PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

COORDENAÇÃO DO PROFMAT

HIGOR SOARES DO AMPARO

"MENOS VEZES MENOS É MAIS": DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

NITERÓI, 2025

HIGOR SOARES DO AMPARO

“MENOS VEZES MENOS É MAIS”: DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Dissertação apresentada por Higor Soares do Amparo ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

Niterói
2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D631" Do Amparo, Higor Soares
"Menos vezes menos é mais? : dificuldades no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos / Higor Soares Do Amparo. - 2025.
209 f.

Orientador: Wanderley Moura Rezende.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Números Inteiros Relativos. 3. Ensino Fundamental. 4. Materiais Manipulativos. 5. Produção intelectual. I. Rezende, Wanderley Moura, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

HIGOR SOARES DO AMPARO

“MENOS VEZES MENOS É MAIS”: DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Dissertação apresentada por Higor Soares do Amparo ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Aprovada em: 25/08/2025

Banca Examinadora

Prof. Wanderley Moura Rezende - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Profa. Priscila Cardoso Petito - Membro

Doutora – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Paulo Roberto Tralles - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI, 2025

DEDICATÓRIAS

Aos alunos, que, direta ou indiretamente, serão beneficiados pelos resultados deste estudo.

Aos professores que lerão esse trabalho, na esperança de encontrarem aqui mais uma possibilidade de refletir e atuar em sua prática docente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder força, saúde e sabedoria durante toda esta caminhada. Sem Sua presença em minha vida, nada disso teria sido possível.

Ao meu orientador, Wanderley, deixo minha profunda gratidão pela orientação atenta, pelas valiosas contribuições e pelo incentivo constante ao longo de todo este processo.

Estendo meus agradecimentos aos professores do curso, que com dedicação e conhecimento me proporcionaram uma base sólida e essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, meu alicerce, agradeço pelo amor incondicional, pelo apoio em todos os momentos e por acreditarem em mim mesmo diante dos obstáculos.

Aos meus colegas de curso, Amanda, Danielle, Emildo, Gabriel e Thiago pelas horas de trabalho em conjunto e auxílio nos momentos de dificuldades e insanidade.

Aos meus alunos, agradeço de forma especial. Cada um de vocês contribuiu de maneira direta para a construção deste trabalho, seja com perguntas, reflexões ou com a prática em sala de aula. Vocês foram fonte de inspiração e parte essencial deste processo.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa jornada, o meu mais sincero obrigado.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
IDEB	- Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	- Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SAEB	- Sistema de Avaliação da Educação Básica

RESUMO

Esta dissertação investiga as dificuldades enfrentadas por alunos do ensino fundamental na aprendizagem dos números inteiros relativos, especialmente no que diz respeito à compreensão de suas operações. A pesquisa parte do reconhecimento de que a abordagem tradicional, centrada na memorização de regras, tem se mostrado pouco eficaz e, muitas vezes, desmotivadora para os estudantes. A partir de uma análise qualitativa, o trabalho desenvolve-se em diferentes frentes: estudo da literatura sobre os obstáculos no ensino e na aprendizagem dos números inteiros, análise de livros didáticos utilizados em escolas públicas, levantamento e apresentação de materiais didáticos manipulativos, e elaboração de uma sequência didática voltada à construção significativa desses conceitos. Essa sequência foi aplicada em sala de aula e avaliada por meio de questionários. Os resultados apontam que o uso de recursos lúdicos e manipulativos, em conjunto com uma proposta didática adequada, contribui para tornar o conteúdo mais acessível e significativo, favorecendo a superação das dificuldades conceituais observadas. O produto educacional resultante, uma sequência didática com uso de materiais lúdicos e manipulativos, visa oferecer contribuições práticas para professores que enfrentam os desafios de ensinar esse conteúdo tão importante para a formação do aluno na educação básica.

Palavras-chave: Números Inteiros, Materiais Manipulativos, Sequência Didática, Ensino Básico de Matemática, Ludicidade.

ABSTRACT

This dissertation investigates the difficulties faced by elementary school students in learning integer numbers, especially regarding the understanding of their operations. The research starts from the recognition that the traditional approach, focused on memorizing rules, has proven to be ineffective and often discouraging for students. Based on a qualitative analysis, the work unfolds in several areas: a literature review on the obstacles in teaching and learning integers, an analysis of textbooks used in public schools, a survey and presentation of manipulative teaching materials, and the development of a didactic sequence aimed at the meaningful construction of these concepts. This sequence was implemented in the classroom and evaluated through questionnaires. The results indicate that the use of playful and manipulative resources, combined with an appropriate didactic approach, helps make the content more accessible and meaningful, supporting the overcoming of the conceptual difficulties observed. The resulting educational product, a didactic sequence using playful and manipulative materials, aims to offer practical contributions for teachers who face the challenge of teaching this content, which is so important for students' foundational education.

Key-words: Integer Numbers, Manipulative Materials, Didactic Sequence, Basic Math Education, Playfulness

SUMÁRIO

Introdução

Ensinar números inteiros, também chamados de números relativos, continua sendo um grande desafio nas salas de aula do ensino fundamental. Autores como Lorenzato (2006), Ponte (1992) e Glaeser (2010) evidenciam que os alunos costumam ter dificuldades para compreender esse conteúdo, especialmente quando se deparam com multiplicação de números negativos ou na subtração por números negativos.

Segundo Ponte (1992), esse tipo de dificuldade está ligado ao fato de que muitos conteúdos matemáticos, como os números negativos, exigem do aluno um rompimento com o pensamento intuitivo. Como o próprio autor destaca:

> A aprendizagem da Matemática envolve, muitas vezes, a aquisição de conhecimentos que não têm correspondência imediata no mundo real ou no senso comum dos alunos. Para muitos, isso implica uma ruptura com ideias prévias e a construção de novos significados, que exigem não apenas memorização, mas compreensão e reflexão. (PONTE, 1992, p. 16)

Para Glaeser[1] (2010), a própria história da matemática mostra que o entendimento dos números negativos não foi simples nem mesmo para os grandes matemáticos: levaram mais de mil anos para que o conceito fosse aceito plenamente, o que mostra que essas dificuldades são também de natureza epistemológica.

Os obstáculos identificados por Glaeser (2010), seis ao todo, evidenciam que as dificuldades atuais na aprendizagem podem não resultar apenas de aspectos pedagógicos, mas também epistemológicos enraizados na própria história da matemática.

Frente a isso, é papel do professor buscar estratégias que ajudem o aluno a superar esses obstáculos e compreender o conteúdo de forma mais significativa. Como afirmam Fiorentini e Miorim (1990):

---

[1] Tradução do artigo foi originalmente publicado no Boletim Gepem 17 (1985).

> [...] é dever do professor dar ao aluno o direito de aprender; no entanto, não é um 'aprender' mecânico e repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz, nem um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Trata-se de um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. Para isso, os recursos lúdicos, como brincadeiras, jogos e blocos lógicos, podem ser ferramentas que auxiliam o trabalho docente. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 1-2)

Diante disso, surge a seguinte questão: de que forma o uso de materiais manipulativos, aliados a uma sequência didática contextualizada, pode contribuir para a superação dessas dificuldades no processo de aprendizagem?

Para responder essa questão, será desenvolvida essa pesquisa com base em uma abordagem qualitativa, articulando revisão teórica, análise de materiais didáticos e práticas de sala de aula. A partir da compreensão histórica e epistemológica dos números inteiros, serão investigadas as formas como esse conteúdo vem sendo tratado no contexto escolar, especialmente nos livros didáticos. Com base nessa análise, será construída uma proposta didática apoiada em recursos manipulativos e aplicada em ambiente escolar, com turmas do 8 ano do ensino fundamental, possibilitando observar de que maneira essas estratégias contribuem para a aprendizagem dos estudantes. Os resultados obtidos, aliados à escuta dos alunos, permitirão avaliar os efeitos da proposta sobre a compreensão dos conceitos envolvidos.

O produto educacional desta dissertação será justamente essa sequência didática, composta por atividades que utilizam materiais concretos (como quadrinhos, fichas coloridas, jogos de tabuleiro, entre outros), organizadas de forma progressiva. Essas atividades foram pensadas para ajudar o aluno a construir o conceito de número inteiro relativo a partir de experiências práticas, favorecendo o raciocínio lógico.

A dissertação está organizada em seis capítulos. No capítulo 1 apresenta-se a fundamentação teórica da pesquisa, com destaque para os aspectos históricos e epistemológicos envolvidos na compreensão dos números inteiros relativos, com base em autores como Eves (2011), Bachelard (1970), Glaeser (2010), entre outros.

O capítulo 2, destinado à revisão de literatura, reúne e discute pesquisas que tratam das principais dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos ao ensino fundamental. São analisados trabalhos que evidenciam os obstáculos mais recorrentes no processo de ensino desse conteúdo. Além disso, o capítulo apresenta experiências didáticas e estudos que propõem o uso de materiais manipulativos como estratégia para tornar o ensino mais concreto, significativo e acessível. Autores como Danczuk (2016), Silva (2023), Todesco (2006), entre outros, contribuem para essa discussão, oferecendo fundamentos teóricos e práticos que sustentam a proposta pedagógica desenvolvida neste trabalho. Essa revisão serve como base para a construção da sequência didática apresentada nos capítulos seguintes, buscando estabelecer um diálogo entre teoria e prática no ensino da matemática.

No capítulo 3 apresenta-se a análise de dois livros didáticos, *Teláris Essencial*, de Dante & Viana (2022) e *Praticando Matemática*, de Andrini & Vasconcellos (2012), utilizados em escolas públicas, com o objetivo de investigar como o conteúdo dos números inteiros relativos é abordado no material que chega às salas de aula. A análise considera aspectos como a ordem em que os conceitos são introduzidos, a clareza das explicações e os tipos de atividades. A partir dessa investigação, busca-se compreender em que medida os livros oferecem suporte para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa ou se acabam reforçando uma abordagem mecânica, baseada na memorização de regras.

O capítulo 4 é dedicado à apresentação de materiais didáticos que podem ser utilizados como apoio ao ensino de números inteiros relativos. São explorados recursos manipulativos e visuais que possibilitam aos alunos compreender os conceitos por meio de representações físicas e situações contextualizadas, favorecendo o desenvolvimento do pensamento matemático de forma mais significativa. A concepção da sequência didática para o ensino de números inteiros, que será base para o produto educacional desta dissertação, é apresentada no capítulo 5.

O capítulo 6 foi dedicado ao relato da prática pedagógica da sequência didática, apresentando as etapas desenvolvidas com alunos da escola que o professor pesquisador atuava durante a elaboração deste trabalho. Finalizando com análises de alguns resultados relacionados à prática em sala de aula. E por fim, fechamos o trabalho com as considerações finais.

Com este trabalho, espera-se contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais significativas e eficazes no ensino dos números inteiros relativos, valorizando o uso de materiais lúdicos e manipulativos como caminhos para uma matemática mais próxima dos alunos.

Capítulo 1: Da história aos obstáculos epistemológicos dos números relativos

1.1 Um pouco de história

Nossas primeiras concepções de número e forma remontam a tempos tão antigos quanto a Idade da Pedra, especificamente ao período paleolítico. Durante centenas de milhares de anos, os humanos habitavam cavernas, vivendo em condições semelhantes às dos animais, dedicando suas energias principalmente à busca de alimentos. Criavam ferramentas para caçar e pescar, desenvolveram a linguagem para se comunicar e adornavam suas habitações com formas de arte criativa.

O avanço no entendimento de valores numéricos e relações entre grandezas foi lento até que ocorreu a transição da simples coleta de alimentos para a sua produção, passando da caça e da pesca para a agricultura.

Segundo Eves (2011):

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desen-volver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Gan-ges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtz e na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Desde as primeiras civilizações, houve a necessidade de um sistema de contagem e registro, por esse motivo surgem os números, até então naturais e racionais positivos. Muitos povos antigos, como os egípcios, utilizavam formas rudimentares em objetos físicos para contagem de quantidades. Por exemplo, os babilônios usavam um sistema sexagesimal (base 60) para registrar transações comerciais, usando tábuas de argila. (EVES, 2011, p. 57).

Esse modelo de contagem de quantidades foi suficiente até certo ponto. À medida que a sociedade foi crescendo, surgiu a necessidade da representação não apenas para quantidades referentes aos naturais, mas também, por exemplo, de perda e dívida, ou de temperaturas negativas, levando ao surgimento dos números negativos.

Muitos pensavam nos números de maneira muito concreta, muitas vezes associados aos processos de contagem aritmética ou de medida geométrica. Isso se deve à associação dos números a objetos reais. Para muitas culturas antigas, a ideia de números inteiros existindo isoladamente como conceitos abstratos não era natural e nem intuitivo. Em verdade, isso também não será ainda para muitas mentes matemáticas da era moderna[2].

Diofantes[3] de Alexandria (~200 - ~284) tem uma grande importância quando se estuda a história dos números inteiros, pois enuncia a regra que até hoje é usada. Naquele momento não havia uma demonstração para o que havia escrito, entretanto é o objeto de estudo do Glaeser, ou seja, é de grande importância até os dias atuais.

Glaeser (2010) relata:

> “A origem da regra dos sinais é atribuída geralmente a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C). Esse autor não faz qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve: “O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta.”” (GLAESER, 2010, p.8)

A história dos números inteiros relativos se dá há cerca de 1500 anos. Nesse primeiro momento, iremos analisar, de forma breve, como foi sua história em diferentes contextos culturais.

Começaremos pela civilização chinesa do mundo antigo. Cabe destacar inicialmente que há grandes divergências em relação às datas das obras chinesas

---

[2] A Idade Moderna iniciou-se com a Queda de Constantinopla, em 1453 e se encerrou com a Revolução Francesa, em 1789.
[3] Iremos nos referir a Diofanto de Alexandria sempre como Diofantes de Alexandria.

(EVES, 2011). Apesar dessas dificuldades, os chineses avançaram consideravelmente no estudo da matemática. Alguns de seus feitos:

> (1) criar um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de π, (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) desenvolver a regra de três, (11) aplicar a regra de falsa posição dupla, (12) desenvolver séries aritméticas de ordem superior e suas aplicações à interpolação e (13) desenvolver a geometria descritiva. (EVES, 2011, p.246-247)

Ainda segundo Eves (1995, p. 245-246), a matemática chinesa teve grande contribuição para a origem dos números negativos. Estudos apontam que os chineses foram os primeiros a idealizar os números negativos. Os números eram representados por meio de barras. As barras vermelhas representavam os números positivos e as barras pretas representavam, para os chineses, os números negativos.

Li Yeh (1192-1979) criou uma notação para os referidos números, sendo seu trabalho uma extensão da matemática dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, obra essa que é apontada como contendo a origem histórica do conceito dos números inteiros. Entretanto, os chineses não conceberam os números inteiros como entidades matemáticas independentes, embora os usassem em seus cálculos.

Contudo cabe destacar que Li Yeh, conforme observou Eves (2011, p. 246), "introduziu uma notação para números negativos, consistindo em traçar uma linha diagonal no dígito à direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês". Acredita-se ainda que os chineses tenham sido os responsáveis pela criação do símbolo utilizado para representar o zero, uma circunferência.

A Índia também deu sua contribuição para os números inteiros relativos. Importantes matemáticos, como Bhaskara (1114 – 1185) e Brahmagupta (598 –

668) se destacaram entre os indianos influenciando no estudo desse conjunto. Nesta cultura, os textos teóricos são abordados com foco no sistema de numeração decimal e posicional. Porém, a "data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida" (SOUZA, 2010, p.15).

> Os mais antigos espécimes dos numerais utilizados pelos indianos foram encontrados em pilares erguidos na Índia por volta de 250 a.C. Entretanto, nesses antigos escritos ainda não existe um símbolo para o zero e a notação posicional tampouco é empregada. Eles usavam um sistema de numeração com nove símbolos representando os números de 1 a 9 e nomes para indicar cada potência de 10. Por exemplo, escreviam 3 sata, 2 dasan, 7 para representar o número 327 e escreviam 1 sata, 6 para representar 106. A data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida [...] (SOUZA, 2010, p.15)

Brahmagupta, um dos primeiros matemáticos e astrônomo hindu, têm uma obra, cujo título é *Brahmasphuta Sidd'hanta*. Nessa obra podemos observar fundamentos para o desenvolvimento da álgebra, além de uma sistematização dos números inteiros por meio da álgebra. O zero é definido como a subtração de um número por ele mesmo.

> Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completar quadrados, esse método é hoje muitas vezes conhecido como método hindu. (EVES, 2011, p. 256)

Além de considerar os números negativos como débitos, este matemático, segundo MOL (2013, p.64), "[...] Estabeleceu regras numéricas para lidar com números negativos que, pela primeira vez, tiveram sua aritmética sistematizada", afirmando que "*positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo é positivo. [...] positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por positivo é negativo".*

Outro matemático dessa região foi Bhaskara, matemático comumente associado na matemática escolar à fórmula de resolução da equação do segundo grau[4].

> [...] as obras de Brahmagupta e Bhaskara e dos que viveram em seu tempo, contém muita coisa de interesse para a história da matemática, incluindo métodos de cálculo com número positivos e negativos, soluções de equações quadráticas e sistemas de equações lineares, e resultados básicos em análise combinatória. (BRESSOUD, 2002, p. 265)

Segundo Rezende (2003, p.139), os números hindus alcançaram a Europa através da civilização árabe. A preservação e a transmissão da matemática grega para a Europa medieval também foram realizadas por este povo de natureza tão eclética. Os árabes tanto se interessaram pela álgebra e aritmética pragmática dos hindus quanto pela geometria estética e formal de Euclides, Arquimedes e companhia.

Para realizar os seus estudos, os árabes construíram grandes "casas de sabedoria" para traduzir e estudar, principalmente, a obra científica dessas civilizações. Várias obras gregas, inclusive os Elementos de Euclides, foram traduzidas para a língua árabe e foram preservadas para o desenvolvimento da matemática européia.

Na Europa, a Igreja Católica tinha tanta influência que foi responsável pelos primeiros centros de pesquisa. MOL (2013, p.77), em seu texto, destaca que "o nascimento dessas instituições foi um marco na história das ciências, pois com poucos séculos de vida, elas passariam a ser o principal palco da atividade científica europeia".

Leonardo de Pisa (1175-1240), também conhecido como Fibonacci, é considerado o maior matemático da Idade Média. Em suas viagens pelo mundo árabe se interessou por Matemática. Se tratando dos números inteiros, Fibonacci afirmou: "o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações

---

[4] A fórmula na sua forma atual (com o uso de letras para representar os coeficientes, como "a", "b" e "c") começou a se desenvolver mais formalmente séculos depois, com matemáticos europeus como o francês **François Viète (1540-1603)** e **René Descartes (1596-1650)**, e não por Bhaskara. além disso, existem outros matemáticos mais antigos que já tinham conhecimento de tal fórmula. Sridhara (século IX), por exemplo, já tinha conhecimento de uma fórmula equivalente.

lineares e quadráticas [...] raízes negativas e imaginárias não são admitidas". O que mostra uma falta de entendimento sobre os números negativos, causando uma rejeição dos mesmos.

Com a base no que Diofantes de Alexandria enunciou, Simon Stevin (1634) desenvolve a regra dos sinais para a multiplicação de inteiros da seguinte maneira: "*Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos*."

Simon Stevin contribuiu para a compreensão da regra de sinais, que estabelece que o produto de dois números negativos resulta em um número positivo. Embora sua obra não tenha fornecido uma justificativa formal completa para essa regra, ele ajudou a popularizar a ideia e a sua aplicação na matemática. Ele certamente influenciou gerações posteriores de matemáticos. Em sua obra "Aritmética", ele explica a veracidade por dois métodos. Entretanto, sua explicação é rasa, uma vez que usa situações geométricas pautadas em exemplos numéricos particulares e não se estende a uma generalização. Na próxima seção analisaremos mais de perto suas contribuições.

Contudo, o caminho dos números relativos, especialmente os dos números negativos, ainda seria bastante controverso. René Descartes (1596-1650), por exemplo, que foi creditado por introduzir um sistema de coordenadas que serviu de base para a geometria analítica, negava explicitamente os números negativos. Glaeser (2010) destaca em seu artigo que Descartes denominou tais números por "raízes falsas" ou "números surdos", sugerindo que se evitassem o uso de tais números na matemática. Para ele, se ao resolver uma equação, encontrássemos números negativos, isto indicaria que a formulação do problema estava errada, e o enunciado deste problema, portanto, deveria ser reformulado. Surgem desse modo os primeiros sintomas de evitação ao uso dos números negativos. Na verdade, para Descartes a reta numérica é a união de duas semirretas opostas, com mesma direção. Mas os números são sempre positivos.

Outro matemático francês que também questionou o uso dos números negativos foi D'Alembert (1717-1783).

> Pelas regras da Álgebra, teremos x + 100 = 50 e x = - 50. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Enunciaríamos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos 100 – x = 50, e x = 50, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades negativas, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. 0 sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. (GLAESER, 1981, p. 19)

Nela é abordada a confusão sobre quantidades negativas, refutando a ideia de que são menores que zero. Número representa quantidades e, logo, não podem ser menores do que zero. Em seguida ele aborda as regras de sinais para a multiplicação:

> Eis porque o produto de -a por -b dá +ab; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais - de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades -a e -b só são precedidas pelo sinal - porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal +, e então seu produto seria +ab, o que significa a multiplicação de -a por -b, onde retiramos b- vezes a quantidade negativa -a. Ora, pela ideia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar -a por -b e, sim, +a por +b, o que dá o produto +ab. Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades negativas, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas negativas de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas. (GLAESER, 1981, p. 19 e 20)

D’Alembert era da Academia Francesa de Ciências e editor chefe da Enciclopédia Francesa. O impacto de seu trabalho foi significativo, tornando-se uma referência constante no debate sobre números negativos ao longo do século XVIII.

No artigo de Georges Glaeser (2010), ele destaca a resistência ao uso dos números inteiros relativos em vários campos do conhecimento. Contudo ele ressalta a contribuição positiva da óptica. Em particular, a óptica elementar, relacionada ao comportamento das lentes, oferece um bom exemplo de como os números inteiros relativos eram utilizados para se compreender suas aplicações.

Na óptica, os números inteiros relativos são usados principalmente na descrição das posições das imagens formadas por lentes. Quando se usa uma lente para formar uma imagem, o tipo de imagem (real ou virtual) e sua posição em relação à lente podem ser representados por números. A distância focal de uma lente pode ser considerada positiva ou negativa dependendo do tipo de lente. Para lentes convergentes (como as lentes de aumento), a distância focal é geralmente positiva, enquanto para lentes divergentes (como as lentes que corrigem miopia), a distância focal é negativa. Isso representa uma situação onde a lente pode "afetar" a luz de maneira oposta dependendo de sua curvatura. Quando se calcula a posição da imagem formada por uma lente, o sinal da distância da imagem em relação à lente também pode ser negativo, caso a imagem seja virtual (ou seja, formada do lado oposto ao objeto) e positiva se a imagem for real (do lado onde a luz converge após passar pela lente).

Na época em que essas ideias estavam sendo desenvolvidas, a concepção de números negativos não era tão clara ou intuitiva, e isso gerava resistência em sua aplicação. Portanto, o uso de números de números negativos foi se consolidando à medida que o entendimento dos fenômenos físicos e da matemática evoluiu.

Isso nos leva a ver como a física e a matemática se relacionam, com os números relativos ajudando a formalizar conceitos que são usados para descrever a realidade física.

MacLaurin (1698-1746) e Euler (1707-1783) foram outros matemáticos europeus que também deram sua contribuição. Mas isso discutiremos em mais detalhes na próxima seção. Por ora, passemos ao epílogo dessa história que teve a participação especial de Herman Hankel (1839-1873).

Em 1867, a obra de Herman Hankel sobre “Teoria dos sistemas dos números complexos” proporciona uma mudança significativa referentes à teoria dos números. Hankel foi responsável por desfazer uma série de incertezas e questionamentos que vinha desde as primeiras descobertas de Diofantes sobre os números inteiros. Já era o prenúncio da álgebra moderna. Se utilizando de propriedades algébricas, Hankel estende a multiplicação para os números inteiros. Aos olhos da álgebra moderna, a demonstração é trivial. Ela é exposta por Glaeser (2010) em seu texto desse modo:

$$a = a \times 0 = a \times (b + op.b) = ab + a \times (op.b)$$

$$0 = 0 \times (op.b) = (op.a) \times (op.b) + a(op.b)$$

Donde:

$$(op.a) \times (op.b) = ab$$

Essa revolução realizada por Hankel fez apontar não mais para números descobertos, mas inventados, imaginados. Antes, tudo era baseado na busca de modelos e exemplos, nos quais se verificavam de forma metafórica uma forma de interpretar os números negativos.

1.2 Os obstáculos epistemológicos dos números inteiros

1.2.1. A noção de obstáculo epistemológico

O que é conhecimento? Como se constrói o conhecimento? Essas são na verdade as duas questões que motivaram e continuam propulsando o campo da Epistemologia. Para Kant, por exemplo, “construir” significa representar numa intuição a priori alguma coisa de abstrato (um conceito, uma relação). Segundo o filósofo, o conhecimento matemático é “aquele que procede por ‘construção’ de conceitos”

Em verdade, ao fazer críticas à Razão Pura e à Razão Prática, foi Kant quem demoliu de uma só vez as atitudes idealistas e realistas frente ao conhecimento. Não à toa é considerado uma das grandes referências às teorias interacionistas em relação à construção do conhecimento. Piaget, biólogo e o grande pioneiro da teoria construtivista do conhecimento, apresentava uma visão biológica da cognição. Segundo Piaget, “Conhecer é transformar o objeto e transformar-se a si mesmo” neste processo de interação entre o indivíduo e o objeto. Outros teóricos construtivistas sucederam a Piaget. Um dos mais notáveis, foi o pesquisador soviético Vygotsky. Tal como Piaget, Vygotsky procurava responder com sua teoria do construtivismo sócio-histórico as questões fundamentais da epistemologia (o que é e como se constrói o conhecimento) no nível ontogenético[5], tomando como referência o sujeito aprendiz.

Em outra perspectiva, no nível filogenético[6], Bachelard (1967) propõe sua teoria de conhecimento, conhecida como Psicanálise do Conhecimento. Quem vai para o divã não é a criança, o aprendiz, mas o próprio conhecimento. É por meio do seu estudo na própria história do conhecimento que vamos revelar sua evolução e seus obstáculos. Nesse sentido, o autor faz do seu conceito de obstáculo epistemológico um elemento essencial para o entendimento do processo dinâmico de construção do conhecimento científico. E é em termos dos obstáculos que o conhecimento científico deve superar para romper o seu estado inercial que Bachelard procura estudar as condições reais para o progresso da ciência. Para Bachelard, é no ato mesmo de superar estas causas inerciais que se concretiza o progresso do conhecimento científico, e são essas causas inerciais, inerentes ao conhecimento, as que Bachelard chamou de obstáculos epistemológicos.

---

[5] Ontogenia: desenvolvimento de um indivíduo desde a concepção até a maturidade; ontogênese Houaiss, 2009).

[6] Filogenia: história evolutiva de uma espécie ou qualquer outro grupo taxonômico; filogênese, filogenesia (Houaiss, 2009).

> [...] é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparece por uma sorte de necessidade funcional a morosidade e as perturbações. E aí que mostraremos as causas da estagnação e mesmo do regresso; é aí que nós revelaremos as causas da inércia, que nós chamaremos de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1967, p.15)

Cabe aqui ressaltarmos que considerar estes obstáculos não se trata de incriminar "a fraqueza dos sentidos e do espírito humano" e nem de considerar os obstáculos externos como "a complexidade e a fugacidade dos fenômenos", como observou Bachelard. É no ato mesmo de conhecer que nós estamos contextualizando estes obstáculos. Não estamos querendo com isso negar a influência destes obstáculos externos, principalmente os fatores históricos e sócio-econômicos, no progresso das ciências. O que queremos, isto sim, é isolar criticamente essas variáveis para que possamos estudar e encontrar no próprio conhecimento as causas de sua inércia.

A noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática educacional. Na próxima seção faremos um estudo tendo como referência a história científica dos números relativos tendo como referência o artigo “Epistemologia dos números relativos” de Glaeser (2010). Com o desenvolvimento desse estudo perceberemos, como aponta o próprio Bachelard, que tudo aquilo que se encontra na história do pensamento científico está longe de ser o caminho natural do sujeito que se encontra no ato de conhecer.

1.2.2 O mapeamento dos obstáculos epistemológicos segundo Glaeser

O aprendizado dos números inteiros representa um dos momentos mais desafiadores no ensino de matemática, especialmente devido à transição dos números naturais para os inteiros. Mas, no seu processo histórico de construção, o desafio também foi muito grande. Como vimos na seção anterior, a introdução dos números inteiros foi um processo lento, durando mais de 1500 anos. Segundo Glaeser (2010):

> A introdução conceitual dos números relativos foi um processo surpreendentemente lento. Durou mais de 1500 anos, da época de Diofantes aos nossos dias! Durante todo esse tempo, os matemáticos trabalharam com números relativos, tendo deles apenas uma *compreensão parcial*, com espantosas lacunas.

Com base no texto de Glaeser (2010), daremos destaque aos obstáculos epistemológicos enfrentados pelos matemáticos ao longo da história. O entendimento desses obstáculos é de fundamental importância para o professor que irá ensinar tal assunto. Muitas dessas dificuldades decorrem de vários obstáculos epistemológicos, ou seja, dificuldades associadas ao próprio processo de construção do conhecimento matemático. Para desenvolver um processo de ensino e de aprendizagem que seja significativo os professores deverão ajudar os seus alunos a superarem esses obstáculos.

Os obstáculos epistemológicos, como dito anteriormente, são atribuídos às concepções prévias e à natureza abstrata dos conceitos envolvidos. Segundo o estudo de Glaeser (2010), os principais obstáculos epistemológicos relacionados aos números inteiros são:

> 1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
>
> 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
>
> 3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
>
> 4. A ambiguidade dos dois zeros (zero origem e zero absoluto).
>
> 5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
>
> 6. Desejo de um modelo unificador.

Os obstáculos epistemológicos no aprendizado dos números inteiros são inerentes à complexidade desse conceito e à forma como ele desafia as ideias prévias dos alunos. Com estratégias pedagógicas adequadas, é possível transformar essas barreiras em oportunidades de aprendizagem, promovendo uma compreensão mais ampla e significativa dos números inteiros e de suas propriedades.

Cada dificuldade identificada por Glaeser (2010) tem sua particularidade. Para o entendimento desses obstáculos, vamos analisá-los em pares.

Uma coisa é saber operar com os números negativos, outra bem diferente é atribuir sentido a essa operação. Muitos dos alunos conhecem as regras dos sinais para operar com os números relativos (superaram o primeiro obstáculo), mas muito poucs conseguem atribuir sentido para aquilo que fazem (obstáculo 2).

Já o terceiro e o quarto obstáculos estão relacionados. O terceiro interpreta a reta numérica como uma junção de duas semirretas. Já o quarto diz respeito a ambiguidade dos dois zeros (“zero absoluto” e o “zero origem”). Por muitos anos acreditava-se no “zero absoluto”, abaixo do qual nada poderia ser concebido, e isso dificulta enxergar o “zero origem” na reta numérica. Os obstáculos 3 e 4 estão relacionados à relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Por fim, temos os dois últimos obstáculos: o quinto é a dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos, buscando sempre retornar aos exemplos concretos. Adicionamos e multiplicamos números e não créditos e débitos, ou mesmo peras e maçãs. Já o sexto é a necessidade de sempre buscar um modelo unificador. Como disse uma vez Euler: “como uma dívida de 2000 escudos vezes uma dívida de 3000 escudos pode dar uma fortuna de 6 milhões de escudos?”. Com efeito, somar dívidas pode fazer sentido, mas multiplicar dívidas não faz o menor sentido.

Para compreender melhor esses obstáculos e seu desenvolvimento histórico vamos apresentar uma breve exposição da compreensão dos números relativos através dos séculos, procurando as passagens mais significativas levantadas por Glaeser (2010). Comecemos por meio de um quadro esquemático abaixo, elaborado por Glaeser (2010):

Quadro 1 – Superação dos obstáculos elaborado por Glaeser

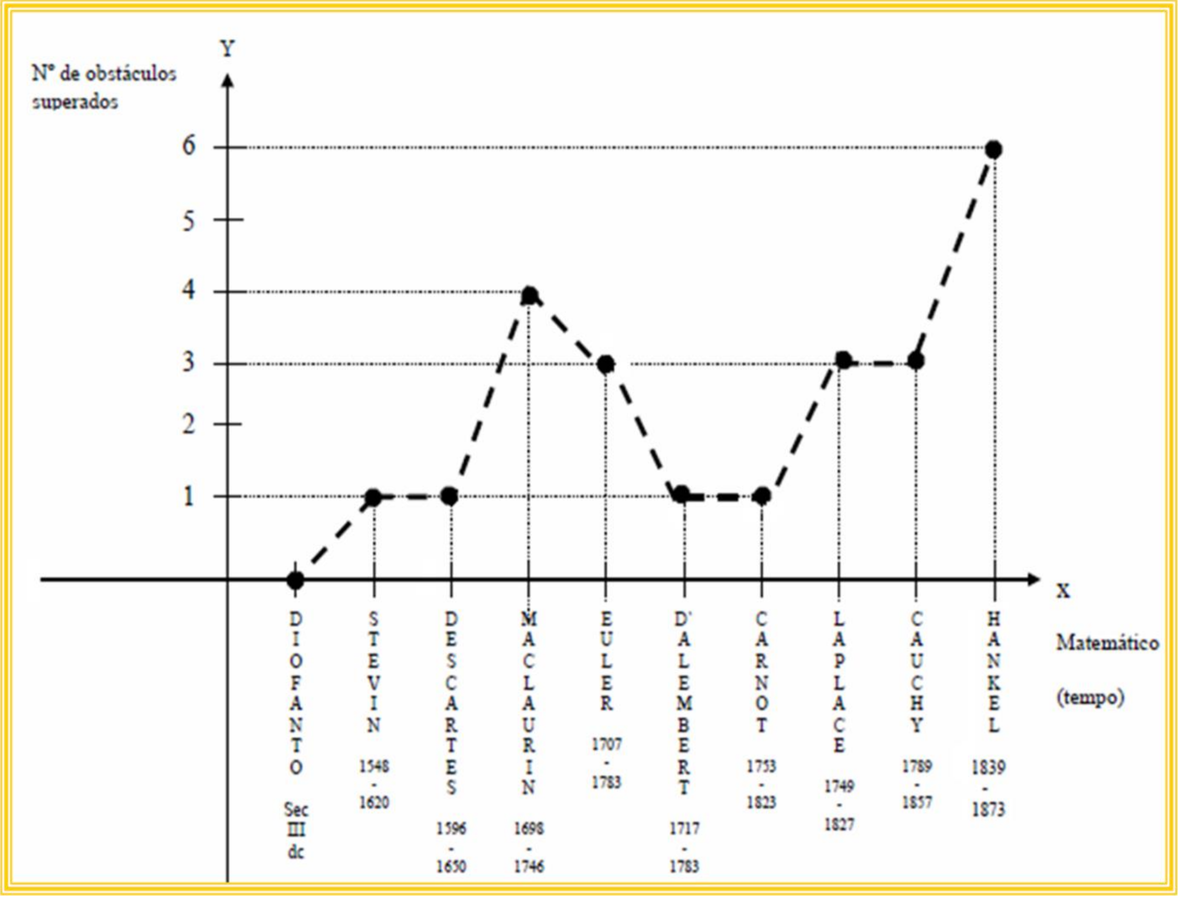
Obstáculos / Autores	1	2	3	4	5	6
Diofantes (Século III d.C.)	-					
Simon Stevin (1548-1620)	+	-	-	-	-	-
Rene Descartes	+	?	-	?	-	-
Colin Maclaurin	+	+	-	-	+	+
Leonard Euler	+	+	+	?	-	-
Jean D´Alembert	+	-	-	-	-	-
Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	-
Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Fonte: (GLAESER, 2010, p. 6)

No quadro, os sinais de + ou – indicam se o autor, pelo texto citado, terá ou não conseguido ou não transpor o obstáculo. O sinal de interrogação, designam os casos em que não conseguimos responder sobre as barreiras enfrentadas.

A partir desses dados, podemos fazer um gráfico “números de obstáculos superados” x “Matemáticos citados por Glaeser em ordem cronológica” (gráfico 1).

Gráfico 1: "Números de obstáculos superados" *versus* "Matemáticos citados por Glaeser em ordem cronológica"



Fonte: Acervo próprio

Observando o gráfico, percebe-se que a evolução dos números relativos não é crescente e linear, muito pelo contrário, ela possui altos e baixos, momentos de progresso e de regresso que fazem parte do processo evolutivo de um conhecimento científico. Passemos ao nosso passeio histórico.

A origem da regra dos sinais é creditada a Diofantes de Alexandria (Século III d.C.), onde não faz nenhuma referência aos números negativos, porém em seu livro "Aritmética (Diofantes), ao relatar o produto de duas diferenças, escreve "*O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta."* (Glaeser, 2010).

