



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional**

EMILDO MOTHÉ RIBEIRO FILHO

**CONTEÚDOS DIGITAIS PARA O
ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS
RELATIVOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Orientador:
Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende**

**UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE**

NITERÓI, 2025

EMILDO MOTHÉ RIBEIRO FILHO

**CONTEÚDOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS
RELATIVOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada por **Emildo Mothé Ribeiro Filho** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador(a): Wanderley Moura Rezende

Niterói
2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

R484c Ribeiro Filho, Emildo Mothé
Conceitos Digitais para o Ensino de Números Inteiros
Relativos na Educação Básica / Emildo Mothé Ribeiro Filho.
- 2024.
279 f.

Orientador: Wanderley Moura Rezende.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal
Fluminense, Niterói, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Números Inteiros Relativos.
3. Conteúdos Digitais. 4. Sequência Didática. 5. Produção
intelectual. I. Rezende, Wanderley Moura, orientador. II.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e
Estatística. III. Título.

CDD - XXX

EMILDO MOTHÉ RIBEIRO FILHO

**CONTEÚDOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS
NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada por **EMILDO MOTHÉ RIBEIRO FILHO** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Aprovada em: 06/10/2025

Banca Examinadora

Prof. Wanderley Moura Rezende - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Vinicius Mendes Couto Pereira - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof.^a Cristiane de Mello (UNIRIO) - Membro

Doutor – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

**NITERÓI
2025**

DEDICATÓRIAS

Dedico esta dissertação à minha família, base de tudo que sou.

Aos meus pais, pelo exemplo de dedicação, esforço e integridade. Por me ensinarem o valor do conhecimento, da honestidade e por me incentivarem sempre a estudar desde os primeiros passos.

Aos meus filhos pela paciência em todos os momentos que não estive presente.

Ao meu marido, pelo incentivo e paciência em meus momentos de dificuldade.

Ao meu orientador por aceitar como seu orientando em meio a tanta turbulência, pela paciência e dedicação em cada ensinamento. Não tenho nem palavras para expressar minha gratidão.

A todos que sempre torceram por mim, primos, amigos e tios. Vocês foram essenciais por estarem sempre dispostos a ouvir minhas lamentações. Obrigado por todo o apoio.

AGRADECIMENTOS

A jornada do mestrado foi repleta de desafios, aprendizados e conquistas. Chegar até aqui não teria sido possível sem o apoio de muitas pessoas, às quais sou profundamente grato.

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força, sabedoria e saúde para seguir adiante mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Wanderley Moura Rezende, minha sincera gratidão pela paciência, dedicação, incentivo constante e pelas valiosas contribuições acadêmicas e humanas que enriqueceram esta dissertação.

A professora Dirce Ueso Pesco, Coordenadora do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da UFF pela dedicação com o curso e por estar sempre presente.

Aos professores e colegas do PROFMAT-UFF, agradeço pelo convívio, pelas discussões produtivas e pelo ambiente de aprendizado colaborativo que tanto me ajudou a crescer.

Aos meus familiares, especialmente mãe, pai, irmãs, filhos e marido, meu amor e gratidão por acreditarem em mim, por entenderem minhas ausências e por sempre estarem ao meu lado com palavras de apoio e carinho.

Aos amigos e amigas que estiveram presentes em diferentes momentos dessa caminhada, oferecendo escuta nos dias mais cansativos, meu muito obrigado.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este sonho se tornasse realidade, deixo aqui meu mais sincero agradecimento.

Muito obrigado!

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ilustração do plano cartesiano.....	36
Figura 2: Folium de Descartes	36
Figura 3: Capa do livro <i>Matemática Bianchini: 7º Ano</i>	56
Figura 4: Capa do livro <i>SuperAção: Matemática 7º Ano</i>	59
Figura 5: Livro <i>SuperAção: Matemática 7º ano</i> página 68.....	61
Figura 6: Livro <i>SuperAção: Matemática 7º ano</i> página 69.....	62
Figura 7: Livro <i>SuperAção: Matemática 7º ano</i> páginas 286	63
Figura 8: Capa do Livro <i>Geração Alpha Matemática: 7º ano</i>	64
Figura 9: Recorte da página 46 do livro.....	66
Figura 10: Capa do livro <i>Matemática e Realidade</i>	66
Figura 11: Capa do livro <i>A Conquista da Matemática: 7º ano</i>	71
Figura 12: Logo do site PhET ao abrir um simulador.....	80
Figura 13: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Distância.....	81
Figura 14: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Distância.....	82
Figura 15: A esquerda, comparação de termômetros e à direita, comparação de alturas.....	82
Figura 16: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros.....	83
Figura 17: Simulador Reta Numérica: Inteiros.....	84
Figura 18: A esquerda, valor em um cofrinho; e à direita, temperatura em regiões do planeta.....	85
Figura 19: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros.....	85
Figura 20: Simulador Fichas, tela inicial.....	86
Figura 21: Simulador Patrimônio Líquido	87
Figura 22: Simulador Patrimônio Líquido	87
Figura 23: Logotipo do site do Geogebra	88
Figura 24: Ferramenta Adição e Subtração entre números inteiros.....	89
Figura 25: Visualização da atividade Adição de Números Inteiros	90
Figura 26: Tela inicial do Robô Linear.....	90
Figura 27: Ferramenta Números Inteiros.....	92
Figura 28: Ferramenta jogo Adição de Número Inteiro.....	93
Figura 29: Adição e Subtração de Números Inteiros	94
Figura 30: Multiplicação de Inteiros.....	95
Figura 31: Mapa das mesorregiões do Estado do Rio de Janeiro	114
Figura 32: Mapa do Estado do Rio de Janeiro destacando o município de Saquarema	115
Figura 33: Fachada da Escola Municipal analisada	115
Figura 34: Exemplo de cartão Plickers.....	118
Figura 35: Exemplos de posições de um aluno para responder as alternativas A, B, C e D, respectivamente.	118
Figura 36: Página inicial do aplicativo <i>Plickers</i>	119
Figura 37: Criando uma questão.....	119
Figura 38: Construção de questão no aplicativo Plickers	120
Figura 39: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers .	120
Figura 40: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers .	121
Figura 41: Questões propostas para avaliar a aula 1 usando o aplicativo Plickers.	121
Figura 42: Recorte de quatro telas com exemplos de posições relativas dos personagens para a tarefa Reta Numérica: Inteiros.....	123

Figura 43: Bloco 1: Atividade 1	124
Figura 44: Aluno manipulando Reta Numérica: Inteiros.	125
Figura 45: Atividade 2	126
Figura 46: Uso do exemplo temperatura, no simulador <i>Reta Numérica: Inteiros</i>	128
Figura 47: Avaliação 2 do Bloco 1	131
Figura 48: Avaliação 3 do Bloco 1	132
Figura 49: Desempenho individual na Avaliação 3	133
Figura 50: Alunos manipulando a ferramenta <i>Reta Numérica: Operações</i>	134
Figura 51: Avaliação 1: Adição de Números Inteiros	142
Figura 52: Variantes das respostas de uma pergunta usando emojis	143
Figura 53: Escala de classificação com quatro opções de escolha	144
Figura 54: Avaliação das Aulas 1 e 2	144

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Superação de obstáculos epistemológicos segundo o texto de Gleaser (1985)	32
Quadro 2: Listagem dos textos selecionados para a revisão.....	46
Quadro 3: Simulações e atividades encontradas no site do PhET Colorado	78
Quadro 4: Cronograma das atividades desenvolvidas na Escola	122
Quadro 5: Respostas das atividades 3 e 4 do bloco 1.....	127
Quadro 6: Respostas das atividades 5 e 6 do bloco 1.....	128
Quadro 7: Respostas das atividades 1 e 2.....	134
Quadro 8: Respostas para as perguntas das Atividades 3 e 4	136
Quadro 9: Respostas para as perguntas das Atividades 5 e 6	139
Quadro 10: Respostas para as perguntas da Atividade 7	140
Quadro 11: Respostas para as perguntas da Atividade 8	141

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: “Números de obstáculos superados” versus “Matemáticos citados por Glaeser em ordem cronológica”	33
Gráfico 2: Desempenho individual na Avaliação 2	132
Gráfico 3: Resultado do Bloco 1	145
Gráfico 4: Resultado do Bloco 2.....	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	- Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SAEB	- Sistema de Avaliação do Ensino Básico
PROFMAT	- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

RESUMO

Esta dissertação explora o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos na educação básica, abordando tanto sua trajetória histórica quanto os principais obstáculos epistemológicos destacados por Glaeser. O estudo também analisa as dificuldades encontradas por estudantes e docentes nesse contexto, examinando livros didáticos aprovados pelo PNLD para identificar recursos digitais que possam fortalecer o ensino desse conteúdo. Para investigar essas possibilidades, foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática em uma escola municipal de Saquarema, utilizando ferramentas digitais e metodologias ativas. Os resultados evidenciaram avanços significativos na compreensão de conceitos como reta numérica e operações com números inteiros, além de promover maior engajamento dos estudantes. O trabalho culminou na elaboração de um produto educacional — uma sequência didática com integração de recursos digitais — oferecida como alternativa para práticas docentes. O uso planejado desses conteúdos digitais mostrou-se eficaz para superar dificuldades históricas relacionadas ao ensino de números inteiros, favorecendo uma aprendizagem mais significativa e interativa, alinhada à BNCC e às exigências da educação contemporânea.

Palavras-chave: Números Inteiros, Sequência Didática, Recursos Digitais, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This dissertation explores the teaching and learning process of integer numbers in basic education, addressing both their historical trajectory and the main epistemological obstacles highlighted by Glaeser. The study also examines the difficulties encountered by students and teachers in this context, analyzing textbooks approved by the PNLD to identify digital resources that can strengthen the teaching of these contents. To investigate these possibilities, a didactic sequence was developed and applied in a municipal school in Saquarema, using digital tools and active methodologies. The results showed significant progress in the understanding of concepts such as the number line and operations with integers, in addition to promoting greater student engagement. The work culminated in the development of an educational product—a didactic sequence integrating digital resources—offered as an alternative for teaching practices. The planned use of these digital contents proved to be effective in overcoming historical difficulties related to the teaching of integer numbers, fostering more meaningful and interactive learning, aligned with the BNCC and the demands of contemporary education.

Keywords: Integers, Teaching Sequence, Digital Resources, Mathematics Education.

Sumário

INTRODUÇÃO.....	17
CAPÍTULO 1: DA HISTÓRIA AOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DOS NÚMEROS RELATIVOS.....	20
1.1. Um pouco de história.....	20
1.2. Os obstáculos epistemológicos dos números inteiros.....	28
1.2.1. A noção de obstáculo epistemológico.....	28
1.2.2 O mapeamento dos obstáculos epistemológicos segundo Glaeser.....	29
CAPÍTULO 2: AS DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS.....	46
2.1. Dificuldades de aprendizagem no ensino de números inteiros.....	47
2.2. Qual a razão para essas dificuldades de aprendizagem?.....	50
2.3. Propostas e encaminhamentos.....	52
CAPÍTULO 3: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.....	55
3.1. Matemática Bianchini: 7º Ano.....	56
3.2. SuperAção: Matemática 7º Ano.....	59
3.3. Geração Alpha Matemática: 7º Ano.....	64
3.4. Matemática e Realidade: 7º Ano.....	66
3.5. A Conquista da Matemática: 7º Ano.....	71
3.6. Análise dos sites: jogos, dinâmicas e ferramentas que auxiliem o ensino de números inteiros.....	73
3.6.1. http://portaldoprofessor.mec.gov.br	73
3.6.2. www.bussolaescolar.com.br	74
3.6.3. www.cabri.com	74
3.6.4. www.geogebra.com	74
3.6.5 - www.gregosetroianos.mat.br	76
3.6.6 - www.matematica.br	76
3.6.7 - www.obm.org.br	76
3.6.8 - www.obmep.org.br	76
3.6.9 - www.somatematica.com.br	77
3.6.10 - www2.mat.ufrgs.br/edumatec	77
3.6.11 - https://mentalidadesmatematicas.org.br/	77
3.6.12. http://tecedu.pro.br/	77
3.6.13. http://webeduc.mec.gov.br/codigo_aberto	78
3.6.14. https://phet.colorado.edu/pt_BR/	78
3.6.15. http://www2.eca.usp.br/moran/	79
3.6.16. https://www.youcubed.org/pt-br/	79

CAPÍTULO 4: MATERIAIS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS RELATIVOS.....	80
4.1. Plataforma PhET	80
4.1.1. Simulador Reta Numérica: Distância.....	81
4.1.2. Simulador Reta Numérica: Inteiros.....	83
4.1.3. Simulador Reta Numérica: Operações.....	85
4.2. Geogebra	88
4.2.1. Adição e subtração entre números inteiros	88
4.2.2. Adição de números inteiros.....	89
4.2.3. Robô Linear (OBI).....	90
4.2.3. Números Inteiros.....	91
4.2.4. Adição de Número Inteiro.....	92
4.2.5. Adição e Subtração de Números Inteiros	93
4.2.6. Multiplicação de Inteiros.....	94
CAPÍTULO 5: ELABORAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS USANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS	96
5.1. Bloco 1: Reconhecimento dos inteiros.....	97
5.2. Bloco 2: Adição e subtração de inteiros.....	101
5.3. Parte 3: Multiplicação de inteiros	110
CAPÍTULO 6: RELATO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA.....	114
6.1 O contexto da pesquisa (escola)	114
6.2 Sujeitos.....	116
6.3 Instrumento de pesquisa	117
6.3.1 Plickers	117
6.4 Cronograma executado	122
6.5 Análise dos resultados.....	122
6.5.1 - Relato da experiência	122
6.5.2 - Avaliação dos alunos	143
CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
REFERÊNCIAS	149
APÉNDICE: RECURSO EDUCACIONAL	152

INTRODUÇÃO

O ensino de números inteiros relativos constitui um dos desafios históricos da Educação Matemática. Embora presentes em situações cotidianas como temperaturas negativas, altitudes, dívidas e créditos, esses conceitos continuam sendo de difícil apropriação por parte dos estudantes, em razão tanto de fatores epistemológicos quanto pedagógicos. Segundo Glaeser (2010), os obstáculos epistemológicos que marcaram a história da matemática permanecem como barreiras no processo de aprendizagem, refletindo-se nas dificuldades que os alunos apresentam ao lidar com quantidades negativas ou operações envolvendo inteiros.

Essa dificuldade exige do aluno um rompimento com o pensamento intuitivo. Para Ponte (1992).

A aprendizagem da Matemática envolve, muitas vezes, a aquisição de conhecimentos que não têm correspondência imediata no mundo real ou no senso comum dos alunos. Para muitos, isso implica uma ruptura com ideias prévias e a construção de novos significados, que exigem não apenas memorização, mas compreensão e reflexão. (PONTE, 1992, p.16)

A literatura especializada aponta que tais dificuldades estão relacionadas a concepções equivocadas sobre os números inteiros, muitas vezes concebidos como entidades desconectadas da realidade concreta (EVES, 2011). Nesse sentido, torna-se necessário adotar metodologias que favoreçam a construção de significados e a superação dos obstáculos epistemológicos ainda presentes na escola.

Nesse contexto, é papel do professor buscar alternativas que possibilitem o aluno aprender de forma significativa.

[...] é dever do professor dar ao aluno o direito de aprender; no entanto, não é um 'aprender' mecânico e repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz, nem um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Trata-se de um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. Para isso, os recursos lúdicos, como brincadeiras, jogos e blocos lógicos, podem ser ferramentas que auxiliam o trabalho docente. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 1-2)

E, para isso, o uso de recursos digitais tem se mostrado uma alternativa promissora. Plataformas interativas, jogos e softwares educativos possibilitam novas formas de representação e manipulação de conceitos, promovendo um aprendizado mais dinâmico e significativo. Além disso, tais ferramentas dialogam com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), que enfatiza a importância da integração das tecnologias digitais no ensino de matemática.

Diante disso, surge a seguinte questão: de que forma o uso de ferramentas digitais, aliado a uma sequência didática contextualizada, pode contribuir para a superação dessas dificuldades no processo de aprendizagem?

Para responder essa questão, será desenvolvida essa pesquisa com base em uma abordagem qualitativa, articulando revisão teórica, análise de materiais didáticos e práticas de sala de aula. A partir da compreensão histórica e epistemológica dos números inteiros, serão investigadas as formas como esse conteúdo vem sendo tratado no contexto escolar, especialmente nos livros didáticos aprovados pelo PNLD e como esses livros têm introduzido ferramentas digitais para ensinar números inteiros. Com base nessa análise, será construída uma proposta didática apoiada em recursos digitais e aplicada em ambiente escolar, com turmas do 7º ano do ensino fundamental, com o objetivo de observar a aplicabilidade dessa estratégia e sua contribuição para a aprendizagem dos estudantes.

A dissertação está organizada em seis capítulos. No capítulo 1 apresentamos a fundamentação teórica, destacando os acontecimentos históricos e epistemológicos envolvidos para a compreensão dos números inteiros relativos, baseada em vários autores, principalmente em Glaeser (2010).

O capítulo 2, destinado à revisão de literatura, reúne e discute pesquisas que tratam das principais dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos no ensino fundamental. São analisados trabalhos que evidenciam os obstáculos mais recorrentes no processo de ensino desse conteúdo. Além disso, o capítulo apresenta experiências didáticas e estudos que propõem o uso de ferramentas digitais como estratégia para tornar o ensino mais dinâmico, significativo e acessível.

No capítulo 3, apresentamos a análise dos livros didáticos. Decidimos fazer uma análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD com o objetivo de analisar os recursos digitais ofertados nas obras, buscando aqueles que podem ser usados para ensinar números inteiros. Selecionamos cinco obras de diferentes editoras em busca dessas ferramentas: Bianchini (2022), SuperAção (2022), Oliveira (2022), Iezzi (2022), Giovanni (2022). Ao analisar as obras encontramos sites sugeridos com: jogos, dinâmicas e ferramentas para auxílio ao ensino de matemática. Buscaremos nessas referências sugestões para o ensino de números inteiros, nos levando ao assunto do próximo capítulo.

No capítulo 4, buscamos ferramentas digitais, destacando dois principais: Plataforma Phet e Geogebra, dois sites que apresentam inúmeros recursos e múltiplos usos para o ensino de matemática. Com essas ferramentas, elaboramos uma sequência didática, descrita no capítulo 5, servindo como base para a elaboração do produto educacional.

Finalizamos com o capítulo 6, dedicado ao relato da prática pedagógica da sequência didática, apresentando as etapas desenvolvidas com alunos de uma escola municipal de Saquarema e fazendo a análise de alguns resultados relacionados à prática em sala de aula. Por fim, fechamos o trabalho com as considerações finais.

Com este trabalho buscamos motivar professores a diversificar a apresentação dos conceitos para o ensino de números inteiros e usar recursos digitais para esse fim, valorizando o uso dessas ferramentas como uma alternativa para aproximar a matemática dos alunos.

CAPÍTULO 1: DA HISTÓRIA AOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DOS NÚMEROS RELATIVOS

1.1. Um pouco de história

Nossas primeiras concepções de número e forma remontam a tempos tão antigos quanto a Idade da Pedra, especificamente ao período paleolítico. Durante centenas de milhares de anos, os humanos habitavam cavernas, vivendo em condições semelhantes às dos animais, dedicando suas energias principalmente à busca de alimentos. Criavam ferramentas para caçar e pescar, desenvolveram a linguagem para se comunicar e adornavam suas habitações com formas de arte criativa.

O avanço no entendimento de valores numéricos e relações entre grandezas foi lento até que ocorreu a transição da simples coleta de alimentos para a sua produção, passando da caça e da pesca para a agricultura.

Segundo Eves (2011):

A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Gan-ges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtz e na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Desde as primeiras civilizações, houve a necessidade de um sistema de contagem e registro, por esse motivo surgem os números, até então naturais e racionais positivos. Muitos povos antigos, como os egípcios, utilizavam formas rudimentares em objetos físicos para contagem de quantidades. Por exemplo, os babilônios usavam um sistema sexagesimal (base 60) para registrar transações comerciais, usando tábuas de argila. (EVES, 2011, p. 57).

Esse modelo de contagem de quantidades foi suficiente até certo ponto. À medida que a sociedade foi evoluindo, surgiu a necessidade da representação não apenas para quantidades referentes aos naturais, mas também, por exemplo, de perda e dívida, ou de temperaturas negativas, levando ao surgimento dos números negativos.

Muitos pensavam nos números de maneira muito concreta, muitas vezes associados aos processos de contagem aritmética ou de medida geométrica. Isso se deve à associação dos números a objetos reais. Para muitas culturas antigas, a ideia de números inteiros existindo isoladamente como conceitos abstratos não era natural nem intuitivo. Em verdade, isso também não seria ainda para muitas mentes matemáticas da era moderna¹.

Diofantes² de Alexandria (~200 - ~284) tem uma grande importância quando se estuda a história dos números inteiros, pois enuncia a regra que até hoje é usada. Naquele momento não havia uma demonstração para o que havia escrito, entretanto é o objeto de estudo do Glaeser, ou seja, é de grande importância até os dias atuais.

Glaeser (2010) relata:

A origem da regra dos sinais é atribuída geralmente a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C.). Esse autor não faz qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve: "O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta." (GLAESER, 2010, p.8)

A história dos números inteiros relativos se dá por cerca de 1500 anos. Nesse primeiro momento, iremos analisar, de forma breve, como foi sua história em diferentes contextos culturais.

Começaremos pela civilização chinesa do mundo antigo. Cabe destacar inicialmente que há grandes divergências em relação às datas das obras chinesas (EVES, 2011). Apesar dessas dificuldades, os chineses avançaram consideravelmente no estudo da matemática. Alguns de seus feitos:

(1) criar um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de π , (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) desenvolver a regra de três,

¹ A Idade Moderna iniciou-se com a Queda de Constantinopla, em 1453 e se encerrou com a Revolução Francesa, em 1789.

² Iremos nos referir a Diofanto de Alexandria sempre como Diofantes de Alexandria.

(11) aplicar a regra de falsa posição dupla, (12) desenvolver séries aritméticas de ordem superior e suas aplicações à interpolação e (13) desenvolver a geometria descritiva. (EVES, 2011, p. 246- 247)

Ainda segundo Eves (1995, p. 245-246), a matemática chinesa teve grande contribuição para a origem dos números negativos. Estudos apontam que os chineses foram os primeiros a idealizar os números negativos. Os números eram representados por meio de barras. As barras vermelhas representavam os números positivos e as barras pretas representavam, para os chineses, os números negativos.

Li Yeh (1192-1979) criou uma notação para os referidos números, sendo seu trabalho uma extensão da matemática dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, obra essa que é apontada como contendo a origem histórica do conceito dos números inteiros. Entretanto, os chineses não conceberam os números inteiros como entidades matemáticas independentes, embora os usassem em seus cálculos.

Contudo cabe destacar que Li Yeh, conforme observou Eves (2011, p. 246), "introduziu uma notação para números negativos, consistindo em traçar uma linha diagonal no dígito à direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês". Acredita-se ainda que os chineses tenham sido os responsáveis pela criação do símbolo utilizado para representar o zero, uma circunferência.

A Índia também deu sua contribuição para os números inteiros relativos. Importantes matemáticos, como Bhaskara (1114 – 1185) e Brahmagupta (598 – 668), se destacaram entre os indianos influenciando no estudo desse conjunto. Nesta cultura, os textos teóricos são abordados com foco no sistema de numeração decimal e posicional. Porém, a “data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida” (SOUZA, 2010, p.15).

Os mais antigos espécimes dos numerais utilizados pelos indianos foram encontrados em pilares erguidos na Índia por volta de 250 a.C. Entretanto, nesses antigos escritos ainda não existe um símbolo para o zero e a notação posicional tampouco é empregada. Eles usavam um sistema de numeração com nove símbolos representando os números de 1 a 9 e nomes para indicar cada potência de 10. Por exemplo, escreviam 3 sata, 2 dasan, 7 para representar o número 327 e escreviam 1 sata, 6 para representar 106. A data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida [...] (SOUZA, 2010, p.15)

Brahmagupta, um dos primeiros matemáticos e astrônomos hindus, tem uma obra, cujo título é *Brahmasphuta Sidd'hanta*. Nessa obra podemos observar fundamentos para o desenvolvimento da álgebra, além de uma sistematização dos números inteiros por meio da álgebra. O zero é definido como a subtração de um número por ele mesmo.

Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completar quadrados, esse método é hoje muitas vezes conhecido como método hindu. (EVES, 2011, p. 256)

Além de considerar os números negativos como débitos, este matemático, segundo MOL (2013, p.64), “[...] Estabeleceu regras numéricas para lidar com números negativos que, pela primeira vez, tiveram sua aritmética sistematizada”, afirmando que “*positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo é positivo. [...] positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por positivo é negativo*”.

Outro matemático dessa região foi Bhaskara, matemático comumente associado na matemática escolar à fórmula de resolução da equação do segundo grau³.

[...] as obras de Brahmagupta e Bhaskara e dos que viveram em seu tempo, contém muita coisa de interesse para a história da matemática, incluindo métodos de cálculo com número positivos e negativos, soluções de equações quadráticas e sistemas de equações lineares, e resultados básicos em análise combinatória. (BRESSOUD, 2002, p. 265)

Segundo Rezende (2003, p.139), os números hindus alcançaram a Europa através da civilização árabe. A preservação e a transmissão da matemática grega para a Europa medieval também foram realizadas por este povo de natureza tão eclética. Os árabes tanto se interessaram pela álgebra e aritmética pragmática dos hindus quanto pela geometria estética e formal de Euclides, Arquimedes e companhia.

³ A fórmula na sua forma atual (com o uso de letras para representar os coeficientes, como "a", "b" e "c") começou a se desenvolver mais formalmente séculos depois, com matemáticos europeus como o francês **François Viète (1540-1603)** e **René Descartes (1596-1650)**, e não por Bhaskara. além disso, existem outros matemáticos mais antigos que já tinham conhecimento de tal fórmula. Sridhara (século IX), por exemplo, já tinha conhecimento de uma fórmula equivalente.

Para realizar os seus estudos, os árabes construíram grandes “casas de sabedoria” para traduzir e estudar, principalmente, as obras científicas dessas civilizações. Várias obras gregas, inclusive os Elementos de Euclides, foram traduzidas para a língua árabe e foram preservadas para o desenvolvimento da matemática europeia.

Na Europa, a Igreja Católica tinha tanta influência que foi responsável pelos primeiros centros de pesquisa. MOL (2013, p.77), em seu texto, destaca que “o nascimento dessas instituições foi um marco na história das ciências, pois com poucos séculos de vida, elas passariam a ser o principal palco da atividade científica europeia”.

Leonardo de Pisa (1170 - 1250), também conhecido como Fibonacci, é considerado o maior matemático da Idade Média. Em suas viagens pelo mundo árabe se interessou por Matemática. Se tratando dos números inteiros, Fibonacci afirmou: “o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas [...] raízes negativas e imaginárias não são admitidas”. O que mostra uma falta de entendimento sobre os números negativos, causando uma rejeição dos mesmos.

Com a base no que Diofantes de Alexandria enunciou, Simon Stevin (1634) desenvolve a regra dos sinais para a multiplicação de inteiros da seguinte maneira: “Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.”

Simon Stevin contribuiu para a compreensão da regra de sinais, que estabelece que o produto de dois números negativos resulta em um número positivo. Embora sua obra não tenha fornecido uma justificativa formal completa para essa regra, ele ajudou a popularizar a ideia e a sua aplicação na matemática. Ele certamente influenciou gerações posteriores de matemáticos. Em sua obra “Aritmética”, ele explica a veracidade por dois métodos. Entretanto, sua explicação é rasa, uma vez que usa situações geométricas pautadas em exemplos numéricos particulares e não se estende a uma generalização. Na próxima seção analisaremos mais de perto suas contribuições.

Contudo, o caminho dos números relativos, especialmente os dos números negativos, ainda seria bastante controverso. René Descartes (1596 - 1650), por exemplo, que foi creditado por introduzir um sistema de coordenadas que serviu de base para a geometria analítica, negava explicitamente os números negativos. Glaeser (2010) destaca em seu artigo que Descartes denominou tais números por “raízes falsas” ou “números surdos”, sugerindo que se evitassem o uso de tais números na matemática. Para ele, se ao resolver uma equação, encontrássemos números negativos, isto indicaria que a formulação do problema estava errada, e o enunciado deste problema, portanto, deveria ser reformulado. Surgem desse modo os primeiros sintomas de evitação ao uso dos números negativos. Na verdade, para Descartes a reta numérica é a união de duas semirretas opostas, com mesma direção. Mas os números são sempre positivos.

Outro matemático francês que também questionou o uso dos números negativos foi D’Alembert (1717 - 1783).

Pelas regras da Álgebra, teremos $x + 100 = 50$ e $x = - 50$. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Enunciariamos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos $100 - x = 50$, e $x = 50$, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades negativas, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. (GLAESER, 1981, p. 19)

Nela é abordada a confusão sobre quantidades negativas, refutando a ideia de que são menores que zero. Números representam quantidades e, logo, não podem ser menores do que zero. Em seguida ele aborda as regras de sinais para a multiplicação:

Eis porque o produto de $-a$ por $-b$ dá $+ab$; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais - de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades $-a$ e $-b$ só são precedidas pelo sinal - porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal +, e então seu produto seria $+ab$, o que significa a multiplicação de $-a$ por $-b$, onde retiramos b - vezes a quantidade negativa $-a$. Ora, pela ideia

que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar $-a$ por $-b$ e, sim, $+a$ por $+b$, o que dá o produto $+ab$. Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades negativas, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas negativas de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas. (GLAESER, 1981, p. 19 e 20)

D'Alembert era da Academia Francesa de Ciências e editor chefe da Enciclopédia Francesa. O impacto de seu trabalho foi significativo, tornando-se uma referência constante no debate sobre números negativos ao longo do século XVIII.

No artigo de Georges Glaeser (1985), ele destaca a resistência ao uso dos números inteiros relativos em vários campos do conhecimento. Contudo ele ressalta a contribuição positiva da óptica. Em particular, a óptica elementar, relacionada ao comportamento das lentes, oferece um bom exemplo de como os números inteiros relativos eram utilizados para se compreender suas aplicações.

Na óptica, os números inteiros relativos são usados principalmente na descrição das posições das imagens formadas por lentes. Quando se usa uma lente para formar uma imagem, o tipo de imagem (real ou virtual) e sua posição em relação à lente podem ser representados por números. A distância focal de uma lente pode ser considerada positiva ou negativa dependendo do tipo de lente. Para lentes convergentes (como as lentes de aumento), a distância focal é geralmente positiva, enquanto para lentes divergentes (como as lentes que corrigem miopia), a distância focal é negativa. Isso representa uma situação em que a lente pode "afetar" a luz de maneira oposta dependendo de sua curvatura. Quando se calcula a posição da imagem formada por uma lente, o sinal da distância da imagem em relação à lente também pode ser negativo, caso a imagem seja virtual (ou seja, formada do lado oposto ao objeto) e positiva se a imagem for real (do lado onde a luz converge após passar pela lente).

Na época em que essas ideias estavam sendo desenvolvidas, a concepção de números negativos não era tão clara ou intuitiva, e isso gerava resistência em sua aplicação. Portanto, o uso de números de números negativos foi se consolidando à medida que o entendimento dos fenômenos físicos e da matemática evoluiu.

Isso nos leva a ver como a física e a matemática se relacionam, com os números relativos ajudando a formalizar conceitos que são usados para descrever a realidade física.

MacLaurin (1698 - 1746) e Euler (1707 - 1783) foram outros matemáticos europeus que também deram sua contribuição. Mas isso discutiremos em mais detalhes na próxima seção. Por ora, passemos ao epílogo dessa história que teve a participação especial de Herman Hankel (1839 - 1873).

Em 1867, a obra de Herman Hankel sobre “Teoria dos sistemas dos números complexos” proporciona uma mudança significativa referentes à teoria dos números. Hankel foi responsável por desfazer uma série de incertezas e questionamentos que vinha desde as primeiras descobertas de Diofantes sobre os números inteiros. Já era o prenúncio da álgebra moderna. Se utilizando de propriedades algébricas, Hankel estende a multiplicação para os números inteiros. Aos olhos da álgebra moderna, a demonstração é trivial. Ela é exposta por Glaeser (1985) em seu texto desse modo:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + op.b) = a \times (op.b)$$

$$0 = 0 \times (op.b) = (op.a) \times (op.b) + a(op.b)$$

Donde:

$$(op.a) \times (op.b) = ab$$

Essa revolução realizada por Hankel fez apontar não mais para números descobertos, mas inventados, imaginados. Antes, tudo era baseado na busca de modelos e exemplos, nos quais se verificavam de forma metafórica uma forma de interpretar os números negativos.

1.2. Os obstáculos epistemológicos dos números inteiros

1.2.1. A noção de obstáculo epistemológico

O que é conhecimento? Como se constrói o conhecimento? Essas são na verdade as duas questões que motivaram e continuam propulsando o campo da Epistemologia. Para Kant, por exemplo, “construir” significa representar numa intuição a priori alguma coisa de abstrato (um conceito, uma relação). Segundo o filósofo, o conhecimento matemático é “aquele que procede por ‘construção’ de conceitos”

Em verdade, ao fazer críticas à Razão Pura e à Razão Prática, foi Kant quem demoliu de uma só vez as atitudes idealistas e realistas frente ao conhecimento. Não à toa é considerado uma das grandes referências às teorias interacionistas em relação à construção do conhecimento. Piaget, biólogo e o grande pioneiro da teoria construtivista do conhecimento, apresentava uma visão biológica da cognição. Segundo Piaget, “Conhecer é transformar o objeto e transformar-se a si mesmo” neste processo de interação entre o indivíduo e o objeto. Outros teóricos construtivistas sucederam a Piaget. Um dos mais notáveis, foi o pesquisador soviético Vygotsky. Tal como Piaget, Vygotsky procurava responder com sua teoria do construtivismo sócio-histórico as questões fundamentais da epistemologia (o que é e como se constrói o conhecimento) no nível ontogenético⁴, tomando como referência o sujeito aprendiz.

Em outra perspectiva, no nível filogenético⁵, Bachelard (1970) propõe sua teoria de conhecimento, conhecida como Psicanálise do Conhecimento. Quem vai para o divã não é a criança, o aprendiz, mas o próprio conhecimento. É por meio do seu estudo na própria história do conhecimento que vamos revelar sua evolução e seus obstáculos. Nesse sentido, o autor faz do seu conceito de obstáculo epistemológico um elemento essencial para o entendimento do processo dinâmico de construção do conhecimento científico. E é em termos dos obstáculos que o conhecimento científico

⁴ Ontogenia: desenvolvimento de um indivíduo desde a concepção até a maturidade; ontogênese Houaiss, 2009).

⁵ Filogenia: história evolutiva de uma espécie ou qualquer outro grupo taxonômico; filogênese, filogenesia (Houaiss, 2009).

deve superar para romper o seu estado inercial que Bachelard procura estudar as condições reais para o progresso da ciência. Para Bachelard, é no ato mesmo de superar estas causas inerciais que se concretiza o progresso do conhecimento científico, e são essas causas inerciais, inerentes ao conhecimento, as que Bachelard chamou de obstáculos epistemológicos.

[...] é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparece por uma sorte de necessidade funcional a morosidade e as perturbações. E aí que mostraremos as causas da estagnação e mesmo do regresso; é aí que nós revelaremos as causas da inércia, que nós chamaremos de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1967, p.15)

Cabe aqui ressaltarmos que considerar estes obstáculos não se trata de incriminar "a fraqueza dos sentidos e do espírito humano" nem considerar os obstáculos externos como "a complexidade e a fugacidade dos fenômenos", como observou Bachelard. É no ato mesmo de conhecer que nós estamos contextualizando estes obstáculos. Não estamos querendo com isso negar a influência destes obstáculos externos, principalmente os fatores históricos e socioeconômicos, no progresso das ciências. O que queremos, isto sim, é isolar criticamente essas variáveis para que possamos estudar e encontrar no próprio conhecimento as causas de sua inércia.

A noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática educacional. Na próxima seção faremos um estudo tendo como referência a história científica dos números relativos tendo como referência o artigo "Epistemologia dos números relativos" de Glaeser (2010). Com o desenvolvimento desse estudo perceberemos, como aponta o próprio Bachelard, que tudo aquilo que se encontra na história do pensamento científico está longe de ser o caminho natural do sujeito que se encontra no ato de conhecer.

1.2.2 O mapeamento dos obstáculos epistemológicos segundo Glaeser

O aprendizado dos números inteiros representa um dos momentos mais desafiadores no ensino de matemática, especialmente devido à transição dos números naturais para os inteiros. Mas, no seu processo histórico de construção, o

desafio também foi muito grande. Como vimos na seção anterior, a introdução dos números inteiros foi um processo lento, durando mais de 1500 anos. Segundo Glaeser (2010):

A introdução conceitual dos números relativos foi um processo surpreendentemente lento. Durou mais de 1500 anos, da época de Diofantes aos nossos dias! Durante todo esse tempo, os matemáticos trabalharam com números relativos, tendo deles apenas uma *compreensão parcial*, com espantosas lacunas. (GLAESER, 2010, p.2)

Com base no texto de Glaeser (2010), daremos destaque aos obstáculos epistemológicos enfrentados pelos matemáticos ao longo da história. O entendimento desses obstáculos é de fundamental importância para o professor que irá ensinar tal assunto. Muitas dessas dificuldades decorrem de vários obstáculos epistemológicos, ou seja, dificuldades associadas ao próprio processo de construção do conhecimento matemático. Para desenvolver um processo de ensino e de aprendizagem que seja significativo os professores deverão ajudar os seus alunos a superarem esses obstáculos.

Os obstáculos epistemológicos, como dito anteriormente, são atribuídos às concepções prévias e à natureza abstrata dos conceitos envolvidos. Segundo o estudo de Glaeser (2010), os principais obstáculos epistemológicos relacionados aos números inteiros são:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
4. A ambiguidade dos dois zeros (zero origem e zero absoluto).
5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
6. Desejo de um modelo unificador. (GLAESER, 2010, p.5)

Os obstáculos epistemológicos no aprendizado dos números inteiros são inerentes à complexidade desse conceito e à forma como ele desafia as ideias prévias dos alunos. Com estratégias pedagógicas adequadas, é possível transformar essas barreiras em oportunidades de aprendizagem, promovendo uma compreensão mais ampla e significativa dos números inteiros e de suas propriedades.

Cada dificuldade identificada por Glaeser (2010) tem sua particularidade. Para o entendimento desses obstáculos, vamos analisá-los em pares.

Uma coisa é saber operar com os números negativos, outra bem diferente é atribuir sentido a essa operação. Muitos dos alunos conhecem as regras dos sinais para operar com os números relativos (superaram o primeiro obstáculo), mas muito poucos conseguem atribuir sentido para aquilo que fazem (obstáculo 2).

Já o terceiro e o quarto obstáculos estão relacionados. O terceiro interpreta a reta numérica como uma junção de duas semirretas. Já o quarto diz respeito a ambiguidade dos dois zeros (“zero absoluto” e o “zero origem”). Por muitos anos acreditava-se no “zero absoluto”, abaixo do qual nada poderia ser concebido, e isso dificulta enxergar a “zero origem” na reta numérica. Os obstáculos 3 e 4 estão relacionados à relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Por fim, temos os dois últimos obstáculos: o quinto é a dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos, buscando sempre retornar aos exemplos concretos. Adicionamos e multiplicamos números e não créditos e débitos, ou mesmo peras e maçãs. Já o sexto é a necessidade de sempre buscar um modelo unificador. Como disse uma vez Euler: “como uma dívida de 2000 escudos vezes uma dívida de 3000 escudos pode dar uma fortuna de 6 milhões de escudos?”. Com efeito, somar dívidas pode fazer sentido, mas multiplicar dívidas não faz o menor sentido. Na verdade, multiplicar fortunas também não, visto que multiplicamos números e não dívidas ou fortunas.

Para compreender melhor esses obstáculos e seu desenvolvimento histórico vamos apresentar uma breve exposição da compreensão dos números relativos através dos séculos, procurando as passagens mais significativas levantadas por Glaeser (2010). Começamos por meio de um quadro 1 esquemático abaixo, elaborado por Glaeser (2010):

Quadro 1: Superação de obstáculos epistemológicos segundo o texto de Gleaser (1985)

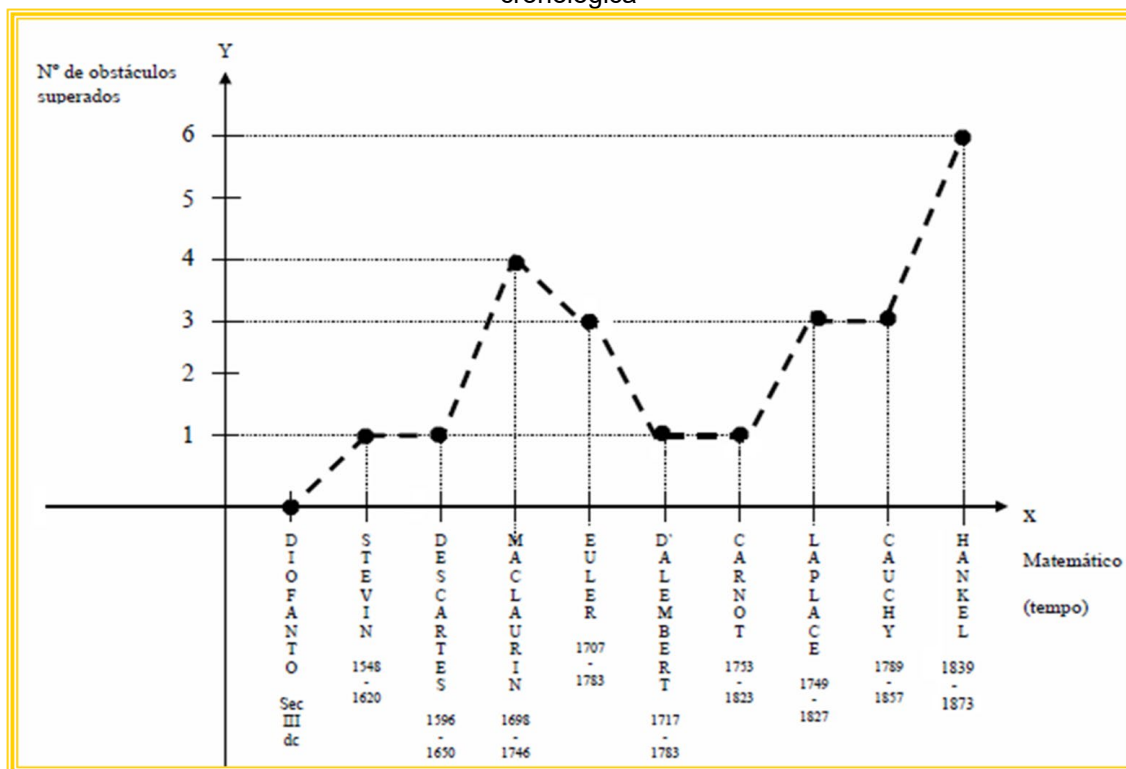
Obstáculos Autores	1	2	3	4	5	6
Diofantos (Século III d.C.)	-					
Simon Stevin (1548-1620)	+	-	-	-	-	-
Rene Descartes	+	?	-	?	-	-
Colin Maclaurin	+	+	-	-	+	+
Leonard Euler	+	+	+	?	-	-
Jean D'Alembert	+	-	-	-	-	-
Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	-
Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Fonte: (GLAESER, 2010, p. 6)

No quadro, os sinais de + ou – indicam se o autor, pelo texto citado, terá ou não conseguido ou não transpor o obstáculo. Os sinais de interrogação designam os casos em que não conseguimos responder sobre as barreiras enfrentadas.

A partir desses dados, podemos fazer um gráfico “números de obstáculos superados” x “Matemáticos citados por Glaeser em ordem cronológica” (gráfico 1).

Gráfico 1: “Números de obstáculos superados” versus “Matemáticos citados por Glaeser em ordem cronológica”



Fonte: Acervo próprio

Observando o gráfico, percebe-se que a evolução dos números relativos não é crescente e linear, muito pelo contrário, ela possui altos e baixos, momentos de progresso e de regresso que fazem parte do processo evolutivo de um conhecimento científico. Sigamos ao nosso passeio histórico.

A origem da regra dos sinais é creditada a Diofantes de Alexandria (Século III d.C.), onde não faz nenhuma referência aos números negativos, porém em seu livro “Aritmética” (Diofantes), ao relatar o produto de duas diferenças, escreve “O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta.” (Glaeser, 2010).

Ele não apresenta prova para a regra, desta forma não supera nem o primeiro obstáculo epistemológico, mas é apontado por vários historiadores como o primeiro registro das regras dos sinais para a multiplicação de números inteiros. Vimos na seção anterior que diversas civilizações contribuíram para o desenvolvimento dos números negativos, mas eles não recebem destaque por parte de Glaeser (1985) em sua obra. O próximo nome em sua lista é Simon Stevin (1548-1620), considerado por muitos como o “Arquimedes da Idade Média”. Em sua obra *Aritmética*, Stevin elabora

uma “mostração” (e não uma demonstração) de que o produto de dois números negativos deve ser positivo:

Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.

Explicação do dado:

Seja 8-5 multiplicado por 9-7, deste modo: - 7 vezes -5 faz + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - por -, faz +). Depois - 7 vezes 8

faz -56 (-56, porque, como está dito no teorema, - por +, faz -).

E similarmente seja 8-5 multiplicado pelo 9, e darão

produtos 72 - 45; depois juntem +72+35, fazem 107.

Depois juntem os -56 - 45, fazem -101; e subtraído o 101

de 107 resta 6, para produto de tal multiplicação. Da qual a

disposição dos caracteres da operação é este ao lado:

$$\begin{array}{r}
 8 - 5 \\
 \hline
 9 - 7 \\
 -56 - 35 \\
 \hline
 72 - 45 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

(*apud*, GLAESER, 2010)

Em seguida, Stevin faz uma “explicação” dos seus cálculos:

Explicação do quesito:

É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que - por -, faz +, e que + por -, ou - por + faz -.

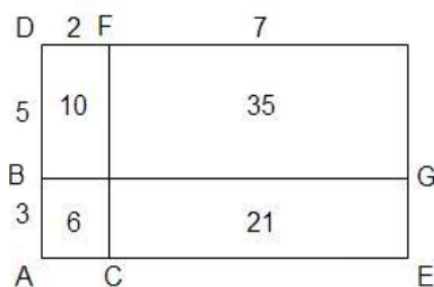
Demonstração:

O multiplicador 9-7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas ele é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e - por - dá produto +, e + por -, ou - por +, dá produto -, portanto o teorema é verdadeiro.

Outra demonstração geométrica:

Seja AB 8 - 5 (a saber AD 8 - DB 5).

Depois $AC \cdot 9 - 7$ (a saber $AE \cdot 9 - BC \cdot 7$), seu produto será CB ; ou ainda de acordo com a multiplicação precedente $ED \cdot 72 - EF \cdot 56 - DG \cdot 45 + GF \cdot 35$, os quais nos mostrarão serem iguais a CB desse modo. Em suma, $ED + GF$, subtraído de EF e DG , resta CB .



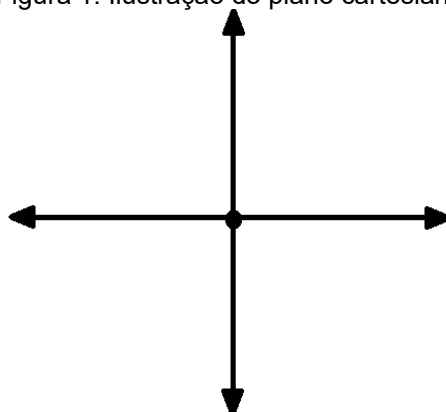
Conclusão:

Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar. (*apud*, GLAESER, 2010)

Simon Stevin usa argumentos baseados em exemplos numéricos, não aparecendo números negativos isolados. O matemático supera o primeiro obstáculo, mas não supera o segundo obstáculo. Para Simon Stevin, a ideia de número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa, e assim não fica coerente aceitar o uso dos números negativos. Por conta disso, usa estratégias geométricas para evitar seu uso. Esses procedimentos, que renunciam o uso dos números negativos, são chamados de sintomas da evitação.

Outro matemático que se opôs de forma veemente ao uso de números negativos foi René Descartes. Em seu livro *Geometria* (1628) tem uma parte dedicada exclusivamente para se livrar das raízes falsas, mostrando sua insegurança para trabalhar com números negativos (os números “surdos”, números negados). Em verdade, o plano cartesiano seria formado por quatro semirretas justapostas na mesma direção e sentidos contrários, duas a duas: (figura 1).

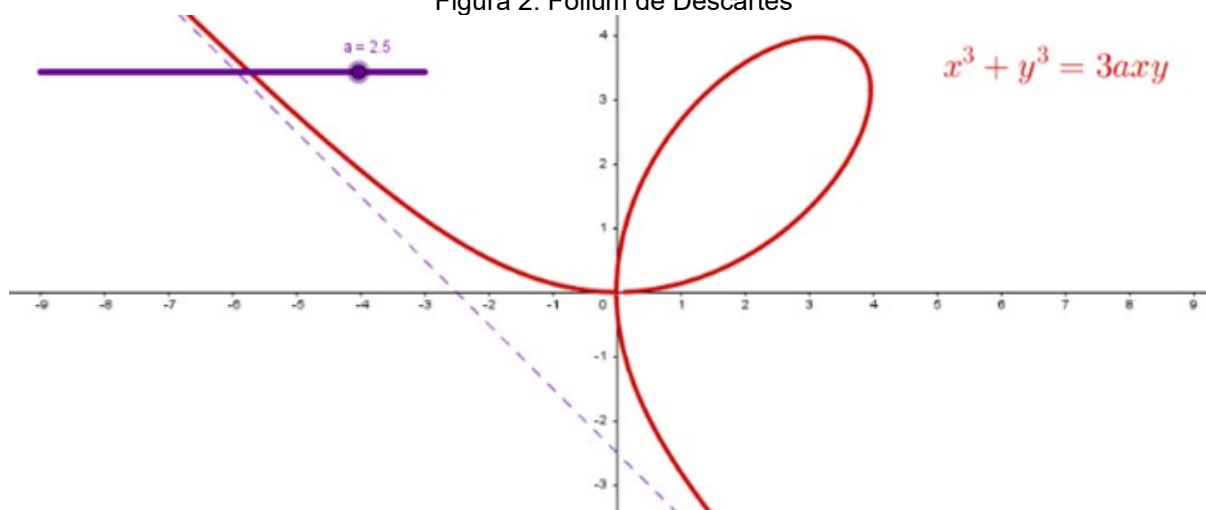
Figura 1: Ilustração do plano cartesiano



Fonte: Acervo próprio

De fato, ao considerarmos apenas o primeiro quadrante, a curva $x^3 + y^3 = 3axy$ realmente se assemelha a uma “folha”, nome dado por Descartes para tal curva.

Figura 2: Folium de Descartes



Fonte: Acervo próprio

Os números negativos passaram a aparecer nos trabalhos científicos com mais naturalidade a partir do século XVII, sendo aceito, pois a eficácia do seu cálculo é o suficiente para confortar o matemático em sua fé. Porém, no campo epistemológico não há argumentos satisfatórios. Em seu trabalho “Tratado dos Fluxos” (1742), MacLaurin (1698 - 1746) reforça esse ponto de vista. Segundo o matemático “O uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propicia ideias aparentemente sem qualquer fundamento real” (MacLaurin, 1742 *apud* Glaeser, 1985, p.13). Contudo, conforme observa Glaeser (2010), o matemático não consegue superar o obstáculo (3). Segundo o educador matemático, MacLaurin não compreendendo a relação entre os números positivos e negativos, considera-os como quantidades heterogêneas. Há uma outra

obra de McLaurin que se tornou referência no continente europeu, seu “Tratado de Álgebra” apresenta as quantidades negativas de forma satisfatória, porém, segundo Glaeser (2010):

(...) a compreensão está longe de ser adquirida, sob o efeito dos obstáculos (3) e (4), visivelmente não transpostos. Entretanto, o autor reconhece implicitamente que o que é absurdo de fazer com o zero absoluto é perfeitamente legítimo com um zero origem. (GLAESER, 2010, p. 13)

O texto de McLaurin aborda formalmente a demonstração da regra dos sinais:

Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que os *sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -*. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade.

$+a - a = 0$; assim, multiplicando $+a$ por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n , terei como primeiro termo $+na$, portanto o segundo será $-na$, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão - no produto. Se multiplico $+a - a$ por $-n$, de acordo com o caso precedente, obterei $-na$ como primeiro termo; logo terei $+na$ como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto". (MACLAURIN, 1748 apud Glaeser, 2010, p. 14)

O texto apresenta uma evolução, pois aborda formalmente a regra dos sinais, mostrando que MacLaurin obteve certa vantagem, comparado aos demais autores citados. Porém, até que ponto ele assume esse formalismo? Segundo Glaeser (2010) Ele esbarra nos obstáculos (3) e (4) sendo incapaz de apresentar a teoria dos números negativos como desejado. Apesar de ter quase resolvido o problema dos números inteiros, os leitores de MacLaurin não se apropriaram destas descobertas e os próximos autores que vamos citar acabaram por provocar um retrocesso na história evolutiva dos números relativos.

Léonard Euler (1707-1783) foi um matemático que manejava os números inteiros com maestria, sem levantar questões sobre sua legitimidade. Porém em uma obra pedagógica, destinada a principiantes (EULER, 1770), o matemático comete equívocos ao justificar a regra dos sinais:

1. A multiplicação de uma *dívida* por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de $3a$ escudos. Logo $b \times (-a) = -ab$.

— Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma *operação externa*. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.

2. Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-a) \times b = -ab$.

— Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos?

3. Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto $(-a)$ por $(-b)$.

— É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab . Trata-se, portanto de decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a) \times b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é de que $(-a) \times (-b) = +ab$. (!!!) (GLAESER, 2010, p. 15)

Como visto, seus argumentos não são claros. Com feito: o produto de um número par por um número ímpar é um número par; o de um número ímpar por um número par também é um número par; o produto de dois números ímpares é um número ímpar; mas o fato de existirem tantos números pares quanto números ímpares não implica que o produto de dois números pares seja um número ímpar. A obra de Euler (1770) também apresenta inconsistências sobre a unificação da reta numérica. Apesar disso, segundo Schubring (2000), foi por meio do tratamento das regras de sinais por Euler que os números negativos foram difundidos e desenvolvidos a partir do século XVIII. Por ora, voltemos à França.

Dois outros matemáticos franceses demonstraram grande dificuldades de compreensão em relação às quantidades negativas: Lazare Carnot (1753-1823) e D'Alembert (1717-1783). Este último, em seu artigo *Negativo*, expõe, por exemplo, que:

As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo, começa o negativo. *Veja POSITIVO*.

Deve-se confessar que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundi-la, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. Os que pretendem que 1 não é comparável a -1 e que a relação (razão) entre 1 e -1 é diferente da razão entre -1 e 1 incidem num duplo erro: 1º - porque, todos os dias, nas operações algébricas, dividimos 1 por -1; 2º - a igualdade do produto de -1 por -1, e de +1 por +1 revela que 1 está para -1 assim

como - 1 está para 1. (D’ALEMBERT, 1751 *apud* GLAESER, 2010, p.18)

Em outro trecho, o matemático faz referência às quantidades negativas que “falsamente consideramos abaixo de zero”, sugerindo que podemos evitar as raízes negativas modificando o formato da equação:

Considerando a exatidão e a simplicidade das operações algébricas com quantidades *negativas*, somos levados a crer que a ideia precisa que se deve fazer das quantidades negativas é uma ideia simples, não dedutível, absolutamente, de uma metafísica alambicada. Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se, primeiro, notar que as quantidades a que chamamos *negativas* e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na Geometria, onde as linhas *negativas* só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. *Veja CURVA*. Daí, é natural concluir que as quantidades *negativas* encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma ideia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x , que somado a 100 perfaça 50. Pelas regras da Álgebra, teremos $x + 100 = 50$ e $x = - 50$. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Anunciaremos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos $100 - x = 50$, e $x = 50$, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades *negativas*, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. *Veja EQUAÇÃO*. (D’ALEMBERT, 1751 *apud* GLAESER, 2010, p.18)

Mais adiante, D’Alembert refuta a ideia da existência de quantidades negativas isoladas.

Note-se que estamos falando de quantidades *negativas* isoladas, como $-a$, ou das quantidades $a - b$, em que b é maior que a ; pois, para aquelas em que $a - b$ é positivo, isto é, em que b é menor que a , o sinal não acarreta qualquer dificuldade. Realmente, pois, não existe absolutamente quantidade *negativa* isolada. -3 tomado abstratamente, não apresenta qualquer ideia ao espírito; mas se digo que um homem deu a outro -3 escudos, isto quer dizer, em linguagem inteligível, que ele lhe tirou 3 escudos. (D’ALEMBERT, 1751 *apud* GLAESER, 2010, p.18)

E, por fim, apesar das dificuldades na interpretação das quantidades negativas isoladas, D'Alembert ratifica que “as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas são admitidas por todo mundo”:

Eis porque o produto de $-a$ por $-b$ dá $+ab$; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal $-$, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais $-$ de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades $-a$ e $-b$ só são precedidas pelo sinal $-$ porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal $+$, e então seu produto seria $+ab$, o que significa a multiplicação de $-a$ por $-b$, onde retiramos b - vezes a quantidade negativa $-a$. Ora, pela ideia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar $-a$ por $-b$ e, sim, $+a$ por $+b$, o que dá o produto $+ab$. Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades *negativas*, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades *negativas* são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas *negativas* de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas. (D'ALEMBERT, 1751 *apud* GLAESER, 2010, p.18)

Seu artigo serviu de referência para outros autores por aproximadamente um século. Talvez o seu leitor mais assíduo tenha sido Lazare Carnot (1753-1823). Este último apresentou, segundo Glaeser (2010), diversas situações “paradoxais” no comportamento das quantidades negativas:

Uma multidão de paradoxos, ou antes de palpáveis absurdos resultaria da mesma noção; por exemplo: -3 seria menor que 2 ; contudo, $(-3)^2$ seria maior que 2^2 , ou seja, entre duas quantidades diferentes, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, o que afronta todas as ideias clara que se poderiam formar sobre a quantidade.

Passemos à segunda noção, que consiste em dizer que as quantidades negativas só diferem das quantidades positivas por serem tomadas em sentido oposto. Esta ideia é engenhosa, mas não é mais justa que a precedente. De fato, as duas quantidades, uma positiva, outra negativa, sendo ambas reais e não diferindo senão por sua posição, por que a raiz de uma seria uma quantidade imaginária,

enquanto a da outra seria efetiva? Por que $\sqrt{-a}$ não seria tão real quanto \sqrt{a} ? Pode-se conceber uma quantidade efetiva da qual não se possa extrair a raiz quadrada? E de onde proviria o privilégio da primeira em conceder seu sinal ao produto $(-a) \times (+a)$? (*apud* GLAESER, 1985, p.21)

Tanto D'Alembert como Lazare Carnot foram membros da Academia Francesa de Ciências. Portanto, podemos concluir que, na virada do século XVIII para o século XIX, a comunidade científica francesa não aceitava tão bem o estudo das quantidades negativas.

Outro francês, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), mostra o mesmo embaraço que seus antecessores, para apresentar a regra dos sinais:

(A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de $-a$ por $-b$ seja o mesmo que o de a por b . Para tornar sensível essa ideia observaremos que o produto de $-a$ por $+b$ e $-ab$ (porque o produto nada mais é que $-a$ repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de $-a$ por $(b-b)$ é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de $-a$ por $+b$ é $-ab$, o produto de $-a$ por $-b$ deve ser de sinal contrário, ou igual a $+ab$ para destruí-lo. (*apud*, GLAESER, 2010, p. 27)

Podemos ver no seu texto que Laplace usa a mesma argumentação de Euler para demonstrar $b \times (-a) = -ab$, usa a propriedade distributiva e não consegue um modelo físico para dar exemplo. Ao empregar as palavras “sensível” e “deve ser” mostra ainda sua insegurança com relação às justificativas de suas afirmações. Como pode-se observar, a dificuldade maior reside em explicar por que “*menos vezes menos dá mais!*”. Outro matemático notável da escola francesa, querendo contribuir para essa discussão, também se aventura a apresentar seus argumentos. Trata-se de August Cauchy (1789-1857), o fundador do Cálculo Moderno.

Em 1821, Cauchy, em seu curso destinado a Escola Politécnica, apresenta a seguinte ideia:

Do mesmo modo que se vê a ideia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a ideia de quantidade (positiva ou negativa), se considerarmos cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou a diminuição de outra grandeza fixa da mesma espécie. Para indicar essa destinação, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal $+$, e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal $-$.

Isto posto, os sinais + ou - colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal - pelo nome de quantidades negativas. (*apud*, GLAESER, 2010)

No seu texto os sinais de “-” e “+” assumem uma característica simbólica, apresentando dois significados distintos: ora como operatórios, indicando uma ação (oposto ou elemento simétrico); ora como predicativo, que qualificam a natureza do número (positivo ou negativo). No texto de Cauchy, vemos ele usar essas metáforas na tentativa de explicar as regras dos sinais, porém ele se confunde entre os sinais operatórios e predicativos que ele próprio citou, sem alertar sobre esse abuso:

Com base nessas convenções, se representamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos

$$a = +A, b = -A$$

teremos,

$$+a = +A, +b = -A,$$

$$-a = -A, -b = +A.$$

Se, nas quatro últimas equações, atribuímos a a e b seus valores entre parênteses, obtemos as fórmulas

$$+(+A) = +A, +(-A) = -A,$$

$$- (+A) = -A, -(-A) = +A. (1)$$

Em cada uma destas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos de produto dos dois sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais é formar seu produto. Apenas o exame das equações (1) basta para estabelecer a regra dos sinais, compreendida no teorema que vou enunciar.

1° teorema: O produto de dois sinais iguais é sempre +, e o produto de dois sinais opostos é sempre -.” (*apud*, GLAESER, 2010, p.29)

Cabe destacar ainda que Cauchy ainda apresentava certo desconforto ao abordar números complexos, sendo encarados pelo matemático como “sem sentido em si mesmos”. Isso demonstra que a natureza dos números relativos é muito próxima, do ponto de vista epistemológico, dos números complexos. Não à toa a fundamentação dos números inteiros será realizada pelo matemático alemão Hermann Hankel em um artigo sobre números complexos. Compreender a existência de um número imaginário (cujo quadrado é um número negativo) é da mesma estirpe

que conceber a existência de números negativos, números surdos, raízes falsas que não dizem nada. Número deixa de ser um estado, resultado de um processo de contagem ou medida para ser uma ação. A necessidade de estender as operações aritméticas para trabalharmos com esse novo conceito de números inteiros veio com o filósofo francês Condillac. Essa extensão se baseava em redefinir o significado das operações. Ele trabalhava com a diferença entre dois “dialetos”. A saber:

O dialeto da aritmética e o dialeto da álgebra: esse dialeto [a álgebra] tem regras que precisam ser conhecidas, e é uma nova gramática a ser aprendida. (CONDILLAC, 1981, p. 275). E ele advertiu: “Quando se misturam estes dois dialetos, não é possível evitar cair em expressões contraditórias” (CONDILLAC, 1981 p. 296).

