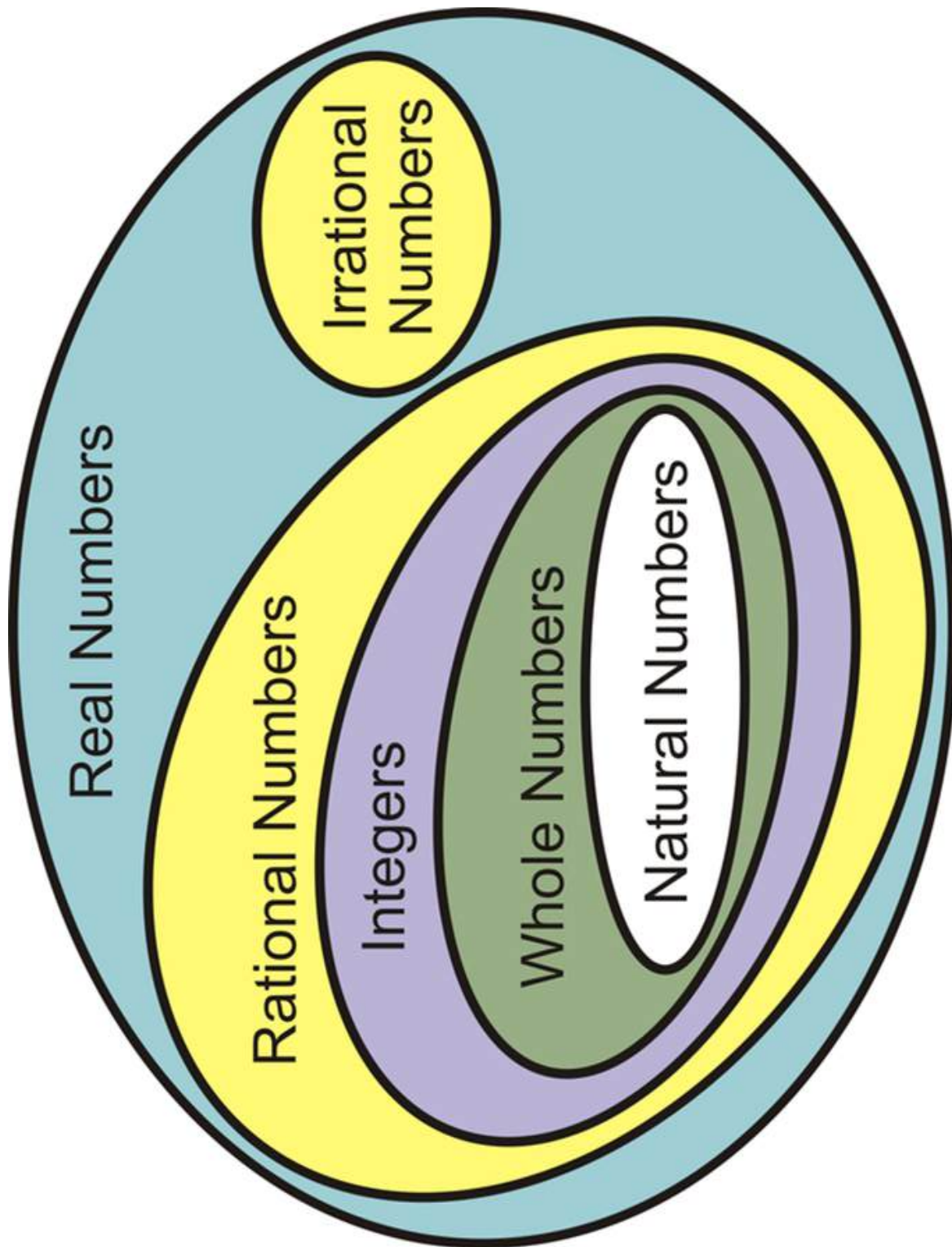


Figura: Real Numbers in the Venn Diagram

Fonte: CK-12 Foundation. Disponível em:

<http://image.tutorvista.com/cms/images/38/positive-and-negative-number-line.jpg>; Acessado em:

13 de Setembro de 2024

MATERIAL DA ETAPA 4: Reta Numérica (Number Line)

REAL NUMBERS

Name: _____ Date: _____

Localize each number below in the set and in the real number line. (Use glue and scissors)



- -2.67 $\sqrt{10}$ 0 $-\sqrt{83}$ $5.232323\dots$ 4 $\frac{1}{3}$ $-\frac{35}{6}$ -2π $\sqrt{49}$

ANEXO II

Material de Apoio para a AULA 2

Probabilidade com o Baralho

(Probability with Playing Cards)

ETAPA 1

1. There is a rich and _____ history of playing cards that has endured for centuries. It is unknown where playing cards were _____ created, but most _____ believe that they were created in Asia, specifically China. China was renowned for its _____ in paper and printing, which contributed significantly to the _____ of cards. Playing cards were utilized in China as far back as the Tang _____ in the 9th century.

Dynasty **fascinating** **innovations**
development **historians** **first**

2. Playing cards _____ from China into the rest of Asia, India, and Persia. Then they were spread to Egypt _____ of the Mamluks. The Mamluks were a _____ regime that ruled Egypt from the 13th _____ the 16th century. Traders and _____ introduced playing cards into Europe, particularly via the Italian and Iberian _____ in the late 14th century.

Peninsulas **travelers** **by the time**
through **powerful** **spread**

3. When playing cards arrived in Europe, they were _____ and frequently _____, and hence within the ambit of the affluent _____. When _____ demand increased, more affordable methods of production were _____, allowing more people to buy and play with playing cards. The _____ European record of playing cards was in the 1370s, and mentions in Bern and Florence.

popular

alone

expensive

earliest

discovered

hand-colored

4. The form of playing cards varied based on the _____. Italian and French cards, for example, used _____ like swords, cups, and coins, while German cards used acorns, _____, and hearts. The _____ suits we know today: spades, hearts, diamonds, and clubs _____ later. The suits likely _____ different aspects of society or nature, e.g., the _____ (spades), the church (hearts), merchants (diamonds), and peasants (clubs).

symbolized

evolved

modern

area

military

suits

leaves

5. The _____ cards (King, Queen, and Jack), are reputed to have got their names from European nobility and _____. The King represented the complete _____, the Queen was generally depicted as a symbol of power and _____, and the Jack or Knave was a minor nobleman or a _____. These were selected to represent the _____ status of the period.

Beauty	social	servant
Power	face	royalty

6. Playing cards have _____ much over the centuries. The improvement in _____ technology during the 19th century enabled mass production, lowering the _____ and enhancing accessibility. This resulted in the _____ use of playing cards by various social classes. Playing cards are now used for _____ games and are a popular source of entertainment _____.

Extensive	numerous	printing
numerous	cost	changed

7. Playing cards have also had a significant _____ impact. They have not only been used for _____ but also for _____ and narrative. Different artists have designed special and beautiful playing card decks, each _____ different themes and designs. Playing cards have also featured in literature and film, often _____ chance, destiny, or _____.

enigma

reflecting

symbolizing

gaming

cultural

art

8. The history of playing cards is the history of _____ and cross-cultural _____. Out of China, where the first forms are said to have come, the cards spread in all directions, becoming a part of many _____. Their _____ includes technology, art, and society, showing an _____ chapter in history that still _____ and inspires people today.