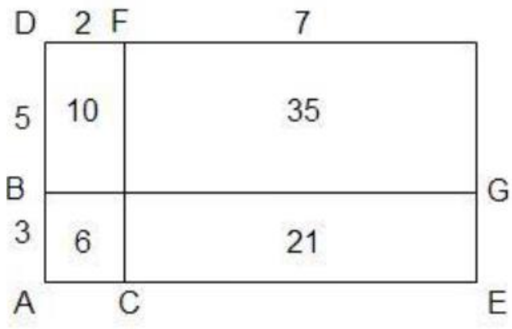
Ele não apresenta prova para a regra, desta forma não supera nem o primeiro obstáculo epistemológico, mas é apontado por vários historiadores como o primeiro registro das regras dos sinais para a multiplicação de números inteiros.

Vimos na seção anterior que diversas civilizações contribuíram para o desenvolvimento nos números negativos, mas eles não recebem destaque por parte de Glaeser (1985) em sua obra. O próximo nome em sua lista é Simon Stevin (1548-1620), considerado por muitos como o “Arquimedes da Idade Média”. Em sua obra *Aritmética*, Stevin elabora uma “mostração” (e não uma demonstração) de que o produto de dois números negativos deve ser positivo:

> Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.
>
> Explicação do dado:
>
> Seja 8-5 multiplicado por 9-7, deste modo: - 7 vezes -5 faz + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - por -, faz +). Depois - 7 vezes 8
>
> faz -56 (-56, porque, como está dito no teorema, - por +, faz -).
>
> E similarmente seja 8-5 multiplicado pelo 9, e darão
>
> produtos 72 - 45; depois juntem +72+35, fazem 107.
>
> Depois juntem os -56 - 45, fazem -101; e subtraído o 101
>
> de 107 resta 6, para produto de tal multiplicação. Da qual a
>
> disposição dos caracteres da operação é este ao lado:
>
> $$\begin{array}{rrr} & 8 & -\ 5 \\ & 9 & -\ 7 \\ \hline & -56 & -35 \\ 72 & -45 & \\ \hline 6 & & \end{array}$$
>
> Explicação do quesito:
>
> É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que - por -, faz +, e que + por -, ou - por + faz -.
>
> Demonstração:
>
> O multiplicador 9-7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e - por - dá produto +, e + por -, ou - por +, dá produto -, portanto o teorema é verdadeiro.
>
> Outra demonstração geométrica:

Seja AB 8 - 5 (a saber AD 8 - DB 5).

Depois AC 9 - 7 (a saber AE 9 - BC 7), seu produto será CB; ou ainda de acordo com a multiplicação precedente ED 72 - EF 56 - DG 45 + GF 35, os quais nos mostrarão serem iguais a CB desse modo. Em suma, ED + GF, subtraído de EF e DG, resta CB.



Conclusão:

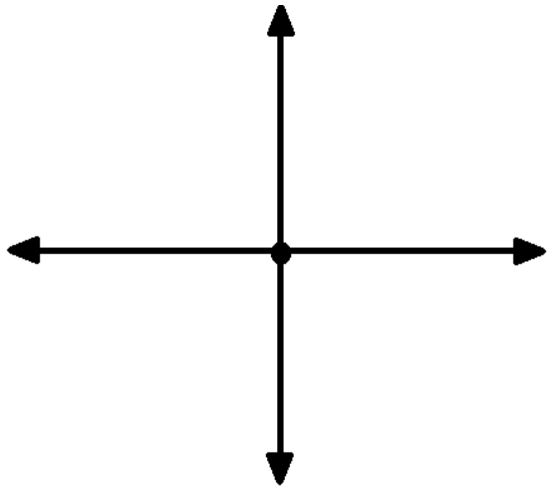
Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar."

(*apud* GLAESER, 2010, p.9)

Simon Stevin usa argumentos baseados em exemplos numéricos, não aparecendo números negativos isolados. O matemático supera o primeiro obstáculo, mas não supera o segundo obstáculo. Para Simon Stevin, a ideia de número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa, e assim não fica coerente aceitar o uso dos números negativos. Por conta disso, usa estratégias geométricas para evitar seu uso. Esses procedimentos, que renunciam o uso dos números negativos, são chamados de sintomas de evitação.

Outro matemático que se opôs de forma veemente ao uso de números negativos foi René Descartes. Em seu livro Geometria (1628) tem uma parte dedicada exclusivamente para se livrar das raízes falsas, mostrando sua insegurança para trabalhar com números negativos (os números "surdos", números negados). Em verdade, o plano cartesiano seria formado por quatro semi retas justapostas na mesma direção e sentidos contrários, duas a duas: (figura 1).

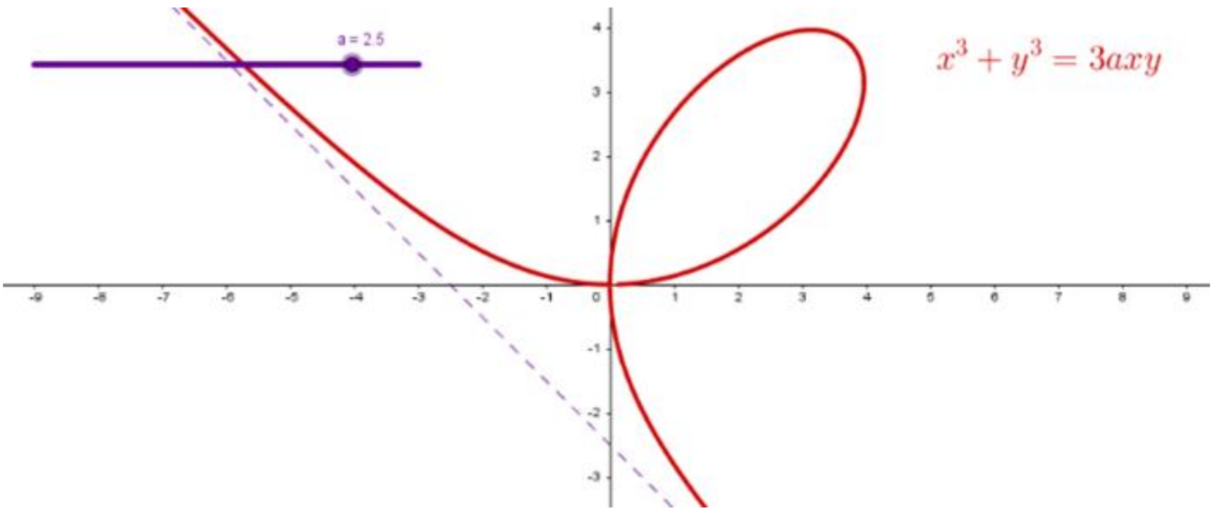
Figura 1 - Ilustração do “plano cartesiano”



Fonte: acervo do autor

De fato, ao considerarmos apenas o primeiro quadrante, a curva $x^3 + y^3 = 3axy$ realmente se assemelha a uma “folha”, nome dado por Descartes para tal curva.

Figura 2 - *Folium* de Descartes



Fonte: acervo do autor

Os números negativos passam a aparecer nos trabalhos científicos com mais naturalidade a partir do século XVII, sendo aceito, pois a eficácia do seu cálculo é o suficiente para confortar o matemático em sua fé. Porém, no campo epistemológico não há argumentos satisfatórios. Em trabalho “Tratado dos Fluxos” (1742), MacLaurin (1698-1746) reforça esse ponto de vista. Segundo o matemático “*O uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propicia ideias aparentemente sem qualquer fundamento real*” (MacLaurin, 1742 *apud* Glaeser, 1985, p.316). Contudo, conforme observa Glaeser (2010), o matemático não consegue superar o obstáculo (3). Segundo o educador matemático, MacLaurin não compreendendo a relação entre os números positivos e negativos, considera elas como quantidades heterogêneas. Há uma outra obra de MacLaurin que se tornou referência no continente europeu, seu “Tratado de Álgebra”, apresenta as quantidades negativas de forma satisfatória, porém, segundo Glaeser (2010):

> (...) a compreensão está longe de ser adquirida, sob o efeito dos obstáculos (3) e (4), visivelmente não transpostos. Entretanto, o autor reconhece implicitamente que o que é absurdo de fazer com o zero absoluto é perfeitamente legítimo com um zero origem.

O texto de MacLaurin aborda formalmente a demonstração da regra dos sinais:

> Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que *os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -.* Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade.
>
> +*a* - *a* = 0; assim, multiplicando +a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por *n*, terei como primeiro termo +*na*, portanto o segundo será -*na*, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão - no produto. Se multiplico +*a* - *a* por - *n*, de acordo com o caso precedente, obterei-*na* como primeiro termo; logo terei +*na* como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto". (MACLAURIN, 1748 *apud* GLAESER, 2010, p.14)

O texto apresenta uma evolução, pois aborda formalmente a regra dos sinais, mostrando que MacLaurin obteve certa vantagem, comparado aos demais autores citados. Porém, até que ponto ele assume esse formalismo? Segundo Glaeser (2010) Ele esbarra nos obstáculos (3) e (4) sendo incapaz de apresentar a teoria dos números negativos como desejado. Apesar de ter quase resolvido o problema dos números inteiros, os leitores de MacLaurin não se apropriaram destas descobertas e os próximos autores que vamos citar acabaram por provocar um retrocesso na história evolutiva dos números relativos.

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático que manejava os números inteiros com maestria, sem levantar questões sobre sua legitimidade. Porém em uma obra pedagógica, destinada a principiantes (Euler, 1770), o matemático comete equívocos ao justificar a regra dos sinais:

> 1. A multiplicação de uma *dívida* por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de *a* escudos fazem uma dívida de 3*a* escudos. Logo *b* x (-*a*) = -*ab*.
>
> — Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma *operação externa*. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.
>
> 2. Por comutatividade, Euler deduz daí que (-*a*) x *b* = -*ab*.
>
> — Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos?
>
> 3. Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto (-*a*) por (-*b*).
>
> — É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto de decidir entre +*ab* e -*ab*. Como (-*a*) x *b* já vale -*ab*, a única possibilidade restante é de que (-*a)* x (-*b*) = + *ab*. (!!!) (*apud* GLAESER, 2010, p.15-16)

Como visto, seus argumentos não são claros. Com feito: o produto de um número par por um número ímpar é um número par; o de um número ímpar por um número par também é um número par; o produto de dois números ímpares é um número ímpar; mas o fato existirem tantos números pares quanto números ímpares, não implica que o produto de dois números pares sejam um número ímpar. A obra de Euler (1770) também apresenta inconsistências sobre a unificação da reta numérica. Apesar disso, segundo Schubring (2000), foi por meio do tratamento das regras de sinais por Euler que os números negativos foram difundidos e desenvolvidos a partir do século XVIII. Por ora, voltemos à França.

Dois outros matemáticos franceses demonstraram grande dificuldades de compreensão em relação às quantidades negativas: Lazare Carnot (1753-1823) e D'Alembert (1717-1783). Este último, em seu artigo *Negativo*, D´Alembert expõe, por exemplo, que:

> "As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo, começa o negativo. *Veja POSITIVO*.
>
> Deve-se confessar que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundi-la, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. Os que pretendem que 1 não é comparável a -1 e que a relação (razão) entre 1 e -1 é diferente da razão entre -1 e 1 incidem num duplo erro: 1º - porque, todos os dias, nas operações algébricas, dividimos 1 por -1; 2º - a igualdade do produto de -1 por - 1, e de + 1 por + 1 revela que 1 está para - 1 assim como - 1 está para 1.
>
> Considerando a exatidão e a simplicidade das operações algébricas com quantidades *negativas*, somos levados a crer que a ideia precisa que se deve fazer das quantidades negativas é uma ideia simples, não dedutível, absolutamente, de uma metafísica alambicada. Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se, primeiro, notar que as quantidades a que chamamos *negativas* e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na Geometria, onde as linhas *negativas* só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. *Veja CURVA*. Daí, é natural concluir que as quantidades *negativas* encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma ideia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x, que somado a 100 perfaça

50. Pelas regras da Álgebra, teremos $x + 100 = 50$ e $x = - 50$. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Anunciaremos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade *x* que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos $100 – x = 50$, e x = 50, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades *negativas*, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. 0 sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. *Veja EQUAÇÃO*.

Note-se que estamos falando de quantidades *negativas* isoladas, como -a, ou das quantidades a - b, em que b é maior que a; pois, para aquelas em que a - b é positivo, isto é, em que b é menor que a, o sinal não acarreta qualquer dificuldade. Realmente, pois, não existe absolutamente quantidade *negativa* isolada. -3 tomado abstratamente, não apresenta qualquer ideia ao espírito; mas se digo que um homem deu a outro -3 escudos, isto quer dizer, em linguagem inteligível, que ele lhe tirou 3 escudos.

Eis porque o produto de -a por -b dá +ab; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais - de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades -a e -b só são precedidas pelo sinal - porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal +, e então seu produto seria +ab, o que significa a multiplicação de -a por -b, onde retiramos b- vezes a quantidade negativa -a. Ora, pela ideia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar -a por -b e, sim, +a por +b, o que dá o

produto +ab. Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades *negativas*, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades *negativas*

> são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas *negativas* de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas.
> (D'ALEMBERT, 1751 *apud* GLAESER, 2010, p.18-20)

Seu artigo serviu de referência para outros autores por aproximadamente um século. Talvez o seu leitor mais assíduo tenha sido Lazare Carnot (1753-1823). Este último apresentou, segundo Glaeser (2010), diversas situações "paradoxais" no comportamento das quantidades negativas:

> Uma multidão de paradoxos, ou antes de palpáveis absurdos resultaria da mesma noção; por exemplo: -3 seria menor que 2; contudo, $(-3)^2$ seria maior que 22, ou seja, entre duas quantidades diferentes, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, o que afronta todas as ideias clara que se poderiam formar sobre a quantidade.
>
> Passemos à segunda noção, que consiste em dizer que as quantidades negativas só diferem das quantidades positivas por serem tomadas em sentido oposto. Esta ideia é engenhosa, mas não é mais justa que a precedente. De fato, se duas quantidades, uma positiva, outra negativa, sendo ambas reais e não diferindo senão por sua posição, por que a raiz de uma seria uma quantidade imaginária, enquanto a da outra seria efetiva? Por que $\sqrt{-a}$ não seria tão real quanto $\sqrt{a}$? Pode-se conceber uma quantidade efetiva da qual não se possa extrair a raiz quadrada? E de onde proviria o privilégio da primeira em conceder seu sinal ao produto (-*a*) x (+ *a*)?
> (apud GLAESER, 2010, p.21-22)

Tanto D'Alembert como Lazare Carnot foram membros da Academia Francesa de Ciências. Portanto, podemos concluir que, na virada do século XVIII para o século XIX, a comunidade científica francesa não aceitava tão bem o estudo das quantidades negativas.

Outro francês, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), mostra o mesmo embaraço que seus antecessores, para apresentar a regra dos sinais:

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de -a por -b seja o mesmo que o de a por

> b. Para tornar sensível essa ideia observaremos que o produto de -a por +b e -ab (porque o produto nada mais é que -a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de -a por (b-b) é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de -a por +b é -ab, o produto de -a por -b deve ser de sinal contrário, ou igual a + ab para destruí-lo. (*apud* GLAESER, 2010, p.27)

Podemos ver no seu texto, que Laplace usa a mesma argumentação de Euler para demonstrar b x (-a) = -ab, usa a propriedade distributiva e não consegue um modelo físico para dar exemplo. Ao empregar as palavras “sensível” e “deve ser” mostra ainda sua insegurança com relação às justificativas de suas afirmações. Como se pode observar, a dificuldade maior reside em explicar porque “*menos vezes menos dá mais!*”. Outro matemático notável da escola francesa, querendo contribuir para essa discussão, também se aventura a apresentar seus argumentos. Trata-se de August Cauchy (1789-1857), o fundador do Cálculo Moderno.

Em 1821, Cauchy, em seu curso destinado a Escola Politécnica, apresenta a seguinte ideia:

> Do mesmo modo que se vê a ideia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a ideia de quantidade (positiva ou negativa), se considerarmos cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou a diminuição de outra grandeza fixa da mesma espécie. Para indicar essa destinação, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal +, e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal -.
>
> Isto posto, os sinais + ou - colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal - pelo nome de quantidades negativas". (*apud*, GLAESER, 2010, p.28)

No seu texto os sinais de “-” e “+” assumem uma característica simbólica, apresentando dois significados distintos: ora como operatórios, indicando uma ação (oposto ou elemento simétrico); ora como predicativo, que qualificam a natureza do número (positivo ou negativo). No texto de Cauchy, vemos ele usar essas metáforas na tentativa de explicar as regras dos sinais, porém ele se confunde entre os sinais operatórios e predicativos que ele próprio citou, sem alertar sobre esse abuso:

> Com base nessas convenções, se representamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos
>
> A = + A, b = -A
>
> teremos,
>
> +a = +A, +b = -A,
>
> -a = -A, -b = +A.
>
> Se, nas quatro últimas equações, atribuirmos a a e b seus valores entre parênteses, obtemos as fórmulas
>
> +(+A) = +A, +(-A) = -A,
>
> -(+A) = -A, -(-A) = +A. (1)
>
> Em cada uma destas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos de produto dos dois sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais é formar seu produto. Apenas o exame das equações (1) basta para estabelecer a regra dos sinais, compreendida no teorema que vou enunciar.
>
> 1° teorema: O produto de dois sinais iguais é sempre +, e o produto de dois sinais opostos é sempre -.” (*apud*, GLAESER, 2010, p.29-30)

Cabe destacar ainda que Cauchy ainda apresentava certo desconforto ao abordar números complexos, sendo encarados pelo matemático como “sem sentido em si mesmos”. Isso demonstra que a natureza dos números relativos é muito próxima, do ponto de vista epistemológico, dos números complexos. Não à toa a fundamentação dos números inteiros será realizada pelo matemático alemão Hermann Hankel em um artigo sobre números complexos. Compreender a existência de um número imaginário (cujo quadrado é um número negativo) é da mesma estirpe que conceber a existência de números negativos, números surdos, raízes falsas que não dizem nada. Número deixa de ser um estado, resultado de um processo de contagem ou medida para ser uma ação. A necessidade de estender as operações aritméticas para trabalharmos com esse novo conceito de números inteiros veio com o filósofo francês Condillac. Essa extensão se baseava em redefinir o significado das operações. Ele trabalhava com a diferença entre dois "dialetos". A saber:

O dialeto da aritmética e o dialeto da álgebra: esse dialeto [a álgebra] tem regras que precisam ser conhecidas, e é uma nova gramática a ser aprendida. (CONDILLAC, 1981, p. 275). E ele advertiu: "Quando se misturam estes dois dialetos, não é possível evitar cair em expressões contraditórias" (CONDILLAC, 1981 p. 296).

Segundo Schubring (2002), foi com a operação de multiplicação que a mistura desses "dialetos" causou mais estranheza.

> Classicamente, segundo Euclides VII, def. 15, a multiplicação foi definida somente para números inteiros: como adição repetida de um número, e assim com um papel assimétrico entre multiplicando e multiplicador. Devido a este papel assimétrico, foi admissível estender a multiplicação ao caso de repetir uma grandeza, então de multiplicar uma grandeza por um escalar. Mas a multiplicação entre duas grandezas foi excluída porque uma grandeza não pode funcionar como multiplicador. Porém, a prática na geometria e na física sempre voltava a exigir multiplicar duas grandezas – o que acarretou que o produto não mais fosse homogêneo ao multiplicando, como exigido pela definição da operação (SCHUBRING, 2002, p.26-52)

Entretanto, a solução definitiva para a explicação das "regras dos sinais" para os números inteiros é apresentada apenas por Hermann Hankel, no século XIX, no contexto do desenvolvimento da álgebra abstrata. Foi no seu trabalho "Teoria dos sistemas dos números complexos" (1867) que todos os obstáculos referentes aos números inteiros são ultrapassados. Em seu texto que trata da exposição formal da teoria dos números complexos, foi de passagem, a título preliminar, que ultrapassou formalmente os obstáculos dos números negativos. Assim, como diz Gleaser (2010), a trivialização dos números relativos se estendeu por mais de quinze séculos enquanto os números complexos só perturbaram os matemáticos por cerca de quatro séculos.

Hankel aborda o problema de uma perspectiva diversa, conhecendo as propriedades aditivas em $\mathbb{R}$ e a multiplicação em $\mathbb{R}^+$, propõe estender a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$, respeitando o princípio da permanência, onde a existência da unicidade dessa extensão resulta no teorema: única multiplicação em $\mathbb{R}$, que estende a multiplicação usual em $\mathbb{R}^+$, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais. A seguir apresentamos os principais de seu argumento.

$$a = a \times 0 = a \times (b + op.b) = ab + a \times (op.b)$$

$$0 = 0 \times (op.b) = (op.a) \times (op.b) + a(op.b)$$

Donde:

$$(op.a) \times (op.b) = ab$$

Um fato interessante a ser observado é que, em sua demonstração, o matemático alemão não utiliza o caráter ambíguo para o sinal de “-” (atributo e oposto). E assim, no processo histórico temos um fechamento para a questão “por que menos vezes menos dá mais”? Contudo, o fato da operação matemática "menos vezes menos" resultar num número positivo gerou um desconforto na construção real do significado dessa operação em todo o processo de construção dos números relativos. Fato que persiste nos dias atuais. Muitas mentes matemáticas foram traídas ao usar modelo comercial de crédito e débito para a explicar as operações com números positivos e negativos, recurso ainda utilizado pelos professores.

> O modelo comercial, denominado assim por Glaeser (2010), baseia-se em problemas de balanço do tipo crédito/débito, ganho/perda, sobe/desce, presente/futuro, enche/esvazia etc. São modelos concretos, bastante comuns, que

> associam, por exemplo, ao sinal “+” o lucro e ao sinal “–” o prejuízo. Assim, alguém que perdeu R$ 8,00 em um dia e no dia seguinte perdeu R$8,00, perde ao todo R$ 16,00. As contas são feitas da seguinte maneira: –8+ (–8) = –16 ou 2 × (–8) = –16. (MORETTI, 2012, p.699).

Glaeser (2010) na conclusão do seu artigo sobre a construção dos números inteiros “mostra precisamente um caso em que uma pedagogia baseada exclusivamente em exemplos concretos é perniciosa”. O ensino de números inteiros é, com efeito, a porta de entrada do ensino de álgebra na educação básica. Eis então um dos grandes desafios da educação fundamental. Nos capítulos seguintes veremos como esse tema é abordado.

Capítulo 2: As dificuldades no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos

Neste capítulo faremos uma revisão de literatura de dissertações no portal do Profmat e de artigos, dissertações e teses no portal da Capes, que discutam o aprendizado de números inteiros. Apesar da busca ter inúmeros resultados, destacamos abaixo, na tabela, os mais relevantes para o escopo deste trabalho.

Quadro 2: Listagem dos textos selecionados para a revisão

Nº	Autor	Título	Instituição/ Revista
1	Humberto Todesco	Um Estudo com os Números Inteiros nas Séries Iniciais: Reaplicação da Pesquisa de Passoni	PUC – SP (2006)
2	Maurício De Souza Machado	Estratégias Pedagógicas com Uso de Tecnologia de Informação e Comunicação: Uma Abordagem Para a Construção de Conhecimento em Operações Aritméticas Básicas e nas Chamadas “Regras de Sinais”	PUC – SP (2010)
3	Sanileni Gutemberg Dos Santos	Números Inteiros: Estratégias que Visam Facilitar a Compreensão de Conceitos e Operações	UFRJ (2015)
4	Fabulo Eugenio Danczuk	Diversificação de Tarefas Como Proposta Metodológica no Ensino dos Números Inteiros	UTFPR (2016)
5	Lyvia Poggian Correia	Uma Intervenção no Ensino de Operações com Números Inteiros.	UENF (2017)
6	Francelise Ide Alves Ferreira	Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem Para o Estudo de Números Inteiros	UEL (2019)
7	Andressa Alves Gonçalves de Oliveira	Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros por Meio de Materiais Manipuláveis: uma Experiência no Sétimo ano do Ensino Fundamental	UFRRJ (2020)
8	Cibele Passos Bezerra Lara	Uma Proposta de Ensino dos Números Inteiros Baseada na Resolução de Problemas	UFES (2021)
9	Brenda Pavão Garcez	Jogos de Matemática para a Aprendizagem de Números Inteiros no Ensino Fundamental: Propostas a Partir da Classificação Esar	UEMS (2021)
10	João Francisco Staffa Da Costa	Aprendendo Números Inteiros: Uma Experiência Baseada na Teoria dos Campos Conceituais	REMat (2023)

11	Luiz Gustavo Alvez Silva	Jogos de Tabuleiro no Ensino de Números Inteiros: Uma Proposta de Sequência Didática	UNIFAL (2023)

Fonte: Elaboração do autor

2.1. Dificuldades de aprendizagem no ensino de números inteiros

O que os autores falam sobre as dificuldades de aprendizagem no ensino dos números inteiros?

Os números inteiros hoje é um tema consolidado na matemática acadêmica, mas nem sempre foi assim, como discutimos no Capítulo 1. No ensino, as dificuldades na aprendizagem por parte dos alunos ainda permanecem. Para Oliveira (2020), em sua dissertação de mestrado (p.49), argumenta sobre as dificuldades enfrentadas por alunos no que diz respeito aos números inteiros. Segundo os PCN:

> Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. (BRASIL, 1998*, apud Oliveira, 2020, p.49)*

É citado também as dificuldades relacionadas ao próprio aprendizado, que Glaeser lista em seu artigo. Segundo a autora, ter conhecimento dessas dificuldades auxilia os professores a melhorarem suas estratégias no processo de aprendizagem dos alunos. Adiante, destaca a importância de os números inteiros serem trabalhados dentro das vivências dos alunos a fim de não ser um conteúdo isolado, sem sentido.

Os PCN também apresentam uma lista com as dificuldades encontradas pelos alunos ao aprender números inteiros:

> • conferir significado às quantidades negativas;
>
> • reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
>
> • reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
>
> • perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais, por exemplo, é possível adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado, como também é possível subtrair um número de 2 e obter 9;
>
> • interpretar sentenças do tipo x = - y, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo). (BRASIL, 1998, p. 98)

Na página 52, em sua dissertação, Oliveira (2020) apresenta os resultados das pesquisas realizadas por Nascimento (2004), Gonçalves (2007), Soares (2008), Meister (2009) e Pontes (2010), que servem para reforçar a dificuldade dos alunos em trabalhar com Números Inteiros.

Podemos destacar a fala de Meister (2009):

> A maioria dos alunos não compreende o significado e a ordenação desses números, como também as famosas “regras de sinais” que lhe são ensinadas. Eles conseguem aplicar normalmente e sem muitas dificuldades essas regras na multiplicação dos números inteiros, mas confundem-se ao operar com esses números na adição e subtração. (MEISTER, 2009, p. 43)

Gonçalves (2007), já ressalta a importância da contextualização, "*[...] um dos empecilhos é o professor apresentar os Números Inteiros com atividades descontextualizadas, focalizando o ensino nos estudos das operações.*” (GONÇALVES, 2007, p. 82). Novamente, aparece a importância de utilizar um exemplo que faça parte do universo do aluno, que esteja dentro de um contexto que lhe seja familiar.

A utilização de outros trabalhos feitos com a mesma temática, onde eles serviram de apoio para fundamentação de ideias, inclusive que nosso capítulo 2 será feito dessa forma, o que já me permite observar como são feitas as citações de outros trabalhos que podemos utilizar.

Segundo Garcez (2021), tendo como referência o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2017, 33% dos alunos do 5º ano e 63% do 9° ano do ensino fundamental apresentaram níveis insuficientes em Matemática. Temos clareza que essa dificuldade abrange não apenas os números inteiros, mas, por outro lado, reconhecemos que o ensino desse tópico contribui de forma negativa para esse resultado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que a aprendizagem desse conteúdo é insatisfatória, muitas vezes se limitando à memorização de regras sem compreensão significativa. Há a necessidade de um ensino que promova a compreensão dos números inteiros como uma extensão dos números naturais, em vez de apenas decorar regras.

Os alunos frequentemente não compreendem por que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo. A analogia de multiplicar duas dívidas para obter lucro é usada para ilustrar essa confusão, pois não faz sentido lógico. Além disso, alunos que já conhecem as regras de sinais podem cometer erros ao aplicar essas regras em operações de soma. Por exemplo, ao calcular $-2 - 3$, alguns alunos podem erroneamente atribuir o resultado como $+5$, confundindo a regra de sinais da multiplicação com a da soma, o que representa um obstáculo didático.

Assim, entender como funciona a aprendizagem de números inteiros se torna algo urgente. Outro ponto a ser observado é a duplicidade de significados para os sinais “+” e “-”. Segundo Ferreira (2019):

> Há neste conjunto numérico uma mudança em relação ao significado dos sinais de mais e de menos, que além de operadores agora também tem o significado de predicativos o que causa confusões e dúvidas que acompanham os alunos até o Ensino Médio. (FERREIRA, 2019, p.10)

A dissertação tem início com o relato da experiência da autora em sala de aula, onde, ao longo dos anos, ela observa a recorrente dificuldade dos alunos em relação aos números inteiros e suas operações. O conjunto dos números inteiros, de fato, gera confusão, especialmente no que diz respeito aos significados dos sinais de adição e subtração. Quando essa dificuldade não é superada no momento adequado, pode acarretar sérios prejuízos no processo de aprendizagem. Trata-se de um desafio antigo: como aponta Glaeser, durante mais de 1.500 anos, diversos obstáculos dificultaram a compreensão desses conceitos. Por isso, é compreensível a resistência frequentemente observada em sala de aula em relação aos números inteiros. Por exemplo, na sentença a seguir, (+5) - (-3) = (+5) + (+3), que está correta, temos dois significados distintos associado ao sinal de "-", o da operação de "subtração" e o que indica o "atributo" do número (ele é negativo). Além disso, para que aparecesse o sinal da adição na sentença, outro sinal de "-" operou implicitamente, o de "oposto" (ou elemento simétrico): (+5) - (-3) = (+5) + [- (-3)] = (+5) + (+3).

Das dificuldades enfrentadas, destacamos o produto de números inteiros como sendo uma das principais. Como dito na epígrafe do artigo de Glaeser: "*Minus times Minus equals Plus: The reason for this we need not discuss*". Isto é, saber porque um número negativo multiplicado por um número negativo é positivo foi e (ainda é) a maior dificuldade na aprendizagem deste tópico. Danczuk (2016) corrobora esse fato.

> Um dos obstáculos que se nota com bastante frequência é a falta de sentido real quando se multiplicam dois números negativos e se obtém um resultado positivo. Não faz sentido multiplicar duas dívidas e obter um lucro. Outra situação se apresenta quando os alunos já são conhecedores das regras de sinais e, erroneamente, atribuem resultado +5 quando a expressão é $-2 - 3$, por exemplo. Isso ocorre devido o aluno tentar aplicar a regra de sinais na soma, um obstáculo didático criado a partir da regra de sinais para a multiplicação. (DANCZUK, 2016, p.31)

Machado (2010) retrata bem a dificuldade dos seus alunos relacionadas a regra de sinais:

> Ao se depararem com as dificuldades, os alunos solicitaram que fosse colocada na lousa a chamada 'tabela com as regras de sinais'. Respondi que não sabia do que se tratava e logo os

> alunos começaram a explicar: “- Menos com menos dá mais, mais com menos dá menos”, e assim por diante. (MACHADO, 2010, p.20)

O autor relata o trecho acima após os alunos apresentarem dificuldades relacionadas à regra de sinais dos números negativos, estando na segunda série do ensino médio em uma escola estadual do estado de São Paulo. Acredito que continuemos passando por essa problemática, e a pergunta que o pesquisador fez continua pertinente: como podemos minimizar os problemas em relação às quatro operações com números inteiros?

2.2. Qual a razão para essas dificuldades de aprendizagem?

O que diz a literatura acadêmica? À que (ou, à quem) os pesquisadores atribuem essas dificuldades? À Metodologia? À formação do professor? À falta de recursos didáticos para o ensino desse tópico?

Para, Costa (2023):

> [...] nota-se a dificuldade dos estudantes em operar com números negativos (MEGIID, 2001), não possuindo a competência preconizada na BNCC. Tal dificuldade pode ter origem no fato desse conjunto numérico ter surgido de uma necessidade interna da Matemática – algébrica - e não como uma demanda prática, como os números naturais, cujo surgimento está associado à contagem (SÁ; ANJOS, 2011). (COSTA, 2023, p.2)

Embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) proponha que alunos do 7° ano sejam capazes de manipular quantidades e operações com números negativos, o que se vê é uma grande dificuldade de compreensão e outras vezes um conhecimento raso, baseado em decorar regras, sem entender o porquê. De fato, o trecho acima deixa uma reflexão acerca de como os números inteiros não são necessariamente uma demanda prática do dia a dia como os números naturais.

Correia (2017), ao citar os trabalhos de *Barbosa e Carvalho (2008) e Soares (2008),* corrobora esse raciocínio.

> Então, as situações utilizadas na sala de aula são diferentes das situações cotidianas, ou seja, os significados dos conceitos que o aluno vivencia na escola são distintos dos vivenciados diariamente. Barbosa e Carvalho (2008, p. 8) dizem que pesquisas educacionais, realizadas ao longo dos anos, apontam que o processo de ensino-aprendizagem é muito complexo e conclui-se que a aprendizagem matemática é fundamentada na compreensão, e não apenas no ato de decorar conteúdos.
>
> [...] muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente por não terem desenvolvido uma compreensão significativa desse conjunto numérico, sobretudo no que tange ao número inteiro negativo (SOARES, 2008, p. 17).
>
> Assim sendo, o aluno não irá saber gerir conhecimentos matemáticos em sua vida se tais conhecimentos, na escola, não traduzirem a realidade. Além disso, o ensino desvinculado de situações reais pode provocar no aluno uma série de dificuldades no desenvolvimento de operações envolvendo números inteiros, o que não prejudicará apenas a aprendizagem deste conjunto numérico, mas também de muitos outros conteúdos posteriores. (CORREIA, 2017, p. 25-26)

Por outro lado, considerando o ambiente universitário, Lara (2021) observa outra indicação para as dificuldades de aprendizagem relacionadas ao ensino de números inteiros: a formação do professor.

> Nos campos universitários, percebe-se a mobilização de culpar o domínio matemático dos professores do Ensino Básico pelo fracasso em lecionar matemática. Assim, as suas mobilizações majoritariamente envolvem continuar ensinando conteúdos matemáticos que normalmente não são abordados nas escolas, como: Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra e Análise. Vale ressaltar que esses conteúdos são cruciais na graduação, porém esses devem ser abordados de forma mais direcionada ao ensino da matemática.
>
> O fracasso do ensino matemático vai além dos problemas de domínio do conteúdo específico da matemática, envolvendo também - e principalmente - o não entendimento de como ensinar matemática durante a licenciatura. Essa disfunção se concentra na dissociação na formação pedagógica do conteúdo puramente matemático, uma vez que gera um docente incapaz de enxergar como construir o conhecimento na perspectiva do aluno, e, portanto, menos eficiente em ensinar. Em outras palavras, durante a graduação, o professor faz bacharelado e licenciatura de forma conjunta, o que torna a forma de tratar o conteúdo menos aplicável à licenciatura. (LARA, 2021, p.103)

É uma problemática complexa para ser generalizada, porém, seus argumentos não são errados ao mostrar um professor que não consegue enxergar as dificuldades dos seus alunos e não apresenta propostas que possam fazê-los superar os obstáculos que surgem durante a aprendizagem. Portanto essa problemática não é simples, e identificar um culpado não faça sentido, mas sim quais mudanças devemos adotar para melhorar esse cenário.

O ensino de números inteiros é um problema para os professores. Na maioria das vezes os professores tendem a repetir os ensinamentos mecânicos que recebeu durante sua jornada escolar. Para quebrar esse ciclo, devemos integrar as adaptações necessárias para que a aprendizagem faça sentido ao aluno. Como diz Danczuk (2016):

> O professor precisa tomar consciência de que as adaptações no processo de ensino são constantemente necessárias, assim como foram as adaptações no próprio desenvolvimento da Matemática. As constantes mudanças na sociedade alavancam nosso trabalho a fim de apresentar alternativas pertinentes ao professor na tentativa de melhorar o ensino da Matemática. (DANCZUK, 2016, p.42)

A fundamentação teórica necessária para o ensino dos números inteiros enfatiza a importância de uma abordagem que vá além da memorização de regras. A relevância de compreender os conceitos matemáticos de forma contextualizada é destacada, utilizando diferentes representações e estratégias de ensino que favoreçam a construção do conhecimento. Obstáculos epistemológicos enfrentados pelos alunos, como a confusão entre as regras de sinais e a falta de sentido nas operações, podem dificultar a aprendizagem. Tudo isso deve ser de conhecimento do professor.

Momentos reflexivos entre professores e alunos são cruciais, permitindo a análise do desempenho nas tarefas propostas e a discussão de erros e acertos. Essa reflexão contribui para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos números inteiros. A formação contínua dos educadores é essencial para a aplicação eficaz dessas abordagens em sala de aula.