Segundo Schubring (2002), foi com a operação de multiplicação que a mistura desses “dialetos” causou mais estranheza.

Classicamente, segundo Euclides VII, def. 15, a multiplicação foi definida somente para números inteiros: como adição repetida de um número, e assim com um papel assimétrico entre multiplicando e multiplicador. Devido a este papel assimétrico, foi admissível estender a multiplicação ao caso de repetir uma grandeza, então de multiplicar uma grandeza por um escalar. Mas a multiplicação entre duas grandezas foi excluída porque uma grandeza não pode funcionar como multiplicador. Porém, a prática na geometria e na física sempre voltava a exigir multiplicar duas grandezas – o que acarretou que o produto não mais fosse homogêneo ao multiplicando, como exigido pela definição da operação (SCHUBRING, 2002).

Entretanto, a solução definitiva para a explicação das “regras dos sinais” para os números inteiros é apresentada apenas por Hermann Hankel, no século XIX, no contexto do desenvolvimento da álgebra abstrata. Foi no seu trabalho “Teoria dos sistemas dos números complexos” (1867) que todos os obstáculos referentes aos números inteiros são ultrapassados. Em seu texto que trata da exposição formal da teoria dos números complexos, foi de passagem, a título preliminar, que ultrapassou formalmente os obstáculos dos números negativos. Assim, como diz Gleaser (2010), a trivialização dos números relativos se estendeu por mais de quinze séculos enquanto os números complexos só perturbaram os matemáticos por cerca de quatro séculos.

Hankel aborda o problema de uma perspectiva diversa, conhecendo as propriedades aditivas em \mathbb{R} e a multiplicação em \mathbb{R}^+ , propõe estender a multiplicação

de \mathbb{R}^+ para \mathbb{R} , respeitando o princípio da permanência, onde a existência da unicidade dessa extensão resulta no teorema: única multiplicação em \mathbb{R} , que estende a multiplicação usual em \mathbb{R}^+ , respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais. A seguir apresentamos os principais de seu argumento.

$$0 = a \times 0 = a \times (b + op. b) = ab + a \times (op. b)$$

$$0 = 0 \times (op. b) = (op. a) \times (op. b) + a(op. b)$$

Donde:

$$(op. a) \times (op. b) = ab$$

Um fato interessante a ser observado é que, em sua demonstração, o matemático alemão não utiliza o caráter ambíguo para o sinal de “-” (atributo o oposto). E, assim, no processo histórico temos um fechamento para a questão “por que menos vezes menos dá mais”? Contudo, o fato da operação matemática “menos vezes menos” resultar num número positivo gerou um desconforto na construção real do significado dessa operação em todo o processo de construção dos números relativos. Fato que persiste atualmente. Muitas mentes matemáticas foram traídas ao usar modelo comercial de crédito e débito para a explicar as operações com números positivos e negativos, recurso ainda utilizado pelos professores.

O modelo comercial, denominado assim por Glaeser (2010), baseia-se em problemas de balanço do tipo crédito/débito, ganho/perda, sobe/desce, presente/futuro, enche/esvazia etc. São modelos concretos, bastante comuns, que associam, por exemplo, ao sinal “+” o lucro e ao sinal “-” o prejuízo. Assim, alguém que perdeu R\$ 8,00 em um dia e no dia seguinte perdeu R\$8,00, perde ao todo R\$ 16,00. As contas são feitas da seguinte maneira: $-8 + (-8) = -16$ ou $2 \times (-8) = -16$. (MORETTI, 2012, p.699).

Glaeser (2010) na conclusão do seu artigo sobre a construção dos números inteiros “mostra precisamente um caso em que uma pedagogia baseada exclusivamente em exemplos concretos é perniciosa”. O ensino de números inteiros é, com efeito, a porta de entrada do ensino de álgebra na educação básica. Eis então

um dos grandes desafios da educação fundamental. Nos capítulos seguintes veremos como esse tema é abordado.

CAPÍTULO 2: AS DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Neste capítulo faremos uma revisão de literatura de dissertações no portal do PROFMAT e de artigos, dissertações e teses no portal da Capes, que discutem o aprendizado de números inteiros. Apesar da busca ter inúmeros resultados, destacamos abaixo, na tabela, os mais relevantes para o escopo deste trabalho, ou seja, aqueles que consideram de algum modo as dificuldades de aprendizagem de números inteiros e o uso de recursos digitais para o ensino deste tema.

Quadro 2: Listagem dos textos selecionados para a revisão

Nº	Autor	Título	Instituição/ Revista
1	Humberto Todesco	Um Estudo com os Números Inteiros nas Séries Iniciais: Reaplicação da Pesquisa de Passoni	PUC – SP 2006
2	Renata Siano Gonçalves	Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental.	PUC – SP 2007
3	Maurício De Souza Machado	Estratégias Pedagógicas com Uso de Tecnologia de Informação e Comunicação: Uma Abordagem Para a Construção de Conhecimento em Operações Aritméticas Básicas e nas Chamadas “Regras de Sinais”	PUC – SP 2010
4	Fabulo Eugenio Danczuk	Diversificação de Tarefas Como Proposta Metodológica no Ensino dos Números Inteiros	UTFPR 2016
5	<i>Lyvia Poggian Correia</i>	<i>Uma Intervenção no Ensino de Operações com Números Inteiros.</i>	UENF 2017
6	Francelise Ide Alves Ferreira	Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem Para o Estudo de Números Inteiros	UEL 2019
7	Brenda Pavão Garcez	Jogos de Matemática para a Aprendizagem de Números Inteiros no Ensino Fundamental: Propostas a Partir da Classificação Esar	UEMS 2021
8	Cibele Passos Bezerra Lara	Uma Proposta de Ensino dos Números Inteiros Baseada na Resolução de Problemas	UFES 2021
9	João Francisco Staffa Da Costa	Aprendendo Números Inteiros: Uma Experiência Baseada na Teoria dos Campos Conceituais	REMat 2023
10	Luiz Gustavo Alvez Silva	Jogos de Tabuleiro no Ensino de Números Inteiros: Uma Proposta de Sequência Didática	UNIFAL 2023

2.1. Dificuldades de aprendizagem no ensino de números inteiros

Os números inteiros hoje, é um tema consolidado na matemática acadêmica, mas, como discutimos no Capítulo 1, nem sempre foi assim. No ensino, as dificuldades na aprendizagem por parte dos alunos ainda permanecem. Para Oliveira (2020), em sua dissertação de mestrado (p.49), argumenta sobre as dificuldades enfrentadas por alunos no que diz respeito aos números inteiros. Segundo os PCN:

Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. (BRASIL, 1998, apud OLIVEIRA, 2020, p.49)

É citado também as dificuldades relacionadas ao próprio aprendizado, que Glaeser lista em seu artigo. Segundo a autora, ter conhecimento dessas dificuldades auxilia os professores a melhorarem suas estratégias no processo de aprendizagem dos alunos. Adiante, destaca a importância de os números inteiros serem trabalhados dentro das vivências dos alunos a fim de não ser um conteúdo isolado, sem sentido.

O PCN, também apresenta uma lista com as dificuldades encontradas pelos alunos ao aprender números inteiros:

- conferir significado às quantidades negativas;
- reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
- perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais por exemplo, é possível adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado, como também é possível subtrair um número de 2 e obter 9;
- interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo). (BRASIL, 1998, p. 98)

Na página 52, em sua dissertação, Oliveira (2020) apresenta os resultados das pesquisas realizadas por Nascimento (2004), Gonçalves (2007), Soares (2008),

Meister (2009) e Pontes (2010), que servem para reforçar a dificuldade dos alunos em trabalhar com Números Inteiros.

Podemos destacar a fala de Meister (2009):

A maioria dos alunos não compreende o significado e a ordenação desses números, como também as famosas “regras de sinais” que lhe são ensinadas. Eles conseguem aplicar normalmente e sem muitas dificuldades essas regras na multiplicação dos números inteiros, mas confundem-se ao operar com esses números na adição e subtração. (MEISTER, 2009, p. 43)

Já Gonçalves (2007) ressalta a importância da contextualização, “[...] *um dos empecilhos é o professor apresentar os Números Inteiros com atividades descontextualizadas, focalizando o ensino nos estudos das operações.*” (GONÇALVES, 2007, p. 82). Novamente, aparece a importância de se utilizar um exemplo que faça parte do universo do aluno, que esteja dentro de um contexto que lhe seja familiar.

Segundo Garcez (2021), tendo como referência o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2017, 33% dos alunos do 5º ano e 63% do 9º ano do ensino fundamental apresentaram níveis insuficientes em Matemática. Temos clareza que essa dificuldade abrange não apenas os números inteiros, mas, por outro lado, reconhecemos que o ensino desse tópico contribui de forma negativa para esse resultado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, na década de 90, destacavam que a aprendizagem desse conteúdo é insatisfatória, muitas vezes se limitando à memorização de regras sem compreensão significativa. Há a necessidade de um ensino que promova a compreensão dos números inteiros como uma extensão dos números naturais, em vez de apenas decorar regras.

Os alunos frequentemente não compreendem por que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo. A analogia de multiplicar duas dívidas para obter lucro é usada para ilustrar essa confusão, pois não faz sentido lógico. Além disso, alunos que já conhecem as regras de sinais podem cometer erros ao aplicar essas regras em operações de soma. Por exemplo, ao calcular $-2 - 3$, alguns alunos podem erroneamente atribuir o resultado como $+5$, confundindo a regra de sinais da multiplicação com a da soma, o que representa um obstáculo didático.

Assim, entender como funciona a aprendizagem de números inteiros se torna algo urgente. Outro ponto a ser observado é a duplicidade de significados para os sinais “+” e “-”. Segundo Ferreira (2019):

Há neste conjunto numérico uma mudança em relação ao significado dos sinais de mais e de menos, que além de operadores agora também tem o significado de predicativos o que causa confusões e dúvidas que acompanham os alunos até o Ensino Médio. (FERREIRA, 2019, p.10)

A dissertação tem início com o relato da experiência da autora em sala de aula, onde, ao longo dos anos, ela observa a recorrente dificuldade dos alunos em relação aos números inteiros e suas operações. O conjunto dos números inteiros, de fato, gera confusão, especialmente no que diz respeito aos significados dos sinais de adição e subtração. Quando essa dificuldade não é superada no momento adequado, pode acarretar sérios prejuízos no processo de aprendizagem. Trata-se de um desafio antigo: como aponta Glaeser, durante mais de 1.500 anos, diversos obstáculos dificultaram a compreensão desses conceitos. Por isso, é compreensível a resistência frequentemente observada em sala de aula em relação aos números inteiros. Por exemplo, na sentença a seguir, $(+5) - (-3) = (+5) + (+3)$, que está correta, temos dois significados distintos associado ao sinal de “-”, o da operação de “subtração” e o que indica o “atributo” do número (ele é negativo). Além disso, para que aparecesse o sinal da adição na sentença, outro sinal de “-” operou implicitamente, o de “oposto” (ou elemento simétrico): $(+5) - (-3) = (+5) + [-(-3)] = (+5) + (+3)$.

Das dificuldades enfrentadas, destacamos o produto de números inteiros como sendo uma das principais. Como dito na epígrafe do artigo de Glaeser: *“Minus times Minus equals Plus: The reason for this we need not discuss”*, isto é, saber por que um número negativo multiplicado por um número negativo é positivo foi e (ainda é) a maior dificuldade na aprendizagem deste tópico. Danczuk (2016) corrobora esse fato.

Um dos obstáculos que se nota com bastante frequência é a falta de sentido real quando se multiplicam dois números negativos e se obtém um resultado positivo. Não faz sentido multiplicar duas dívidas e obter um lucro. Outra situação se apresenta quando os alunos já são conhecedores das regras de sinais e, erroneamente, atribuem resultado +5 quando a expressão é $-2 - 3$, por exemplo. Isso ocorre devido o aluno tentar aplicar a regra de sinais na soma, um obstáculo didático criado a partir da regra de sinais para a multiplicação. (DANCZUK, 2016, p.31)

Machado (2010) retrata bem a dificuldade dos seus alunos relacionadas a regra de sinais:

Ao se depararem com as dificuldades, os alunos solicitaram que fosse colocada na lousa a chamada 'tabela com as regras de sinais'. Respondi que não sabia do que se tratava e logo os alunos começaram a explicar: "- Menos com menos dá mais, mais com menos dá menos", e assim por diante. (MACHADO, 2010, p.20)

O autor relata o trecho acima após os alunos apresentarem dificuldades relacionais à regra de sinais dos números negativos, estando na segunda série do ensino médio em uma escola estadual do estado de São Paulo. Acredito que continuemos passando por essa problemática, e a pergunta que fez com que o autor buscasse novas ferramentas para explorar esse conteúdo, continua pertinente, como podemos minimizar os problemas em relação às quatro operações com números inteiros?

2.2. Qual a razão para essas dificuldades de aprendizagem?

Embora a BNCC proponha que alunos do 7º ano sejam capazes de manipular quantidades e operações com números negativos, o que se vê no alunado da educação básica em geral é uma grande dificuldade de compreensão e outras vezes um conhecimento raso, baseado em decorar regras, sem entender o porquê.

O que diz a literatura acadêmica? À que (ou, à quem) os pesquisadores atribuem essas dificuldades? À Metodologia? À formação do professor? À falta de recursos didáticos para o ensino desse tópico?

Para, Costa (2023):

[...]Tal dificuldade pode ter origem no fato desse conjunto numérico ter surgido de uma necessidade interna da Matemática – algébrica - e não como uma demanda prática, como os números naturais, cujo surgimento está associado à contagem (SÁ; ANJOS, 2011, apud COSTA, 2023, p.2)

De fato, o trecho acima deixa uma reflexão acerca de como os números inteiros não são necessariamente uma demanda prática do dia a dia como os números

naturais. Correia (2017), ao citar os trabalhos de *Barbosa e Carvalho (2008)* e *Soares (2008)*, corrobora esse raciocínio.

Então, as situações utilizadas na sala de aula são diferentes das situações cotidianas, ou seja, os significados dos conceitos que o aluno vivencia na escola são distintos dos vivenciados diariamente. Barbosa e Carvalho (2008, p. 8) dizem que pesquisas educacionais, realizadas ao longo dos anos, apontam que o processo de ensino-aprendizagem é muito complexo e conclui-se que a aprendizagem matemática é fundamentada na compreensão, e não apenas no ato de decorar conteúdo.

[...] muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente por não terem desenvolvido uma compreensão significativa desse conjunto numérico, sobretudo no que tange ao número inteiro negativo (SOARES, 2008, p. 17).

Assim sendo, o aluno não irá saber gerir conhecimentos matemáticos em sua vida se tais conhecimentos, na escola, não traduzirem a realidade. Além disso, o ensino desvinculado de situações reais pode provocar no aluno uma série de dificuldades no desenvolvimento de operações envolvendo números inteiros, o que não prejudicará apenas a aprendizagem deste conjunto numérico, mas também de muitos outros conteúdos posteriores. (CORREIA, 2017, p.25-26)

É uma problemática complexa para ser generalizada, porém, seus argumentos não são errados ao mostrar um professor que não consegue enxergar as dificuldades dos seus alunos e não apresenta propostas que possam fazê-los superar os obstáculos que surgem durante a aprendizagem. Portanto essa problemática não é simples, e identificar um culpado não faça sentido, mas sim, quais mudanças devemos adotar para melhorar esse cenário.

O ensino de números inteiros é um problema para os professores. Na maioria das vezes os professores tendem a repetir os ensinamentos mecânicos que recebeu durante sua jornada escolar. Para quebrar esse ciclo, devemos integrar as adaptações necessárias para que a aprendizagem faça sentido ao aluno. Como diz Danczuk (2016):

O professor precisa tomar consciência de que as adaptações no processo de ensino são constantemente necessárias assim como foram as adaptações no próprio desenvolvimento da Matemática. As constantes mudanças na sociedade alavancam nosso trabalho a fim de apresentar alternativas pertinentes ao professor na tentativa de melhorar o ensino da Matemática. (DANCZUK, 2016, p.42)

A fundamentação teórica necessária para o ensino dos números inteiros enfatiza a importância de uma abordagem que vá além da memorização de regras. A

relevância de compreender os conceitos matemáticos de forma contextualizada é destacada, utilizando diferentes representações e estratégias de ensino que favoreçam a construção do conhecimento. Obstáculos epistemológicos enfrentados pelos alunos, como a confusão entre as regras de sinais e a falta de sentido nas operações, podem dificultar a aprendizagem. Tudo isso deve ser de conhecimento do professor.

Momentos reflexivos entre professores e alunos são cruciais, permitindo a análise do desempenho nas tarefas propostas e a discussão de erros e acertos. Essa reflexão contribui para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos números inteiros. A formação contínua dos educadores é essencial para a aplicação eficaz dessas abordagens em sala de aula.

Em seu artigo, Machado (2010) complementa que ele próprio ainda não havia encontrado uma maneira de responder a seguinte indagação: “-Como minimizar os problemas em relação às quatro operações com números inteiros?” Na introdução do artigo ele relata acerca do que o motivou a escrever sobre o tema e também o que possibilitou buscar novas ferramentas a fim de auxiliar seus alunos no ensino e aprendizagem, principalmente sobre as regras operacionais envolvendo números inteiros. Seu relato reforça o que se vive atualmente em sala de aula, onde professores se deparam com alunos que não tem domínio sobre determinados conteúdos e conceitos necessários para alcançar certos objetivos propostos, fazendo com que professores precisem se reinventar e buscar formas de sanar lacunas que impossibilitam a plena compreensão do discente.

2.3. Propostas e encaminhamentos

Mas afinal, o que os pesquisadores propõem como encaminhamentos?

Para Danczuk (2016):

A inserção de situações contextualizadas, materiais manipuláveis e jogos, quando combinadas ao uso da linguagem matemática, viabilizam um trabalho didático que pode contribuir para a superação dos obstáculos epistemológicos, quando esclarece escolhas realizadas ao longo do trajeto de construção do conhecimento matemático. (DANCSUK, 2016, p.18)

Quando o professor utiliza situações do cotidiano, materiais que os alunos podem tocar e manipular, e jogos, ele torna o ensino da matemática mais próximo da realidade dos estudantes. Ao combinar essas abordagens com a linguagem matemática adequada, o ensino se torna mais claro e acessível. Isso ajuda a superar dificuldades que os alunos possam ter em entender conceitos matemáticos, esclarecendo as razões por trás das escolhas feitas durante o processo de aprendizagem.

Além dessa mudança na abordagem, devemos diversificar os formatos de abordagem, assim, a inserção de tecnologias digitais para ensinar números inteiros é um desses caminhos. De acordo com Silva (2023):

Todavia, há alternativas para se introduzir conceitos matemáticos formais como esses de Aritmética na educação básica. Por exemplo, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 276) aponta que “recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica” exercem uma função fundamental na compreensão e utilização das ideias matemáticas. (SILVA, 2023, p.12)

O texto fala sobre a importância de se utilizar outros métodos, durante o ensino-aprendizagem, para que os alunos sejam capazes de buscar caminhos alternativos na busca de compreenderem conteúdos que possam apresentar um nível maior de abstração matemática, como acontece com os números inteiros. Nesse sentido, acreditamos que o uso de recursos digitais pode ser útil para dar sentido aos números negativos. Com a criação dos números inteiros e números complexos, o número ganha um novo status: deixa de ser um estado, resultado de uma medida de uma grandeza ou processo de contagem, para ser uma ação. Para Piaget (1949), ao se entender que um número simboliza uma ação, não um estado, alguns obstáculos epistemológicos presentes nas concepções dos matemáticos poderiam ser superados.

Tais hesitações do grande d'Alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral. De fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são suscetíveis de gradação. Espantoso é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática, não tenha levado um espírito tão voltado para o concreto e pouco dado as considerações mecânicas como d'Alembert a entender que a natureza

essencial do número não é nem estática nem perceptiva e, sim, muito dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações. (PIAGET, 1949, *apud* GLAESER, 2010, p. 3-4)

Estamos de acordo com a explicação de Piaget comporta uma grande dose de verdade, porém entendemos essa discussão não esgota o assunto. Os números positivos, nesse novo contexto numérico, também possuem um caráter dinâmico.

Quanto ao uso de tecnologias digitais para o ensino de números inteiros relativos, Lara (2021) consegue, em seu texto de dissertação, expressar bem essa ligação entre a aprendizagem matemática, em particular para números inteiros, e o uso de tecnologias digitais, associada a metodologia de Resolução de Problemas

Na atividade se utiliza o PhET interactive simulation desenvolvido pela Universidade do Colorado. Nele estão disponíveis diversos simuladores (na atividade se utilizará o simulador de Linhas numéricas: inteiros). Optou-se por utilizar esse simulador porque fracamente ele está bastante atraente e adaptou-se perfeitamente a metodologia Resolução de Problemas, pois, por meio das indagações que serão feitas aos estudantes, eles irão compreender os conceitos e o docente poderá formalizá-los. (LARA, 2021)

Segundo Lara (2021), em consonância com as ideias de Schultz (1994 *apud* FERREIRA, 2007, p. 52 e 53), o uso de tecnologias também desenvolve

[...] um impacto no currículo de Matemática em pelo menos quatro vertentes:

- (a) Facilitar os cálculos, podendo assim utilizar-se dados reais nos problemas;
- (b) Facilitar a aprendizagem de conceitos;
- (c) Suscitar a necessidade de aprender novos conceitos;
- (d) Adquirir novas capacidades. (LARA, 2021)

Assim, como Lara (2021), acreditamos que podemos integrar o uso de tecnologias digitais para auxiliar na aprendizagem de números inteiros. Para isso, pretendemos com essa dissertação construir uma sequência didática, baseada na utilização de ferramentas digitais como uma possível contribuição para um ensino de números inteiros relativos mais realista e significativo para alunos do Ensino Fundamental. Antes, porém, vamos verificar alguns dos principais livros didáticos nacionais para ver como eles abordam esse importante tema da educação básica. Nosso foco é observar se eles sugerem ou usam (e como usam) algum recurso digital para o ensino de números inteiros.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

As ferramentas tecnológicas são importantes para as aulas de matemática, visto que são fortes aliadas para um melhor entendimento dos assuntos abordados durante as aulas, no caso do ensino de números inteiros temos dificuldade de encontrar ferramentas que nos auxiliem no aprendizado dos alunos. Em meio a tantos recursos, como jogos digitais, softwares, aplicativos, sites e planilhas eletrônicas, muitas vezes nos sentimos preenchidos com possibilidades, porém são poucos os recursos para o ensino de números inteiros.

Diante disso, decidimos fazer uma análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD⁶ com o objetivo de analisar os recursos ofertados nas obras, buscando aqueles que podem ser usados para ensinar números inteiros. Selecionamos cinco obras de diferentes editoras em busca dessas ferramentas:

- **Matemática Bianchini: 7º Ano:** manual do professor / Edwaldo Bianchini
- **SuperAÇÃO: matemática 7º ano:** manual do professor / Organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira
- **Geração alpha matemática: 7º ano:** ensino fundamental: anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita; editora responsável Isabella Semaan; organizadora SM Educação; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.
- **Matemática e realidade: 7º ano** / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado
- **A conquista da matemática: 7º ano:** ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci.

⁶ PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático, é um programa do governo brasileiro que visa avaliar, adquirir e distribuir obras didáticas, pedagógicas e literárias, além de outros materiais de apoio à prática educativa, para escolas públicas de educação básica.

3.1. Matemática Bianchini: 7º Ano

Figura 3: Capa do livro *Matemática Bianchini: 7º Ano*



Fonte: <https://pnld.moderna.com.br/colecao/fundamental-2/matematica/matematica-bianchini-2/>

O livro do Bianchini (2022), *Matemática Bianchini: 7º Ano*, aprovado pelo PNL D 2024, apresenta nas orientações gerais no tópico *Propostas didáticas* uma sessão para defender o uso de tecnologias nas aulas de matemática, dando ênfase na calculadora e nos softwares de geometria dinâmica.

Outra possibilidade de aprofundar os conhecimentos matemáticos com o auxílio de tecnologia é o uso de *softwares* e aplicativos, conforme a disponibilidade da escola. Por exemplo, no campo geométrico, *softwares* de geometria dinâmica permitem a construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, a investigação e a verificação de propriedades geométricas, entre outras possibilidades.

O uso consciente da internet também deve fazer parte da educação escolar. É importante que os estudantes saibam fazer pesquisas em ambientes confiáveis como também se proteger de notícias falsas ou de outros perigos presentes nos ambientes virtuais. Cabe aos professores e à comunidade escolar fazer com que a inclusão digital desempenhe um papel significativo no processo de aprendizagem, pois ela procura formar cidadãos com capacidade de interagir com outros e compartilhar decisões/informações que propiciem a lógica da informação a serviço da interatividade. (BIANCHINI, 2022)

Ainda em seu texto introdutório, o autor destaca a importância de verificar as informações coletadas na internet bem como a missão fundamental do professor de

matemática de promover o pensamento computacional e como o desenvolvimento dessa habilidade é essencial para a resolução de problemas. O livro apresenta os números inteiros no capítulo 1, onde desenvolve os seguintes conteúdos:

- Conceito e emprego do número inteiro em diferentes situações;
- Representação de números inteiros na reta numérica;
- Módulo e simétrico;
- Comparação de números inteiros;
- Resolução e elaboração de problemas com números inteiros envolvendo as operações de: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada;
- Interpretação de dados organizados em gráficos e tabelas.

Desenvolvendo as seguintes habilidades e competências da BNCC:

- Habilidades: (EF07MA03), (EF07MA04), (EF07MA05), (EF07MA06)
- Competências gerais: 1, 2, 4, 6, 9 e 10
- Competências específicas: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8

Durante o texto explicativo, usa “modelo bancário” para introduzir o conceito de números inteiros. Apesar de trabalhar com o conceito de zero, só apresenta a representação na reta na seção dois, também definindo o conceito de módulo, abrindo caminho para definir números opostos na próxima seção. Detalhe para a representação da reta que é orientada nos dois sentidos, podendo causar problemas de interpretação na visualização dos alunos. A orientação da reta numérica, é da esquerda para a direita, não tendo cabimento usar as setas nos dois sentidos da reta.

Na seção quatro os números inteiros são comparados. Os exemplos de todas essas primeiras seções são sempre associados a situações envolvendo temperaturas abaixo ou acima de zero, altitudes acima ou abaixo do nível do mar e saldo bancário positivo (crédito) ou negativo (débito).

A sua apresentação da operação de adição é muito bem construída, usando a reta como base e articulando as representações geométricas e algébricas para dar sentido à operação:

Acompanhe como podemos adicionar números inteiros usando uma reta numérica.

Partindo do zero, em primeiro lugar, andamos as unidades indicadas na primeira parcela e, em seguida, andamos as indicadas na segunda parcela. Chegamos, então, a um ponto cuja abscissa é a soma dos números dados.

Vamos estabelecer que o deslocamento será:

- para a direita, se o número for positivo;
- para a esquerda, se o número for negativo. (BIANCHINI, 2022)

Em seguida apresenta alguns exemplos de como efetuar as somas. Para ensinar a subtração de dois números inteiros se utiliza do fato desta ser equivalente a adição do primeiro com o oposto do outro.

Para a multiplicação explica a regra dos sinais usando a definição de oposto de um número inteiro, como no exemplo:

O produto $(-2) \cdot (+4)$ pode ser representado por $-[(+2) \cdot (+4)]$.

Como $(+2) \cdot (+4) = 8$, obtemos: $-[(+2) \cdot (+4)] = -8$.

Portanto, $(-2) \cdot (+4) = -8$.

Multiplicamos um número negativo por um número positivo, e o resultado foi um número negativo. (BIANCHINI, 2022)

Após definir multiplicação, define divisão, potenciação e raiz quadrada de números inteiros. Ao longo de todo o texto não apresenta nenhum recurso digital ao apresentar os números inteiros. Já no final do livro apresenta algumas leituras sugeridas, mas nenhum site de referência com aplicativos ou jogos.

Os recursos tecnológicos neste livro aparecem:

- Na p.20 na seção “*Adição*” usa a calculadora para somar números inteiros.
- Na p.69 na seção “*Pense mais um pouco...*” usa a calculadora para multiplicar números decimais.
- Na p.102 na seção “*Ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal com o uso de software*”, usa ferramenta de geometria dinâmica, semelhante ao Geogebra para determinar os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Na p.208 na seção “*Porcentagem*” com o uso da calculadora para calcular porcentagens.

Além disso, apresenta alguns exercícios ao longo da obra, usando a calculadora como ferramenta para a resolução de exercícios.

Apesar de dar argumentos para o uso de tecnologias em sala de aula e de apresentar as atividades acima usando tecnologia, não há um setor específico para o uso de tecnologia no planejamento do livro. No guia do professor, sequer apresenta uma lista para consulta de atividades digitais ou aplicativos sugeridos, principalmente para o ensino de números inteiros relativos.

3.2. SuperAção: Matemática 7º Ano

Figura 4: Capa do livro *SuperAção: Matemática 7º Ano*



Fonte: <https://pnld.moderna.com.br/colecao/fundamental-2/matematica/superacao-matematica/>

O livro *SuperAção* (2022) apresenta no guia do professor um texto enfatizando a importância dos objetos tecnológicos para a sala de aula e sobre a inserção dos alunos no ambiente digital, mas não apresenta argumentos para o quão prejudicial pode ser a exposição excessiva dos alunos e o vício que pode surgir com essa exposição. Ao apresentar a estrutura da obra, mostra que:

Em vários momentos desta coleção, são apresentados exemplos e atividades que demandam a utilização de calculadora e computador. Na seção **Instrumentos e softwares**, há orientações para o uso das calculadoras comum e científica, *softwares* de geometria dinâmica e planilha eletrônica, além de instrumentos como régua, esquadro e compasso. Além dessa seção, indicamos, com um ícone, atividades

que, para serem resolvidas, os estudantes precisarão utilizar alguns dos recursos mencionados na seção **Instrumentos e softwares**, aplicando conhecimentos adquiridos. (SUPERAÇÃO, 2022)

Ainda no guia do professor apresenta os tópicos que abordará para trabalhar com números inteiros na *Unidade 2* do livro:

- *Números inteiros.*
- *Números inteiros na reta numérica.*
- *Comparação entre números inteiros.*
- *Adição com números inteiros.*
- *Subtração com números inteiros.*
- *Multiplicação com números inteiros.*
- *Divisão com números inteiros.*
- *Potenciação com números inteiros.*

Tendo como título “*Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações*”, o texto desenvolve as habilidades EF07MA03 e EF07MA04, e as competências específicas: 1, 6; competências gerais: 1, 2, 9. O tema tecnologias encontra-se distribuído em todo o livro, encontramos a sessão “*Instrumentos e softwares*” nas páginas: 68, 126, 157, 177, 183, 242, 253, 263 e 267.

Na seção de números inteiros do livro do aluno, após apresentar o conteúdo, o texto apresenta uma subseção, nas páginas 68 e 69, para falar sobre o uso da calculadora científica para trabalhar com números negativos (figuras 5 e 6). Este é o único momento no texto em que o uso de algum recurso tecnológico é evocado para ensinar números inteiros.

Figura 5: Livro SuperAção: Matemática 7º ano página 68

Operações com números inteiros na calculadora científica

Neste tópico, vamos conhecer algumas funções da calculadora científica e usar essa ferramenta para adicionar, subtrair, multiplicar, dividir e até mesmo efetuar potenciações envolvendo números inteiros.

Instrumentos e softwares

A calculadora científica

Ao digitar uma tecla numérica da calculadora, digamos 3, ela sempre vai registrar um número inteiro positivo no visor. Uma maneira de registrarmos o número -3 , por exemplo, é digitar a tecla com a operação de subtração antes do algarismo. No entanto, podemos encontrar outra tecla com um sinal de menos ($-$) que é utilizada exclusivamente para fazer a mudança de sinal do número. Ela torna os cálculos envolvendo números inteiros negativos mais confiáveis e práticos do que o primeiro método, com a tecla da operação. Vamos usar essas e outras teclas nesta seção.



Os parênteses são necessários em alguns modelos de calculadoras científicas. Apresentamos a seguir alguns exemplos de cálculos com números inteiros.

Adição e subtração

$$\bullet (-4) + 3$$

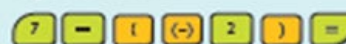
Digite as teclas:



Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $(-4) + 3$.

$$\bullet 7 - (-2)$$

Digite as teclas:





Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $7 - (-2)$.

Figura 6: Livro SuperAção: Matemática 7º ano página 69



Multiplicação e divisão

• $7 \cdot (-9)$
 Digite as teclas:

Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $7 \cdot (-9)$.


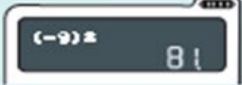
• $(-10) : (-5)$
 Digite as teclas:

Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $(-10) : (-5)$.


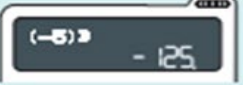
Potenciação

• $(-9)^2$
 Digite as teclas:


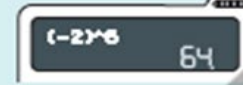
Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $(-9)^2$.

• $(-5)^5$
 Digite as teclas:

Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $(-5)^5$.

• $(-2)^6$
 Digite as teclas:

Visor de uma calculadora apresentando o resultado de $(-2)^6$.

De modo geral, o procedimento para o cálculo pode ser diferente em algumas calculadoras, como a do aplicativo calculadora do *smartphone*.



Atividades Faça as atividades no caderno.



88. Efetue os cálculos com a calculadora científica.

a) $15 + (-17)$ c) $(-44) \cdot 12$ e) $125 : (-25)$ g) $(-15)^2$
 b) $(-7) + (-9)$ d) $(-3) \cdot (-18)$ f) $(-147) : (-3)$

88. Respostas: a) -2; b) -16; c) -528; d) 54; e) -5; f) 49; g) 225.

89. Jília e Fernando efetuaram $(-5)^4$ na calculadora científica da seguinte maneira.

• Jília:  

• Fernando:  

Note que o visor apresentou resultados com sinais opostos. Quem obteve o resultado correto de $(-5)^4$? Explique por que isso aconteceu.

69

Fonte: Livro SuperAção (2022)

Como pode ser visto nas imagens anteriores, a interação do aluno com o recurso é passiva. Cabe a ele, apenas, a constatação de um cálculo que a própria calculadora efetuou. Certamente não é essa participação que estamos pleiteando para o uso dos recursos tecnológicos.

No final da obra, é apresentada uma seção intitulada *Sugestões complementares* que, fica limitada a sugerir livros complementares, sites, podcasts etc., como podemos ver na imagem abaixo.

Figura 7: Livro SuperAção: Matemática 7º ano páginas 286

Locais de visita

- **Museu da Matemática UFMG.** Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Campus Pampulha. Av. Antônio Carlos, 6627. Belo Horizonte, MG. Contato: museudamatematicaufmg@gmail.com.

O Museu da Matemática UFMG oferece um espaço para explorar elementos da matemática recreativa, como quebra-cabeças geométricos, jogos de tabuleiro, mágicas, enigmas aritméticos, dobradura de papel, paradoxos, desafios, ou simplesmente a matemática com um toque de curiosidade. Assim, o espaço proporciona uma experiência divertida e de descontração aos visitantes, além de oferecer uma exposição sobre Matemática e Arte e diversas oficinas.

- **Museu do Amanhã.** Praça Mauá, 1, Centro. Rio de Janeiro, RJ. Contato: contato@museudoamanha.org.br.

O Museu do Amanhã é um museu de ciências diferente. Ele mostra como poderemos viver e criar os próximos 50 anos. Uma jornada rumo a futuros possíveis baseada em grandes perguntas que a humanidade sempre fez: De onde viemos? Quem somos? Onde estamos? Para onde vamos? Como queremos ir? É um museu para ampliar nosso conhecimento e transformar nosso modo de pensar e agir. Orientado por valores éticos de sustentabilidade e convivência, essenciais para a nossa civilização, o museu busca promover a inovação, divulgar os avanços da ciência e publicar os sinais vitais do planeta.

Sites

- **IBGE.** Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/pt/Inicio.html>. Acesso em: 6 jul. 2022.

Esse site contém diversas informações estatísticas sobre o Brasil, incluindo dados a respeito da população, da economia, dos estados, dos municípios e outros.

- **Portal do Professor.** Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/recursos/9712/geometria/sobre.htm>. Acesso em: 12 mar. 2022.

Nesse site, são apresentadas atividades que envolvem figuras geométricas espaciais fazendo uma conexão entre as formas geométricas e as construções arquitetônicas das cidades.

- **Simetria.** Disponível em: <https://seara.ufc.br/pt/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/secoes-especiais-fisica/simetria/>. Acesso em: 14 mar. 2022.

Esse site apresenta uma feira de ciências que expõe figuras planas simétricas. Além disso, mostra o conceito e as propriedades de simetria e como são intensamente usados pela Física, a Química e a Biologia. As seções do site informam utilidades técnicas da simetria. Depois de lê-las, você passará a ver as simetrias que nos rodeiam com outros olhos, descobrindo detalhes e conexões que antes passavam despercebidas.

Podcasts

- **MULHERES na Matemática: Hipátia de Alexandria.** Spotify, nov. 2020. Disponível em: <https://open.spotify.com/episode/SIArD39RsGMdTapbnUf1b>. Acesso em: 12 mar. 2022.

O podcast Mulheres na Matemática é um projeto de pesquisa do GESTEC que conta com a participação de pesquisadoras e alunas da Instituição, além de colaboradores externos. Nesse episódio, você conhecerá a primeira mulher a ser considerada matemática reconhecida pela história. Hipátia de Alexandria nasceu em 370 d.C. e uma de suas grandes contribuições foi a invenção do hidrômetro. Ela estudou em Atenas, na Grécia, e foi professora na cidade egípcia onde nasceu. Era conhecida por tratar todos os seus alunos igualmente. Escreveu manuscritos e comentários a respeito de trabalhos de matemáticos muito importantes.

Imagem não publicada. Ar. 1184 e. Coleção Prof. José Carlos de Souza de 1188.

286

Fonte: Livro SuperAção (2022)

De modo geral pode-se dizer que o livro faz menção ao uso de ferramentas tecnológicas, apresentando ferramentas e objetos durante boa parte da obra. Na seção de sites sugeridos no final do livro destacamos o portal do professor, local onde

podemos encontrar uma gama de ferramentas digitais e produções de jogos para a educação. Porém ao analisar a unidade 2, que apresenta os números inteiros, somente faz referência ao uso da calculadora científica como ferramenta.

3.3. Geração Alpha Matemática: 7º Ano

Figura 8: Capa do Livro *Geração Alpha Matemática: 7º ano*



Fonte: <https://pnld.smeducacao.com.br/obras/pnld-2024-geracao-alpha-matematica/>

Oliveira (2022), em sua coleção *Geração Alpha Matemática: 7º ano*, não comenta nem apresenta nenhuma ferramenta digital no guia do professor, nem sequer comenta sobre possíveis usos desses recursos para o desenvolvimento de alguma atividade. Em seu planejamento apresenta os números inteiros na Unidade 1: Números, nos capítulos 2 e 3, com os seguintes conteúdos:

- Conjunto dos números inteiros
- Representação dos números inteiros na reta numérica
- Comparação e ordenação de números inteiros
- Módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro
- Oposto (ou simétrico) de um número inteiro

- Operações com números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão
- Propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros
- Operações inversas
- Expressões numéricas envolvendo números inteiros

O texto desenvolve as habilidades EF07MA01, EF07MA03 e EF07MA04, além de contemplar a competência geral 9, as competências específicas 1 e 4, e trabalhar o tema contemporâneo transversal Meio Ambiente.

Já no texto do aluno, apresenta o software de geometria dinâmica para verificar as relações entre ângulos alternos e ângulos colaterais, translação de figuras geométricas; também usa planilha eletrônica para resolver alguns exercícios. Contudo, com relação aos números inteiros relativos, utiliza-se apenas da calculadora para realizar operações com números inteiros.

No material de apoio do professor apresenta sugestões de leituras muito interessantes para aprofundamento do estudo dos obstáculos epistemológicos dos números inteiros. E, além disso, apresenta jogos como sugestão para o professor. Porém não aprofunda a discussão do artigo sugerido, não apresenta os jogos nem explica como podem ser utilizados em sala de aula, apenas comenta como seus alunos lidaram ao jogá-los. Já no final do livro, apresenta lista de siglas e uma bibliografia comentada. Contudo não aparece nenhuma referência para uso de ferramentas digitais para o ensino de números inteiros, a não ser, como foi dito aqui, um exemplo (p.46) em que sugere o uso de uma calculadora para soma algébrica de números inteiros:

Figura 9: Recorte da página 46 do livro


Adição e subtração de números inteiros com a calculadora

Podemos realizar operações com números inteiros com o auxílio da calculadora. Observe alguns exemplos.

Exemplos

A. Veja como efetuar a adição $(+714) + (-137)$ na calculadora.

• Digitamos na calculadora: 

• Aparecerá no visor: 

Essa tecla inverte o sinal do número que está no visor.

B. Veja como efetuar a subtração $(-196) - (+348)$ na calculadora.

• Digitamos na calculadora: 

• Aparecerá no visor: 

Fonte: Oliveira (2022)

3.4. Matemática e Realidade: 7º Ano

Figura 10: Capa do livro *Matemática e Realidade*

Fonte: <https://www.edocente.com.br/pnld/obra/matematica-realidade-7o-ano-pnld-2024-objeto-1-anos-finais-ensino-fundamental/>

O texto aborda o tema números inteiros na unidade temática *Números*, no objeto de conhecimento *Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações*, considerando as seguintes habilidades:

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

Ao abordar a estrutura do livro apresenta a importância do uso de ferramentas digitais na sala de aula, chega a dar um exemplo no uso de planilhas eletrônicas para produzir gráficos, como podemos ver no trecho abaixo:

As tecnologias fazem parte da vida de todos nós, e os jovens lidam com esses recursos na maior parte do tempo utilizando diversos aplicativos para comunicação, entretenimento, armazenagem de documentos, entre outros. A ambientação com as tecnologias deve adentrar as salas de aula e fazer parte do ensino e da aprendizagem em Matemática. Diante desse cenário, essa seção sugere a você e aos estudantes a exploração do uso de *softwares* e aplicativos para resolver e modelar problemas de Matemática e simular variações de parâmetros, tornando a aprendizagem mais dinâmica e interativa. (IEZZI, 2022)

Ao explicar a estrutura da obra apresenta a sessão *Matemática e Tecnologias*:

Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização do Geogebra e de planilhas eletrônicas na seção *Matemática e tecnologias*, presente em todos os volumes. (IEZZI, 2022)

Nela apresenta o Geogebra, a planilha eletrônica e a calculadora como ferramentas possíveis de uso no cotidiano escolar. Também comenta sobre a possibilidade de usar computadores e outros tipos de ferramentas, como programas e jogos. No final do guia, apresenta uma lista de sites:

1. www.bussolaescolar.com.br

Com *links* para todas as disciplinas escolares, traz uma seção de jogos variados. Clicando em “Matemática”, há temas classificados em Ensino Fundamental, Ensino Médio, Geometria e História da Matemática.

2. www.cabri.com (em inglês)

Cabri-geometre é um *software* educacional desenvolvido especialmente para o ensino de Geometria. No *site* é possível encontrar versões demo para baixar e testar, além dos manuais para utilização.

3. www.geogebra.org (em inglês)

Disponibiliza o *software* GeoGebra, especialmente desenvolvido para o ensino de Álgebra e Geometria.

4. www.gregosetroianos.mat.br

Apresenta informações matemáticas diversificadas em linguagem acessível com gráficos animados, artigos, exercícios resolvidos e uma seção sobre erros mais comuns em Matemática.

5. www.matematica.br

Desenvolvido por professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), o *site* traz informações classificadas por temas matemáticos, informações históricas e indicações de programas e cursos.

6. www.obm.org.br

Traz todas as provas realizadas nas edições da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), com os exercícios resolvidos.

7. www.obmep.org.br

Você encontra todas as provas das edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), com as questões resolvidas. Além disso, públicas bancos de atividades com questões aplicadas em olimpíadas nacionais e internacionais.

8. www.somatematica.com.br

Portal com dicas, curiosidades e material de apoio, incluindo jogos, indicações de livros, DVDs e outros materiais. Conta com uma comunidade virtual, um fórum e um espaço para contato entre professores e estudantes.

9. www2.mat.ufrgs.br/edumatec

Além de artigos e orientações sobre o uso de tecnologias, o *site* disponibiliza *softwares* especialmente desenvolvidos para o ensino de Matemática.

10. <https://mentalidadesmatematicas.org.br/>

O Mentalidades Matemáticas é uma cocriação do Instituto Sidarta e do Centro de Pesquisas YouCubed, da Universidade de Stanford, cujo objetivo é discorrer sobre os desafios atuais de equidade e letramento matemático. (IEZZI, 2022)

Esses sites serão analisados em momento mais oportuno nesta dissertação, dando foco sobre as ferramentas adequadas para o ensino de números inteiros. O manual do professor ainda apresenta uma lista de livros e sites com textos e ferramentas que inserem ferramentas digitais:

Livros

1. *Escritos sobre tecnologia educacional e educação profissional*, de Jarbas Novelino Barato (São Paulo: Senac, 2002).

O autor analisa questões que considera fundamentais da educação atual, como o uso do computador nos espaços educacionais, a sociedade do conhecimento, os novos meios de comunicação, a natureza do saber técnico, o ensino de técnicas e competências no âmbito da educação profissional e a avaliação do “saber fazer” dos trabalhadores.

2. *A árvore do saber-aprender*, de Hélène Trocmé-Fabre (São Paulo: Triom, 2004).

Essa obra pode conduzir a uma reflexão filosófica sobre a modernidade por abordar questões vitais transdisciplinares. Apresenta uma história e uma modelização para a criação do conhecimento e de saberes.

3. *Integração das tecnologias na educação*, organizado por Maria Elizabeth Bianconcini Almeida e José Manuel Moran (Brasília, DF: Ministério da Educação/Seed, 2005; disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/iniciaissf.pdf>; acesso em: 21 jun. 2022).

Esse material, de acesso livre, é um fascículo com artigos sobre o uso das tecnologias na Educação Básica. Traz ainda discussões sobre o trabalho com projetos e o uso de mídias na escola.

4. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*, de José Manuel Moran, Marcos Tarciso Masetto e Marilda Aparecida Behrens (São Paulo: Papirus, 2017).

Os autores apresentam discussões importantes sobre o papel do professor no uso de tecnologias na educação, com a perspectiva de construir novas propostas.

5. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*, de José Manuel Moran (São Paulo: Papirus, 2011).

A obra trata das mudanças que as tecnologias trazem para a educação presencial e à distância, em todos os níveis de ensino, abordando o papel de professores e gestores ao desempenhar ações nesse cenário de inovação.

6. *Redes de aprendizagem: um guia para ensino e aprendizagem on-line*, de Linda Harasim, Murray Turoff, Lucio Teles e Starr Roxanne Hiltz (São Paulo: Senac, 2005).

O livro discorre sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação mediadas por computador – correio eletrônico, *bulletin boards system*, sistemas de conferência por computador e a própria internet – e como podem ser utilizadas no Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na universidade e na educação de adultos.

Sites

1. <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>

Disponibiliza recursos como vídeos, imagens e animações para auxiliar o professor em sala de aula.

2. <http://tecedu.pro.br/>

Revista eletrônica semestral com artigos e relatos de professores sobre o uso de tecnologias na aula.

3. http://webeduc.mec.gov.br/codigo_aberto

Oferece *softwares* para uso gratuito em diversas disciplinas como ferramenta de apoio ao processo de ensino e aprendizagem.

4. <http://www2.eca.usp.br/moran/>

Disponibiliza textos sobre educação e tecnologias aplicadas ao contexto educacional.

5.

https://aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php/292702/mod_resource/content/1/Manual%20de%20Ferramentas%20Web%2020%20p%C2%AA%20Profs.pdf

Esse manual, disponível no *site* do Ministério da Educação de Portugal, apresenta explicações sobre ferramentas disponíveis na web 2.0 e orientações de como utilizá-las no contexto educacional.

6. <https://www.youcubed.org/pt-br/>

A plataforma YouCubed disponibiliza atividades, jogos, aplicativos e videoaulas que podem ser acessados *on-line* e gratuitamente. Foi criada pelo grupo de pesquisa da pesquisadora Jô Boaler, da Universidade de Stanford.

7. TV Escola. Oficina de produção de vídeos. *TV Escola*. Disponível em:

https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2017/02/dicas_producao_videos.pdf.

O material, em formato de oficina, tem o objetivo de motivar estudantes e professores a produzirem vídeos. (IEZZI, 2022)

Já no material do aluno, não sugere nenhum recurso digital ao apresentar os números inteiros. O único recurso utilizado foi o contexto histórico. O livro apresenta um breve histórico da aceitação ou rejeição dos números inteiros.

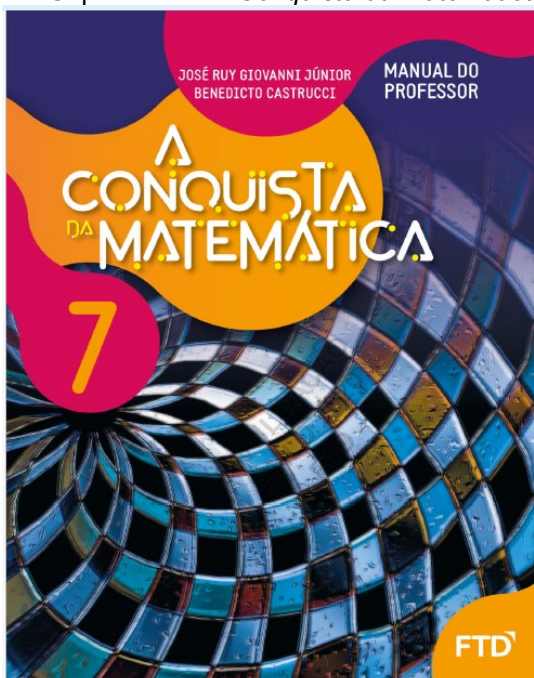
A seção intitulada *Matemática e Tecnologia* é utilizada nas seguintes Unidades:

- na Unidade 3, capítulo 9, na página 111 onde são estudadas propriedades de retas paralelas cortadas por uma transversal;
- na Unidade 5, capítulo 12, página 150, para trabalhar conceitos de estatística com apoio de planilhas eletrônicas; e no capítulo 13, página 171, para construir gráficos usando planilhas eletrônicas;
- na Unidade 8, capítulo 21, página 276 para trabalhar transformações no GeoGebra.

Além dessa sessão, ao longo da obra, apresentam-se alguns exercícios que evocam o uso da calculadora de forma passiva para efeito de cálculos. Na parte final do livro, não se apresenta nenhum recurso digital, apenas uma bibliografia comentada.

3.5. A Conquista da Matemática: 7º Ano

Figura 11: Capa do livro *A Conquista da Matemática: 7º ano*



Fonte: <https://pnld.ftd.com.br/obras/a-conquista-matematica-pnld-2024-objeto-1/>

O livro do Giovanni (2022) inicia, como os outros pelo guia do professor, enfatizando o objeto do conhecimento da BNCC: Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações. Também são destacadas as habilidades: (EF07MA03) comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e

utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração e (EF07MA04) resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. Ainda no guia do professor, apresenta uma sessão intitulada “Tecnologias Digitais”, ressaltando a importância de se trabalhar com essas tecnologias em sala de aula, contando um pouco da história desse segmento. Não enfatiza novas ferramentas, nem dá sugestões de uso.

Ao apresentar as sessões da coleção destacamos “Tecnologias” onde explicita como usar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas. No livro do aluno, esta sessão aparece na Unidade 3, página 92, na abordagem do conceito de simetria com Geogebra; na Unidade 8, página 254, ao sugerir a construção de gráficos no computador.

No final do guia do professor, apresenta uma lista de sites, que foram consultados em 14 de agosto de 2018:

A COR DA CULTURA. Disponível em: <<http://livro.pro/jknmqu>>.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA: Ensino de Matemática e Formação para Cidadania: Discussão de uma Possibilidade. Disponível em: <<http://livro.pro/nv4p5b>>.

EDUMATEC. Disponível em: <<http://livro.pro/xt9vnq>>.

ESCOLA DO FUTURO. Disponível em: <<http://livro.pro/yuee2v>>.

FACULDADE DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)/DEPARTAMENTODE METODOLOGIA DO ENSINO E EDUCAÇÃO COMPARADA. Disponível em: <<http://livro.pro/icx2w8>>.

INSTITUTO ALFA E BETO: Ensino da matemática nas séries iniciais. Disponível em: <<http://livro.pro/iiknwe>>.

INSTITUTO PAULO FREIRE: Acervo. Disponível em: <<http://livro.pro/kiubr3>>.

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: Faculdade de Educação da USP. Disponível em: <<http://livro.pro/5pwpdo>>.

LABORATÓRIO DE PESQUISA MULTIMEIOS. Disponível em: <<http://livro.pro/7nrv5t>>.

MATEMÁTICA EM TODA PARTE – TV ESCOLA – MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (MEC). Disponível em: <<http://livro.pro/jxi7cc>>.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Disponível em: <<http://livro.pro/fezagx>>.

NOVA ESCOLA. Disponível em: <<http://livro.pro/5rm6us>>.

PENSAR A EDUCAÇÃO EM REVISTA. Disponível em: <<http://livro.pro/rd5qcz>>.

PORTAL EDUCAÇÃO EM DIREITOS HUMANOS: Educação matemática como formação necessária à cidadania. Disponível em: <<http://livro.pro/p4rqd5>>.

REDE DO SABER. Disponível em: <<http://livro.pro/rtugtx>>.

REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Disponível em: <<http://livro.pro/woiu24>>.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA – SBEM. Disponível em: <<http://livro.pro/3muqad>>. (Giovanni, 2022)

No capítulo que apresenta e desenvolve números inteiros sugere dois jogos de tabuleiro para trabalhar com esses conceitos, porém nenhuma ferramenta tecnológica foi mencionada.

3.6. Análise dos sites: jogos, dinâmicas e ferramentas que auxiliem o ensino de números inteiros.

Ao analisar os livros didáticos encontramos a indicação de alguns sites que desenvolvem atividades digitais para o ensino de matemática. Daremos foco aos recursos digitais voltados para o ensino e aprendizagem de números inteiros relativos.

3.6.1. <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>

O *Portal do Professor*, disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>, consiste de um site elaborado pelo governo federal que tem por objetivo ser um repositório de atividades para o ensino básico de matemática. Ao entrar no site, entramos em multimídia e em recursos educacionais, nele fizemos uma busca rápida, por “números inteiros” e encontramos 28 resultados. Após a busca não fica claro o local onde encontrar os recursos, nem é fornecido algum link de acesso ou local adequado para baixar. Portanto não foi possível analisar as ferramentas.

3.6.2. www.bussolaescolar.com.br

O site Bússula Escolar, disponível em www.bussolaescolar.com.br, apresenta alguns *links* para acessar conteúdo das disciplinas do ensino básico. Em matemática, encontramos *vídeos* e *sites* que falam de números inteiros, porém nenhum dos *links* direcionou para um site válido.

3.6.3. www.cabri.com

Já o site CabriLog é um site em inglês que apresenta uma ferramenta digital interessante, bem parecida com o Geogebra. Por similaridade e pelo fato de termos uma versão do Geogebra em Língua Portuguesa, descartamos a pesquisa neste site.

3.6.4. www.geogebra.com

O Geogebra apresenta um repositório extenso de atividades interessantes para o ensino de números inteiros reais. Dentre as ferramentas encontradas, destacamos:

- Adição e subtração de números inteiros: Ferramenta visual para adição e subtração de números inteiros. Nele podemos visualizar a soma de números relativos pré-definidos com sua visualização geométrica na reta numérica. Podendo variar as parcelas da soma no intervalo de -5 a 5. Nele podemos visualizar a soma e a subtração na reta numérica e na forma algébrica, facilitando a conexão das duas representações. Essa tarefa ajuda na compreensão da reta numérica unificada, para mais informações, veja o capítulo 4 desta dissertação. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>
- Adição de números inteiros: Trata-se de um *applet* de visualização da adição de números inteiros. O *applet* mostra através da representação de vetores na reta o movimento dos números positivos, seguindo para a

direita e a dos negativos, seguindo para a esquerda. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/sHy3JExT>

- Multiplicação de inteiros: A multiplicação de inteiros é a mais complexa das operações básicas, e sua compreensão foge aos padrões que o aluno aprendeu até então. Os próprios matemáticos foram traídos pela busca por um modelo unificador que fez com que sua compreensão fosse insatisfatória. Perceber as mudanças na reta alterando os valores do produto, pode auxiliar no entendimento da multiplicação de inteiros. Contudo, nessa atividade, uma vez escolhidos os valores, a e b . (entre -5 e 5), o *applet* fornece o resultado final. Assim como no caso da calculadora científica, é a ferramenta que está no comando da atividade cognitiva. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>.
- Robô Linear (OBI): Robô Linear é um jogo que usa o Geogebra como base e é construído em torno de um robô RL2 que se move apenas em linha reta, sobre um trilho. A movimentação do robô remete a posição de pontos na reta numérica. Que se move usando os movimentos F(se move para a frente) e T(que se move para trás). Após receber e executar um comando, o robô permanece parado até receber o próximo comando. Robô Linear ainda apresenta perguntas que auxiliam na experimentação e ajuda a tirar conclusões sobre sua movimentação e os conceitos que usamos para lidar com ele. Veja na figura 16, exemplo com as duas primeiras atividades propostas com a ferramenta. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/puww96re>.

Para mais informações sobre os aplicativos selecionados, consulte o capítulo 4 desta dissertação, onde detalhamos seu uso, ou o Recurso Educacional, disponível no Apêndice desta dissertação que apresenta uma descrição das funcionalidades destes aplicativos.

3.6.5 - www.gregosetroianos.mat.br

É um site antigo que parece que não é atualizado desde 2022, faz venda de livro e CD. Não foi possível encontrar nenhuma ferramenta digital para ensino de números inteiros, sugere algumas ferramentas de geometria dinâmica obsoletas.

3.6.6 - www.matematica.br

É um site da USP, do Instituto de Matemática e Estatística, porém não apresenta nenhuma ferramenta para trabalhar com números inteiros.

3.6.7 - www.obm.org.br

É o site da Olimpíada Brasileira de Matemática, apresenta as competições realizadas e as edições da revista Eureka!. Em uma busca rápida não encontramos ferramentas digitais para trabalhar com números inteiros, até porque não parece ser esse o escopo do site.

3.6.8 - www.obmep.org.br

É o site da *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*, lá encontramos provas, vídeos, materiais didáticos para preparar o estudante. Na aba, programas e portais, encontramos o *Clube da Matemática* que é um blog destinado a compartilhar materiais de estudo. Dentro deste blog, há uma aba chamada "*Ludoteca do clube*", onde encontramos vários jogos e ferramentas digitais para vários assuntos da matemática onde podemos encontrar atividades com números inteiros, porém nenhuma com ferramentas digitais que sejam para o nível do sétimo ano do Ensino Fundamental.

3.6.9 - www.somatematica.com.br

O site apresenta conteúdos de matemática e venda de kits de exercícios e aulas planejadas. Apresenta ainda algumas ferramentas que podem ser compradas, não disponibilizando quase nada de graça. Dentre as atividades gratuitas não foi encontrado nenhum recurso digital para o ensino de números inteiros relativos.

3.6.10 - www2.mat.ufrgs.br/edumatec

O site disponibilizado não funciona, porém em uma busca rápida encontramos os recursos disponibilizados em <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/>. Nele encontramos várias ferramentas, algumas obsoletas, que servem para ser aplicadas em várias áreas da matemática, porém nenhuma relacionada ao estudo de números inteiros.

3.6.11 - <https://mentalidadesmatematicas.org.br/>

Neste site encontramos atividades abertas, onde o objetivo é desenvolver o raciocínio matemático e a flexibilidade numérica. São atividades interessantes, porém nenhuma ferramenta digital é usada para atividades com números inteiros.

3.6.12. <http://tecedu.pro.br/>

Site da revista Tecnologia da Educação com publicações de 2009 a 2023, como descrita em seu site:

A Revista Tecnologias na Educação foi criada como forma de divulgação dos trabalhos apresentados no I Congresso de Tecnologias na Educação, promovido pelo Grupo Blogs, Internet e Web na Educação, realizado totalmente on-line, em 2018, no qual professores pertencentes ao grupo e pesquisadores de diferentes instituições apresentaram os trabalhos relacionados às Tics, que vinham desenvolvendo desde 2005. Acessado em 22/03/2025. <http://tecedu.pro.br/>

3.6.13. http://webeduc.mec.gov.br/codigo_aberto

Não consegui acesso ao site, está fora do ar.

3.6.14. https://phet.colorado.edu/pt_BR/

A plataforma *PhET* é uma iniciativa da Universidade de Colorado que explora o conceito de simulações para ciências e matemática, permitindo trabalhar, a partir de recursos digitais, conceitos para os quais a experimentação possa contribuir para a aprendizagem. Ao entrar no site, nos deparamos com inúmeras ferramentas. Fizemos uma busca específica nas simulações e atividades de matemática e estatística por “números inteiros”, recebendo 20 resultados na busca. Destes, sete deles nos despertaram nossa atenção, sendo três simulações e quatro atividades, como podemos ver no quadro 3.

Quadro 3: Simulações e atividades encontradas no site do PhET Colorado

Simulações	Reta Numérica: Distância	https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance
	Reta Numérica: Inteiros	https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers
	Reta Numérica: Operações	https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations
Atividades	Exploring Integers	https://phet.colorado.edu/pt_BR/activities/7685
	Explorando Enteros	https://phet.colorado.edu/pt_BR/activities/7121
	PhET Number Lines Integers Stories Activity	https://phet.colorado.edu/pt_BR/activities/5816
	Operaciones en \mathbb{Z} através de la recta numérica	https://phet.colorado.edu/pt_BR/activities/7287

Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/search?q=numeros+inteiros

3.6.15. <http://www2.eca.usp.br/moran/>

Site do professor José Moran, professor da USP com seus textos acadêmicos com ênfase em metodologias ativas, modelos híbridos, tecnologias digitais e projeto de vida. Não foi encontrado nenhum texto relacionado a números inteiros.

3.6.16. <https://www.youcubed.org/pt-br/>

O site YouCubed é ligado à Universidade de Stanford, EUA, e a professora de educação matemática Jo Boaler apresenta várias atividades, porém poucas que usam recursos educacionais digitais e nenhum que trabalhe com números inteiros diretamente.

CAPÍTULO 4: MATERIAIS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS RELATIVOS

Com a análise dos livros didáticos e com a observação das ferramentas propostas, além da busca por outras ferramentas não citadas, selecionamos nove recursos digitais potenciais para o ensino e aprendizagem dos números relativos, localizados na plataforma PhET Colorado e no repositório do Geogebra. Nessa seção apresentaremos algumas indicações e instruções para uso destes recursos e atividades.