charms

Innovation

evolution

societies

contact

interesting

GABARITO

1. There is a rich and **fascinating** history of playing cards that has endured for centuries. It is unknown where playing cards were **first** created, but most **historians** believe that they were created in Asia, specifically China. China was renowned for its **innovations** in paper and printing, which contributed significantly to the **development** of cards. Playing cards were utilized in China as far back as the Tang **Dynasty** in the 9th century.
2. Playing cards **spread** from China into the rest of Asia, India, and Persia. Then they were spread to Egypt **by the time** of the Mamluks. The Mamluks were a **powerful** regime that ruled Egypt from the 13th **through** the 16th century. Traders and **travelers** introduced playing cards into Europe, particularly via the Italian and Iberian **peninsulas** in the late 14th century.
3. When playing cards arrived in Europe, they were **expensive** and frequently **hand-colored**, and hence within the ambit of the affluent **alone**. When **popular** demand increased, more affordable methods of production were **discovered**, allowing more people to buy and play with playing cards. The **earliest** European record of playing cards was in the 1370s, and mentions in Bern and Florence.
4. The form of playing cards varied based on the **area**. Italian and French cards, for example, used **suits** like swords, cups, and coins, while German cards used acorns, **leaves**, and hearts. The **modern** suits we know today—spades, hearts, diamonds, and clubs **evolved** later. The suits likely **symbolized** different aspects of society or nature, e.g., the **military** (spades), the church (hearts), merchants (diamonds), and peasants (clubs).
5. The **face** cards (King, Queen, and Jack), are reputed to have got their names from European nobility and **royalty**. The King represented complete **power**, the Queen was generally depicted as a symbol of power

and **beauty**, and the Jack or Knave was a minor nobleman or a **servant**. These were selected to represent the **social** status of the period.

6. Playing cards have **changed** much over the centuries. The improvement in **printing** technology during the 19th century enabled mass production, lowering the **cost** and enhancing accessibility. This resulted in the **extensive** use of playing cards by various social classes. Playing cards are now employed for **numerous** games and are a popular source of entertainment **globally**.

7. Playing cards have also had a significant **cultural** impact. They have not only been employed for **gaming** but also for **art** and narrative. Different artists have designed special and beautiful playing card decks, each **reflecting** different themes and designs. Playing cards have also featured in literature and film, often **symbolizing** chance, destiny, or **enigma**.

8. The history of playing cards is the history of **innovation** and cross-cultural **contact**. Out of China, where the first forms are said to have come, the cards spread in all directions, becoming a part of many **societies**. Their **evolution** includes technology, art, and society, showing an **interesting** chapter in history that still **charms** and inspires people today.

ETAPA 2 - Escala de Probabilidade (*Probability Scale*)

THE PROBABILITY SCALE

Match the chance of the event occurring according to each probability:



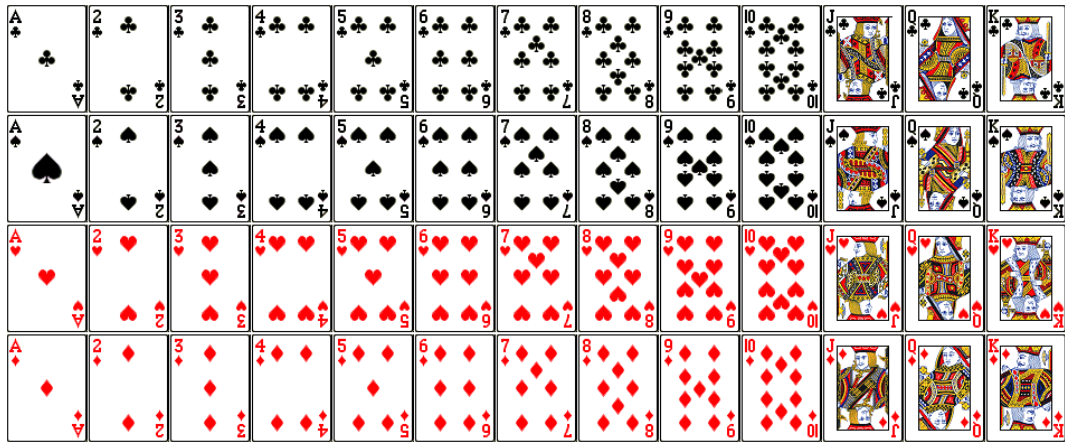
$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = 0.99 \quad P(C) = 0.01 \quad P(D) = \frac{2}{7}$$

$$P(E) = 0 \quad P(F) = 0.67 \quad P(G) = 1$$

ETAPA 3 - Atividade (Activity)