Em seu artigo, Machado (2010) complementa que ele próprio ainda não havia encontrado uma maneira de responder a seguinte indagação: “Como minimizar os problemas em relação às quatro operações com números inteiros?” Na introdução do artigo ele relata acerca do que o motivou a escrever sobre o tema e também o que possibilitou buscar novas ferramentas a fim de auxiliar seus alunos no ensino e aprendizagem, principalmente sobre as regras operacionais envolvendo números inteiros. Seu relato reforça o que se vive atualmente em sala de aula, onde professores se deparam com alunos que não tem domínio sobre determinados conteúdos e conceitos necessários para alcançar certos objetivos propostos, fazendo com que professores precisem se reinventar e buscar formas de sanar lacunas que impossibilitam a plena compreensão do discente.

2.3. Propostas e encaminhamentos

Mas afinal, o que os pesquisadores propõem como encaminhamentos? Para Danczuk (2016):

> A inserção de situações contextualizadas, materiais manipuláveis e jogos, quando combinadas ao uso da linguagem matemática, viabilizam um trabalho didático que pode contribuir para a superação dos obstáculos epistemológicos, quando esclarece escolhas realizadas ao longo do trajeto de construção do conhecimento matemático. (DANCZUK, 2016, p.18)

Quando o professor utiliza situações do cotidiano, materiais que os alunos podem tocar e manipular, e jogos, ele torna o ensino da matemática mais próximo da realidade dos estudantes. Ao combinar essas abordagens com a linguagem matemática adequada, o ensino se torna mais claro e acessível. Isso ajuda a superar dificuldades que os alunos possam ter em entender conceitos matemáticos, esclarecendo as razões por trás das escolhas feitas durante o processo de aprendizagem.

Além dessa mudança na abordagem, devemos diversificar os formatos de abordagem, assim, a inserção de materiais manipuláveis e jogos didáticos para ensinar números inteiros é um desses caminhos. De acordo com Silva (2023):

> Todavia, há outras alternativas para se introduzir conceitos matemáticos formais como esses de Aritmética na educação básica. Por exemplo, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 276) aponta que

> “recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica” exercem uma função fundamental na compreensão e utilização das ideias matemáticas. (SILVA, 2023, p. 12)

A utilização de materiais didáticos manipuláveis e jogos tem sido amplamente discutida como estratégia eficiente para o ensino da Matemática, especialmente quando se trata de conteúdos que apresentam maior complexidade para os alunos, como é o caso dos números inteiros. Nesse contexto, o uso de jogos educativos surge como uma alternativa promissora para tornar o processo de aprendizagem mais significativo, dinâmico e motivador.

No decorrer de seu trabalho, Oliveira (2020) utiliza da fala de outro autor acerca da definição dos materiais didáticos manipuláveis:

> Nacarato (2005) traz a definição de materiais didáticos manipuláveis como “[...] objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia. (REYS 1971 apud NACARATO, 2005, p.9)” (OLIVEIRA, 2020, p. 37)

Essa definição ressalta que tais materiais, incluindo os jogos, exercem um papel essencial na construção do conhecimento matemático, principalmente quando utilizados com intencionalidade pedagógica.

Na análise de dados realizada por Oliveira (2020), foi possível verificar uma relação direta entre o uso de materiais manipuláveis e a motivação dos alunos:

> Neste capítulo foi analisado se as atividades com os materiais didáticos manipuláveis tiveram uma interferência positiva na motivação dos alunos em relação à Matemática e uma melhora no desempenho dos alunos em relação ao aprendizado dos Números Inteiros. (OLIVEIRA, 2020, p. 83)

Em seu trabalho, através da comparação entre os momentos anterior e posterior à aplicação das atividades, apontou uma melhora no interesse e no rendimento dos alunos.

Santos (2015) apresenta e analisa alguns jogos matemáticos voltados para o ensino dos números inteiros, entre eles o Jogo dos Opostos e o Jogo dos

Módulos, que trabalha com números inteiros, fixando os conhecimentos acerca de números opostos e módulo de números inteiros.

É apresentado também o Jogo Vamos Calcular, que sorteia operações e utiliza dados para definir os números inteiros para fazer operações de adição e subtração, jogo que é similar ao jogo abordado na seção 4.5 do capítulo 4, onde o jogo acompanha um tabuleiro.

Outros jogos, como Paraíso ou Porão e Dívida ou Lucro, trazem ideias interessantes, como representar operações com números inteiros usando o conceito de dinheiro ou movimento em direções opostas. Contudo, esses jogos limitam-se à adição e subtração. Por último, apresenta o jogo Banqueiro ou Investidores, que utiliza uma roleta, fichas, dados e cartões numéricos e tem por objetivo realizar expressões com números inteiros.

Frente a isso, Silva (2023) apresenta um jogo voltado para as quatro operações envolvendo números inteiros:

> O jogo “Corrida Zahl” é uma produção original para esta dissertação e se apresenta como um produto educacional sugerido a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com o objetivo pedagógico principal de ajudar na consolidação do aprendizado das quatro operações básicas envolvendo números inteiros. O nome Corrida Zahl é uma referência ao fato do Conjunto dos Números Inteiros ser representado pelo símbolo Z, que por sua vez, advém da palavra em alemão “zahl” que significa “número”. (SILVA, 2023, p. 24)

O jogo Corrida Zahl, desenvolvido como produto educacional, visa promover um ambiente lúdico que estimule os alunos a consolidar as quatro operações com números inteiros. O nome do jogo remete ao conjunto dos números inteiros, representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, derivado da palavra alemã *zahl*, que significa “número”. O jogo é destinado a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e é aplicado por meio de uma sequência didática elaborada, conforme descrito no Capítulo 3 de seu trabalho.

Todesco (2006) desenvolveu uma sequência de ensino composta por 31 atividades, distribuídas aos alunos conforme o planejamento de cada encontro. Como recurso didático, foram utilizados materiais manipulativos como fichas vermelhas e verdes, barbante e uma flecha, com o objetivo de facilitar a compreensão dos números inteiros. A aplicação da intervenção ocorreu exclusivamente com o grupo experimental.

Em sua pesquisa, o autor concluiu que a associação entre a intervenção de ensino e o uso de materiais manipulativos favoreceu o desenvolvimento de estratégias na resolução das atividades propostas, resultando em avanços significativos. Após a intervenção, os alunos demonstraram capacidade de mobilizar os conhecimentos adquiridos na resolução de novos problemas, evidenciando, assim, a ocorrência da aprendizagem.

Com base nos trabalhos analisados, é possível observar um consenso entre os pesquisadores: as dificuldades na aprendizagem dos números inteiros estão diretamente relacionadas a metodologias pouco significativas, descontextualizadas e centradas na memorização de regras. Em contrapartida, diversas propostas, como o uso de jogos, materiais manipuláveis e situações-problema contextualizadas, revelam-se estratégias eficazes para tornar o ensino mais concreto, dinâmico e acessível aos alunos.

A análise das dissertações de Oliveira (2020), Silva (2023) e Santos (2015), entre outras, evidenciou que a inserção de recursos didáticos manipuláveis promove não apenas maior motivação por parte dos alunos, mas também um avanço significativo no desempenho em operações com números inteiros. Entretanto, observa-se que muitos dos jogos propostos limitam-se à adição e subtração, havendo ainda lacunas no trabalho com multiplicação e divisão.

Diante disso, a presente pesquisa propõe o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática envolvendo materiais manipuláveis e jogos que contemplem as quatro operações com números inteiros, buscando ampliar as abordagens já existentes e contribuir com práticas pedagógicas inovadoras no ensino de Matemática para o 7º ano do Ensino Fundamental, podendo se estender a outras turmas.

Capítulo 3: Análise de livros didáticos

Com o objetivo de identificar como o tema é tratado na escola básica vislumbramos analisar dois volumes de duas coleções de livros didáticos, aprovados no PNLD[7], de autores consagrados no mercado editorial: Luiz Roberto Dante[8], Álvaro Andrini[9] e Maria José Vasconcellos[10]. O primeiro autor é bem conhecido no meio acadêmico de Educação Matemática. E o segundo texto tem boa aceitação no mercado editorial.

3.1 Teláris Matemática, 7° ano.

Autores: Luiz Roberto Dante e Fernando Viana. Editora Ática; PNLD 2024 a 2027.

[7] A sigla PNLD refere-se ao Programa Nacional do Livro Didático. Este programa é uma iniciativa do Ministério da Educação (MEC) do Brasil, que tem como objetivo fornecer livros didáticos e materiais pedagógicos de qualidade para escolas públicas de educação básica.
[8] Graduado em Letras pela Universidade de São Paulo (USP) e possui mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). É autor de diversos livros didáticos e de literatura infantojuvenil, reconhecido por suas inovações pedagógicas e abordagens que promovem o desenvolvimento do pensamento crítico. Além de escritor, atua como palestrante e consultor educacional, contribuindo para a formação de professores e para a melhoria na educação no Brasil.
[9] Graduado em Letras pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e possui mestrado em Literatura Brasileira pela mesma instituição. Reconhecido por suas obras que exploram temas contemporâneos e sociais. Andrini é autor de diversos livros didáticos e artigos acadêmicos, contribuindo significativamente para a literatura brasileira e para o debate crítico sobre a educação. Atua como professor universitário, onde compartilha suas experiências e conhecimentos com novas gerações de estudantes.
[10] Graduada em Letras pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e possui mestrado em Educação pela Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG). Reconhecida por sua atuação na literatura infantojuvenil e por suas obras que abordam temas como diversidade e inclusão, Vasconcelos é autora de diversos livros premiados, contribuindo para a formação de leitores críticos e conscientes. Além de escritora, atua como professora e palestrante, promovendo a valorização da literatura na educação.

Figura 3: Capa do livro Teláris

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022)

A pesquisa irá se restringir ao Capítulo 1, que trata dos Números inteiros.

O livro introduz o capítulo apresentando uma imagem com duas manchetes do ano de 2017 (figura 4). Uma com a notícia de uma temperatura de -5°C na cidade de São Joaquim em Santa Catarina. Já a outra relata um saldo de -2 gols da Associação Esportiva de Altos (PI). Nota-se que o autor apresenta os números inteiros em diferentes situações para mostrar sua utilização no cotidiano.

Em seguida, são exibidas três situações envolvendo alguns tipos de números através de um calendário envolvendo números naturais, outra com a promoção de uma camisa abordando números decimais e por último um número fracionário informando que $\frac{3}{4}$ a superfície da Terra é coberta por água. Menciona que esses números podem vir acompanhados dos sinais de “+” e “–” e que serão os números estudados adiante.

O livro expõe a utilização desses números de forma estratégica para que os alunos já consigam ver sentido no que será exposto no capítulo. Essa exposição é importante, pois dá abertura para debate entre os alunos, para que eles possam opinar sobre o assunto e citar outras utilizações de tais números no cotidiano.

Figura 4 - Texto introdutório do capítulo 1


RETROSPECTIVA

FUNDADO EM 1875

SEXTA-FEIRA

31 de dezembro de 2021

TEMPO

No dia 29 de setembro de 2021, a cidade de Curitiba, no Paraná, passou por um frio intenso, registrando a temperatura de −1 °C. Em decorrência da massa de ar polar que segue pelo estado, as temperaturas podem cair ainda mais durante toda a semana.

Cidade de Curitiba (PR). Foto de 2021.

ESPORTE

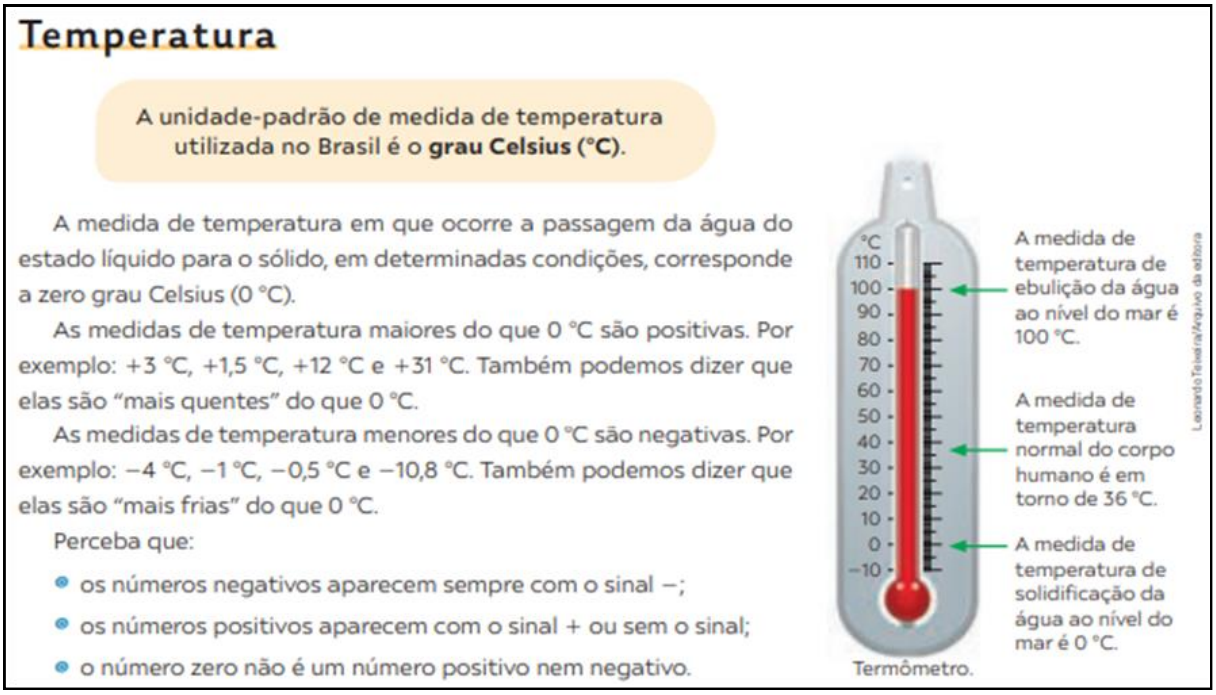
Desde o início da participação do Bahia nos jogos do Brasileirão, o time vem enfrentando a alta quantidade de gols sofridos na primeira divisão do futebol brasileiro masculino, resultando, em 2021, na marca de −9. Infelizmente, essa foi a sétima vez em que o Esquadrão terminou com saldo de gols negativo.

Jogadores do Bahia em campo durante partida do Brasileirão, na Arena Pernambuco, em Recife (PE). Foto de 2021.

Fonte: (Dante & Viana, 2022, p.16)

O subitem 1, “Explorando a ideia de número positivo e número negativo”, traz a presença desses números quando se fala de temperatura, altitude, fuso horário civil e valor monetário. Isso é feito através de textos (por exemplo, como ilustrado na figura 5) explicando seus funcionamentos com o objetivo de identificar os números inteiros e compreendê-los em situações presentes no cotidiano.

Figura 5 - Temperatura



Temperatura

A unidade-padrão de medida de temperatura utilizada no Brasil é o **grau Celsius (°C)**.

A medida de temperatura em que ocorre a passagem da água do estado líquido para o sólido, em determinadas condições, corresponde a zero grau Celsius (0 °C).

As medidas de temperatura maiores do que 0 °C são positivas. Por exemplo: +3 °C, +1,5 °C, +12 °C e +31 °C. Também podemos dizer que elas são "mais quentes" do que 0 °C.

As medidas de temperatura menores do que 0 °C são negativas. Por exemplo: −4 °C, −1 °C, −0,5 °C e −10,8 °C. Também podemos dizer que elas são "mais frias" do que 0 °C.

Perceba que:

- os números negativos aparecem sempre com o sinal −;
- os números positivos aparecem com o sinal + ou sem o sinal;
- o número zero não é um número positivo nem negativo.

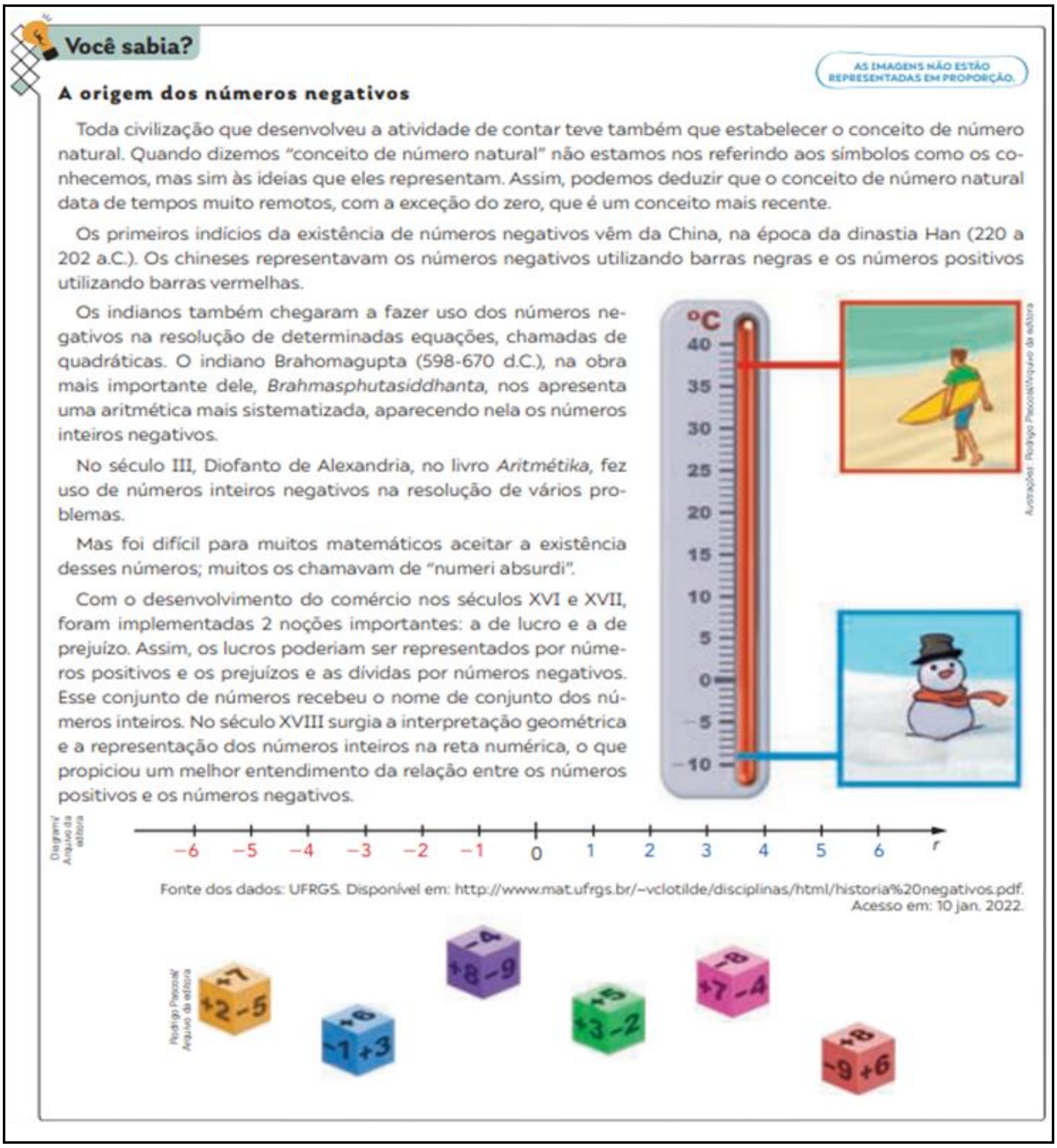
Termômetro.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.18)

O subitem 1 é finalizado com exercícios de fixação. Todos envolvendo situações envolvendo a identificação de números positivos e negativos, como altitude e profundidade, sendo necessário representar medidas com sinais positivos e negativos, assim como saldo e dívida.

É apresentado um boxe bem interessante, com o título "Um pouco de História", onde relata a história dos números relativos e a dificuldade de muitos estudiosos na aceitação desses números. É enfatizada a importância desses números na contagem de lucros e prejuízos. Importante esse relato, para que os alunos possam perceber que até para os matemáticos houve resistência, o que pode comprovar o quão normal é a dificuldade em compreender o assunto. Veja a imagem a seguir (figura 6).

Figura 6 - Um pouco de História



Você sabia?

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

A origem dos números negativos

Toda civilização que desenvolveu a atividade de contar teve também que estabelecer o conceito de número natural. Quando dizemos "conceito de número natural" não estamos nos referindo aos símbolos como os conhecemos, mas sim às ideias que eles representam. Assim, podemos deduzir que o conceito de número natural data de tempos muito remotos, com a exceção do zero, que é um conceito mais recente.

Os primeiros indícios da existência de números negativos vêm da China, na época da dinastia Han (220 a 202 a.C.). Os chineses representavam os números negativos utilizando barras negras e os números positivos utilizando barras vermelhas.

Os indianos também chegaram a fazer uso dos números negativos na resolução de determinadas equações, chamadas de quadráticas. O indiano Brahomagupta (598-670 d.C.), na obra mais importante dele, *Brahmasphutasiddhanta*, nos apresenta uma aritmética mais sistematizada, aparecendo nela os números inteiros negativos.

No século III, Diofanto de Alexandria, no livro *Aritmétika*, fez uso de números inteiros negativos na resolução de vários problemas.

Mas foi difícil para muitos matemáticos aceitar a existência desses números; muitos os chamavam de "numeri absurdi".

Com o desenvolvimento do comércio nos séculos XVI e XVII, foram implementadas 2 noções importantes: a de lucro e a de prejuízo. Assim, os lucros poderiam ser representados por números positivos e os prejuízos e as dívidas por números negativos. Esse conjunto de números recebeu o nome de conjunto dos números inteiros. No século XVIII surgia a interpretação geométrica e a representação dos números inteiros na reta numérica, o que propiciou um melhor entendimento da relação entre os números positivos e os números negativos.

Fonte dos dados: UFRGS. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/historia%20negativos.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.22)

No subitem 2, “O conjunto dos números inteiros”, o autor inicia relembrando os números inteiros, ressaltando que o 2 pode ser escrito como +2 e que portanto podemos reescrever o conjunto dos números naturais com os valores maiores ou iguais a 1 com o sinal de positivo antecedendo o número. Em seguida, apresenta os números negativos. Observe como é mostrado no livro (figura 7):

Figura 7 - Conjunto dos números inteiros

2 O conjunto dos números inteiros

O **conjunto dos números naturais** é aquele formado por todos os números naturais. Cada número do conjunto é um **elemento**. Podemos representar esse conjunto por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Como as representações 2 e +2 têm o mesmo significado, o conjunto dos números naturais também pode ser escrito desta maneira:

$$\mathbb{N} = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Dizemos que os números naturais correspondem aos números inteiros positivos com o zero.

Analise agora o conjunto dos números inteiros negativos:

$$\{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Reunindo os números naturais com os números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado assim:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

ou assim:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Perceba que -4 é um elemento de $\mathbb{Z}$, mas não é um elemento de $\mathbb{N}$. Dizemos que:

- -4 **pertence** ao conjunto $\mathbb{Z}$ e representamos isso por $-4 \in \mathbb{Z}$;
- -4 **não pertence** ao conjunto $\mathbb{N}$ e representamos por $-4 \notin \mathbb{N}$.

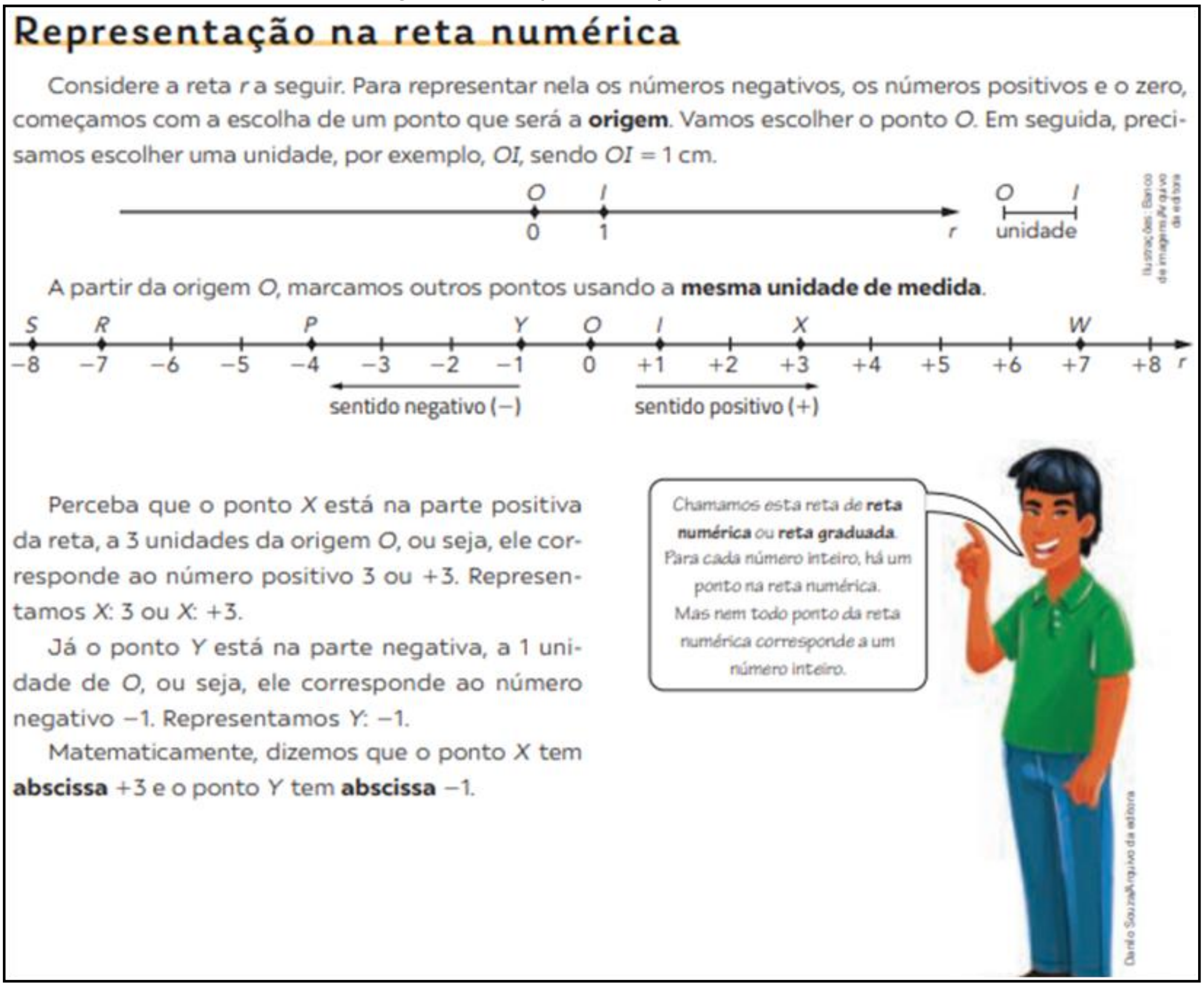
Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.23)

A abordagem do livro em expandir o conjunto dos números naturais e chegar ao conjunto dos números inteiros é estratégica, uma vez que facilita o entendimento do aluno e o faz compreender melhor a origem e necessidade desses números.

Adiante é abordada a “Representação na reta numérica”, onde o autor desenvolve a construção da reta numérica (figura 8).

Nas sugestões dadas aos professores, o autor incentiva os alunos a pensar que entre os pontos marcados na reta numérica, possuem outros números, sendo necessário utilizarmos outros conjuntos numéricos que serão vistos mais à frente. Ainda na reta numérica é dito que um ponto sobre a reta é a medida da abscissa daquele ponto, fazendo referência ao plano cartesiano que os alunos viram no ano anterior.

Figura 8 - Representação da reta numérica



Representação na reta numérica

Considere a reta *r* a seguir. Para representar nela os números negativos, os números positivos e o zero, começamos com a escolha de um ponto que será a **origem**. Vamos escolher o ponto *O*. Em seguida, precisamos escolher uma unidade, por exemplo, *OI*, sendo *OI* = 1 cm.

A partir da origem *O*, marcamos outros pontos usando a **mesma unidade de medida**.

Perceba que o ponto *X* está na parte positiva da reta, a 3 unidades da origem *O*, ou seja, ele corresponde ao número positivo 3 ou +3. Representamos *X*: 3 ou *X*: +3.

Já o ponto *Y* está na parte negativa, a 1 unidade de *O*, ou seja, ele corresponde ao número negativo −1. Representamos *Y*: −1.

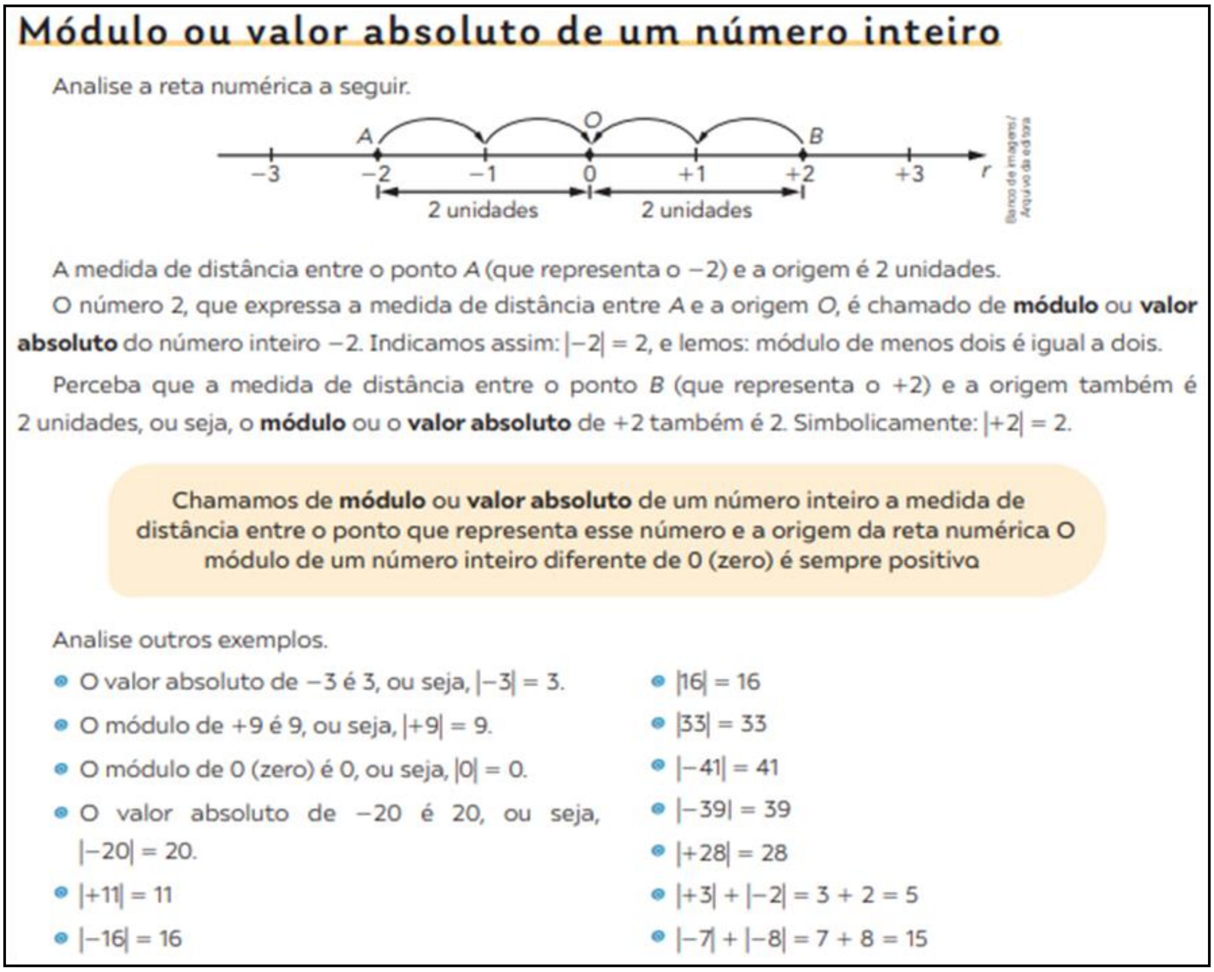
Matematicamente, dizemos que o ponto *X* tem **abscissa** +3 e o ponto *Y* tem **abscissa** −1.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.23)

O ponto 2 é encerrado com atividades de fixação, englobando tanto definições de conjunto dos números inteiros, além de exercícios explorando a reta numérica e a localização de pontos.

O próximo assunto deste capítulo tem o subtítulo “Módulo ou valor absoluto de um número inteiro”. Nele é definido o módulo de um número inteiro como a distância entre um ponto até a origem da reta numérica. A seguir são trazidos alguns exercícios de fixação sobre módulo ou valor absoluto.

Figura 9 - Módulo ou valor absoluto



Módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Analise a reta numérica a seguir.

A medida de distância entre o ponto *A* (que representa o −2) e a origem é 2 unidades.

O número 2, que expressa a medida de distância entre *A* e a origem *O*, é chamado de **módulo** ou **valor absoluto** do número inteiro −2. Indicamos assim: $|-2| = 2$, e lemos: módulo de menos dois é igual a dois.

Perceba que a medida de distância entre o ponto *B* (que representa o +2) e a origem também é 2 unidades, ou seja, o **módulo** ou o **valor absoluto** de +2 também é 2. Simbolicamente: $|+2| = 2$.

Chamamos de **módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro a medida de distância entre o ponto que representa esse número e a origem da reta numérica O módulo de um número inteiro diferente de 0 (zero) é sempre positivo

Analise outros exemplos.

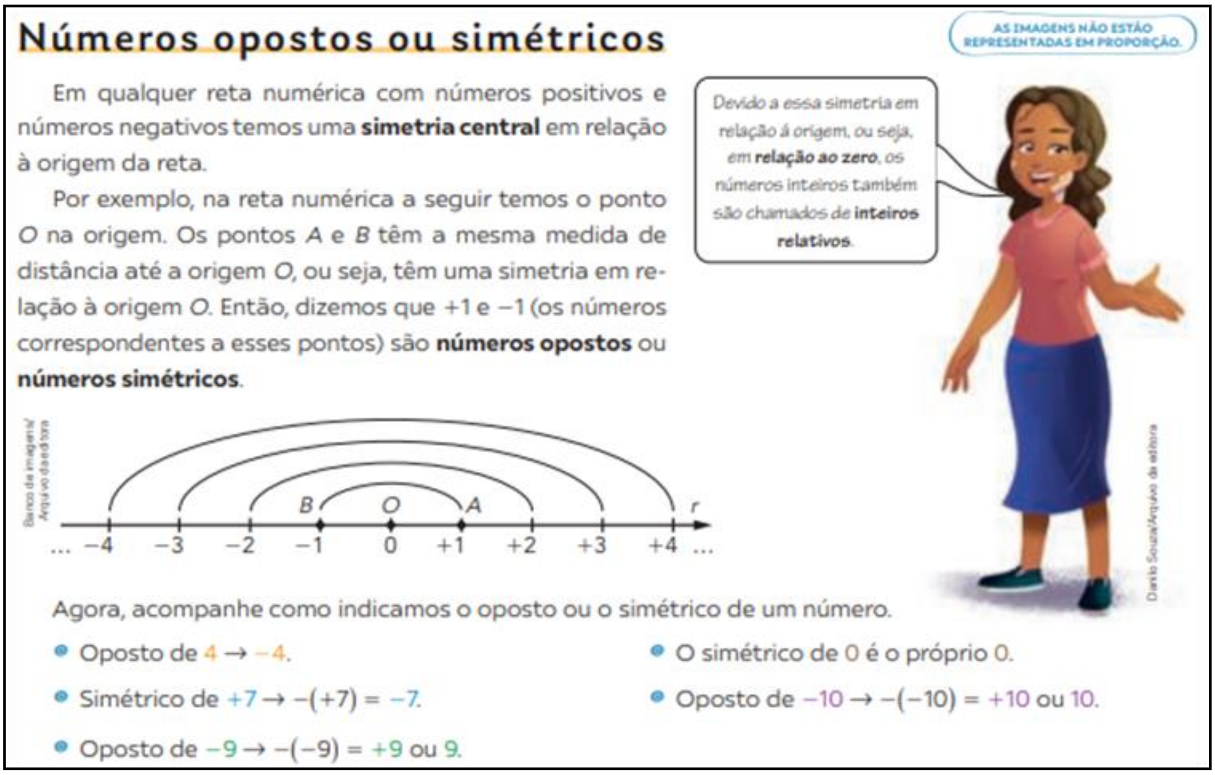
- O valor absoluto de −3 é 3, ou seja, $|-3| = 3$.
- O módulo de +9 é 9, ou seja, $|+9| = 9$.
- O módulo de 0 (zero) é 0, ou seja, $|0| = 0$.
- O valor absoluto de −20 é 20, ou seja, $|-20| = 20$.
- $|+11| = 11$
- $|-16| = 16$
- $|16| = 16$
- $|33| = 33$
- $|-41| = 41$
- $|-39| = 39$
- $|+28| = 28$
- $|+3| + |-2| = 3 + 2 = 5$
- $|-7| + |-8| = 7 + 8 = 15$

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.25)

O assunto de módulo é apenas o retratado na figura acima, o que mostra a forma direta que foi exposto o conteúdo. Acredito que faltou uma atenção maior quanto ao assunto e em relação a sua abordagem, poderia ter explorado comparação entre módulos, além de algumas equações com valor desconhecido dentro do módulo ||. Os exercícios são apenas para inverter o sinal de um número quando este for negativo.