4.1. Plataforma PhET

Figura 12: Logo do site PhET ao abrir um simulador

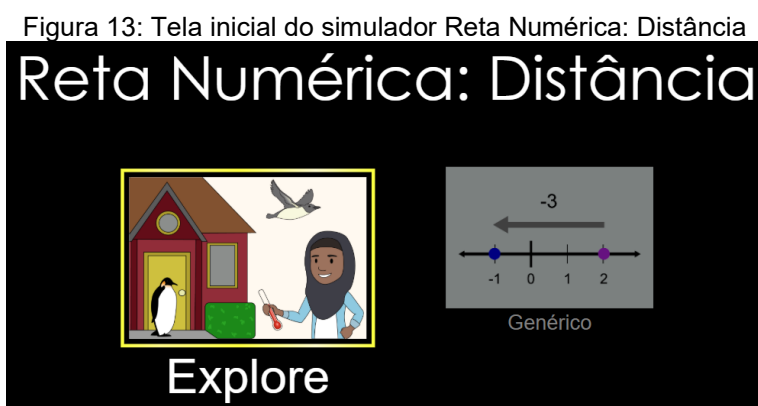


Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/

A plataforma *PhET* disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/, nos deparamos com inúmeras ferramentas. Fizemos uma busca e dos sete resultados encontrados, optamos por descrever os três simuladores encontrados. As demais atividades são listas de exercícios que usam os simuladores como base. Segue, portanto, a descrição de cada um dos simuladores selecionados.

4.1.1. Simulador Reta Numérica: Distância

A *Reta Numérica: Distância* é um simulador de atividades dinâmicas que busca associar a subtração de inteiros situações cotidianas. Em sua tela inicial, temos que escolher qual das opções podemos usar, devemos escolher entre “*Explore*” e “*Genérico*”, veja as opções na imagem a seguir (figura13).

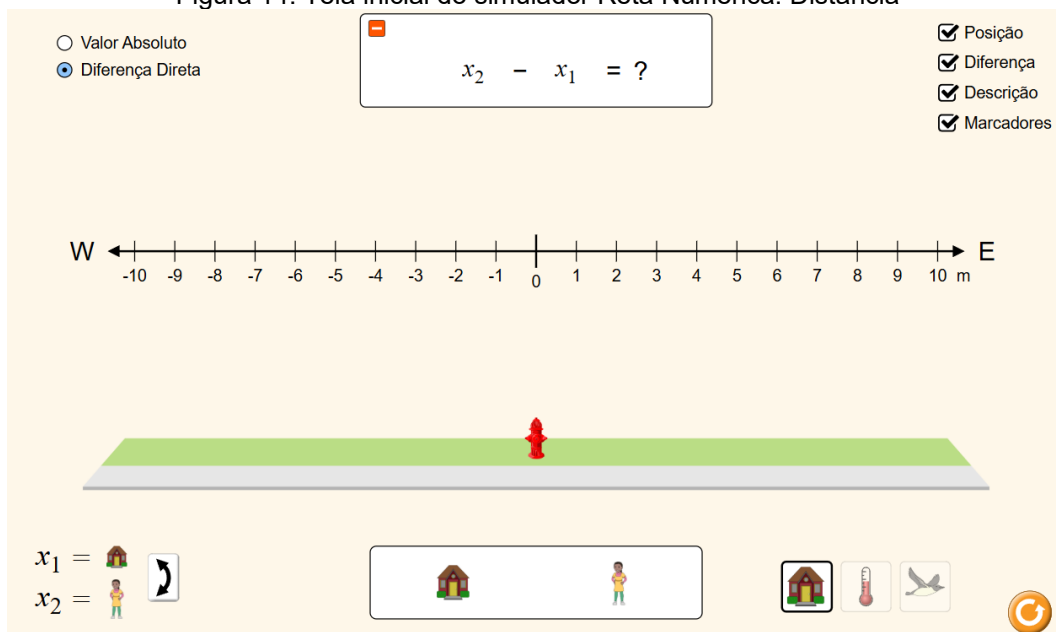


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

A opção “*Explore*”, temos um simulador capaz de associar situações práticas como distância de objetos a um certo referencial, diferença entre temperaturas e altura de animais comparados a um referencial. Essas simulações, com o auxílio do professor, agregam contextos para a compreensão da subtração de números inteiros. Já a opção “*Genérico*” foca na representação puramente abstrata dos valores em uma reta numérica. Embora utilize os mesmos princípios de construção, ela não vincula as operações a objetos ou cenários práticos. Para essa discussão, vamos nos ater a descrever a opção “*Explore*”.

Na ilustrado na figura 14, um exemplo prático de uso é apresentado ao comparar a distância de uma casa e de uma pessoa em relação a um hidrante. O usuário pode posicionar a casa e a pessoa livremente, e a ferramenta calcula automaticamente a distância entre eles. Essa operação é associada a reta numérica, onde a posição do hidrante é definida como o ponto zero (nosso referencial).

Figura 14: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Distância



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

Ainda na figura 14, na parte superior esquerda, pode-se alternar entre *Diferença Direta* ou *Valor Absoluto*. E, no canto superior direito, podemos marcar as opções: *Posição*, *Diferença*, *Descrição* e *Marcadores*; capazes de exibir ou suprimir essas características da imagem. Já na parte inferior a esquerda, há a possibilidade de alternância do personagem e da casa como as incógnitas x_1 e x_2 na parte esquerda. Na parte inferior, no meio, temos um retângulo contendo a casa e o personagem que devem ser arrastados e colocados em qualquer posição da rua. Já na parte inferior à direita, temos três quadrados: uma casa, um termômetro e um pássaro; onde há a alternância dos outros exemplos, exemplificados nas imagens a seguir (figura 15).

Figura 15: A esquerda, comparação de termômetros e à direita, comparação de alturas



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

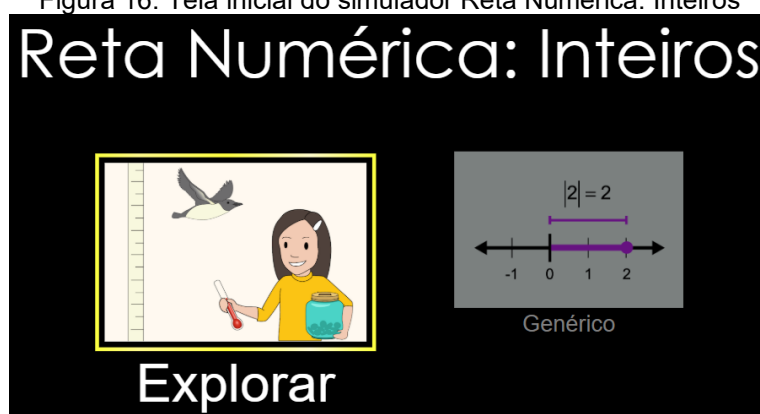
O simulador é uma ferramenta poderosa para o ensino da subtração de inteiros, facilitando a visualização e a conexão com cenários práticos. É essencial ressaltar aos alunos que a reta numérica tem uma orientação definida para a direita, onde os números crescem. Desconsiderando representações incorretas, este simulador é extremamente útil para a compreensão da subtração de números inteiros.

4.1.2. Simulador Reta Numérica: Inteiros

O simulador *Reta numérica: Inteiros*, também tem em sua tela inicial duas opções para usar: “*Explorar*” e “*Genérico*” (figura 16).

Assim como fizemos para o primeiro simulador, vamos nos ater a descrever a opção “*Explorar*”. Nesta opção temos um simulador capaz de associar situações práticas como: distância de objetos a um certo referencial, variação de temperatura ao redor do planeta e saldo guardado em um “cofrinho”. Essas simulações, com o auxílio do professor, agregam contextos para a compreensão da posição dos números inteiros na reta numérica.

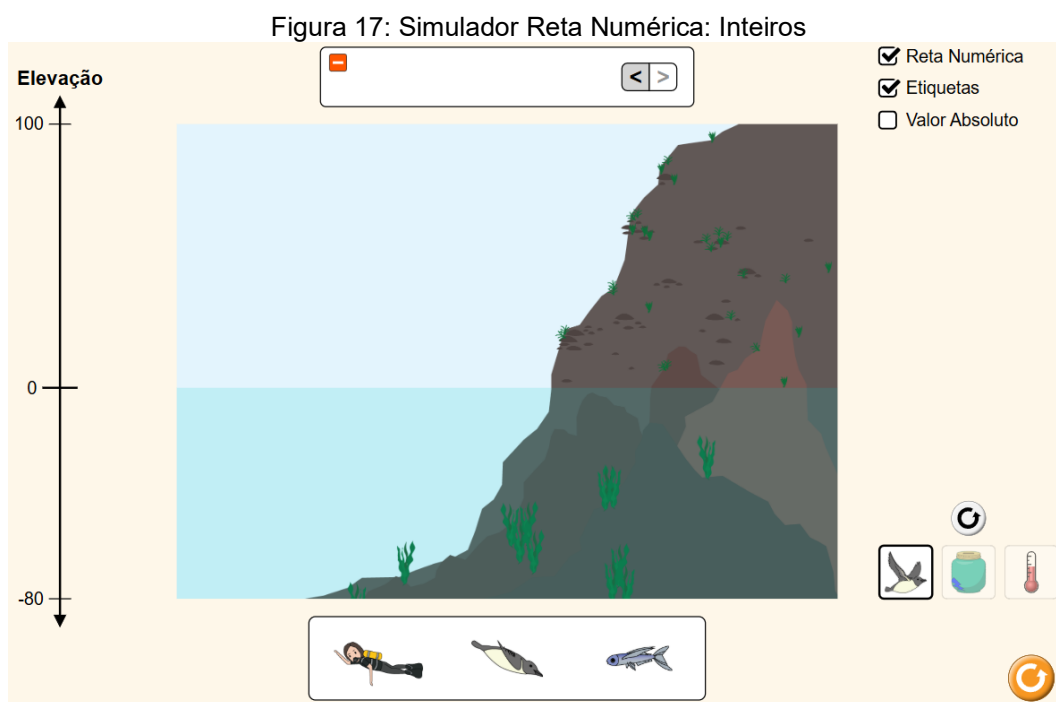
Figura 16: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers

Na imagem a seguir (figura 17), podemos ver a imagem região costeira rochosa, fazendo uma divisão de dois ambientes (o nível do mar), uma parte dentro e outra fora da água. O usuário tem a liberdade de escolher um dos personagens apresentados na parte inferior central da imagem: o mergulhador, o pássaro e o peixe. Do mesmo modo, ao deslocar os personagens, a ferramenta calcula a distância entre eles, tendo o nível do mar como ponto de referência. A posição de cada personagem

é associado a um ponto correspondente na reta numérica, sendo o zero, o nível do mar.

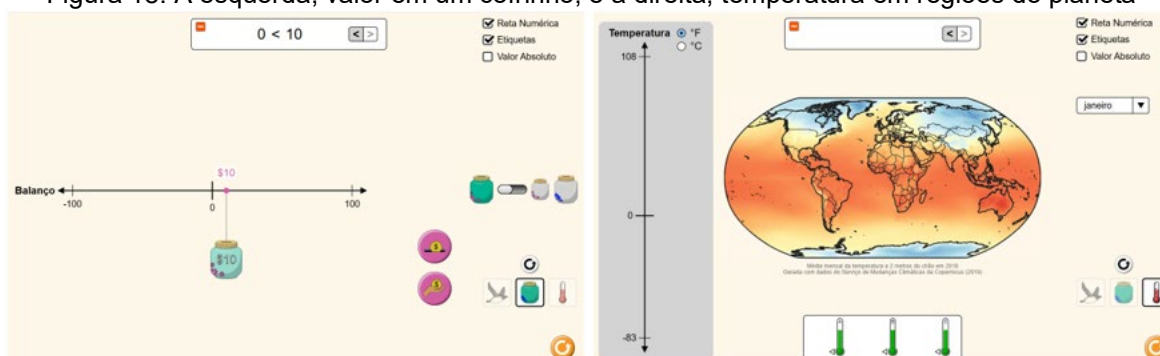


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Ainda na figura 17, na parte superior central, podemos exibir a comparação da posição de cada personagem colocado no ambiente. E no canto superior direito, podemos marcar as opções: *Reta Numérica*, *Etiqueta* e *Valor Absoluto*; capazes de exibir ou suprimir essas características da imagem. Já na parte inferior à direita, temos três quadrados: um pássaro, um cofre e um termômetro; onde é possível escolher outros cenários (figura 18).

Este simulador é uma ferramenta útil para o contexto introdutório da ideia de números inteiros. Sua aplicação ajuda na compreensão da posição dos números na reta numérica. Percebe-se o mesmo equívoco na representação da reta numérica com dois sentidos de orientação. Tirando esse detalhe, este simulador é útil para ser aplicado para o ensino de ordenação de números inteiros

Figura 18: A esquerda, valor em um cofrinho; e à direita, temperatura em regiões do planeta

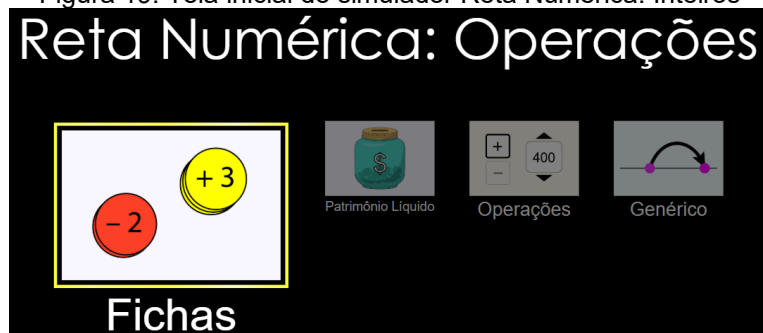


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

4.1.3. Simulador Reta Numérica: Operações

No simulador *Reta numérica: Operações*, em sua tela inicial, temos que escolher entre: *Fichas*, *Patrimônio Líquido*, *Operações* e *Genérico*. Na imagem da figura a seguir (figura 19) a opção *Fichas* foi selecionado. Nesta seção, vamos descrever o seu uso para as três primeiras ferramentas: *Fichas*, *Patrimônio Líquido* e *Operações*.

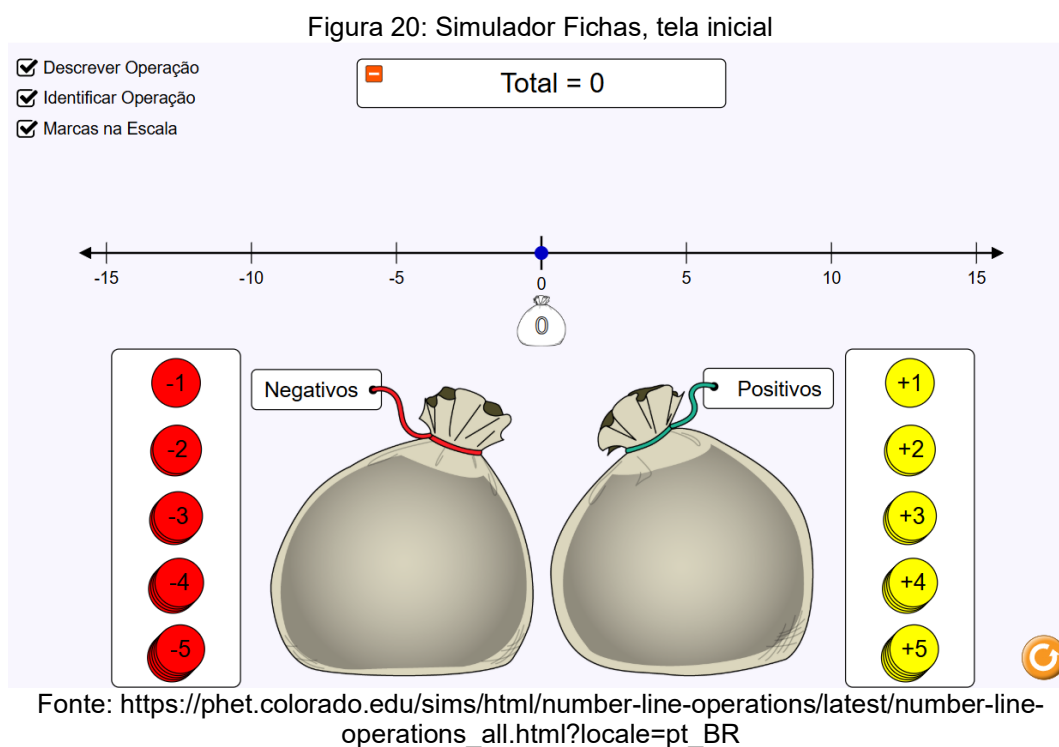
Figura 19: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

A simulação *Fichas*, é baseada na inserção de fichas vermelhas (números negativos) e amarelas (números positivos). A cada ficha inserida no seu respectivo saco, o valor entra no saldo. E conseqüentemente altera a posição inicial (zero), andando para a direita, para valores positivos (amarelos) e para a esquerda, para valores negativos (vermelhos). Na figura 20, apresenta-se a tela inicial do simulador. Nela, identificamos O *Total* na parte superior. Logo abaixo encontra-se a reta numérica

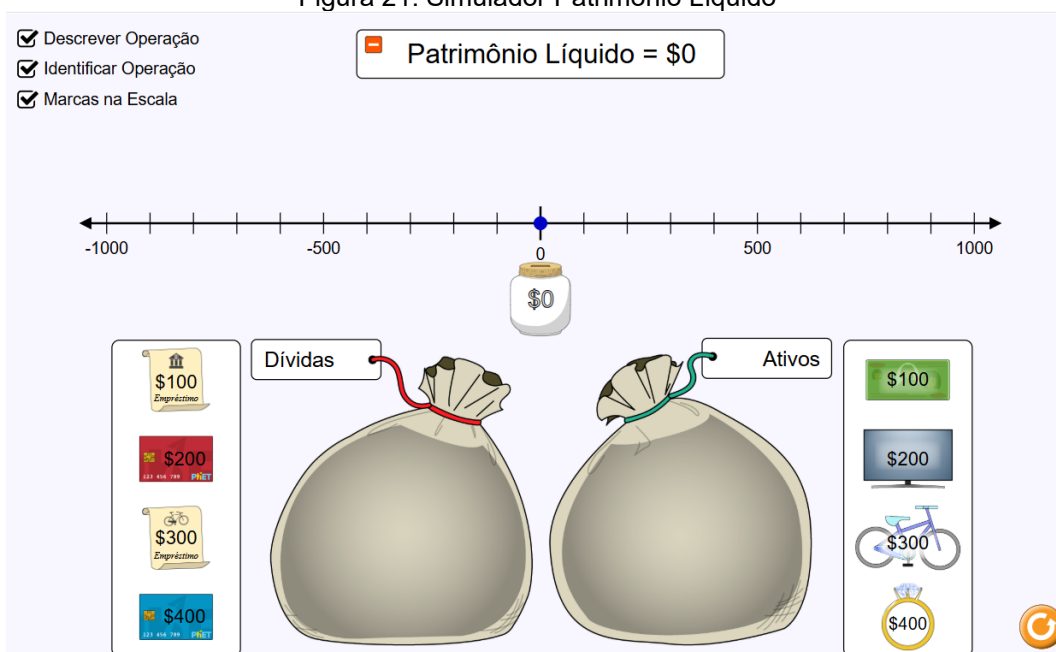
com um ponto azul, representando o saldo naquele momento. E mais abaixo, temos dois blocos de fichas e seus respectivos sacos.



Já o simulador *Patrimônio Líquido*, apresenta uma atividade semelhante ao das *Fichas*, porém, no lugar das fichas, temos cheques e cartões de crédito para representar as dívidas e produtos e dinheiro para representar os ativos. E a atividade consiste em incluir ou retirar as dívidas ou os ativos e associar essas quantidades a somar ou subtrair valores positivos ou negativos.

Na imagem a seguir (figura 21) pode-se observar o esquema apresentado no simulador. Nele podemos ver que a ideia de retirar uma dívida está associado a subtrair um valor negativo, o que ajuda no entendimento de que retirar uma quantidade negativa é o mesmo que somar o módulo do valor. Essa interpretação do modelo bancário fica mais lúdica e interpretativa.

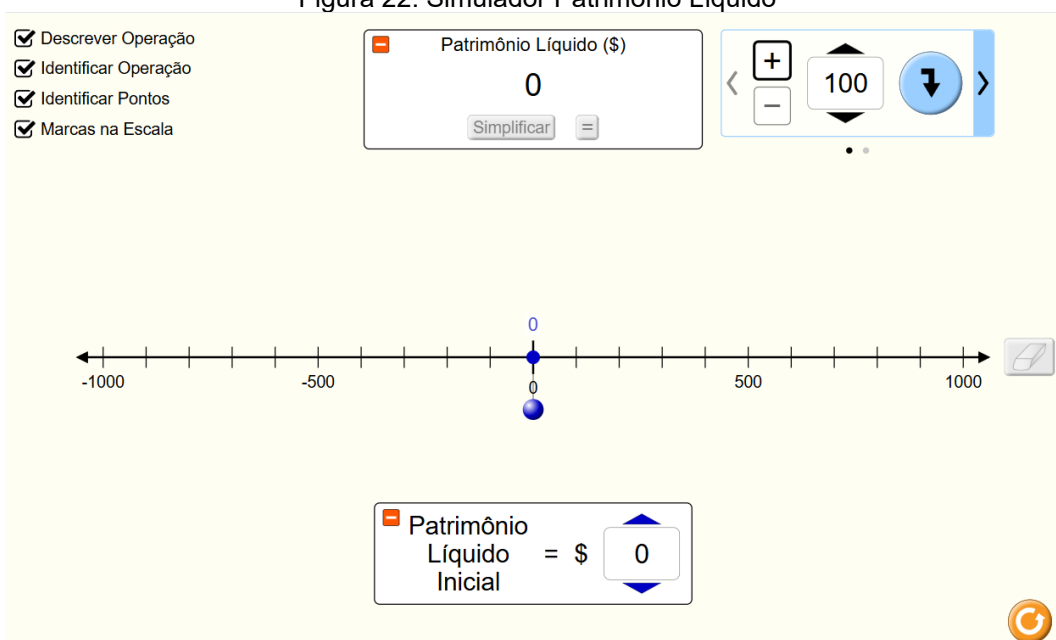
Figura 21: Simulador Patrimônio Líquido



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Por último, temos o simulador *Patrimônio Líquido*. Nele encontramos uma reta numérica, inicialmente com um ponto marcado no zero. Esse valor se altera quando modificamos o *Patrimônio Líquido Inicial*. Depois de defini-lo, podemos acrescentar ou retirar desse patrimônio, com a ferramenta a direita na parte superior da imagem da Figura 22. Ao adicionar ou retirar do patrimônio inicial, o resultado da operação é exibido na reta (figura 22).

Figura 22: Simulador Patrimônio Líquido



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

4.2. Geogebra

O *Geogebra* é uma ferramenta de geometria dinâmica, sendo útil para inúmeras tarefas que abrange várias áreas da matemática. O acesso ao *Geogebra* está disponível em https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR. Seu site disponibiliza o aplicativo que pode ser baixado tanto para *Android*7 quanto para *IOS*8. Ao entrar nele, também podemos abrir o *app* diretamente usando uma de suas calculadoras gráficas. Contudo, fomos em busca de atividades já desenvolvidas para o ensino e a aprendizagem de “números inteiros”. A seguir vamos destacar algumas dessas atividades que consideramos potenciais para o ensino de números inteiros.

Figura 23: Logotipo do site do Geogebra

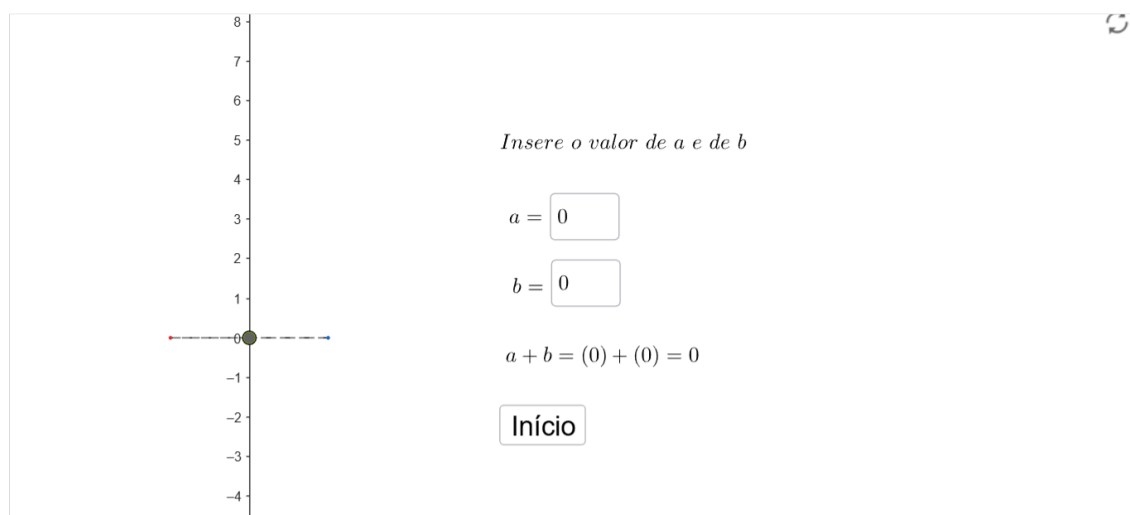


Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR

4.2.1. Adição e subtração entre números inteiros

A primeira atividade que selecionamos disponível em <https://www.geogebra.org/m/a94jq6hk> foi desenvolvida por Anabela Brandão e Liliam Paes. Com esta atividade, pode-se desenvolver as operações de adição e subtração de inteiros e relacionar essas operações a valores na reta numérica. Na figura 24, podemos ver uma reta vertical e inserir os valores de a e b nos espaços ao lado da reta numérica. Com a inserção dos valores em a e b , podemos ver o resultado da soma, além da sua representação na reta usando vetores.

Figura 24: Ferramenta Adição e Subtração entre números inteiros



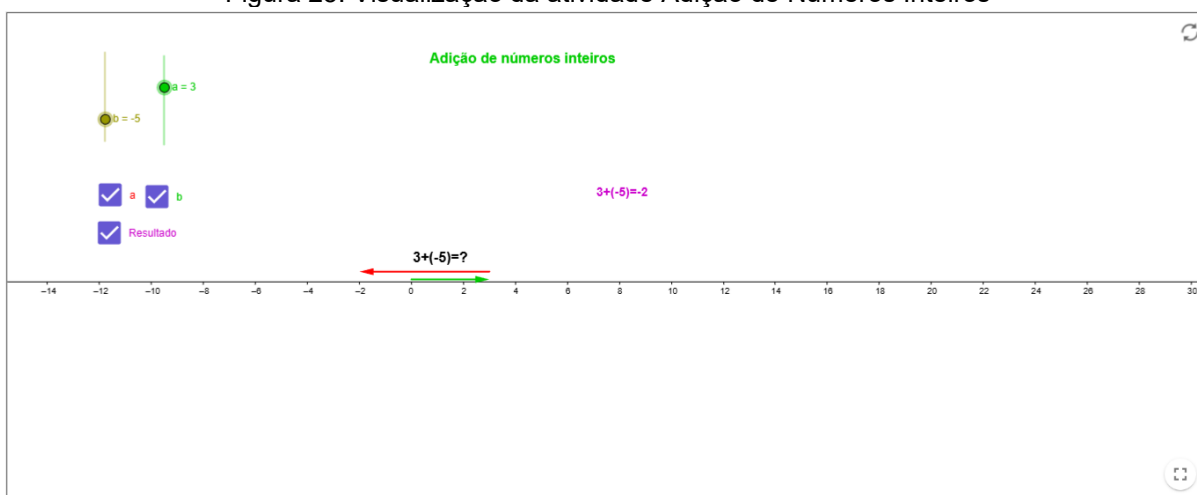
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/a94jq6hk>.

Esta atividade é interessante para a observação das operações de adição e subtração na reta numérica. O fato de a reta estar na vertical amplia a visualização dos estudantes. Em várias atividades é muito comum a representação horizontal da reta numérica. Apresentar e utilizar a representação vertical da reta numérica pode contribuir para um melhor entendimento desses processos operatórios na reta.

4.2.2. Adição de números inteiros

A atividade adição de números inteiros foi desenvolvida pela autora Mônica Salgado, disponível em <https://www.geogebra.org/m/sHy3JExT>. É uma ferramenta de visualização da adição de números inteiros, mostra através da representação de vetores lineares a reta o movimento dos números positivos, seguindo para a direita e os negativos seguindo para a esquerda para determinar o resultado da soma, como podemos ver no exemplo a seguir na figura 25, na soma $3 + (-5)$.

Figura 25: Visualização da atividade Adição de Números Inteiros

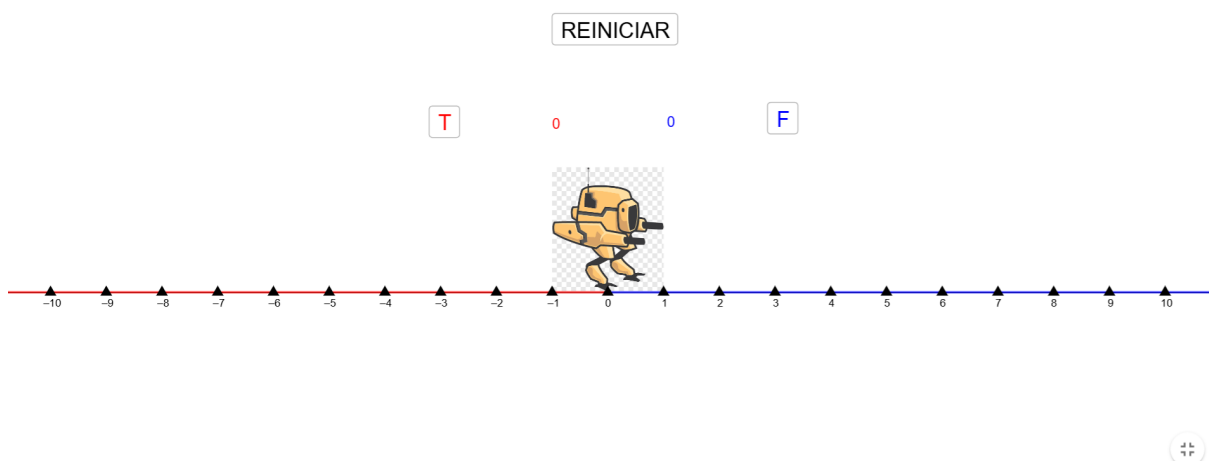


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/sHy3JExT>

4.2.3. Robô Linear (OBI)

Robô Linear é uma atividade desenvolvida por Thiago Vasconcelos Batalha, disponível em <https://www.geogebra.org/m/puww96re>. É uma atividade interativa onde podemos mover um robô para a direita usando o botão F e mover para a esquerda usando o botão T. Para cada F, ele se move uma casa para a direita e para cada T se move uma casa para a esquerda. Na imagem a seguir (figura 26), temos a tela inicial do jogo.

Figura 26: Tela inicial do Robô Linear



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/puww96re>

Em sua página, no site do Geogebra, o autor apresenta uma breve descrição do jogo.

RL2 é um robô que se move apenas em linha reta, sobre um trilho. Ele é utilizado dentro de uma fábrica para realizar diversas tarefas, como distribuir peças e ferramentas para os trabalhadores. O RL2 é comandado utilizando uma linguagem de programação que tem apenas dois comandos:

- F: ao receber esse comando, o robô move-se 1 metro para a frente;
- T: ao receber esse comando, o robô move-se 1 metro para trás;

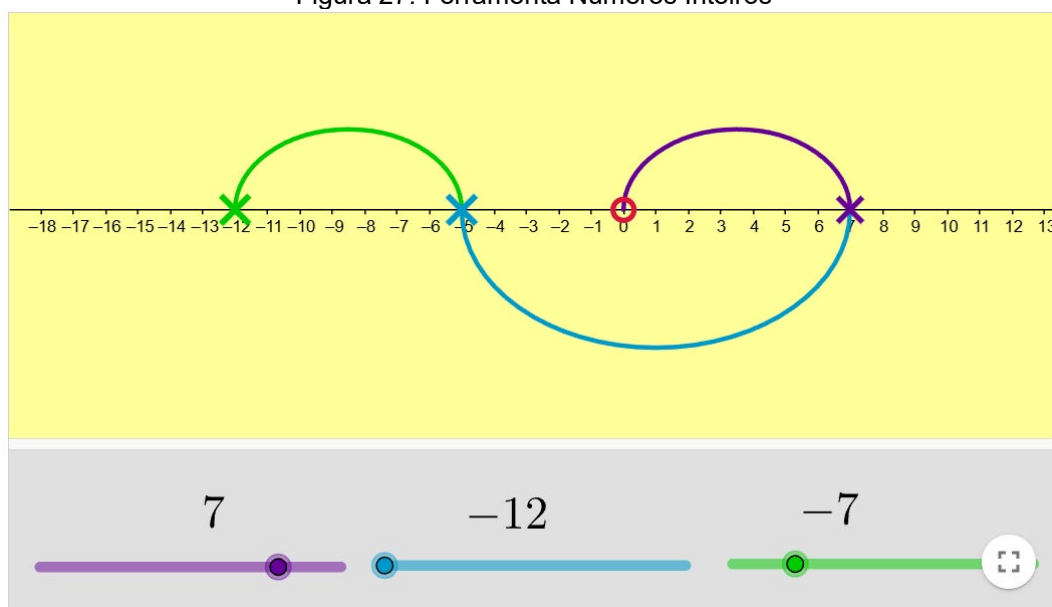
Após receber e executar um comando, o robô permanece parado até receber o próximo comando. Utilize o applet abaixo para te auxiliar a explorar as atividades. (BATALHA, 2020)

Com essas informações, o aluno será capaz de realizar pequenos comandos usando o robô e assim associar suas movimentações às operações de adição de números inteiros.

4.2.3. Números Inteiros

A ferramenta Números Inteiros, desenvolvida por Yancel Orlando Soto, disponível em <https://www.geogebra.org/m/gawgsbuz>, é uma ferramenta para realizarmos a adição de até três números inteiros. O valor de cada número é definido pelos botões deslizantes lilás, azul e verde. É possível visualizar o caminho percorrido ao realizarmos cada operação de adição. É dinâmico o processo de visualização do resultado da adição. Os resultados de cada soma parcial é possível definido pelo ponto x marcado na reta numérica. No exemplo a seguir, tem-se a adição $(+7) + (-12) + (-7)$. Iniciamos a partir do zero; desloca-se sete casas para a direita, chegando no +7, no x lilás; depois, desloca-se doze casas para a esquerda, no x azul; e por fim desloca-se sete casas para a esquerda, chegando no resultado -12 (x verde).

Figura 27: Ferramenta Números Inteiros

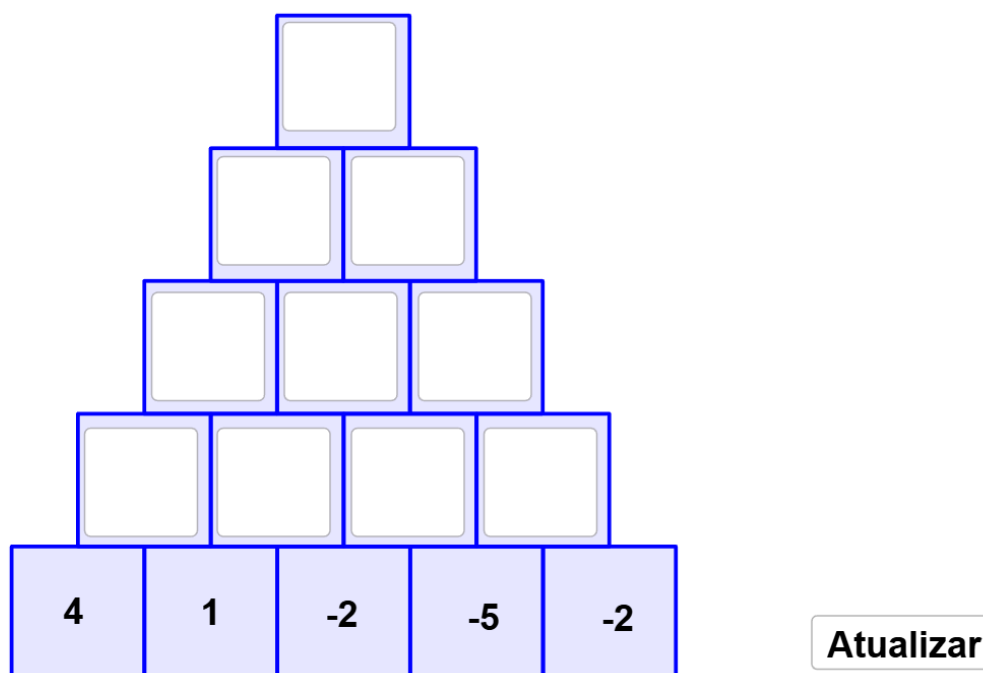


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/gawgsbuz>

4.2.4. Adição de Número Inteiro

A ferramenta desenvolvida por Wesley de Jesus Costa, disponível em <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>, é uma ferramenta que também foi desenvolvida para exercitar a prática da adição de números inteiros. O aplicativo tem a forma de uma pirâmide, de modo que para descobrir o número de um bloco em uma fileira acima basta fazer a adição dos dois números inteiros de blocos consecutivos que está abaixo dele. Repete-se o processo até descobrir o valor do último bloco. Se o valor da soma estiver correto, os valores ficarão verdes, caso contrário, vermelho. O botão “Atualizar” permite reiniciar o jogo e modificar os valores iniciais (veja na figura 28 um exemplo de início do jogo).

Figura 28: Ferramenta jogo Adição de Número Inteiro



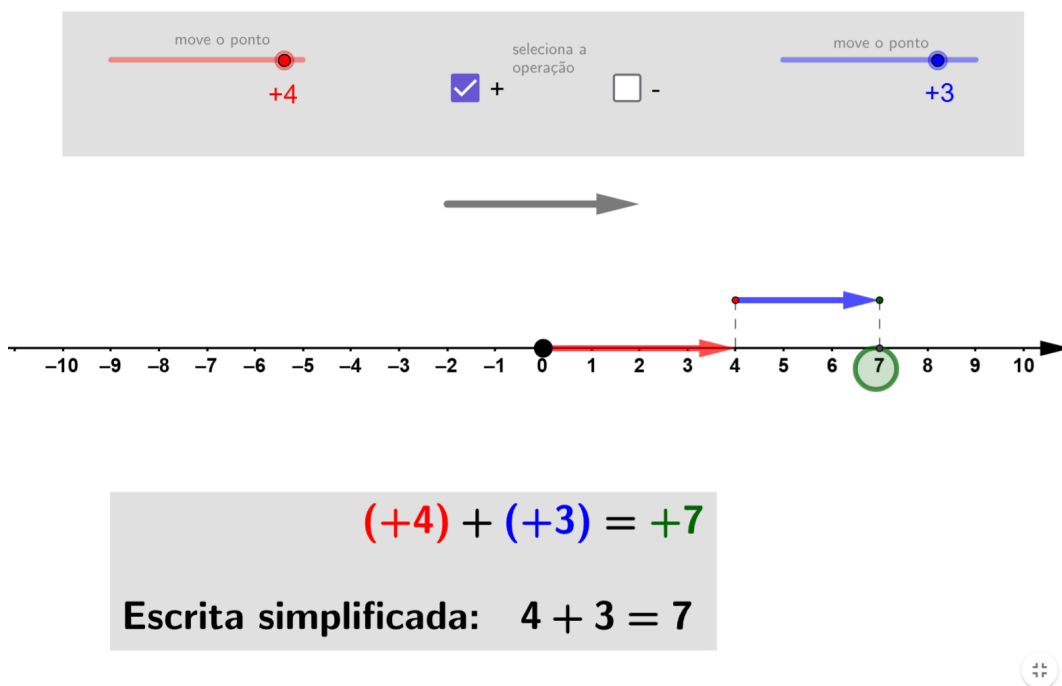
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>.

4.2.5. Adição e Subtração de Números Inteiros

A atividade de Luciana Brito, disponível no link <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>, se diferencia das outras por permitir a alternância entre adição e subtração de números inteiros. O uso de **vetores** para representar as parcelas e subtraendos torna a visualização do resultado mais fácil, sendo este último indicado por um círculo verde.

Além da representação geométrica na reta numérica, a ferramenta também exibe a representação algébrica e uma forma simplificada da mesma operação. Isso ajuda a interpretar a regra dos sinais para a adição de números inteiros relativos (figura 29).

Figura 29: Adição e Subtração de Números Inteiros

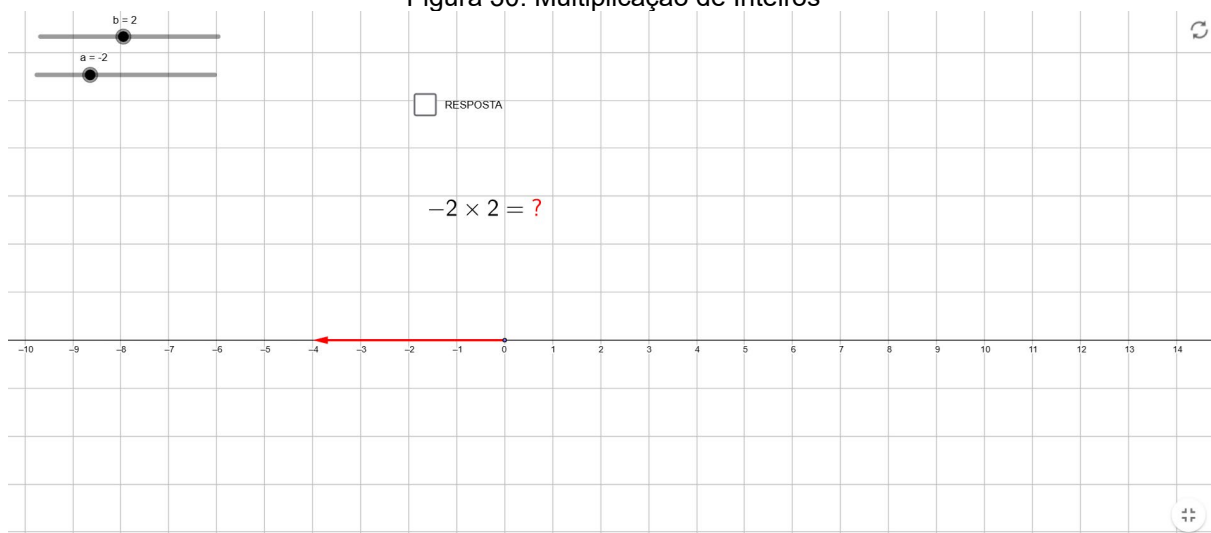


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>.

4.2.6. Multiplicação de Inteiros

A atividade *Multiplicação de Inteiros*, disponível em <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>, foi desenvolvida por Fernanda de Almeida Arruda. Trata-se de uma ferramenta visual para mostrar o resultado da multiplicação de números inteiros. As parcelas do produto são representadas por números definidos por botões deslizantes apresentados na parte superior esquerda da tela do jogo. A seguir, na figura 30, temos o exemplo $-2 \times 2 = -4$. Não conseguimos ver o resultado pois o ícone *Resposta*, não está selecionado. Porém podemos ver a visualização da resposta pela ponta do vetor representado na imagem em vermelho. A seta vermelha representa o resultado do produto.

Figura 30: Multiplicação de Inteiros



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>.

CAPÍTULO 5: ELABORAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS USANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS

Neste capítulo, será feita uma apresentação geral da estrutura de uma sequência didática de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos. A sequência é baseada nas habilidades da **BNCC** para o ensino de números inteiros (**EF07MA03**, **EF07MA04**). O objetivo é que o aluno reconheça os números inteiros, entendendo seu uso, história, ordenação, associação com a reta numérica e operações.

Esta sequência é o objetivo principal dessa dissertação. O detalhamento e aprimoramento desta sequência constitui o produto educacional desta dissertação, que pode ser consultado no Apêndice deste texto.

Assim, estabelecemos a estrutura desta sequência em três blocos principais:

1. **Reconhecimento dos inteiros:** Identificar a existência de números inteiros, noção do zero como origem da reta numérica e identificação e construção de reta numérica dos inteiros.
2. **Adição e subtração de inteiros:** Reconhecer, operar e associar a problemas as operações de adição e subtração de inteiros. Associar o conhecimento em situações práticas que envolvam números inteiros. Resolver claramente as regras de sinais para adição algébrica de inteiros
3. **Multiplicação de inteiros:** Reconhecer, operar e associar a problemas a operação de multiplicação de inteiros. Resolver claramente as regras de sinais da multiplicação de inteiros.

Pretendemos que o uso dos recursos digitais aqui organizados possam auxiliar os alunos a superar as dificuldades de aprendizagem com números inteiros relativos.

5.1. Bloco 1: Reconhecimento dos inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03)

Objetivo específico: Identificar a existência de números inteiros, noção do zero como origem da reta numérica e identificação e construção de reta numérica dos inteiros.

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3 e 4

Material necessário: Lousa digital (que pode ser substituído por datashow e computador), celular com câmera, computador para os alunos (que pode ser substituído por tablets), caderno, lápis e borracha.

Duração: 200 minutos

Atividade 1

Nesta atividade vamos usar o simulador *Reta Numérica: Inteiros*, disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers. Como ponto de partida, deve-se expor a tela inicial da ferramenta, para que os alunos a observem. É muito importante que os itens *Reta Numérica*, *Etiquetas* e *Valor Absoluto* estejam desmarcados além de desativar a aba *Comparação*.

Em seguida, com a aba da ferramenta aberta, deve-se propor para a turma as seguintes questões:

- i) **De acordo com a simulação, determine um possível valor para a altura da montanha?**
- ii) **De acordo com sua resposta do item i), determine uma estimativa para “profundidade” da praia?**
- iii) **Você consegue encontrar a mudança de um ambiente para o outro? O que te leva a acreditar que esse local é a mudança de ambiente?**

Após realizar a atividade 1, deve-se conduzir a associação da mudança do meio para a reta numérica. A associação das situações do problema com a reta numérica e a identificação da mudança de meio com o zero na reta deve ser prioridade nesta etapa.

Atividade 2

Primeiro, habilite os itens *Reta Numérica* e *Valor Absoluto*, e ao observar as mudanças na imagem, responda:

- i) **A imagem exhibe uma mesma frase para a garota de paraquedas e para o pássaro. Já o peixe, tem uma frase diferente. Explique, com suas palavras a mudança na composição das frases?**
- ii) **Na parte esquerda da imagem, identificamos uma reta de elevação, podemos associar a cada personagem um valor na reta. Complete abaixo a posição de cada personagem na reta numérica:**
 - a) **58m acima do nível do mar = _____**
 - b) **22m acima do nível do mar = _____**
 - c) **45m abaixo do nível do mar = _____**
- iii) **Podemos concluir que:**
 - a) **Ao colocar um personagem acima do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.**

Ao colocar um personagem abaixo do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

O principal objetivo desta atividade é a apropriação do vocabulário “acima do nível do mar”, para números positivos e “abaixo do nível do mar”, para números negativos. Após responder essas três perguntas, deve-se habilitar o botão de *Reta Numérica* e interagir com essa nova informação

Atividade 3

Em seguida deve-se abrir as outras relas que são apresentadas na ferramenta: cofre e termômetro.

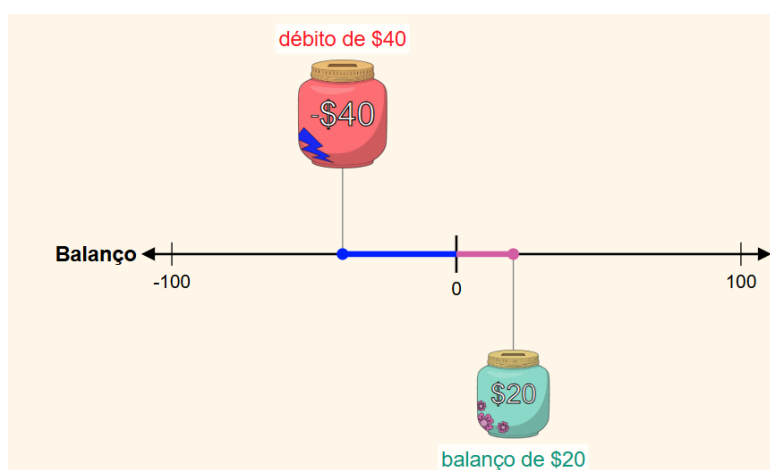
Na aba termômetro, habilite os itens *Reta Numérica* e *Valor Absoluto* e certifique-se de que o item *Etiqueta* esteja desabilitado. A janela comparação também deve estar desmarcada. Perceba que a palavra “balanço” é equivalente a palavra “crédito”. Feito isso, proponha as seguintes questões aos alunos.

- i) Ao ter um balanço de \$40, qual será o valor correspondente na reta numérica correspondente?
- ii) Ao ter um débito de \$20, qual será o valor correspondente na reta numérica?
- iii) O que representa o zero na reta numérica comparado a quantidade que temos no cofre?
- iv) Qual é a maior e a menor quantidade que podemos ter no cofre no exemplo?

Após responder a Atividade 3, peça aos alunos que marquem o item *Etiqueta* e que liberem a janela *Comparação*. Considerando balanço como valores positivos e débito para valores negativos, oriente para que os alunos respondam as seguintes questões.

Atividade 4

- i) O valor -30 na reta numérica representa qual valor no cofre? Justifique sua resposta.
- ii) Um balanço de \$80, representa qual valor na reta numérica? Justifique sua resposta.
- iii) Observe a imagem abaixo e identifique a quantidade que devemos acrescentar ao cofre que tem débito de \$40 para que fique com valor igual ao cofre que possui balanço de \$20?



Para dar continuidade, esgote os exemplos necessários usando a ferramenta e apresente a última aba do simulador, temperatura.

Atividade 5

Mais uma vez, manipule a ferramenta com os alunos para que eles possam se adaptar ao simulador e sua utilização. Após esse tempo de manipulação, solicite que respondam as questões a seguir:

- i) Na atividade selecione o mês de março e responda:**
 - a) Qual a menor temperatura que você encontrou no globo terrestres neste mês?**
 - b) Qual a maior temperatura que você encontrou no globo terrestre neste mês?**
 - c) Consegue identificar a região onde são essas temperaturas?**
- ii) Agora selecione o mês de julho, identifique onde fica o Brasil no mapa e responda:**
 - a) Qual a menor temperatura encontrada para o Brasil neste mês?**
 - b) E a maior?**
 - c) Trocando para o mês de dezembro, determine qual a maior temperatura do Brasil?**
 - d) Determine qual a menor temperatura do Brasil no mês de dezembro?**
 - e) Justifique as mudanças que ocorreram para esses meses e o motivo da variação das temperaturas para julho e dezembro.**

Depois de realizar a atividade 5, espera-se que a familiaridade com o uso da plataforma esteja consolidada. Assim, pode-se ofertar a Atividade 6, com questões mais abstratas.

Atividade 6

- i) Responda as perguntas abaixo usando a ferramenta Reta Numérica: Inteiros no exemplo de temperaturas.**
 - a) Observe os polos norte e sul e determine as menores temperaturas nos meses de janeiro e julho. Há variação das temperaturas? Justifique sua resposta.**

- b) Em qual mês encontramos a maior temperatura do ano? Qual foi o mês? E qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a maior.
- c) Em qual mês encontramos a menor temperatura do ano? Qual foi o mês? Qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a menor.
- ii) Para finalizar, relacione a reta numérica com as situações problemas que resolvemos até aqui, associando as características do problema com valores positivos e negativos.
- a) Exemplo de profundidade.
número positivo: altitude acima do nível do mar
número negativo: altitude abaixo do nível do mar
- b) Exemplo do cofre.
- c) Exemplo da temperatura.

O objetivo desta atividade é estabelecer a relação entre a reta numérica e as situações problema propostas. Espera-se, ao fim da atividade, que o estudante:

- Identifique e reconheça a existência de números inteiros.
- Compreenda a noção do zero como ponto de referência na reta numérica.
- Identificação e compreenda a construção da reta numérica dos inteiros.
- Compare números inteiros.

5.2. Bloco 2: Adição e subtração de inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03), (EF07MA04)

Objetivo específico: Reconhecer, operar e associar as operações de adição e subtração de inteiros à resolução de problemas. Associar o conhecimento em

situações práticas que envolvam números inteiros. Resolver claramente as regras de sinais para adição algébrica de inteiros

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3, 4, 5.

Material necessário: Lousa digital (que pode ser substituído por datashow e computador), celular com câmera, computador para os alunos (que pode ser substituído por tablets), caderno, lápis e borracha.

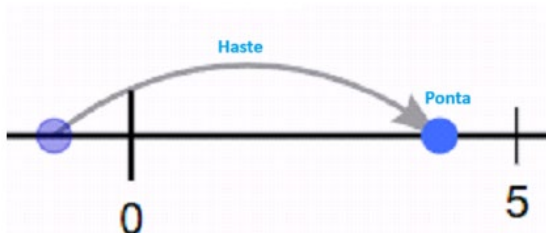
Duração: 200 minutos

Este bloco tem como objetivo identificar a regra dos sinais usadas para realizar a adição ou subtrair números negativos. Para identificar a adição de inteiros, usaremos o simulador *Números Inteiros: Operações*. Este simulador está disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.

Abra a aba *Fichas*, e use um tempo para utilizar a ferramenta com os estudantes. Ela é bem intuitiva. Após interação, oriente os estudantes para que realizem a atividade a seguir.

Atividade 1

- i) Na aba *Fichas*, observe a localização do resultado colocando -5 na bolsa esquerda e +3 na bolsa direita. **Qual é o resultado da operação realizada? Por quê? Verifique sua resposta na simulação**
- ii) Qual é o resultado da operação $-1 + 1$? Assinalar.
 - a) 0 b) 2 c) -1 d) N.A.
- i) Ainda na aba *Fichas*, ao executar uma operação, uma flexa é exibida, como na imagem a seguir.



O que indica a haste da flecha:

- a) Quanto à resposta encontrada?
- b) Quanto ao movimento que executa?

Complementando a Atividade 1, sugere-se ofertar a Atividade 2:

Atividade 2

- i) Na aba Fichas, determine a localização do resultado em cada caso quando colocamos:
 - a) +5 e +3 na bolsa direita?
 - b) -4 e -2 na bolsa esquerda?
 - c) +3 na bolsa direita e -2 na bolsa esquerda?
 - d) +2 na bolsa direita e -5 na bolsa esquerda?
 - e) +3 na bolsa direita e -3 na bolsa esquerda?
- ii) Ao colocar as fichas +3, +4 na bolsa direita e -1, -2, e -5 na bolsa esquerda. Qual será o resultado encontrado? Justifique sua resposta.
- iii) Agora resolva as seguintes operações usando números inteiros. Depois de resolvê-los confira o resultado usando o simulador.

a) $(+5) + (+4)$	e) $(+1) + (+3)$
b) $(-2) + (-5)$	f) $(-3) + (-4)$
c) $(+4) + (-3)$	g) $(-2) + (+5)$
d) $(+1) + (-4)$	h) $(-5) + (+2)$
- iv) Depois de conferir com o simulador, converse com seus colegas e entrem em um consenso quanto ao resultado das somas:
 - a) A adição de dois números positivos será sempre um número

 - b) A adição de dois números negativos será sempre um número

- v) Agora, elabore uma regra para a somas de números com sinais diferentes: um positivo e outro negativo.

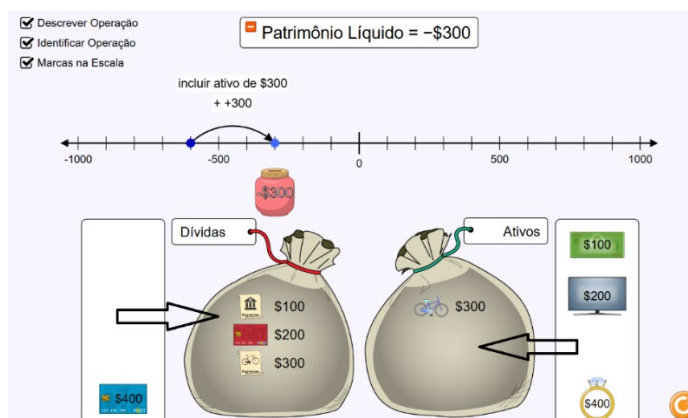
Nestas duas atividades, é importante generalizar e sistematizar o que ocorre com a adição de números inteiros com o mesmo sinal. Com o uso da aba *Fichas*, os

alunos devem alcançar a compreensão da operação de adição de números inteiros. Feito isso, explore com os alunos a próxima aba: *Patrimônio Líquido*.

Nesta aba, encontramos em uma reta numérica, valores de \$100 a \$400 à esquerda que representam *Dívidas* e os mesmos valores à direita que representam *Ativos*. Apesar da mesma aparência com a aba *Fichas*, considera-se nesta aba situações contextualizada: empréstimos e cartões no lugar das fichas vermelhas; dinheiro, televisão, bicicleta e anel no lugar das fichas azuis.

Atividade 3

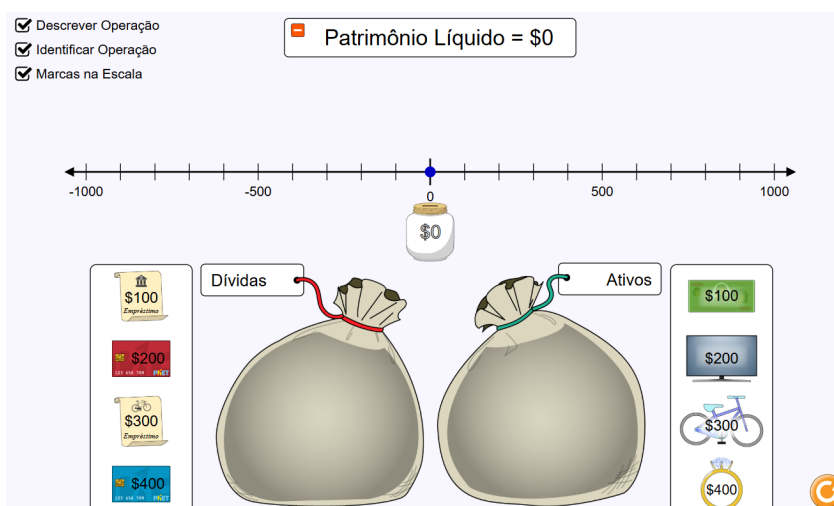
- i) **Juan é um estudante e gosta de jogar o famoso jogo de *monopólio* onde ele tem dívidas de \$ 100, \$ 200 e \$ 300, então ele faz como pagamento com alguns bens, como bicicleta (\$ 300), vamos ver o que aconteceu.**



Ao analisar o resultado indicado pela seta, ele percebe que ainda tem dívidas. É possível João pagar a dívida pendente? Discuta sua resposta.

- ii) **Maria possui um valor líquido inicial for igual a -\$ 300 e -\$ 400 for adicionado a ele, como você usaria a simulação para obter o patrimônio líquido (\$)?** Discuta sua resposta
- a) Desenhe abaixo como a representação do patrimônio líquido (\$) parecia na simulação**
- b) E se em vez de -\$400, mudarmos para \$400 e adicionarmos - \$100, analisamos a representação na reta numérica.**

- iii) **Preveja qual seria o patrimônio líquido de Pedro se inserirmos todos os dados no saco de dívidas e todos os dados no saco dos ativos.**



Verifique com a simulação:

- Quando o patrimônio líquido diminui para zero? Justifique sua resposta.
- Quando há aumento do patrimônio líquido? Justifique sua resposta.
- Quando há diminuição do patrimônio Líquido?

Após a realização da Atividade 3, espera-se que os estudantes consigam trabalhar com situações problema que envolvam a soma de números inteiros. Então propomos uma Atividade 4.

Atividade 4

- Expresse, utilizando a adição de números inteiros, cada situação que segue e dê o resultado.**

 - Em um jogo, Alice ganhou 12 pontos e perdeu 7.
 - Uma comida congelada estava sendo mantida a temperatura de $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e sofreu uma variação de $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 - Em um torneio de futebol, um time tem 14 pontos ganhos e 20 pontos perdidos.
 - Seu João depositou R\$239,00 em sua conta corrente, que estava com um saldo devedor de R\$540,00.

- ii) Num jogo de baralho, Rodrigo e Carolina obtiveram os seguintes resultados:

	Rodrigo	Carolina
1ª Partida	Ganhou 510 pontos	Perdeu 80 pontos
2ª Partida	Perdeu 215 pontos	Ganhou 475 pontos
3ª Partida	Perdeu 485 pontos	Ganhou 290 pontos
4ª Partida	Ganhou 625 pontos	Perdeu 115 pontos

- a) Qual é o número total de pontos de Carolina após as quatro partidas?
- b) Qual é o número total de pontos de Rodrigo após as quatro partidas?
- c) De quem foi a vantagem final? Quantos pontos de diferença?
- iii) Um termômetro está marcando -2°C em uma cidade. Se a temperatura subir 6°C , quantos graus marcará o termômetro?
- iv) Considere os seguintes números:

103	20	+15	-36	-29
-15	28	-100	-21	42

Escolha dois deles, de modo que:

- a) a soma seja zero.
- b) a soma seja 3.
- c) a soma seja 62.
- d) a soma seja -8 .
- e) a soma seja -50 .

Com a operação de soma consolidada, vamos dar continuidade para a subtração usando o simulador *Reta Numérica: Distância*, disponível no link: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance.

Para dar início a Atividade 5, faça uma ambientação inicial com os estudantes com a ferramenta na aba *casa*, que é a primeira opção de visualização. Peça para que os estudantes marquem a opção *Diferença Direta*, desativem a janela *Sentença* e desmarquem os botões *Diferença* e *Descrição*.

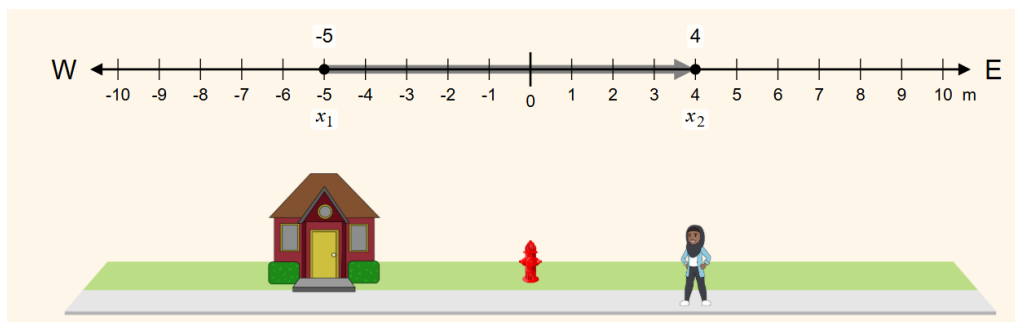
Atividade 5

- i) **Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Distância e explore as janelas, compartilhe suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a manipulação da simulação?**
- ii) **Coloque a casa na posição -6 e coloque a pessoa na posição 5. Agora responda:**
 - a) **Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.**
 - b) **Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.**
 - c) **E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.**
- iii) **Agora coloque a casa na posição 5 e coloque a pessoa na posição -6. Agora responda?**
 - a) **Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.**
 - b) **Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.**
 - c) **E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.**

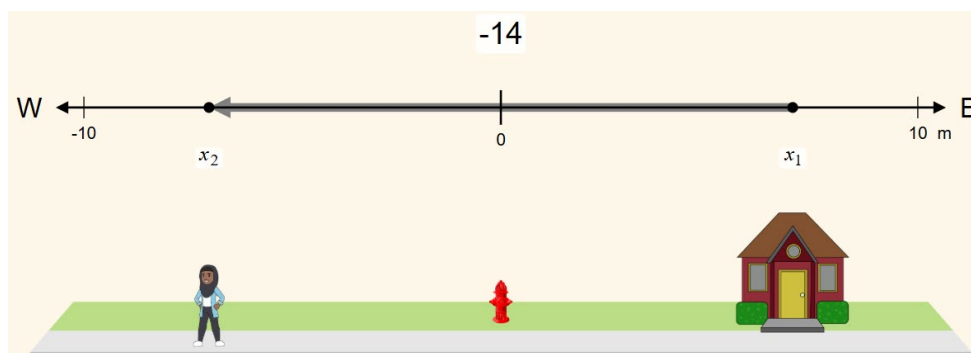
Após resolver a Atividade 5, proponha a realização da Atividade 6.