PROBABILITY WITH PLAYING CARDS

Consider a deck of 52 playing cards:



Determine the probability of getting each of the following events below:

EVENT	PROBABILITY		
	FRACTION	DECIMAL	PERCENTAGE
A Jack			
A Clubs			
A Spades greater than 6 (include face cards)			
A Queen			
Not a Face Card			
A King or Queen			
Seven of Spades			
A Face Card of Hearts			

(Write your answers as a fraction, decimal and percentage.) Now you are getting two cards from a deck of 52 playing cards **WITH REPLACEMENT**, determine the probability of getting each

EVENT	PROBABILITY		
	FRACTION	DECIMAL	PERCENTAGE
Diamonds then Clubs			
Two consecutive Queens			
Two consecutive Numbers			
Not a Face Card then a number greater than 6			
A black Ace then a 8 of Hearts			

event below. Finally you are getting two cards from the same deck but now **WITHOUT REPLACEMENT**. Determine the probability of getting each event below.

EVENT	PROBABILITY		
	FRACTION	DECIMAL	PERCENTAGE
Two consecutive Queens			
Two consecutive Numbers			
A black Ace then a 8 of Hearts			
Not a Face Card then a number greater than 6			

ANEXO III

Material de Apoio para a AULA 3

Explorando o mapa da Espanha
(Exploring the map of Spain)

ETAPA 1: Cidades na Espanha (*Cities in Spain*)

A Coruña



Tower of Hercules

The oldest functioning lighthouse in the world, built by the Romans.

Palencia



Palencia Cathedral

An impressive Gothic cathedral with a tall tower.

Oviedo



Metropolitan Cathedral of San Salvador

A beautiful Gothic cathedral that houses the Holy Shroud.

Pamplona



Plaza del Castillo

The heart of the city, known for its festivals and architecture.

Zaragoza



Basilica of Our Lady of the Pillar

One of the most important Marian shrines in the world.

Salamanca



Plaza Mayor

One of the most beautiful squares in Spain, surrounded by Baroque architecture.

Madrid



Royal Palace of Madrid

Although it is no longer the royal residence, it is one of the main tourist attractions.

Barcelona



Sagrada Família

A masterpiece by Antoni Gaudí, famous for its unique architecture.

Málaga



Alcazaba of Málaga

A palace fortress with gardens and sea views.

Seville



Seville Cathedral and Giralda

One of the largest Gothic cathedrals in the world, with the Giralda tower.

Almería



Alcazaba of Almería

A medieval fortress with stunning views of the city.

Murcia



Murcia Cathedral

A beautiful Baroque cathedral with a tall tower.

Valencia



City of Arts and Sciences

A modern complex with museums and parks.

Cuenca



Hanging Houses

Houses suspended over the Huécar River, one of Spain's most iconic images.

Toledo



Toledo Cathedral

An impressive Gothic cathedral with Renaissance details.

Cáceres



Historic Centre of Cáceres

A UNESCO World Heritage Site, known for its medieval walls.

ETAPA 2 : Mapa da Espanha com Coordenadas Cartesianas



Mapa da Espanha com Coordenadas Cartesianas

Fonte: Pinterest. Disponível em: <https://es.pinterest.com/pin/385620786835640407/>

Acesso em: 24 Nov. 2024

ETAPA 3: Atividade



STUDENT 1: _____ STUDENT 2: _____

Observe this map of Spain. Knowing that each square of the plane represents 45 kilometers, answer the questions below:

1) If you had to choose one of these cities to live in, which would you choose? Discuss with your friend about it.