Na sequência são apresentados os “Números opostos ou simétricos”. O livro expõe que a simetria entre dois pontos em relação a origem da reta numérica, nos garante dois pontos simétricos. É frisado também que os números inteiros também são chamados de números relativos, devido a essa simetria em relação ao zero.

Figura 10 - Números opostos ou simétricos



Números opostos ou simétricos

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Em qualquer reta numérica com números positivos e números negativos temos uma **simetria central** em relação à origem da reta.

Por exemplo, na reta numérica a seguir temos o ponto *O* na origem. Os pontos *A* e *B* têm a mesma medida de distância até a origem *O*, ou seja, têm uma simetria em relação à origem *O*. Então, dizemos que +1 e −1 (os números correspondentes a esses pontos) são **números opostos** ou **números simétricos**.

Devido a essa simetria em relação à origem, ou seja, em **relação ao zero**, os números inteiros também são chamados de **inteiros relativos**.

Agora, acompanhe como indicamos o oposto ou o simétrico de um número.

- Oposto de 4 → −4.
- Simétrico de +7 → −(+7) = −7.
- Oposto de −9 → −(−9) = +9 ou 9.
- O simétrico de 0 é o próprio 0.
- Oposto de −10 → −(−10) = +10 ou 10.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.26)

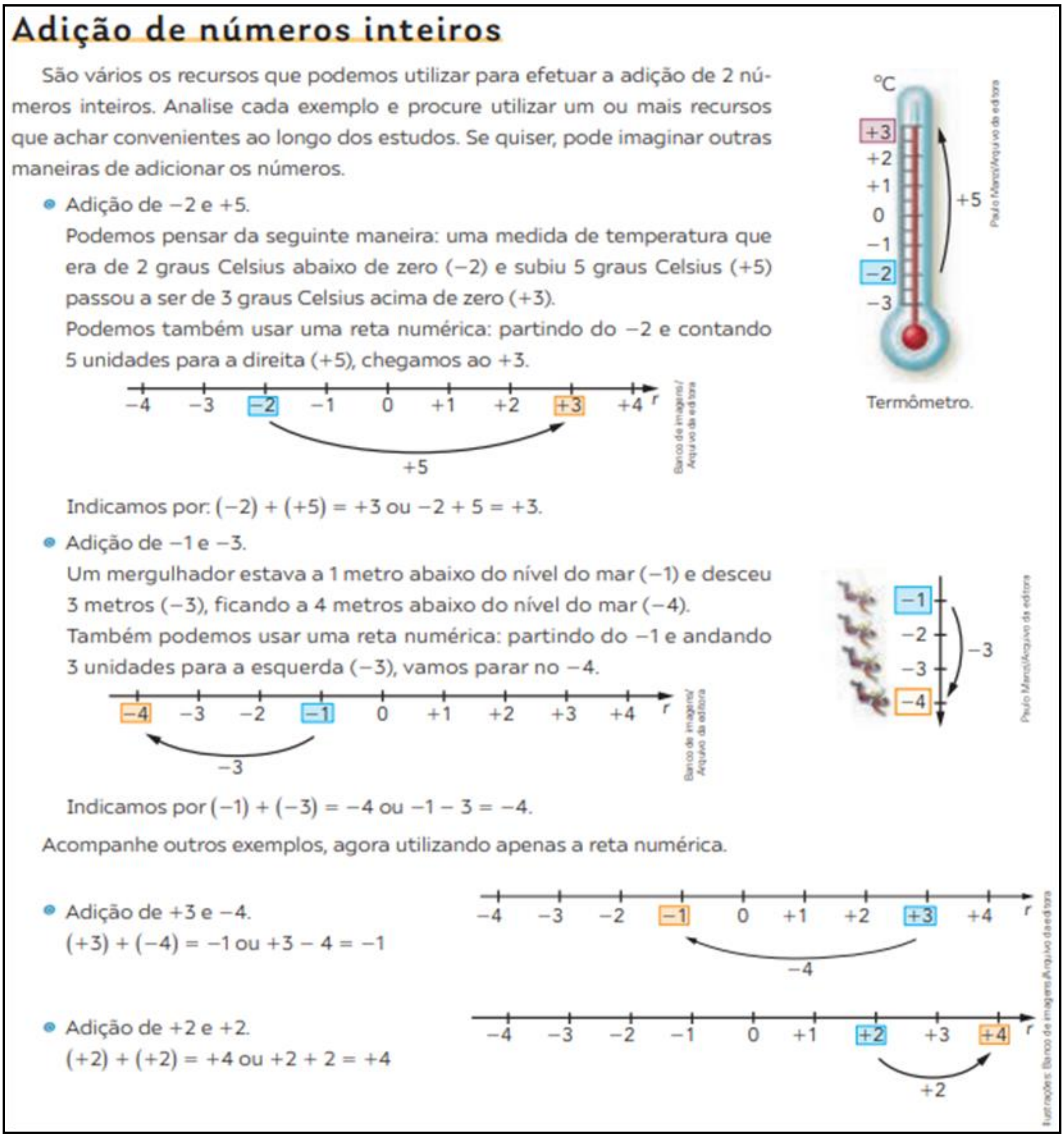
A seguir temos a abordagem da “Comparação de números inteiros”, onde apresenta alguns exemplos de comparações entre números inteiros. Antes disso, relembra os significados dos sinais > (maior), < (menor) e = (igual), utilizando exemplos conforme os que mostrou no início do capítulo para fazer as comparações, como em altitudes e temperaturas.

Esses exemplos contextualizados facilitam a compreensão do assunto e faz com que os alunos vejam sentido e utilização daquilo que estão aprendendo.

O próximo subitem tem o título: “Operações com números inteiros”. Ele é dividido nas quatro operações fundamentais com números inteiros e por fim tem potenciação com números inteiros. Vamos a cada uma delas.

Na adição de números inteiros, novamente se utiliza situações do dia a dia, como temperatura e altitude, mas seu foco é da reta numérica.

Figura 11 - Adição de números inteiros



Adição de números inteiros

São vários os recursos que podemos utilizar para efetuar a adição de 2 números inteiros. Analise cada exemplo e procure utilizar um ou mais recursos que achar convenientes ao longo dos estudos. Se quiser, pode imaginar outras maneiras de adicionar os números.

- Adição de −2 e +5.

  Podemos pensar da seguinte maneira: uma medida de temperatura que era de 2 graus Celsius abaixo de zero (−2) e subiu 5 graus Celsius (+5) passou a ser de 3 graus Celsius acima de zero (+3).

  Podemos também usar uma reta numérica: partindo do −2 e contando 5 unidades para a direita (+5), chegamos ao +3.

  Indicamos por: (−2) + (+5) = +3 ou −2 + 5 = +3.

Termômetro.

- Adição de −1 e −3.

  Um mergulhador estava a 1 metro abaixo do nível do mar (−1) e desceu 3 metros (−3), ficando a 4 metros abaixo do nível do mar (−4).

  Também podemos usar uma reta numérica: partindo do −1 e andando 3 unidades para a esquerda (−3), vamos parar no −4.

  Indicamos por (−1) + (−3) = −4 ou −1 − 3 = −4.

Acompanhe outros exemplos, agora utilizando apenas a reta numérica.

- Adição de +3 e −4.

  (+3) + (−4) = −1 ou +3 − 4 = −1

- Adição de +2 e +2.

  (+2) + (+2) = +4 ou +2 + 2 = +4

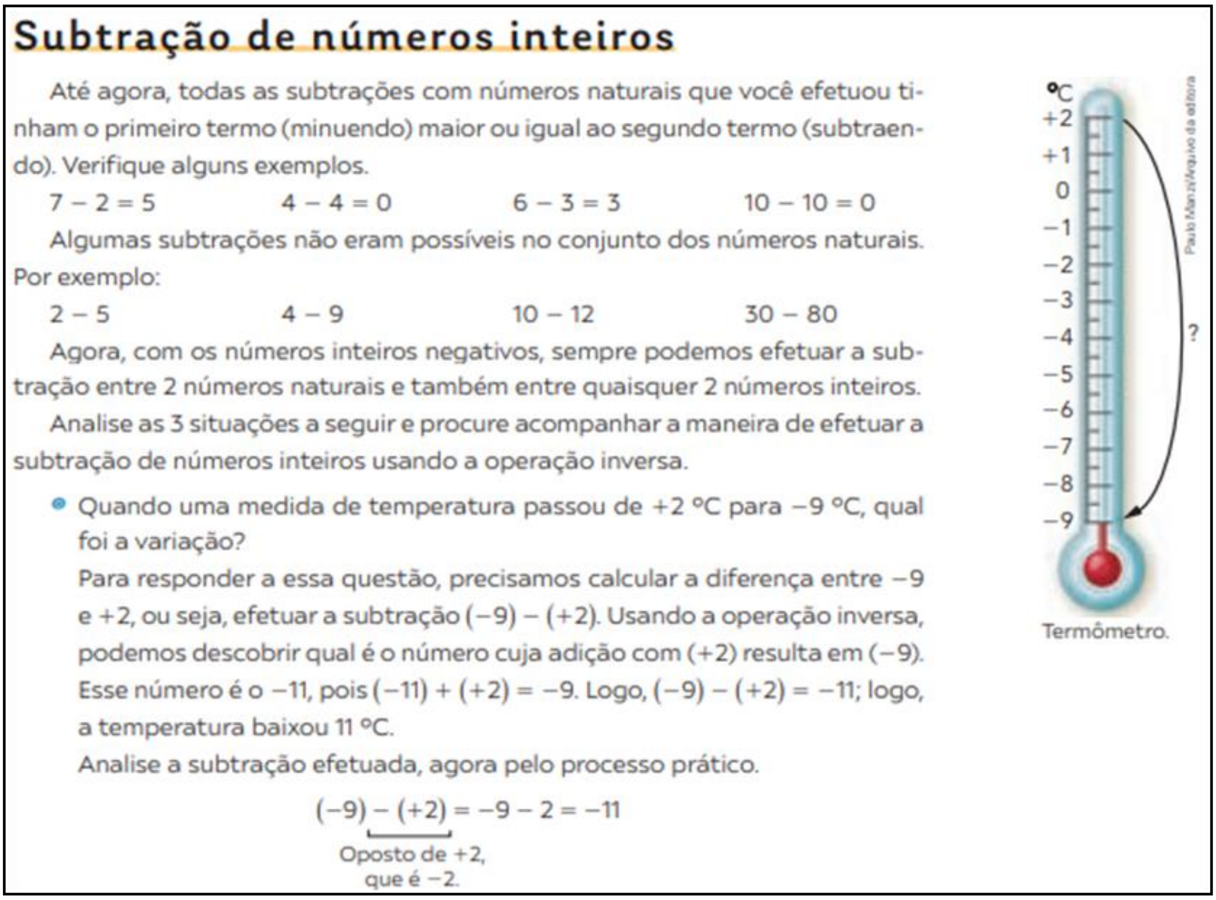
Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.29)

Diferente da maioria dos livros, essa obra não utiliza situações envolvendo dinheiro ou conta bancária, embora seja abordado nos exercícios propostos. Consideramos interessante essa abordagem com ênfase na reta numérica, onde possibilita aos alunos verem como se conclui o resultado.

Algo que chama atenção nessa primeira abordagem da adição de inteiros é que em momento algum o livro fala da regra de sinais, fazendo necessária a compreensão do conteúdo e não de uma memorização através de uma regra.

A seguir o livro aborda a subtração entre números inteiros. Essa abordagem é feita separada da adição, o que é muito válido. Uma vez que vemos diferenças significativas entre as duas operações quando falamos dos números inteiros, além de acreditarmos facilitar a compreensão quando os alunos vêem as duas operações separadas.

Figura 12 - Subtração de números inteiros



Subtração de números inteiros

Até agora, todas as subtrações com números naturais que você efetuou tinham o primeiro termo (minuendo) maior ou igual ao segundo termo (subtraendo). Verifique alguns exemplos.

$7 - 2 = 5$ $\quad$ $4 - 4 = 0$ $\quad$ $6 - 3 = 3$ $\quad$ $10 - 10 = 0$

Algumas subtrações não eram possíveis no conjunto dos números naturais. Por exemplo:

$2 - 5$ $\quad$ $4 - 9$ $\quad$ $10 - 12$ $\quad$ $30 - 80$

Agora, com os números inteiros negativos, sempre podemos efetuar a subtração entre 2 números naturais e também entre quaisquer 2 números inteiros.

Analise as 3 situações a seguir e procure acompanhar a maneira de efetuar a subtração de números inteiros usando a operação inversa.

- Quando uma medida de temperatura passou de +2 °C para −9 °C, qual foi a variação?

  Para responder a essa questão, precisamos calcular a diferença entre −9 e +2, ou seja, efetuar a subtração $(-9) - (+2)$. Usando a operação inversa, podemos descobrir qual é o número cuja adição com $(+2)$ resulta em (-9). Esse número é o −11, pois $(-11) + (+2) = -9$. Logo, $(-9) - (+2) = -11$; logo, a temperatura baixou 11 °C.

  Analise a subtração efetuada, agora pelo processo prático.

$$(-9) \underbrace{- (+2)}_{\text{Oposto de } +2, \text{ que é } -2.} = -9 - 2 = -11$$

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.32)

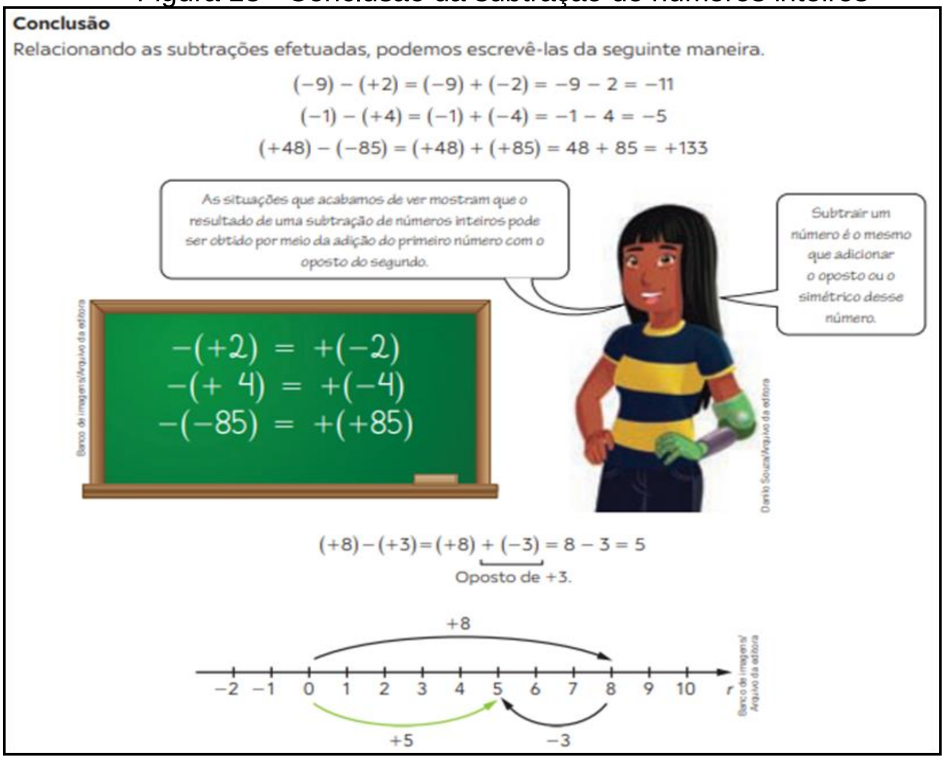
A introdução que o livro faz com a subtração é interessante. Ele inicia ressaltando que nos naturais, para que uma subtração seja possível sempre é necessário termos minuendo maior que o subtraendo, e que subtrações como 2 – 5 não eram possíveis nos naturais, mas agora, com os números inteiros sempre poderemos resolver esse tipo de subtração, onde o minuendo é menor que o subtraendo.

Ele apresenta três situações com exemplos do cotidiano para explorar a subtração com números inteiros. Uma delas envolve temperatura, como na figura 12. Apesar de o autor instigar os alunos a transformar a subtração em uma adição, seu raciocínio, pautado na figura do termômetro, se fundamenta no cálculo do oposto da soma das distâncias de (-9) e (+2) ao valor zero do termômetro: $(-9) - (+2) = -11 = -(|-9|+|+2|)$.

Os dois outros exemplos consideram situações envolvendo deslocamentos de um elevador e movimentação em uma conta bancária. Ambos utilizam o cálculo da subtração por meia da soma do oposto.

Adiante, o livro faz uma síntese explicando que o método que utilizou nos três exemplos é válido e pode ser aplicado a qualquer subtração envolvendo quantidades inteiras. Observe a seguir.

Figura 13 - Conclusão da subtração de números inteiros



Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.33)

A representação com reta numérica que aparece no final desta página (figura 13) e apresenta outra interpretação para a subtração de números inteiros, por meio do uso implícito de vetores: o “vetor” (+8) mais o “vetor” (-3) é igual ao “vetor” (+5) - segunda igualdade. Na primeira igualdade o autor utiliza novamente a ideia de subtração de vetores pela soma do primeiro vetor com o oposto do segundo. Não consideramos que o aluno perceba essa generalização: A-B=A+(-B).

No manual do professor é sugerido um jogo de tabuleiro (figura 14) que trabalha com adição e subtração de números inteiros, que é detalhado no capítulo 4, como sendo o jogo a conquista. Entretanto, é feita apenas as instruções sem nenhuma imagem ilustrativa, o que não ajuda a compreensão do jogo, uma vez que se trata de um jogo de tabuleiro. Seriam interessantes ilustrações e até mesmo moldes, se tratando de um livro didático. Observe a seguir a sugestão do jogo.

Figura 14 - Sugestão do jogo

Sugestão de jogo

Construa, ou peça aos alunos que construam, um tabuleiro numerado de -15 até 15. No lugar do zero, deve haver a “largada” e, antes do -15 e depois do 15, deve haver 2 casas de “chegada”. Monte 2 dados: um com os sinais $+$ e $-$ (3 faces do dado com cada sinal) e o outro com os números $-3, -2, -1, 1, 2$ e 3. Para representar cada jogador no tabuleiro, use tampinhas coloridas ou pinos.

Com o material pronto, explique aos alunos que eles devem iniciar a partida na casa “largada” e ganhará a partida quem chegar primeiro em uma das casas “chegada”.

Para se mover pelo tabuleiro, na sua vez, eles devem lançar os 2 dados e efetuar a operação sorteada em relação ao número da casa em que se encontra o pino deles. Por exemplo: na primeira rodada, o pino está na casa “largada” (casa 0) e se saírem $+$ e -3 nos dados, deverá ser efetuada a operação $0 + (-3)$; assim, o pino deve ser colocado na casa -3, que é o resultado.

Sugira aos alunos que efetuem todos os cálculos dos movimentos de todos os jogadores para garantir que ninguém seja ajudado ou prejudicado por possíveis erros de cálculo.

Fonte de consulta: PORTAL DO PROFESSOR. *Espaço da aula*. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=49849>. Acesso em: 29 ago. 2018.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.33)

O jogo colabora para a consolidação do conteúdo abordado, o que pode ser uma boa opção para ser aplicado ao fim de uma aula que foi trabalhado o conteúdo de adição e subtração com números inteiros.

A parte de subtração é encerrada com exercícios de fixação que explora questões para fixar o que foi exposto anteriormente, inclusive alguns para serem executados como nos exemplos apresentados, além de expor um texto com o título acima e abaixo de zero que explora temperaturas médias, máximas e mínimas, além de contar um pouco da história da cidade abordada.

A multiplicação entre números inteiros é abordada de uma maneira diferenciada. O autor sugere que os alunos completem uma tabela pré-preenchida através da observação de regularidades na multiplicação de números inteiros.

Figura 15 - Tabela de Multiplicação

x	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
+3	+9	+6	+3				
+2	+6						
+1	+3						
0							
-1							
-2							
-3							

Fonte: Adaptação de (DANTE & VIANA, 2022, p.36)

Ao ir completando a tabela, o objetivo é ir chegando às conclusões em relação à multiplicação de números inteiros por zero, depois entre inteiros positivos e por fim entre dois inteiros negativos.

Entretanto ele chama a atenção primeiramente que um número com o sinal positivo pode ser escrito como um número natural, ou seja, sem o sinal e que, portanto, podemos completar a tabela cujas casas são representadas pelas multiplicações de dois positivos como a multiplicação de dois números naturais, algo que os alunos já têm familiaridade.

Posteriormente, através do preenchimento da tabela, o aluno deve chegar às seguintes conclusões, através da regularidade:

1º: a multiplicação entre números inteiros positivos resultou em um número inteiro positivo;

2º: a multiplicação de zero por um fator positivo, o resultado é sempre zero;

3º: a multiplicação de dois números com sinais diferentes é negativo;

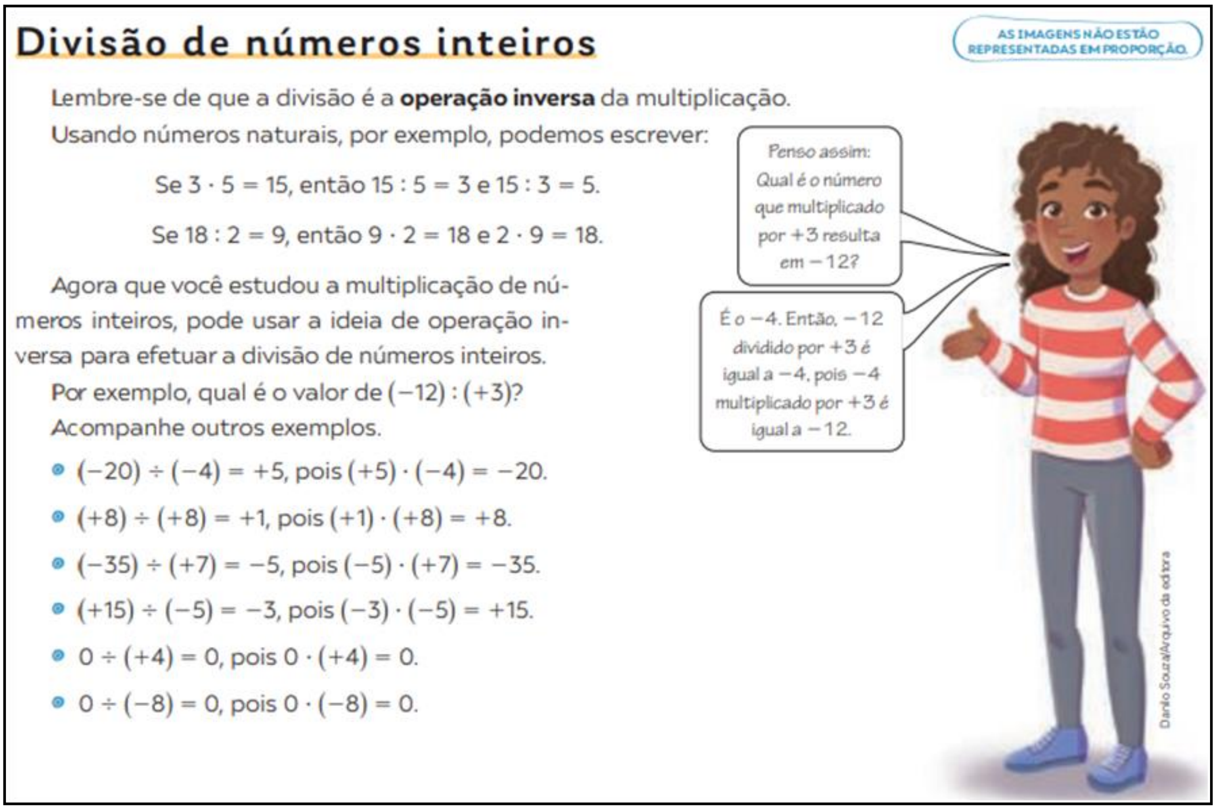
4º: a multiplicação de dois números com sinais iguais, o resultado é sempre positivo.

Esse método de ensino através de resolução de problemas é uma ferramenta útil e que faz com que os alunos aprendam exercitando, chegando a resultados importantes, como no exemplo anterior citado. É encerrado com exercícios sobre multiplicação entre números inteiros.

Outras abordagens poderiam ser feitas na multiplicação de números inteiros e não apenas pela observação de regularidades através da tabela. Poderia ter citado a opção de abrirmos uma multiplicação como soma de parcelas iguais, dando outra possibilidade para que os alunos tivessem a opção de compreender a multiplicação de outra forma, uma vez que poderia até ser reforçada a adição de números inteiros.

Na “Divisão de números inteiros”[11], o livro cita que a divisão é a operação inversa da multiplicação, assim a regras dos sinais resultantes na multiplicação de números inteiros se estendem para a divisão.

Figura 16 - Divisão de números inteiros


Divisão de números inteiros

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Lembre-se de que a divisão é a **operação inversa** da multiplicação.
Usando números naturais, por exemplo, podemos escrever:

Se $3 \cdot 5 = 15$, então $15 : 5 = 3$ e $15 : 3 = 5$.

Se $18 : 2 = 9$, então $9 \cdot 2 = 18$ e $2 \cdot 9 = 18$.

Agora que você estudou a multiplicação de números inteiros, pode usar a ideia de operação inversa para efetuar a divisão de números inteiros.

Por exemplo, qual é o valor de $(-12) : (+3)$?

Acompanhe outros exemplos.

- $(-20) \div (-4) = +5$, pois $(+5) \cdot (-4) = -20$.
- $(+8) \div (+8) = +1$, pois $(+1) \cdot (+8) = +8$.
- $(-35) \div (+7) = -5$, pois $(-5) \cdot (+7) = -35$.
- $(+15) \div (-5) = -3$, pois $(-3) \cdot (-5) = +15$.
- $0 \div (+4) = 0$, pois $0 \cdot (+4) = 0$.
- $0 \div (-8) = 0$, pois $0 \cdot (-8) = 0$.

Fonte: (DANTE & VIANA, 2022, p.38)

O assunto é finalizado com exercícios envolvendo a divisão de números inteiros. A seguir ainda é abordada a potenciação envolvendo números inteiros, o que não nos é importante nessa parte do trabalho, portanto não mencionaremos.

[11] Cabe notar aqui que estamos considerando apenas as divisões exatas, isto é, divisão de inteiros que deixam resto zero.

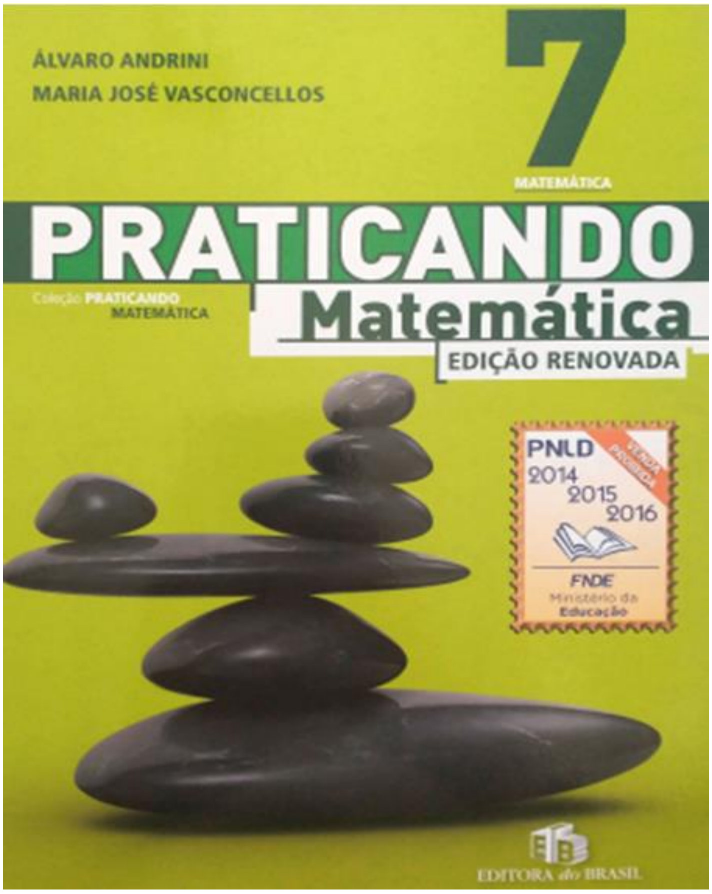
Em resumo, a obra se destaca por apresentar ao estudante o conjunto dos números inteiros como uma expansão natural do conjunto dos números naturais, abordando as operações por meio de representações na reta numérica e explorando a subtração como a soma do oposto, o que contribui para a simplificação e compreensão das operações como um todo.

Além disso, a obra sugere o uso de materiais didáticos, como jogos, que auxiliam na fixação dos conteúdos e tornam o processo de aprendizagem mais dinâmico e significativo.

3.2 Praticando Matemática, 7° ano.

Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Editora do BRASIL; 3º edição, São Paulo, 2012.

Figura 17: Capa do livro Praticando Matemática



Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012)

O assunto de números inteiros é abordado no capítulo 3, que recebe o nome de números negativos. Ele inicia falando sobre os números que usamos para contar, associando-os ao conjunto dos números naturais. Menciona ainda os números decimais e as frações, que estão presentes nos problemas de medidas.

Figura 18 - Onde encontramos números negativos

1. Onde encontramos números negativos?

Você já sabe que os números 1, 2, 3, 4, 5, ... surgiram pela necessidade de contar. Sabe também que as frações e os números decimais foram criados para representar certas quantidades não inteiras muito presentes nos problemas de medidas.

E os números negativos?

Eles vieram para resolver situações do tipo:

"3 − 5 quanto dá?", que provavelmente surgiram com o desenvolvimento do comércio e o aparecimento das dívidas, dos prejuízos...

Vamos examinar uma situação comum nos dias de hoje.

Quem tem cheque especial pode gastar mais do que possui na sua conta bancária até certo limite, e ficar devendo ao banco.

Uma pessoa, por exemplo, tem R$ 100,00 na conta e faz uma retirada de R$ 120,00.

O resultado da subtração 100 − 120 não é um número natural.

Usaremos o **número negativo** −20 para representar o saldo dessa pessoa após a retirada.

$$100 - 120 = -20$$

O sinal de "menos" indica que ela deve R$ 20,00 ao banco.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.55)

Os números negativos são apresentados através de uma subtração cujo resultado consiste em um número negativo, explicando que operações como essas provavelmente surgiram com o desenvolvimento do comércio e o aparecimento das dívidas e dos prejuízos. Ainda são apresentadas situações envolvendo dinheiro, como mostra a figura, temperatura e altitude.

Ainda nesse contexto e falando sobre números negativos e sua presença em situações do cotidiano dos alunos, o livro traz uma nota histórica mencionando a lentidão na aceitação dos números negativos. Segue a nota:

Figura 19 - Nota histórica

Nota histórica

A aceitação dos números negativos foi muito lenta, pois usar quantidades negativas não é natural quando pensamos em situações concretas: como imaginar 3 bois menos 5 bois? Como tirar aquilo que não temos? Por isso, embora tenham sido encontrados na China e na Índia registros muito antigos de problemas envolvendo números negativos, eles só foram realmente aceitos como números por volta do século XVI.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.54)

Após essa introdução, o livro traz uma página de exercícios de fixação apenas com situações envolvendo números negativos.

O próximo tópico explora a comparação de números inteiros, porém a abordagem é rasa e não explora de fato como compará-los. Ele expõe primeiramente temperaturas de quatro estados da região sul através de uma tabela e em seguida diz ser fácil comparar esses números pensando em temperatura.

Entretanto, só é feita a comparação entre essas quatro temperaturas da tabela (figura 21) e em seguida já parte para diferença entre números positivos e negativos, que deveria vim no primeiro tópico e não dentro do tópicos de comparação de números. Por fim, fala sobre antecessor e sucessor.

Após exercícios é apresentado o ponto 3, que recebe o título de reta numérica, onde o autor explica que a reta numérica é traçada e escolhemos um ponto para representar o zero, donde escolhendo uma mesma unidade, marcamos os números inteiros positivos à direita do zero e os negativos à esquerda do zero.

A seguir o assunto de comparação de números inteiros retorna através da reta numérica (figura 20).

Figura 20 - Comparando números na reta

A reta numérica também nos ajuda a comparar números. Entre dois números, qual é o maior? Basta observar qual tem representação mais à direita na reta numérica: esse será o maior.

Então, para começar:
- qualquer número positivo é maior que zero;
- zero é maior que qualquer número negativo;
- qualquer número positivo é maior que um número negativo.

E quando queremos comparar dois números negativos?

Vimos que $-3 < -1$ (lembra-se das temperaturas?). Isso se confirma na reta numérica, pois a representação de -1 está à direita da representação de -3.

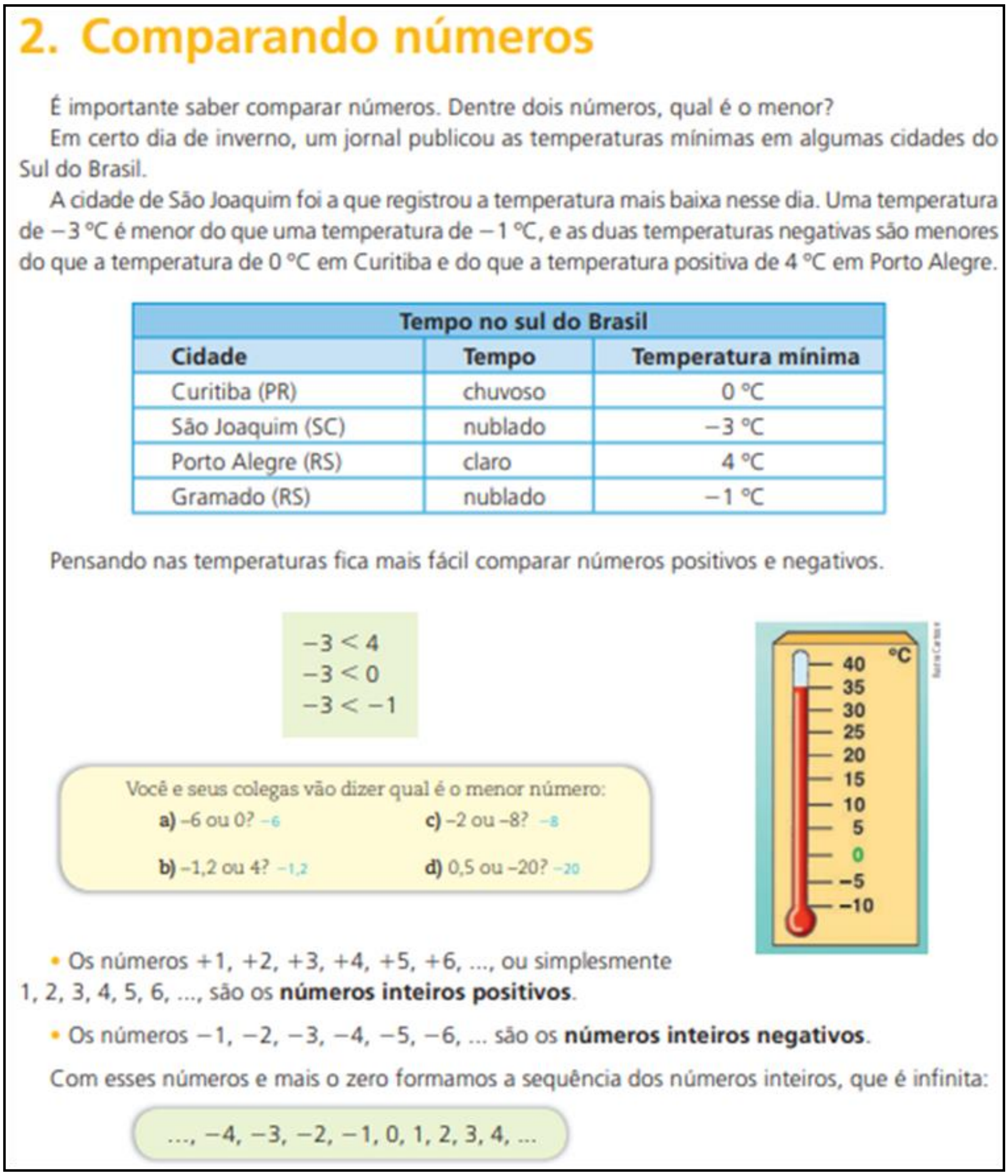
Logo,

- $-3 < -1$ ou $-1 > -3$

Da mesma forma,
- $-0,5 > -1$
- $-6,4 > -10$
- $-1,75 > -8,25$

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.60)

Figura 21 - Comparando números



2. Comparando números

É importante saber comparar números. Dentre dois números, qual é o menor?