Atividade 6

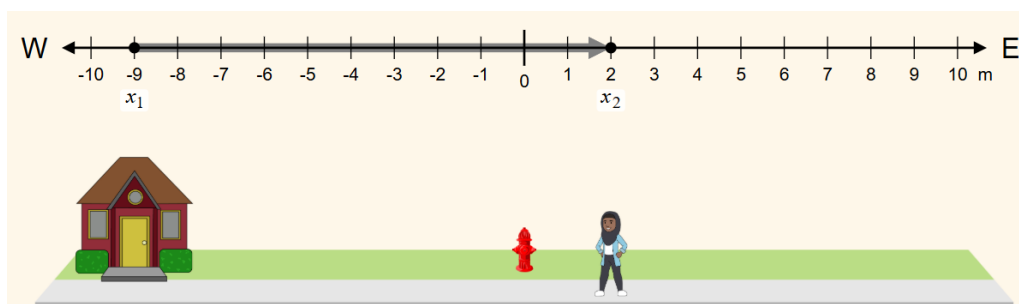
- i) **Considere a seguinte situação na figura a seguir. Se a menina quer chegar em casa, determine a distância da garota até a casa?**



- ii) Agora considere que a menina saiu de casa e andou 14 metros a oeste (W). Determine uma possibilidade para a posição da casa (x_1) e da menina (x_2)?



- iii) Agora, analise a seguinte situação na figura a seguir.



- Determine qual a posição da casa?
- Determine qual a posição da garota?
- Se a garota saiu de casa e andou na direção leste (E), quanto a garota andou?

Após resolver, abra a aba termômetro, e marque a opção *Diferença Direta*, e desative a janela Sentença. Sugiram que os estudantes interajam com o ambiente da plataforma. Em seguida, proponha que resolvam a atividade 7.

Atividade 7

- i) Utilizando o Simulador Reta Numérica: Distância, na janela do termômetro, coloque o termômetro roxo e o termômetro verde, de modo que a diferença entre as temperaturas seja de 40°C.**
 - a) Usando apenas números positivos.**
 - b) Usando apenas números negativos.**
 - c) Usando um número positivo e outro negativo.**
- ii) Se a temperatura atual de determinado local é de 0°C, determine a temperatura se:**
 - a) Ocorrer um aumento de 30°C?**
 - b) Ocorrer uma queda de 25°C?**
- iii) Se inicialmente está com 0°C, ocorrer um aumento de 10°C e após algum tempo uma queda de 15°C, qual será a temperatura no final?**
- iv) Observe a diferença entre as temperaturas na imagem a seguir, onde o resultado da diferença é 44. Indique um valor possível para os termômetros A e B. Justifique sua resposta.**

Em seguida, utilizaremos a aba pássaro. Reserve um tempo para o estudante se ambientar com o novo cenário. Para iniciar a próxima atividade, os alunos devem marcar a opção *Diferença Direta*.

Atividade 8

- i) Se um pássaro está a 15m acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros abaixo do nível do mar, qual será a distância entre o pássaro e o peixe? Monte uma operação de subtração para representar essa situação e justifique sua resposta.**
- ii) Imagine que o pássaro quer pegar o peixe. Se o pássaro mergulha a uma profundidade de 5 metros abaixo do nível do mar e o peixe para**

fugir pula a uma altura de 5 metros acima do nível do mar. Neste momento qual a distância entre o peixe e o pássaro?

iii) Observe as operações abaixo, use o simulador usando o peixe e o pássaro para exemplificá-los e justifique sua resposta.

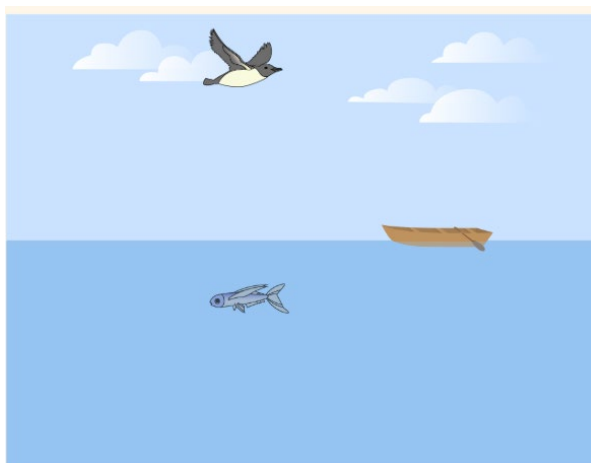
a) $(+15) - (+5)$

b) $(+7) - (-13)$

c) $(-12) - (+10)$

d) $(-9) - (-10)$

iv) Um pássaro vê um peixe nadando e pretende pegá-lo. Se o pássaro está a 15 metros acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros de profundidade. Quantos metros o pássaro deve se mover para pegar o peixe? Justifique sua resposta



5.3. Parte 3: Multiplicação de inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03), (EF07MA04)

Objetivo específico: Reconhecer, operar e associar a problemas a operação de multiplicação de inteiros. Resolver claramente as regras de sinais da multiplicação de inteiros.

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Material necessário: Lousa digital e computador para os alunos, ou computador e datashow para os professores; celular com câmera; caderno, lápis e borracha.

Duração: 150 minutos

Para este bloco, a investigação será nosso principal objetivo, sendo a regra dos sinais para produto de números inteiros o nosso objetivo final. Para isso, vamos usar o simulador de produtos usando o aplicativo Geogebra, temos esse simulador disponível em <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb> (Arruda, 2019)

Este simulador de produto, contém dois botões deslizantes a e b , que representam as parcelas do produto $a \times b$. Caberá aos alunos abrirem o aplicativo do Geogebra em um computador e colocar as parcelas das multiplicações que recebeu e conferir os resultados encontrados. Este bloco está dividido em cinco atividades, quatro de investigação, simulando as possibilidades de produto de inteiros e a quinta de conclusão das quatro primeiras atividades. O objetivo destas atividades é chegar a regra dos sinais usando exemplos e chegando na conclusão desejada, sem precisar decorar a regra.

A seguir, temos as cinco atividades deste bloco.

Atividade 1

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(+5) \cdot (+2) =$

b) $(+3) \cdot (+4) =$

c) $(+1) \cdot (+6) =$

d) $(+2) \cdot (+3) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Atividade 2

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(+4) \cdot (-2) =$

b) $(+6) \cdot (-1) =$

c) $(+3) \cdot (-3) =$

d) $(+5) \cdot (-2) =$

ii) Agora responda:

c) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

d) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Atividade 3

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(-2) \cdot (+2) =$

b) $(-5) \cdot (+3) =$

c) $(-1) \cdot (+8) =$

d) $(-4) \cdot (+3) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Atividade 4

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(-1) \cdot (-7) =$

b) $(-5) \cdot (-3) =$

c) $(-2) \cdot (-4) =$

d) $(-3) \cdot (-5) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Atividade 5

i) Complete as frases a seguir, com base no que resolveu nos exercícios anteriores.

a) Um número positivo multiplicado por outro número positivo é igual a _____, portanto $(+) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.

b) Um número positivo multiplicado por um número negativo é igual a _____, portanto $(+) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.

c) Um número negativo multiplicado por um número positivo é igual a _____, portanto $(-) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.

d) Um número negativo multiplicado por outro número negativo é igual a _____, portanto $(-) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Após responderem as questões propostas nas atividades de 1 a 5, vamos usar uma atividade interativa do site <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/> (Arcademics, 2025) denominada Corrida dos Inteiros para exercitar as regras dos sinais construída na **Atividade 5**. Esse jogo, por ser uma competição, ajuda na fixação das regras dos sinais. Essa tarefa final será a **Avaliação 1** deste bloco. O jogo consiste numa corrida de espaçonaves, onde vence quem resolve as questões corretamente em menos tempo. Para cada acerto, sua nave acelera e para cada erro, fica mais lenta.

CAPÍTULO 6: RELATO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos o contexto da pesquisa, os sujeitos, os instrumentos utilizados, o relato da experiência didática com as ferramentas digitais e seus resultados.

6.1 O contexto da pesquisa (escola)

A aplicação das atividades foi realizada em uma escola municipal localizada no Estado do Rio de Janeiro, na mesorregião Baixadas Litorâneas (veja sua geolocalização na figura 31). A região Baixadas Litorâneas é composta por 13 Municípios, são eles: Araruama, Armação de Búzios, Arraial do Cabo, Cabo Frio, Cachoeiras de Macacu, Casimiro de Abreu, Iguaba Grande, Maricá, Rio Bonito, Rio das Ostras, São Pedro da Aldeia, Saquarema e Silva Jardim.

Figura 31: Mapa das mesorregiões do Estado do Rio de Janeiro

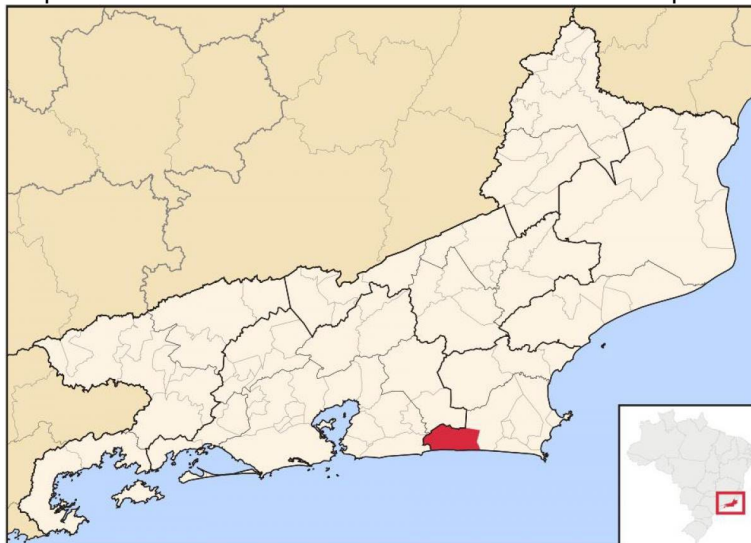


Fonte: <https://www.educacaonamao.com.br/wp-content/uploads/2019/11/mapa-regioes-rio-de-janeiro.jpg>

A pesquisa foi realizada no município de Saquarema (figura 32) localizado a aproximadamente 100km da cidade do Rio de Janeiro. A escola faz parte da rede municipal da cidade, que é composta por 37 escolas. A rede municipal de educação

de Saquarema saltou da 36ª para a 7ª posição no ranking do IDEB de 2023 do estado do Rio de Janeiro para os anos finais do ensino fundamental, atingindo a nota 5,3.

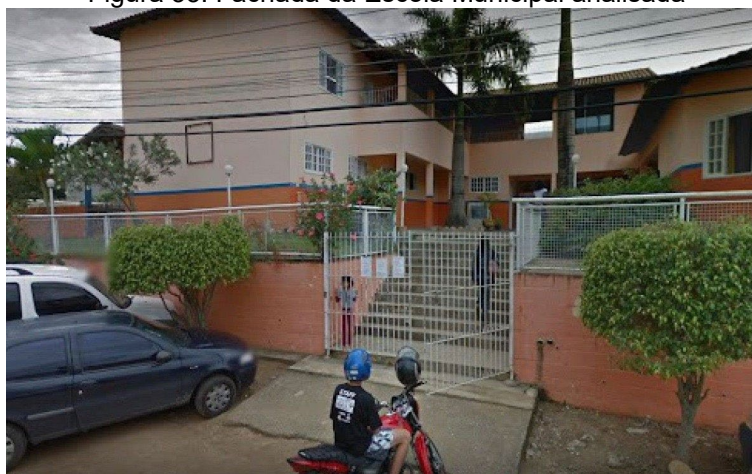
Figura 32: Mapa do Estado do Rio de Janeiro destacando o município de Saquarema



Fonte: <https://pt.map-of-rio-de-janeiro.com/munic%C3%ADpios-mapas/saquarema-mapa>

A Escola Municipal analisada está no bairro Rio da Areia, distrito de Bacaxá, no município de Saquarema (RJ) (figura 33). É uma instituição da rede municipal de educação, com funcionamento em três turnos (manhã, tarde e noite), atendendo desde a educação infantil, pré-escola, anos iniciais e finais do ensino fundamental, até programas de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Conforme dados atualizados até novembro de 2023, a escola possui entre 950 e 1.000 alunos matriculados, com cerca de 60 professores e aproximadamente 40 turmas distribuídas entre os três turnos.

Figura 33: Fachada da Escola Municipal analisada



Fonte: <https://odia.ig.com.br/saquarema/2021/10/6266166-vestibular-cederj-prorroga-prazo-de-inscricao.html>

A instituição oferece excelente estrutura física e tecnológica, com: laboratório de informática, acesso à internet de banda larga, muitos computadores para uso dos alunos e lousa digital em sala de aula. Há também espaços de aprendizagem e convivência: auditório, sala de leitura, parquinho, área verde, quadra esportiva coberta, pátio descoberto e refeitório com alimentação escolar.

A escola está inserida em um bairro de baixa renda, sendo seu público alunos do bairro Rio da Areia e de bairros próximos, sendo uma zona de transição entre a área urbana e rural, possui público das duas realidades. Conta com transporte escolar para deslocamento, porém apresenta uma dificuldade de regularidade na presença de seus alunos.

Neste contexto, definimos um perfil de alunos mistos, parte vindo de zona rural e parte vindo de zona urbana. Sendo uma parcela significativa vindo de comunidades de baixa renda. Essa realidade reflete na aprendizagem e os estudantes têm dificuldade de pertencimento de onde vivem e com a escola que frequentam. Apresentam pouco zelo pelo ambiente escolar e se mostram com grande dificuldade de interpretação de texto e cálculos matemáticos.

6.2 Sujeitos

A sequência didática planejada foi aplicada para alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental em duas turmas, 701 e 702 da Escola Municipal comentada acima. Buscamos ofertar a esses alunos atividades diversificadas em busca de suas impressões para com as ferramentas utilizadas para aprender números inteiros.

A turma 701 é uma turma com um perfil de alunos carentes mais enérgicos, que apresentam grande dificuldade de se concentrar para aprender e possui rendimento médio nas avaliações. Já a turma 702, também é uma turma com um perfil de alunos carentes, porém são mais concentrados e aparentam ser mais dedicados, mostrando melhor rendimento nas avaliações comparado com a outra turma.

As duas turmas apresentam alunos com faixa etária variando entre 12 e 15 anos, sendo que sua maioria possui 13 anos. O grupo pesquisado apresenta alguns alunos com distorção de idade/série, que tiveram algum ano escolar anterior repetido.

6.3 Instrumento de pesquisa

Nesta dissertação de mestrado empregamos diversas ferramentas digitais, a principal ferramenta utilizada foi o site *Phet*, com seus simuladores (ver capítulo 4). Além do Phet, o *Geogebra* foram utilizados alguns aplicativos específicos descritas na sessão 4,2 do capítulo 4.

Além desses, utilizamos o aplicativo Plickers para avaliar os alunos em alguns momentos da experiência didática e, também, para alunos avaliarem as aulas dadas.

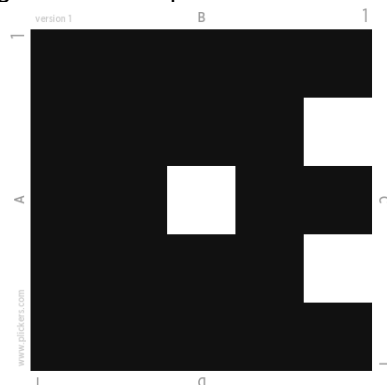
A cada etapa, utilizamos também um questionário de satisfação calibrado com uma escala de Likert, adaptado para 4 pontos⁷. Abaixo, temos algumas para utilizar o aplicativo *Plickers*.

6.3.1 Plickers

O Plickers é uma ferramenta online para educação que permite avaliar os alunos de forma rápida e dinâmica, sem a necessidade de dispositivos eletrônicos individuais. Os alunos utilizam cartões físicos com códigos QR (figura 34) que são escaneados pelo professor usando um smartphone ou tablet. A plataforma permite coletar e analisar as respostas dos alunos em tempo real, fornecendo feedback imediato de suas respostas.

⁷ Foi usado a escala de quatro pontos pois o aplicativo *Plickers* só possui quatro alternativas para as respostas do questionário.

Figura 34: Exemplo de cartão Plickers



Fonte: <https://help.plickers.com/hc/en-us/articles/1260804062589-Step-4-Get-Plickers-Cards>

Cada aluno recebe um cartão, cada cartão tem um único QR que dependendo da posição representa uma das quatro alternativas possíveis. Na figura 35, temos as quatro opções de resposta de um único aluno.

Figura 35: Exemplos de posições de um aluno para responder as alternativas A, B, C e D, respectivamente.



Fonte: <https://help.plickers.com/hc/en-us/articles/1260804062589-Step-4-Get-Plickers-Cards>

Dentro do site do aplicativo, o professor previamente deve fazer seu cadastro e efetuar o cadastramento da turma, associando um cartão de resposta para um único aluno. A turma depois de cadastrada pode ser usada para fazer inúmeras atividades usando os mesmos cartões. Os mesmos cartões podem ser reaproveitados para serem usados em outras turmas.

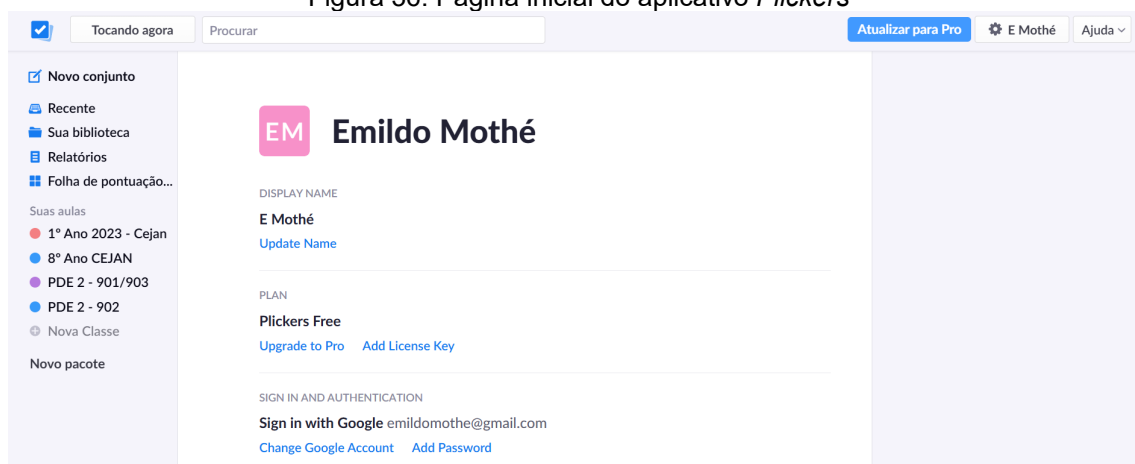
Com a turma cadastrada, os cartões distribuídos, o professor vai precisar de uma tela para a exibição da pergunta e um celular, ou tablet com câmera para escanear as respostas dos alunos usando o aplicativo *Plickers* previamente instalado no celular ou tablet a ser usado.

Caso o professor não consiga fazer a tarefa usando o *Plickers*, recomendamos usar uma folha com atividade impressa. Usando o aplicativo, você pode cadastras as

questões previamente; cada bloco tem no máximo 5 questões na versão grátis do aplicativo, por isso nesta atividade sempre vamos fazer blocos com 5 questões.

Para cadastrar uma questão o professor deve acessar sua conta, como na imagem a seguir (figura 36) e iniciar um novo conjunto:

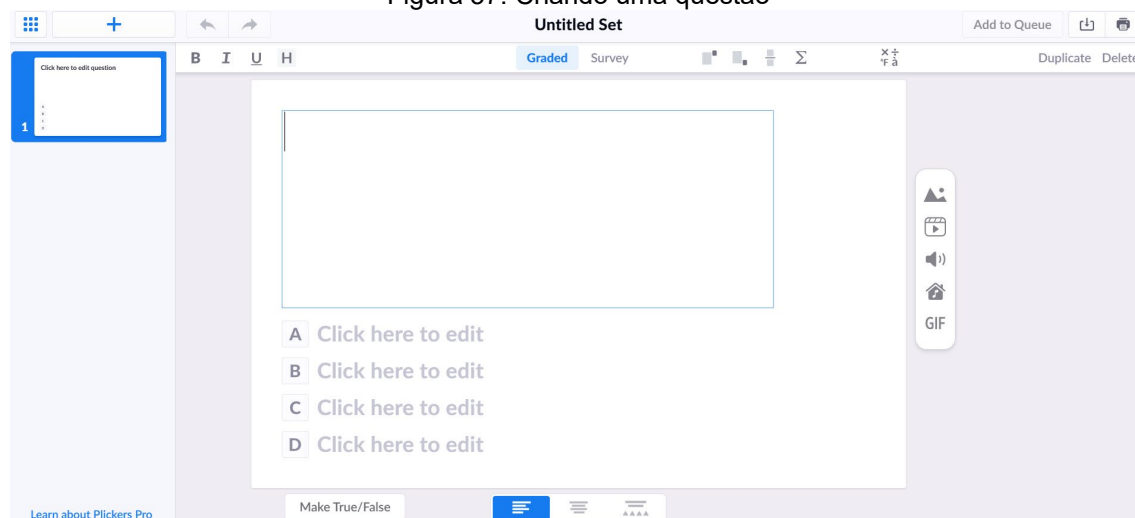
Figura 36: Página inicial do aplicativo *Plickers*



Fonte: <https://www.plickers.com/account>

Iniciando novo conjunto, abre-se uma nova aba onde é possível escrever um bloco de cinco questões, podendo colocar o título do bloco em “Untitled Set” escrever o corpo da questão em “Click here to edit question” e as alternativas em “Click here to edit”, como pode ser visto na figura 37.

Figura 37: Criando uma questão

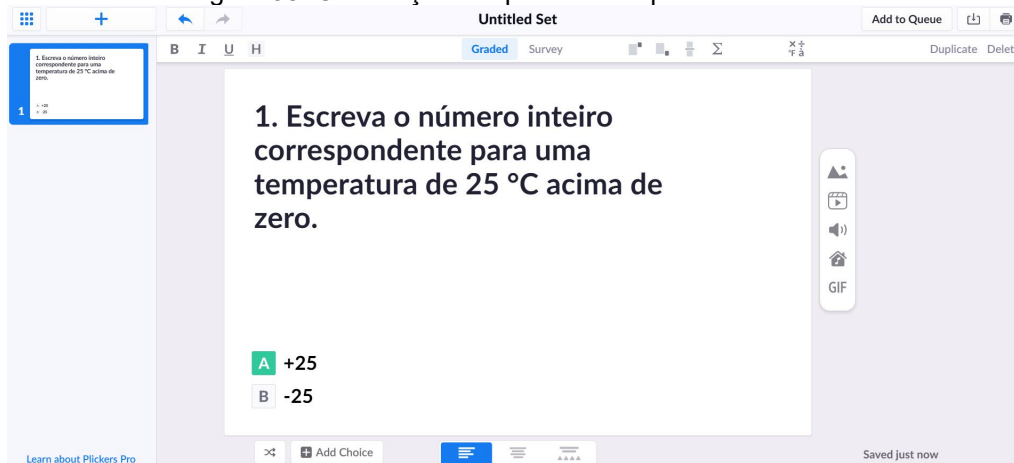


Fonte: <https://www.plickers.com/seteditor/newSet>

Ao montar a questão, devemos escolher qual é a alternativa correta, pois nela, vamos verificar o percentual de acerto da turma na aplicação da atividade. Na figura 38, temos um exemplo de construção de uma questão com a alternativa “A” marcada

como a opção correta da questão. Não se preocupe, porque na apresentação que aparecerá para o aluno não será exibido o gabarito, somente em momento oportuno, você pode liberar o gabarito para eles. Inclusive o aplicativo exibe quem está acertando e quem está errando no momento da leitura das respostas dos alunos.

Figura 38: Construção de questão no aplicativo Plickers



Fonte: <https://www.plickers.com/seteditor/68518e9e81cdd1aa3fbca050>

Os resultados são dinâmicos e fáceis de visualizar. Nas figuras 39 e 40, temos opções de visualização dos resultados, que aparecem no aplicativo por porcentagem de acerto por aluno ou por porcentagem de acerto por questão. Podendo facilmente avaliar e concluir sobre o aprendizado dos alunos de forma instantânea. Com esses dados também é possível identificar alunos que ainda apresentam dificuldade para interpretar questões para o assunto abordado.

Figura 39: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f07c4d88a9179590c3>

Figura 40: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f07c4d88a9179590c3>

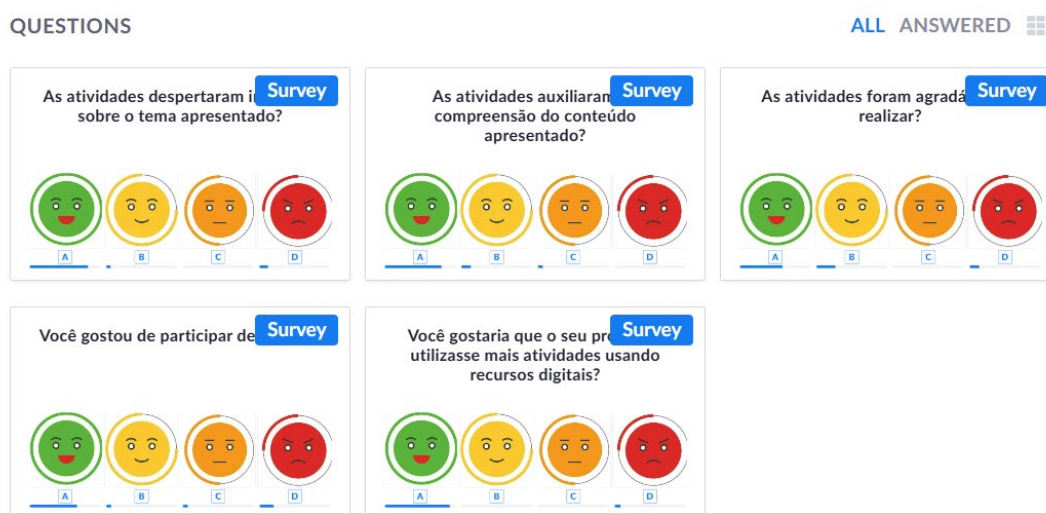
Para a análise das aulas usando essa ferramenta, adaptando as alternativas para quatro opções pois a ferramenta somente aceita no máximo quatro alternativas. Por isso optamos também por usar uma escala de Likert de 4 pontos para fazer nossa pesquisa de opinião sobre as atividades realizadas com os alunos. Na figura 41 temos as questões que foram propostas para a Aula 1.

Figura 41: Questões propostas para avaliar a aula 1 usando o aplicativo Plickers

Avaliação da aula 1

● 701

Played Wednesday 18 June 12:20 PM



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851b93346f4bbb49c366919>

6.4 Cronograma executado

Por falta de calendário não aplicamos as atividades do bloco 3 e, além disso, como as turmas são muito similares, optamos por aplicar as atividades e avaliações do Bloco 1 na turma 701 e as atividades e avaliações do Bloco 2 na turma 702. Em cada uma das turmas, 701 e 702, realizamos dois encontros.

Quadro 4: Cronograma das atividades desenvolvidas na Escola

Encontro	Duração em minutos	Data	Turma	Detalhamento das atividades aplicadas
1	100	18/06/2025	701	Bloco 1 – Atividades 1 a 6
2	100	09/07/2025	701	Bloco 1 – Avaliações 1 a 3
3	100	31/07/2025	702	Bloco 2 – Atividades 1 a 4
4	100	06/08/2025	702	Bloco 2 – Atividades 5 a 8

Fonte: Acervo próprio

6.5 Análise dos resultados

Nesta seção apresentaremos o relato da experiência didática realizada e seus resultados, além da avaliação das atividades realizadas pelos estudantes.

6.5.1 - Relato da experiência

O relato das experiências didáticas será realizado em ordem cronológica das aplicações e por turma. Pelo tempo curto destinado a aplicação e por motivos de logística escolar, o bloco 3 não pode ser aplicado nas turmas.

6.5.1.1 Encontro 1 - Bloco 1 (701) - Aula 1

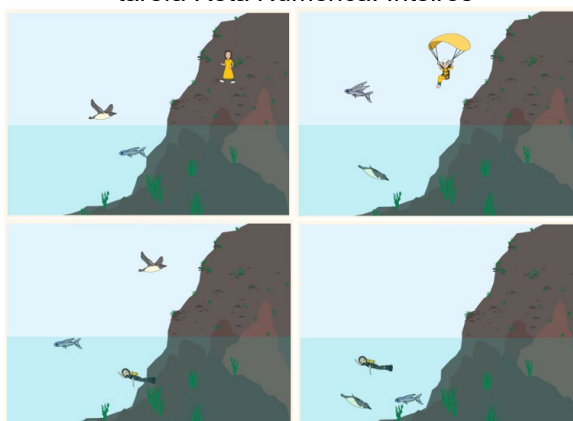
Iniciamos este bloco, utilizando a atividade *Reta Numérica: Inteiros*, do site *Phet Interactive Simulation*. Essa atividade pode ser encontrada no link: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

A tela inicial da ferramenta foi apresentada usando uma tela interativa disponível na sala de aula. Foram disponibilizados notebooks para os alunos trabalharem em duplas. Pedimos que selecionassem o ícone do pássaro. Para dar início a tarefa mostramos a tela inicial do simulador com *Reta Numérica*, *Etiquetas* e *Valor Absoluto* desmarcados, deixando a aba *Comparação* também desativada. Após todos estarem prontos, com seus respectivos aparelhos no simulador solicitado, discutimos com toda a turma, o cenário apresentado e os personagens envolvidos.

Então, solicitamos aos alunos que movimentassem os personagens, escolhendo entre a pessoa, o peixe e o pássaro. Nesta etapa, usamos a tela interativa e os alunos vieram até ela para manipular os personagens.

Várias possibilidades de construção foram executadas pelos alunos, na tela interativa e no computador. Podemos ver na imagem a seguir (figura 42), algumas opções de como ficou a simulação com a manipulação durante a atividade.

Figura 42: Recorte de quatro telas com exemplos de posições relativas dos personagens para a tarefa Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Depois de manipular os personagens, os alunos perceberam as mudanças que eles podem assumir ao trocar de ambiente os personagens.

Feito isso, solicitamos que realizassem a **Atividade 1**, que foi entregue em folha impressa, como na figura 43. Essas atividades descritas neste relato estão todas disponíveis no Apêndice desta dissertação, ficando a cargo do leitor buscá-las para consulta mais detalhada.

Figura 43: Bloco 1: Atividade 1

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 1

i) De acordo com a simulação, determine um possível valor para a altura da montanha?

ii) De acordo com sua resposta do item i), determine uma estimativa para "profundidade" da praia?

iii) Você consegue encontrar a mudança de um ambiente para o outro? O que te leva a acreditar que esse local é a mudança de ambiente?

Fonte: Acervo próprio

Para a questão i, as respostas dadas foram 100 metros acima do nível do mar e +100m. Já para a questão ii, foram 80 metros de profundidade e -80m.

Para a questão iii encontramos diversas respostas registradas: "Sim. Do nível do mar.", "A determinação da mudança do meio é a marcação do mar para a montanha.", dentre outras respostas similares ou deixada em branco.

Lembrando aqui que a identificação da "mudança de meio" e o "zero na reta" era uma das prioridades desta atividade.

Após os alunos responderem a Atividade 1, pedimos que, compartilhassem suas respostas da questão iii. Com essa conversa, concluímos que é possível identificar o local e com a ajuda da lousa digital, verificamos a mudança do ambiente

deslocando o peixe para dentro e fora da água e assim chegou-se à conclusão de que “a mudança acontece no nível do mar”.

Depois disso, pedimos aos alunos que habilitassem os itens *Reta Numérica* e *Valor Absoluto*, e observassem as mudanças na imagem. Deixamos a tela do jogo como na figura 44 - foto tirada da reprodução de uma das duplas formadas para fazer a atividade.

Figura 44: Aluno manipulando Reta Numérica: Inteiros.



Fonte: Acervo próprio.

Em seguida, pedimos que resolvessem a **Atividade2** (figura 45). Nesta atividade, os alunos apresentaram maior autonomia e já apresentavam mais confiança para responder as perguntas propostas.

Na questão i, souberam lidar bem com as frases “abaixo do nível do mar” e “acima do nível do mar”, justificando “Poque o peixe está abaixo do nível do mar, que é o ponto de referência.”. Na questão ii, encontraram dificuldade para associar “acima do nível do mar” com valores positivos e “abaixo do nível do mar” com valores negativos. Porém na questão iii, mais da metade dos alunos responderam corretamente as frases.

Após a resolução da Atividade 2, provocou-se uma discussão sobre as dificuldades de associação para as tarefas ii e iii. Os alunos discutiram suas respostas e souberam identificar seus erros.

Figura 45: Atividade 2

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 2

Utilizando as referências estabelecidas pelo professor, responda as questões:

- i) A imagem exibe uma mesma frase para a garota de paraquedas e para o pássaro. Já o peixe, tem uma frase diferente. Explique, com suas palavras a mudança na composição das frases?

- ii) Na parte esquerda da imagem, identificamos uma reta de elevação, podemos associar a cada personagem um valor na reta. Complete abaixo a posição de cada personagem na reta numérica:

a) 58m acima do nível do mar = _____

b) 22m acima do nível do mar = _____

c) 45m abaixo do nível do mar = _____

- iii) Podemos concluir que:

a) Ao colocar um personagem acima do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

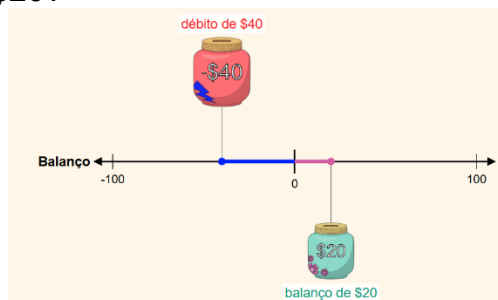
b) Ao colocar um personagem abaixo do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

Após a discussão, fizemos com que os alunos tiveram contato com o simulador na tela *Cofre*. Frisamos com que os alunos que neste exemplo a palavra balanço é equivalente a palavra crédito. Isso facilitou o entendimento dos alunos, pois crédito é um vocabulário mais acessível aos alunos.

Realizamos em seguida a **Atividade 3** e a **Atividade 4**, quase que simultaneamente, pois como pode ser visto nas suas questões, elas se complementam. As duas atividades trabalham com o simulador cofre. Observe o quadro a seguir, onde analisamos as respostas dos alunos.

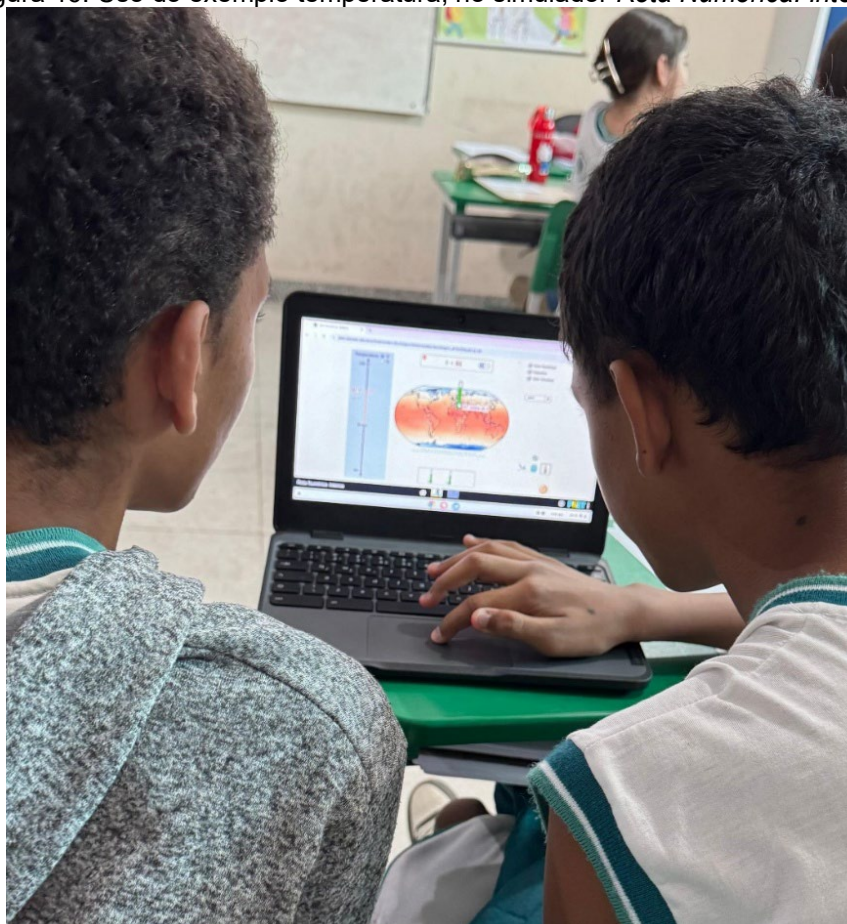
Quadro 5: Respostas das atividades 3 e 4 do bloco 1

Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
3	i) Ao ter um balanço de \$40, qual será o valor correspondente na reta numérica correspondente?	+40
	ii) Ao ter um débito de \$20, qual será o valor correspondente na reta numérica?	-20
	iii) O que representa o zero na reta numérica comparado a quantidade que temos no cofre?	“Ele divide o negativo para o positivo” “É o ponto de origem ou ponto de referência.”
	iv) Qual é a maior e a menor quantidade que podemos ter no cofre no exemplo?	+100 e -100
4	i) O valor -30 na reta numérica representa qual valor no cofre? Justifique sua resposta.	Representa o débito de \$30.
	ii) Um balanço de \$80, representa qual valor na reta numérica? Justifique sua resposta.	+80 pois está à direita do zero.
	iii) Observe a imagem abaixo e identifique a quantidade que devemos acrescentar ao cofre que tem débito de \$40 para que fique com valor igual ao cofre que possui balanço de \$20?	+\$20 -\$20 +\$40 +\$60



Perceba que os alunos encontraram maior dificuldade somente na última questão da atividade 4. Mesmo com alguns alunos respondendo corretamente, é comum que apresentem essa dificuldade.

Em seguida apresentamos o exemplo do termômetro aos alunos. Na imagem a seguir (figura 46) temos um exemplo de uma dupla de alunos usando a ferramenta durante a atividade.

Figura 46: Uso do exemplo temperatura, no simulador *Reta Numérica: Inteiros*

Fonte: Acervo próprio

Nestas atividades, buscamos ampliar a visão dos alunos quanto aos problemas que envolvam números inteiros e especificamente em associar os contextos com a reta numérica. Para isso, foi destinado um período da aula para que os alunos manipulassem a ferramenta e depois respondessem a **Atividade 5** e **Atividade 6**, assim concluindo as atividades deste bloco.

Quadro 6: Respostas das atividades 5 e 6 do bloco 1.

Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
5	i) Na atividade selecione o mês de março e responda:	
	a) Qual a menor temperatura que você encontrou no globo terrestres neste mês?	-55°C, -67, -62°C, -72
	b) Qual a maior temperatura que você encontrou no globo terrestre neste mês?	91°C, 93, 28°C, 31°C
	c) Consegue identificar a região onde são essas temperaturas?	Abaixo da linha do equador as temperaturas mais baixas e no meio as temperaturas mais altas.

	ii) Agora selecione o mês de julho, identifique onde fica o Brasil no mapa e responda:	
	a) Qual a menor temperatura encontrada para o Brasil neste mês?	13°C, 50, 7°C, 57°F, 70
	b) E a maior?	30°C, 82, 25°C, 82°F, 82
	c) Trocando para o mês de dezembro, determine qual a maior temperatura do Brasil?	27°C, 84, 26°C81°F, 84
	d) Determine qual a menor temperatura do Brasil no mês de dezembro?	19°C, 72, 13°C, 75°F, 66
	e) Justifique as mudanças que ocorreram para esses meses e o motivo da variação das temperaturas para julho e dezembro.	As temperaturas variam de acordo com as estações.
	i) Responda as perguntas abaixo usando a ferramenta Reta Numérica: Inteiros no exemplo de temperaturas.	
	a) Observe os polos norte e sul e determine as menores temperaturas nos meses de janeiro e julho. Há variação das temperaturas? Justifique sua resposta.	Janeiro: 5°C Julho: -10°C Em julho foi a menor temperatura.
	b) Em qual mês encontramos a maior temperatura do ano? Qual foi o mês? E qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a maior.	106 acima de zero em Julho.
	c) Em qual mês encontramos a menor temperatura do ano? Qual foi o mês? Qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a menor.	83 abaixo de zero em Maio.
6	iii) Para finalizar, relacione a reta numérica com as situações problemas que resolvemos até aqui, associando as características do problema com valores positivos e negativos.	
	a) Exemplo de profundidade.	Número positivo: altitude acima do nível do mar Número negativo: altitude abaixo do nível do mar
	b) Exemplo do cofre.	Número positivo: Balanço acima de 0. Número negativo: Débito abaixo de 0.
	c) Exemplo da temperatura	Número positivo: Acima de 0. Número negativo: Abaixo de 0.

Percebe-se que os alunos evoluíram na escrita, já usando termos como “acima de zero” e “abaixo de zero” com naturalidade. Apesar de apresentarem algumas respostas confusas em algumas questões, é perceptível a evolução da ideia de número inteiro que estabeleceram usando as ferramentas para a aula.

6.5.1.2 Encontro 2 - Bloco 1 (701) - Aula 2

Nesta aula focamos em avaliar os conceitos desenvolvidos na Aula 1. Com o objetivo de relembrar e incentivar a discussão sobre o tema, o primeiro questionário foi realizado de forma dinâmica. Em seguida realizamos a Avaliação 1 e discutimos suas impressões com a turma.

Avaliação 1

- i) Aprendemos um conceito importante hoje. Você consegue identificar qual foi ele?**
- ii) O zero tem um papel importante na reta numérica. Em poucas palavras descreva sua importância?**
- iii) Como você representou os personagens abaixo do nível do mar, os débitos no cofre ou as temperaturas abaixo de zero? Por quê?**
- iv) Quais números podemos encontrar na reta numérica?**

Ao fazer a pergunta i, os alunos começaram de forma tímida sua participação, sendo necessário estabelecer uma estratégia para começarem a participar. Assim que os primeiros alunos começaram a colocar suas impressões, as respostas foram se complementando e chegamos ao resultado para a primeira questão: “Aprendemos a colocar os números negativos na reta numérica.”, “Aprendemos a usar números negativos para representar temperaturas, distância abaixo do nível do mar e para valores de dívidas.” Apareceram outras variantes destas frases, com outras palavras, mas com o mesmo significado.

Para a questão ii, tivemos mais dificuldade de encontrarem uma resposta e a discussão foi fraca, as respostas nortearam as ideias de separação entre números positivos e negativos, além de representa a origem da reta. Já na questão iii, conseguiram facilmente determinar que são com números negativos. Concluindo com a questão iv, também não encontrando dificuldade de perceber que na reta encontramos números positivos, números negativos e o zero.

Após a conclusão da avaliação, demos início às avaliações 2 e 3 usando o aplicativo *Plickers*. A Avaliação 2 possui cinco questões de múltipla escolha com duas alternativas de resposta. Na figura a seguir temos a tela do aplicativo que apresenta uma síntese das respostas dadas pelos estudantes (figura 47).

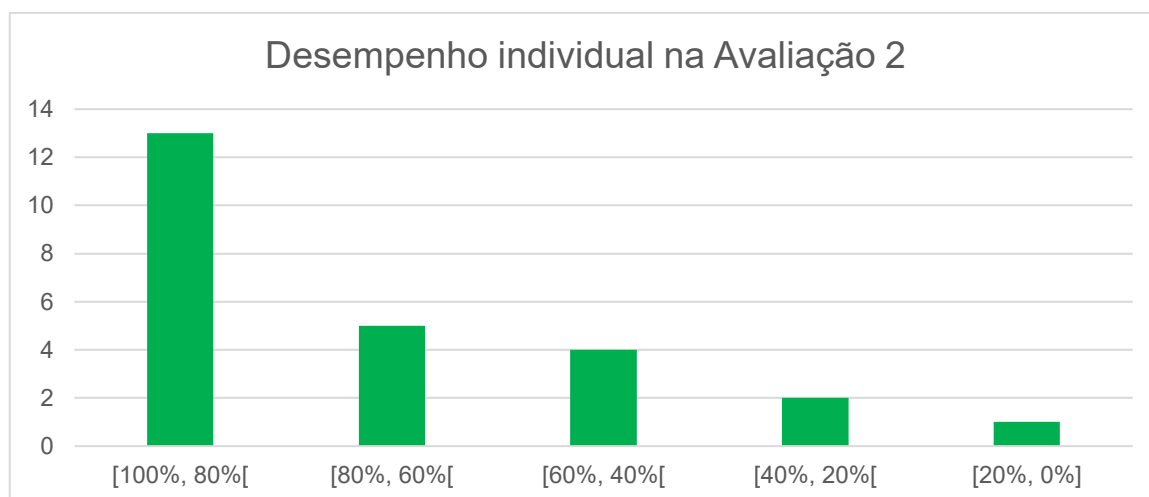
Figura 47: Avaliação 2 do Bloco 1



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f07c4d88a9179590c3>

Nesta bateria de questões, temos que 82% das respostas formam assertivas, além de poder observar que a primeira questão tivemos um rendimento menor que as outras, podendo atribuir esse erro a pouca intimidade dos alunos com a ferramenta, assim que entendem melhor como funciona, melhoram o resultado. E pelo fato de as questões serem semelhantes, consertaram seus erros no decorrer do percurso, chegando nas últimas questões a mais de 90% de êxito.

Gráfico 2: Desempenho individual na Avaliação 2

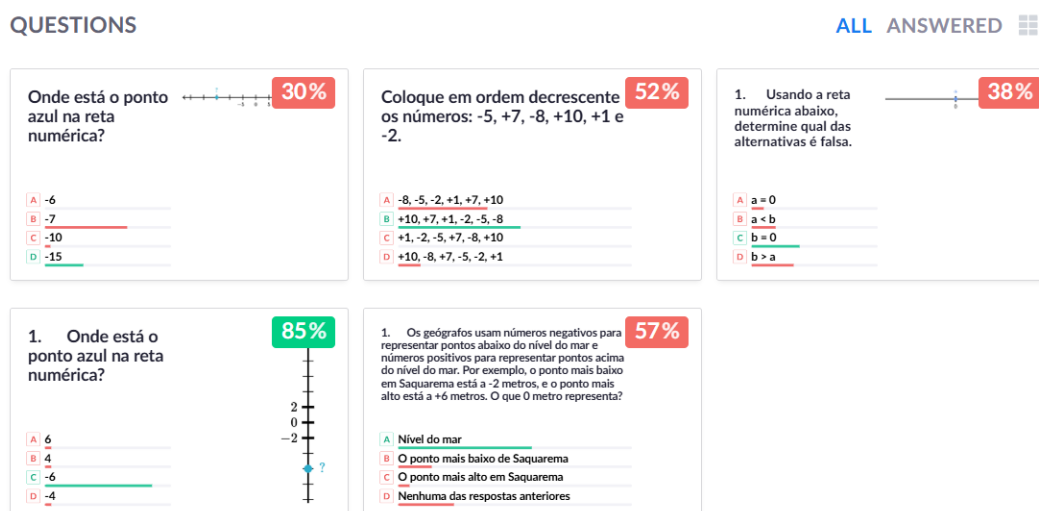


Fonte: Acervo próprio

Analisando o desempenho individual dos alunos, pode-se concluir a partir do gráfico 2, que 52% dos alunos acertaram 100% da atividade, 28% acertaram em média 70% da atividade. Assim, concluímos que 70% da sala teve um desempenho superior na avaliação, comprovando um alto índice de assimilação do assunto trabalhado na aula.

Após concluir a Avaliação 2, demos início a Avaliação 3, que era composta por cinco questões de múltipla escolha, com quatro alternativas em cada uma. Nesse bloco de questões, os exercícios focavam na representação da reta numérica, localização de pontos na reta numérica, e resolução de problemas. Na figura 48, pode-se observar os resultados das questões propostas.

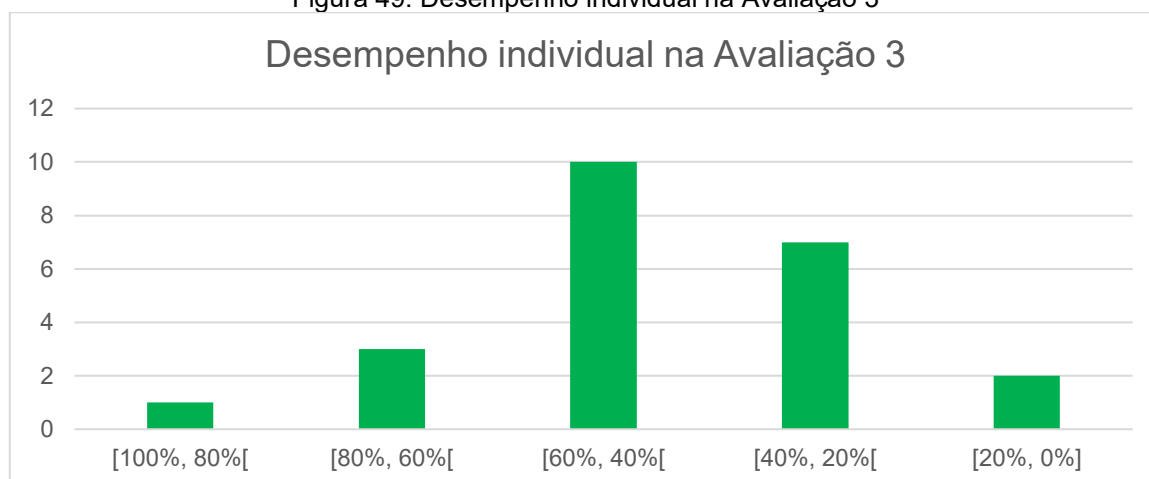
Figura 48: Avaliação 3 do Bloco 1



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f446f4bbb49c0ca197>

Já na avaliação 3, 52% das respostas foram assertivas. Sendo as questões 1 e 3 as que apresentaram desempenho abaixo de 40%. E a questão 4, foi a que teve melhor desempenho. No gráfico 3, apresentamos os dados de desempenho individual de cada aluno, observando-se que apenas 16% dos alunos acertaram acima de 60% das questões e cerca de 40% ficaram com desempenho médio. Além disso, observa-se que 36% ficaram com desempenho abaixo do esperado, de onde conclui-se que há a necessidade de complementar esse assunto, buscando novas ferramentas de aprendizagem para complementar o raciocínio já trabalhado em aula.

Figura 49: Desempenho individual na Avaliação 3



Fonte: Acervo próprio

Após a realização dessa atividade, concluiu-se a Aula 2 e foi sugerido aos estudantes que fizessem a Avaliação 4, como Atividade de Casa.

6.5.1.3 Encontro 3 - Bloco 2 (702) - Aula 1

Para dar início a esta aula usamos o simulador *Números Inteiros: Operações*, disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations. Inicialmente trabalhamos a ideia de adição de números inteiros, utilizando primeiro a aba *Fichas*. Para apresentar a ferramenta aos alunos utilizou-se a lousa digital da sala. De imediato, identificaram semelhanças com o simulador usado na aula anterior. Na imagem a seguir (figura 49), temos a ferramenta sendo exibida na lousa e a presença de um aluno manipulando a ferramenta. Foram distribuídos computadores para todos os alunos. Além disso reservado um tempo para que entrassem na ferramenta. Muitos

alunos demonstraram mais agilidade nesse processo, pois já tinham habilidade para entrar no site proposto.

Figura 50: Alunos manipulando a ferramenta *Reta Numérica: Operações*

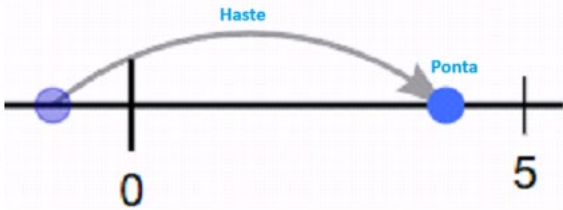


Fonte: Arquivo próprio

Após manipularem a ferramenta receberam as fichas impressas das Atividades 1 e 2 para responder. Abaixo, veja o quadro 7 com os resultados coletados dessas duas atividades, lembrando que ao executar as atividades, todos fizeram a Atividade 2 só depois de terminar a Atividade 1.

Quadro 7: Respostas das atividades 1 e 2

Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
1	Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Operações e explore a janela Fichas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a simulação?	“Que a direção da seta muda conforme o valor colocado.”, “Que quando a gente coloca os números dentro da sacola a flexa anda para a resposta” e “Que podemos fazer contas com números positivos e negativos”.

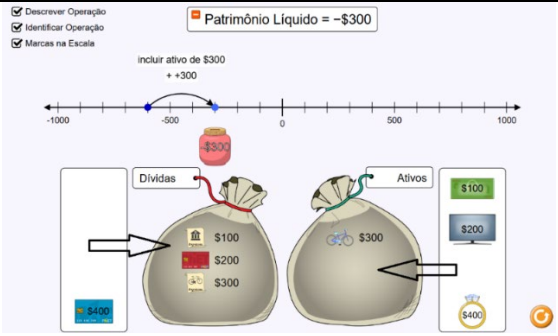
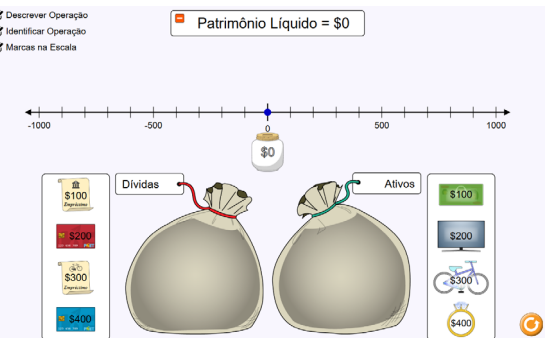
	<p>i) Na aba Fichas, observe a localização do resultado colocando -5 na bolsa esquerda e +3 na bolsa direita. <i>Qual é o resultado da operação realizada? Por quê? Verifique sua resposta na simulação</i></p>	<p>“-2. Porque quando nós pagamos 3 reais devendo 5 reais, ainda vai ficar devendo 2.”, “Porque o -5 é um número negativo e o 3 é positivo então é só somar os dois e dá esse resultado.” e “-2. Tirei essa conclusão observando a aba Fichas”.</p>
	<p>ii) Qual é o resultado da operação $-1 + 1$? Assinalar. a) 0 b) 2 c) -1 d) N.A.</p>	<p>a)</p>
	<p>iii) Ainda na aba Fichas, ao executar uma operação, uma flexa é exibida, como na imagem a seguir.</p>  <p>O que indica a haste da flexa:</p>	
	<p>a) Quanto à resposta encontrada?</p>	<p>+4</p>
	<p>b) Quanto ao movimento que executa?</p>	<p>“Movimento para a direita.”, “Movimento de aumento positivo.” e “Se retirar vai para a esquerda e se somar vai para a direita.”</p>
2	<p>i) Na aba Fichas, determine a localização do resultado em cada caso quando colocamos:</p>	
	<p>a) +5 e +3 na bolsa direita?</p>	<p>+8</p>
	<p>b) -4 e -2 na bolsa esquerda?</p>	<p>-6</p>
	<p>c) +3 na bolsa direita e -2 na bolsa esquerda?</p>	<p>+1</p>
	<p>d) +2 na bolsa direita e -5 na bolsa esquerda?</p>	<p>-3</p>
	<p>e) +3 na bolsa direita e -3 na bolsa esquerda?</p>	<p>0</p>
	<p>ii) Ao colocar as fichas +3, +4 na bolsa direita e -1, -2, e -5 na bolsa esquerda. Qual será o resultado encontrado? Justifique sua resposta.</p>	<p>“-1. Porque se você junta todos os números negativos dá -8 e se você junta todos os números positivos dá +7. E a soma $+7+(-8) = -1$.”</p>

	iii) Agora resolva as seguintes operações usando números inteiros. Depois de resolvê-los confira o resultado usando o simulador.	
	a) $(+5) + (+4)$	+9
	b) $(-2) + (-5)$	-7
	c) $(+4) + (-3)$	+1
	d) $(+1) + (-4)$	-3
	e) $(+1) + (+3)$	+4
	f) $(-3) + (-4)$	-7
	g) $(-2) + (+5)$	+3
	h) $(-5) + (+2)$	-3
	iv) Depois de conferir com o simulador, converse com seus colegas e entrem em um consenso quanto ao resultado das somas:	
	a) A adição de dois números positivos será sempre um número	“Positivo”
	b) A adição de dois números negativos será sempre um número	“Negativo”
	v) Agora, elabore uma regra para a somas de números com sinais diferentes: um positivo e outro negativo.	“Se o número positivo é maior que o negativo, o resultado é positivo. E se ao contrário o número negativo for maior que o positivo, o resultado é negativo.”

Podemos concluir a partir das respostas que os estudantes souberam usar o aplicativo para elaborar as suas respostas. Porém não conseguiram, de forma satisfatória, escrever seus raciocínios nas questões conceituais. Por isso, neste caso, temos a opinião que deve-se ofertar mais atividades neste formato de questão. Após análise da aba *Fichas*, foi explorada a aba *Patrimônio Líquido*, para em seguida realizar as atividades 3 e 4.

Quadro 8: Respostas para as perguntas das Atividades 3 e 4

Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
3	i) Juan é um estudante e gosta de jogar o famoso jogo de <i>monopólio</i> onde ele tem dívidas de \$ 100, \$ 200 e \$ 300, então ele faz como pagamento com alguns bens, como bicicleta (\$ 300), vamos ver o que aconteceu.	“Sim. Só ele pagar com a nota de \$100 e a TV de \$200, que a soma dá \$300, o que falta pra ele pagar.”, “Sim, ele vende a TV e a nota de \$100 em dinheiro.”

	 <p>Ao analisar o resultado indicado pela seta, ele percebe que ainda tem dívidas. É possível João pagar a dívida pendente? Discuta sua resposta.</p>	
	<p>ii) Maria possui um valor líquido inicial for igual a -\$ 300 e -\$ 400 for adicionado a ele, como você usaria a simulação para obter o patrimônio líquido (\$) ? Discuta sua resposta</p>	
	<p>a) <i>Desenhe abaixo como a representação do patrimônio líquido (\$) parecia na simulação</i></p>	<p>“-300+(-400) =-700”, “O patrimônio fica -700.”</p>
	<p>b) E se em vez de -\$400, mudarmos para \$400 e adicionarmos -\$100, analisamos a representação na reta numérica.</p>	<p>“+300, pois com +400, se adicionar -100, sobra +300.”</p>
	<p>iii) Preveja qual seria o patrimônio líquido de Pedro se inserirmos todos os dados no saco de dívidas e todos os dados no saco dos ativos.</p>  <p>Verifique com a simulação:</p>	
	<p>a) Quando o patrimônio líquido diminui para zero? Justifique sua resposta.</p>	<p>“Ele não terá dívidas.”, “Quando colocamos números iguais em cada lado.”</p>
	<p>b) Quando há aumento do patrimônio líquido? Justifique sua resposta.</p>	<p>“Terá um saldo positivo.”</p>
	<p>c) Quando há diminuição do patrimônio Líquido?</p>	<p>“Terá um saldo negativo.”</p>
<p>4</p>	<p>i) Expresse, utilizando a adição de números inteiros, cada situação que segue e dê o resultado.</p> <p>a) Em um jogo, Alice ganhou 12 pontos e perdeu 7.</p>	<p>+12 +(-7) = +5</p>

b) Uma comida congelada estava sendo mantida a temperatura de -20°C e sofreu uma variação de -5°C .	$-20 - (-5) = -15$															
c) Em um torneio de futebol, um time tem 14 pontos ganhos e 20 pontos perdidos.	$+14 - 20 = -6$															
d) Seu João depositou R\$239,00 em sua conta corrente, que estava com um saldo devedor de R\$540,00.	$+239 + (-540) = -301$															
ii) Num jogo de baralho, Rodrigo e Carolina obtiveram os seguintes resultados:																
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Partida</th> <th>Rodrigo</th> <th>Carolina</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1^a</td> <td>Ganhou 510</td> <td>Perdeu 80</td> </tr> <tr> <td>2^a</td> <td>Perdeu 215</td> <td>Ganhou 475</td> </tr> <tr> <td>3^a</td> <td>Perdeu 485</td> <td>Ganhou 290</td> </tr> <tr> <td>4^a</td> <td>Ganhou 625</td> <td>Perdeu 115</td> </tr> </tbody> </table>	Partida	Rodrigo	Carolina	1 ^a	Ganhou 510	Perdeu 80	2 ^a	Perdeu 215	Ganhou 475	3 ^a	Perdeu 485	Ganhou 290	4 ^a	Ganhou 625	Perdeu 115	
Partida	Rodrigo	Carolina														
1 ^a	Ganhou 510	Perdeu 80														
2 ^a	Perdeu 215	Ganhou 475														
3 ^a	Perdeu 485	Ganhou 290														
4 ^a	Ganhou 625	Perdeu 115														
a) Qual é o número total de pontos de Carolina após as quatro partidas?	570															
b) Qual é o número total de pontos de Rodrigo após as quatro partidas?	435															
c) De quem foi a vantagem final? Quantos pontos de diferença?	“A vantagem foi de Carolina, 135 pontos de diferença.”															
iii) Um termômetro está marcando -2°C em uma cidade. Se a temperatura subir 6°C , quantos graus marcará o termômetro?	“ 4°C positivo.”,															
iv) Considere os seguintes números:																
<table border="1"> <tbody> <tr> <td>103</td> <td>20</td> <td>+15</td> <td>-36</td> <td>-29</td> </tr> <tr> <td>-15</td> <td>28</td> <td>-100</td> <td>-21</td> <td>42</td> </tr> </tbody> </table>	103	20	+15	-36	-29	-15	28	-100	-21	42						
103	20	+15	-36	-29												
-15	28	-100	-21	42												
Escolha dois deles, de modo que:																
a) a soma seja zero.	$+15 + (-15)$															
b) a soma seja 3.	$103 + (-100)$															
c) a soma seja 62.	$42 + 20$															
d) a soma seja -8 .	$28 + (-36)$															
e) a soma seja -50 .	$(-24) + (-21)$															

Percebemos um ganho conceitual com a realização das atividades 3 e 4, pois as respostas apareceram com mais clareza e precisão na escrita. As intervenções que o professor fez durante a atividade fizeram os alunos tivessem mais atenção com a escrita.