Student 1: _____ Student 2: _____

2) Find the distance between the cities chosen in question 1: _____ kilometers.

3) Find the distance between Oviiedo and Almería: _____ kilometers.

4) What is the closest city to Oviiedo, A Coruña or Palencia?

5) If you are traveling from Salamanca to Valencia and intend to stop halfway, What is the nearest city? How many kilometers?

_____ is the nearest city. _____ kilometers

6) Which cities are less than 225 km from Madrid? HINT: Use the equation of the circle with center in Madrid and radius 225 km.

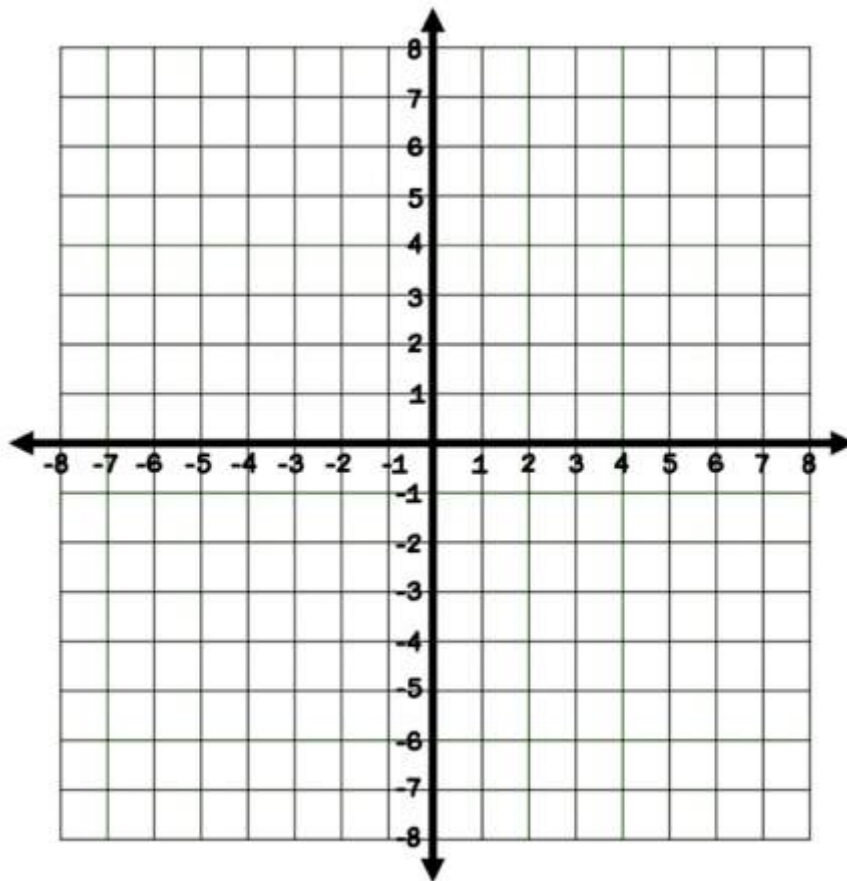
ETAPA 4: Criação e Aplicação

STUDENTS: _____

Use the coordinate plane below to create your own Country with six cities represented by cartesian coordinates. Choose the most appropriate scale.

MAP OF _____

(Write here the name of the country you created)



Scale 1: _____ km

Created by: _____ and _____

Respondents: _____ and _____

EXPLORING THE MAP OF _____

(Write here the name of the country you created)

Using Distance Formula, Midpoint Formula and the Equation of a Circle answer the following questions:

1. What is the distance between _____ and _____?
(City 1) (City 2)

(Give your answer in kilometers)

2. Where is halfway between _____ and _____ located on the map?
(City 3) (City 4)

3. Which is furthest from _____, _____ or _____?
(City 1) (City 5) (City 6)

How much further away?

(Give your answer in kilometers)

4. Give an inequality that represents the location of all cities that are less than 500 km from _____.
(City 4)