Em certo dia de inverno, um jornal publicou as temperaturas mínimas em algumas cidades do Sul do Brasil.

A cidade de São Joaquim foi a que registrou a temperatura mais baixa nesse dia. Uma temperatura de −3 °C é menor do que uma temperatura de −1 °C, e as duas temperaturas negativas são menores do que a temperatura de 0 °C em Curitiba e do que a temperatura positiva de 4 °C em Porto Alegre.

Tempo no sul do Brasil		
Cidade	**Tempo**	**Temperatura mínima**
Curitiba (PR)	chuvoso	0 °C
São Joaquim (SC)	nublado	−3 °C
Porto Alegre (RS)	claro	4 °C
Gramado (RS)	nublado	−1 °C

Pensando nas temperaturas fica mais fácil comparar números positivos e negativos.

$-3 < 4$
$-3 < 0$
$-3 < -1$

Você e seus colegas vão dizer qual é o menor número:

a) −6 ou 0? −6
b) −1,2 ou 4? −1,2
c) −2 ou −8? −8
d) 0,5 ou −20? −20

• Os números +1, +2, +3, +4, +5, +6, ..., ou simplesmente 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., são os **números inteiros positivos**.

• Os números −1, −2, −3, −4, −5, −6, ... são os **números inteiros negativos**.

Com esses números e mais o zero formamos a sequência dos números inteiros, que é infinita:

..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

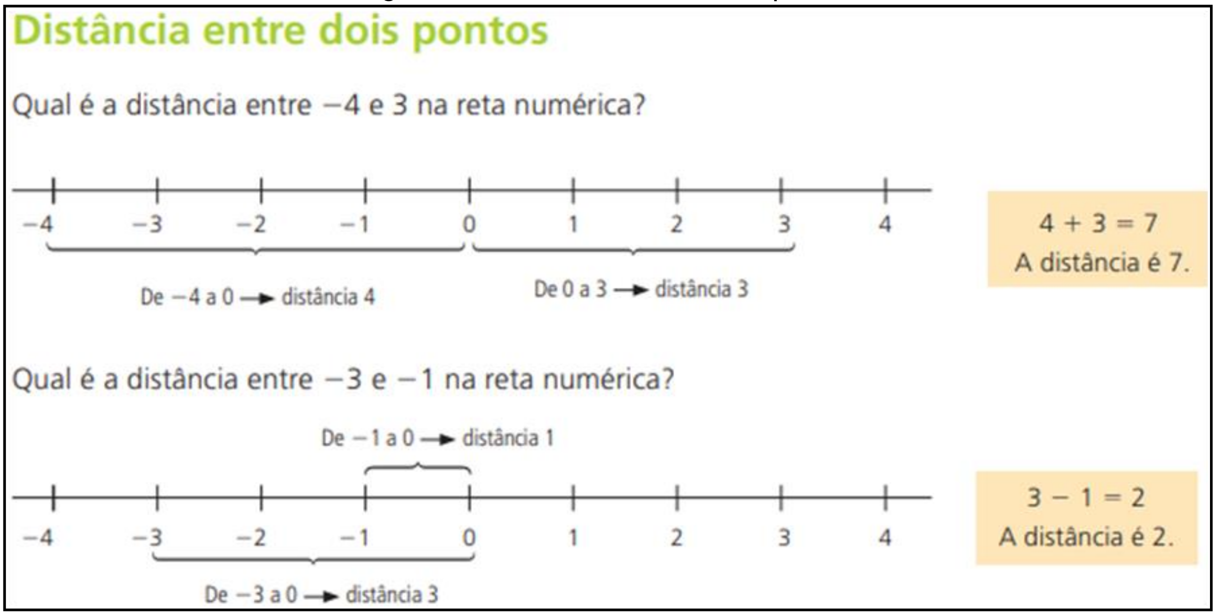
Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.58)

Nota-se uma confusão com relação aos subtítulos. Para ficar mais coeso, o correto seria primeiro abordar a reta numérica, para só então falar da comparação entre números inteiros, até porque os autores usam o primeiro em detrimento do segundo.

O próximo subtítulo recebe o nome de distâncias na reta numérica, onde são abordados: módulo, números simétricos e distância entre pontos. O módulo é definido como a distância de um ponto na reta numérica até a origem 0. Já os simétricos ou opostos são os números diferentes, mas que têm o mesmo módulo por estarem à mesma distância do zero.

Já a distância entre pontos é trabalhada através da reta numérica.

Figura 22 - Distância entre dois pontos



Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.61)

Interessante esse tópico, pois já remete a ideia de adição e subtração sem mencionar as operações em si e de como é possível calcular distâncias locomovendo pontos à direita ou à esquerda da origem. Exercícios são expostos para trabalhar o que foi visto sobre esses tópicos.

A adição envolvendo números negativos é apresentada com um exemplo envolvendo dívida e saldo. Uma das situações faz referência ao cancelamento de números simétricos, onde em uma ilustração uma mulher tinha um saldo de R$ 40,00 negativos e chegando à conclusão que depositando R$ 40,00 ela “zera a conta”.

Em seguida tem alguns exemplos de operações com adições de números inteiros e é apresentada a regra de sinais para a adição abaixo.

Figura 23 - Regra para a soma

Para somar:

- dois números positivos, somamos seus módulos e o resultado é positivo.
- dois números negativos, somamos seus módulos e o resultado é negativo.
- dois números de sinais contrários, subtraímos seus módulos e o resultado tem o sinal do número de maior módulo.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.63)

Os exercícios seguintes são bem diretos, com questões de cálculos com adições de números inteiros e problemas envolvendo crédito e débito.

Na parte de subtrações de números inteiros, o livro inicia com um exemplo de temperatura, explicando que subtrair +2 é o mesmo que somar -2, resolvendo alguns exemplos através da representação dessas operações com auxílio da reta numérica (figura 24).

No próximo tópico simplifica registros eliminando parênteses, segue exercícios de fixação, exercícios esses com situações do dia a dia e exercícios diretos com enunciado da forma: calcule.

Na multiplicação de números negativos, é dada primeira uma multiplicação de dois números naturais expondo a ideia de ser uma soma de parcelas iguais. Em seguida, conservando essa ideia da soma de parcelas iguais é dada a multiplicação $4 \cdot (-3)$, concluindo que $4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$.

O autor ainda expõe outra maneira que se chegar ao resultado acima, que é através da observação de padrões, concluindo com a regra de sinais conforme a figura 25. Esse método pode ser de grande valia na abordagem da multiplicação de números inteiros, pois possibilita ao aluno visualizar a regra da multiplicação para os inteiros de outra maneira.

Figura 24 - Subtração envolvendo números negativos

Navegando na internet, Maurício encontrou uma tabela com as temperaturas mínimas registradas em três cidades da Europa num fim de semana:

Temperatura mínima (°C)		
Cidade	**Sábado**	**Domingo**
Roma	+2	+6
Paris	+3	−1
Viena	−7	−4

Ele percebeu que houve variação nas temperaturas. Em algumas cidades a temperatura baixou e em outras, subiu.

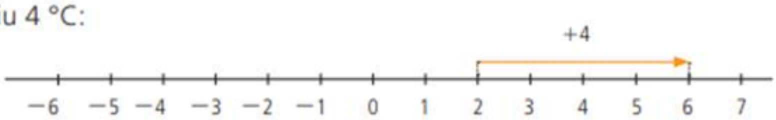
A diferença de temperaturas em cada cidade pode ser calculada efetuando uma subtração:

temperatura do domingo – temperatura de sábado

Vamos fazer os cálculos com Maurício?

Em Roma, a temperatura subiu 4 °C:

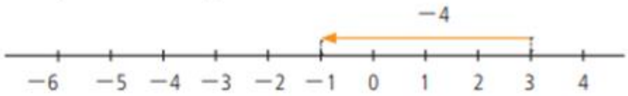
$(+6) - (+2) = 4$



Veja: $(+6) - (+2) = 4$ é o mesmo que $(+6) + (-2) = 4$

− (+
↓
+ (−

Subtrair +2 é o mesmo que **somar –2**, que é o seu oposto.



$(-1) - (+3) = -4$

Observe que $(-1) - (+3) = -4$ é o mesmo que $(-1) + (-3) = -4$.

Subtrair +3 é o mesmo que **somar –3**.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.67)

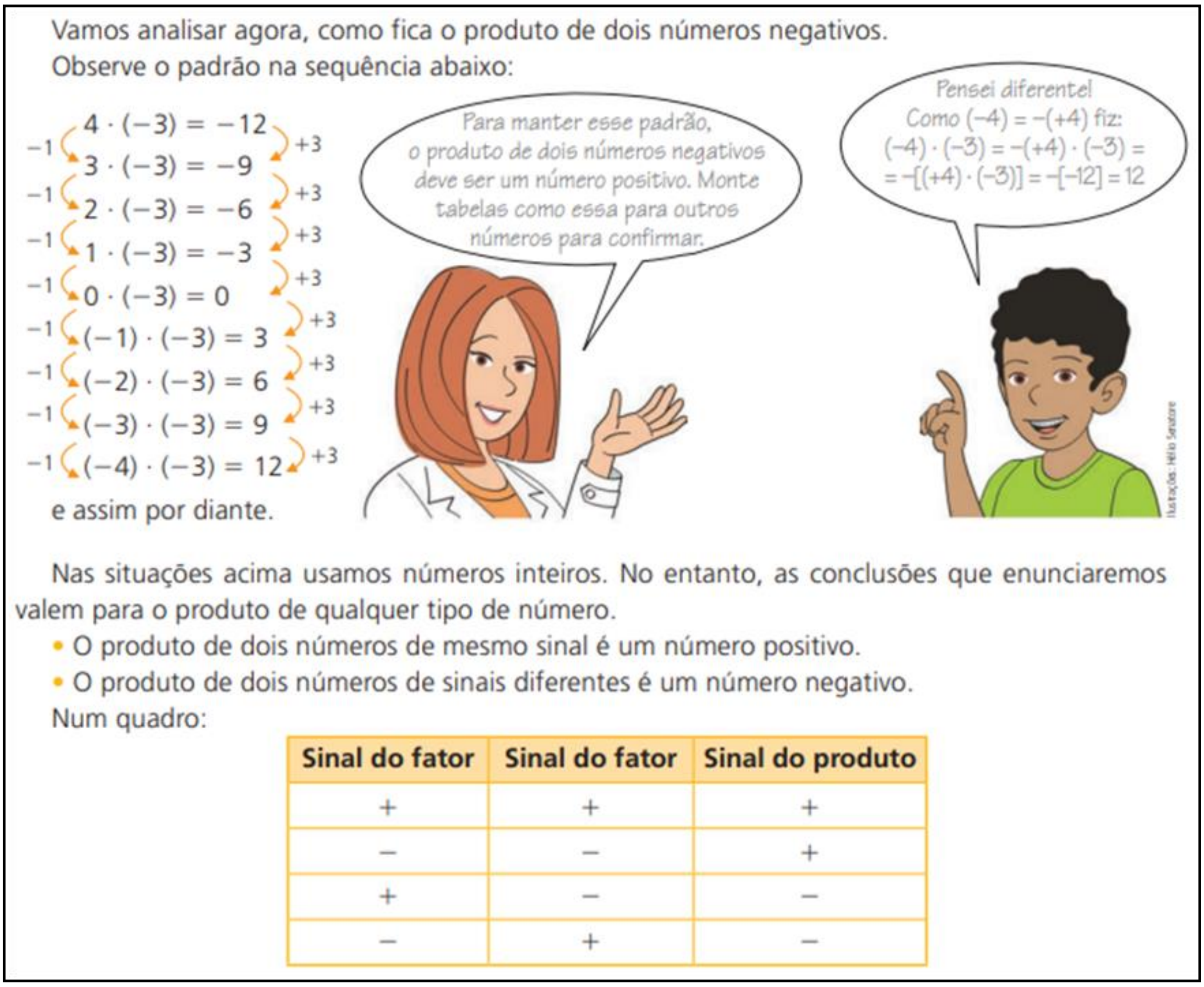
Figura 25 - Regra através da observação de padrões

O que observamos nos leva a pensar que:
- o produto de dois números positivos é um número positivo;
- o produto de dois números de sinal diferente é um número negativo.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, ano 2012, p.71)

Só após isso que o livro passa para a multiplicação de dois números inteiros negativos. Ele apresenta um diálogo entre duas pessoas através de uma ilustração (figura 26).

Figura 26 - Multiplicação de números negativos



Sinal do fator	Sinal do fator	Sinal do produto
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.71)

A seguir tem alguns exemplos e em seguida exercícios. Em relação ao produto de dois números negativos que é o ponto principal do trabalho, o livro aborda de duas maneiras diferentes, o que é bom para que os alunos tenham a possibilidade de esclarecer o motivo de menos com menos dar mais. A forma mostrada acima, que é umas das opções expostas no livro, é uma boa maneira de definir o que muitas vezes fica sem explicação em sala de aula, até mesmo por utilizar outras operações com inteiros, além da multiplicação.

Por fim, o livro expõe o quociente entre dois números inteiros, dizendo que a divisão é a operação inversa da multiplicação e, portanto, a regra do produto se estende para o quociente de dois números inteiros.

Figura 27 - Divisão de números negativos

A divisão é a operação inversa da multiplicação.

- $12 : 3 = 4$ porque $4 \cdot 3 = 12$
- $1{,}4 : 0{,}7 = 2$ porque $2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4$

e assim por diante.

Usando essa ideia, vamos efetuar divisões envolvendo números negativos:

- $30 : (-5) = -6$ porque $(-6) \cdot (-5) = 30$
- $(-16) : (+8) = -2$ porque $(-2) \cdot 8 = -16$
- $(-4{,}5) : (-1{,}5) = 3$ porque $3 \cdot (-1{,}5) = -4{,}5$

Faça mentalmente:

- $18 : (-3)$ -6
- $(-36) : (-4)$ 9

Resumindo:

- o quociente entre dois números de mesmo sinal é um número positivo;
- o quociente entre dois números de sinais diferentes é um número negativo.

Mais exemplos:

- $5{,}4 : (-3{,}6) = -1{,}5$
- $\left(-\frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{8}$

Multiplicamos $\left(-\frac{3}{8}\right)$ pela inversa de $\left(-\frac{3}{5}\right)$, que é $\left(-\frac{5}{3}\right)$.

Fonte: (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2012, p.74)

O livro didático apresenta uma linguagem simples e acessível, o que facilita a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. Essa clareza é fundamental, especialmente para aqueles que estão iniciando seus estudos sobre o tema. No entanto, essa simplicidade pode também apresentar um desafio: ela limita a capacidade dos alunos de enfrentar problemas mais complexos e desenvolver um raciocínio matemático mais avançado.

Outro ponto que percebi foi a falta de uma conexão clara entre as operações com números inteiros. Esse vínculo é essencial para que os alunos compreendam como diferentes operações se inter-relacionam e possam aplicar seus conhecimentos de maneira mais eficaz.

Por outro lado, a abordagem da multiplicação é um destaque positivo do livro. A utilização da observação de padrões para ensinar esse conceito é uma estratégia interessante, pois permite que os alunos visualizem e compreendam melhor as relações numéricas. Essa metodologia pode ajudar a despertar o interesse dos estudantes pela matemática e incentivá-los a explorar mais profundamente o assunto.

Diferentemente do livro analisado anteriormente, este não apresenta sugestões de uso de materiais manipulativos na abordagem dos números inteiros, como jogos e atividades práticas. A ausência desses recursos pode tornar o processo de aprendizagem menos dinâmico, especialmente para alunos que se beneficiam de experiências mais interativas e visuais.

Capítulo 4: Materiais didáticos para o ensino de números relativos

Para o ensino de matemática existe uma diversidade de materiais didáticos. Materiais manipuláveis e jogos matemáticos são bons exemplos.

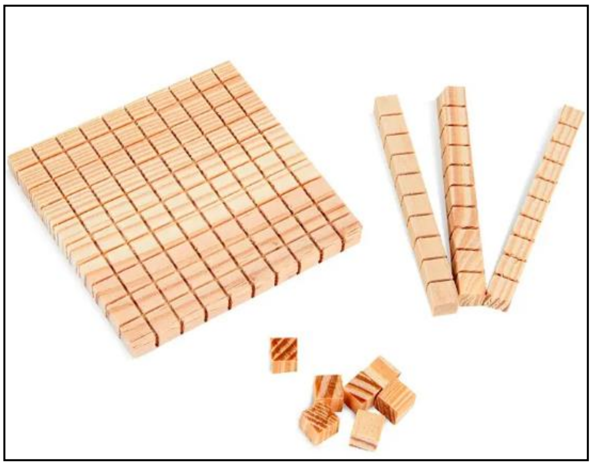
Nacarato (2005) traz a definição de materiais didáticos manipuláveis como "[...] *objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia.*" (REYS, 1971 *apud* NACARATO, 2005, p.9). Com base nessas definições, material didático manipulável é todo e qualquer instrumento que possa ser utilizado no ensino e aprendizagem, como giz, caneta, apostila, cartazes, tinta, notebook, jogo, enfim todo e qualquer material que possa ser um recurso auxiliador para o professor na concreção de uma metodologia em sala de aula, um material que ajude no aprendizado dos alunos.

Os materiais concretos e os jogos são exemplos notáveis de materiais manipuláveis. O material dourado[12] e as réguas de cuisenaire[13] são exemplos clássicos de materiais concretos utilizados para o ensino de sistema de numeração decimal e de frações.

[12] O Material Dourado foi criado e desenvolvido por Maria Montessori (1870-1952), no século XX. O seu principal objetivo é auxiliar no processo de ensino-aprendizagem das aulas de matemática de uma forma concreta e tangível. Confeccionado, na maioria das vezes, com madeira e composto por cubinhos, placas, barras e o chamado cubão, a ferramenta representa as unidades, dezenas, centenas e milhar. Desta forma, **torna a matemática mais visual, auxiliando na compreensão dos alunos**. Disponível em: https://www.materialdourado.com.br/historia-do-material-dourado/

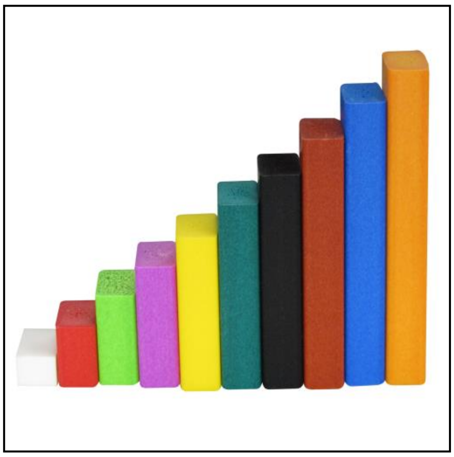
[13] As **réguas (ou Barras) de Cuisenaire** são barras retangulares elaboradas pelo professor belga Emile-Georges Cuisenaire (1891-1980) há mais de 50 atrás para ensinar Aritmética básica. Cada Régua possui cor e comprimento diferentes. A Régua branca tem um centímetro (1 cm) de comprimento e representa o número 1. A Régua laranja é a mais longa, medindo dez centímetros (10 cm) de comprimento, representando, portanto, o número 10. Entre a branca e laranja, encontramos as cores: Vermelha (2), Verde Claro (3), Rosa (4), Amarelo (5), Verde Escuro (6), Preto (7), Marrom (8) e Roxo (9). Disponível em: http://matematicamirim.blogspot.com/2012/05/regua-de-cuisenaire.html?m=1

Figura 28 - Material Dourado



Fonte: https://www.lupel.com.br/produto/10061-material-dourado-do-aluno-111-pecas-smmart/

Figura 29 – Réguas de Cuisenaire



Fonte: https://www.rgsgroup.co.za/mo-shop27/educational-range/educational-skill-builders/cuisenaire-rods/

Por outro lado, diversos estudiosos incentivam a utilização de jogos pedagógicos em sala de aula, pois acreditam que esse recurso pode contribuir para o desenvolvimento e a construção do saber do estudante. De acordo com os PCN (1997), o jogo é uma atividade espontânea no amadurecimento dos processos psicológicos fundamentais. Além de ser uma fonte de significados que favorece a compreensão, proporciona prazer e cria hábitos que se organizam em um sistema. Através dos jogos, as crianças aprendem a lidar com símbolos, a raciocinar por analogia, começam a entender e aplicar convenções e normas que serão utilizadas no processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, conforme os PCN,

> [...] um aspecto significativo nos jogos é o desafio autêntico que eles promovem no aluno, o que desperta interesse e prazer. Portanto, é fundamental que os jogos integrem a cultura escolar, ficando a cargo do professor analisar e avaliar o potencial educativo dos diversos jogos e o aspecto curricular que se deseja promover. (BRASIL, 1997, p.36)

Grando (2000) ressalta que o uso de jogos na sala de aula constitui-se como um poderoso recurso didático que pode auxiliar na construção de conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa. A autora argumenta que, por meio dos jogos, os alunos são desafiados a resolver problemas, desenvolver estratégias e tomar decisões, habilidades essenciais para o raciocínio matemático.

Dessa forma, ao trazer elementos lúdicos para a sala de aula, o ambiente de aprendizagem acaba tornando-se mais dinâmico e interativo, possibilitando que o estudante aprenda conceitos abstratos e complexos, de uma maneira mais leve e significativa. Nesse sentido, dada a grande relevância do uso do lúdico e de materiais manipuláveis no processo de ensino-aprendizagem, dedicamos este capítulo para apresentar alguns exemplos de jogos e materiais manipuláveis, com o objetivo de facilitar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos envolvendo os números inteiros.

4.1 Extensão da tabuada

A abordagem dos números inteiros por meio da extensão da tabuada baseia-se na operação de multiplicação. No livro *Teláris Essencial – 7º ano*, os autores Dante e Viana apresentam esse método a partir da observação de regularidades em uma tabela que amplia a tradicional tabuada, pois além de utilizar os inteiros positivos e o zero, insere também os inteiros negativos. Abaixo, apresentamos uma sequência com o objetivo de os alunos irem percebendo as regularidades possíveis através de conhecimentos prévios e também adquirir novos conhecimentos, com o preenchimento da tabela.

Inicialmente, podemos ressaltar que existe uma correspondência entre os naturais e os inteiros positivos, além do zero, onde 3 = +3, o que é válido para todo número inteiro positivo. Pensando nisso, podemos fazer $+3 \times (+2) = 3 \times 2 = 6$, assim como $+3 \times 0 = 3 \times 0 = 0$

Com esse raciocínio é possível preencher o 2° quadrante da tabela, assim como algumas casas que possuem multiplicações de números inteiros positivos por zero, o que resulta em:

Figura 30 - Preenchimento da tabela (1° quadrante)

x	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
+3	+9	+6	+3	0			
+2	+6	+4	+2	0			
+1	+3	+2	+1	0			
0	0	0	0	0			
-1							
-2							
-3							

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que já é possível perceber algumas regularidades apenas com os primeiros preenchimentos. Uma primeira pergunta possível de se fazer aos alunos seria: Observando a linha do +3, qual a regularidade da sequência numérica dessa linha? E qual a regularidade da coluna do +3? Essas perguntas também podem ser feitas para as linhas e colunas do +1 e do +2.

Esperamos que eles percebam que na coluna do +3, os números estão sempre decrescendo 3 unidades, assim como na coluna do +2 os números sempre diminuem 2 unidades e na coluna do +1 decresce 1 unidade. Seguindo essa sequência nas colunas, podemos completar o 1 e o 3° quadrante, ficando com a seguinte tabela.

Figura 31 - Preenchimento da tabela (1° e 3° quadrantes)

x	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
+3	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9
+2	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6
+1	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-3	-2	-1	0			
-2	-6	-4	-2	0			
-3	-9	-6	-3	0			

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que já foi preenchida todas as linhas e colunas do zero, uma vez que pela regularidade, por não aumentar e não diminuir, sempre resulta em zero.

Por fim, vamos ao último quadrante, que apresenta as multiplicações entre números negativos. Seguindo as regularidades das sequências formadas, é possível preencher também o quarto quadrante, finalizando como ilustrado a seguir:

Figura 32 - Preenchimento da tabela (4° quadrante)

x	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
+3	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9
+2	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6
+1	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
-2	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6
-3	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9

Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo é que os alunos analisem as regularidades e descubram por si só as chamadas “regras de sinais” para a multiplicação e compreendam o porquê delas. É possível até utilizar expressões algébricas caso o desempenho dos alunos seja satisfatório com a utilização desse método. Observe um exemplo possível de manipulação algébrica nessa abordagem, utilizando também outras operações com números inteiros.

Acompanhe a justificativa para calcular $(-3) \times (-4) = +12$.

$(-3) \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (O produto é igual a 0 quando um dos fatores é 0, o que foi observado no preenchimento da tabela.)

$(-3) \times [(+4) + (-4)] = \mathbf{0}$ (A soma de dois números opostos é igual a 0.)

$(-3) \times (+4) + (-3) \times (-4) = \mathbf{0}$ (Pela propriedade distributiva.)

$(-\mathbf{12}) + \,? = \mathbf{0}$

Assim, temos necessariamente que substituir o símbolo ? por +12, pois a soma de dois números só é 0 se eles forem opostos, Logo: $(-3) \times (-4) = \ +\mathbf{12}.$

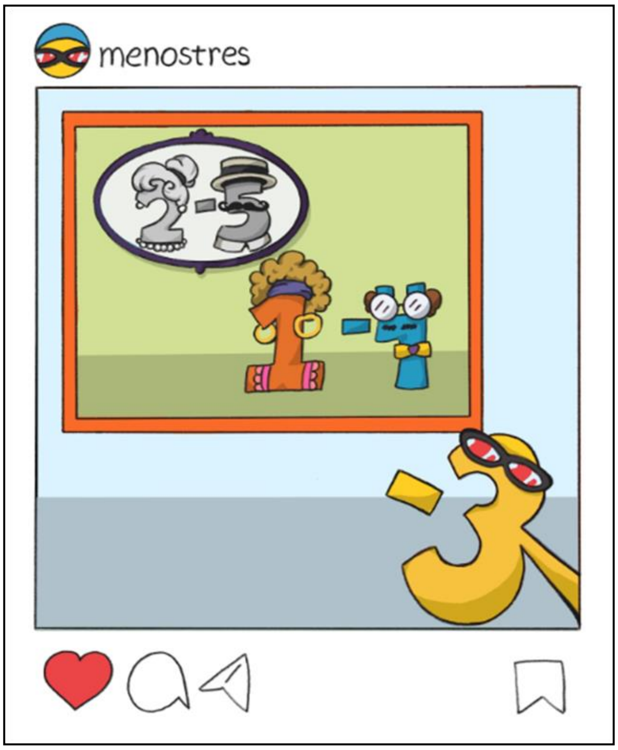
Portanto, a utilização desse material para introduzir a multiplicação de números inteiros pode ajudar os alunos a compreender de forma prática, através da resolução de problemas o porquê da regra de sinais para a multiplicação ser válida, além de reforçar a adição de números inteiros.

4.2 Quadrinhos para o ensino de números inteiros

O quadradinho é um material do projeto HQEM - História em Quadrinhos no Ensino de Matemática, projeto filiado ao Programa Dá Licença - UFF/IME, que tem o objetivo a capacitação de licenciandos e professores de matemática na arte de produzir problemas matemáticos no formato HQ.

O material consiste na abordagem inicial dos números inteiros através do cartum a seguir.

Figura 33 - Quadrinho Retrato de Família



Fonte: Projeto HQEM

É sugerido que cada aluno receba uma folha com a ilustração acima e que, em um primeiro momento, os alunos possam contar a história que leram através do quadrinho. Isso feito, o professor deve estar atento e conduzir a roda de conversa de modo a conduzir a discussão para uma síntese sobre as ideias que estarão em movimento, bem como resgatar pontos importantes que tenham se perdido.

Importante chamar a atenção para a caracterização dos personagens e suas vestimentas, as cores de cada retrato e o tipo de moldura de cada retrato.

Esses elementos são cruciais para o estabelecimento da ideia de uma “família” de subtrações equivalentes, o que caracteriza o objeto matemático “Número Inteiro”. A noção de diferentes representações para um número inteiro ($2 - 5 = 1 - 4 = -3$, por exemplo) deve ser reforçada.

O cálculo mental pode ser utilizado como um contexto para situar os estudantes. Um exemplo: em vez de calcular a subtração 1000 - 873, podemos substituí-la pela subtração 999 - 872. Esse recurso se apoia na ideia de subtrações equivalentes e pode ser uma estratégia de cálculo útil.

Questões pertinentes envolvendo as discussões são bem vindas nessa abordagem, como por exemplo, sugerir aos alunos que citem outros “parentes” da família do -3 e também criar outras famílias onde possam utilizar a criatividade para desenhar e colorir um cartum. Uma família importante que pode ser sugerida é a família do zero.

Algumas questões norteadoras para serem aplicadas aos alunos após a roda de conversa:

1. Apresente outro casal que também faz parte dessa família.
2. O que os casais dessa família têm em comum?
3. Qual sobrenome você daria para essa família?

4.3 Jogo das fichas[14]

Após dividir os alunos em grupos, cada grupo de alunos receberá um kit de 40 fichas (20 azuis e 20 vermelhas).

O professor deve instruir os grupos sobre o funcionamento do material: quantidades positivas são representadas com as fichas azuis, enquanto quantidades negativas são representadas com as quantidades vermelhas.

A mecânica principal das fichas coloridas é o anulamento de fichas: cada ficha azul anula uma vermelha, e vice-versa (Regra do cancelamento). Isto é: fichas azuis e vermelhas podem ser incluídas e retiradas aos pares. Esta mecânica é a base para a realização das tarefas.

---

[14] Material produzido pela equipe do Programa Dá Licença, em parceria com o programa P.A.L.A.V.R.A para a capacitação de docentes do 9º ano da Rede Municipal de Niterói.

Os estudantes devem, através da representação com as fichas, representar números inteiros sob o comando do professor. É importante que o professor incentive diferentes tipos de representações para um mesmo número inteiro, especialmente para o zero. Isso será chave para a operação de adição e subtração com números inteiros.

Em seguida, os estudantes prosseguem para a realização das adições. Nesse momento, o professor deve associar a operação de adição com a ideia de “juntar fichas”. Nesse momento, o anulamento de fichas deve se manifestar na prática dos estudantes, ainda que com a intervenção do professor.

As ações não precisam ser registradas em folha, mas podem ser solicitadas aos grupos que demonstrem suas ações na resolução das operações.

Realizadas as primeiras adições, pede-se aos estudantes que elaborem adições para que colegas de seu próprio grupo resolvam ou para colegas do grupo ao lado. Dada a limitação de fichas para cada grupo, algumas operações não são possíveis de serem realizadas. Como é importante que os próprios estudantes se deem conta dessa limitação, recomendamos que o professor esteja atento.

Uma vez que a organização para realização das subtrações é análoga, destacamos o aumento de dificuldade desta etapa. O professor deve associar a operação de subtração com o ato de “retirar fichas de uma quantidade *a priori*”. No entanto, essa retirada nem sempre é possível de imediato.

Para realizar subtrações como (+8) - (-5), por exemplo, é necessário acrescentar 5 pares de fichas (isto é, “acrescentar o zero”) para somente então retirar as cinco fichas vermelhas.

O duplo papel do sinal “-” (ora como marcador de quantidade negativa, ora como ação de retirada) deve ser explicitado pelo professor ao longo da atividade.

Alguns exemplos de operações utilizando as fichas:

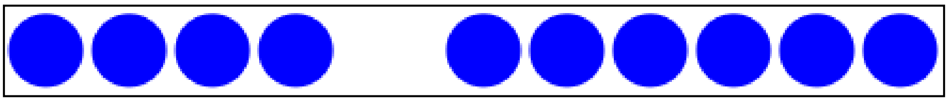
Adição

➔ (+4) + (+6)

Neste exemplo, observe que basta juntarmos quatro fichas azuis com seis fichas azuis, resultando em dez fichas azuis (figura 34), que representa como resultado o número +10. Resumindo algebricamente:

$(+4) + (+6) = (+10)$

Figura 34 - Adição (+4) + (+6)



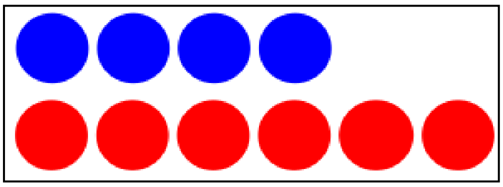
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (+4) + (-6)

Observe que ao fazer a operação com as fichas, juntamos quatro fichas azuis com seis fichas vermelhas. Porém, após ser feito o cancelamento de quatro fichas azuis com quatro fichas vermelhas, pela regra do cancelamento, restam duas fichas vermelhas (figura 35), que corresponde ao resultado da operação, que é -2. Observe algebricamente:

$(+4) + (-6) = (+4) + [(-4) + (-2)] = (\cancel{+4}) + (\cancel{-4}) + (-2) = -2$

Figura 35 - Adição (+4) + (-6)



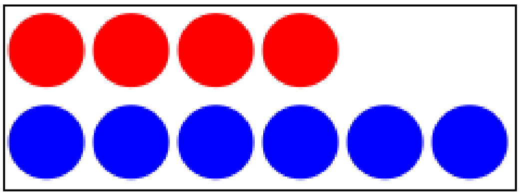
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-4) + (+6)

Este exemplo é similar ao anterior. Estamos adicionando seis fichas azuis a quatro fichas vermelhas, porém nesse caso podemos fazer o cancelamento de quatro fichas vermelhas com quatro fichas azuis [(+4) + (-4) = 0], restando duas fichas azuis, que resultam em +2. Algebricamente temos:

$$(-4) + (+6) = (-4) + [(+4) + (+2)] = \cancel{(-4)} + \cancel{(+4)} + (+2) = +2$$

Figura 36 - Adição (-4) + (+6)



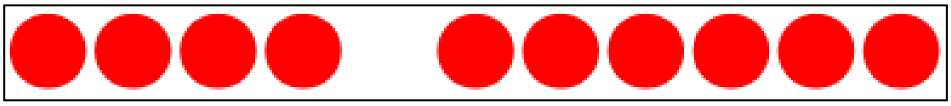
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-4) + (-6)

Neste exemplo, basta juntarmos quatro fichas vermelhas com seis fichas vermelhas, o que resulta num total de dez fichas vermelhas (figura 37), que representa -10. Algebricamente basta adicionarmos, ficando com:

$$(-4) + (-6) = (-10)$$

Figura 37 - Adição (-4) + (-6)



Fonte: Elaborado pelo autor

Em cada adição acima, o resultado é obtido após os cancelamentos de uma mesma quantidade de fichas azuis com as vermelhas, quando existe. Caso contrário, basta adicionar as fichas, obtendo o resultado da adição.