6.5.1.4 Encontro 4 - Bloco 2 (702) - Aula 2

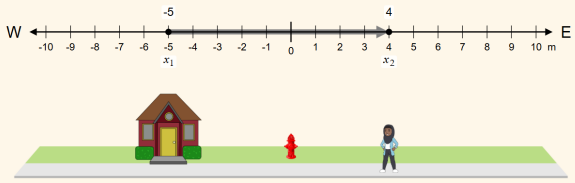
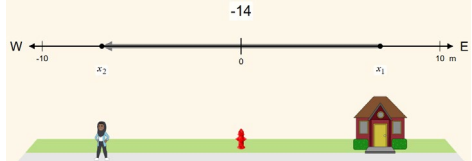
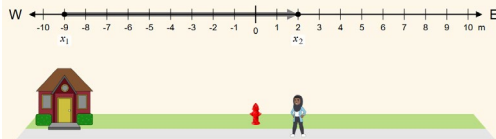
O objetivo desta aula é desenvolver a operação de subtração e para isso vamos usar o simulador *Reta Numérica: Distância*, disponível no link https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance.

Distribuímos os computadores aos alunos e fizemos com que se familiarizem com a ferramenta na aba com o símbolo da casa e assim pedimos que marquem a opção *Diferença Direta*, desativem a janela *Sentença* e desmarquem os botões *Diferença* e *Descrição*.

Após um breve tempo de interação, pedimos aos alunos que resolvessem as atividades 5 e 6. Veja no quadro abaixo a exibição desses resultados.

Quadro 9: Respostas para as perguntas das Atividades 5 e 6

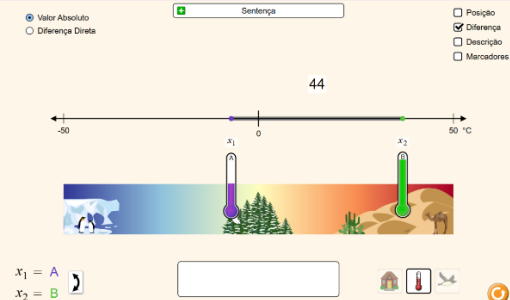
Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
5	i) Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Distância e explore as janelas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a manipulação da simulação?	“Percebemos que podemos calcular a distância entre objetos e pessoas.”
	ii) Coloque a casa na posição -6 e coloque a pessoa na posição 5. Agora responda:	
	a) Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.	-6
	b) Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.	5
	c) E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.	$5 - (-6) = 11$
	Agora coloque a casa na posição 5 e coloque a pessoa na posição -6. Agora responda?	
	a) Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.	5
	b) Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.	-6
c) E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.	$-6 - (+5) = -11$	
6	i) Considere a seguinte situação na figura a seguir. Se a menina quer chegar em casa, determine a distância da garota até a casa?	$4 - (-5) = 9$

		
	<p>ii) Agora considere que a menina saiu de casa e andou 14 metros a oeste (W). Determine uma possibilidade para a posição da casa (x_1) e da menina (x_2)?</p> 	$"x_1 = -4 \text{ e } x_2 = 10"$
	<p>iii) Agora, analise a seguinte situação na figura a seguir.</p> 	
	<p>a) Determine qual a posição da casa?</p>	<p>-9</p>
	<p>b) Determine qual a posição da garota?</p>	<p>2</p>
	<p>c) Se a garota saiu de casa e andou na direção leste (E), quanto a garota andou?</p>	<p>$-9 - (+2) = -11$</p>

Após a resolução destas atividades pedimos aos alunos que abrissem a aba termômetro e resolvessem a atividade 7.

Quadro 10: Respostas para as perguntas da Atividade 7

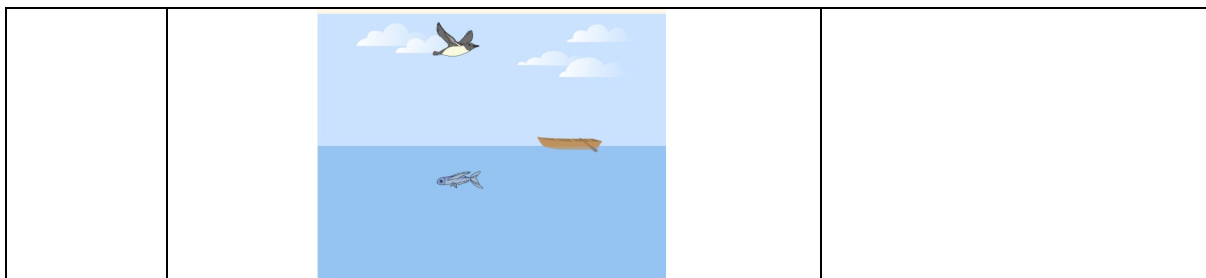
Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
7	i) Utilizando o Simulador Reta Numérica: Distância, na janela do termômetro, coloque o termômetro roxo e o termômetro verde, de modo que a diferença entre as temperaturas seja de 40°C .	
	a) Usando apenas números positivos.	<p>10°C e 50°C</p>
	b) Usando apenas números negativos.	<p>-10°C e -50°C</p>
	c) Usando um número positivo e outro negativo.	<p>-10 e +30</p>
	ii) Se a temperatura atual de determinado local é de 0°C , determine a temperatura se:	
	a) Ocorrer um aumento de 30°C ?	<p>30°C</p>
	b) Ocorrer uma queda de 25°C ?	<p>-25°C</p>
iii) Se inicialmente está com 0°C , ocorrer um aumento de 10°C e após algum tempo uma queda de 15°C , qual será a temperatura no final?	<p>-5°C</p>	

	<p>iv) Observe a diferença entre as temperaturas na imagem a seguir, onde o resultado da diferença é 44. Indique um valor possível para os termômetros A e B. Justifique sua resposta.</p> 	<p>$A = -10^{\circ}\text{C}$ e $B = +34^{\circ}\text{C}$</p>
--	--	--

Após a realização dessa atividade, pedimos que abrissem a última aba do pássaro e resolvessem a atividade 8.

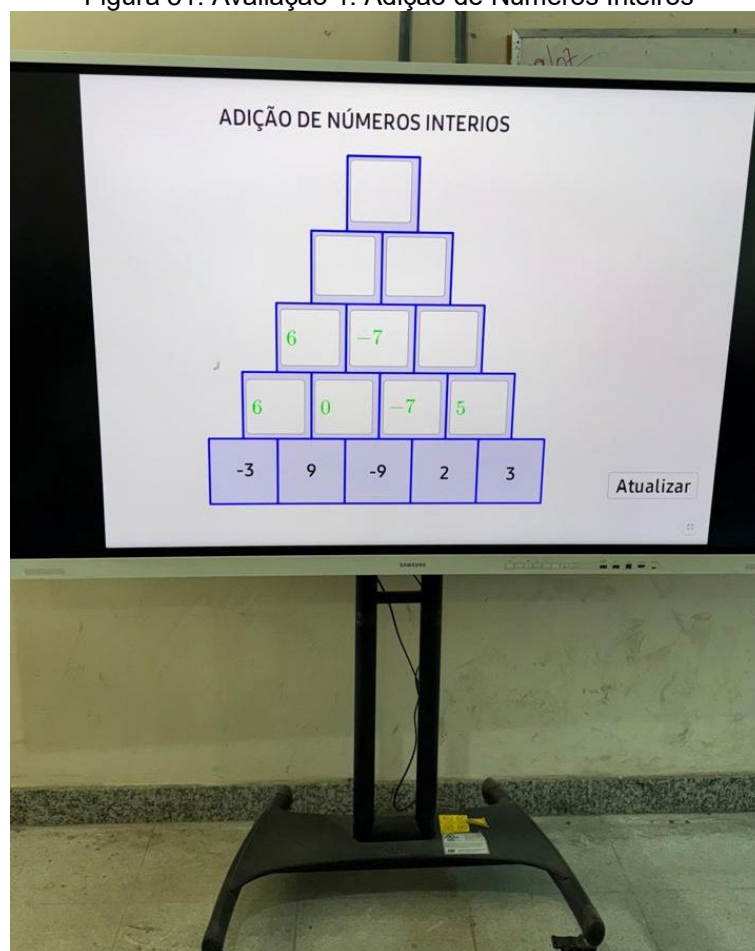
Quadro 11: Respostas para as perguntas da Atividade 8

Atividade	Questão	Respostas encontradas com mais frequência
8	i) Se um pássaro está a 15m acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros abaixo do nível do mar, qual será a distância entre o pássaro e o peixe? Monte uma operação de subtração para representar essa situação e justifique sua resposta.	<p>20 metros. $15 - (-5) = 20$</p>
	ii) Imagine que o pássaro quer pegar o peixe. Se o pássaro mergulha a uma profundidade de 5 metros abaixo do nível do mar e o peixe para fugir pula a uma altura de 5 metros acima do nível do mar. Neste momento qual a distância entre o peixe e o pássaro?	<p>10 metros</p>
	iii) Observe as operações abaixo, use o simulador usando o peixe e o pássaro para exemplificá-los e justifique sua resposta.	
	a) $(+15) - (+5)$	+20
	b) $(+7) - (-13)$	+20
	c) $(-12) - (+10)$	-22
d) $(-9) - (-10)$	+1	
iv) Um pássaro vê um peixe nadando e pretende pegá-lo. Se o pássaro está a 15 metros acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros de profundidade. Quantos metros o pássaro deve se mover para pegar o peixe? Justifique sua resposta	<p>15 - (-5) = 20 20 metros de distância.</p>	



Após realizarmos as atividades 5, 6, 7 e 8, no final da aula, fizemos a Avaliação 1, solicitando que os alunos abrissem o link: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>. Neste aplicativo, os alunos preencheram uma pirâmide numérica usando números inteiros. Explicamos o funcionamento da pirâmide. Informamos que a base da pirâmide está toda preenchida, e que devemos usar a soma de inteiros, de dois blocos consecutivos, para determinar o valor do bloco que se encontra imediatamente acima deles. A primeira pirâmide foi feita pela turma, de forma coletiva, usando a tela interativa da sala (figura 51).

Figura 51: Avaliação 1: Adição de Números Inteiros



Fonte: Acervo próprio

Entendendo a dinâmica da atividade, os alunos usaram seus notebooks para resolver a atividade da pirâmide. Percebemos que eles interagem e participam de atividades neste formato, executando a tarefa e em alguns casos até tirando dúvidas dos colegas sobre as operações executadas. Com a realização dessa tarefa, conseguimos identificar alguns alunos que ainda não conseguiam somar números inteiros de modo satisfatório e podemos dar atenção a esses casos. Foi notória a intensa participação da turma, como um todo, na realização dessas atividades.

6.5.2 - Avaliação dos alunos

A sequência de atividades foi desenvolvida para ser realizada em três etapas. Contudo, por não ter tempo hábil no cronograma, não foi possível aplicar a última. Ao final de cada uma das duas primeiras etapas, conforme já dito, foi aplicado um questionário de opinião com o objetivo dos alunos avaliarem as atividades trabalhadas. Para tornar esse processo mais dinâmico, os alunos responderam utilizando o aplicativo *Plickers*, com emojis que representavam diferentes níveis de satisfação. Geralmente, nesses questionários usamos cinco alternativas de resposta, sendo uma central neutra e outras quatro variantes, duas negativas e duas positivas, como podemos ver na imagem 52.

Figura 52: Variantes das respostas de uma pergunta usando emojis



Fonte: <https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/5724889>

Porém, o aplicativo usado para coletar as respostas oferece apenas quatro alternativas de resposta, fizemos uma adaptação para usar o aplicativo. Os pontos da escala são indicados na figura 53, onde A é a opção mais positiva (com peso 4) e D é a opção mais negativa (com peso 1).

Figura 53: Escala de classificação com quatro opções de escolha



Fonte: <https://www.istockphoto.com/br/vetor/feedback-de-quatro-escalas-emojis-de-rosto-ou-escala-de-classifica>

A fim de facilitar a leitura deste trabalho, reproduzimos aqui as cinco questões do formulário:

1. As atividades despertaram interesse sobre o tema apresentado?
2. As atividades auxiliaram na compreensão do conteúdo apresentado?
3. As atividades foram agradáveis de realizar?
4. Você gostou de participar desta aula?
5. Você gostaria que o seu professor utilizasse mais atividades usando materiais manipuláveis?

Para as aulas 1 e 2, recolhemos as seguintes informações coletadas da turma 701. Veja figura 54.

A seguir apresentamos o questionário na tela do aplicativo utilizado para fazer a enquete de opinião sobre as aulas realizadas.

Figura 54: Avaliação das Aulas 1 e 2

QUESTIONS ALL ANSWERED

As atividades despertaram interesse sobre o tema apresentado? Survey

As atividades auxiliaram na compreensão do conteúdo apresentado? Survey

As atividades foram agradáveis de realizar? Survey

Você gostou de participar desta aula? Survey

Você gostaria que o seu professor utilizasse mais atividades usando recursos digitais? Survey

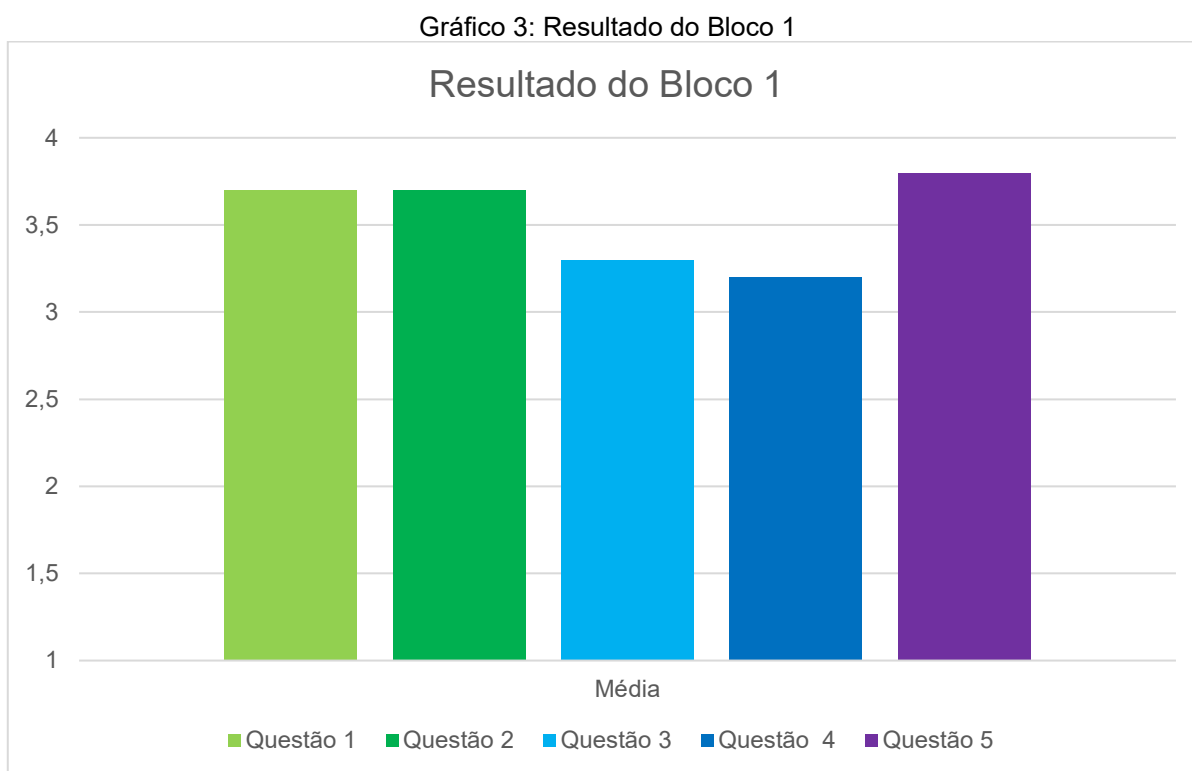
Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851b93346f4bbb49c366919>

A partir das respostas obtidas, foram elaborados gráficos ilustrativos que demonstram o grau de aceitação e interesse dos estudantes em cada uma das etapas.

Vamos a análise dos gráficos. O primeiro gráfico será das análises das aulas 1 e 2 (Bloco 1) e o segundo gráfico será das análises da aula 3 e 4 (Bloco 2).

Os resultados do Bloco 1, que foram avaliados pelos alunos da turma 701, estão no gráfico 3 e os resultados do Bloco 2, que foram avaliados pelos alunos da turma 702, estão no gráfico 4.

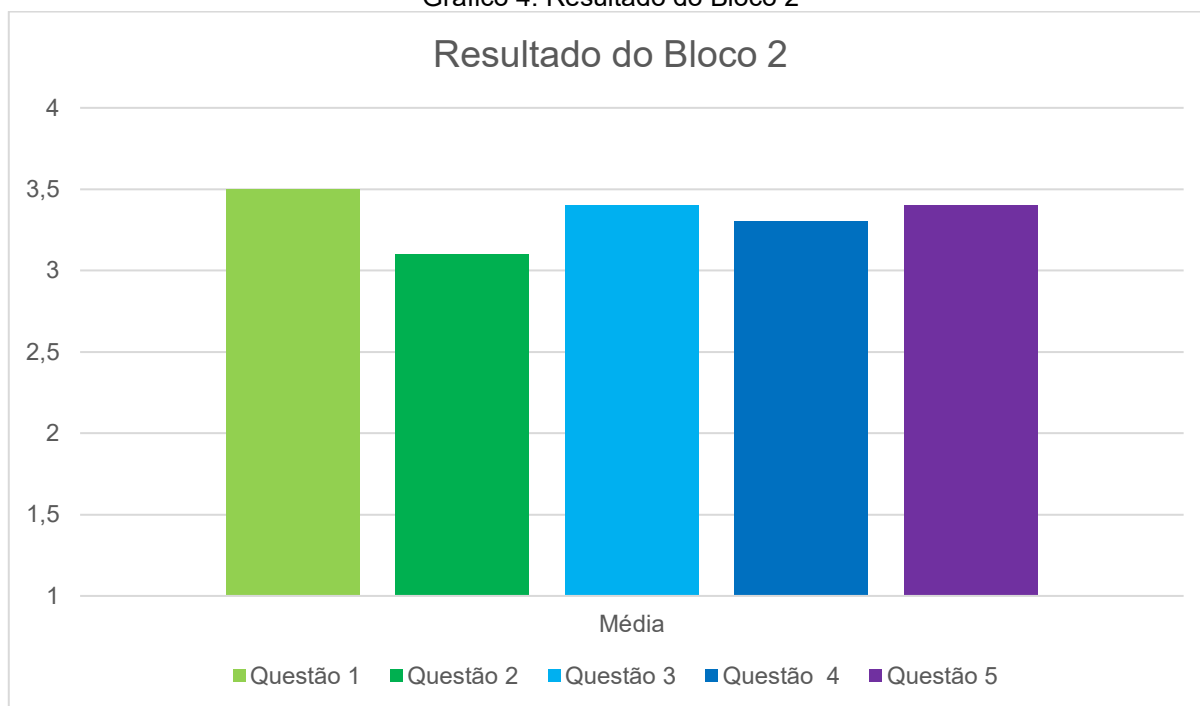
Para o gráfico 3 e 4, temos as perguntas de 1 a 5 no eixo horizontal e a média das respostas variando de 1 a 4 no eixo vertical.



Fonte: Arquivo próprio

Para todas as questões os alunos da turma 701 avaliaram as atividades do Bloco 1 de forma muito positiva. Todas as questões receberam médias acima de 2.5 (que é o valor médio). Em verdade as médias das questões encontram-se no intervalo [3.2, 3.8].

Gráfico 4: Resultado do Bloco 2



Fonte: Arquivo próprio

Para todas as questões os alunos da turma 702 avaliaram as atividades do Bloco 2 de forma muito positiva. Todas as questões receberam médias acima de 2,5 (que é o valor médio). Em verdade as médias das questões encontram-se no intervalo [3.1, 3.5].

Assim, em ambos os gráficos as notas mantiveram acima de 2.5 para todas as questões, e isso reflete favoravelmente para a aula proposta. Os resultados demonstram o interesse dos alunos pelas atividades realizadas, indicando que eles entenderam a proposta e se sentiram motivados com ela.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de números inteiros relativos na Educação Básica revela-se um campo permeado por desafios históricos, epistemológicos e pedagógicos. A análise realizada nesta dissertação evidenciou que os obstáculos destacados por Glaeser (2010) permanecem presentes nas salas de aula, manifestando-se tanto nas concepções equivocadas dos estudantes quanto nas práticas tradicionais de ensino. Ao longo da pesquisa, ficou claro que a superação dessas dificuldades exige não apenas a compreensão de sua trajetória histórica, mas também a busca por metodologias inovadoras que promovam aprendizagens mais significativas.

Partindo da dificuldade de encontrar ferramentas digitais para serem aplicadas ao ensino de números inteiros relativos, além da dificuldade constante dos alunos para aprender esse conceito. O trabalho teve como objetivo investigar e compreender as principais dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem dos números inteiros relativos, com especial atenção para as regras dos sinais para os números inteiros.

A análise de livros didáticos e de recursos digitais, bem como a aplicação da sequência didática desenvolvida em uma escola municipal de Saquarema, demonstraram que o uso planejado de tecnologias digitais pode potencializar o ensino de operações com inteiros. Ferramentas como simuladores, softwares interativos e aplicativos de avaliação em tempo real contribuíram para o engajamento dos estudantes e favoreceram a construção de significados, em consonância com as diretrizes da BNCC (2018).

Constatou-se que a integração entre teoria e prática, aliada a metodologias ativas, possibilitou avanços expressivos na compreensão de conceitos como reta numérica, adição, subtração e multiplicação de inteiros. Além disso, a experiência evidenciou a relevância de um ensino de matemática que vá além da mera aplicação de regras, permitindo que os estudantes construam relações entre o conhecimento formal e situações reais.

Em síntese, o trabalho reafirma que a utilização de conteúdos digitais no ensino de números inteiros constitui uma alternativa eficaz para enfrentar obstáculos

epistemológicos e pedagógicos persistentes. Ao propor um produto educacional fundamentado em práticas inovadoras, esta dissertação oferece subsídios para que docentes possam enriquecer suas práticas pedagógicas e contribuir para uma matemática mais acessível, significativa e alinhada às demandas contemporâneas da educação.

REFERÊNCIAS

ALEMBERT, J. (d'). Artigos **Négatif et Quantité** na **Enciclopédia**.

BACHELARD, G. **La Formation de L'Esprit Scientifique**. Paris: J. Virin, 1970.

BARBOSA, S. L. P.; CARVALHO, T. O. d. **Jogos matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das operações com números inteiros**. Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Universidade Estadual de Londrina (UEL), p. 1948–8, 2008.

BATALHA, T. V. (2020, 17 de agosto). **Robô Linear (OBI)**. Geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/material/show/id/puww96re>

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini: 7º Ano Material do Professor**. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BIGODE, A. J. L. **Coleção Matemática Hoje é feita assim**. 6ª série, ensino fundamental. [s.l]: FTD, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1998.

CARNOT, Lazare (1803). **Géométrie de Position**. Paris: Duprat.

CAUCHY, Augustin (1821). **Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique**. Paris: De Bure.

CORREIA, Lyvia Poggian. **Uma Intervenção no Ensino de Operações com Números Inteiros**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Campos dos Goytacazes/RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2017.

COSTA, João Francisco Staffa da. **Aprendendo números inteiros: uma experiência baseada na Teoria dos Campos Conceituais**. Revista de Educação Matemática (REMat), São Paulo, v. 20, n. 01, p. 01-14, e023104, 2023.

DANCZUK, Fabulo Eugenio. **Diversificação de Tarefas como Proposta Metodológica no Ensino dos Números Inteiros**. 194 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2024.

FERREIRA, Francelise Ide Alves. **Uma trajetória de Ensino e Aprendizagem para o Estudo de Números Inteiros**. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

- FIorentini, D.; Miorim, M, A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.
- GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática: 7º ano: ensino fundamental: anos finais /**. 4ª ed. São Paulo: FTD, 2022.
- GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. **Boletim do GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 57, jul/dez. p. 65-102, 2010.
- GONÇALVES, Renata Siano. **Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2007.
- HANKEL, Hermann (1867). **Theorie des Complexen Zahlssysteme**. Leipzig: Leopold Voss.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade: 7º ano. 10ª ed.** São Paulo: Saraiva, 2022.
- LARA, CIBELE PASSOS BEZERRA. **Uma proposta de ensino dos números inteiros baseada na resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Vitória/ES, Universidade Federal do Espírito Santo, 2021.
- MACHADO, Maurício S. **Estratégias pedagógicas com uso de Tecnologia de Informação e Comunicação: uma abordagem para a construção de conhecimento em operações aritméticas básicas e nas chamadas “regras de sinais”**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP. Mestrado em Educação Matemática. 2010
- MACLAURIN, Celin (1748). **Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris: C.A. Jombert, 1753.
- MEISTER, Julio César. **Estudando dificuldades na compreensão de números inteiros**. Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.
- OLIVEIRA, Andressa A. G. de. **Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros por Meio de Materiais Manipuláveis: uma Experiência no Sétimo ano do Ensino Fundamental**. 2020. Dissertação (Instituto de Ciências Exatas - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2020. Orientadora: Prof.º Dd.º Eulina Coutinho Silva do Nascimento.
- OLIVEIRA, Carlos N. C. de (coord.). **Geração Alpha Matemática: 7º Ano: Ensino Fundamental: anos finais**. 4ª ed. São Pauo: Edições SM, 2022.
- PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001 (Tendências em Educação Matemática, 3).
- PONTE, João Pedro da. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. Lisboa: IIE e SPCE, 1992

REZENDE, W.M.; DASSIE, B.A. Epistemologia dos Números Relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 57, 2010. DOI: 10.69906/GEPEM.2176-2988.2010.301. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/301>. Acesso em: 12 out. 2024.

REZENDE, W.M.; DASSIE, B.A. Números Negativos e Imprensa no Brasil: as discussões no Periódico União Acadêmica. **Educação Matemática e suas Tecnologias** 4, 259-268, 2019.

SCHUBRING, G. Rupturas no estudo matemático dos números negativos. **Boletim GEPEM**, n. 37, p. 51-65, 2000.

SCHUBRING, G. Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, p. 1-20, 2007.

SCHUBRING, G. **Os números negativos**: exemplos de obstáculos epistemológicos. Rio de Janeiro: E-LIMC, 2012.

SILVA, Luiz Gustavo Alves. **Jogos de tabuleiro no ensino de número inteiros: Uma proposta de sequência didática**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Alfenas, Minas Gerais, 2023. Orientadora: Prof.º Dd.º Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz.

SOARES, P. J. *O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

STEVIN, Simon (1634). **Les Oeuvres Mathématiques, augmentoz par Albert Girard**. Leyde. Elsevier.

TEIXEIRA, L. A (ed.). **SuperAÇÃO! Matemática: 7º Ano**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2022.

APÉNDICE: RECURSO EDUCACIONAL

Sequência didática para aprendizagem de números inteiros usando recursos tecnológicos

Emildo Mothé Ribeiro Filho



**Recurso Educacional:
Sequência Didática de Conteúdos Digitais para o
Ensino de Números Inteiros Relativos**

EMILDO MOTHÉ RIBEIRO FILHO
WANDERLEY MOURA REZENDE



Niterói - 2025

Sumário

1. Introdução	5
2. Sequência Didática.....	7
2.1. Bloco 1: Reconhecimento dos inteiros	8
Atividade 1	10
Atividade 2	11
Atividade 3	14
Atividade 4	14
Atividade 5	17
Atividade 6	18
Avaliação 1	19
Avaliação 2	20
Avaliação 3	21
Avaliação 4	23
2.2. Bloco 2: Adição e subtração de inteiros	27
Atividade 1	28
Atividade 2	29
Atividade 3	31
Atividade 4	33
Atividade 5	35
Atividade 6	36
Atividade 7	38
Atividade 8	40
Avaliação 1	42
Avaliação 2	43
2.3. Parte 3: Multiplicação de inteiros	44
Atividade 1	45
Atividade 2	46
Atividade 3	46
Atividade 4	47
Atividade 5	48
Avaliação 2	51
3. Considerações Finais	53
4. Referências.....	54

APENDICE A. Sinopse das ferramentas digitais utilizadas.....	55
Phet Colorado.....	55
1. Simulador Reta Numérica: Distância.....	56
2. Simulador Reta Numérica: Inteiros.....	60
3. Simulador Reta Numérica: Operações.....	65
Plickers.....	72
Geogebra.....	76
1. Adição e subtração entre números inteiros.....	76
2. Adição de números inteiros.....	77
3. Números Inteiros.....	78
4. Adição de Número Inteiro.....	78
5. Adição e Subtração de Números Inteiros.....	79
6. Multiplicação de Inteiros.....	80
7. Robô Linear (OBI).....	81
Coquinhos.....	82
1. Integer Warp: Multiplicação de Números Inteiros.....	82
APÊNDICE B. Atividades para impressão.....	86
Bloco 1: Atividade 1.....	87
Bloco 1: Atividade 2.....	88
Bloco 1: Atividade 3.....	89
Bloco 1: Atividade 4.....	90
Bloco 1: Atividade 5.....	91
Bloco 1: Atividade 6.....	92
Bloco 1: Avaliação 1.....	94
Bloco 1: Avaliação 2.....	95
Bloco 1: Avaliação 3.....	96
Bloco 1: Avaliação 4.....	98
Bloco 2: Atividade 1.....	103
Bloco 2: Atividade 2.....	104
Bloco 2: Atividade 3.....	106
Bloco 2: Atividade 4.....	108
Bloco 2: Atividade 5.....	110
Bloco 2: Atividade 6.....	112
Bloco 2: Atividade 7.....	114
Bloco 2: Atividade 8.....	116

Bloco 2: Avaliação 1	118
Bloco 2: Avaliação 2	119
Bloco 3: Atividade 1	121
Bloco 3: Atividade 2	122
Bloco 3: Atividade 3	123
Bloco 3: Atividade 4	124
Bloco 3: Atividade 5	125

1. Introdução

O ensino de números inteiros é por muitos motivos negligenciado pelos professores, seja por falta de conhecimento de recursos didáticos para o ensino deste conteúdo, ou mesmo pelo não entendimento dos obstáculos epistemológicos para a aprendizagem de números inteiros. Em artigo, Glaeser (2010) afirma que o conceito de número relativo vem ressignificar o conceito de número. Número deixa de representar um estado, o resultado de um processo de contagem ou de medida de uma grandeza para ser uma *ação*. Diante disso, vislumbramos o uso de objetos digitais, interativos, como por exemplo os softwares de matemática dinâmica, como recursos potenciais para o ensino e aprendizagem desses conceitos. Tendo isso em mente, foi elaborada a dissertação de mestrado “CONTEÚDOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA”, deste mesmo autor, cujo objetivo principal foi realizar um mapeamento de conteúdos digitais para o ensino dos números inteiros relativos na educação básica, tendo como referência os livros didáticos nacionais aprovados no PNLD - (2022).

O recurso educacional aqui proposto é, com efeito, consequência da sequência didática elaborada na dissertação supracitada. Para seu desenvolvimento tivemos como base a BNCC, que para o 7º ano do Ensino Fundamental temos o Objeto do conhecimento Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações. Seguido das seguintes habilidades:

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

A partir destas habilidades, mapeamos as ferramentas digitais disponível para trabalhar com números inteiros em livros didáticos e em repositórios, com o objetivo de determinar os que mais se enquadram para o ensino de números inteiros e que

estejam alinhados para haja a possibilidade de superar os obstáculos epistemológicos sugeridos por Gleaser (2010):

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
4. A ambiguidade dos dois zeros (v. fls. 36).
5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
6. Desejo de um modelo unificador.

Assim, com esse objetivo, estruturamos esse produto educacional em três blocos principais:

1. **Reconhecimento dos inteiros:** Identificar a existência de números inteiros, noção do zero como origem da reta numérica e identificação e construção de reta numérica dos inteiros.
2. **Adição e subtração de inteiros:** Reconhecer, operar e associar a problemas as operações de adição e subtração de inteiros. Associar o conhecimento em situações práticas que envolvam números inteiros. Resolver claramente as regras de sinais para adição algébrica de inteiros
3. **Multiplicação de inteiros:** Reconhecer, operar e associar a problemas a operação de multiplicação de inteiros. Resolver claramente as regras de sinais da multiplicação de inteiros.

Portanto, nosso objetivo aqui é mostrar atividades, usando recursos tecnológicos que sejam capazes de superar os obstáculos epistemológicos para aprender números inteiros e assim, desenvolver as habilidades (EF07MA03) e (EF07MA04) para alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental.

2. Sequência Didática

A sequência didática de conteúdos digitais está dividida em três blocos: **(1) Reconhecimento dos inteiros; (2) Adição e subtração de inteiros; (3) Multiplicação de inteiros.** Cada um desses blocos está organizado em atividades com explicações e orientações pedagógicas de como executá-las. As atividades foram pensadas para serem executadas a partir da numeração explicitada. Contudo, o professor poderá pular algumas delas, conforme sua própria avaliação.

Em cada bloco temos algumas informações gerais tais como: o tempo de duração, as habilidades da BNCC a serem desenvolvidas, os objetivos específicos, os obstáculos epistemológicos contemplados e os materiais necessários para a execução do bloco. Quanto ao uso dos recursos, cabe destacar que, em muitos dos casos, estes podem ser adaptados ou substituídos de acordo com a estrutura da escola e a habilidade dos alunos com as ferramentas. Além disso, ao final de cada bloco, são apresentados exercícios de autoavaliação para os estudantes, mas que podem ser incorporados, conforme julgamento do professor, à própria sequência didática.

No Apêndice B deste produto encontram-se separadas as fichas de atividades para impressão de cada um dos blocos.

Esta sequência é baseada na metodologia de ensino e investigação matemática, focando no uso de recursos digitais para facilitar a visualização das propriedades dos números inteiros associado a reta numérica. Buscamos com essa sequência de atividades apresentar os números inteiros usando ferramentas digitais, contribuindo para superar os obstáculos epistemológicos apontados por Glaeser em seu artigo.

2.1. Bloco 1: Reconhecimento dos inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03)

Objetivo específico: Identificar a existência de números inteiros, noção do zero como origem da reta numérica e identificação e construção de reta numérica dos inteiros.

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3 e 4

Material necessário: Lousa digital¹, celular com câmera, computador² para os alunos, caderno, lápis e borracha.

Duração: 200 minutos

Para iniciar este bloco, vamos usar uma atividade do site *Phet Interactive Simulation*, creditado a University of Colorado Bolder. Nesta primeira aula vamos usar a atividade *Reta Numérica: Inteiros*. Essa atividade é encontrada no link: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.



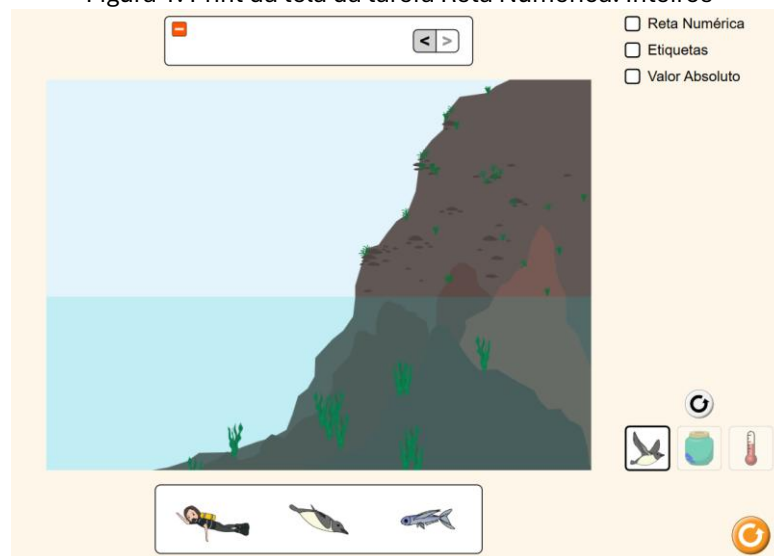
Para aplicar essa ferramenta, o professor deve verificar qual será a ferramenta tecnológica que será disponibilizada ao aluno, podendo ser uma lousa digital, caso não haja ferramentas individuais para os alunos. Para o caso da disponibilidade de ferramentas individuais para os alunos, o que torna a atividade mais dinâmica, pode-se usar um laboratório de informática, tablets ou notebooks, cabendo ao professor usar a opção adequada à sua realidade escolar.

Como ponto de partida o professor vai expor a tela inicial da ferramenta, como pode ser vista na figura 1, para que os alunos a observem. Muito importante os itens *Reta Numérica*, *Etiquetas* e *Valor Absoluto* estejam desmarcados além da aba *Comparação* fique desativada.

¹ Toda vez que recomendamos a lousa digital, podemos substituir por um datashow com notebook.

² Pode ser substituído por tablet.

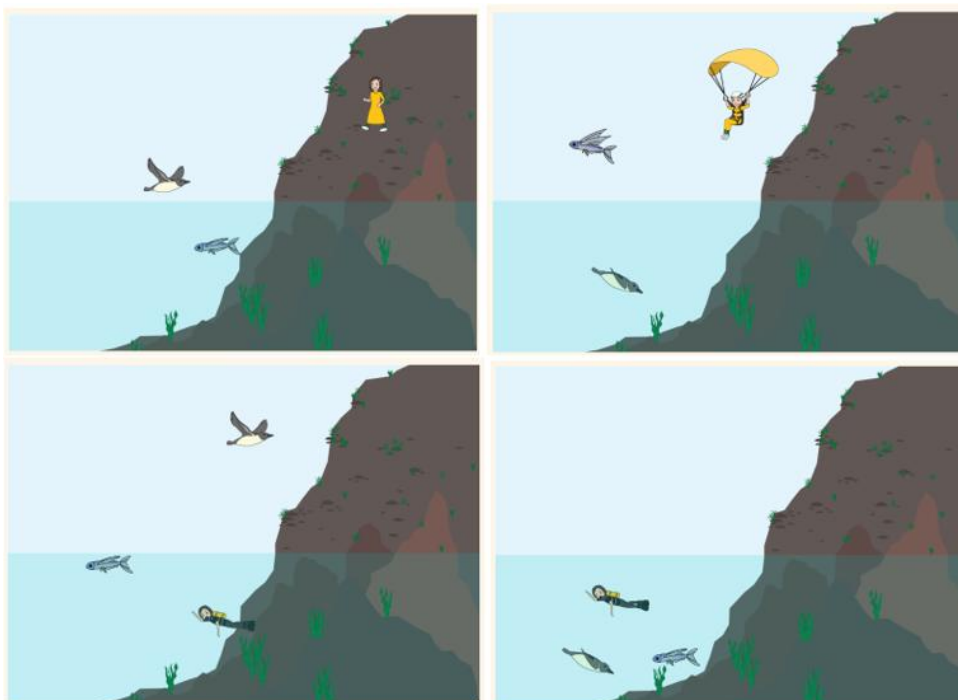
Figura 1: Print da tela da tarefa Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

A **Atividade 1**, discutimos com toda a turma, o cenário apresentado e os personagens envolvidos. Então, solicitaremos aos alunos que movimentem os personagens, escolhendo entre a pessoa, o peixe e o pássaro. Há várias possibilidades de construção. Podemos ver na imagem a seguir (figura 2), algumas opções de como pode ficar a imagem com a manipulação durante a atividade.

Figura 2: Recorte de quatro telas com exemplos de posições relativas dos personagens para a tarefa Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Depois de manipular os personagens, a fim de verificar as mudanças que eles podem assumir ao trocar de ambiente. Assim que os alunos perceberem a mudança que ocorre com os personagens e identificarem as mudanças que podem ocorrer, o professor deve indagar os alunos com os seguintes questionamentos, que compõem a **Atividade 1**.

Importante ressaltar que essas questões podem ser feitas oralmente, colocadas no quadro ou impressas. Caso não sejam suficientes, cabe ao professor adaptá-las para que a turma alcance os objetivos de reconhecimento necessários para a aula. Que nesta situação consiste no aluno identificar que a mudança de ambiente causa a mudança dos personagens e que a mudança do ar para a água é o local onde isso acontece.

Atividade 1

- i) De acordo com a simulação, determine um possível valor para a altura da montanha?**
- ii) De acordo com sua resposta do item i), determine uma estimativa para “profundidade” da praia?**
- iii) Você consegue encontrar a mudança de um ambiente para o outro? O que te leva a acreditar que esse local é a mudança de ambiente?**

Neste momento, as três perguntas devem fazer sentido para os alunos. E devemos conduzir a associação da problemática da mudança de meio para a reta numérica. A associação do problema com a reta numérica e a identificação que a mudança de meio e o zero na reta são equivalentes deve ser prioridade. Porém essa apropriação será feita por partes.

Primeiro, vamos pedir aos alunos que habilitem os itens *Reta Numérica* e *Valor Absoluto*, e ao observar as mudanças na imagem, vamos resolver a **Atividade2**. Na figura 3, temos um exemplo de como deve ficar a tela do jogo.

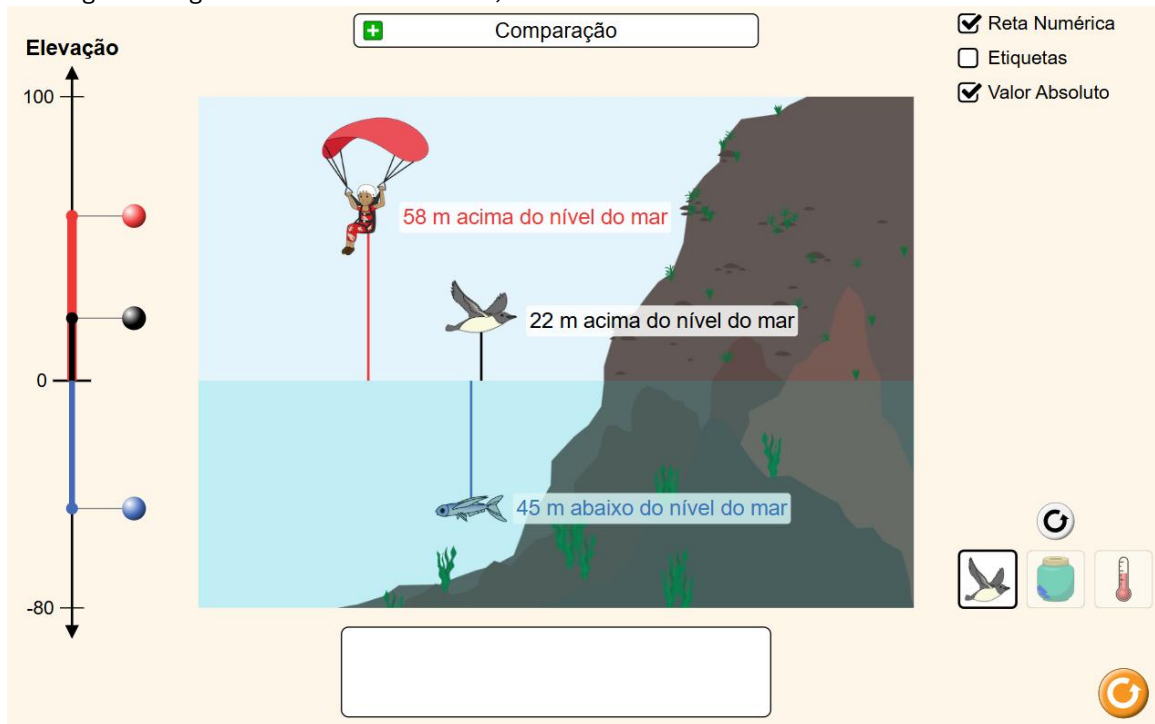
Atividade 2

Utilizando as referências estabelecidas pelo professor, responda as questões:

- i) A imagem exhibe uma mesma frase para a garota de paraquedas e para o pássaro. Já o peixe, tem uma frase diferente. Explique, com suas palavras a mudança na composição das frases?
- ii) Na parte esquerda da imagem, identificamos uma reta de elevação, podemos associar a cada personagem um valor na reta. Complete abaixo a posição de cada personagem na reta numérica:
 - a) 58m acima do nível do mar = _____
 - b) 22m acima do nível do mar = _____
 - c) 45m abaixo do nível do mar = _____
- iii) Podemos concluir que:
 - a) Ao colocar um personagem acima do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.
Ao colocar um personagem abaixo do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

A apropriação do vocabulário de “acima do nível do mar”, com números positivos e “abaixo do nível do mar”, com números negativos deve ser integrada a ideia. Após responder essas três perguntas, com o intuito de associar a questão a noção de reta numérica, podemos habilitar o botão de *Reta Numérica* e perceber a interação dos alunos com essa nova informação. Na figura 3, temos um exemplo de como seria a visualização do aluno com a *Reta Numérica* e *Valor Absoluto* marcados.

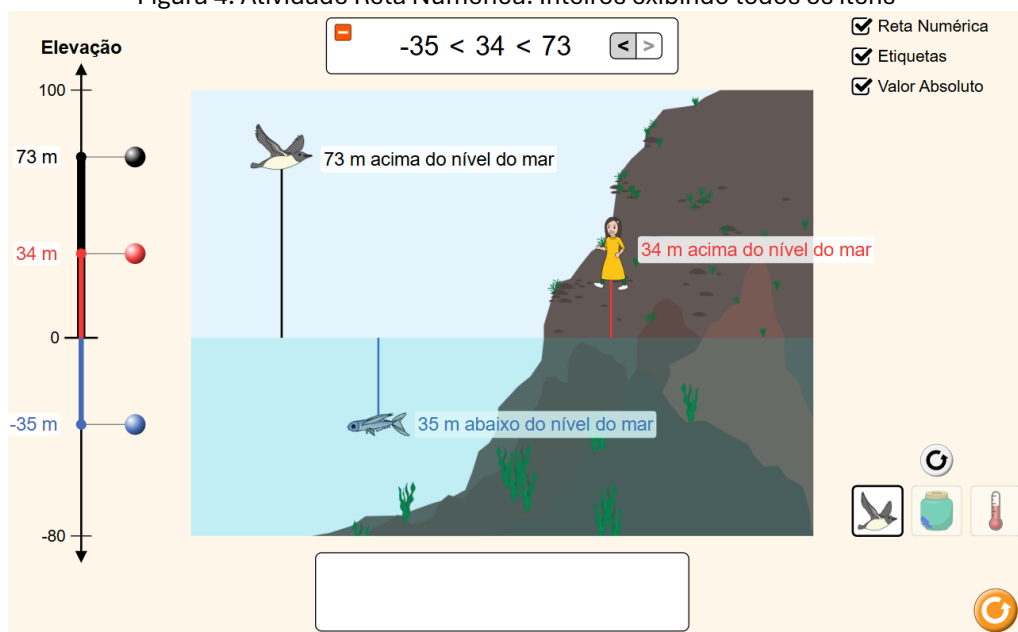
Figura 3: Jogo Reta Numérica: Inteiros, habilitando os itens Reta Numérica e Valor Absoluto



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

A seguir (figura 4), temos a visualização do aluno ao utilizar o botão *Etiquetas*, ao usá-lo, o aluno vê a correspondência dos valores da reta com as expressões “acima do nível do mar” para valores positivos e “abaixo do nível do mar” para valores negativos.

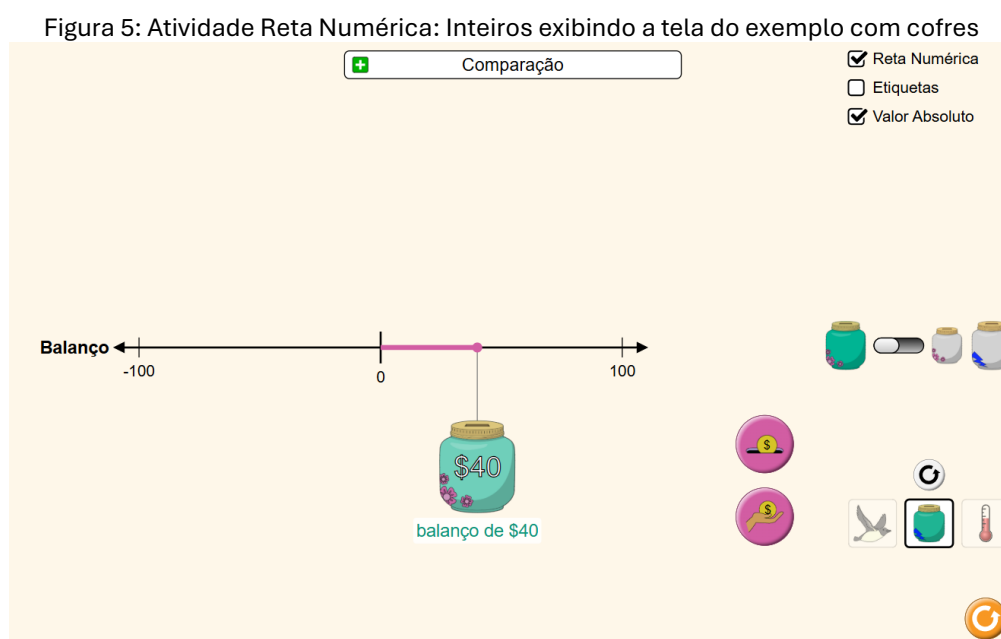
Figura 4: Atividade Reta Numérica: Inteiros exibindo todos os itens



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Assim que os alunos se apropriarem destes vocabulários, cabe ao professor liberar as outras telas que são apresentadas na ferramenta. O exemplo usando cofre e o exemplo usando termômetro. A variação para esses exemplos é importante para um melhor entendimento do aluno, e a associação destes com a reta, seja na vertical ou horizontal, é essencial para uma plena superação dos obstáculos que devem ser superados nesta aula. No mesmo simulador tem outra atividade relacionada a “balanço³” e “débito”, que trabalha com a representação de números inteiros em um eixo horizontal.

Na imagem a seguir (figura 5) temos um exemplo da visualização desta ferramenta. Para acessá-la, devemos clicar no ícone do “cofre”, que pode ser observado no canto inferior direito da figura 4.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Para dar início a **Atividade 3**, faça com que os itens *Reta Numérica* e *Valor Absoluto* estejam marcados e o item *Etiqueta* esteja desmarcado. A janela comparação também deve estar desmarcada. Faça com que os alunos também entendam que neste exemplo a palavra balanço é equivalente a palavra crédito. Isso vai facilitar o entendimento dos alunos, pois crédito é mais usual.

³ Balanço = crédito.

Apresente a tela aos alunos e façam com que respondam a **Atividade 3** disposta logo a seguir.

Atividade 3

- i) Ao ter um balanço de \$40, qual será o valor correspondente na reta numérica correspondente?
- ii) Ao ter um débito de \$20, qual será o valor correspondente na reta numérica?
- iii) O que representa o zero na reta numérica comparado a quantidade que temos no cofre?
- iv) Qual é a maior e a menor quantidade que podemos ter no cofre no exemplo?

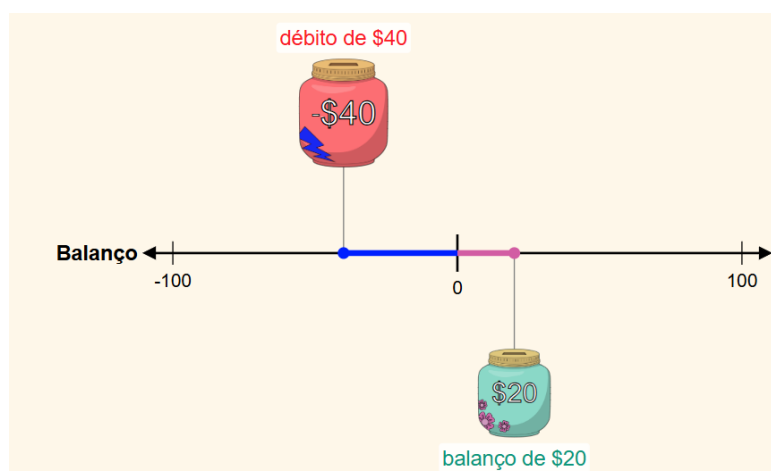
Após responder a **Atividade 3**, peça aos alunos que marquem o item *Etiqueta* e que liberem a janela *Comparação*. Agora, devemos ter noção se os alunos estão associando a quantidade do cofre a valores positivos para balanço e valores negativos para débito. Caso os alunos não alcancem esse objetivo, cabe ao professor fazer outros exemplos usando o simulador. Importante fazer quantos exemplos forem necessários para que o aluno atinja o objetivo.

Assim que esgotarmos essa etapa, apresentamos aos alunos a **Atividade 4**, que consiste no aprofundamento dos conceitos estabelecidos na **Atividade3**.

Atividade 4

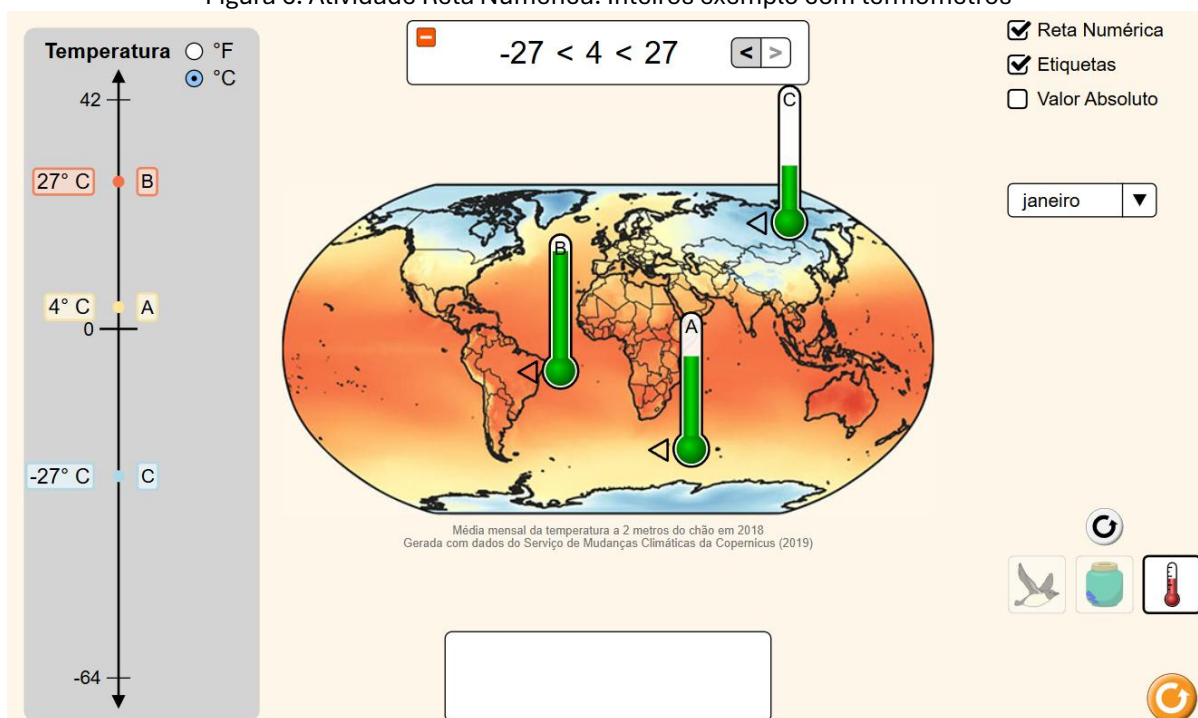
- i) O valor -30 na reta numérica representa qual valor no cofre? Justifique sua resposta.
- ii) Um balanço de \$80, representa qual valor na reta numérica? Justifique sua resposta.

- iii) Observe a imagem abaixo e identifique a quantidade que devemos acrescentar ao cofre que tem débito de \$40 para que fique com valor igual ao cofre que possui balanço de \$20?



Para dar continuidade, após os alunos resolverem a **Atividade 4**, eles devem já ter pertencimento da relação que a reta numérica tem com os exemplos apresentados e cabe aos professores continuarem apresentando exemplos onde essa relação com a reta numérica aconteça. Para dar sequência, vamos apresentar o último exemplo do simulador *Reta Numérica: Inteiros*. Podemos acessar esse exemplo clicando no ícone do termômetro na parte inferior direita, podendo ser visto na figura 5. A seguir, apresentamos a tela inicial do exemplo, observe a figura 6. Nela, temos a ferramenta, selecionado a temperatura em graus Celsius, que pode ser alternado entre graus Celsius e Fahrenheit, na parte superior esquerda na área Temperatura. Os ícones *Reta Numérica* e *Etiquetas* devem estar marcados e o ícone *Valor Absoluto* deve ficar desmarcado. Observe a figura 6, nela todas essas características foram respeitadas.

Figura 6: Atividade Reta Numérica: Inteiros exemplo com termômetros



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

No retângulo na parte inferior da figura 6, podemos selecionar um dos termômetros e colocá-lo em qualquer parte do mapa do globo terrestre, a fim de exibir a temperatura daquela região em determinado mês do ano. No exemplo estamos analisando o mês de *janeiro*. Há também a possibilidade de trocar os meses, selecionado o mês mais adequado para ser trabalhado.

Mais uma vez é importante permitir que os alunos manipulem a ferramenta e se adaptem a utilizá-la. Esse tempo muito importante para o aluno, não deixe de se programar e disponibilizá-lo.

Após os alunos terem contato com a ferramenta e a manipularem, é hora de apresentarmos **Atividade 5**. Nela o aluno deverá responder as questões manipulando a ferramenta e com seus colegas tirar conclusões quanto a situação ofertada. Para esta atividade é importante o aluno saber manipular os meses dentro do simulador, sendo o professor uma ferramenta importante nesse processo, estando sempre disponível para sanar qualquer dúvida que fique pendente.

Atividade 5

- i) **Na atividade selecione o mês de março e responda:**
 - a) **Qual a menor temperatura que você encontrou no globo terrestres neste mês?**
 - b) **Qual a maior temperatura que você encontrou no globo terrestre neste mês?**
 - c) **Consegue identificar a região onde são essas temperaturas?**

- ii) **Agora selecione o mês de julho, identifique onde fica o Brasil no mapa e responda:**
 - a) **Qual a menor temperatura encontrada para o Brasil neste mês?**
 - b) **E a maior?**
 - c) **Trocando para o mês de dezembro, determine qual a maior temperatura do Brasil?**
 - d) **Determine qual a menor temperatura do Brasil no mês de dezembro?**
 - e) **Justifique as mudanças que ocorreram para esses meses e o motivo da variação das temperaturas para julho e dezembro.**

Depois de responder a atividade, cabe ao professor verificar se os alunos alcançaram a leitura necessária da ferramenta, cabendo ao professor ofertar mais exemplos para que todos tenham capacidade de interpretar a imagem e relacionar a situação com a reta numérica. Após a verificação do professor, sabendo que os alunos serão capazes de interpretar situações mais abrangentes, chega o momento de apresentaremos aos alunos a **Atividade 6**, nela, teremos questões mais abstratas, a fim de testar a interação dos alunos com a ferramenta e relacioná-la aos conceitos de reta numérica desenvolvidos durante todo esse bloco de atividades.

Atividade 6

- i) **Responda as perguntas abaixo usando a ferramenta Reta Numérica: Inteiros no exemplo de temperaturas.**
- a) **Observe os polos norte e sul e determine as menores temperaturas nos meses de janeiro e julho. Há variação das temperaturas? Justifique sua resposta.**
 - b) **Em qual mês encontramos a maior temperatura do ano? Qual foi o mês? E qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a maior.**
 - c) **Em qual mês encontramos a menor temperatura do ano? Qual foi o mês? Qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a menor.**
- ii) **Para finalizar, relacione a reta numérica com as situações problemas que resolvemos até aqui, associando as características do problema com valores positivos e negativos.**
- a) **Exemplo de profundidade.**
 - número positivo: altitude acima do nível do mar
 - número negativo: altitude abaixo do nível do mar
 - b) **Exemplo do cofre.**
 - c) **Exemplo da temperatura.**

O objetivo desta aula é o aluno assimilar a relação da reta numérica com as situações problema propostas. Espera-se que neste fim de aula os alunos compreendam:

- Identificar a existência de números inteiros.
- Noção do zero como origem da reta numérica.
- Identificação e construção de reta numérica dos inteiros.
- Comparação de números inteiros.

Após o momento de interação com a ferramenta, vamos dar partida no momento de avaliar os conceitos apresentados na aula. Vamos dividir a avaliação em três momentos. O primeiro deles será de escrita. Segue a **Avaliação 1**.

Avaliação 1

- i) Aprendemos um conceito importante hoje. Você consegue identificar qual foi ele?**
- ii) O zero tem um papel importante na reta numérica. Em poucas palavras descreva sua importância?**
- iii) Como você representou os personagens abaixo do nível do mar, os débitos no cofre ou as temperaturas abaixo de zero? Por quê?**
- iv) Quais números podemos encontrar na reta numérica?**

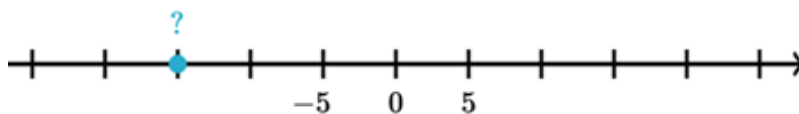
Esta primeira avaliação tem por objetivo fazer o aluno refletir sobre o aprendizado da aula, fazê-lo revisitar os conceitos aprendidos na aula e colocar no papel, suas impressões. Após a resposta dos alunos cabe ao professor, analisar as respostas dos alunos, e complementar as ideias, caso seja necessário. Neste ponto é importante ouvir respostas diferentes dos alunos e questionar se são respostas completas ou se falta alguma informação essencial. E assim, conseguir complementar as hipóteses e fechar uma escrita mais próxima possível de uma resposta coerente para as perguntas propostas. Após esta análise, partimos para a segunda parte da avaliação.

Além da ficha avaliativa, vamos usar a ferramenta digital *Plickers* para avaliá-los. O *Plickers* é uma ferramenta online para educação que permite avaliar os alunos de forma rápida e dinâmica, sem a necessidade de dispositivos eletrônicos individuais, para saber mais sobre como usar este aplicativo, consulte o capítulo 3 dessa dissertação onde há uma explicação detalhada de sua utilização.

Essa parte avaliativa é interativa, cabendo ao professor analisar os resultados de forma instantânea, essa avaliação tem por objetivo identificar possíveis alunos que ainda não superaram algum dos 4 obstáculos epistemológicos propostos para este

Avaliação 3

i) Onde está o ponto azul na reta numérica?

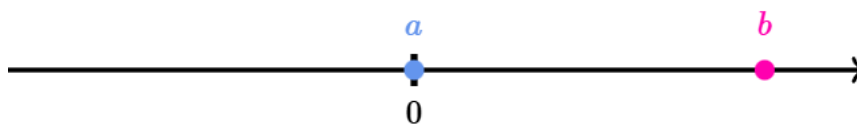


- a) -6 b) -7 c) -10 d) -15

ii) Ordene em ordem decrescente os números: -5, +7, -8, +10, +1 e -2.