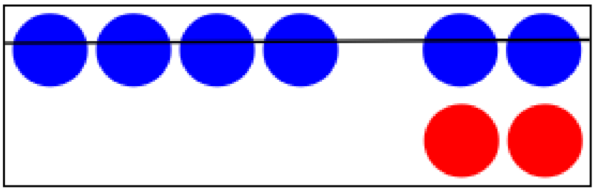
Subtração

➔ (+4) - (+6)

Observe que nesse exemplo, como há apenas quatro fichas azuis e é necessário retirar seis fichas azuis, é preciso adicionar mais duas fichas azuis, porém para não alterar a quantidade inicial, eu preciso adicionar também duas fichas vermelhas, para compensar: (+4) = (+4) + (+2) + (-2). Agora sim podemos retirar (+6) de (+4). Logo, retirando as seis fichas azuis, restam duas fichas vermelhas, que indicam o resultado da subtração, que é -2. Resumindo algebricamente:

$$(+4) - (+6) = [(+4) + (+2) + (-2)] - (+6) = [\cancel{(+6)} + (-2)] - \cancel{(+6)} = (-2)$$

Figura 38 - Subtração (+4) - (+6)



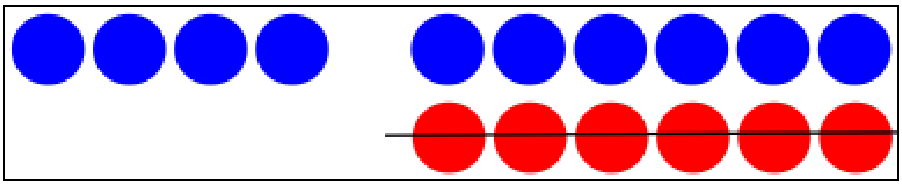
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (+4) - (-6)

Na subtração acima, tem-se a priori apenas quatro fichas azuis e desejam-se retirar, desta quantidade, seis fichas vermelhas. Para tanto, é necessário adicionar seis fichas vermelhas, de modo a conseguir fazer a retirada desejada, sem esquecer que eu preciso também adicionar a mesma quantidade de fichas azuis para compensar: (+4) = (+4) + (+6) + (-6). Retirando as seis fichas vermelhas, ficamos com dez fichas azuis, que nos apresenta o resultado +10. Algebricamente, temos:

$$(+4) - (-6) = [(+4) + (+6) + (-6)] - (-6) = [(+10) + \cancel{(-6)}] - \cancel{(-6)} = (+10)$$

Figura 39 - Subtração (+4) - (-6)



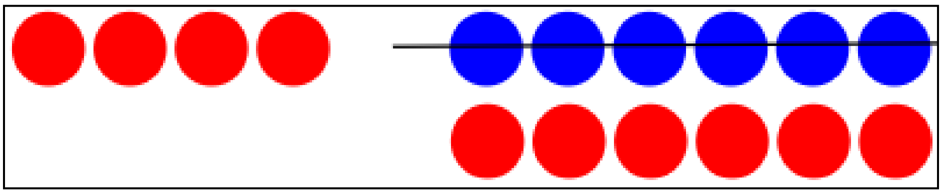
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-4) - (+6)

Neste item, queremos retirar seis fichas azuis de quatro fichas vermelhas, nesse caso é preciso adicionar seis fichas azuis, porém para que não se altere a quantidade inicial, precisamos também adicionar seis fichas vermelhas para compensar: (-4) = (-4) + (+6) + (-6). Agora retiramos (+6) de (-4), restando dez fichas vermelhas que indicam -10 como resultado da subtração. Resumindo algebricamente:

$$(-4) - (+6) = [(-4) + (+6) + (-6)] - (+6) = [(-10) + \cancel{(+6)}] - \cancel{(+6)} = (-10)$$

Figura 40 - Subtração (-4) - (+6)



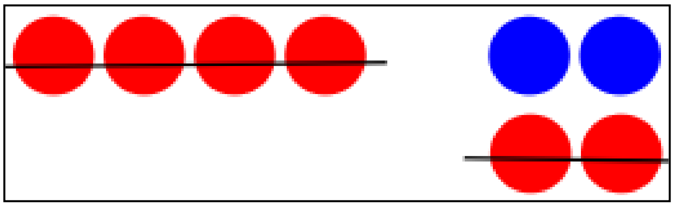
Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-4) - (-6)

Neste caso, observe que temos quatro fichas vermelhas e queremos retirar seis vermelhas, para que isso seja possível iremos adicionar mais duas fichas vermelhas, porém para não alterar nossa quantidade inicial, iremos adicionar duas fichas azuis para compensar: (-4) = (-4) + (-2) + (+2). Retirando agora (-6) de (-4), restam duas fichas azuis, que resulta numericamente em +2. Algebricamente temos:

$$(-4) - (-6) = [(-4) + (-2) + (+2)] - (-6) = [\cancel{(-6)} + (+2)] - \cancel{(-6)} = (+2)$$

Figura 41 - Subtração (-4) - (-6)



Fonte: Elaborado pelo autor

Observação: foram apresentados quatro exemplos de adições e quatro exemplos de subtrações. Poderia conter mais exemplos, mas acreditamos que esses exemplos servem como base para todas as possibilidades usando o 4 e o 6, sendo ambos positivos ou negativos.

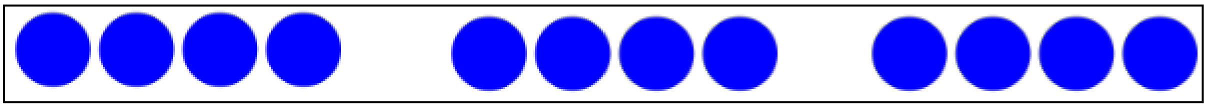
Multiplicação

Para a multiplicação, a primeira coisa a ser mencionada é que a operação para os inteiros é uma extensão natural da multiplicação com os naturais. Vamos a alguns exemplos utilizando as fichas.

➔ (+3) x (+4)

Temos que (+3) x (+4) pode ser interpretado como “juntar” três grupos de (+4). Portanto, para utilizar as fichas, basta que adicionemos três grupos com quatro fichas azuis cada, o que resulta em doze fichas azuis, resultando em +12.

Figura 42 – Multiplicação (+3) x (+4)

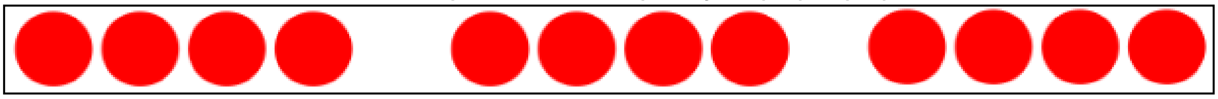


Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (+3) x (+4)

Neste caso, interpretamos a operação como “juntar” três grupos de (-4). Adiciona três grupos de quatro fichas vermelhas cada, o que resulta em doze fichas vermelhas, o que representa -12 como resultado da operação.

Figura 43 – Multiplicação (+3) x (+4)

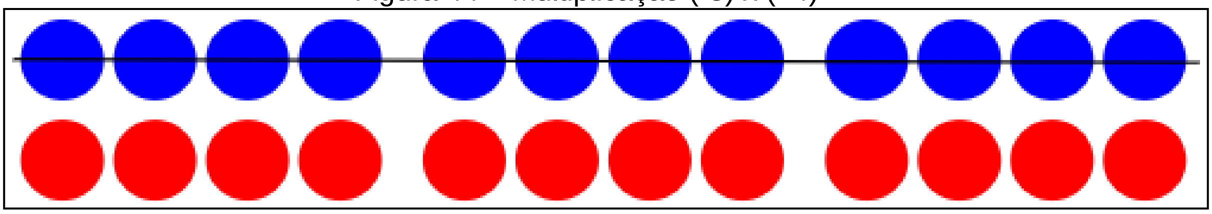


Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-3) x (+4)

Conforme foi trabalhado na subtração, pensaremos que como temos (-3), o queremos é tirar e não juntar fichas. Porém, a princípio não temos nada e queremos retirar três grupos de quatro fichas azuis, para tal será necessário inserir os grupos de fichas azuis para que possam ser retiradas, não esquecendo também de inserir a mesma quantidade de fichas vermelhas, representando dessa forma o nosso valor inicial zero.

Figura 44 – Multiplicação (-3) x (+4)

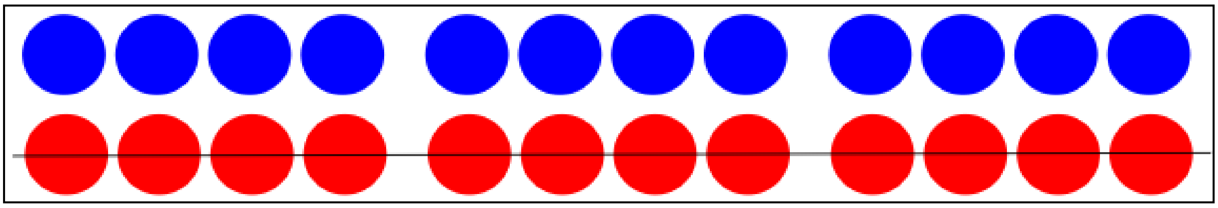


Fonte: Elaborado pelo autor

➔ (-3) x (-4)

Neste caso, interpretaremos a operação por retirar três grupos de quatro. Para isso teremos que representar o nosso valor inicial zero de uma maneira que seja possível fazer a retirada de três grupos de quatro fichas vermelhas. Assim, devemos adicionar três grupos de quatro fichas vermelhas e três grupos de quatro fichas vermelhas, conforme está na figura 45.

Figura 45 – Multiplicação (-3) x (-4)



Fonte: Elaborado pelo autor

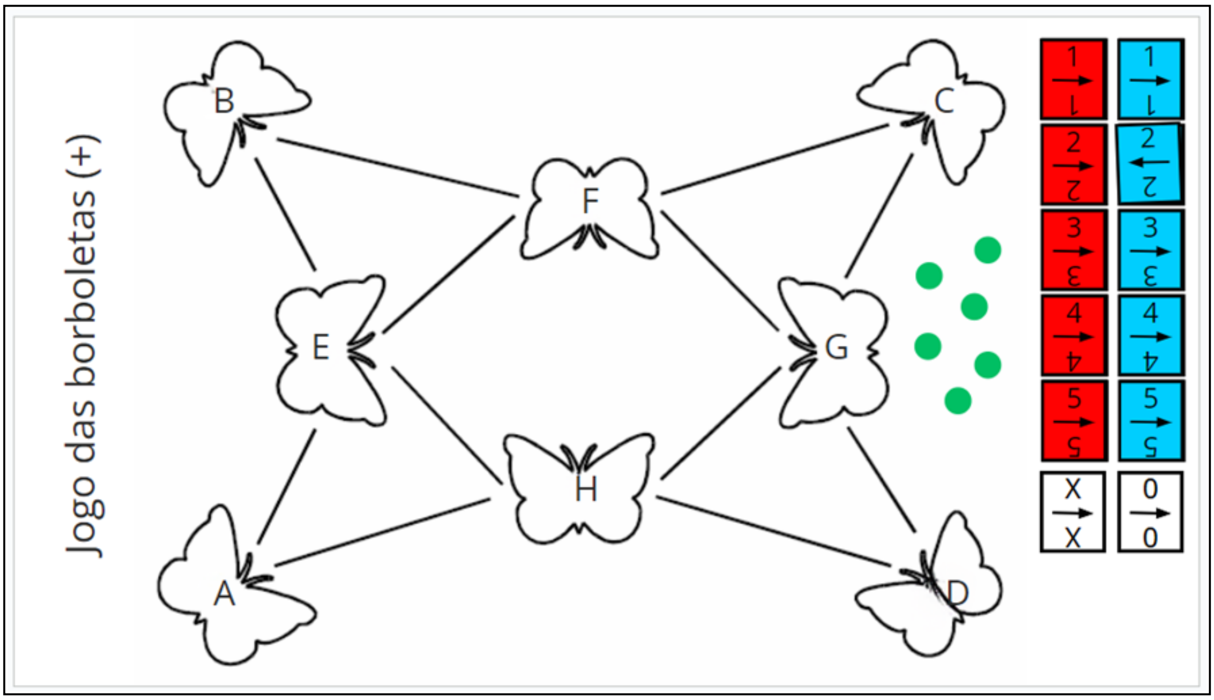
4.4 Jogo das borboletas

O jogo didático foi desenvolvido com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros no contexto da Educação Básica, proporcionando aos alunos uma abordagem mais lúdica, interativa e significativa dos conteúdos matemáticos.

Esta proposta faz parte da dissertação intitulada *Quatro jogos para números inteiros: uma análise*, de autoria de Patrícia Rosana Linardi, elaborada no ano de 1998, sob orientação do professor Doutor Roberto Ribeiro Baldino, no curso de Mestrado da Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (Campus de Rio Claro). A dissertação tem como tema central os números inteiros, e o jogo foi concebido como parte prática da pesquisa, com base nas necessidades observadas no ensino de matemática para alunos do 7° ano do ensino fundamental.

Tabuleiro e as cartas do jogo

Figura 46 – Apresentação do Jogo das Borboletas



Fonte: Adaptação de (Linardi, 1998, pág. 23/25)

Regras e dinâmicas do jogo das borboletas

O jogo das borboletas é iniciado após um sorteio prévio para determinar o primeiro jogador e onde cada jogador sorteará três cartas do monte que contém 44 cartas (sendo 2 brancas com o zero, 2 brancas com o coringa (x), 20 vermelhas, sendo 4 de cada número e 20 azuis, sendo também 4 de cada número). O primeiro jogador escolhe uma determinada quantidade de botões, que estarão disponíveis próximos ao tabuleiro, e os colocará sobre uma das borboletas. Em seguida, irá pôr uma de suas três cartas sobre uma das trajetórias ligada a borboleta onde depositou os botões, preenchendo a outra borboleta ligada pela trajetória, através da carta. Essa quantidade de botões da segunda borboleta irá depender da seguinte regra:

- Se a carta sobre a trajetória for azul, o número de botões na borboleta de onde parte a flecha mais o número da carta deve ser igual ao número de botões na borboleta para onde a flecha aponta.

- Se a carta sobre a trajetória for vermelha, o número de botões na borboleta de onde parte a flecha menos o número da carta, deve ser igual ao número de botões na borboleta para onde a flecha aponta.

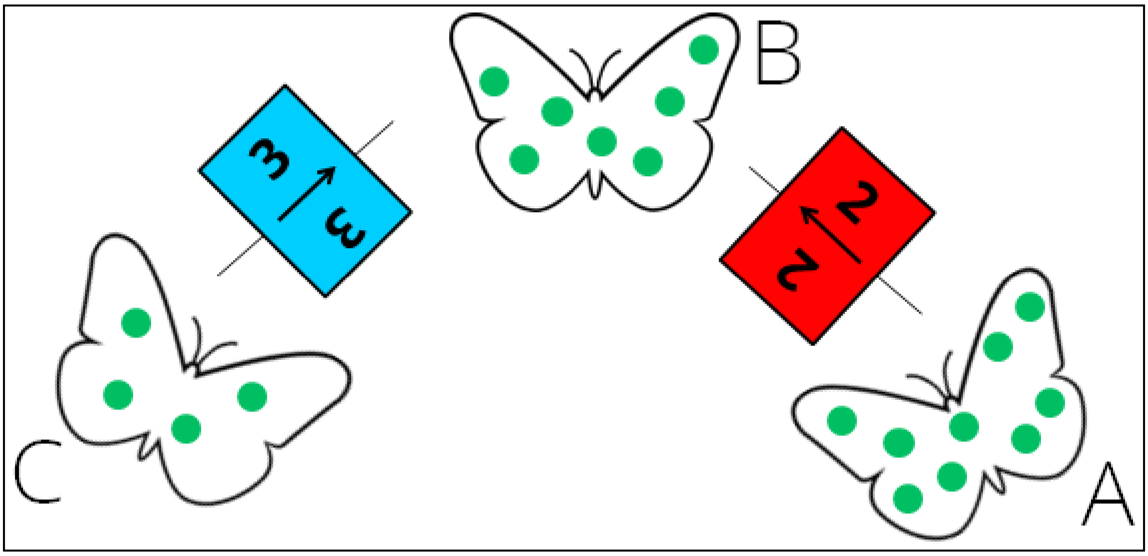
Após terminar sua jogada, o jogador sorteará outra carta do monte, ficando sempre com três cartas na mão.

O próximo jogador fará o mesmo feito pelo jogador anterior, desde que ponha uma carta sobre uma das trajetórias que ligam uma das borboletas já preenchidas a outra vazia, completando-a com a quantidade correta de botões de moda a satisfazer a regra do jogo.

Quando um jogador coloca uma carta na última trajetória vaga, fechando o circuito, ele ganha 1 ponto se esse circuito for externo e 2 pontos caso seja o interno. A cada circuito fechado, o jogador recebe um cartão com o respectivo ponto, para ao final somar e verificar quem possui mais pontos, consagrando o vencedor.

Observe um exemplo.

Figura 47 - Jogo das Borboletas - Exemplo 1

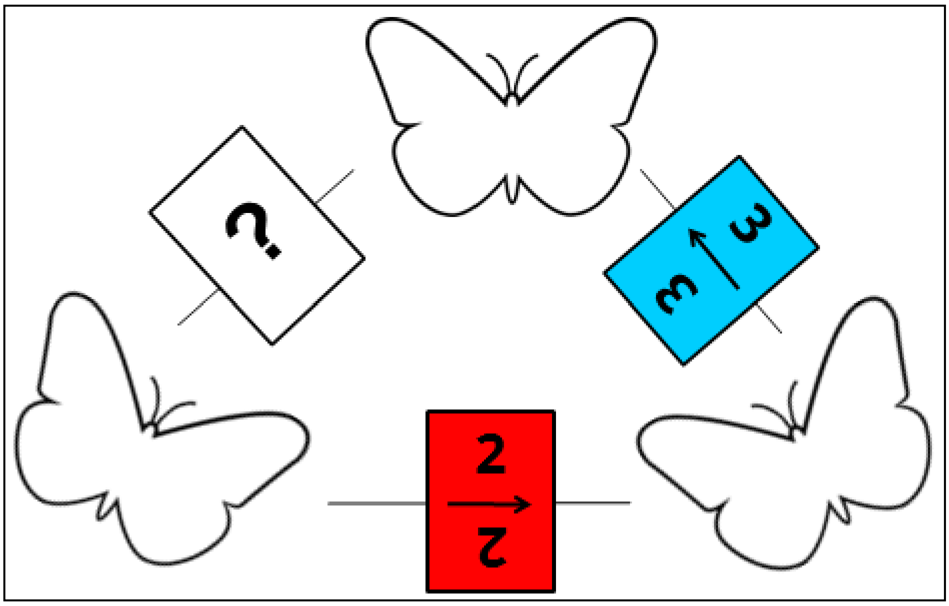


Fonte: Adaptação de (LINARDI, 1998, p. 26)

Nesse exemplo, vamos supor que o primeiro jogador colocou 9 fichas na borboleta A e colocou a carta 2 vermelha sobre a trajetória indo para a borboleta B. Segundo a regra, a quantidade de fichas na borboleta para onde aponta a flecha (borboleta B) deve ser igual a 7, pois a carta é vermelha e vamos subtrair da quantidade de fichas que estavam na borboleta de onde a flecha parte (borboleta A). O próximo jogador teria que jogar uma carta em uma das suas borboletas já preenchidas com as fichas. Vamos supor que pôs a carta 3 azul no exemplo acima, ele deveria preencher a borboleta mais a esquerda da imagem acima com 4 fichas, pois a quantidade de fichas na borboleta de onde parte a flecha mais a quantidade da carta colocada sobre a trajetória deve ser igual a 7, que é a quantidade de botões para onde a flecha está apontando. Lembrando que os valores são adicionados, pois a carta é azul.

Temos ainda a versão que chamamos de abstrata, que se joga sem os botões, que deve ser enfatizado pelo professor responsável. O correto é estimular os alunos a pensarem nas cartas a serem colocadas nas trajetórias. Veja um exemplo a seguir:

Figura 48 - Jogo das Borboletas - Versão Abstrata



Fonte: Adaptação de (Linardi, 1998, p.102)

Nessa versão o objetivo é fazer com que os alunos consigam encontrar uma regularidade, pois independente da quantidade de fichas que você coloque nas borboletas, pela regra do cancelamento, a próxima carta a gente sempre pode deduzir, no exemplo acima, a carta que fecha corretamente o circuito será a carta azul com o número 1, e isso independe da quantidade de fichas nas borboletas.

4.5 Jogo das araras

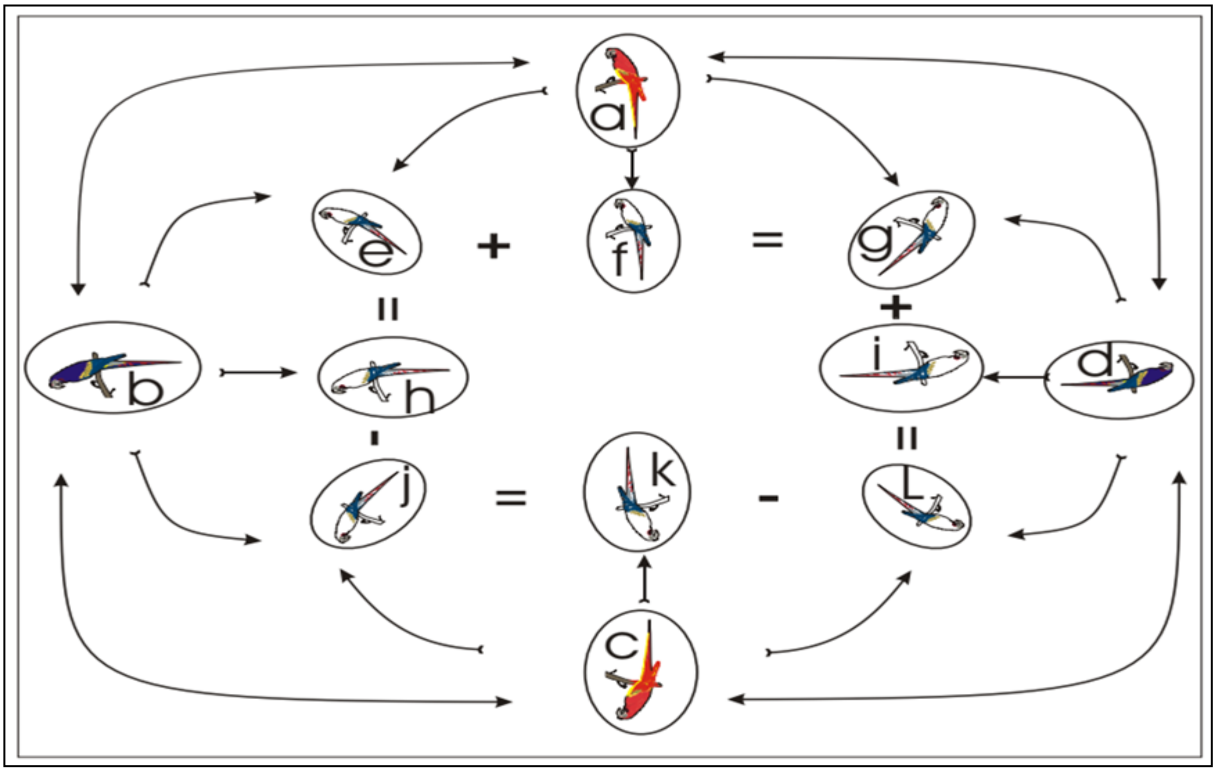
Assim como o jogo das borboletas, esse material faz parte da dissertação intitulada *Quatro jogos para números inteiros: uma análise*, de autoria de Patrícia Rosana Linardi, elaborada no ano de 1998, sob orientação do professor Doutor Roberto Ribeiro Baldino, no curso de Mestrado da Universidade Estadual Paulista - Instituto de Goeciências e Ciências Exatas (Campus de Rio Claro).

<u>Regras e dinâmicas do jogo das araras</u>

O jogo pode ser jogado por até 4 pessoas. No início do jogo cada um irá sortear quatro cartas, as demais ficarão em um monte próximo ao tabuleiro. O primeiro jogador escolhe uma trajetória ligando duas araras e colocará uma de suas cartas na trajetória escolhida no sentido da flecha, se houver. Em seguida, colocará quantos botões quiser na arara, desde que os botões sejam da mesma cor. Importante ressaltar a importância de não utilizar tantos botões para que possa facilitar os cálculos com os botões. Para saber a quantidade de botões a ser colocada na outra arara, seguirá a seguinte regra:

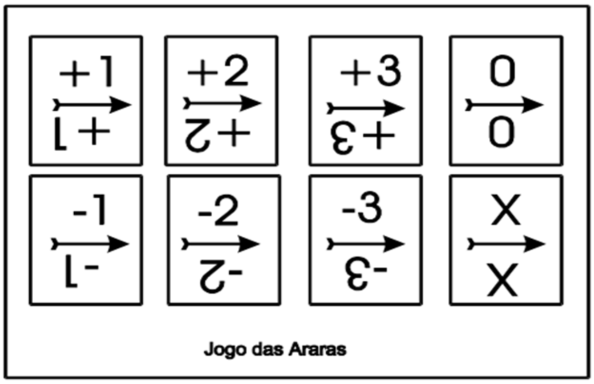
- ➔ As fichas devem ter a mesma cor das araras se estas forem coloridas.
- ➔ O número da carta vezes o número de botões na arara de onde parte a flecha, deve ser igual ao número de fichas na arara para onde a flecha aponta e,
- ➔ Se a carta tiver sinal positivo (+), a cor das fichas para onde a flecha aponta deverá ser a mesma das fichas, na arara de onde a flecha parte
- ➔ Se a carta for negativa (-) estas cores deverão ser diferentes uma da outra.

Figura 49: Tabuleiro do Jogo das Araras



Fonte: (Linardi, 1998, p. 43)

Figura 50 - Cartas do jogo das araras



Fonte: (Linardi, 1998, p. 44)

Após o jogador descartar uma carta no tabuleiro, o mesmo deve pegar outra no monte, a fim de permanecer sempre com quatro cartas na mão. O jogador seguinte deverá colocar uma carta sobre uma das trajetórias que liga a uma arara já preenchida com botões e seguir a regra preenchendo a outra arara que estará vazia.

Caso um jogador preencha uma segunda arara branca entre três que formam um circuito, deverá também preencher a terceira arara, porém não outra carta.

Observações importantes!

- ➔ A carta X funciona como curinga e só pode assumir valores diferentes das cartas existentes no jogo.
- ➔ Quem fechar um circuito aditivo marca 1 ponto e recebe um cartão com o respectivo ponto.
- ➔ Quem fechar um circuito multiplicativo marca 2 pontos e recebe um cartão com o respectivo ponto.

O objetivo final do jogo é fechar a maior quantidade de circuitos possíveis, pois ao final quem obtiver a maior pontuação será o vencedor do jogo.

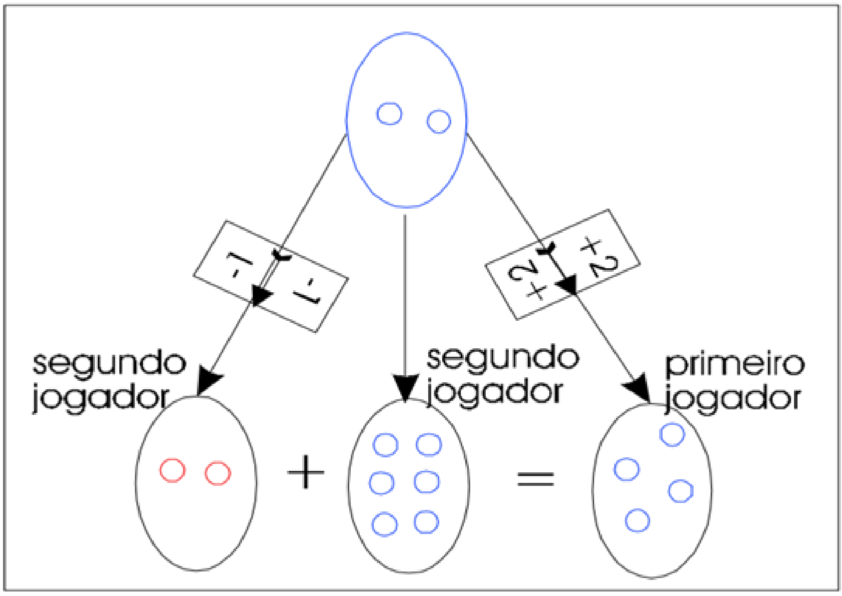
Se em uma partida um determinado jogador não tiver em mãos uma carta que possa preencher o tabuleiro, segundo as regras do jogo, deverá deixar o jogador que jogou antes tirar uma de suas cartas ao acaso e sortear outra no monte. O jogador que sorteou a carta poderá ficar com a carta do outro jogador, se assim desejar, desde que descarte uma das suas.

Se no decorrer do jogo surgir uma trajetória vazia ligando suas araras já preenchidas, o jogador da vez poderá colocar uma de suas cartas sobre a trajetória, sempre de acordo com a regra do jogo.

Importante ressaltar que nesse jogo, além da multiplicação, algumas das borboletas serão preenchidas de acordo com adição e subtração, que estarão representadas por seus respectivos símbolos operacionais.

Observe a imagem a seguir para facilitar o entendimento

Figura 51 - Jogo das Araras - Exemplo 1



Fonte: (Linardi, 1998, p. 47)

4.5 Jogo: A conquista

Como parte das reflexões apresentadas nesta dissertação, foi selecionado um jogo didático retirado do livro A conquista, de autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, publicado em 2008. O jogo tem como objetivo principal facilitar a compreensão dos números inteiros, promovendo uma aprendizagem mais significativa por meio de atividades lúdicas.

Objetivo do jogo: Vence a partida o participante que conseguir chegar até a casa Chegada ou ficar sozinho no tabuleiro.

Regras:

1 - Coloque seus marcadores na casa Início. Os marcadores podem ser moedas, sementes ou pequenos objetos.

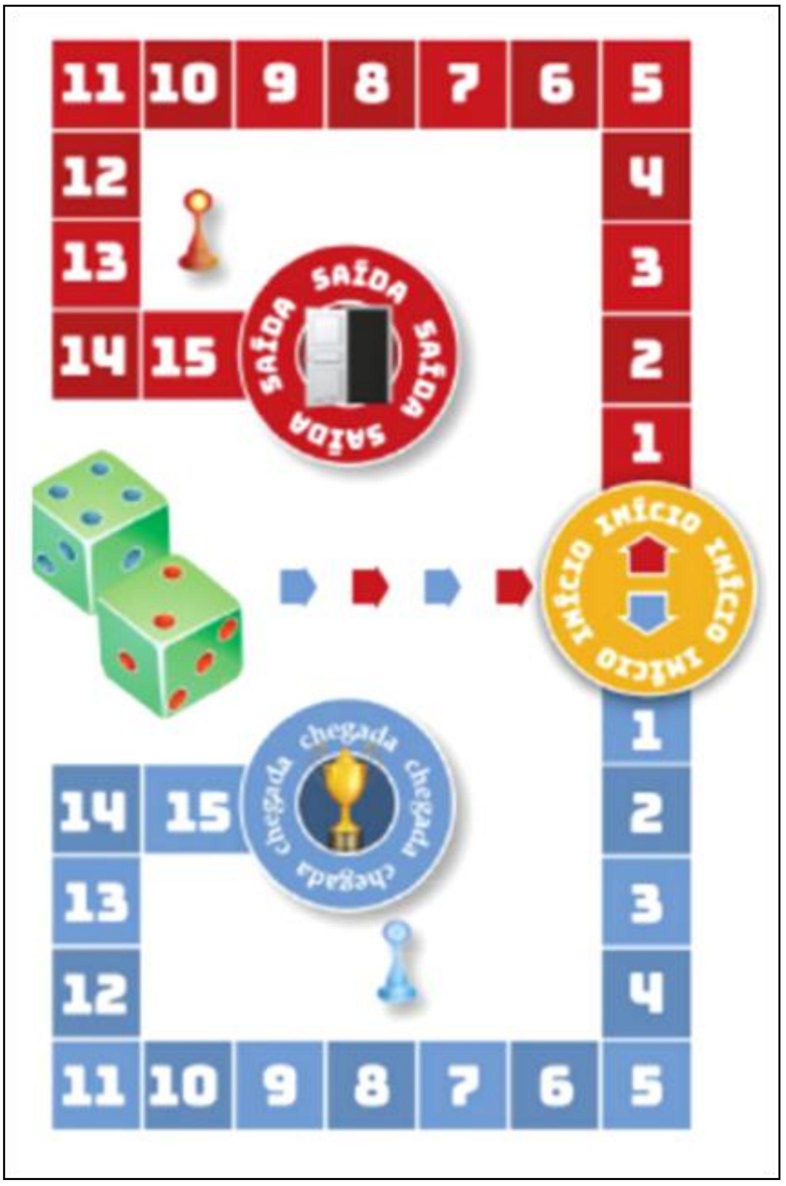
2 - Um participante de cada vez lança simultaneamente os dois dados.

Na mesma jogada, o número sorteado no dado com pontos azuis indica o número de casas que o marcador deverá andar no sentido da casa chegada. O número sorteado no dado com pontos vermelhos indica a quantidade de casas que o marcador deverá andar no sentido da casa saída na mesma jogada.

3 - O participante que “sair” do tabuleiro (casa saída) será eliminado. O participante terá que usar o resultado dos dois dados para movimentar o marcador; dessa forma, o jogador só sai do tabuleiro depois de fazer a jogada andando o número de casas correspondentes aos dois dados.

Tabuleiro do jogo

Figura 52 - Tabuleiro do jogo do livro *A Conquista*

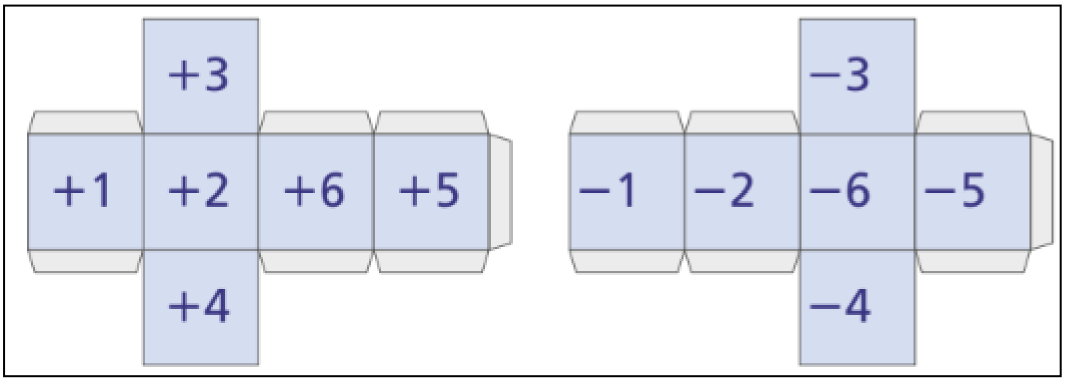


Fonte: (Castrucci & Giovanni Júnior, 2018. pág. 31)

4.6 O jogo dos produtos

O jogo é composto por dados, sendo um com os números de +1 a +6 e outro com os números de -6 a -1

Figura 53 - Dados do Jogo dos Produtos



Fonte: (Castrucci & Giovanni Júnior, 2018. pág. 62)

Além de três tabuleiros, que são na verdade a extensão da tabuada que sugerimos como primeiro material, porém essa tabuada vai até o número seis e não até 10 como é a nossa tabuada tradicional. Um tabuleiro é formado pelo produto de dois números positivos, outro pelo produto de um número negativo com um positivo e um terceiro tabuleiro com o produto dos números negativos.

Figura 54 - Tabuleiros do jogo dos produtos

Tabuleiro I

×	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+1	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+2	+2	+4	+6	+8	+10	+12
+3	+3	+6	+9	+12	+15	+18
+4	+4	+8	+12	+16	+20	+24
+5	+5	+10	+15	+20	+25	+30
+6	+6	+12	+18	+24	+30	+36

Tabuleiro II

×	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+1	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+2	−2	−4	−6	−8	−10	−12
+3	−3	−6	−9	−12	−15	−18
+4	−4	−8	−12	−16	−20	−24
+5	−5	−10	−15	−20	−25	−30
+6	−6	−12	−18	−24	−30	−36

Fonte: (Castrucci & Giovanni Júnior, 2018. pág. 62)

O jogo a princípio é proposto para apenas dois jogadores. Após escolher o tabuleiro, cada jogador receberá dois dados, de acordo com o tabuleiro escolhido, e um lápis.

Para o tabuleiro 1, utiliza-se os dados com números positivos.

Para o tabuleiro 2, utiliza-se um dado com números positivos e outro com números negativos.

Para o tabuleiro 3, utiliza-se os dados com números negativos.

Cada jogador, na sua vez, lança os dados, calcula o produto dos números das faces superiores e pinta o quadradinho do tabuleiro que tem o resultado obtido.

Ganha o jogo o competidor que conseguir pintar primeiro uma linha, uma coluna ou uma diagonal no seu tabuleiro.

4.7 Jogo Não Quero Não

O material é uma adaptação do jogo No Thanks!, produzido pela ZMAN Games. O nome desta proposta de adaptação é uma possível tradução do jogo original, que foi desenvolvida pelo subprojeto de Matemática do PIBID UFF em 2017.

O objetivo do jogo é acumular pontos (cartas numéricas + fichas coloridas) realizando operações básicas com números inteiros. O ganhador é o jogador que tiver o resultado mais próximo da sua carta objetivo.

Este material tem como objetivo estimular a aprendizagem das operações de adição e subtração com os números inteiros, utilizando o conhecimento adquirido na criação de estratégias mais conscientes. Além disso, o jogo busca estimular o cálculo mental.

O jogo é composto por: 33 cartas numeradas de -16 a +16; 50 peças, sendo 25 brancas e 15 pretas e 7 cartas objetivos.

O jogo pode ser jogado de 3 a 5 pessoas.

Inicialmente, as cartas numéricas devem ser separadas das cartas objetivo e embaralhadas, sem misturar os dois tipos de cartas entre si. Cada jogador pega aleatoriamente uma carta objetivo sem que os outros jogadores vejam. Em seguida, cada jogador deve receber 10 peças, 5 brancas e 5 pretas.

As peças coloridas têm os seguintes poderes:

Peças pretas: somar uma unidade (+1)

Peças brancas: subtrair uma unidade (-1)

O primeiro jogador virará a carta do topo do monte de cartas numéricas, exibindo seu valor para todos os jogadores da mesa. Dependendo do seu objetivo e estratégia, o primeiro jogador pode ficar com a carta para si ou passá-la adiante. Se ele escolher ficar com a carta, o próximo jogador deve virar mais uma carta do monte das cartas numéricas e seguir o jogo. Porém, se o primeiro jogador não quiser ficar com a carta, ele a passará para o segundo jogador com uma peça branca ou preta (à sua escolha).

Se o segundo jogador aceitar essa carta, ele ficará com ela e com a peça; porém se ele também não quiser, deve passar o conjunto (carta mais peça) para o próximo jogador, incluindo mais uma peça branca ou preta (à sua escolha).

O jogo segue desta forma até alguém decidir ficar com a carta. Este jogador ficará obrigatoriamente com a carta e todas as peças que a estiverem acompanhando.

A próxima carta numérica é retirada do monte somente depois que a carta da mesa é escolhida por algum jogador.

Se o jogador não possuir mais nenhuma peça, ele deve ficar obrigatoriamente com carta da mesa e todas as peças que estiverem com ela, caso tenha alguma.

O jogo termina quando todas as cartas numéricas acabarem. Neste momento, cada jogador soma seus pontos (cartas numéricas + fichas coloridas) e ganha o jogador que obtiver como resultado o valor mais próximo do número na sua carta objetivo.

Caso o jogador junte uma sequência de números de razão 1, ao fim do jogo ele irá escolher apenas o menor ou maior número dessa sequência para somar aos seus pontos.

O jogador não pode ter menos de 3 cartas numéricas para encerrar o jogo.

Capítulo 5 - Elaboração de uma sequência didática para o ensino de números inteiros

Esta sequência é efetivamente o produto educacional desta dissertação. Neste capítulo faremos uma apresentação global de sua estrutura. Mais detalhes podem ser observados no Apêndice A desta dissertação. A sequência didática é composta de 4 etapas, a saber:

Etapa 1 - Apresentação do Conjunto dos Números Inteiros

1° momento: quadrinho retrato de família

2° momento: fichas coloridas

Etapa 2 - Adição e Subtração de Números Inteiros

1° momento: operando com fichas coloridas

2° momento: jogo das borboletas

Etapa 3 - Multiplicação de Números Inteiros

1° momento: multiplicação com fichas coloridas

2° momento: circuito multiplicativo

Etapa 4 - Divisão de Números Inteiros

jogo com cartas coloridas (quem sou eu?)

Etapa 1: <u>Apresentação do Conjunto dos Números Inteiros</u>

Objetivo: Apresentar, classificar os números inteiros (negativos, positivos e zero) e identificar as famílias de um mesmo número através de equivalências.

Atividades Sugeridas:

* Quadrinho “Retrato de família;

* Representação de números inteiros com as fichas coloridas.

1° momento: <u>Quadrinho “Retrato de família”</u>

Abrir uma roda de conversa com os alunos, para que eles possam contar a história que visualizaram através do quadrinho Retrato de Família (figura 33) apresentado na seção 4.2. Em seguida, falar um pouco da história dos números inteiros e como esses números estão presentes no cotidiano dos alunos. Como atividade, pode propor que encontrem outras famílias do número -3 que foi abordado anteriormente no quadrinho. A seguir é proposto um questionário para que os alunos consigam executar alguns comandos com base no que foi discutido anteriormente.

Propostas de questões:

1) Apresente outro casal que também faz parte dessa família.

2) O que os casais dessa família têm em comum?

3) Qual sobrenome você daria para essa família?

2° momento: <u>Fichas coloridas</u>

Separar os alunos em grupo de 5 alunos. Cada grupo receberá 30 fichas (15 azuis e 15 vermelhas). Após explicar o funcionamento do material, pedir aos alunos que primeiramente, pensando no retrato de família, representem famílias do -3 utilizando as fichas. Durante a explicação do material, deixar claro a importância do anulamento de quantidades iguais azuis e vermelhas, podendo incluir a mesma quantidade de fichas de ambas as cores sem que altere o resultado durante uma operação, pois é apenas a representação do zero.

Nesse primeiro momento o foco é apenas para que os alunos consigam representar números inteiros utilizando as fichas coloridas, as operações serão trabalhadas nos momentos seguintes.

Abaixo estão alguns exemplos de atividades que podem ser propostas pelo professor.

1) Represente o -3 de três formas diferentes utilizando as fichas coloridas.

2) Represente o 0 de três maneiras diferentes utilizando as fichas. (Esse exercício é super importante pois ele é chave para que os alunos consigam manipular bem as fichas no momento de operar números inteiros.

Etapa 2: <u>Adição e Subtração de Números Inteiros</u>

Objetivo: Compreender e aplicar as regras de sinais nas operações de adição e subtração.

Materiais Sugeridos:

* Material com fichas coloridas (vermelho = negativo, azul = positivo).

* Jogo das borboletas

1° momento: <u>Fichas coloridas</u>

Para a soma é importante reforçar a ideia de "inserir fichas", enquanto na subtração "retirar fichas". Na adição (+4)+(-1) colocamos no tabuleiro 4 fichas azuis e retiramos 1, restando 3 palitos azuis que indicam que a operação resulta em +3.

Na subtração (+5) - (-3), por exemplo, é necessário acrescentar 3 pares de fichas de cada cor (isto é, "acrescentar o zero") para após retirar as três fichas vermelhas. Esse procedimento se dá uma vez que não é possível, a princípio, retirar três fichas vermelhas por possuir apenas fichas azuis sobre o tabuleiro, sendo necessário colocar fichas vermelhas para ser possível retirar, porém para inserir é necessário colocar também as azuis para não alterar em nada o resultado.

2° momento: <u>Jogo das borboletas</u>

A seguir nossa sugestão é aplicação do jogo das borboletas, onde os alunos poderão usar as operações com números inteiros e se divertir com o jogo, aprendendo de forma lúdica.

Etapa 3: <u>Multiplicação com Números Inteiros</u>

Objetivo: Entender as regras de sinais na multiplicação.

Atividades Sugeridas:

* Material com fichas coloridas (vermelho = negativo, azul = positivo);

* Jogo das borboletas para a multiplicação.

1° momento: <u>Fichas coloridas</u>

Também achamos importante trabalhar a multiplicação com as fichas para que esclarecer melhor a multiplicação de dois números negativos resultarem em um número positivo. Na multiplicação através da representação com fichas coloridas é primordial que os alunos compreendam a importância de se adicionar o zero sempre que necessário.

2° momento: Circuito multiplicativo

A seguir, nossa sugestão é aplicação de uma adaptação que fizemos do jogo das borboletas e do jogo das araras, onde os alunos poderão praticar a multiplicação com números inteiros de uma forma diferente, aprendendo de forma lúdica.

Etapa 4: Divisão com Números Inteiros

Objetivo: Entender as regras de sinais na divisão através da multiplicação, ressaltando que uma é operação inversa da outra e que a regra de sinais se mantém igual nas duas operações.

Atividades Sugeridas:

* Resolvendo divisões com cartas coloridas

Nossa intenção não é dar tanta ênfase nessa etapa. Acreditamos que basta que os alunos percebam que podemos usar a mesma regra que aprenderam para a multiplicação.

Público alvo: A sequência é voltada para os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental II, sendo possível a aplicação em outros anos escolares posteriores. Também pode, com algumas adaptações, ser aplicada no 6º ano.

Cronograma

Quadro 3: Cronograma da sequência didática

Etapa 1 - Apresentação do conjunto dos números inteiros	
1° Momento - Quadrinho Retrato de Família	1 tempo (50 minutos)
2° Momento - Fichas coloridas	2 tempos (50 minutos cada)
Etapa 2 - Adição e subtração de números inteiros	
1° Momento - Operando com as fichas coloridas	3 tempos (50 minutos cada)
2° Momento - Jogo das borboletas	2 tempos (50 minutos cada)
Etapa 3 - Multiplicação de números inteiros	
1° Momento - Operando com as fichas coloridas	2 tempos (50 minutos cada)
2° Momento - Circuito multiplicativo	2 tempos (50 minutos cada)
Etapa 4 - Divisão de números inteiros	
Jogo com cartas coloridas	2 tempos (50 minutos cada)

Fonte: Elaboração própria

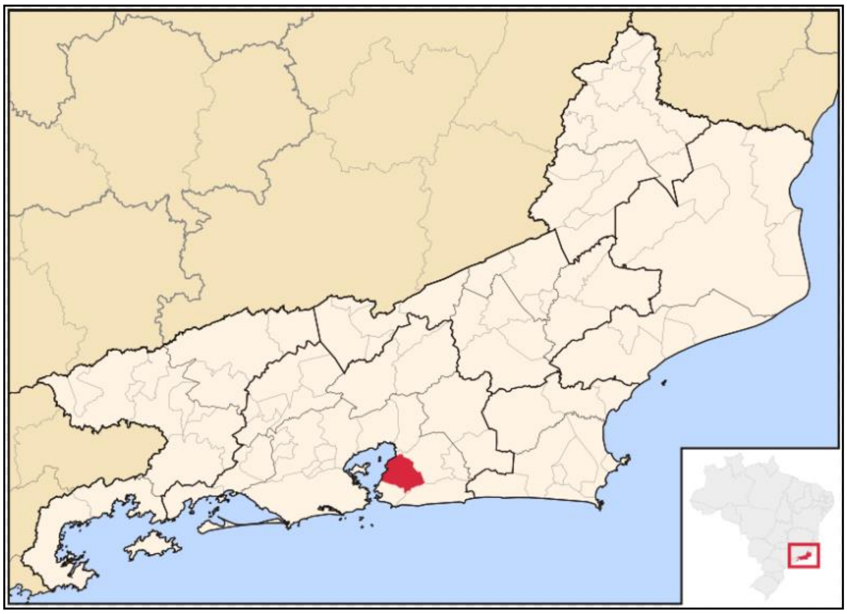
Capítulo 6 - Relato da experiência didática

Neste capítulo apresentaremos o contexto da pesquisa, os sujeitos, os instrumentos utilizados, o relato da experiência didática realizada e os seus resultados.

6.1 O contexto da pesquisa (escola)

A aplicação do material foi em uma escola situada no município de São Gonçalo, localizada na Região Metropolitana do estado do Rio de Janeiro, a uma distância de, aproximadamente, 36 km da Cidade do Rio de Janeiro, conforme observa-se no mapa (figura 55). A escola faz parte da rede municipal da cidade, que inclui mais de 20 escolas, observe uma imagem de sua fachada (figura 56).

Figura 55 - Localização do município de São Gonçalo no estado do Rio de Janeiro



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A3o_Gon%C3%A7alo_%28Rio_de_Janeiro%29#>

Figura 56 - Fachada da escola

Fonte: Acervo do autor

A escola possui aproximadamente 1.100 a 1.300 alunos matriculados, distribuídos em cerca de 41 turmas. Atuo nesta unidade escolar desde 2022. Infelizmente, a região é marcada por elevados índices de vulnerabilidade social.

O bairro onde a escola está inserida é classificado como de baixa renda, com parte significativa da população vivendo em situação de informalidade no mercado de trabalho. A precariedade nas condições de moradia e transporte, associada à violência presente no cotidiano dos alunos e suas famílias, impacta diretamente a frequência escolar, o desempenho acadêmico e a motivação para aprendizagem. Nesse contexto, a atuação da escola se torna ainda mais relevante, servindo como espaço de proteção, acolhimento e desenvolvimento integral dos estudantes.

A Escola participa das avaliações nacionais aplicadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que compõe o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). De acordo com os dados mais recentes do IDEB (2023), a Escola apresentou os seguintes resultados:

- Anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano): nota 3,2, abaixo da média municipal de 3,9 e também da meta nacional, que era de 5,0 para essa etapa.

Essa avaliação, abaixo da média da rede e das metas definidas pelo INEP, reflete o desafio enfrentado pela escola em avançar na aprendizagem. No entanto, reconhece-se que esse panorama está inserido em um contexto municipal difícil: São Gonçalo registrou média de 3,9 nos anos finais em 2023, valor inferior à meta e indicativo de um cenário educacional que exige reforço em aprendizagem, retenção e recursos pedagógicos.

A partir desses resultados, é possível identificar lacunas significativas, tanto em comparação com a meta nacional quanto com o desempenho da rede municipal. Esses números constituem um indicativo para a adoção de práticas pedagógicas mais robustas, programas de reforço, formação continuada de professores e projetos destinados a melhorar o rendimento acadêmico dos estudantes.

6.2 Sujeitos

Os materiais foram aplicados em duas turmas do Ensino Fundamental 2, sendo ambas as turmas de 8° ano (801 e 802). Essa escolha se deu pelo fato delas serem as duas turmas que estou lecionando nesse período.

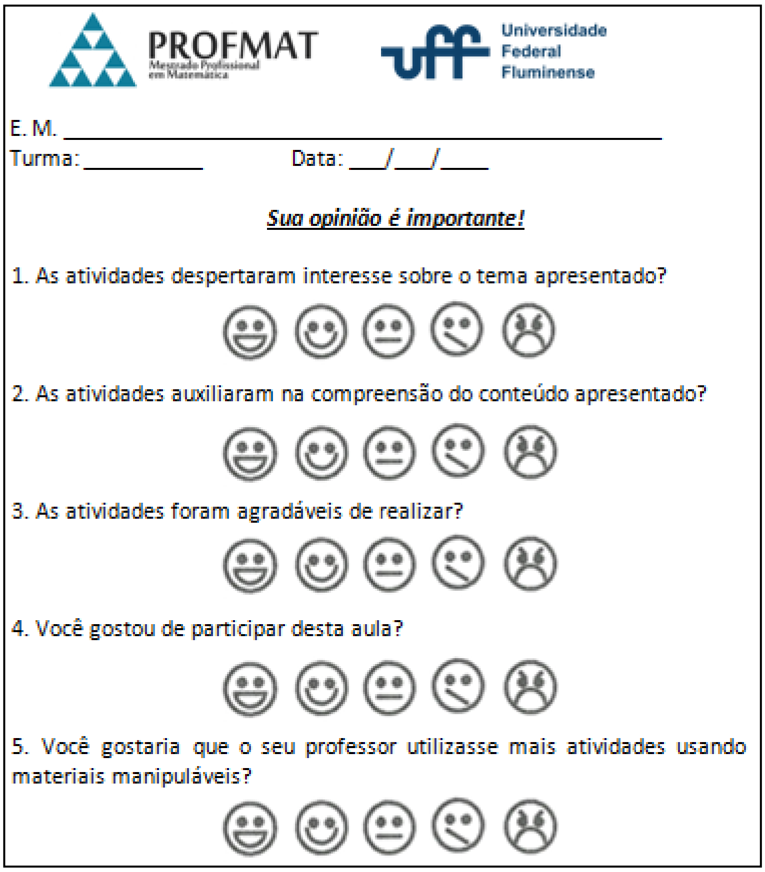
Embora as duas turmas sejam do 8º ano, achamos importante essa abordagem, visando consolidar o conhecimento prévio dos alunos. A turma 802 em sua grande parte comporta alunos que foram meus alunos no ano anterior, com idade dos alunos variando entre 12 e 13 anos. Por conta disso, consigo desenvolver melhor os conteúdos por ter consciência da base dada no ano anterior.

Já na turma 801, são alunos que eu não conhecia e que demonstram ter maior dificuldade em matemática. Segundo eles, não tiveram aula de matemática durante todo o ano, o que me faz ter um cuidado maior durante aplicação de conteúdos que necessitam de uma base anterior. A idade dos alunos varia entre 13 e 15 anos. Esta turma possui alunos repetentes.

6.3 Instrumento de pesquisa

Como instrumento de pesquisa foi utilizado, a cada etapa, um questionário de satisfação calibrado com uma escala de Likert de 5 pontos (figura 57).

Figura 57 - Questionário de satisfação para os alunos



PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

uff Universidade Federal Fluminense

E. M. ____

Turma: __________ Data: ___/___/____

Sua opinião é importante!

1. As atividades despertaram interesse sobre o tema apresentado?

2. As atividades auxiliaram na compreensão do conteúdo apresentado?

3. As atividades foram agradáveis de realizar?

4. Você gostou de participar desta aula?

5. Você gostaria que o seu professor utilizasse mais atividades usando materiais manipuláveis?

Fonte: Acervo do autor

6.4 Cronograma executado

Quadro 4: Cronograma executado em sala

Etapa 1 - Apresentação do conjunto dos números inteiros	
10/06/2025	
1° Momento - Quadrinho Retrato de Família	1 Tempo (50 minutos)
2° Momento - Fichas Coloridas	2 Tempos (50 minutos cada)
Etapa 2 - Adição e subtração de números inteiros	
13/06/2025	
1° Momento - Operando com as Fichas Coloridas	3 Tempos (50 minutos cada)
17/06/2025	
2° Momento - Jogo das Borboletas	2 Tempos (50 minutos cada)
Etapa 3 - Multiplicação de números inteiros	
04/07/2025	
1° Momento - Operando com as Fichas Coloridas	3 Tempos (50 minutos cada)
08/07/2025	
2° Momento - Circuito Multiplicativo	2 Tempos (50 minutos cada)

Fonte: Elaboração própria

6.5 Análise dos resultados

6.5.1 - Relato da experiência

O relato das experiências didáticas será realizado em ordem cronológica das aplicações e por turma. Cabe destacar que a quarta etapa não foi aplicada.

6.5.1.1 - 10/06/2025 - Etapa 1 - Apresentação dos números inteiros

6.5.1.1.1 - 1° momento (Quadrinho)

Turma 802

Cada aluno recebeu uma ilustração em quadrinhos (cartum), representando situações de subtrações que resultaram no número −3. A atividade foi iniciada com uma leitura livre do quadrinho pelos alunos. Durante a mediação, orientamos os alunos a observarem com atenção:

- As vestimentas e cores dos personagens;
- A moldura de cada retrato;
- E os “casais” representados pelas expressões de subtração.

Esses elementos simbólicos ajudaram a construir a ideia de uma "família de subtrações", todas resultando em −3, como por exemplo 1 – 4.

Em seguida, foi realizada uma roda de conversa para que os estudantes pudessem interpretar o que viram e contar, com suas próprias palavras, a “história” por trás dos pares de números representados no cartum. O professor levantou alguns questionamentos sobre os números presentes no quadrinho e um aluno disse: “não dá para diminuir esses números, não dá para tirar 5 de 2!”. Neste momento vários alunos se manifestaram e disseram que era possível, mas que daria um número negativo.

A seguir, houve uma fala curiosa: “Ah, eles estão na mesma família porque todos ficam devendo 3!”. Perguntamos: “Como assim devendo 3?” e o aluno respondeu: “São contas que dão sempre menos três”. O professor indagou à turma se concordavam com o comentário e disseram que sim. Então foi pedido um outro par de números que também poderiam fazer parte desse quadrinho e uma aluna disse que 10 - 13 poderia fazer parte do quadrinho, pois também é uma subtração que resulta em -3.

Após a roda de conversa, os alunos foram convidados a criar novos “casais” da família do −3, utilizando sua criatividade para desenhar e colorir personagens que representassem outras subtrações equivalentes.

Os alunos receberam uma ficha de atividades que continham algumas questões norteadoras para ampliar o raciocínio matemático:

- “Apresente outro casal que também faz parte dessa família.”
- “O que os casais dessa família têm em comum?”
- “Qual sobrenome você daria para essa família?”

Um aluno respondeu: “Eu fiz o casal 7 − 10. Eles também são da família do menos 3. Acho que o sobrenome pode ser ‘Três Negativos’.”

Posteriormente, foi proposto um desafio: criar outras famílias, como a família do zero, sugerindo que os alunos explorassem o conceito de neutralidade na subtração, e pensassem em diferentes formas de representá-la visualmente, já inserindo implicitamente a representação com as fichas coloridas que fariam em seguida.

Turma 801

Após o intervalo, o material com os quadrinhos foi aplicado para a turma 801. Semelhantemente à turma anterior, para cada aluno recebeu a ilustração com o cartum e foi pedido que analisassem a ilustração e, em seguida, realizou-se uma discussão com base no que entenderam.

A turma foi bem participativa. Um aluno disse que o -3 estava estiloso com um óculos que, segundo ele, está na moda, concluindo que o -3 era mais atual que os demais números. Indagamos a esse aluno o que poderia concluir dos demais e respondeu que pela ilustração alguns eram da idade da pedra, o que fez com que todos dessem risadas.

Perceberam rapidamente que as subtrações eram equivalentes, pois resultaram todas em -3, citando inclusive outros casais que fazem parte da família do -3. A seguir, os alunos receberam a folha de atividades para responderem algumas questões norteadoras com base no cartum, igual foi feito na turma anterior.

Durante a execução alguns alunos colocaram subtrações de forma equivocada fazendo parte da família do -3, como 7 - 4, interferimos lembrando que essa subtração resulta em um número natural e não em um número negativo, porém se invertesse a posição dos números era possível obter o -3.

Após esse momento, abordamos o conjunto dos números inteiros e situações do dia a dia que é possível se deparar com esses números, dando ênfase aos negativos e ressaltando as subtrações equivalentes.

A atividade proporcionou um ambiente de exploração e criatividade, favorecendo a construção de significados matemáticos a partir de representações visuais e narrativas. A linguagem dos quadrinhos, aliada à conversa guiada e ao estímulo criativo, facilitou a compreensão da ideia de equivalência de subtrações e números negativos, promovendo engajamento e participação dos alunos.

6.5.1.1.2 - 2° momento: Representações de números inteiros com as fichas coloridas.

Turma 801 e 802

Em ambas as turmas, os alunos foram divididos em grupos e cada grupo recebeu um kit com 40 fichas, sendo 20 azuis e 20 vermelhas. Antes de iniciar as tarefas, foi explicada a dinâmica e a regra do cancelamento: cada ficha azul anula uma vermelha, e vice-versa. Ou seja, pares de azul e vermelho representam zero.

Como atividade inicial, foi proposto que representassem de três formas distintas o número +4 utilizando as fichas coloridas. Todos os grupos fizeram a representação com quatro fichas azuis.

Comentamos que estavam corretos, mas que era necessária a utilização de outras fichas coloridas para representar o número +4. Alguns disseram não saber. Nesse momento, foi necessário lembrar o que viram no quadrinho e das subtrações equivalentes. Eles conseguiram entender a ideia, porém alguns alunos apresentavam dificuldade em relação às cores. Em ambas as turmas tiveram grupos que conseguiram fazer representações corretas, usando esses exemplos para que os demais alunos entendessem o que devia ser feito.

Depois dessas representações feitas no quadro para que todos pudessem entender, a atividade fluiu tranquilamente e os grupos se saíram bem nas representações sugeridas na ficha de atividades. Observe na figura a seguir, alunos representando números inteiros na ficha de atividades.

Figura 58: alunos representando números inteiros através das fichas coloridas

Fonte: Acervo do autor

6.5.1.2 - 13/06/2025 - Etapa 2 - Adição e subtração de números inteiros

6.5.1.2.1 - 1° momento: Operando com as fichas coloridas

Turma 802

Assim que os alunos entraram em sala já perguntaram se trabalhariam novamente com as fichas coloridas. Estavam ansiosos. Respondemos que sim, e pedimos para que formassem os mesmos grupos da aula passada.

Iniciamos relembrando a regra base para manuseio das fichas (regra do cancelamento) e entregamos para cada aluno a ficha de atividades para posteriormente realizarem as adições e subtrações entre números inteiros. Deixamos claro que a ideia da adição seria "juntar" fichas, independente de suas cores.

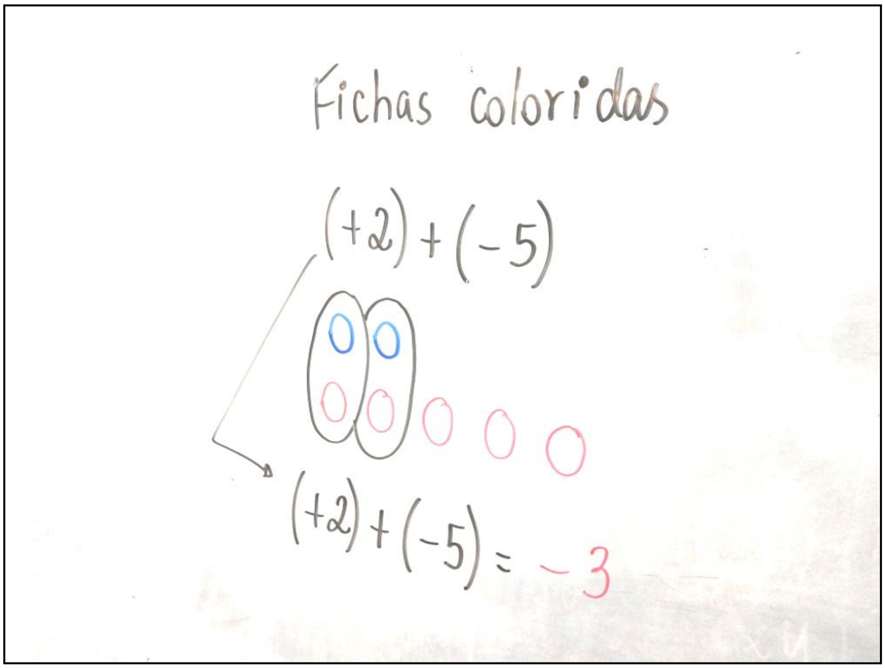
Fizemos um exemplo prático com eles. Pedimos para que pensassem como poderíamos realizar a adição (+3) + (+2) com auxílio das fichas. Os alunos rapidamente visualizaram que bastava juntar três fichas azuis com duas fichas também azuis, uma vez que ambos os números eram positivos. O resultado consistia em cinco fichas azuis. Perguntamos a eles qual o resultado da adição e responderam +5, como desejado.

Em seguida pedimos que tentassem fazer os itens contidos nos exercícios propostos, mas logo surgiram dúvidas, principalmente na questão b que continha uma adição entre dois números inteiros, sendo um positivo e o outro negativo. Na verdade, só fizemos um exemplo mais prático com dois números positivos para que eles pudessem tentar resolver em grupo pensando no manuseio com as fichas nos demais casos.

O item b apresentava a adição (+2) + (-5). Visitamos os grupos, procurando induzir eles próprios a chegarem na resolução com as fichas. Alguns alunos em determinados grupos já haviam compreendido que bastava juntar as fichas com suas cores correspondentes e, em seguida, usar a regra do cancelamento para concluir que o resultado consiste nas fichas restantes.

Nos grupos que ainda não haviam realizado a atividade, orientamos os alunos a identificarem os passos necessários para chegar à resolução. Para isso, elaboramos um esquema no quadro branco (figura 59)

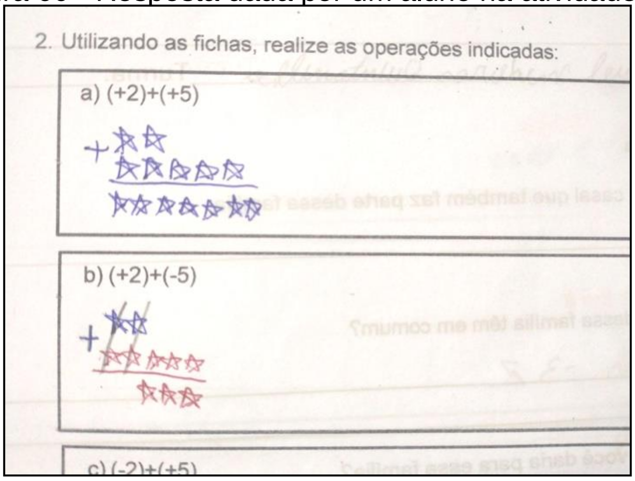
Figura 59: Resolução do item b da questão 2 no quadro



Fonte: Acervo do autor

A seguir fizeram as demais adições sem grandes dificuldades. Foi solicitado que representassem nas folhas de atividades o manuseio com as fichas. Na figura a seguir podemos observar um exemplo de representação apresentada por um aluno.

Figura 60 - Resposta dada por um aluno na atividade 2



Fonte: Acervo do autor

Em seguida, realizamos as operações de subtração. Iniciamos a atividade informando que nesta operação devemos pensar em “retirar fichas”. Sugerimos que tentassem por cinco minutos pensar nas questões utilizando as fichas e ficamos atentos aos comentários nos grupos. Houve discussões e alguns não chegaram a conclusão nenhuma, principalmente nas subtrações com números com sinais opostos.

Após um tempo o professor pesquisador foi ao quadro e solicitou ajuda deles para fazer a seguinte subtração (+3) - (-2). Um aluno logo disse: “essa conta não dá 5?”. Então o professor disse que sim e perguntou o porquê. Ele disse: “o negativo não faz mudar o sinal de dentro dos parênteses?” Novamente o professor disse que sim, mas que gostaria que ele (o aluno) fizesse a operação utilizando as fichas coloridas. O aluno então disse que com as fichas não sabia resolver.

No quadro, indagamos a eles sobre como faziam a leitura da subtração pensando nas fichas coloridas. Aos poucos eles começaram a responder com auxílio dos questionamentos. Perguntamos o que tínhamos a priori e responderam que três fichas azuis. Continuamos: “e o que queremos a seguir?” Um aluno respondeu: “tirar duas fichas vermelhas.”

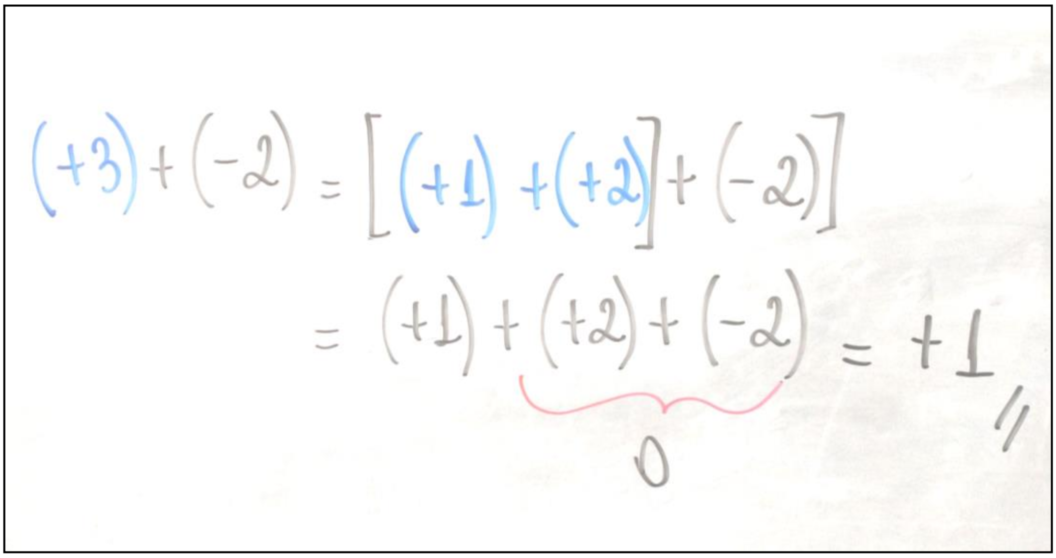
“De que forma isso poderia ser feito?”, perguntou o professor. Uma aluna disse: “Como não há fichas vermelhas para retirar, criamos pares, o que não altera nada. Aí dá para tirar as vermelhas.” Foi colocado dois pares, sendo um de cada cor, de forma que em seguida as duas fichas vermelhas foram retiradas, restando cinco fichas azuis.

Foi nítido que alguns alunos não haviam compreendido bem, o que fez repetirmos toda a resolução de modo que ao final todos disseram entender o procedimento, com falas como “que maneiro!”. Após isso, eles começaram a resolver em grupos e foi interessante alguns alunos indo a outros grupos explicar a dinâmica para quem estava discutindo ainda as questões.

Foi gratificante observar a alegria deles ao compreenderem o funcionamento das fichas, além de percebermos que alguns alunos começaram a atribuir sentido ao que estavam fazendo. Um grupo solicitou o professor pesquisador e um dos integrantes disse que a regra de sinais fazia sentido nas contas de adição, mas que não ficava muito claro na subtração. Disseram o seguinte: “somando dois números da mesma cor vai dá a mesma cor, mas quando as cores são diferentes, o resultado é da cor que tem mais fichas”. Concordamos com ele a respeito de na adição ser mais imediato enxergar, pois na subtração, a ideia de oposto era importante para visualizar de forma imediata. Mas o objetivo foi alcançado naquele momento.

Ao final, propomos brevemente que observassem a relação entre as operações feitas com as fichas e algumas expressões algébricas simples. Houve certa resistência, como era esperado, com comentários como “Agora complicou...” e “Tava indo tão bem”. Diante disso, foram feitos alguns exemplos no quadro (figura#) para que compreendessem, mas sem prolongar esse momento, pois o foco era realmente o uso concreto das fichas e a construção da ideia adição e subtração de números inteiros.

Figura 61: Representação algébrica do professor de uma adição entre números inteiros



Fonte: Acervo do autor

Turma 801

A atividade com a Turma 801 teve início de forma bastante semelhante à realizada com a Turma 802. Os mesmos grupos da última aula foram formados e foi relembrado a regra do cancelamento no uso das fichas coloridas para adições e subtrações entre números inteiros. A proposta seguiu a mesma lógica: usar o material concreto para facilitar a compreensão do conceito de número positivo e negativo.

Apesar da estrutura da aula ter sido similar, algumas falas e reações interessantes se destacaram ao longo da atividade.

Logo no primeiro exemplo prático proposto em sala — a adição (+3) + (+2) — um aluno disse: “Essa é fácil, é só contar as azuis, nem precisa pensar muito.”

Esse comentário, ainda que simples, demonstrou como o uso das fichas favoreceu uma compreensão intuitiva do que representa a adição entre dois números positivos.

Ao avançarmos para a questão (+2) + (-5), novamente surgiram dúvidas, principalmente quanto ao procedimento de juntar as fichas de cores opostas e aplicar a regra do cancelamento. Porém, um grupo comentou: “Quando sobra mais vermelha, já sei que vai dar negativo.”

Esse tipo de observação mostra como a manipulação concreta estava ajudando a construir uma noção visual da operação. Em outro grupo, um aluno explicou para os colegas: “Faz de conta que as vermelhas anulam as azuis. Se tiver mais vermelha, então o que sobra é vermelho.”

Esses momentos de troca entre os próprios alunos foram positivos. A resolução dos demais itens da adição ocorreu de forma colaborativa e com mais fluidez à medida que iam testando com as fichas.

Na parte da subtração, a atividade seguiu o mesmo caminho. Sugerimos que refletissem sobre a ideia de retirar fichas. Ao propor a expressão (+3) - (-2), os alunos demonstraram dificuldades. Nesse momento, uma aluna comentou: “Mas se não tem vermelha pra tirar, a gente inventa par, né? Tipo um azul com um vermelho. Aí tira as vermelhas.”

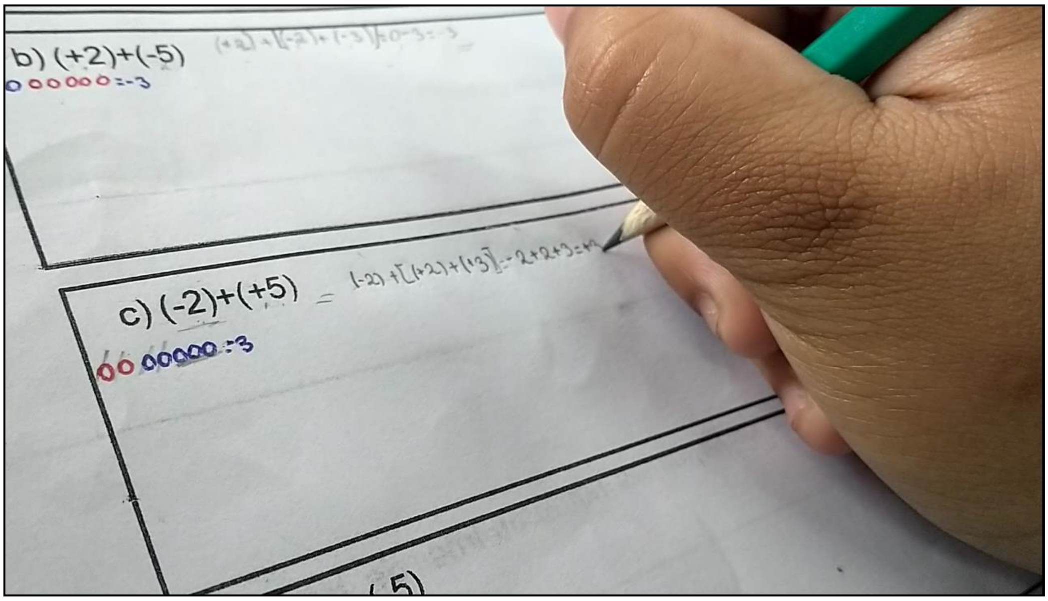
A explicação foi semelhante à obtida na Turma 802, mas a forma como os alunos verbalizaram o raciocínio evidenciou um entendimento progressivo, ainda que construído com certa dificuldade. Após alguns exemplos, houve uma participação mais ativa dos grupos, e um aluno disse: “A subtração parece uma adição disfarçada. A gente só precisa saber o que tá tirando.”

Outro ponto interessante foi perceber que alguns estudantes passaram a auxiliar os colegas espontaneamente, explicando os passos com as fichas, o que colaborou bastante para o andamento da aula.

Por fim, ao introduzir rapidamente a ideia de expressão algébrica, alguns alunos reagiram com descontração: “Professor, tava tudo indo tão bem!”