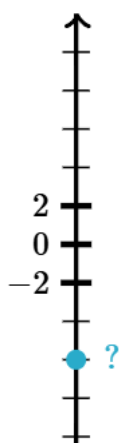
- a) -8, -5, -2, +1, +7, +10 b) +10, +7, +1, -2, -5, -8
c) +1, -2, -5, +7, -8, +10 d) +10, -8, +7, -5, -2, +1

iii) Usando a reta numérica abaixo, determine qual das alternativas é falsa.



- a) $a = 0$ b) $a < b$ c) $b = 0$ d) $a > b$

iv) Onde está o ponto azul na reta numérica?



- a) 6 b) 4 c) -6 d) -4

- v) Os geógrafos usam números negativos para representar pontos abaixo do nível do mar e números positivos para representar pontos acima do nível do mar. Segundo o site Mapa Topográfico de Saquarema (2025)², o ponto mais baixo em Saquarema está a -2 metros, e o ponto mais alto está a +835 metros. O que 0 metro representa?
- a) O ponto mais alto em Saquarema
 - b) O ponto mais alto de Saquarema
 - c) Nível do mar
 - d) Nenhuma das respostas anteriores.

Após aplicação das três avaliações, espera-se que o aluno já esteja familiarizado com a noção de reta numérica, além de conseguir comparar números inteiros, localizar pontos na reta numérica e associar a exemplos concretos a ideia de reta numérica. Com isso, sabemos que a diversificação de atividades e de modalidades é importante, assim, sugerimos uma última avaliação, que podem ser usadas para tarefa de casa ou atividades para outra aula usando o mesmo simulador, assim fazendo os alunos a revisitarem suas ideias e com isso fixarem os conceitos aprendidos na aula.

Para compor esta avaliação, utilizamos a atividade *Explorando Enteros*, disponível no link https://phet.colorado.edu/pt_BR/activities/7121. É uma lista de exercícios que interagem com o simulador *Reta Numérica: Inteiros*.



Fizemos uma tradução livre desta tarefa, além da adaptação de algumas questões. Segue, **Avaliação 4**, baseada na atividade *Explorando Enteros*.

⁴ disponível em <<https://pt-br.topographic-map.com/map-68p4s/Saquarema/?center=-22.867%2C-42.62661>>

Avaliação 4: Tarefa de Casa

i) Olhe para a imagem, com essas informações responda as perguntas

a)



Quem está no mar? _____

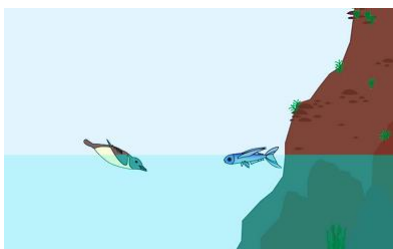
Quem está no ar? _____

Considerando a posição dos personagens, quem teria?

Altitude positiva: _____

Altitude negativa: _____

b)



Quem está no mar? _____

Quem está no ar? _____

Considerando a posição dos personagens, quem teria?

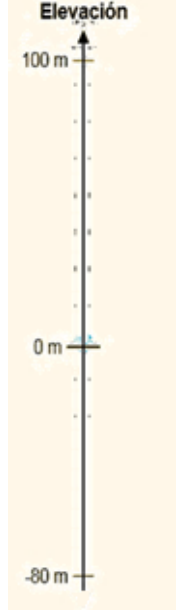



Altitude positiva: _____

Altitude negativa: _____

ii) Qual é a relação entre o mar e os sinais do pássaro e do peixe?

Justifique sua resposta.

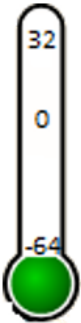
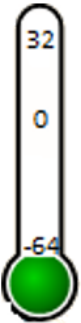
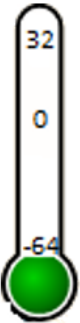
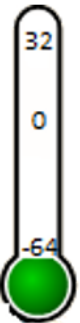
iii) Aponte com uma seta onde você colocaria nosso amigo PhET de acordo com as características apresentadas abaixo:

PhET menina no paraquedas	PhET menina nadando	PhET menina Andando	
			

iv) Ordene em ordem crescente de acordo com o local que você deu na pergunta anterior para a garota PhET (paraquedas/nadando/andando)

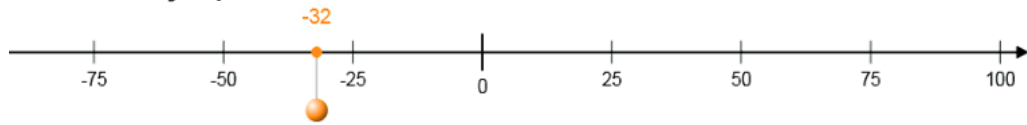
Garota Phet _____	≤	Garota Phet _____	≤	Garota Phet _____
----------------------	---	----------------------	---	----------------------

v) Pinte o termômetro de acordo com a temperatura indicada em graus Celsius

	-32°C		-10°C		0°C		25°C
---	-------	---	-------	---	-----	---	------

Qual é a relação entre números negativos, positivos e zero com frio e calor?

vi) Veja o exemplo: a temperatura está localizada na reta numérica, indique as outras temperaturas com uma marca (verifique na simulação)



De acordo com a representação acima, responda

- a) Qual é a temperatura mais baixa? Justifique sua resposta
- b) Qual é a temperatura mais alta? Justifique sua resposta

vii) Selecione de acordo com as características do porquinho (porquinho ou cofrinho) da poupança

<p>A white piggy bank with pink flowers and the text '\$0' on its side.</p>	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>
<p>A red piggy bank with pink flowers and the text '-\$100' on its side.</p>	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>
<p>A green piggy bank with pink flowers and the text '\$100' on its side.</p>	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>

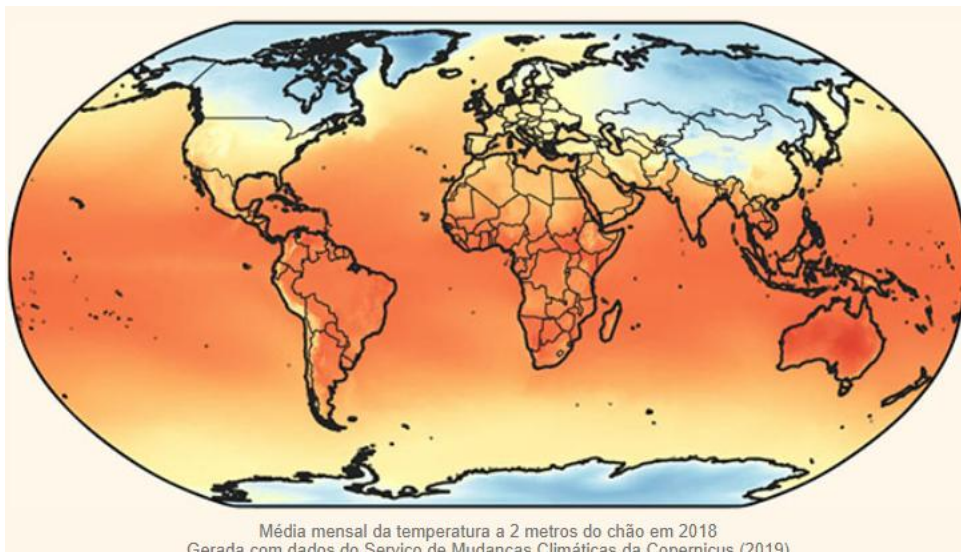
Complete a frase com as seguintes palavras: "economia" e "despesas" nos espaços em branco abaixo

O _____ é expresso com um sinal negativo antes da quantidade, enquanto o _____ é expresso com um sinal positivo.

viii) Preencha a tabela abaixo (confira com a simulação)

Compare usando um \leq ou \geq	Representa na reta numérica
-5 _____ 0	<p>A number line from -10 to 10 with a dot at 0.</p>
_____	<p>A number line from -10 to 10 with an orange dot at 2 and a blue dot at 7.</p>
-10 _____ -2	<p>A number line from -10 to 10 with no dots.</p>

Brinque com a simulação para se divertir aprendendo: você sabia que as mudanças climáticas estão afetando nossas temperaturas... não acredite em mim? Eu te desafio a responder as questões de ix a xi:



- ix) **Em quais meses do ano foram registradas as temperaturas mais baixas?**
- x) **Em quais meses do ano foram registradas as temperaturas mais altas?**
- xi) **Qual polo é mais frio?**
 - a) **Polo Norte**
 - b) **Polo Sul**
 - c) **Não há diferença**

Essa lista de exercícios finais, são essenciais para fixar o conteúdo e fazer o aluno visitar a tarefa, assim tornar o aprendizado algo significativo. Depois desta tarefa de casa, cabe seguirmos com nossa sequência, dando início ao Bloco 2.

2.2. Bloco 2: Adição e subtração de inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03), (EF07MA04)

Objetivo específico: Reconhecer, operar e associar a problemas as operações de adição e subtração de inteiros. Associar o conhecimento em situações práticas que envolvam números inteiros. Resolver claramente as regras de sinais para adição algébrica de inteiros

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3, 4, 5.

Material necessário: Lousa digital, celular com câmera, computador para os alunos, caderno, lápis e borracha.

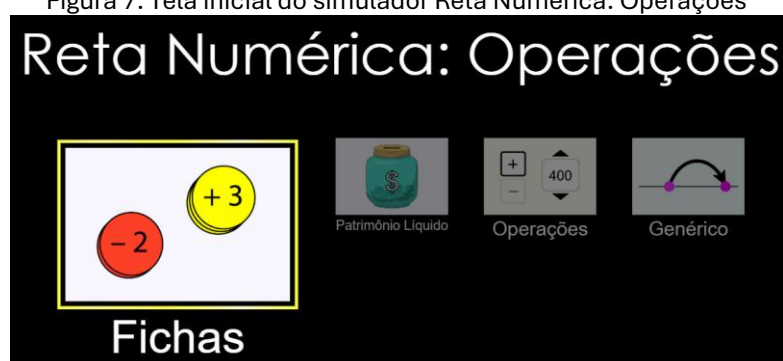
Duração: 200 minutos

Este bloco tem objetivo de levar o aluno a identificar a regra dos sinais usadas para somar ou subtrair números negativos. Para identificar a soma de inteiros, vamos apresentar o simulador *Números Inteiros: Operações*, este simulador está disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.



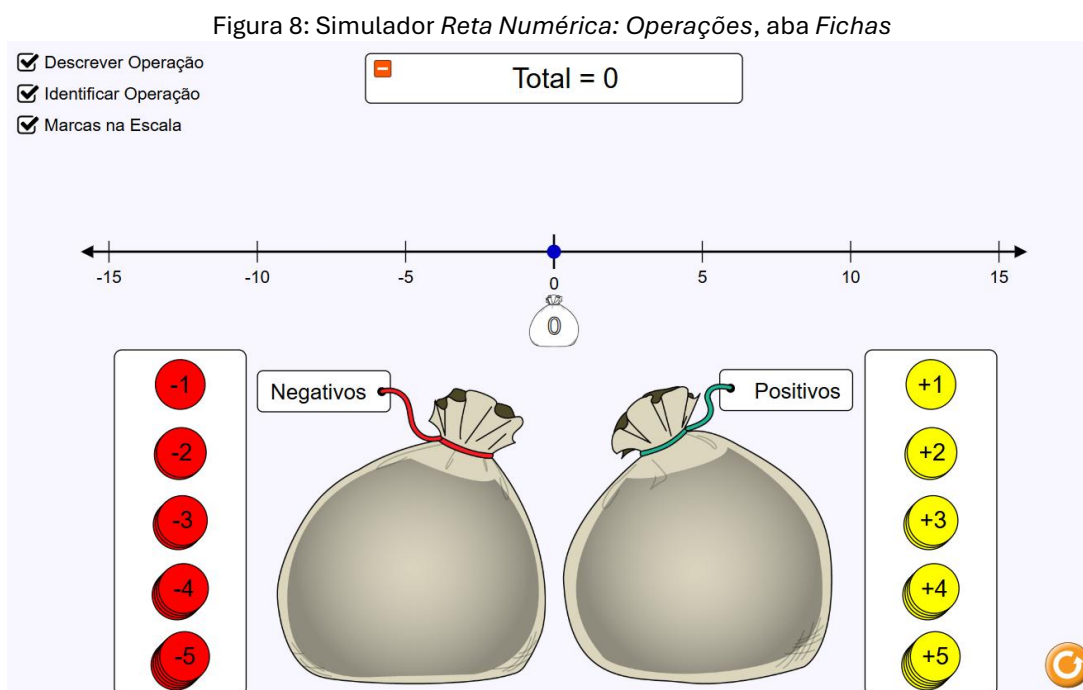
O simulador *Reta Numérica: Operações*, disponível no link descrito acima, apresenta uma tela inicial, onde é possível escolher entre 4 opções: *Fichas*, *Patrimônio Líquido*, *Operações* e *Genérico*. Que podem ser vistos na figura 7.

Figura 7: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Operações



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Na aba *Fichas*, encontramos cinco fichas vermelhas numeradas com -5, -4, -3, -2, -1; cinco fichas amarelas, numeradas com +1, +2, +3, +4, +5. Dois sacos, um etiquetado com *Negativos* e outro com *Positivos*. Uma reta numérica e um botão de *Total*. Na figura 8, podemos ver a janela da aba *Fichas*.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Faça com que os alunos utilizem a aba *Fichas*, dê a eles aproximadamente 5 minutos para que se apropriem das ferramentas. Com essa aba, vamos resolver a **Atividade 1**, disponibilizada a seguir.

Atividade 1

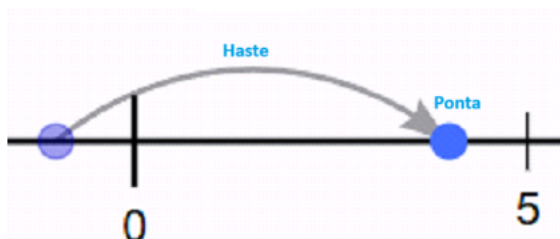
Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Operações e explore a janela Fichas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a simulação?

- i) **Na aba Fichas, observe a localização do resultado colocando -5 na bolsa esquerda e +3 na bolsa direita. Qual é o resultado da operação realizada? Por quê? Verifique sua resposta na simulação**

ii) Qual é o resultado da operação $-1 + 1$? Assinalar.

- a) 0 b) 2 c) -1 d) N.A.

iii) Ainda na aba Fichas, ao executar uma operação, uma flexa é exibida, como na imagem a seguir.



O que indica a haste da flecha:

- a) Quanto à resposta encontrada?
b) Quanto ao movimento que executa?

Após resolver a **Atividade 1**, cabe ao professor ofertar mais exemplos, caso a turma precise para se familiarizar com a ferramenta. Disponha quantas atividades forem necessárias para que compreendam a soma de números inteiros. Vamos dispor de mais algumas tarefas. Segue **Atividade 2**, com as tarefas complementares.

Atividade 2

i) Na aba Fichas, determine a localização do resultado em cada caso quando colocamos:

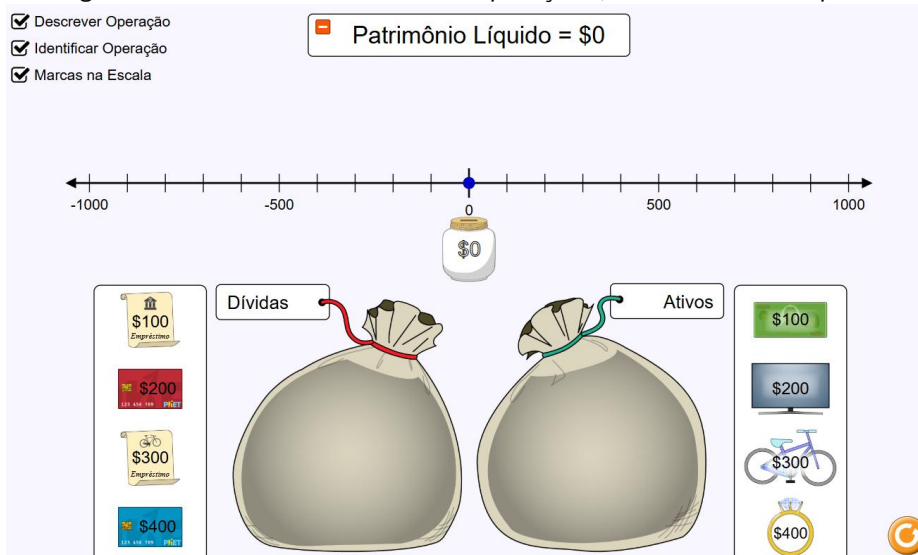
- a) $+5$ e $+3$ na bolsa direita?
b) -4 e -2 na bolsa esquerda?
c) $+3$ na bolsa direita e -2 na bolsa esquerda?
d) $+2$ na bolsa direita e -5 na bolsa esquerda?
e) $+3$ na bolsa direita e -3 na bolsa esquerda?

- ii) Ao colocar as fichas +3, +4 na bolsa direita e -1, -2, e -5 na bolsa esquerda. Qual será o resultado encontrado? Justifique sua resposta.
- iii) Agora resolva as seguintes operações usando números inteiros. Depois de resolvê-los confira o resultado usando o simulador.
- | | |
|------------------|------------------|
| a) $(+5) + (+4)$ | e) $(+1) + (+3)$ |
| b) $(-2) + (-5)$ | f) $(-3) + (-4)$ |
| c) $(+4) + (-3)$ | g) $(-2) + (+5)$ |
| d) $(+1) + (-4)$ | h) $(-5) + (+2)$ |
- iv) Depois de conferir com o simulador, converse com seus colegas e entrem em um consenso quanto ao resultado das somas:
- a) A adição de dois números positivos será sempre um número _____
- b) A adição de dois números negativos será sempre um número _____
- v) Agora, elabore uma regra para a somas de números com sinais diferentes: um positivo e outro negativo.

A ideia aqui não é que o aluno memorize as regras, mas que possa generalizar e sistematizar ele próprio o que ocorre com a adição de números inteiros com o mesmo sinal. Com o uso da aba *Fichas*, os alunos devem alcançar a ideia principal de adição de números inteiros. Assim, vamos seguir para a próxima aba.

Na aba seguinte, temos o *Patrimônio Líquido*, nele encontramos uma reta numérica, valores de \$100 a \$400 à esquerda que representam *Dívidas* e os mesmos valores à direita que representam *Ativos*. Na imagem a seguir (figura 9), temos a aba *Patrimônio Líquido*.

Figura 9: Simulador *Reta Numérica: Operações*, aba *Patrimônio Líquido*



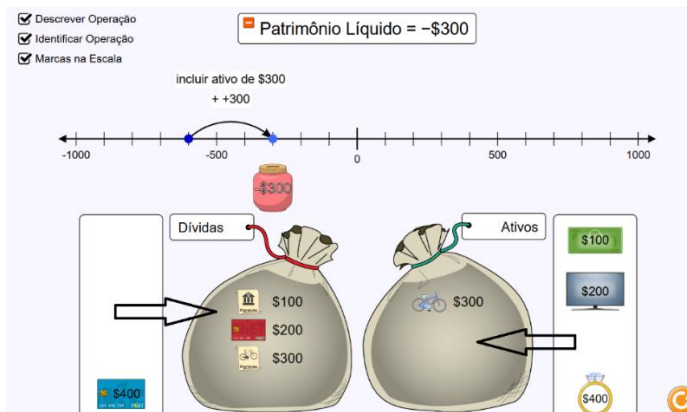
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Nesta aba, temos uma aparência semelhante à da aba *Fichas*, porém agora temos situações concretas: empréstimos e cartões no lugar das fichas vermelhas; dinheiro, televisão, bicicleta e anel no lugar das fichas azuis. Cabe ao professor, deixar que os alunos investiguem e cheguem na relação com a aba anterior. Nesta aba vamos fazer uma atividade após os alunos se apropriarem dela. A seguir temos a **Atividade 3**.

Atividade 3

Na aba *Patrimônio Líquido*, responda as questões abaixo:

- i) **Juan é um estudante e gosta de jogar o famoso jogo de *monopólio* onde ele tem dívidas de \$ 100, \$ 200 e \$ 300, então ele faz como pagamento com alguns bens, como bicicleta (\$ 300), vamos ver o que aconteceu.**



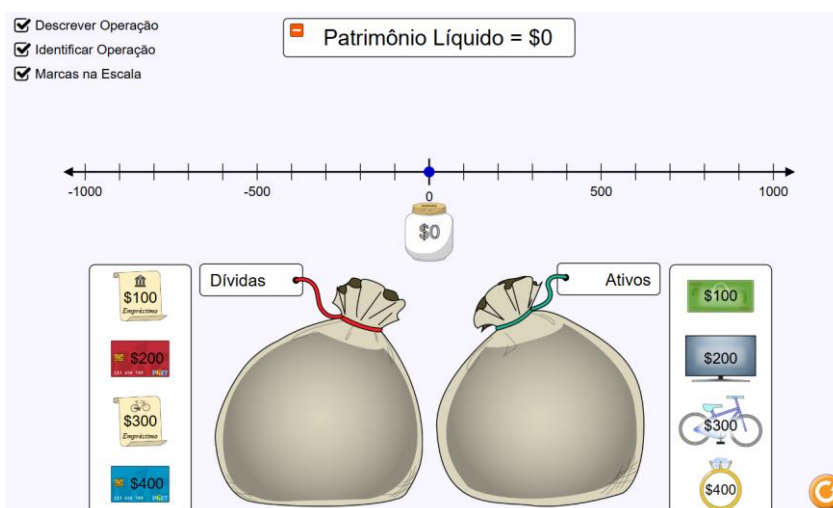
Ao analisar o resultado indicado pela seta, ele percebe que ainda tem dívidas. É possível João pagar a dívida pendente? Discuta sua resposta.

ii) Maria possui um valor líquido inicial for igual a $-\$ 300$ e $-\$ 400$ for adicionado a ele, como você usaria a simulação para obter o patrimônio líquido ($\$$)? Discuta sua resposta

a) *Desenhe abaixo como a representação do patrimônio líquido ($\$$) parecia na simulação*

b) E se em vez de $-\$400$, mudarmos para $\$400$ e adicionarmos $-\$100$, analisamos a representação na reta numérica.

iii) Preveja qual seria o patrimônio líquido de Pedro se inserirmos todos os dados no saco de dívidas e todos os dados no saco dos ativos.



Verifique com a simulação:

a) Quando o patrimônio líquido diminui para zero? Justifique sua resposta.

b) Quando há aumento do patrimônio líquido? Justifique sua resposta.

c) Quando há diminuição do patrimônio Líquido?

Após a **Atividade 3**, espera-se que os alunos consigam trabalhar com situações problema que envolvam a soma de números inteiros. Então propomos uma

Atividade 4, nela colocamos problemas diversos sobre adição de números inteiros. Que tem como objetivo ampliar a visibilidade dos alunos para tratar os números inteiros e assumir diversificadas situações que podemos trabalhar com esses números para somar ou subtrair.

Atividade 4

- i) **Expresse, utilizando a adição de números inteiros, cada situação que segue e dê o resultado.**
- a) Em um jogo, Alice ganhou 12 pontos e perdeu 7.
 - b) Uma comida congelada estava sendo mantida a temperatura de $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e sofreu uma variação de $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 - c) Em um torneio de futebol, um time tem 14 pontos ganhos e 20 pontos perdidos.
 - d) Seu João depositou R\$239,00 em sua conta corrente, que estava com um saldo devedor de R\$540,00.

- ii) **Num jogo de baralho, Rodrigo e Carolina obtiveram os seguintes resultados:**

	Rodrigo	Carolina
1ª Partida	Ganhou 510 pontos	Perdeu 80 pontos
2ª Partida	Perdeu 215 pontos	Ganhou 475 pontos
3ª Partida	Perdeu 485 pontos	Ganhou 290 pontos
4ª Partida	Ganhou 625 pontos	Perdeu 115 pontos

- a) Qual é o número total de pontos de Carolina após as quatro partidas?
 - b) Qual é o número total de pontos de Rodrigo após as quatro partidas?
 - c) De quem foi a vantagem final? Quantos pontos de diferença?
- iii) **Um termômetro está marcando -2°C em uma cidade. Se a temperatura subir 6°C , quantos graus marcará o termômetro?**

iv) Considere os seguintes números:

103	20	+15	-36	-29
-15	28	-100	-21	42

Escolha dois deles, de modo que:

- a) a soma seja zero.
- b) a soma seja 3.
- c) a soma seja 62.
- d) a soma seja -8.
- e) a soma seja -50.

O simulador, ainda possui a aba operações e a aba Genérico, porém não vamos nos aprofundar nelas, utilizando nesta aula somente nas duas primeiras abas. Após os alunos resolverem a Atividade 3 e a Atividade 4, espera-se que os alunos consigam seguir para a operação de subtração.

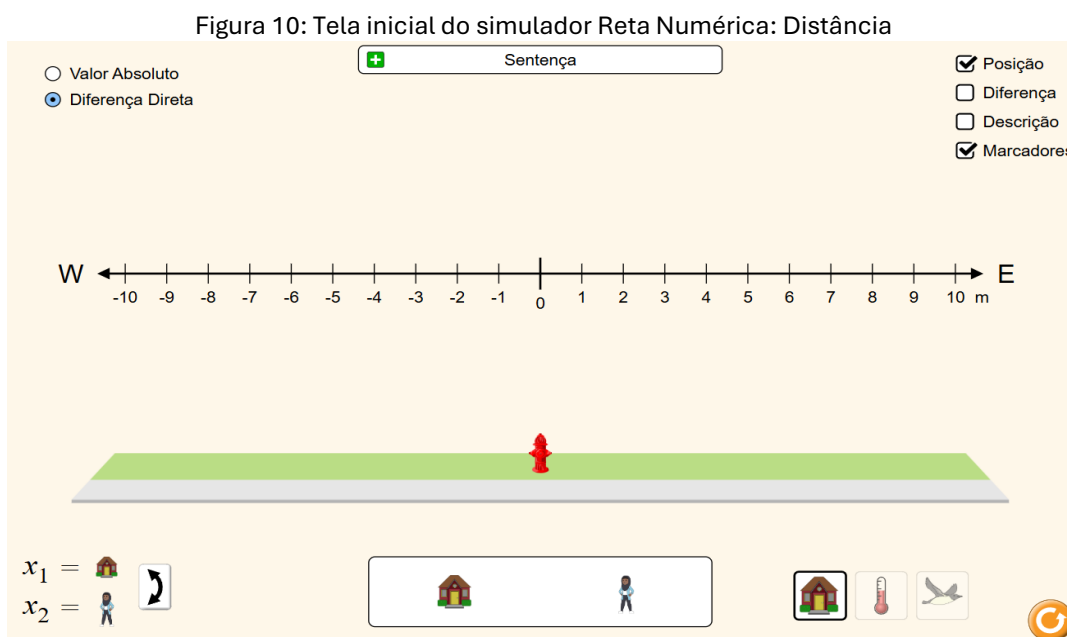
Para desenvolver a operação de subtração, vamos usar o simulador Reta Numérica: Distância, disponível no link https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance, ele apresenta em sua tela inicial uma reta numérica e uma imagem de uma rua com um hidrômetro, que está na direção do número 0 (zero), da reta numérica. Podemos ver a tela inicial na figura seguinte (figura 10).



Nesta tela, também podemos ver uma casa e uma garota, que podem ser colocadas em qualquer lugar conveniente antes ou depois do hidrômetro. Podemos ver também na parte superior, a direita, dois botões: *Valor Absoluto*, que dá a diferença modular dos valores x_1 e x_2 ; ou *Diferença Direta*, que dá o resultado da subtração entre os valores x_1 e x_2 . No centro, temos a *Sentença*, que mostra a operação associada aos valores usados na representação. E no lado esquerdo, temos os botões *Posição*, *Diferença*, *Descrição* e *Marcadores*; que ao serem selecionados mostram essas informações na figura.

Para dar início a **Atividade 5**, temos que pedir aos alunos que se familiarizem com a ferramenta na aba casa, que é a primeira opção de visualização. Pedir para

que marquem a opção *Diferença Direta*, desativem a janela *Sentença* e desmarquem os botões *Diferença* e *Descrição*, como podemos ver na figura 10.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

Com essas orientações respeitadas podemos ofertar que os alunos usem a simulação por alguns minutos, e depois resolvam a **Atividade 5**.

Atividade 5

- i) **Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Distância e explore as janelas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a manipulação da simulação?**

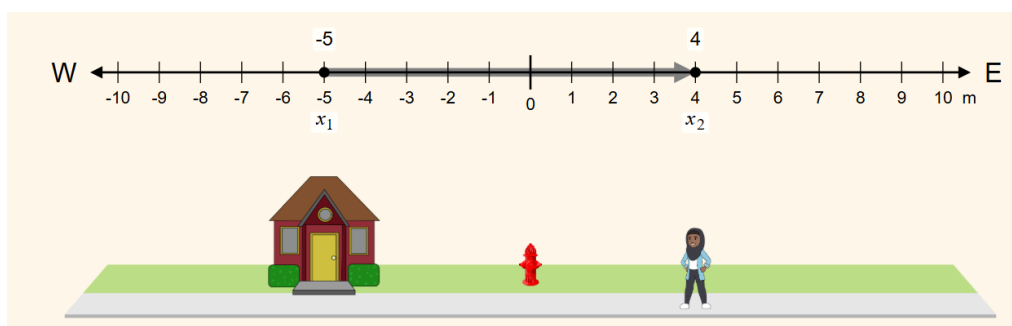
- ii) **Coloque a casa na posição -6 e coloque a pessoa na posição 5. Agora responda:**
 - a) **Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.**
 - b) **Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.**
 - c) **E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.**

- iii) Agora coloque a casa na posição 5 e coloque a pessoa na posição -6. Agora responda?
- a) Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.
- b) Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.
- c) E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.

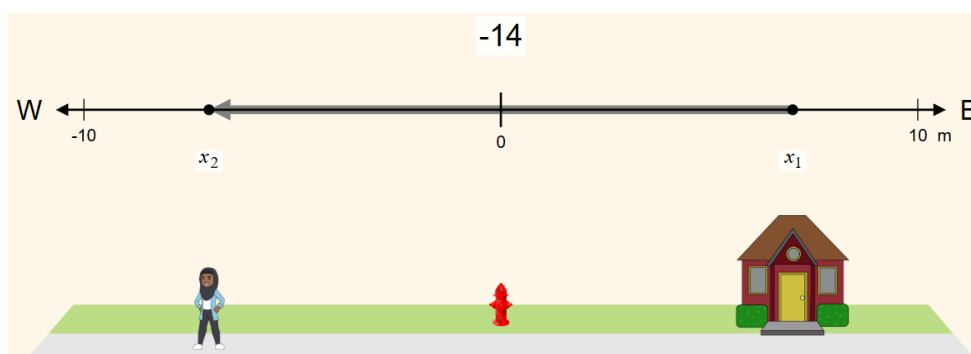
Após resolver a **Atividade 5**, espera-se que os alunos tenham a noção de como a subtração de números inteiros é realizada, neste momento ainda de forma intuitiva. Há a possibilidade de haver grupos de alunos que ainda não compreenderam como funciona a dinâmica da operação, e por esse motivo é importante sugerir mais exemplos, partindo de um novo olhar. Assim, peça aos alunos que resolvam a **Atividade 6**.

Atividade 6

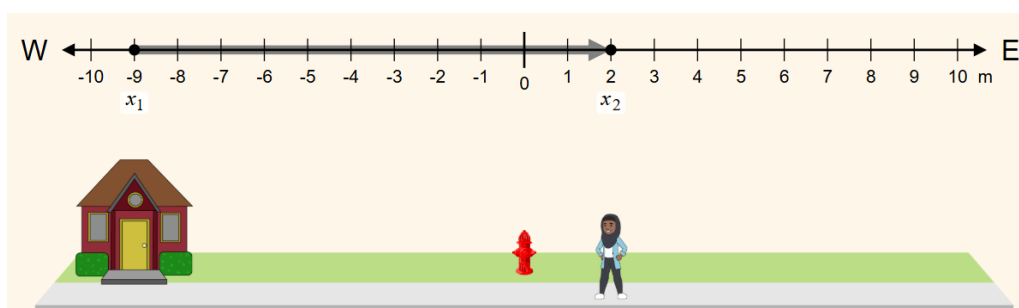
- i) Considere a seguinte situação na figura a seguir. Se a menina quer chegar em casa, determine a distância da garota até a casa?



- ii) Agora considere que a menina saiu de casa e andou 14 metros a oeste (W). Determine uma possibilidade para a posição da casa (x_1) e da menina (x_2)?



- iii) Agora, analise a seguinte situação na figura a seguir.

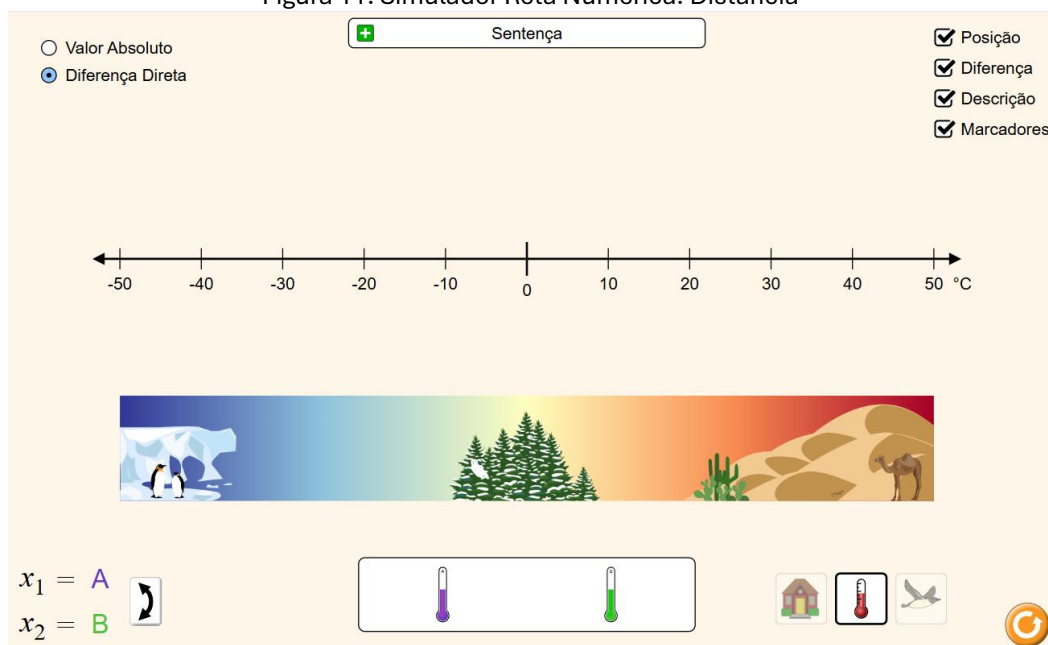


- Determine qual a posição da casa?
- Determine qual a posição da garota?
- Se a garota saiu de casa e andou na direção leste (E), quanto a garota andou?

Após os alunos alcançarem a associação da situação problema com a reta numérica e perceberem a subtração que envolvem o problema. Chega o momento de ofertar outra situação semelhante.

Além da simulação acima descrita, o simulador Reta Numérica: Distância, conta com mais duas telas, que podem ser alteras na parte inferior direita. Uma com a imagem de um termômetro e outra com um pássaro. Inicialmente vamos analisar a opção com o termômetro. Na figura 54, temos a tela inicial da ferramenta.

Figura 11: Simulador Reta Numérica: Distância



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

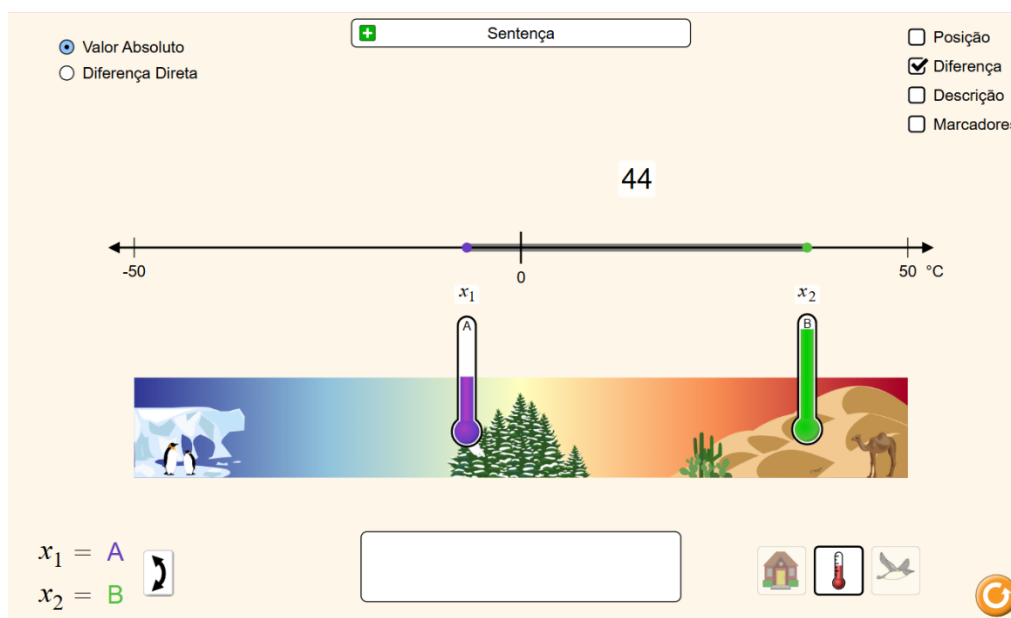
Nela, vamos pedir aos alunos que marquem a opção *Diferença Direta*, desativem a janela *Sentença*, essas opções já estão apresentadas na figura 10. E assim que interagirem com a tarefa, resolvam a **Atividade 7**, destacada a seguir.

Atividade 7

- i) Utilizando o Simulador Reta Numérica: Distância, na janela do termômetro, coloque o termômetro roxo e o termômetro verde, de modo que a diferença entre as temperaturas seja de 40°C.
 - a) Usando apenas números positivos.
 - b) Usando apenas números negativos.
 - c) Usando um número positivo e outro negativo.

- ii) Se a temperatura atual de determinado local é de 0°C, determine a temperatura se:
 - a) Ocorrer um aumento de 30°C?
 - b) Ocorrer uma queda de 25°C?

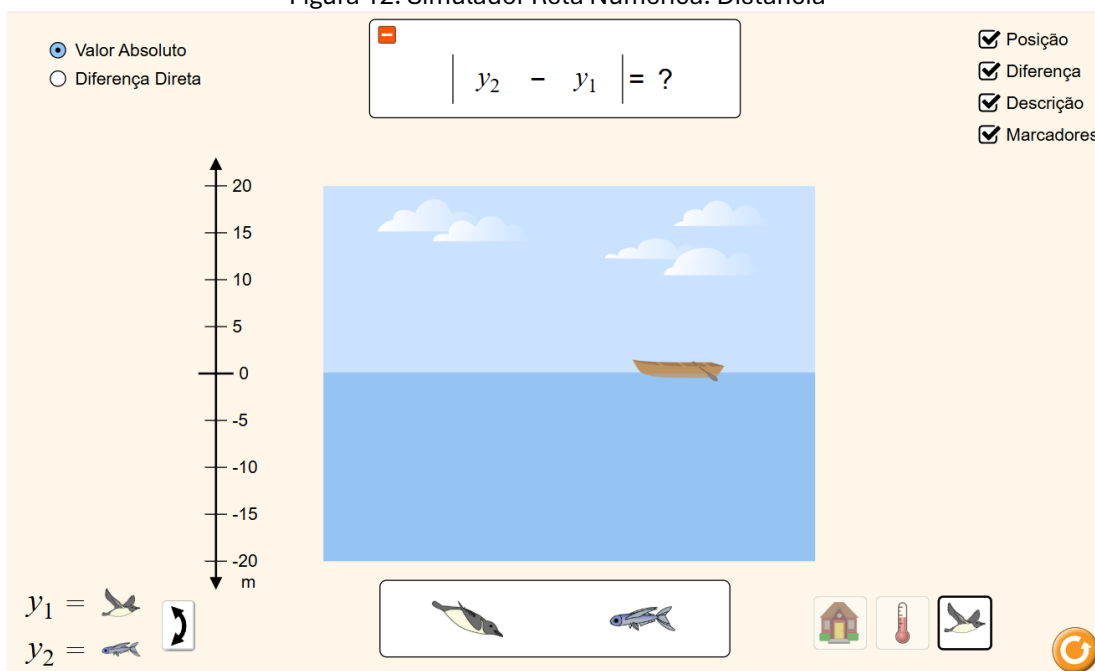
- iii) Se inicialmente está com 0°C , ocorrer um aumento de 10°C e após algum tempo uma queda de 15°C , qual será a temperatura no final?
- iv) Observe a diferença entre as temperaturas na imagem a seguir, onde o resultado da diferença é 44. Indique um valor possível para os termômetros A e B. Justifique sua resposta.



Por fim, os alunos devem conseguir associar com naturalidade o exemplo do termômetro e o exemplo da casa. Agora chega a hora de mostrar as mesmas operações de uma nova perspectiva, vamos usar a opção do pássaro, na ferramenta Reta Numérica: Diferença. E mais uma vez devemos deixar os alunos de apropriarem dessa visualização, deixando um tempo para que conheçam e se adaptem com sua formatação.

Para iniciar o uso, os alunos que devem marcar a opção diferença direta, podendo a tela ser vista na figura 55 a seguir. Neste ponto somente essa opção deve ser alterada.

Figura 12: Simulador Reta Numérica: Distância



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

Assim que estiverem prontos, o professor deve ofertar a **Atividade 8**.

Atividade 8

- i) Se um pássaro está a 15m acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros abaixo do nível do mar, qual será a distância entre o pássaro e o peixe? Monte uma operação de subtração para representar essa situação e justifique sua resposta.
- ii) Imagine que o pássaro quer pegar o peixe. Se o pássaro mergulha a uma profundidade de 5 metros abaixo do nível do mar e o peixe para fugir pula a uma altura de 5 metros acima do nível do mar. Neste momento qual a distância entre o peixe e o pássaro?

iii) Observe as operações abaixo, use o simulador usando o peixe e o pássaro para exemplificá-los e justifique sua resposta.

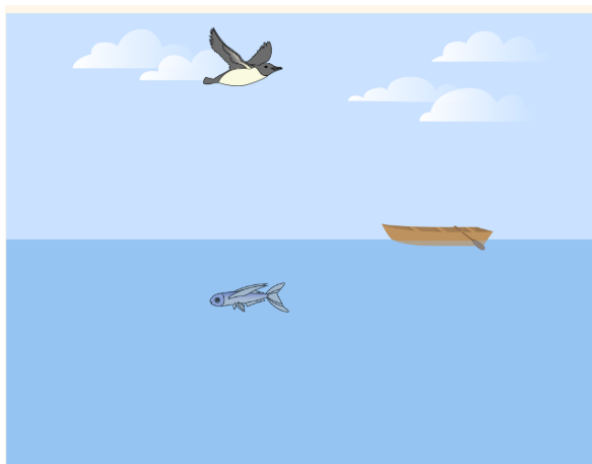
a) $(+15) - (+5)$

b) $(+7) - (-13)$

c) $(-12) - (+10)$

d) $(-9) - (-10)$

iv) Um pássaro vê um peixe nadando e pretende pegá-lo. Se o pássaro está a 15 metros acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros de profundidade. Quantos metros o pássaro deve se mover para pegar o peixe? Justifique sua resposta



Como tarefa final deste bloco, usaremos uma atividade usando o Geogebra, onde os alunos vão se deparar com uma pirâmide e devem descobrir qual o número colocar no topo da pirâmide. Essa atividade tem por objetivo ajudar os alunos na generalização das regras de sinais para a adição e a subtração de números inteiros.

Nesta tarefa, **Avaliação 1**, os alunos recebem uma pirâmide, como a que deixamos como exemplo na imagem a seguir (Figura 56). Nela, podemos ver que a base da pirâmide está toda preenchida, e devemos usar a soma de inteiros, onde cada valor é a soma dos números que estão logo abaixo dele.

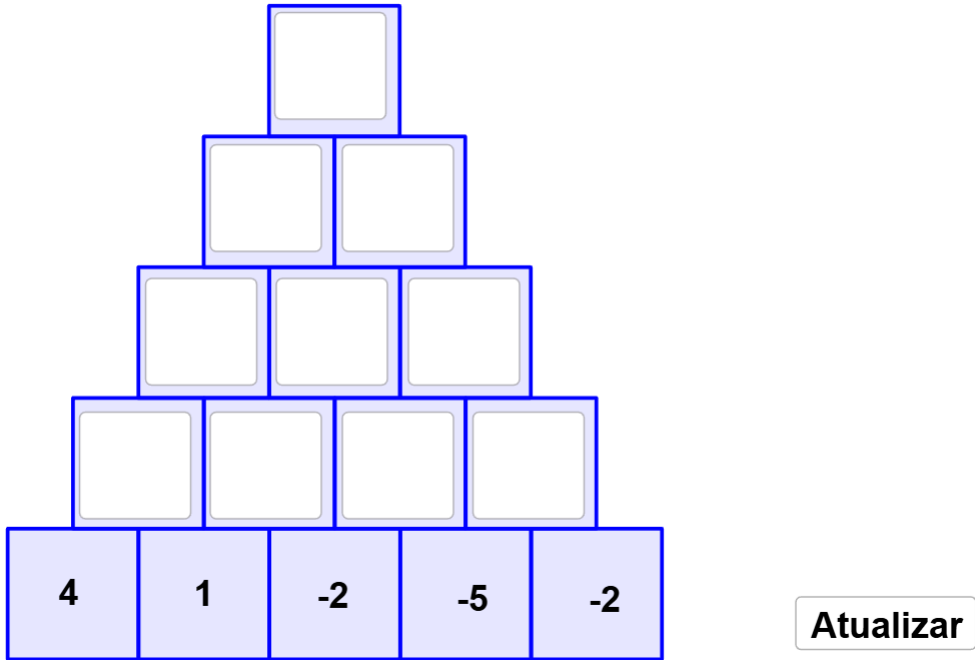


Esta ferramenta do Geogebra para desenvolver a **Avaliação 1**, está disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>, e chama-se *Adição de Números Inteiros* (Costa, 2021). Nesta tarefa não temos questões propostas, basta o professor explicar aos alunos que nesta atividade devemos descobrir qual valor devemos colocar no topo da pirâmide. Importante neste momento os alunos conversarem entre si suas conclusões e ao final sejam capazes de explicar como completaram a pirâmide e qual lógica matemática usaram para esse fim. É uma atividade de experimentação e investigação, sendo o professor o mediador, sendo seu papel mediar e não mostrar como se monta a pirâmide, deixando esse processo de construção para os alunos.

Avaliação 1

Abaixo, temos um exemplo de como fica a tela do aluno ao iniciar a atividade.

Figura 13: Ferramenta jogo Adição de Número Inteiro



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>.

No final da aula esperamos que os alunos consigam entender a dinâmica das operações de adição e subtração com inteiros e saibam usá-las quando necessário. Apesar da aula, os alunos precisam treinar essas operações de forma abstrata. E para isso vamos ofertar a **Avaliação 2**, como sugestão alguns exercícios para casa, para

que possas visitar essas regras e usar suas conclusões para resolver adição e subtração com inteiros.

Avaliação 2

- i) **Escreva os números inteiros:**
 - a) Entre -3 e 3
 - b) De -5 até 2
 - c) Maiores que -2

- ii) **Determine os números que possuem módulo igual a 15 :**

- iii) **Qual é o número que possui maior módulo -5 ou 2 ?**

- iv) **Determine:**
 - a) O oposto de -4
 - b) O oposto do oposto de 11
 - c) O módulo do simétrico de -8

- v) **Escreva os números a seguir em ordem crescente: $-9, +4, +1, -3, -11, 0, -1, +11$**

- vi) **Qual é o menor número?**
 - a) 0 ou -1
 - b) -2 ou 5
 - c) -10 ou -26

- vii) **Indique a variação de unidades na reta numérica quando saímos de:**
 - a) -1 e chegamos a 3
 - b) -3 e chegamos a -1
 - c) -5 e chegamos a -10

- viii) **Calcule**
 - a) $(-14) + (-3)$
 - b) $(+17) + (-6)$
 - c) $(+11) - (-6)$
 - d) $(-9) - (+16)$

Após a conclusão da **Avaliação 2**, espera-se que os alunos saibam operar a adição e a subtração de números inteiros usando a regra de sinais para resolvê-los.

Confirmando esses objetivos, devemos seguir e passar para a Parte 3 da nossa jornada com números inteiros.

2.3. Parte 3: Multiplicação de inteiros

Habilidades BNCC: (EF07MA03), (EF07MA04)

Objetivo específico: Reconhecer, operar e associar a problemas a operação de multiplicação de inteiros. Resolver claramente as regras de sinais da multiplicação de inteiros.

Superação dos obstáculos epistemológicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Material necessário: Lousa digital, celular com câmera, computador para os alunos, caderno, lápis e borracha.

Duração: 150 minutos

Para este bloco, a investigação será nosso principal objetivo, sendo a regra dos sinais para produto de números inteiros o nosso objetivo final. Para isso, vamos iniciar nossa aula com alguns exercícios. Para essa discussão fazer sentido, os alunos receberão algumas multiplicações que devem resolver e apresentar seus resultados para a turma. Contudo, para incentivar a solução desta tarefa, usaremos um simulador de produtos usando o aplicativo Geogebra, temos esse simulador disponível em <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb> (Arruda, 2019)



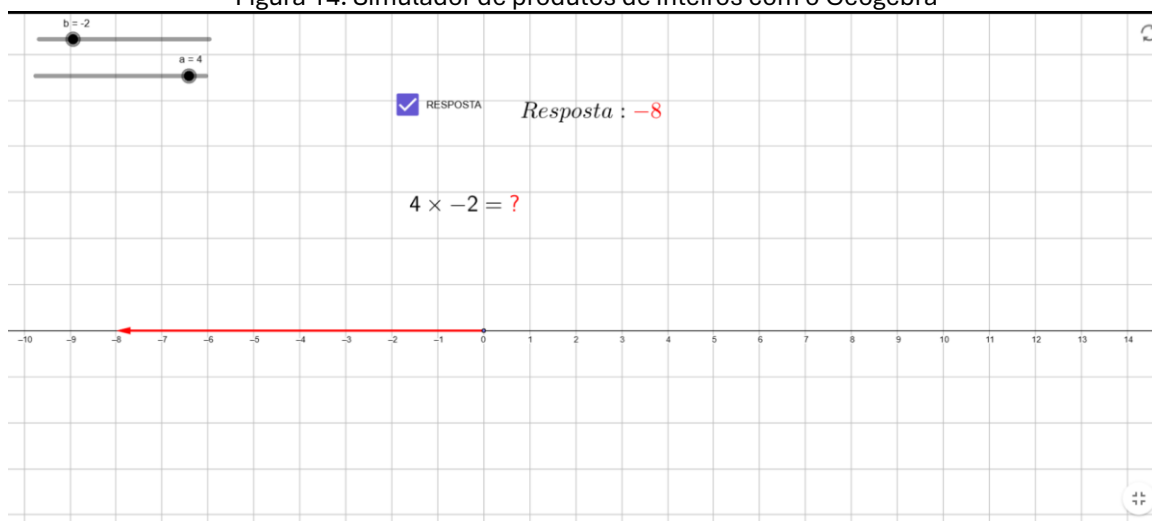
Este simulador de produto, contém dois botões deslizantes a e b , que representam as parcelas do produto $a \times b$. Caberá aos alunos abrirem o aplicativo do Geogebra em um computador e colocar as parcelas das multiplicações que recebeu e conferir os resultados encontrados. Na imagem a seguir (figura 14), podemos ver o exemplo $(+4) \cdot (-2) = -8$

Para desenvolver o raciocínio deste bloco, vamos dividir o raciocínio em cinco atividades, quatro de investigação, simulando as possibilidades de produto de inteiros e a quinta de conclusão das quatro primeiras atividades. O objetivo destas atividades

é o aluno chegar a regra dos sinais usando exemplos e chegando na conclusão desejada, sem precisar decorar a regra, que costuma causar confusão e não faz sentido para os alunos, pois sua aplicação em exemplos práticos fica limitada.

Esta regra por ser totalmente abstrata, não sendo possível um modelo unificador, leva ao não entendimento desse padrão. E por esse motivo, a investigação dos exemplos e a conclusão dessas atividades se torna essencial para o entendimento dos alunos para o produto de inteiros.

Figura 14: Simulador de produtos de inteiros com o Geogebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>

Dê aos alunos um tempo para que se mexam na ferramenta, que se adaptem ao seu uso. A seguir, oferte a eles as primeiras quatro atividades: **Atividade 1**, **Atividade 2**, **Atividade 3** e **Atividade 4**, nesta sequência.

Atividade 1

Por 5 minutos abra o simulador de produtos no Geogebra e use-o para responder as questões abaixo. Disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>.

- i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.
- $(+5) \cdot (+2) =$
 - $(+3) \cdot (+4) =$
 - $(+1) \cdot (+6) =$
 - $(+2) \cdot (+3) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Atividade 2

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(+4) \cdot (-2) =$

b) $(+6) \cdot (-1) =$

c) $(+3) \cdot (-3) =$

d) $(+5) \cdot (-2) =$

ii) Agora responda:

c) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

d) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Para iniciar a próxima atividade, o professor deve conferir as soluções da **Atividade 1** e da **Atividade 2**, além de mostrar que o produto de um número positivo por um número negativo é o mesmo que o produto de um número negativo por um número positivo. Podendo a seguir, iniciar a **Atividade 3**.

Atividade 3

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(-2) \cdot (+2) =$

b) $(-5) \cdot (+3) =$

c) $(-1) \cdot (+8) =$

d) $(-4) \cdot (+3) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Por fim, teremos a **Atividade 4**, que vai fazer com que os alunos cheguem a conclusão do produto de números negativos usando a ferramenta do Geogebra, como nas atividades anteriores.

Atividade 4

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(-1) \cdot (-7) =$

b) $(-5) \cdot (-3) =$

c) $(-2) \cdot (-4) =$

d) $(-3) \cdot (-5) =$

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo () Negativo

2ª Parcela: () Positivo () Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Assim que estiver com os resultados, cada aluno deverá compartilhar com outro suas respostas e analisá-las. Já com as conclusões das quatro atividades aplicadas, o professor aplicará a **Atividade 5**.

Atividade 5

- i) Complete as frases a seguir, com base no que resolveu nos exercícios anteriores.
- a) Um número positivo multiplicado por outro número positivo é igual a _____, portanto $(+) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- b) Um número positivo multiplicado por um número negativo é igual a _____, portanto $(+) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- c) Um número negativo multiplicado por um número positivo é igual a _____, portanto $(-) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- d) Um número negativo multiplicado por outro número negativo é igual a _____, portanto $(-) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Após os alunos responderem as questões propostas nas atividades de 1 a 5, vamos usar uma atividade interativa do site <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/> (Arcademics, 2025) chamada Corrida dos Inteiros para exercitar as regras dos sinais construída na **Atividade 5**. Esse jogo, por ser uma competição, ajuda na fixação das regras dos sinais. Essa tarefa final será a **Avaliação 1** deste bloco. O jogo consiste numa corrida de espaço naves, onde vence quem resolve as questões corretamente em menos tempos, para cada acerto sua nave acelera e para cada erro fica mais lenta. Na imagem a seguir (figura 15), temos a tela inicial do jogo. Para começar, aperte no botão Play.

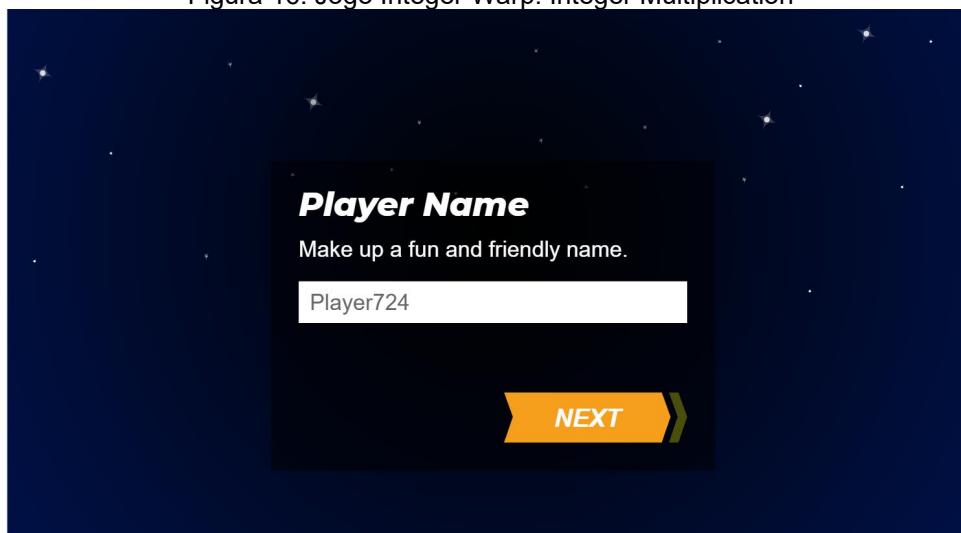


Figura 15: Jogo Integer Warp: Integer Multiplication



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Figura 16: Jogo Integer Warp: Integer Multiplication

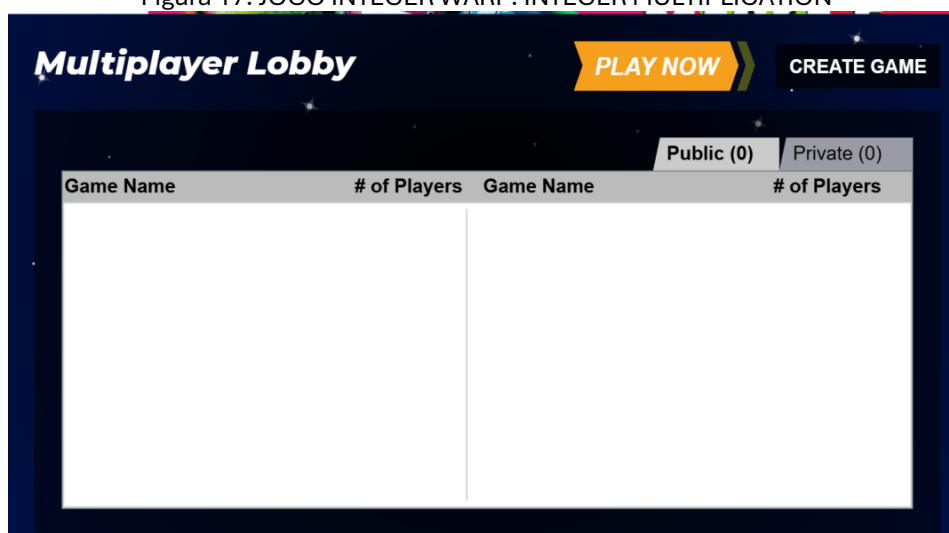


Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Na próxima página, cada jogador coloca seu nome, ou pode usar os nomes sugeridos, como no caso da figura 59 que sugeriu o nome Player724.

A seguir, (figura 17), há a possibilidade de criar uma sala onde os alunos podem jogar entre si, porém também há a possibilidade de jogar com o computador, caso queira jogar direto, basta apertar Play Now.

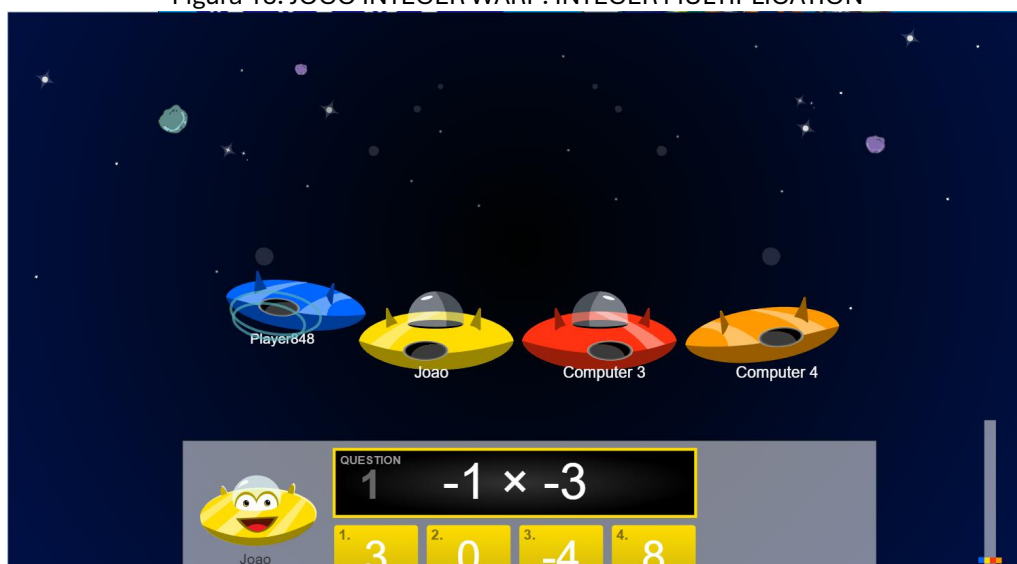
Figura 17: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

E então o jogo começa, na imagem a seguir (figura 18), temos quatro participantes, escolhi o nome João como exemplo e estou jogando com o personagem da nave amarela. Aparece na parte de baixo uma multiplicação de inteiros e deve-se clicar em uma das quatro respostas apresentadas.

Figura 18: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Ao clicar na resposta, uma nova questão aparece. E assim segue, até a chegada. Na figura 19, perceba que o jogador João está perdendo, pois as outros jogadores estão na frente.

Figura 19: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Após a interação dos alunos com o jogo, eles devem estar cientes das regras dos sinais para o produto de inteiros. Entretanto, sugerimos uma Avaliação 2, que ficará como tarefa de casa, para que o aluno revise as ideias trabalhadas em aula.

Avaliação 2

- i) Calcule as multiplicações:**
- a) $(-20) \cdot (-2)$**
 - b) $(0) \cdot (+1)$**
 - c) $(-2) \cdot (-3)$**
 - d) $(+6) \cdot (-1)$**
 - e) $(+4) \cdot (+8)$**
 - f) $(+2) \cdot (-3)$**
 - g) $(-10) \cdot (+1)$**
 - h) $(-2) \cdot (-1)$**
- ii) Yago estava com saldo de – R\$ 30,00 no banco. Sua situação financeira piorou e sua dívida triplicou no banco. Com base nessas informações, qual é o novo saldo de Yago?**
- iii) Ana Laura fez um teste com 10 questões. A cada questão respondida corretamente, ela ganhava 3 pontos e a cada questão respondida erroneamente, ela perdia 2 pontos. Sabendo que ela acertou 7 questões e errou 3 questões, calcule a pontuação de Ana Laura no teste.**
- iv) Um instrutor de mergulho pediu aos seus alunos que, ao mergulhar, fizessem pausas a cada 5m de profundidade. Sabendo que esses alunos fizeram 5 pausas, qual foi a altitude alcançada por eles?**

Ao finalizar as tarefas, é importante o professor pegar as tarefas de casa e corrigir com os alunos, pois revisitar os assuntos já trabalhados é importante para a fixação do tema e das ideias trabalhadas em sala. Depois desta aula, o professor pode desenvolver, ou aprofundar as habilidades trabalhadas. Usar situações problema, resolver divisões ou potenciações usando números inteiros.

Ampliar os problemas propostos, também ajuda na fixação das habilidades trabalhadas nesta sequência. Porém, cabe ao professor verificar se a turma compreendeu de forma satisfatória as habilidades para números inteiros, para que, ao dar sequência nos assuntos seguintes, ele seja capaz de usá-los com propriedade.

3. Considerações Finais

A sequência didática desenvolvida teve como principal objetivo facilitar a compreensão dos números inteiros por meio de recursos tecnológicos que dialogam com o universo dos estudantes. Com atividades planejadas de forma progressiva e contextualizada, buscou-se promover uma aprendizagem significativa, onde os alunos pudessem explorar, manipular e refletir sobre os conceitos matemáticos de forma ativa e colaborativa.

O uso de ferramentas digitais ampliou as possibilidades de ensino e aprendizagem, permitindo uma abordagem mais visual e dinâmica dos conteúdos. Isso contribuiu para tornar os números inteiros mais concretos e acessíveis, especialmente para alunos que enfrentam dificuldades com abstrações matemáticas.

O foco deste trabalho foi em recursos computacionais para ensinar números inteiros. Porém, há outro trabalho, que foi desenvolvido em conjunto que foca na aplicação de jogos e que pode ser consultado para enriquecer a gama de atividades para ensinar números inteiro. Consulte a dissertação de mestrado de Higor... com o título, nele vai encontrar várias atividades, usando jogos, que podem ser aplicados para ensinar números inteiros.

Conclui-se que a sequência didática apresentada, ao integrar tecnologias educacionais ao ensino da matemática, representa uma proposta potente para fortalecer o protagonismo do aluno, diversificar as práticas pedagógicas e atender às competências previstas na BNCC. Espera-se que este material possa ser utilizado, adaptado e ampliado por outros educadores, colaborando para uma educação matemática mais inclusiva, crítica e conectada.

4. Referências

RIBEIRO FILHO, EMILDO MOTHE. **Conteúdos Digitais para o Ensino de Números Inteiros Relativos na Educação Básica**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT), Niteroi/RJ, Universidade Federal Fluminense, 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1998.

GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. **Boletim do GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 57, jul/dez. p. 65-102, 2010.

Wieman, Carl. **Simulações Interativas PhET**. *PhET*, 2021, <phet.colorado.edu/pt_BR>. Acessado em 05/08/2025. 2025.

HOHENWÄRTER, MARKUS. **GeoGebra, 2025**, <www.geogebra.org>. Acessado em 05/08/2025. 2025.

APENDICE A. Sinopse das ferramentas digitais utilizadas.

Durante o desenvolvimento das atividades que compõem o produto educacional, destacamos algumas ferramentas digitais. Abaixo, consulte sobre como utilizar essas ferramentas.

Phet Colorado

Figura 20: Logo do site PhET ao abrir um simulador



Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/

A *Plataforma PhET* é uma iniciativa da Universidade de Colorado que explora o conceito de simulações para ciências e matemática, permitindo trabalhar, a partir de recursos digitais, conceitos para os quais a experimentação possa contribuir para a aprendizagem. Ao entrar no site (https://phet.colorado.edu/pt_BR/), nos deparamos com inúmeras ferramentas. Fizemos um filtro nas simulações, destacamos três delas para trabalhar com números inteiros:

- Reta Numérica: Distância, disponível em:
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance
- Reta Numérica: Inteiros, disponível em:
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers
- Reta Numérica: Operações, disponível em:
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations

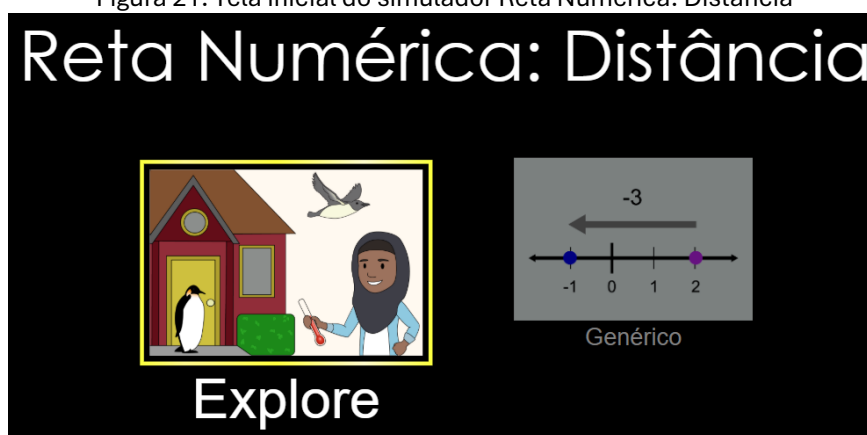
Vamos nos limitar a descrever os simuladores encontrados. Segue, a descrição de cada um dos simuladores relacionados acima.

1. Simulador Reta Numérica: Distância



A *Reta numérica: Distância* é um simulador de atividades dinâmicas que busca associar a subtração de inteiros situações cotidianas. Em sua tela inicial, temos que escolher qual das opções podemos usar, devemos escolher entre *Explore* e *Genérico*, veja as opções na figura 21.

Figura 21: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Distância

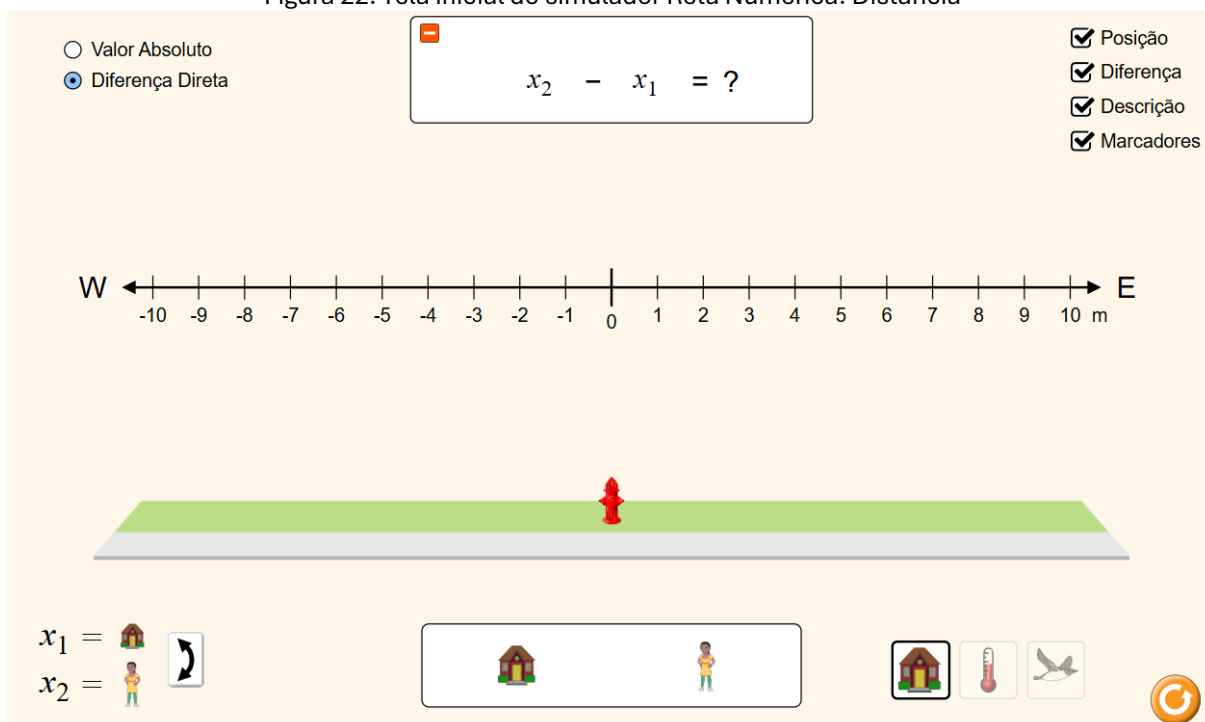


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

A opção *Explore*, temos um simulador capaz de associar situações práticas como: distância de objetos a um certo referencial, diferença entre temperaturas e altura de animais comparados a um referencial. Essas simulações, com o auxílio do professor, agregam contextos para a compreensão da subtração de números inteiros. Já a opção “Genérico” é a representação dos valores na reta numérica puramente abstrato, segue os mesmos padrões de construção, mas não associa a objetos nem a situações práticas. Nesta sessão vamos nos ater a descrever a opção *Explore*.

Na imagem a seguir (figura 22), podemos ver um exemplo de uso ao comparar a distância de uma casa e de uma pessoa a um hidrante como referencial. O usuário tem a liberdade de colocar a casa e a pessoa onde quiser e a ferramenta já calcula a distância entre eles. Associando sua posição a um ponto da reta numérica, sendo o zero, a posição do hidrante.

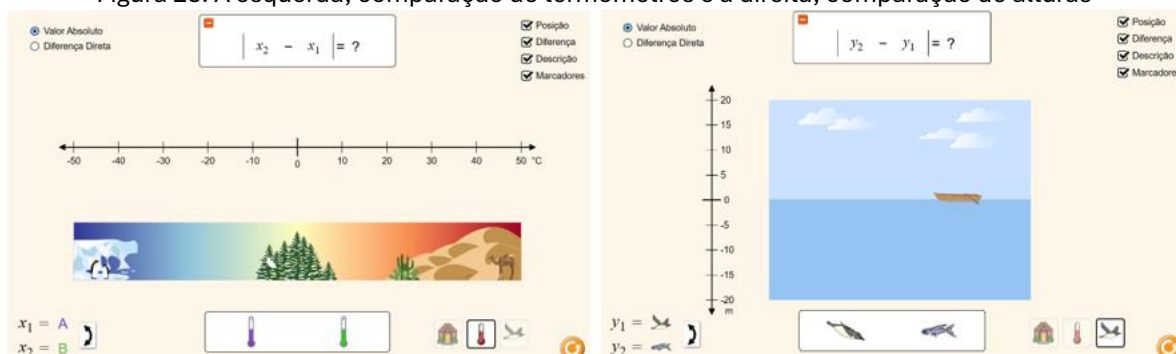
Figura 22: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Distância



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

Ainda na imagem, na parte superior esquerda, temos a opção de alternar entre *Diferença Direta* ou *Valor Absoluto*. E no canto superior direito, podemos marcar as opções: *Posição*, *Diferença*, *Descrição* e *Marcadores*; capazes de exibir ou suprimir essas características da imagem. Já na parte inferior a esquerda, há a possibilidade de alternância do personagem e da casa como as incógnitas x_1 e x_2 na parte esquerda. No inferior, no meio, temos um retângulo contendo a casa e o personagem que dever ser arrastados e colocados em qualquer posição da rua. Já na parte inferior à direita, temos três quadrados: uma casa, um termômetro e um pássaro; onde há a alternância dos outros tipos de exemplos deste simulador, que podem ser vistos na figura 23.

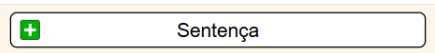
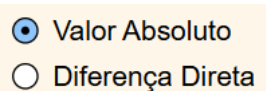
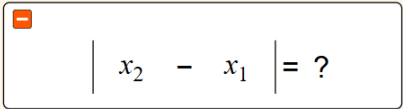
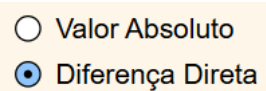
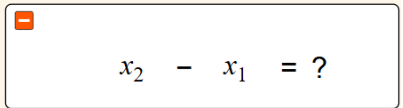
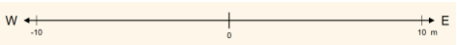

Figura 23: A esquerda, comparação de termômetros e à direita, comparação de alturas












Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=pt_BR

A formatação apresentada se repete nos três exemplos de simulação, vamos descrever somente a do primeiro exemplo.

Quadro 1: Descrição das ferramentas do simulador *Reta Numérica: Distância*.

Ferramenta	Imagem	Descrição
<i>Sentença</i>		Tela de exibição das opções <i>Valor Absoluto</i> ou <i>Diferença Direta</i> . Pode ser exibida ou suprimida usando o botão de “+” na cor verde.
<i>Valor Absoluto</i>		Mostra o valor absoluto de uma operação definida na posição da casa e da personagem. 
<i>Diferença Direta</i>		Mostra a operação diferença da posição da casa e da personagem. A distância entre a casa e a personagem é um vetor. 
<i>Reta Numérica</i>		Reta numérica apresentada na tela inicial do simulador, interage com a posição da casa e da personagem quando colocadas em alguma posição.
<i>Rua com Hidrante</i>		Espaço para colocar a casa e a personagem durante a simulação.

<i>Posição</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Posição <input type="checkbox"/> Diferença <input type="checkbox"/> Descrição <input type="checkbox"/> Marcadores	Exibe a posição da casa e da personagem na reta numérica.
<i>Diferença</i>	<input type="checkbox"/> Posição <input checked="" type="checkbox"/> Diferença <input type="checkbox"/> Descrição <input type="checkbox"/> Marcadores	Exibe o resultado da distância entre a casa e a personagem na reta numérica.
<i>Descrição</i>	<input type="checkbox"/> Posição <input type="checkbox"/> Diferença <input checked="" type="checkbox"/> Descrição <input type="checkbox"/> Marcadores	Exibe uma frase que descreve a distância entre a casa e a personagem. Por exemplo: “A pessoa e a casa estão a quatro metros de distância” ou “A pessoa está a quatro metros a leste da casa”
<i>Marcadores</i>	<input type="checkbox"/> Posição <input type="checkbox"/> Diferença <input type="checkbox"/> Descrição <input checked="" type="checkbox"/> Marcadores	Exibi as marcações da posição de cada número na reta numérica.
<i>Alterar a referência das incógnitas</i>	$x_1 =$   $x_2 =$  	Altera a referência das incógnitas x_1 e x_2 com a casa e a personagem.
<i>Quadro de posição de espera.</i>	 	Neste espaço encontramos a casa e a personagem que podem ser deslocadas para a rua.
<i>Botões</i>	  	Botões de alternância entre os outros exemplos da simulação.

O simulador apresentado pode ser usado como construtor de conceito de subtração de inteiros. Sua formatação dinâmica facilita a visualização dos números inteiros e os associa a situações aplicáveis. Uma observação sobre a representação da reta, que deve ser passada aos alunos, é a representação equivocada da reta com orientação nos dois sentidos. E a reta numérica, sua orientação é somente para o sentido para o qual os números estão crescendo, ou seja, para a direita. Tirando esse detalhe, este simulador é útil para ser aplicado para o ensino de subtração de inteiros.

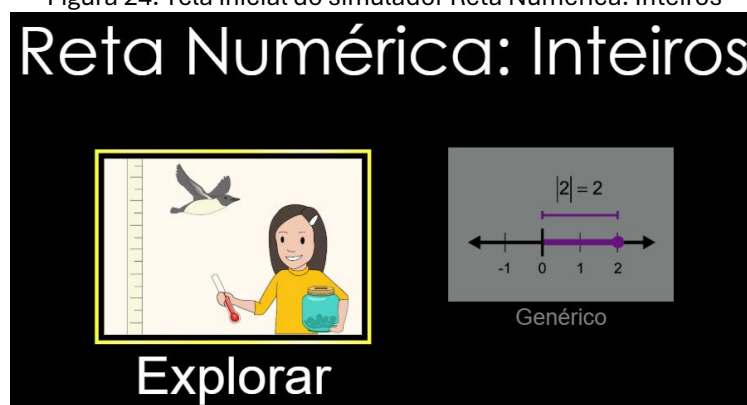
2. Simulador Reta Numérica: Inteiros

A *Reta numérica: Inteiros*, em sua tela inicial, temos que escolher qual das opções podemos usar, veja imagem a seguir (figura 24).

Assim como na sessão anterior, vamos nos ater a descrever a opção *Explorar*. Nesta opção temos um simulador capaz de associar situações práticas como: distância de objetos a um certo referencial, variação de temperatura ao redor do planeta e saldo guardado em um “cofrinho”. Essas simulações, com o auxílio do professor, agregam contextos para a compreensão da posição dos números inteiros na reta numérica.



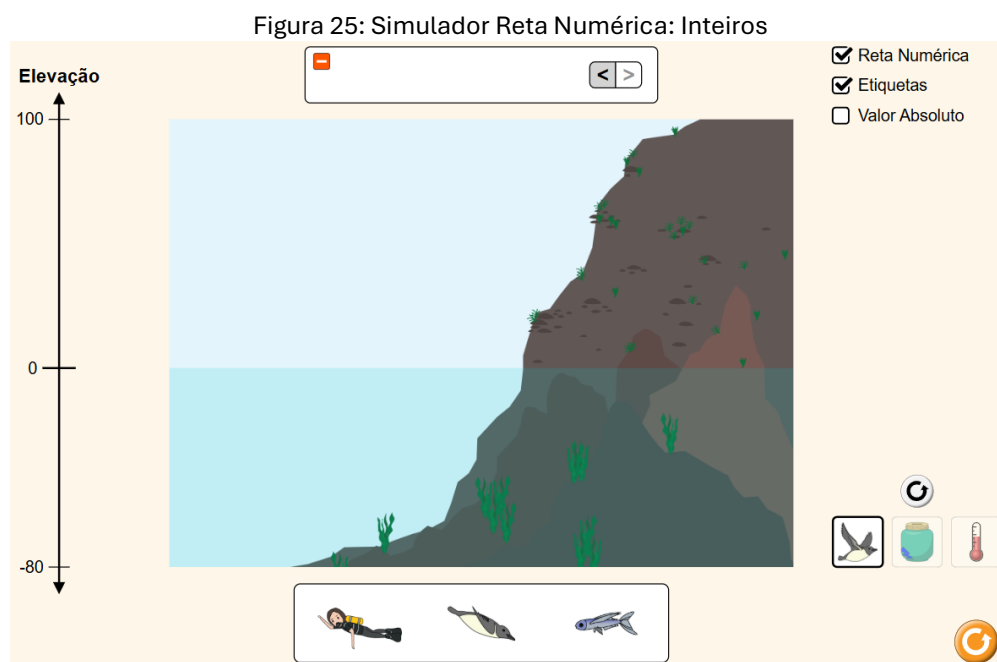
Figura 24: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros



Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers

Na imagem a seguir (figura 25), podemos ver um exemplo a imagem região costeira rochosa, fazendo uma divisão de dois ambientes, uma parte dentro e outra fora da água. O usuário tem a liberdade de escolher um dos personagens apresentados na parte inferior central da imagem, para o mergulhador, o pássaro e o peixe onde quiser e a ferramenta calcula a distância entre eles e ponto de referência,

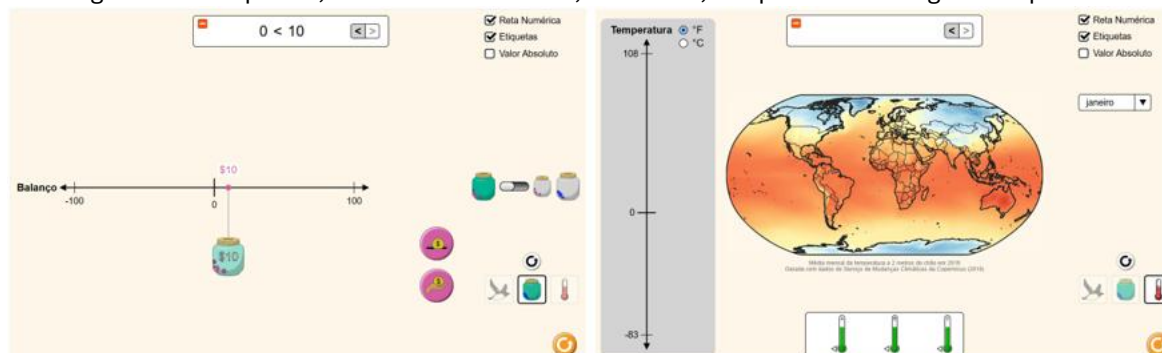
que é onde ocorre a mudança de ambiente. Associando sua posição a um ponto da reta numérica, sendo o zero, o nível da água.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

Ainda na imagem, na parte superior central, podemos exibir a comparação da posição de cada personagem colocado no ambiente. E no canto superior direito, podemos marcar as opções: *Reta Numérica*, *Etiqueta* e *Valor Absoluto*; capazes de exibir ou suprimir essas características da imagem. Já na parte inferior à direita, temos três quadrados: um pássaro, um cofre e um termômetro; onde há a alternância dos outros exemplos da simulação, citado na imagem a seguir (figura 26).

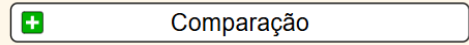


Figura 26: A esquerda, valor em um cofrinho; e à direita, temperatura em regiões do planeta

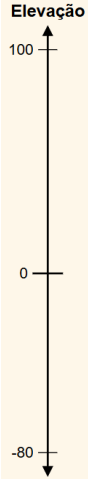
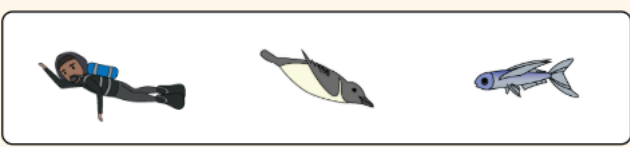
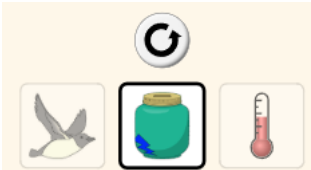
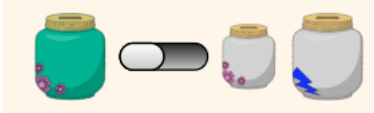
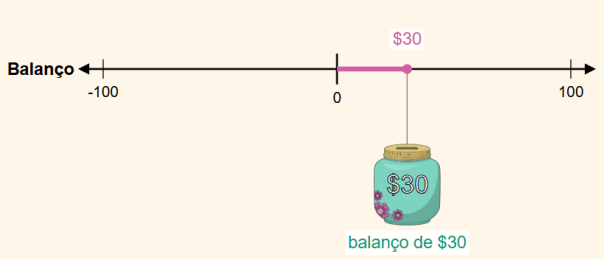


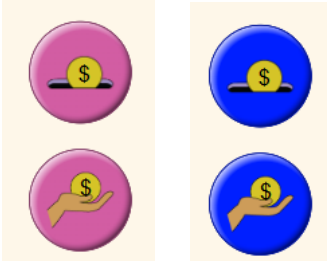

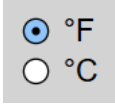
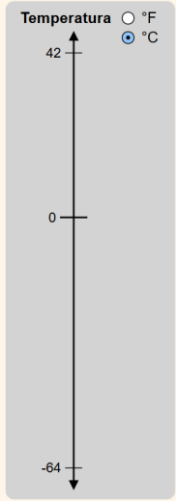
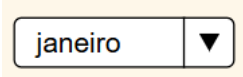
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html?locale=pt_BR

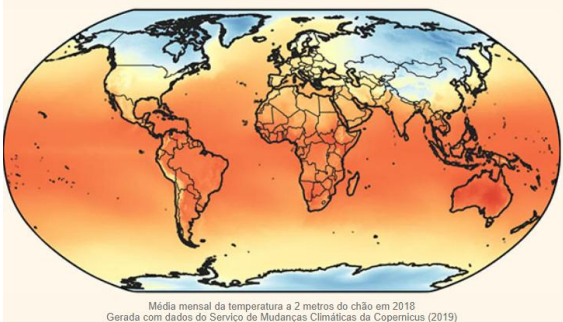
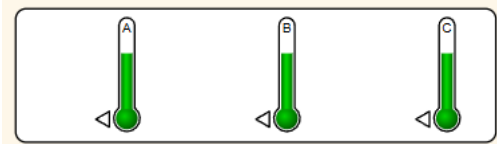

Vamos descrever as ferramentas em cada uma das três simulações disponíveis:

Quadro 2: Descrição das ferramentas do simulador *Reta Numérica: Inteiros*.

Ferramenta	Imagem	Descrição
<i>Reta Numérica</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Reta Numérica <input type="checkbox"/> Etiquetas <input type="checkbox"/> Valor Absoluto	Exibe ou suprime a reta numérica da simulação
<i>Etiquetas</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Reta Numérica <input checked="" type="checkbox"/> Etiquetas <input type="checkbox"/> Valor Absoluto	Junto da opção <i>Reta Numérica</i> , exibe a posição na reta de cada personagem, associando a valores positivos ou negativos.
<i>Valor Absoluto</i>	<input type="checkbox"/> Reta Numérica <input type="checkbox"/> Etiquetas <input checked="" type="checkbox"/> Valor Absoluto	Exibe na posição que se encontra o personagem comparado ao referencial.
<i>Comparação</i>		Exibe a comparação da posição dos personagens usados durante a simulação.
<i>Opção Pássaro</i>		Deixe selecionado a opção pássaro para exibir o primeiro exemplo.
<i>Tela de Ambientação</i>		Tela para ambientação dos personagens, podendo colocá-los em qualquer posição.

<p><i>Reta Numérica</i></p>		<p>Reta numérica que exibi a elevação dos personagens usados na simulação.</p>
<p><i>Quadro de posição de espera.</i></p>		<p>Neste espaço encontramos os personagens que podemos deslocar para a <i>Tela de Ambientação</i>.</p>
<p><i>Opção Cofre</i></p>		<p>Deixe selecionado a opção cofre para exibir o segundo exemplo.</p>
<p><i>Opção de Exibição de Cofres</i></p>		<p>Tela para alternar o botão entre a exibição de um ou dois cofres.</p>
<p><i>Reta Numérica</i></p>		<p>Reta numérica que exibi a quantidade contida no cofre e associa a um ponto na reta numérica.</p>

<p><i>Botões</i></p>		<p>Botões de inclusão ou retirada de dinheiro no cofre.</p>
<p><i>Opção Temperatura</i></p>		<p>Deixe selecionado a opção temperatura para exibir o terceiro exemplo.</p>
<p><i>Unidade de Medida de Temperatura</i></p>		<p>Botão para alternar entre as unidades de medida de temperatura graus Fahrenheit (°F) ou graus Celsius (°C).</p>
<p><i>Reta Numérica</i></p>		<p>Reta numérica que exibi a temperatura em graus Fahrenheit (°F) ou graus Celsius (°C).</p>
<p><i>Janela de meses do ano</i></p>		<p>Janela para seleção de meses do ano, clicar na seta e selecione o mês desejado.</p>

<p><i>Planificação do globo terrestre</i></p>		<p>Planificação do globo terrestre que exhibe a temperatura média de cada região do planeta de acordo com o mês selecionado. Temperaturas mais frias com tonalidade azul e temperaturas mais quentes com tonalidade alaranjada.</p>
<p><i>Termômetros</i></p>		<p>Termômetros que podem ser usados para determinar a temperatura, basta arrasta-lo para a região do globo terrestre desejado.</p>
<p><i>Reiniciar</i></p>		<p>Botão de reiniciar a simulação.</p>

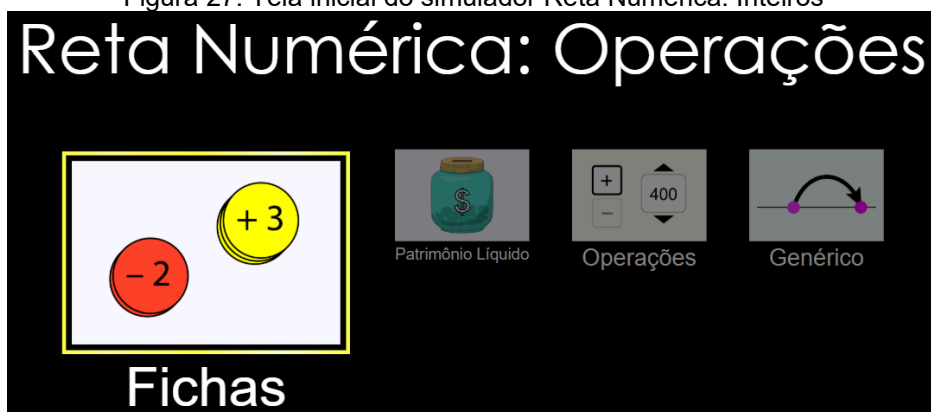
Este simulador é uma ferramenta útil para o contexto introdutório da ideia de números inteiros. Sua aplicação ajuda na compreensão da posição dos números na reta numérica. Há a mesma limitação do simulador anterior quanto a representação da da seta da reta numérica que deve ser aplicada somente para a direção do crescimento dos números. Tirando esse detalhe, este simulador é útil para ser aplicado para o ensino de ordenação de números inteiros.

3. Simulador Reta Numérica: Operações



A Reta numérica: Operações, em sua tela inicial, temos que escolher entre: Fichas, Patrimônio Líquido, Operações e Genérico. Veja na imagem a seguir (figura 27) a opção Fichas selecionado.

Figura 27: Tela inicial do simulador Reta Numérica: Inteiros

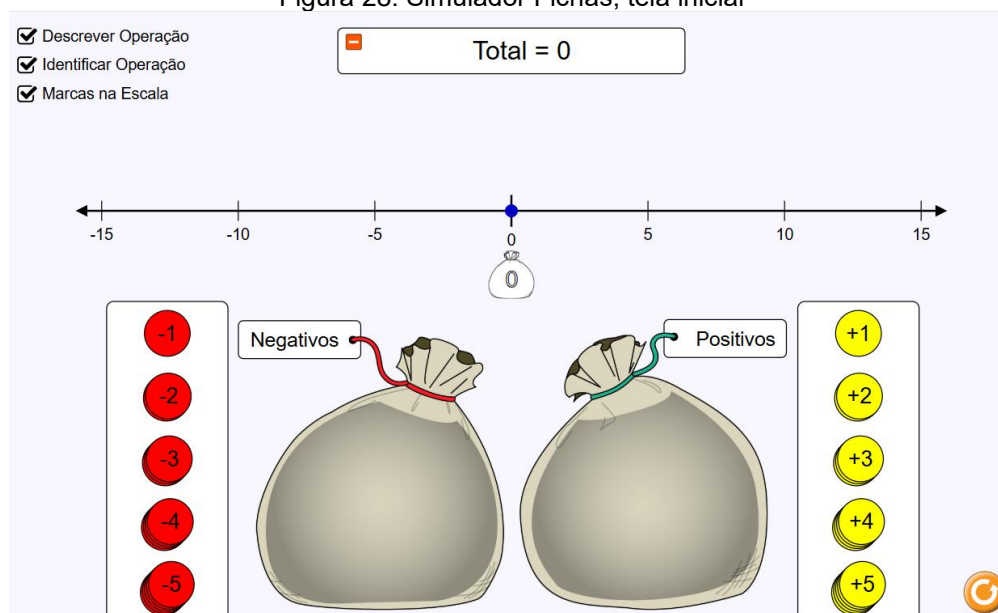


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Vamos descrever o seu uso para as três primeiras ferramentas: Fichas, Patrimônio Líquido e Operações.

A simulação Fichas, é baseada na inserção de fichas vermelhas (números negativos) e amarelas (números positivos). A cada ficha inserida no seu respectivo saco, o valor entra no saldo. E conseqüentemente altera a posição inicial do zero, andando para a direita, para valores positivos (amarelos) e para a esquerda, para valores negativos (vermelhos). Veja na figura 28, a tela inicial do simulador. Nela identificamos O total na parte superior, logo abaixo a reta numérica com um ponto azul, representando o saldo naquele momento. E logo abaixo, temos dois blocos de fichas e seus respectivos sacos.

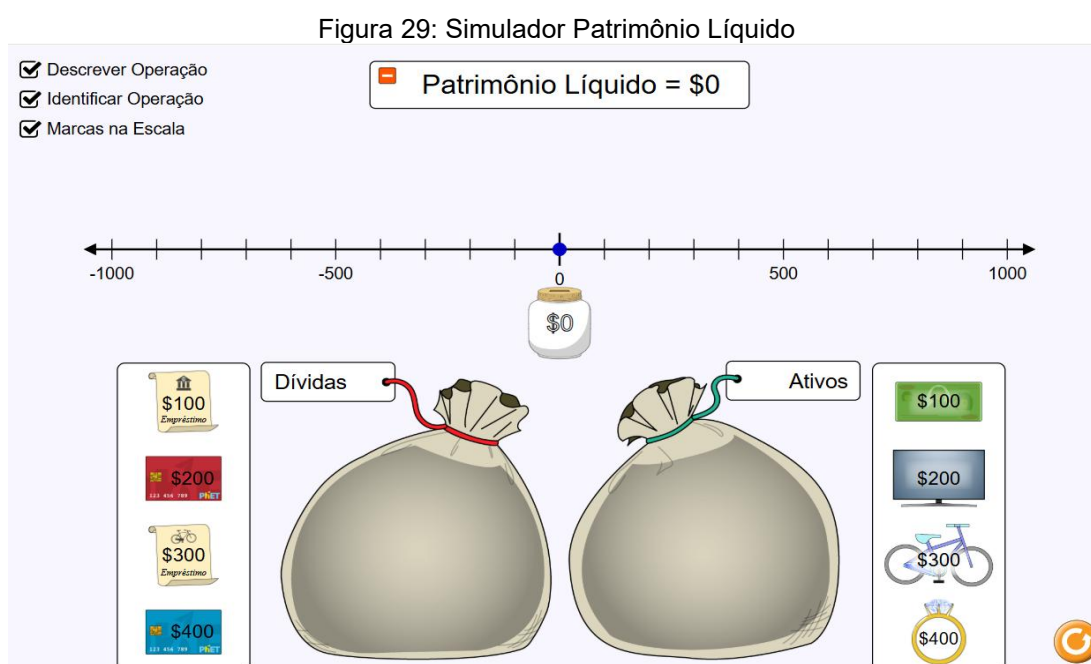
Figura 28: Simulador Fichas, tela inicial



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Já o simulador Patrimônio Líquido, apresenta uma atividade semelhante ao das Fichas, porém, no lugar das fichas, temos cheques e cartões de crédito para representar as dívidas e produtos e dinheiro para representar os ativos. E a atividade consiste em incluir ou retirar as dívidas ou os ativos e associar essas quantidades a somar ou subtrair valores positivos ou negativos.

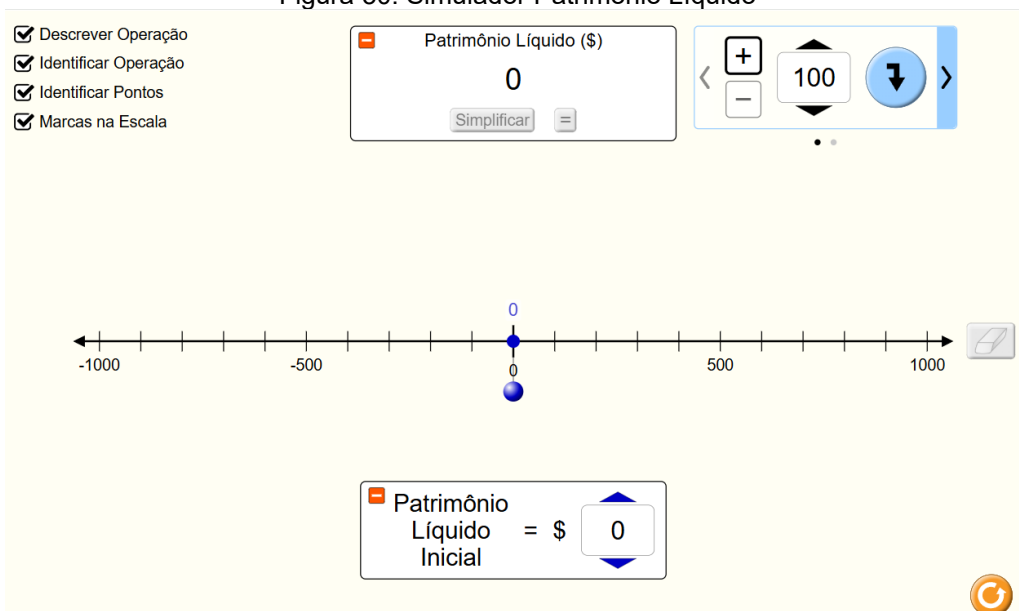
Veja na imagem a seguir (Figura 29) o esquema apresentado no simulador, nele podemos ver que a ideia de retirar uma dívida é associado a subtrair um valor negativo são importes para entender que retirar uma quantidade negativa é o mesmo que somar o módulo do valor. Essa associação fica mais lúdica e interpretativa, sem necessariamente associá-la ao modelo bancário, mesmo usando exemplos desse sistema.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Por último temos o simulador Patrimônio Líquido, nele encontramos uma reta numérica, inicialmente marcada no zero. Esse valor se altera quando modificamos o patrimônio líquido inicial. Depois de defini-lo, podemos acrescentar ou retirar desse patrimônio, com a ferramenta a direita na parte superior na imagem abaixo (figura 30). Ao Adicionar o retirar do patrimônio inicial, a operação é exibida na reta.

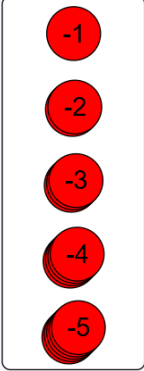
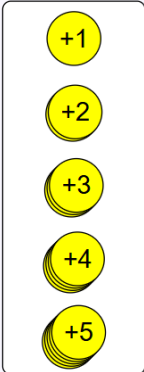
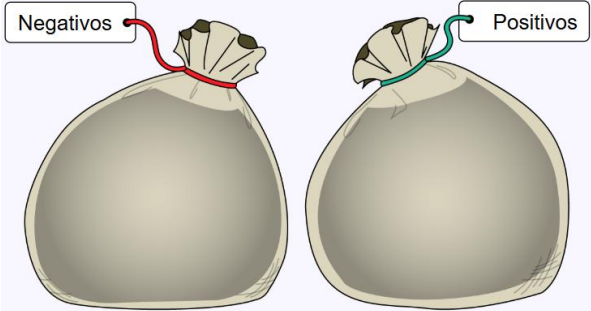

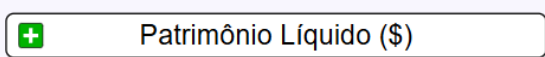
Figura 30: Simulador Patrimônio Líquido

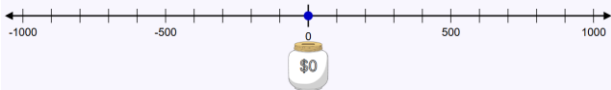


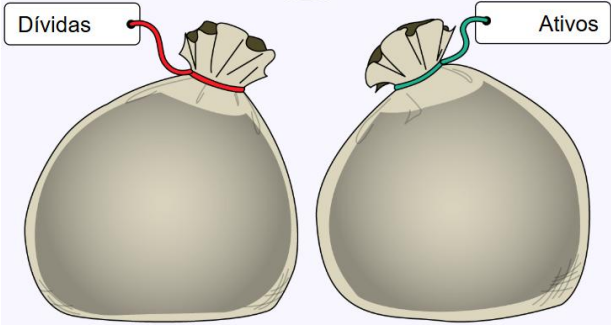



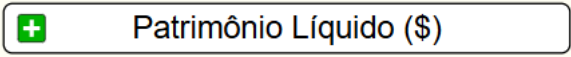

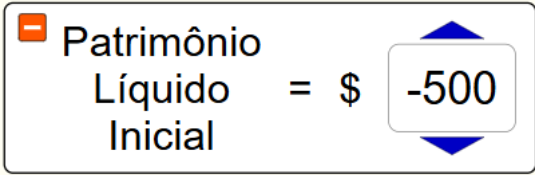

Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=pt_BR

Quadro 3: Descrição das ferramentas do simulador Reta Numérica: Operações.

Ferramenta	Imagem	Descrição
<i>Descrever Operação</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Descrever Operação <input type="checkbox"/> Identificar Operação <input type="checkbox"/> Marcas na Escala	Descreve a operação feita: “Incluir um valor” ou “Excluir um valor”.
<i>Identificar Operação</i>	<input type="checkbox"/> Descrever Operação <input checked="" type="checkbox"/> Identificar Operação <input type="checkbox"/> Marcas na Escala	Exibe a operação executada: Somar ou subtrair determinado valor inteiro, utilizando os sinais de “+” ou “-”.
<i>Marcas na Escala</i>	<input type="checkbox"/> Descrever Operação <input type="checkbox"/> Identificar Operação <input checked="" type="checkbox"/> Marcas na Escala	Marca pontos de referência na reta numérica.
Seleção Fichas		Base para seleção das simulações, selecionando Fichas
<i>Total</i>		Exibe o resultado da operação executada com as fichas.
<i>Reta Numérica</i>		Representação da reta numérica e exibição do resultado da operação

<p><i>Caixa de Moedas Vermelhas</i></p>		<p>Fichas vermelhas com números negativos que podem ser incluídos na bolsa “Negativos”.</p>
<p><i>Caixa de Moedas Amarelas</i></p>		<p>Fichas amarelas com números positivos que podem ser incluídos na bolsa “Positivos”.</p>
<p><i>Bolsas para incluir valores positivos e negativos.</i></p>		<p>Bolsa Negativos e bolsa Positivos, onde devemos colocar as Fichas Amarelas na bolsa Positivos e a as fichas Vermelhas na bolsa Negativos.</p>
<p><i>Patrimônio Líquido</i></p>		<p>Base para seleção das simulações, selecionando Patrimônio Líquido</p>
<p><i>Patrimônio Líquido</i></p>		<p>Aba Patrimônio Líquido, apresenta o valor líquido das operações efetuadas.</p>

<p><i>Reta Numérica</i></p>		<p>Reta numérica que apresenta o resultado do acumulado no patrimônio líquido.</p>
<p><i>Dívidas</i></p>		<p>Valores das dívidas: Empréstimos (\$100 e \$300) e Cartão de Crédito (\$200 e \$400).</p>
<p><i>Ativos</i></p>		<p>Valores dos ativos: Dinheiro (\$100), Televisão (\$200), Bicicleta (\$300) e Anel (\$400).</p>
<p><i>Bolsas para incluir dívidas e ativos.</i></p>		<p>Bolsa dívidas e bolsa ativos, onde devemos colocar os empréstimos e cartões nas dívidas; dinheiro, televisão, bicicleta e anel nos ativos.</p>
<p><i>Operações</i></p>		<p>Base para seleção das simulações, selecionando Operações</p>

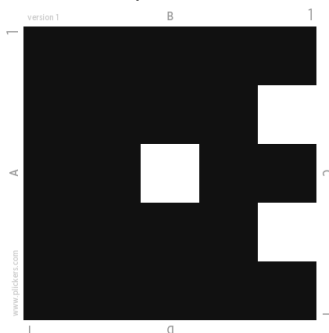
<p><i>Identificar Pontos</i></p>	<p> <input type="checkbox"/> Descrever Operação <input type="checkbox"/> Identificar Operação <input checked="" type="checkbox"/> Identificar Pontos <input type="checkbox"/> Marcas na Escala </p>	<p>Identifica os pontos usados na operação, valores inicial e resultado da operação.</p>
<p><i>Patrimônio Líquido</i></p>	<p></p>	
<p><i>Aba valor a ser adicionado ou subtraído</i></p>	<p></p>	<p>Se pressionar “+”, irá somar e se pressionar “-” irá subtrair o valor selecionado pelas setas: para cima, aumenta o valor e seta para baixo, diminui o valor a ser usado.</p>
<p><i>Patrimônio Líquido Inicial</i></p>	<p></p>	<p>Valor do patrimônio líquido inicial. Valor inicial é determinado pelas setas, aumenta para seta para cima e diminui com a seta para baixo.</p>
<p><i>Reta Numérica</i></p>	<p></p>	<p>Reta numérica para exibição da operação de adição ou subtração. Exibição da operação $-500 - (-400)$. O apagador retorna a posição inicial.</p>

<p><i>Patrimônio Líquido</i></p>	<div data-bbox="497 264 1067 465"> </div> <div data-bbox="497 510 1067 712"> </div> <div data-bbox="497 745 1067 947"> </div>	<p>Exibe o Patrimônio Líquido com sua operação dos valores apresentados. Se clicar em “Simplificar” reduz as representações das operações em operações simples como no exemplo da segunda imagem “- -” passa a ser “+”. E se clicar em “=” apresenta o resultado da operação como na terceira imagem.</p>
<p><i>Reiniciar</i></p>		<p>Botão de reiniciar a simulação.</p>

Plickers

O Plickers é uma ferramenta online para educação que permite avaliar os alunos de forma rápida e dinâmica, sem a necessidade de dispositivos eletrônicos individuais. Os alunos utilizam cartões físicos com códigos QR (Figura 31) que são escaneados pelo professor usando um smartphone ou tablet. A plataforma permite coletar e analisar as respostas dos alunos em tempo real, fornecendo feedback imediato de suas respostas.

Figura 31: Exemplo de cartão Plickers



Cada aluno recebe um cartão (figura 31), cada cartão tem um único QR e apresenta quatro alternativas, sendo a alternativa que fica para cima a resposta do aluno, na figura 32, temos as quatro opções de resposta de um único aluno.

Figura 32: Exemplos de posições de um aluno para responder as alternativas A, B, C e D, respectivamente.



Fonte: <https://help.plickers.com/hc/en-us/articles/1260804062589-Step-4-Get-Plickers-Cards>

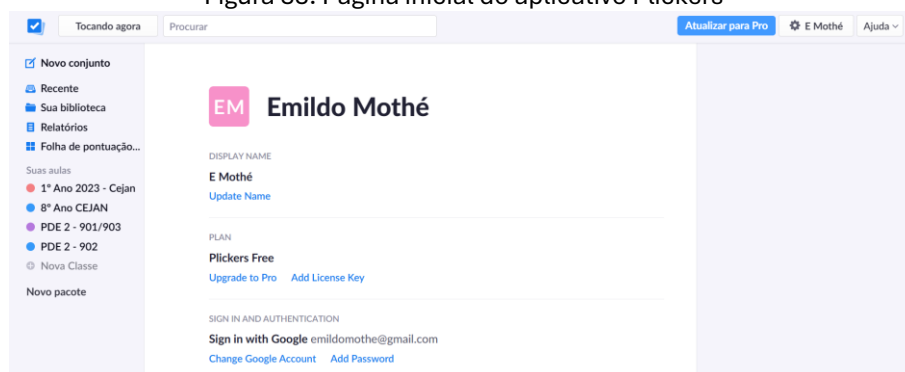
Dentro do site do aplicativo, o professor previamente deve fazer seu cadastro e efetuar o cadastramento da turma, associando um cartão de resposta para um único aluno. A turma depois de cadastrada pode ser usada para fazer inúmeras atividades usando os mesmos cartões. Inclusive, podendo aproveitá-los para usar em outras turmas.

Com a turma cadastrada, os cartões distribuídos, o professor vai precisar de uma tela para exibição da pergunta e um celular, ou tablet com câmera para escanear as respostas dos alunos usando o aplicativo plickers disponível para Android e IOS que deve ser instalado no celular previamente e fazer login na mesma conta

Cadastras as questões previamente, cada bloco tem no máximo 5 questões na versão grátis do aplicativo, por isso nesta atividade sempre vamos fazer blocos com 5 questões.

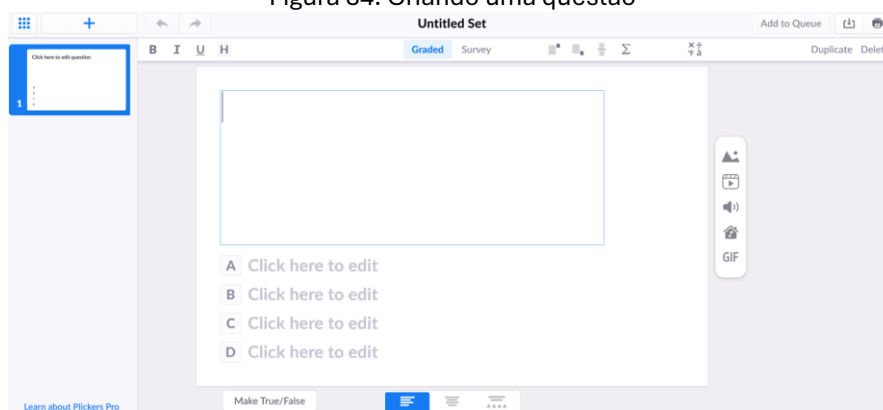
Para cadastrar uma questão o professor deve acessar sua conta, como na imagem a seguir (Figura 76) e iniciar um novo conjunto. Iniciando novo conjunto, abre uma nova aba onde é possível escrever um bloco de cinco questões, podendo colocar o título do bloco em “Untitled Set” escrever o corpo da questão em “Click here to edit question” e as alternativas em “Click here to edit”, como pode ser visto na figura 33.

Figura 33: Página inicial do aplicativo Plickers



Fonte: <https://www.plickers.com/account>

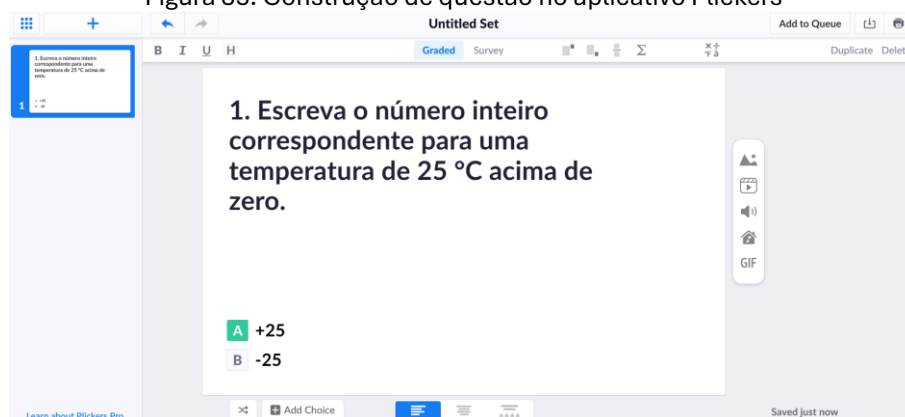
Figura 34: Criando uma questão



Fonte: <https://www.plickers.com/seteditor/newSet>

Ao montar a questão, devemos escolher qual é a alternativa correta, pois nela, vamos verificar o percentual de acerto da turma na aplicação da atividade. Na figura 38, temos um exemplo de construção de uma questão com a alternativa “A” marcada como a alternativa certa da questão. Não se preocupe, porque na apresentação que aparecerá para o aluno não será exibido o gabarito, somente em momento oportuno, você pode liberar o gabarito para eles. Inclusive o aplicativo exibe quem está acertando e quem está errando no momento da leitura das respostas dos alunos.

Figura 35: Construção de questão no aplicativo Plickers



Fonte: <https://www.plickers.com/seteditor/68518e9e81cdd1aa3fbca050>

Os resultados são dinâmicos e fáceis de visualizar. Nas figuras 36 e 37, temos opções de visualização dos resultados, que aparecem no aplicativo por porcentagem por aluno ou por porcentagem por questão. Podendo facilmente avaliar e concluir sobre o aprendizado dos alunos de forma instantânea. Com esses dados também é possível identificar alunos que ainda apresentam dificuldade para interpretar questões para o assunto abordado.

Figura 36: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers

Aula 1: Avaliação 2: Bateria 1 ● 82%

● 701

Played Wednesday 18 June 11:38 AM

STUDENT OVERVIEW

A-Z HIGH-LOW

AGATHA	75%	LEANDRO	60%	NICOLAS	80%	RAYANE S	60%
ANNA	100%	LEONARDO	40%	PAMELA	Abs.	REBECCA	100%
CRISTIAN	50%	LUAN	100%	PEDRO E	100%	RENAN	80%
DAVID	100%	LUCAS	100%	PEDRO H	Abs.	SAMUEL	100%
ERIK	0%	MARIA	100%	PEDRO M	80%	SOFIA	Abs.
ICARO	60%	MIGUEL C	100%	PIETRO	100%	THIAGO	100%
KAYKY	40%	MIGUEL M	80%	RAYANE D	100%	VICTOR	100%

Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f07c4d88a9179590c3>

Figura 37: Resultados de uma bateria de exercícios usando o aplicativo Plickers

QUESTIONS

ALL ANSWERED



Fonte: <https://www.plickers.com/setreport/6851a3f07c4d88a9179590c3>

Geogebra

Figura 38: Logotipo do site do Geogebra



Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR

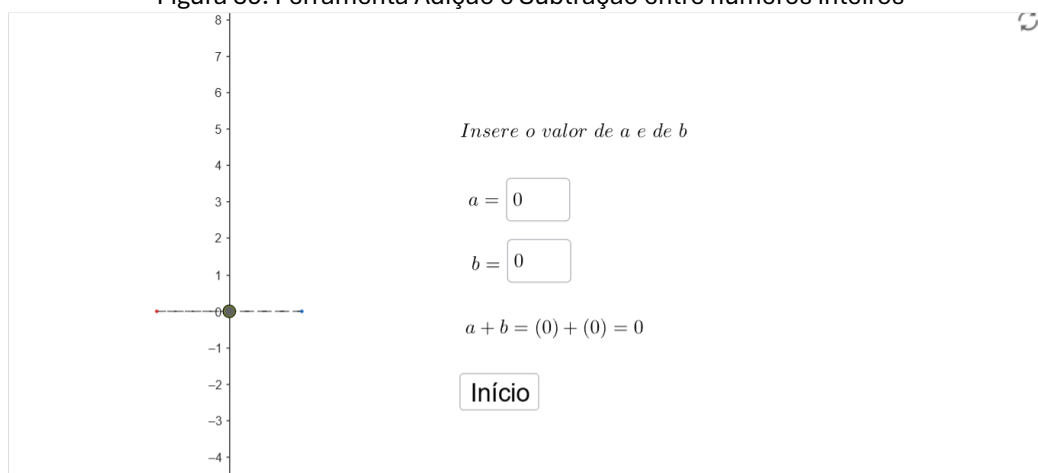
Geogebra é um site, que disponibiliza também um aplicativo que pode ser baixado tanto para Android quanto para IOS. É uma ferramenta de geometria dinâmica, sendo útil para inúmeras tarefas que abrange várias áreas da matemática. O acesso ao Geogebra está disponível em https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR. Ao entrar no site, podemos abrir o app diretamente usando uma de suas calculadoras gráficas, mas vamos em busca de atividades já desenvolvidas, buscando por “números inteiros”, encontramos as seguintes construções. Vamos destacar abaixo as mais relevantes para o ensino de números inteiros.

1. Adição e subtração entre números inteiros

Atividade desenvolvida por Anabela Brandão e Liliam Paes, disponível em <https://www.geogebra.org/m/a94jq6hk>. Com esta atividade, começamos a desenvolver as operações de adição e subtração de inteiros e a relacionar essas operações a valores na reta numérica. Na imagem a seguir (figura 39), podemos ver uma reta vertical e ao lado espaço para inserir os valores de a e b. Com a inserção dos valores em a e b, podemos ver o resultado da soma, além da sua representação na reta usando vetores.



Figura 39: Ferramenta Adição e Subtração entre números inteiros



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/a94jq6hk>.

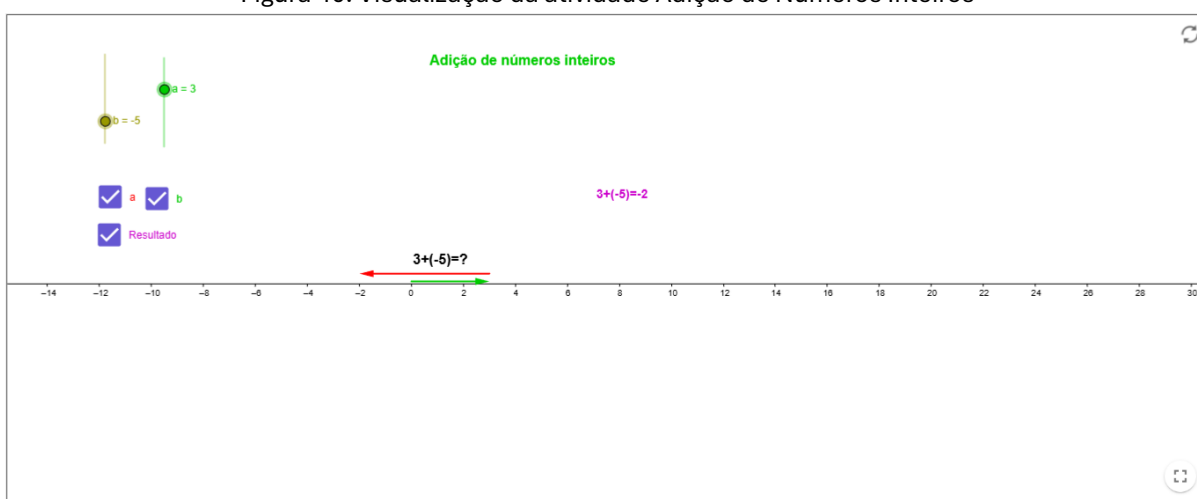
Esta atividade é importante para a noção de comportamento das operações de soma e subtração na reta numérica. E o fato de a reta estar na vertical amplia a visualização dos alunos. Em alguns casos, percebemos que se limitam a representação horizontal e apresentar a representação na vertical pode contribuir para um melhor entendimento desses processos operatórios na reta. Porém a associação das incógnitas a e b pode ser um dificultador de o aluno ainda não está familiarizado com o trato de incógnitas, podendo ser um limitador a aplicação desta atividade em sala de aula.

2. Adição de números inteiros

A atividade adição de números inteiros foi desenvolvida pela autora Mônica Salgado, disponível em <https://www.geogebra.org/m/sHy3JExT>. É uma ferramenta de visualização da adição de números inteiros, mostra através da representação de vetores lineares a reta o movimento dos números positivos, seguindo para a direita e os negativos seguindo para a esquerda para determinar o resultado da soma, como podemos ver no exemplo abaixo, na soma $3 + (-5)$, na figura 40.



Figura 40: Visualização da atividade Adição de Números Inteiros



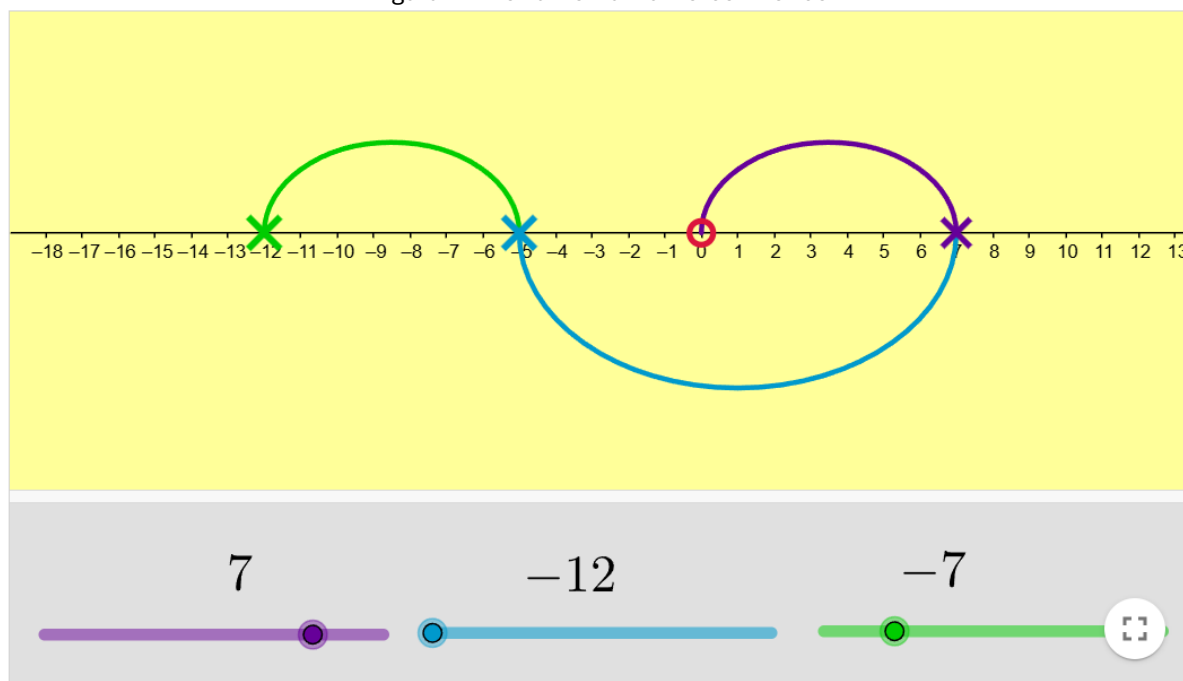
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/sHy3JExT>

3. Números Inteiros

A ferramenta Números Inteiros, desenvolvida por Yancel Orlando Soto, disponível em <https://www.geogebra.org/m/gawgsbuz>. É uma ferramenta de soma de três números inteiros. O valor de cada número é definido pelos botões deslizantes lilás, azul e verde. É possível visualizar o caminho percorrido pela soma. É dinâmico a visualização do resultado da soma fazendo um percurso dos valores referentes a soma e é possível definir o resultado pelo x verde. No exemplo abaixo temos a soma $7 + (-12) + (-7)$, iniciamos a visualização do zero, anda-se sete casas para a direita, chegando no 7, no x lilás, após andamos doze casas para a esquerda, x azul, e por fim andamos sete casas para a esquerda, chegando no resultado -12. Veja na imagem a seguir (figura 41) a representação desse exemplo.



Figura 41: Ferramenta Números Inteiros



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/gawgsbuz>

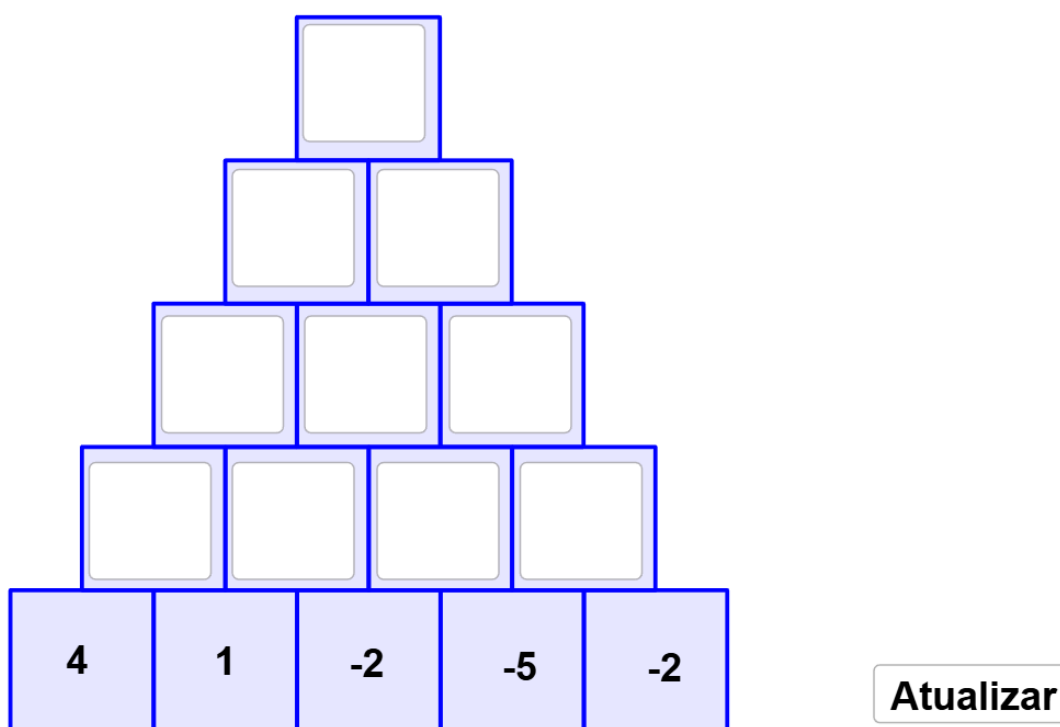
4. Adição de Número Inteiro

Ferramenta desenvolvida por Wesley de Jesus Costa, disponível em <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>. É uma ferramenta que é desenvolvida para exercitar a prática da soma de números inteiros, para isso, some dois números inteiros de



blocos consecutivos para descobrir o valor do bloco que está acima deles, repita o processo até descobrir o valor do último bloco. Se o valor da soma estiver correto, os valores ficarão verdes, caso contrário, vermelho, indicando que o valor está incorreto. O botão “Atualizar” permite reiniciar o jogo e modifica os valores iniciais. Veja na imagem a seguir (figura 42) um exemplo de início do jogo.

Figura 42: Ferramenta jogo Adição de Número Inteiro



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>.

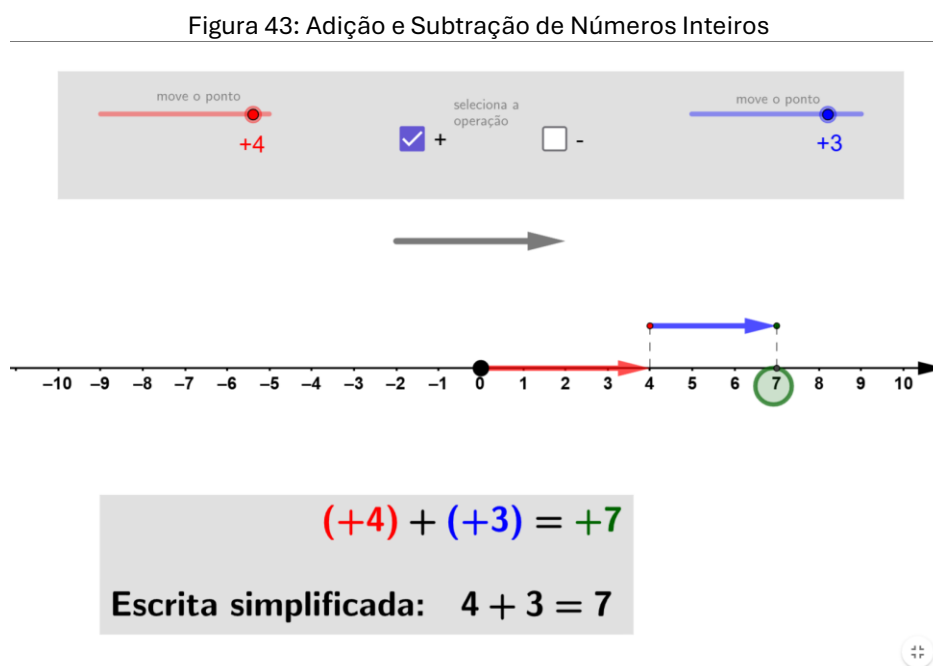
5. Adição e Subtração de Números Inteiros

Atividade desenvolvida por Luciana Brito, disponível em <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>. Essa atividade se destaca das anteriores, pois pode alternar entre soma e subtração de inteiros, além de usar vetores para representar as parcelas da soma ou subtração, facilitando a visualização do resultado, representado na animação por um círculo verde.



Além da representação geométrica na reta, a ferramenta apresenta sua representação algébrica da operação, além de apresentar a representação simplificada da mesma operação, facilitando a associação da regra dos sinais para a adição algébrica

de números negativos. Abaixo, na imagem a seguir (figura 43), temos o exemplo de $(+4) + (+3)$.



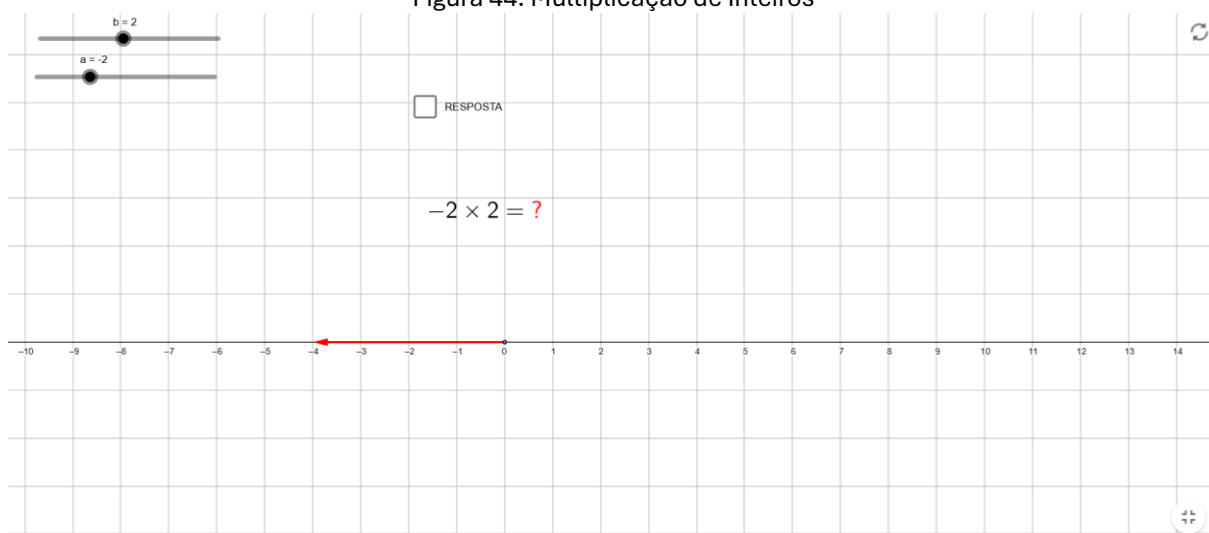
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>.

6. Multiplicação de Inteiros

A atividade Multiplicação de Inteiros foi desenvolvida por Fernanda de Almeida Arruda, disponível em <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>. É uma ferramenta visual para mostrar o resultado da multiplicação de números inteiros. Sendo possível apresentar a resposta, ou não. As parcelas do produto são representadas por números definidos por botões deslizantes apresentados na parte superior esquerda da imagem a seguir (figura 44). A seta vermelha representa o resultado do produto.



Figura 44: Multiplicação de Inteiros



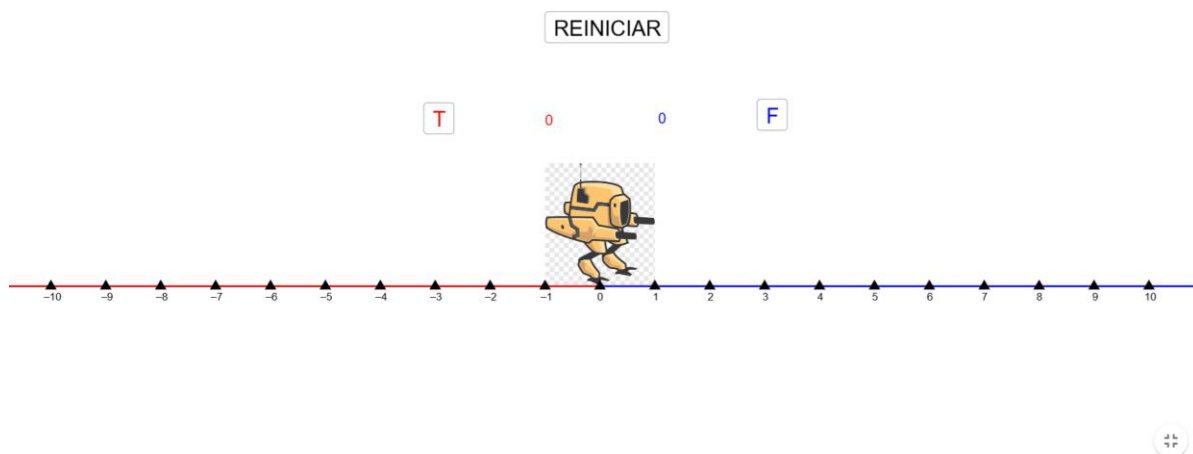
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px>.

7. Robô Linear (OBI)

Robô Linear é uma atividade desenvolvida por Thiago Vasconcellos Batalha, disponível em <https://www.geogebra.org/m/puww96re>. É uma atividade interativa onde podemos mover um robô para a direita usando o botão F e mover para a esquerda usando o botão T. Para cada F, ele se move uma casa para a direita e para cada T se move uma casa para a esquerda. Na imagem a seguir (figura 45), temos a tela inicial do jogo.



Figura 45: Tela inicial do Robô Linear



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/puww96re>

Em sua página, no site do Geogebra, apresenta uma breve descrição do jogo: RL2 é um robô que se move apenas em linha reta, sobre um trilho. Ele é utilizado dentro de

uma fábrica para realizar diversas tarefas, como distribuir peças e ferramentas para os trabalhadores. O RL2 é comandado utilizando uma linguagem de programação que tem apenas dois comandos:

- F: ao receber esse comando, o robô move-se 1 metro para a frente;
- T: ao receber esse comando, o robô move-se 1 metro para trás;

Após receber e executar um comando, o robô permanece parado até receber o próximo comando. Utilize o applet abaixo para te auxiliar a explorar as atividades

Perceba que descreve os movimentos principais do robô e suas características. Com essas informações, o aluno será capaz de realizar pequenos comandos usando o robô e assim associar suas movimentações as operações de adição de números inteiros.

Coquinhos

Encontramos vários sites durante a pesquisa, porém destacamos aqui somente um que foi utilizado um jogo no site Coquinhos, disponível no link: <https://www.coquinhos.com/>. O jogo proposto foi o disponível no link <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>, chamado de INTEGER WARP: Multiplicação de Números Inteiros Arcademics®.

1. Integer Warp: Multiplicação de Números Inteiros

O jogo consiste numa corrida de espaço naves, onde vence quem resolve as questões corretamente em menos tempos, para cada acerto sua nave acelera e para cada erro fica mais lenta. Na imagem a seguir (figura 46), temos a tela inicial do jogo. Para começar, aperte no botão Play.



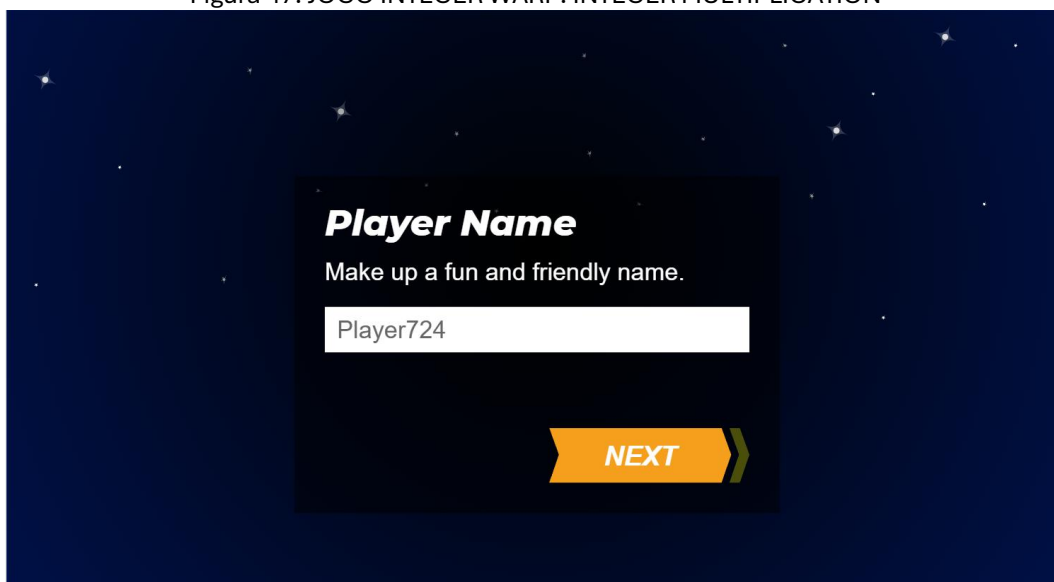
Figura 46: Jogo Integer Warp: Integer Multiplication



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Na próxima página, cada jogador coloca seu nome, ou pode usar os nomes sugeridos, como no caso da imagem a seguir (figura 47) que sugeriu o nome Player724.

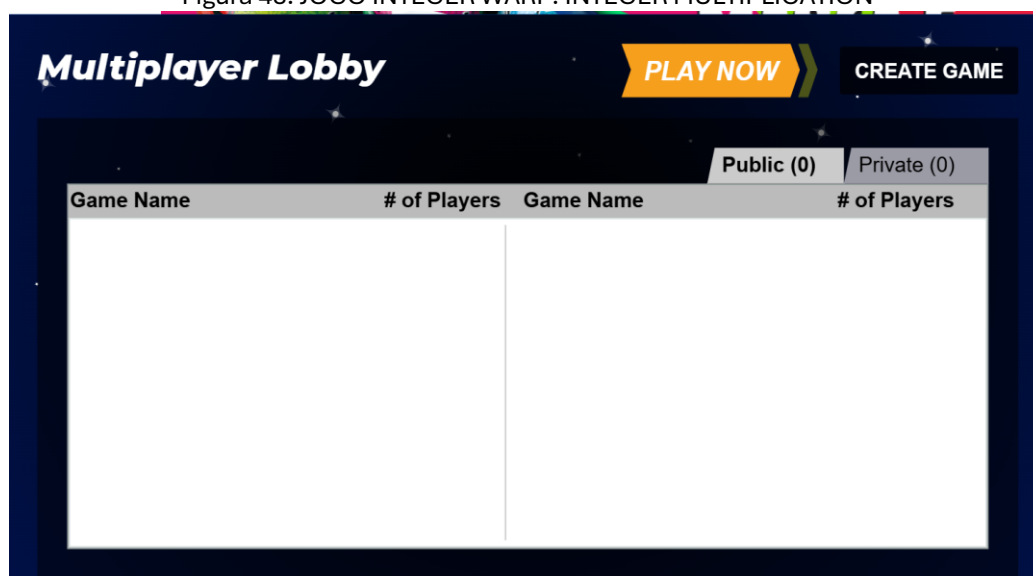
Figura 47: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Na página seguinte (figura 48) há a possibilidade de criar uma sala onde os alunos podem jogar entre si, porém também há a possibilidade de jogar com o computador, caso queira jogar direto, basta apertar Play Now.

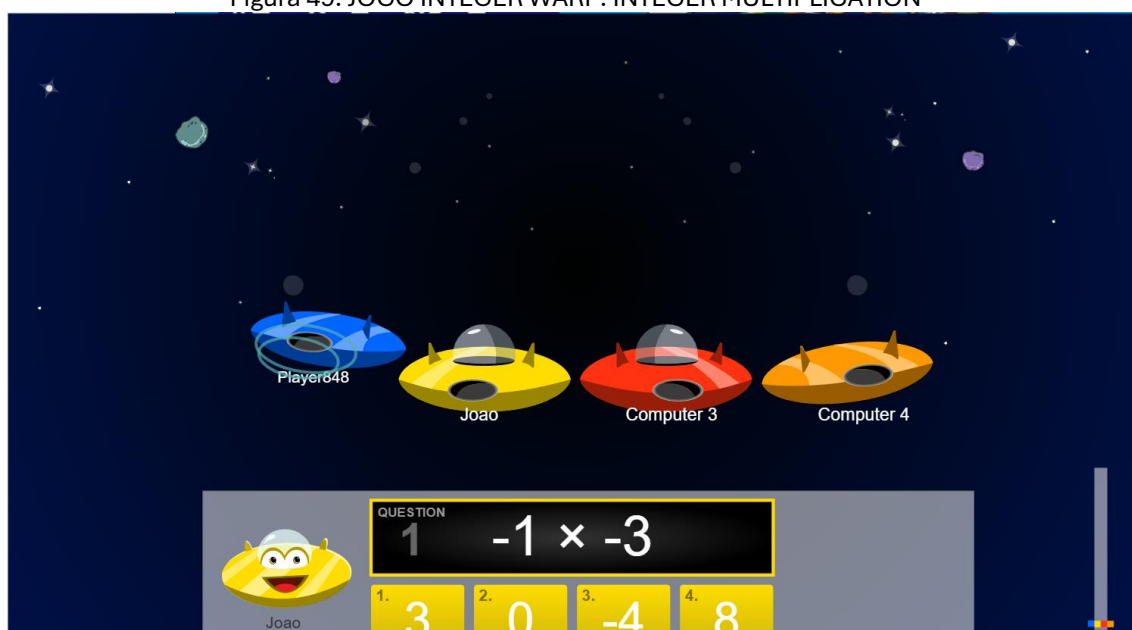
Figura 48: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

E então o jogo começa, na imagem a seguir (figura 49), temos quatro participantes, escolhi o nome João como exemplo e estou jogando com o personagem da nave amarela. Aparece na parte de baixo uma multiplicação de inteiros e deve-se clicar em uma das quatro respostas apresentadas. Ao clicar na resposta, uma nova questão aparece. E assim segue, até a chegada. Na figura 50, perceba que o jogador João está perdendo, pois as outros jogadores estão na frente.

Figura 49: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

Figura 50: JOGO INTEGER WARP: INTEGER MULTIPLICATION



Fonte: <https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/>

APÊNDICE B. Atividades para impressão

Para facilitar a impressão das atividades para os alunos, vamos disponibilizar neste espaço todas as tarefas de aula, prontas para impressão, assim facilitando para o professor. Vamos usar a mesmos títulos da aplicados na sequência didática.

Assim, vamos dividir as atividades e avaliações em três blocos.

Bloco 1: Reconhecimento dos inteiros: Identificar a existência de números inteiros, noção do zero como origem da reta numérica e identificação e construção de reta numérica dos inteiros.

Bloco 2: Adição e subtração de inteiros: Reconhecer, operar e associar a problemas as operações de adição e subtração de inteiros. Associar o conhecimento em situações práticas que envolvam números inteiros. Resolver claramente as regras de sinais para adição algébrica de inteiros.

Bloco 3: Multiplicação de inteiros: Reconhecer, operar e associar a problemas a operação de multiplicação de inteiros. Resolver claramente as regras de sinais da multiplicação de inteiros.

Segue atividades e avaliações propostas na sequência didática.

Bloco 1: Atividade 1

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 1

- i) De acordo com a simulação, determine um possível valor para a altura da montanha?

- ii) De acordo com sua resposta do item i), determine uma estimativa para “profundidade” da praia?

- iii) Você consegue encontrar a mudança de um ambiente para o outro? O que te leva a acreditar que esse local é a mudança de ambiente?

Bloco 1: Atividade 2

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 2

Utilizando as referências estabelecidas pelo professor, responda as questões:

- i) A imagem exibe uma mesma frase para a garota de paraquedas e para o pássaro. Já o peixe, tem uma frase diferente. Explique, com suas palavras a mudança na composição das frases?

- ii) Na parte esquerda da imagem, identificamos uma reta de elevação, podemos associar a cada personagem um valor na reta. Complete abaixo a posição de cada personagem na reta numérica:

a) 58m acima do nível do mar = _____

b) 22m acima do nível do mar = _____

c) 45m abaixo do nível do mar = _____

- iii) Podemos concluir que:

a) Ao colocar um personagem acima do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

b) Ao colocar um personagem abaixo do nível do mar, teremos valores _____ na reta numérica.

Bloco 1: Atividade 3

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 3

- i) Ao ter um balanço de \$40, qual será o valor correspondente na reta numérica correspondente?

- ii) Ao ter um débito de \$20, qual será o valor correspondente na reta numérica?

- iii) O que representa o zero na reta numérica comparado a quantidade que temos no cofre?

- iv) Qual é a maior e a menor quantidade que podemos ter no cofre no exemplo?

Bloco 1: Atividade 4

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

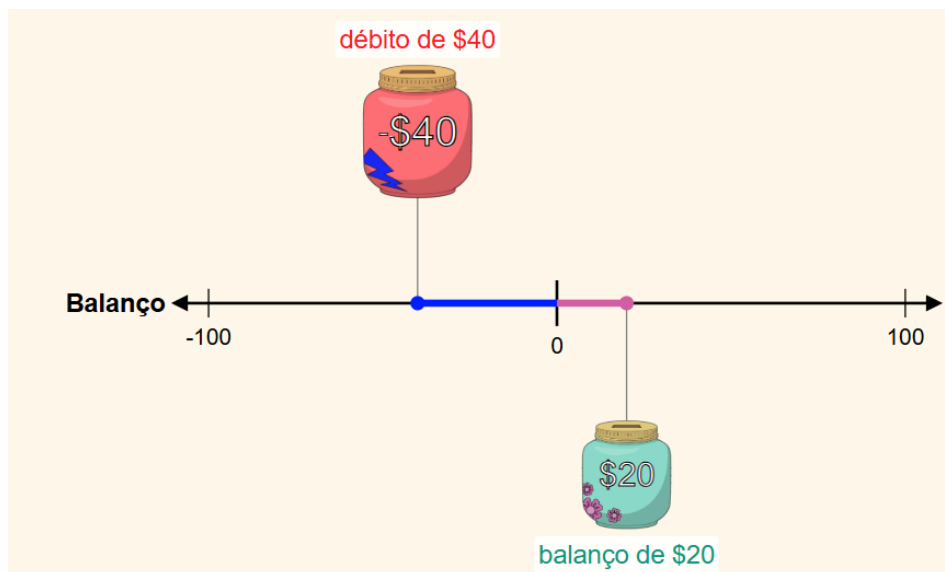
Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 4

- i) O valor -30 na reta numérica representa qual valor no cofre? Justifique sua resposta.

- ii) Um balanço de \$80, representa qual valor na reta numérica? Justifique sua resposta.

- iii) Observe a imagem abaixo e identifique a quantidade que devemos acrescentar ao cofre que tem débito de \$40 para que fique com valor igual ao cofre que possui balanço de \$20?



Bloco 1: Atividade 5

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 5

- i) Na atividade selecione o mês de março e responda:
- a) Qual a menor temperatura que você encontrou no globo terrestres neste mês?

- b) Qual a maior temperatura que você encontrou no globo terrestre neste mês?

- c) Consegue identificar a região onde são essas temperaturas?

- ii) Agora selecione o mês de julho, identifique onde fica o Brasil no mapa e responda:

- a) Qual a menor temperatura encontrada para o Brasil neste mês?

- b) E a maior?

- c) Trocando para o mês de dezembro, determine qual a maior temperatura do Brasil?

- d) Determine qual a menor temperatura do Brasil no mês de dezembro?

- e) Justifique as mudanças que ocorreram para esses meses e o motivo da variação das temperaturas para julho e dezembro.

Bloco 1: Atividade 6

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 6

i) Responda as perguntas abaixo usando a ferramenta Reta Numérica: Inteiros no exemplo de temperaturas.

a) Observe os polos norte e sul e determine as menores temperaturas nos meses de janeiro e julho. Há variação das temperaturas? Justifique sua resposta.

b) Em qual mês encontramos a maior temperatura do ano? Qual foi o mês? E qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a maior.

c) Em qual mês encontramos a menor temperatura do ano? Qual foi o mês? E qual foi a temperatura encontrada? Verifique as respostas que os colegas encontram e identifique se sua temperatura foi a menor.

ii) Para finalizar, relacione a reta numérica com as situações problemas que resolvemos até aqui, associando as características do problema com valores positivos e negativos.

a) Exemplo de profundidade.

Número positivo: altitude acima do nível do mar

Número negativo: altitude abaixo do nível do mar

b) Exemplo do cofre.

c) Exemplo da temperatura.

Bloco 1: Avaliação 1

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Avaliação 1

- i) Aprendemos um conceito importante hoje. Você consegue identificar qual foi ele?

- ii) O zero tem um papel importante na reta numérica. Em poucas palavras descreva sua importância?

- iii) Como você representou os personagens abaixo do nível do mar, os débitos no cofre ou as temperaturas abaixo de zero? Por quê?

- iv) Quais números podemos encontrar na reta numérica?

Bloco 1: Avaliação 2

A avaliação 2 é para ser incluída no aplicativo Plickers, porém, caso não seja possível aplicar, recomendamos imprimir, segue abaixo modelo para impressão.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Avaliação 2

- i) Escreva o número inteiro correspondente para uma temperatura de 25 °C acima de zero.
- a) +25
 - b) -25
- ii) Escreva o número inteiro correspondente para uma profundidade de 2 500 metros.
- a) +2500
 - b) -2500
- iii) Escreva o número inteiro correspondente para 10 pontos perdidos por uma equipe em um torneio.
- a) - 10
 - b) +10
- iv) Um crédito de 1600 reais representa qual número inteiro?
- a) - 1600 reais
 - b) + 1600 reais

Bloco 1: Avaliação 3

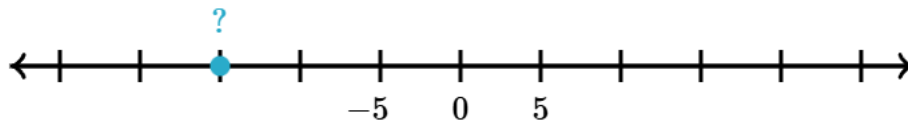
A avaliação 3 é para ser incluída no aplicativo Plickers, porém, caso não seja possível aplicar, recomendamos imprimir, segue abaixo modelo para impressão.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Avaliação 3

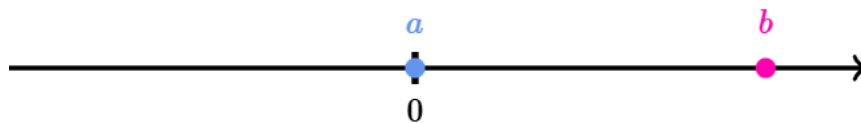
- i) Onde está o ponto azul na reta numérica?



- a) -6
 b) -7
 c) -10
 d) -15
- ii) Ordene em ordem decrescente os números: -5, +7, -8, +10, +1 e -2.

- a) -8, -5, -2, +1, +7, +10
 b) +10, +7, +1, -2, -5, -8
 c) +1, -2, -5, +7, -8, +10
 d) +10, -8, +7, -5, -2, +1

- iii) Usando a reta numérica abaixo, determine qual das alternativas é falsa.



- a) $a = 0$
 b) $a < b$
 c) $b = 0$
 d) $a > b$

- iv) Onde está o ponto azul na reta numérica?



- a) 6
b) 4
c) -6
d) -4
- v) Os geógrafos usam números negativos para representar pontos abaixo do nível do mar e números positivos para representar pontos acima do nível do mar. Por exemplo, o ponto mais baixo em Saquarema está a -2 metros, e o ponto mais alto está a +6 metros. O que 0 metro representa?
- a) O ponto mais alto em Saquarema
b) O ponto mais alto de Saquarema
c) Nível do mar
d) Nenhuma das respostas anteriores.

Bloco 1: Avaliação 4

Usar o simulador Reta Numérica: Inteiros. Essa atividade é encontrada no link:
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-integers.

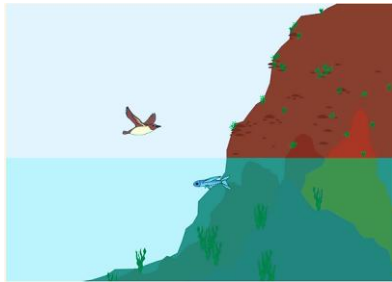
Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Avaliação 4: Tarefa de Casa

i) Olhe para a imagem, com essas informações responda as perguntas

a)



Quem está no mar? _____

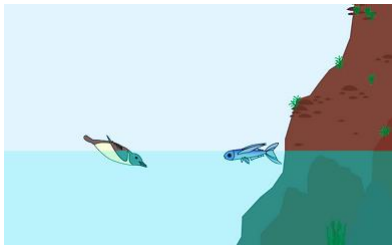
Quem está no ar? _____

Considerando a posição dos personagens, quem teria?

Altitude positiva: _____

Altitude negativa: _____

b)



Quem está no mar? _____

Quem está no ar? _____

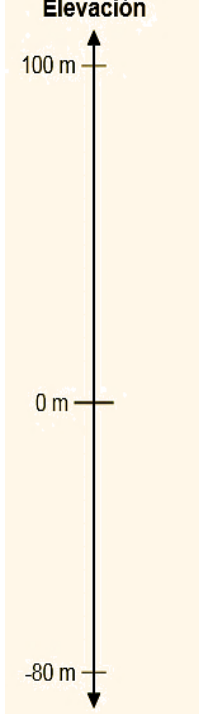



Considerando a posição dos personagens, quem teria?

Altitude positiva: _____

Altitude negativa: _____

ii) Qual é a relação entre o mar e os sinais do pássaro e do peixe? Justifique sua resposta.

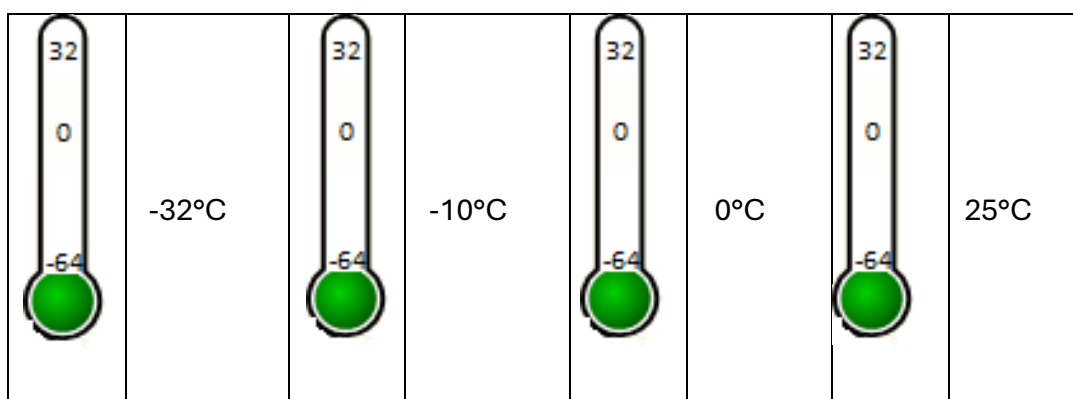
iii) Aponte com uma seta onde você colocaria nosso amigo PhET de acordo com as características apresentadas abaixo:

PhET menina no paraquedas	PhET menina nadando	PhET menina andando	Elevación 
			

iv) Ordene em ordem crescente de acordo com o local que você deu na pergunta anterior para a garota PhET (paraquedas/nadando/andando)

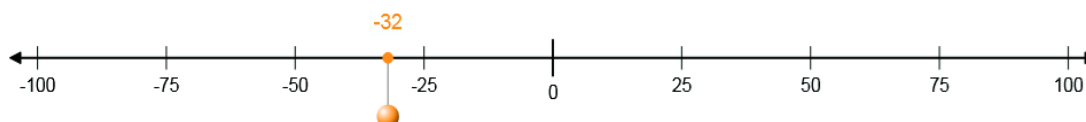
Garota Phet _____	\leq	Garota Phet _____	\leq	Garota Phet _____
----------------------	--------	----------------------	--------	----------------------

- v) Pinte o termômetro de acordo com a temperatura indicada em graus Celsius



Qual é a relação entre números negativos, positivos e zero com frio e calor?

- vi) Veja o exemplo: a temperatura está localizada na reta numérica, indique as outras temperaturas com uma marca (verifique na simulação)

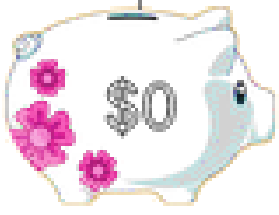




De acordo com a representação acima, responda

- a) Qual é a temperatura mais baixa? Justifique sua resposta

- b) Qual é a temperatura mais alta? Justifique sua resposta

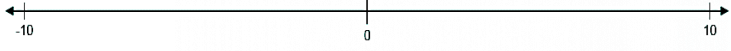
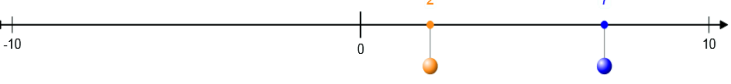

vii) Selecione de acordo com as características do porquinho (porquinho ou cofrinho) da poupança

	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>
	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>
	<p>Eu não fui capaz de guardar <input type="checkbox"/></p> <p>Muitas despesas, sem economia <input type="checkbox"/></p> <p>Muita economia, sem despesas <input type="checkbox"/></p>

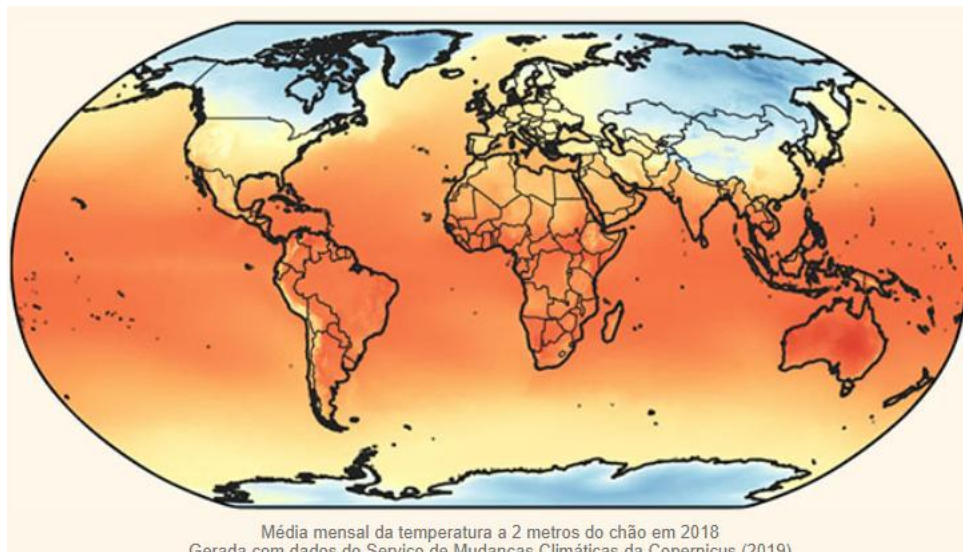
Complete a frase com as seguintes palavras: "economia" e "despesas" nos espaços em branco abaixo

O _____ é expresso com um sinal negativo antes da quantidade, enquanto o _____ é expresso com um sinal positivo.

viii). Preencha a tabela abaixo (confira com a simulação)

Compare usando um \leq ou \geq	Representa na reta numérica
-5 _____ 0	
_____	
-10 _____ -2	

Brinque com a simulação para se divertir aprendendo: você sabia que as mudanças climáticas estão afetando nossas temperaturas... não acredite em mim? Eu te desafio a responder as questões de ix a xi:



ix) Em quais meses do ano foram registradas as temperaturas mais baixas?

x) Em quais meses do ano foram registradas as temperaturas mais altas?

xi) Qual polo é mais frio?

- a) Polo Norte
- b) Polo Sul
- c) Não há diferença

Bloco 2: Atividade 1

Usar o simulador Reta Numérica: Operações. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

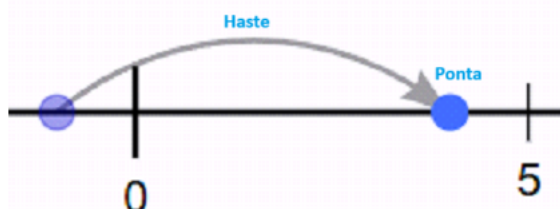
Atividade 1

Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Operações e explore a janela Fichas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a simulação?

- i) Na aba Fichas, observe a localização do resultado colocando -5 na bolsa esquerda e +3 na bolsa direita. Qual é o resultado da operação realizada? Por quê? Verifique sua resposta na simulação

- ii) Qual é o resultado da operação $-1 + 1$? Assinalar.
a) 0 b) 2 c) -1 d) N.A.

- iii) Ainda na aba Fichas, ao executar uma operação, uma flexa é exibida, como na imagem a seguir.



O que indica a haste da flexa:

- a) Quanto à resposta encontrada?

b) Quanto ao movimento que executa?

Bloco 2: Atividade 2

Usar o simulador Reta Numérica: Operações. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 2

i) Na aba Fichas, determine a localização do resultado em cada caso quando colocamos:

a) +5 e +3 na bolsa direita?

b) -4 e -2 na bolsa esquerda?

c) +3 na bolsa direita e -2 na bolsa esquerda?

d) +2 na bolsa direita e -5 na bolsa esquerda?

e) +3 na bolsa direita e -3 na bolsa esquerda?

ii) Ao colocar as fichas +3, +4 na bolsa direita e -1, -2, e -5 na bolsa esquerda. Qual será o resultado encontrado? Justifique sua resposta.

iii) Agora resolva as seguintes operações usando números inteiros. Depois de resolvê-los confira o resultado usando o simulador.

a) $(+5) + (+4) =$ _____

b) $(-2) + (-5) =$ _____

c) $(+4) + (-3) =$ _____

d) $(+1) + (-4) =$ _____

e) $(+1) + (+3) =$ _____

f) $(-3) + (-4) =$ _____

g) $(-2) + (+5) =$ _____

h) $(-5) + (+2) =$ _____

vi) Depois de conferir com o simulador, converse com seus colegas e entrem em um consenso quanto ao resultado das somas:

a) A adição de dois números positivos será sempre um número?

b) A adição de dois números negativos será sempre um número?

c) Agora, elabore uma regra para a somas de números com sinais diferentes: um positivo e outro negativo.

Bloco 2: Atividade 3

Usar o simulador Reta Numérica: Operações. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.

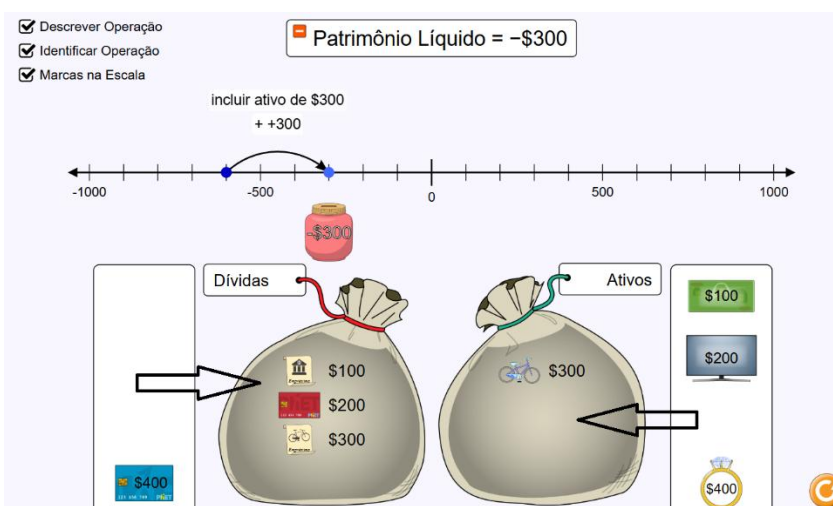
Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 3

Na aba Patrimônio Líquido, responda as questões abaixo:

- i) Juan é um estudante e gosta de jogar o famoso jogo de *monopólio* onde ele tem dívidas de \$ 100, \$ 200 e \$ 300, então ele faz como pagamento com alguns bens, como bicicleta (\$ 300), vamos ver o que aconteceu.



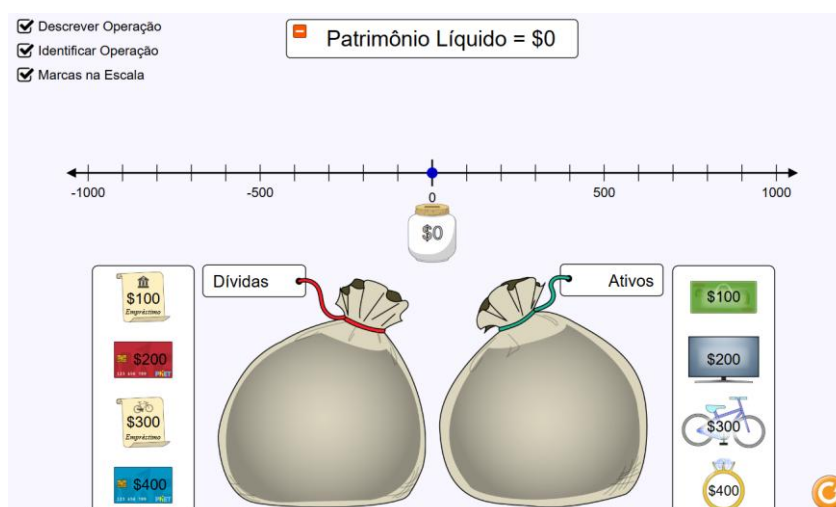
Ao analisar o resultado indicado pela seta, ele percebe que ainda tem dívidas. É possível João pagar a dívida pendente? Discuta sua resposta.

- ii) Maria possui um valor líquido inicial for igual a -\$ 300 e -\$ 400 for adicionado a ele, como você usaria a simulação para obter o patrimônio líquido (\$)? Discuta sua resposta

a) Desenhe abaixo como a representação do patrimônio líquido (\$) parecia na simulação

b) E se em vez de $-\$400$, mudarmos para $\$400$ e adicionarmos $-\$100$, analisamos a representação na reta numérica.

iii) Preveja qual seria o patrimônio líquido de Pedro se inserirmos todos os dados no saco de dívidas e os mesmos ao entrar com os dados dos ativos.



Verifique com a simulação:

a) Quando o patrimônio líquido diminui para zero? Justifique sua resposta.

b) Quando há aumento do patrimônio líquido? Justifique sua resposta.

c) Quando há diminuição do patrimônio Líquido?

Bloco 2: Atividade 4

Usar o simulador Reta Numérica: Operações. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-operations.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 4

i) Expresse, utilizando a adição de números inteiros, cada situação que segue e dê o resultado.

a) Em um jogo, Alice ganhou 12 pontos e perdeu 7.

b) Uma comida congelada estava sendo mantida a temperatura de -20°C e sofreu uma variação de -5°C .

c) Em um torneio de futebol, um time tem 14 pontos ganhos e 20 pontos perdidos.

d) Seu João depositou R\$239,00 em sua conta corrente, que estava com um saldo devedor de R\$540,00.

ii) Num jogo de baralho, Rodrigo e Carolina obtiveram os seguintes resultados:

	Rodrigo	Carolina
1ª Partida	Ganhou 510 pontos	Perdeu 80 pontos
2ª Partida	Perdeu 215 pontos	Ganhou 475 pontos
3ª Partida	Perdeu 485 pontos	Ganhou 290 pontos
4ª Partida	Ganhou 625 pontos	Perdeu 115 pontos

a) Qual é o número total de pontos de Carolina após as quatro partidas?

b) Qual é o número total de pontos de Rodrigo após as quatro partidas?

c) De quem foi a vantagem final? Quantos pontos de diferença?

iii) Um termômetro está marcando -2°C em uma cidade. Se a temperatura subir 6°C , quantos graus marcará o termômetro?

iv) Considere os seguintes números:

103	20	+15	-36	-29
-15	28	-100	-21	42

Escolha dois deles, de modo que:

a) a soma seja zero.

b) a soma seja 3.

c) a soma seja 62.

d) a soma seja -8 .

e) a soma seja -50 .

Bloco 2: Atividade 5

Usar o simulador *Reta Numérica: Distância*. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 5

- i) Por 5 minutos abra a simulação PhET: Números Inteiros: Distância e explore as janelas, compartilhe com suas impressões com seus colegas e conte-nos o que você conseguiu perceber com a manipulação da simulação?

- ii) Coloque a casa na posição -6 e coloque a pessoa na posição 5. Agora responda:

a) Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.

b) Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.

c) E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.

iii) Agora coloque a casa na posição 5 e coloque a pessoa na posição -6.

Agora responda:

a) Qual a distância do hidrante para a casa? Justifique sua resposta.

b) Qual a distância do hidrante para a pessoa? Justifique sua resposta.

c) E qual a distância da casa para a pessoa? Justifique sua resposta.

Bloco 2: Atividade 6

Usar o simulador Reta Numérica: Distância. Essa atividade é encontrada no link:

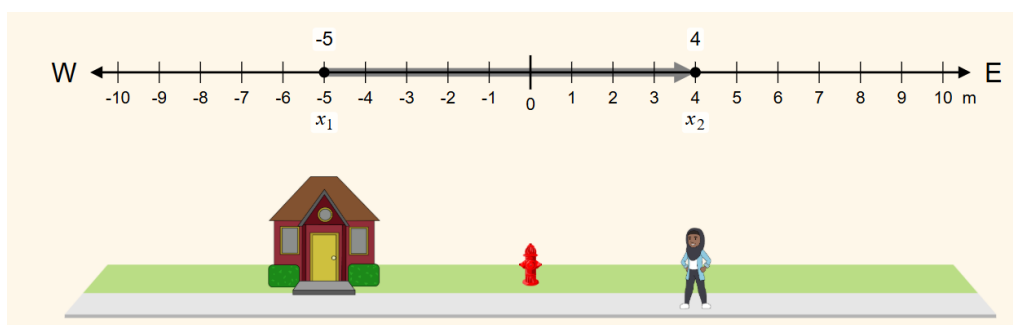
https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance

Nome: _____

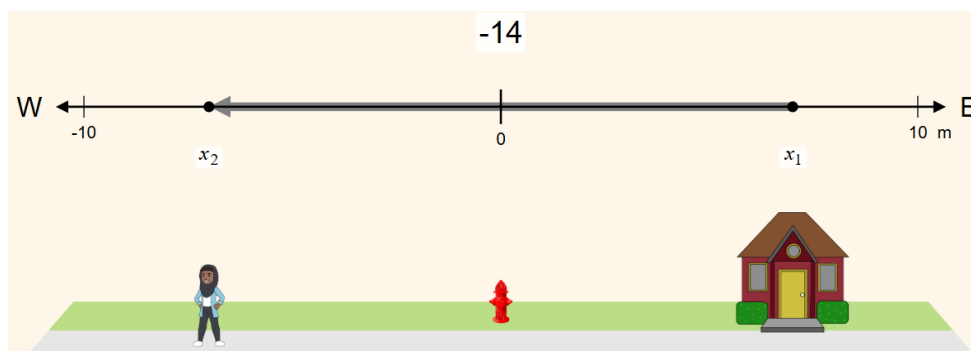
Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 6

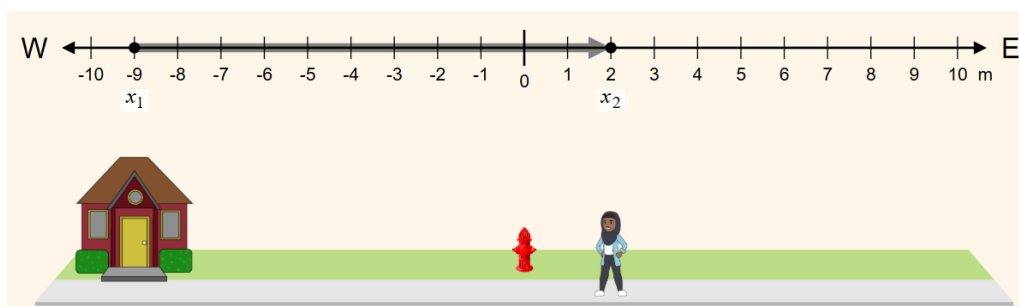
- i) Considere a seguinte situação na figura a seguir. Se a menina quer chegar em casa, determine a distância da garota até a casa?



- ii) Agora considere que a menina saiu de casa e andou 14 metros a oeste (W). Determine uma possibilidade para a posição da casa (x_1) e da menina (x_2)?



iv) Agora, analise a seguinte situação na figura a seguir.



a) Determine qual a posição da casa?

b) Determine qual a posição da garota?

c) Se a garota saiu de casa e andou na direção leste (E), quanto a garota andou?

Bloco 2: Atividade 7

Usar o simulador Reta Numérica: Distância. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 7

i) Utilizando o Simulador Reta Numérica: Distância, na janela do termômetro, coloque o termômetro roxo e o termômetro verde, de modo que a diferença entre as temperaturas seja de 40°C .

a) Usando apenas números positivos.

b) Usando apenas números negativos.

c) Usando um número positivo e outro negativo.

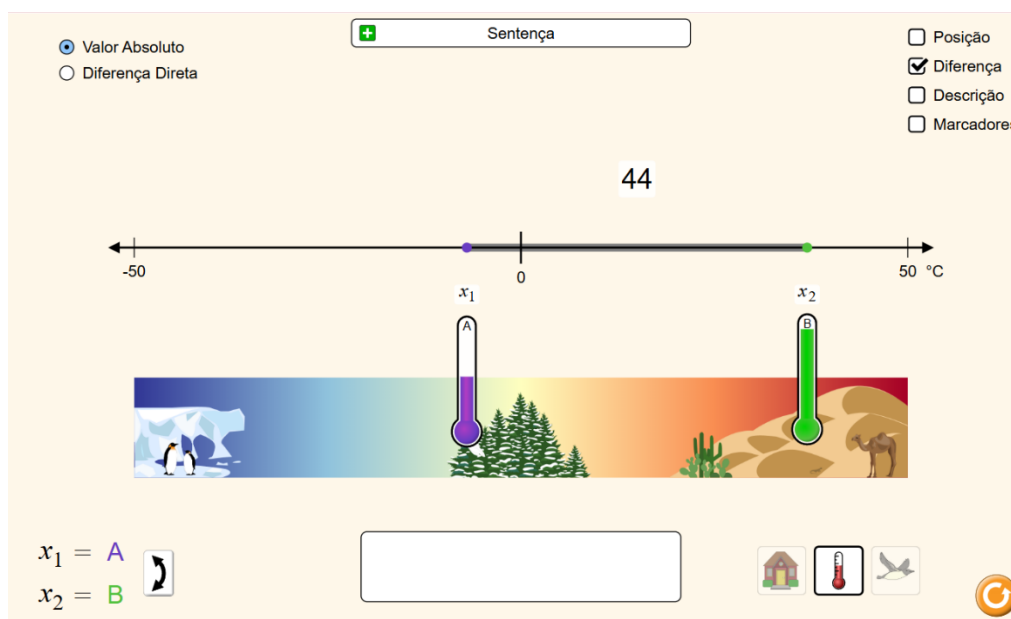
ii) Se a temperatura atual de determinado local é de 0°C , determine a temperatura se:

a) Ocorrer um aumento de 30°C ?

b) Ocorrer uma queda de 25°C ?

iii) Se inicialmente está com 0°C , ocorrer um aumento de 10°C e após algum tempo uma queda de 15°C , qual será a temperatura no final?

- iv) Observe a diferença entre as temperaturas na imagem a seguir, onde o resultado da diferença é 44. Indique um valor possível para os termômetros A e B. Justifique sua resposta.



Bloco 2: Atividade 8

Usar o simulador Reta Numérica: Distância. Essa atividade é encontrada no link:

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/number-line-distance

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 8

- i) Se um pássaro está a 15m acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros abaixo do nível do mar, qual será a distância entre o pássaro e o peixe? Monte uma operação de subtração para representar essa situação e justifique sua resposta.

- ii) Imagine que o pássaro quer pegar o peixe. Se o pássaro mergulha a uma profundidade de 5 metros abaixo do nível do mar e o peixe para fugir pula a uma altura de 5 metros acima do nível do mar. Neste momento qual a distância entre o peixe e o pássaro?

iii) Observe as operações abaixo, use o simulador usando o peixe e o pássaro para exemplificá-los e justifique sua resposta.

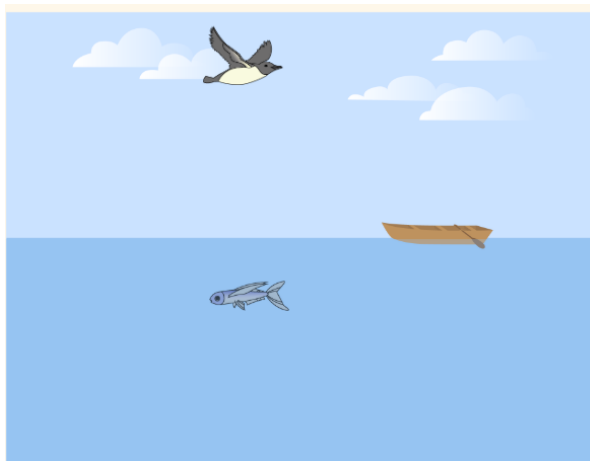
a) $(+15) - (+5)$

b) $(+7) - (-13)$

c) $(-12) - (+10)$

d) $(-9) - (-10)$

iii) Um pássaro vê um peixe nadando e pretende pegá-lo. Se o pássaro está a 15 metros acima do nível do mar e o peixe está a 5 metros de profundidade. Quantos metros o pássaro deve se mover para pegar o peixe? Justifique sua resposta.



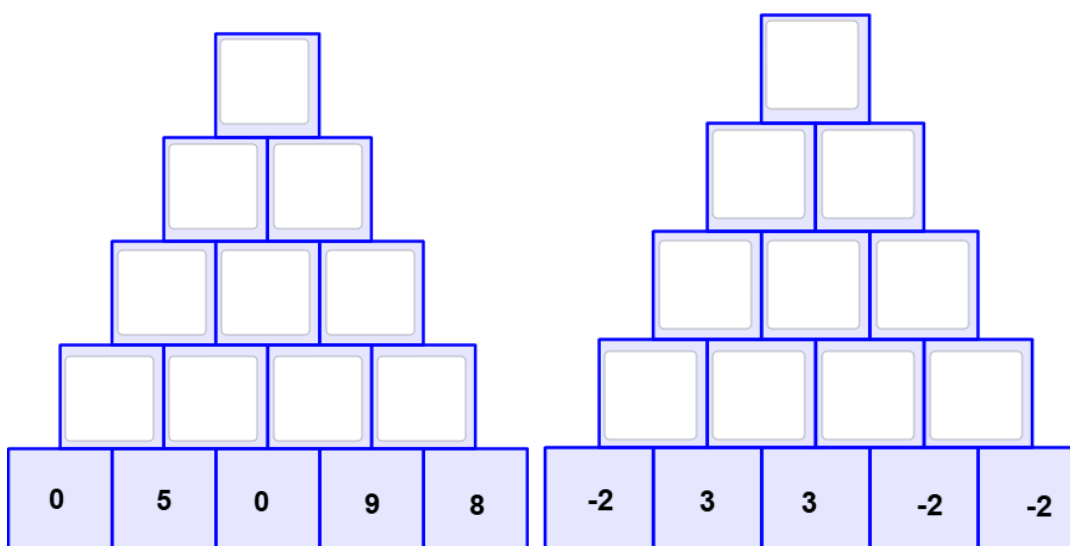
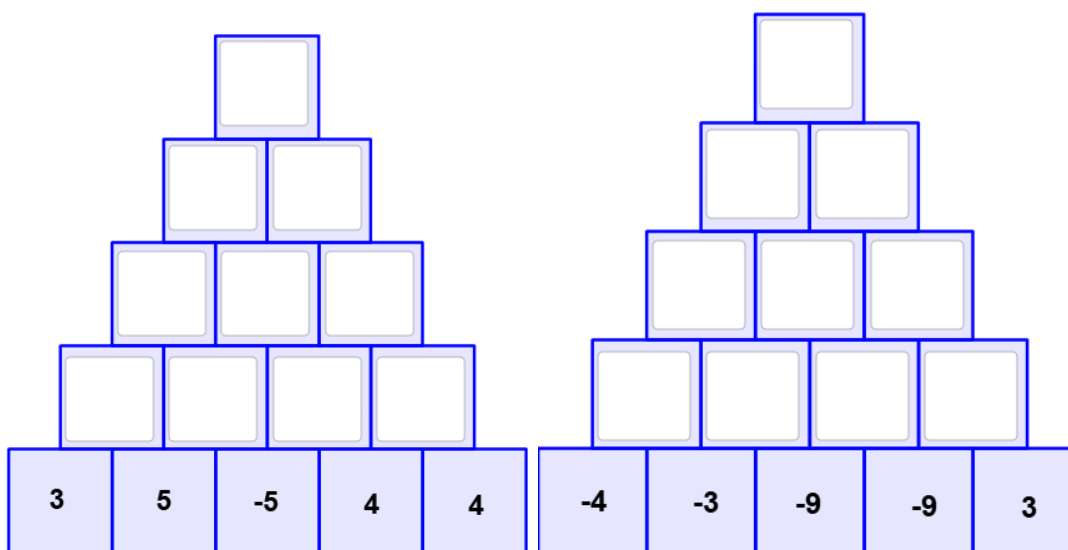
Bloco 2: Avaliação 1

A Avaliação 1 é uma ferramenta do Geogebra chamada Adição de Números Inteiros, disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/qzmafcb>. Abaixo vamos colocar alguns exemplos que podem ser impressos caso não consiga trabalhar com o aplicativo em sala de aula.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Some dois números inteiros de blocos consecutivos para descobrir o valor do bloco que está acima deles, repita o processo até descobrir o valor do último bloco.



Bloco 2: Avaliação 2

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / ____

Avaliação 2

i) Escreva os números inteiros:

a) Entre -3 e 3

b) De -5 até 2

c) Maiores que -2

ii) Determine os números que possuem módulo igual a 15 :

iii) Qual é o número que possui maior módulo -5 ou 2 ?

iv) Determine:

a) O oposto de -4

b) O oposto do oposto de 11

c) O módulo do simétrico de -8

v) Escreva os números a seguir em ordem crescente: -9 , $+4$, $+1$, -3 , -11 ,
 0 , -1 , $+11$

vi) Qual é o menor número?

a) 0 ou -1 _____

b) -2 ou 5 _____

c) -10 ou -26 _____

vii) Indique a variação de unidades na reta numérica quando saímos de:

a) -1 e chegamos a 3 _____

b) -3 e chegamos a -1 _____

c) -5 e chegamos a -10 _____

viii) Calcule

a) $(-14) + (-3) =$ _____

b) $(+17) + (-6) =$ _____

c) $(+11) - (-6) =$ _____

d) $(-9) - (+16) =$ _____

Bloco 3: Atividade 1

Usar a ferramenta no Geogebra *Multiplicação de Inteiros*. Essa atividade é encontrada no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / _____

Atividade 1

Por 5 minutos abra o simulador de produtos no Geogebra e use-o para responder as questões abaixo. *Multiplicação de Inteiros* disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgjgfb>.

- i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.
- a) $(+5) \cdot (+2) =$ _____
- b) $(+3) \cdot (+4) =$ _____
- c) $(+1) \cdot (+6) =$ _____
- d) $(+2) \cdot (+3) =$ _____

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo

() Negativo

2ª Parcela: () Positivo

() Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo

() Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Bloco 3: Atividade 2

Usar a ferramenta no Geogebra Multiplicação de Inteiros. Essa atividade é encontrada no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgigfb>

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / _____

Atividade 2

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(+4) \cdot (-2) =$ _____

b) $(+6) \cdot (-1) =$ _____

c) $(+3) \cdot (-3) =$ _____

d) $(+5) \cdot (-2) =$ _____

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo

() Negativo

2ª Parcela: () Positivo

() Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo () Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Bloco 3: Atividade 3

Usar a ferramenta no Geogebra Multiplicação de Inteiros. Essa atividade é encontrada no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgigfb>

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / _____

Atividade 3

- i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.
- a) $(-2) \cdot (+2) =$ _____
- b) $(-5) \cdot (+3) =$ _____
- c) $(-1) \cdot (+8) =$ _____
- d) $(-4) \cdot (+3) =$ _____

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo

() Negativo

2ª Parcela: () Positivo

() Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo

() Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Bloco 3: Atividade 4

Usar a ferramenta no Geogebra Multiplicação de Inteiros. Essa atividade é encontrada no link: <https://www.geogebra.org/m/ukdgigfb>

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / _____

Atividade 4

i) Resolva as multiplicações abaixo usando o simulador de produtos.

a) $(-1) \cdot (-7) =$ _____

b) $(-5) \cdot (-3) =$ _____

c) $(-2) \cdot (-4) =$ _____

d) $(-3) \cdot (-5) =$ _____

ii) Agora responda:

a) Qual o sinal das parcelas do produto?

1ª Parcela: () Positivo

() Negativo

2ª Parcela: () Positivo

() Negativo

b) Qual o sinal dos resultados encontrados?

() Positivo

() Negativo

iii) Descreva a regularidade encontrada na atividade ii).

Bloco 3: Atividade 5

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____/____/____

Atividade 5

- i) Complete as frases a seguir, com base no que resolveu nos exercícios anteriores.
- a) Um número positivo multiplicado por outro número positivo é igual a _____, portanto $(+) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- b) Um número positivo multiplicado por um número negativo é igual a _____, portanto $(+) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- c) Um número negativo multiplicado por um número positivo é igual a _____, portanto $(-) \times (+) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- d) Um número negativo multiplicado por outro número negativo é igual a _____, portanto $(-) \times (-) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Bloco 3: Avaliação 1

Vamos usar uma atividade interativa do site

<https://www.coquinhos.com/multiplicando-numeros-inteiros/play/> chamada Corrida dos Inteiros para exercitar as regras dos sinais. Essa atividade não tem como ser expressa aqui, como substituição colocaremos algumas multiplicações que podem ser aplicadas como substituição para a tarefa.

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / ____

Avaliação 1

i) Efetue os produtos, tome cuidado com os sinais.

a) $(-2) \cdot (+80) =$ _____

b) $(-400) \cdot (-2) =$ _____

c) $3 \cdot (-5) =$ _____

d) $(-4) \cdot 8 =$ _____

e) $4 \cdot (-25) =$ _____

f) $(-10) \cdot 33 =$ _____

g) $(+36) \cdot (+9) =$ _____

h) $(+55) \cdot (-5) =$ _____

i) $(-27) \cdot (+3) =$ _____

Bloco 3: Avaliação 2

Nome: _____

Turma: _____ Turno: _____ Data: ____ / ____ / ____

Avaliação 2

i) Calcule as multiplicações:

a) $(-20) \cdot (-2) =$ _____

b) $(0) \cdot (+1) =$ _____

c) $(-2) \cdot (-3) =$ _____

d) $(+6) \cdot (-1) =$ _____

e) $(+4) \cdot (+8) =$ _____

f) $(+2) \cdot (-3) =$ _____

g) $(-10) \cdot (+1) =$ _____

h) $(-2) \cdot (-1) =$ _____

ii) Yago estava com saldo de – R\$ 30,00 no banco. Sua situação financeira piorou e sua dívida triplicou no banco. Com base nessas informações, qual é o novo saldo de Yago?

- iii) Ana Laura fez um teste com 10 questões. A cada questão respondida corretamente, ela ganhava 3 pontos e a cada questão respondida erroneamente, ela perdia 2 pontos. Sabendo que ela acertou 7 questões e errou 3 questões, calcule a pontuação de Ana Laura no teste.

- iii) Um instrutor de mergulho pediu aos seus alunos que, ao mergulhar, fizessem pausas a cada 5m de profundidade. Sabendo que esses alunos fizeram 5 pausas, qual foi a altitude alcançada por eles?