Esses comentários foram levados com leveza e destacamos que a proposta era apenas perceber como a linguagem algébrica representa aquilo que já haviam entendido com o material concreto. Mantendo o foco no desenvolvimento do raciocínio com as fichas como fiz na outra turma. Observe uma aluna operando algebricamente:

Figura 62: Aluna resolvendo adição de números inteiros algebricamente



Fonte: Acervo do autor

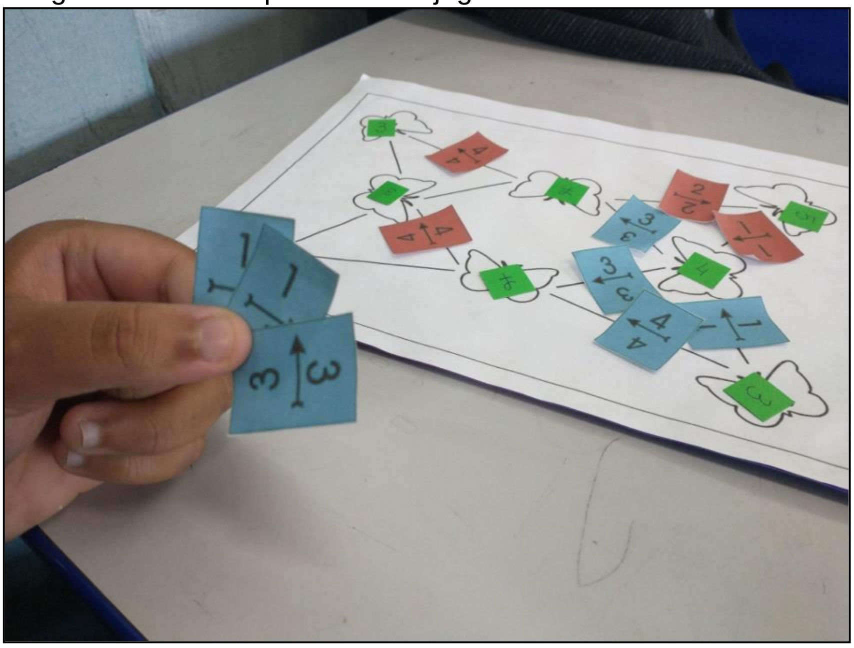
6.5.1.2.2 - 17/06/2025 - 2° momento: Jogo das borboletas

Turmas 802 e 801

As turmas foram divididas em pequenos grupos, e as regras do jogo foram lidas. Optamos, em vez de usar várias fichas em uma única borboleta para representar a quantidade que o aluno deveria colocar, por utilizar fichas numeradas de 1 a 10. Dessa forma, o aluno colocava apenas uma ficha em cada borboleta com a numeração desejada no início e, em seguida, adicionava outras fichas com os números conforme as regras do jogo.

Algumas jogadas foram feitas como exemplo e em seguida começaram a jogar. De início houve muitas dúvidas, o que fez o professor pesquisador ir a todos os grupos para que pudesse analisar se estava tudo correto. O jogo transcorreu com bastante envolvimento e entusiasmo. Os alunos demonstraram grande interesse em resolver os desafios e aplicar corretamente as operações. Observe um dos grupos executando o jogo:

Figura 63: Alunos praticando o jogo das borboletas em sala



Fonte: Acervo do autor

Comentários como “Se eu tenho uma ficha com número 5 aqui e a carta é vermelha 2, preciso deixar uma ficha 3 lá!” ou “Essa azul aqui vai me ajudar a fechar o circuito!” foram frequentes, revelando que estavam realmente pensando nas operações. Houve momentos de dúvida, em que alunos se questionavam se o resultado estava certo ou se haviam entendido bem a regra, o que gerou interações colaborativas e discussões produtivas nos grupos.

Conforme os circuitos foram sendo completados, os alunos começaram a perceber padrões nas jogadas e no uso das cartas. Ao final da aula, foi promovida uma conversa coletiva sobre as estratégias utilizadas e o que haviam aprendido com a dinâmica. Os próprios alunos destacaram que foi possível compreender melhor como as operações com inteiros funcionam, principalmente a ideia de que a adição e a subtração podem levar a aumentos ou reduções de quantidades, dependendo do contexto e do valor utilizado. Um dos comentários foi: “Gostei porque não parecia uma aula normal de matemática, parecia um desafio.”

Ao final da aula foi proposto o jogo sem uso das fichas numeradas, que chamamos de abstrata, para que os alunos tentassem entender qual seria a dinâmica do jogo das borboletas associando os circuitos aos números inteiros.

Retiramos as fichas numeradas que eram colocadas nas borboletas e os alunos se desesperaram. Eles queriam entender para iniciar o jogo. O professor pediu para os alunos pensarem em como poderiam jogar sem o uso de uma quantidade inicial em cada borboleta.

Após alguns minutos, um grupo de alunos, com auxílio do professor, observaram que bastava compensar, ou seja, o número de azul e de vermelhos tem que ser iguais nas cartas sobre a trajetória e isso independe da quantidade presente nas borboletas.

Em um exemplo, perceberam que se havia duas trajetórias preenchidas com as cartas +3 azul e -1 vermelha, para compensar o número de vermelhos, faltava a carta -2 vermelha, logo essa é a carta que fecha o circuito. A seguir fizeram os exercícios da ficha de atividades envolvendo questões com situações do jogo.

A atividade permitiu que os alunos aplicassem o raciocínio matemático de forma concreta e visual, além de desenvolverem a autonomia, o trabalho em equipe e a tomada de decisões. O jogo se mostrou uma ferramenta eficaz para a construção do conhecimento matemático, tornando o aprendizado mais significativo e envolvente. Os alunos se envolveram tanto que ao final da aula queriam continuar jogando.

6.5.1.3 - 04/07/2025 - Etapa 3 - Multiplicação de números inteiros

6.5.1.3.1 - 1° momento: Operando com as fichas coloridas

Turma 802

A aula foi iniciada separando os alunos em grupos e entregando as fichas coloridas. A seguir colocamos algumas multiplicações com números naturais no quadro para resolvermos junto com os alunos. O objetivo era fazê-los perceber que sempre é possível escrever a multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Eles compreenderam com facilidade essa abordagem, o que possibilitou em seguida questioná-los se achavam que esse raciocínio serviria também para os números inteiros.

Com essa dúvida no ar, apresentamos no quadro a seguinte multiplicação: (+2) x (+4). Perguntamos como poderiam escrever esse produto como uma soma e disseram que bastava eu somar o 4 duas vezes. Um aluno perguntou: “Mas e o mais? Não muda nada na conta?”. De imediato um outro aluno respondeu: “Não, se um número é positivo podemos tirar o sinal e operar sem o sinal, que dá no mesmo”.

Através dessa fala foi possível deduzir que estávamos caminhando no caminho certo. O professor perguntou como fariam essa soma utilizando as fichas e os alunos concordaram que bastava juntar dois grupos de quatro fichas azuis, o que resulta em oito fichas azuis, chegando a conclusão que esse produto resulta em +8.

Pedimos que representassem isso nas fichas de atividades que estavam utilizando. Para o caso (+2) x (-4), os alunos fizeram rapidamente, todos perceberam que poderiam juntar dois grupos de quatro fichas vermelhas que resultam em -8.

O próximo item foi (-5) x (+3), onde a princípio os alunos não sabiam como começar. Perguntamos a eles se teria diferença eu multiplicar 5 x 3 e/ou 3 x 5. Perceberam que não e logo em seguida uma aluna indagou: “então eu posso fazer essa questão igual a anterior só trocando os números de posição?”. O professor respondeu que sim e assim conseguiram fazer.

Perguntamos como fazer a manipulação com as fichas e responderam que bastava fazer três grupos de cinco fichas vermelhas cada, o que daria um total de quinze fichas vermelhas.

Em seguida chegamos ao quarto item que apresenta uma multiplicação com dois números negativos. O produto da questão era (-2) x (-3). Os alunos ficaram confusos discutindo e pensando em uma forma de transformar em uma soma de parcelas iguais, porém sem sucesso. Alguns questionamentos surgiram: “posso ignorar os sinais de menos?” e “se trocar a ordem o sinal muda?”.

Lembramos que a ideia do sinal negativo trabalhado na subtração era de tirar. Sugerimos que alguém explicasse como poderíamos interpretar essa multiplicação. Um aluno perguntou: “queremos tirar fichas vermelhas?” Perguntamos quantas fichas e ele respondeu: “três fichas vermelhas?” Fizemos essa pergunta para a turma e uma aluna disse: “não seria dois grupos de três fichas vermelhas?”.

O professor continuou: “mas temos a princípio alguma ficha para retirar?” Logo perceberam que deveriam proceder de forma análoga a ideia de adicionar o zero. Foi exposto que para retirar as fichas vermelhas era necessário colocar a mesma quantidade de fichas azuis, ou seja, colocar seis fichas vermelhas e seis fichas azuis, para em seguida retirar as fichas vermelhas desejadas. Eles esboçaram reações interessantes e falas como: “jamais pensaria nisso sozinho, mas faz sentido”.

A seguir, observamos os exemplos feitos e concluímos, com eles, que o que estavam fazendo, na verdade, era visualizando os casos das regras de sinais para a multiplicação, concluindo o motivo de valerem as regras de sinais. Finalizamos a aula com a realização de atividades.

Turma 801

Na aula seguinte, o mesmo passo a passo foi seguido: os alunos foram organizados em grupos, receberam as fichas coloridas e foram propostas algumas multiplicações para que pudessem refletir. No entanto, algumas falas e reações surgiram de forma diferente e enriqueceram ainda mais a discussão.

Na resolução da multiplicação de dois números inteiros positivos, um aluno disse: “Professor, se é positivo, por que a gente ainda escreve o sinal de mais?”. Isso levou a uma conversa sobre convenções matemáticas e a ideia de que o sinal de mais, muitas vezes, é omitido, mas está "implícito".

No último item, chegamos a ideia de dívida por conta do sinal de menos. Um aluno comentou: “Ah, eu posso pensar que estou tirando uma dívida?” Perguntamos qual seria a relação disso resultar em um número positivo e ele respondeu: “Se estou tirando uma dívida, estou ganhando!”

Com as trocas dessa turma, percebemos que, embora o caminho seguido fosse o mesmo da aula anterior, surgiram compreensões diferentes, especialmente quando discutiram o produto de dois negativos. A fala “se estou tirando uma dívida, estou ganhando” foi uma das que mais ajudaram os colegas a entender o raciocínio. Assim, mais uma vez, concluímos juntos que os sinais na multiplicação seguem regras que fazem sentido.

6.5.1.3.3 - 08/07/2025 - 2° momento: Circuito Multiplicativo

Turma 802

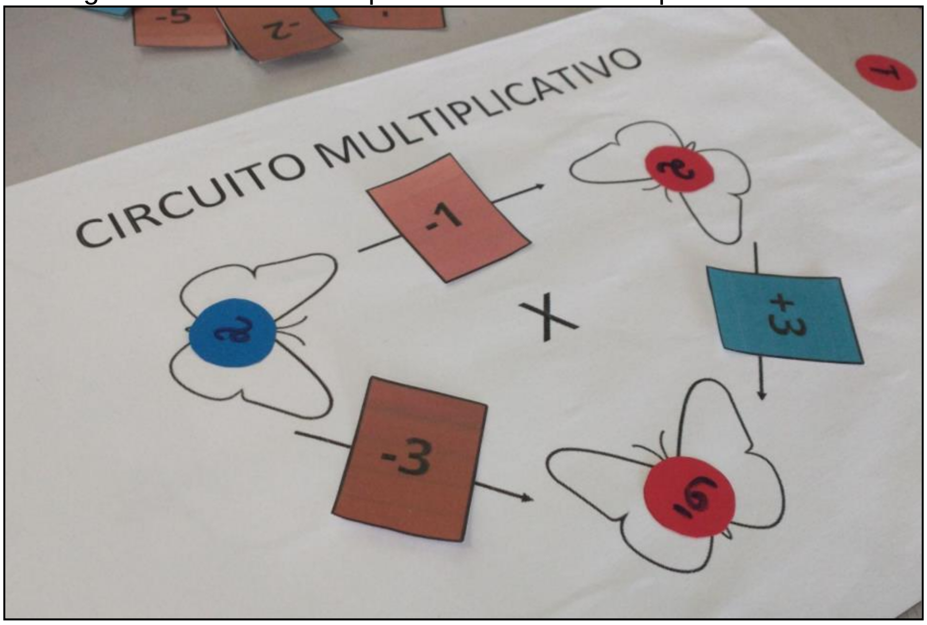
A aula iniciou com a turma 802 apresentando o material explicando que iríamos trabalhar com a multiplicação de números inteiros de forma visual e interativa. O material chamou atenção dos alunos logo de início, especialmente pelo formato triangular do circuito do tabuleiro e as cartas coloridas.

Assim como no jogo das borboletas, optamos por usar fichas vermelhas e azuis numeradas para preencher as borboletas, em vez de várias fichas em uma única borboleta.

O professor explicou que as fichas azuis e vermelhas continham números para representar a quantidade que se colocaria em cada borboleta, e que as cartas tinham um número e um sinal. O número indica quantas vezes será multiplicada a quantidade presente na ficha em uma borboleta, e o sinal indicava se a cor das fichas mudaria ou não no caminho da seta.

Foi feito um exemplo com os alunos. O exemplo consistia em uma ficha azul com o número 2 e a carta vermelha -1 sobre a trajetória. Um aluno disse: “dois vezes um… dois! A cor da ficha na próxima borboleta muda pra vermelho porque o sinal da carta é negativo!”. Completamos esse circuito ficando com o esquema observado abaixo (figura 64).

Figura 64: Circuito multiplicativo fechado feito pelos alunos



Fonte: Acervo do autor

Depois, usando a mesma configuração inicial, foi proposta a carta vermelha +2 sobre a trajetória. Um grupo discutiu entre si: “Acho que agora é 4, só que agora não muda a cor né? Se era azul, continua azul?

Confirmamos com a turma, e registramos o resultado. Uma aluna fez uma pergunta interessante: “Então mudar a cor é tipo mudar o sinal do número?”

Aproveitando esse gancho, reforçamos que, na multiplicação, ao multiplicar um número, seja positivo ou negativo, por um número negativo, o sinal do resultado é diferente do primeiro fator. Destacamos também que as cores das fichas ajudavam a visualizar essa mudança de sinal.

Também experimentamos começar com uma ficha vermelha. Colocando uma carta vermelha numerada com 2 e a carta –4 sobre a trajetória, um aluno observou: “Agora é vermelho vezes negativo... isso vai dar azul?” Outro integrante da turma respondeu: “se pensarmos que a carta na borboleta é negativa, então negativo com negativo vira positivo! Então basta colocar uma ficha vermelha numerada com 8!”

Esse momento foi importante: a turma conseguiu, com o apoio visual das fichas, compreender intuitivamente por que o produto de dois negativos resulta em um número positivo.

A seguir fizeram os exercícios propostos nas atividades, que envolviam situações de jogadas com o circuito multiplicativo, além de exercícios que os auxiliaram a definir as regras de sinais para a multiplicação.

Turma 801

Na aula com a turma 801, o mesmo material foi utilizado, mas percebemos uma dinâmica um pouco diferente: os alunos foram mais cautelosos no início, pedindo para repetir as instruções antes de começar. Reforçamos a ideia de que o número da ficha é o fator da multiplicação e que o sinal da carta sobre a trajetória indica se a cor da ficha na borboleta de chegada se mantém ou inverte.

Os materiais foram distribuídos e apresentamos o primeiro exemplo: uma ficha azul com número 4 sobre a primeira borboleta e carta +3 sobre a trajetória. Um grupo respondeu com confiança: “Doze fichas azuis! Porque é 4 vezes 3 e o sinal + não muda a cor.”

Já em um exemplo com –3, o mesmo grupo hesitou: “Se é negativo, muda a cor. Mas é só isso que muda?”

Uma aluna disse: “A conta é a mesma, mas como muda a cor... então é como se fosse negativo?”

Com essa fala, conectamos o conceito de produto negativo. Em seguida, fizemos uma configuração com uma ficha vermelha com o número 2 e carta –2 na trajetória. Um aluno comentou: “Vermelho vezes negativo... então vai dar azul. Mas quantas?”

Outro respondeu: “Dois vezes dois dá quatro. Quatro fichas azuis!”

Uma fala especialmente interessante surgiu quando fizemos o caso $(-3) \times (-2)$. Um aluno olhou as fichas e disse: “Ué, agora ficou azul de novo. Mas era tudo negativo, por quê?”

E uma aluna respondeu com clareza: “Porque dois negativos viram positivo! Isso tá acontecendo aqui com as cores também.”

Esse momento foi significativo porque não partiu de explicação direta do professor, mas de uma construção coletiva a partir da manipulação do material.

Ao final da aula, os alunos registraram as manipulações nas fichas de atividades. As respostas mostraram que muitos compreenderam a lógica com mais segurança após a visualização do circuito multiplicativo.

6.5.2 - Avaliação dos alunos

As atividades foram desenvolvidas ao longo de três etapas, não sendo possível aplicar a última por falta de disponibilidade de tempo. Ao final de cada etapa, foi aplicado um questionário de opinião (verificar seção 6,3) com o objetivo de avaliar a percepção e o engajamento dos alunos em relação à atividade realizada. Para tornar esse processo mais acessível e atrativo, os alunos responderam utilizando emojis que representavam diferentes níveis de satisfação. A partir das respostas obtidas, foram elaborados gráficos ilustrativos que demonstram o grau de aceitação e interesse dos estudantes em cada uma das etapas.

Para facilitar a leitura, reproduzimos as cinco questões do questionário:

Q1: As atividades despertaram interesse sobre o tema apresentado?

Q2: As atividades auxiliaram na compreensão do conteúdo apresentado?

Q3: As atividades foram agradáveis de realizar?

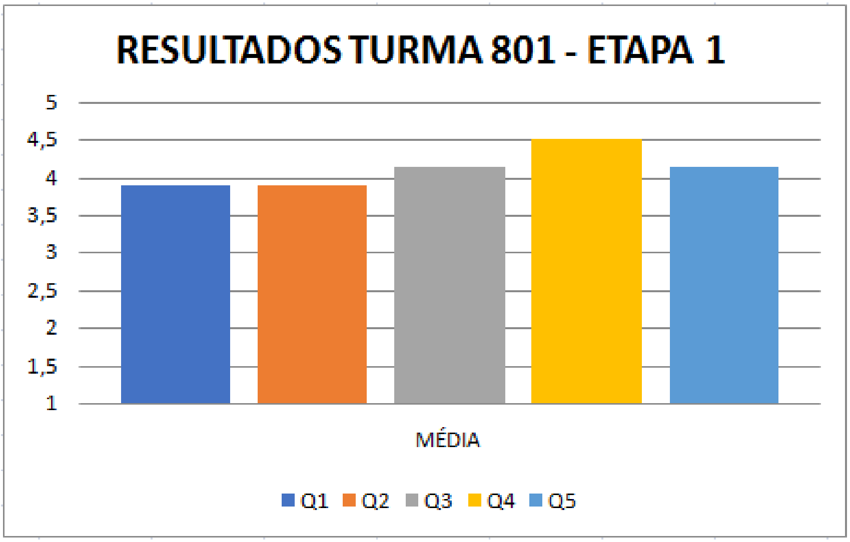
Q4: Você gostou de participar desta aula?

Q5: Você gostaria que o seu professor utilizasse mais atividades usando materiais manipuláveis?

Vamos a análise dos gráficos divididos por etapas.

6.5.2.1 - Etapa 1 - Apresentação dos números inteiros

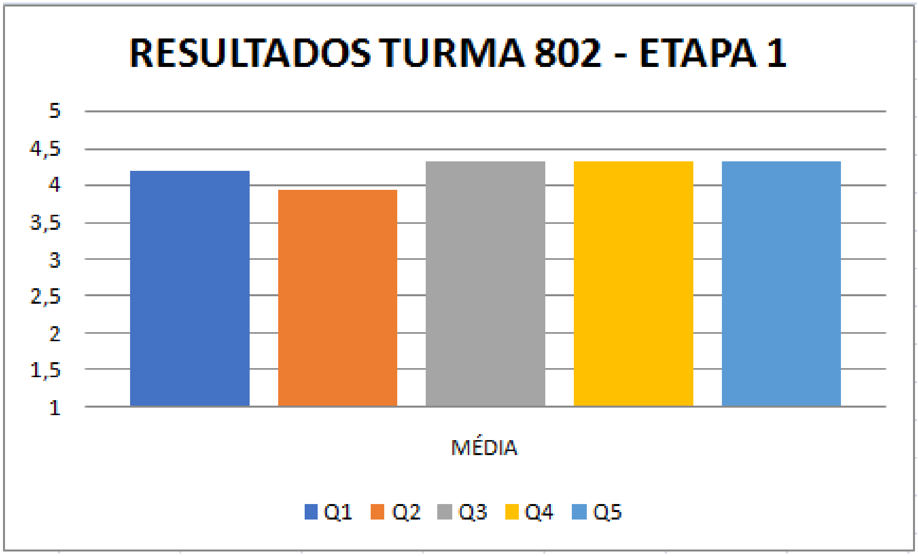
Gráfico 2: Resultados do Questionário - Etapa 1 - Turma 801



Fonte: Elaboração própria

A análise da Etapa 1 na Turma 801 indica uma recepção positiva dos alunos às atividades propostas. As médias das respostas, situadas acima de 3, refletem uma percepção favorável em relação aos objetivos da aula, à clareza das explicações e à relevância do conteúdo. Os indicadores sugerem que os alunos compreenderam bem a proposta da intervenção e se sentiram engajados.

Gráfico 3: Resultados do Questionário - Etapa 1 - Turma 802

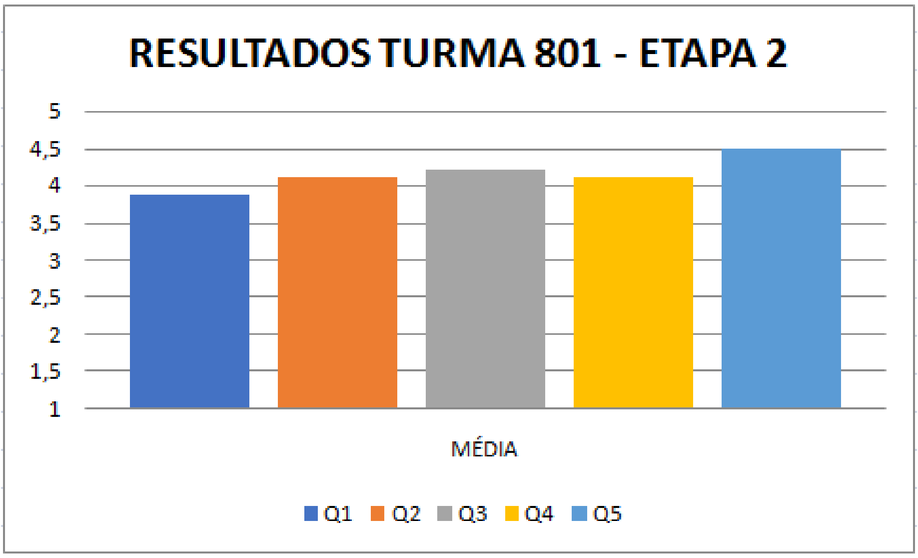


Fonte: Elaboração própria

Da mesma forma, os dados da Turma 802 mostram um desempenho semelhante, também com médias acima do ponto neutro da escala. A avaliação positiva evidencia que os estudantes demonstraram boa receptividade e compreenderam os conceitos abordados. Pode-se destacar, inclusive, a convergência de percepções entre as duas turmas, indicando uma boa aplicação dos conteúdos.

6.5.2.2 - Etapa 2 - Adição e subtração de números inteiros

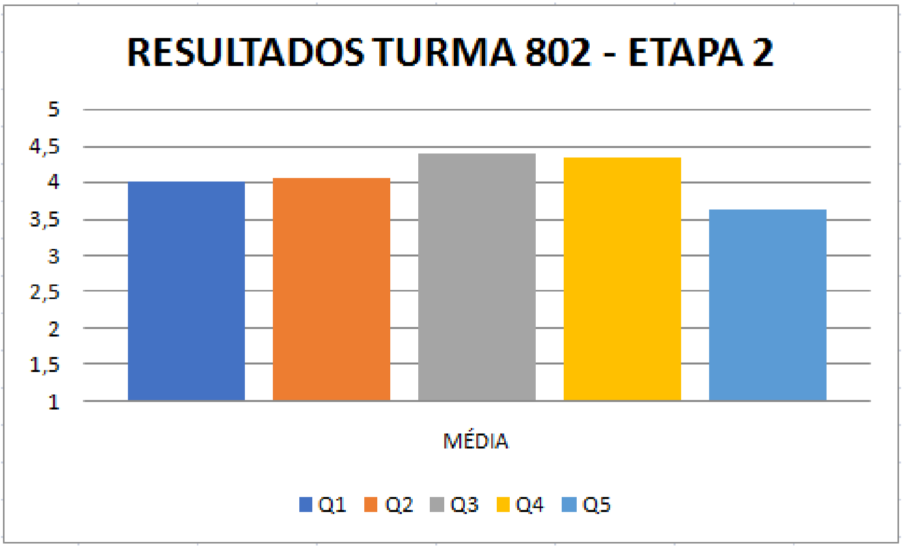
Gráfico 4: Resultados do Questionário - Etapa 2 - Turma 801



Fonte: Elaboração própria

Na segunda etapa, as médias da turma 801 aumentaram em comparação com a primeira. Isso mostra que o material apresentado continuou sendo bem aceito. A nota mais alta na pergunta sobre o uso de materiais manipuláveis indica que os alunos se sentiram mais à vontade e participativos.

Gráfico 5: Resultados do Questionário - Etapa 2 - Turma 802

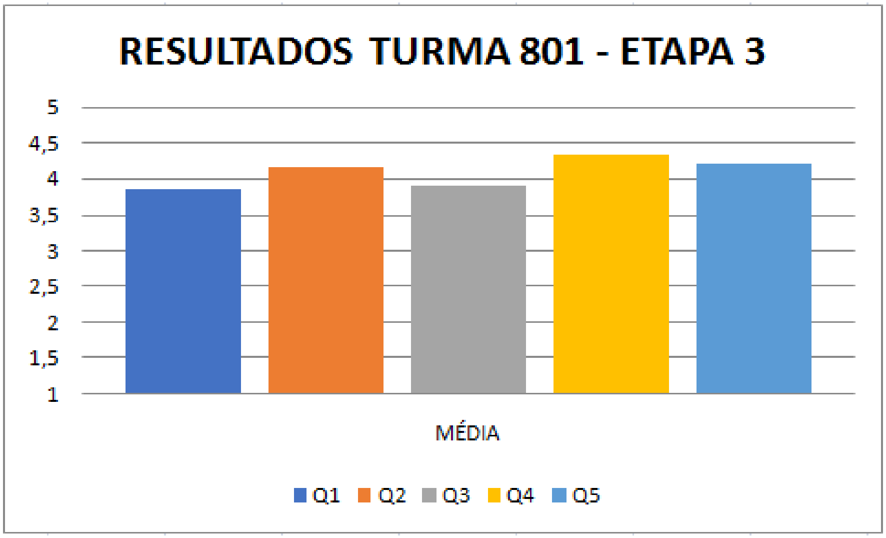


Fonte: Elaboração própria

O gráfico mostra boas médias, o que confirma que a forma de ensinar funcionou bem. A fase de desenvolvimento foi bem recebida pelos alunos, que demonstraram interesse e sentiram que o conteúdo ajudou na aprendizagem.

6.5.2.3 - Etapa 3 - Multiplicação de números inteiros

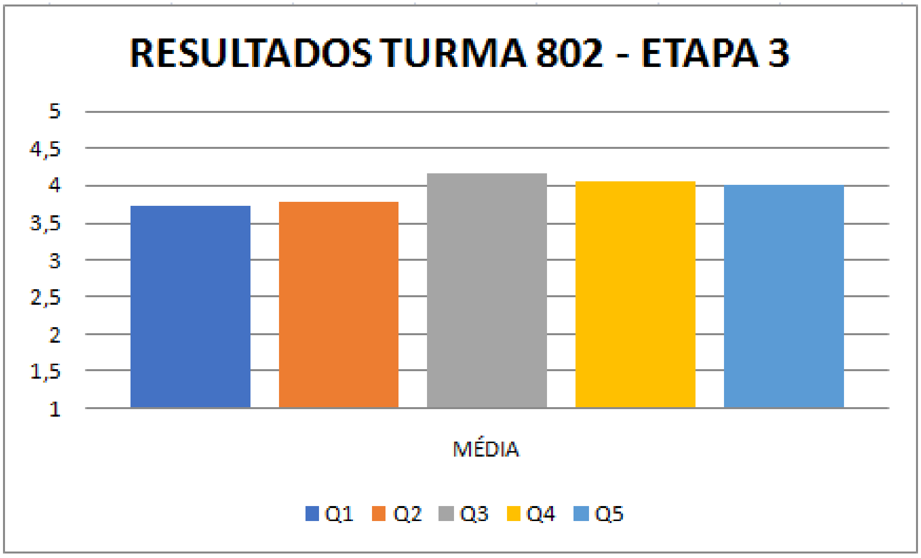
Gráfico 6: Resultados do Questionário - Etapa 3 - Turma 801



Fonte: Elaboração própria

Na última etapa, os gráficos da Turma 801 mostram que os alunos continuaram com uma opinião positiva. A avaliação geral da experiência foi boa, com médias altas, principalmente nas perguntas sobre o quanto gostaram de participar das aulas. Isso mostra que os objetivos foram alcançados e que os alunos viram valor nas atividades.

Gráfico 7: Resultados do Questionário - Etapa 3 - Turma 802



Fonte: Elaboração própria

A Turma 802 também manteve boas respostas na última etapa. As médias ficaram estáveis, mostrando que os alunos gostaram das três etapas. O interesse dos alunos até o fim indica que a sequência de aulas foi bem pensada e aplicada.

Analisando os gráficos juntos, vemos que as duas turmas receberam bem as três etapas do processo de ensino. As médias ficaram sempre acima de 3, o que mostra que os alunos acharam as atividades úteis, claras e importantes para o aprendizado. Os resultados parecidos entre as turmas também mostram que a metodologia pode funcionar em outras turmas.

Considerações finais

Esta dissertação partiu da afirmação contida no título ″Menos vezes menos é mais″. Expressão usada de modo recorrente nas aulas de matemática, muitas vezes repetida mecanicamente por alunos e até por professores, sem a devida compreensão de seu significado. O trabalho teve como objetivo investigar e compreender as principais dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem dos números inteiros relativos, com especial atenção para as operações envolvendo sinais, notadamente a multiplicação.

O ponto de partida foi o reconhecimento de que a simples memorização de regras, sem a construção de sentido, tem contribuído para o desinteresse dos alunos nas aulas de matemática. A escolha pelo tema também se justifica pela observação de que os números inteiros, embora presentes desde os anos iniciais do ensino fundamental, continuam sendo um conteúdo que gera dúvidas e inseguranças, mesmo em etapas mais avançadas da escolarização.

A primeira etapa da pesquisa consistiu em um resgate histórico sobre a origem e a aceitação dos números inteiros na matemática. Este percurso permitiu compreender que o próprio desenvolvimento desses números não foi imediato ou fácil na história da matemática. Os números negativos, por exemplo, foram por muito tempo rejeitados por matemáticos, o que indica que sua compreensão exige um processo cognitivo complexo, inclusive para os estudantes da atualidade.

Em seguida, foi realizada uma revisão de literatura a fim de mapear os principais estudos que tratam do ensino dos números inteiros. A revisão realizada evidencia que os chamados obstáculos epistemológicos ainda se refletem no processo de ensino-aprendizagem atual. Assim como os matemáticos do passado, muitos estudantes hoje enfrentam barreiras cognitivas para compreender os números negativos, principalmente quando estes são ensinados de forma isolada. Neto (2010), Silva (2017) e Martini (2010) apontam a inadequação de métodos puramente expositivos e a necessidade de abordagens mais concretas, baseadas em materiais manipulativos e jogos. A literatura reforça a ideia de que o ensino de matemática deve ser significativo e contextualizado, valorizando o raciocínio lógico e a capacidade de argumentação dos alunos.

A análise de dois livros didáticos em uso por escolas públicas permitiu verificar que, embora os conteúdos estejam em conformidade com a BNCC, ainda se observa uma abordagem predominantemente tradicional. Os exemplos frequentemente não dialogam muito com o cotidiano dos alunos, e os exercícios propostos tendem à repetição mecânica, o que pouco contribui para a construção de conceitos. Essa pesquisa reforçou a necessidade de pensar em práticas pedagógicas alternativas, mais ativas e envolventes.

Com base nessas reflexões, foi elaborado um produto educacional com foco na construção do conceito de números inteiros relativos por meio de uma sequência didática estruturada em torno do uso de materiais manipulativos e atividades lúdicas. A proposta incluiu jogos e representações visuais com o objetivo de tornar o aprendizado mais dinâmico e motivador.

A aplicação da sequência didática em sala de aula, realizada com turmas do ensino fundamental, forneceu dados valiosos para a análise dos efeitos da intervenção. Os questionários aplicados aos alunos revelaram um aumento expressivo no nível de engajamento durante as aulas, bem como uma melhora na compreensão dos conteúdos abordados. Muitos estudantes relataram que, pela primeira vez, conseguiram entender de forma clara o porquê da regra “menos vezes menos é mais”, o que mostra que o uso de recursos visuais e manipulativos potencializa a aprendizagem de conteúdos abstratos.

Com isso, reafirma-se nesta dissertação a importância da utilização de materiais manipulativos no ensino dos números inteiros relativos. Mais do que um recurso complementar, esses materiais se mostram fundamentais na mediação entre o conhecimento e a realidade concreta dos alunos, permitindo a construção de sentidos e a consolidação de aprendizagens mais sólidas.

Entretanto, é importante reconhecer que esta pesquisa apresenta algumas limitações. A aplicação da sequência didática ocorreu em um recorte específico, com duas turmas de 8º ano, o que restringe a generalização dos resultados. Além disso, o tempo disponível para a implementação das atividades foi limitado, o que pode ter influenciado a profundidade com que certos conceitos foram abordados.

Apesar dessas limitações, os resultados obtidos são expressivos para indicar caminhos promissores para o ensino da matemática. Como sugestão para pesquisas futuras, propõe-se que a abordagem utilizada nesta dissertação seja testada em diferentes contextos escolares, com turmas de outras faixas etárias. Além disso, recomenda-se que o uso de materiais manipulativos seja explorado em outros eixos da matemática.

Também se destaca a necessidade de que os cursos de formação inicial e continuada de professores de matemática ofereçam incentivos teóricos e práticos para o uso de metodologias ativas, incluindo a construção e aplicação de jogos e materiais concretos. Tais formações podem colaborar para que os docentes se sintam mais preparados e motivados a inovar suas práticas pedagógicas.

Em síntese, esta dissertação buscou dar visibilidade a um problema recorrente nas salas de aula e propôs uma alternativa pedagógica viável e eficaz para enfrentá-lo. A partir da compreensão de que o ensino de matemática deve ir além da repetição de regras, defendemos uma abordagem que privilegie a compreensão, a participação ativa dos alunos e a conexão entre teoria e prática.

Por fim, espera-se que esta pesquisa possa contribuir para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino da matemática e que inspire professores, formadores e pesquisadores a repensarem os caminhos possíveis para tornar essa disciplina mais acessível, instigante e transformadora.

REFERÊNCIAS

ALEMBERT, Jean Le Rond. (d'). Artigos **Négatif et Quantité** na Enciclopédia, 1765.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática** - 7° Ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BACHELARD, Gaston. **O novo espírito científico**. Tradução de Eurípedes Alcântara Machado. São Paulo: Editora Nacional, 1967.

BARBOSA, Sandra Lucia Piola; CARVALHO, Túlio Oliveira de. **Jogos matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das operações com números inteiros**. Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Universidade Estadual de Londrina (UEL), p. 1948–8, 2008.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Coleção Matemática Hoje é feita assim: 6ª série, ensino fundamental**. [S.l.]: FTD, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRESSOUD, David Magazine. Mathematics in India: The Mathematical Legacy of Brahmagupta and Bhaskara II. **Mathematics Magazine**, v. 75, n. 4, p. 265–275, 2002.

CONDILLAC, Étienne Bonnot de. **La langue des calculs**. Texte établie et présenté par Anne-Marie Chouillet. Lille: Presses Universitaires, 1981.

CORREIA, Lyvia Poggian. **Uma Intervenção no Ensino de Operações com Números Inteiros**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Campos dos Goytacazes, RJ: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2017.

DANCZUK, Fabulo Eugenio. **Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros**. 194 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática**: Teláris essencial** 7° ano, anos finais. São Paulo: Editora Ática, 2024-2027.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2024.

FERREIRA, Francelise Ide Alves. **Uma trajetória de Ensino e Aprendizagem para o Estudo de Números Inteiros.** 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

GARCEZ, Brenda Pavão. **Jogos de matemática voltados para a aprendizagem de números inteiros no ensino fundamental: propostas a partir da classificação ESAR**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS, 2021. Orientadora: Prof.° Dd.° Aguinaldo Lenine Alves.

GIOVANNI JÚNIOR, José Rui; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GLAESER, Georges. **Epistemologia dos números negativos**. Boletim do GEPEM, Rio de Janeiro, n. 57, jul./dez., p. 65-102, 2010.

GONÇALVES, Renata Siano. **Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2007.

HANKEL, Hermann (1867). **Theorie des Complexen Zahlsysteme**. Leipzig: Leopold Voss.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. *Dicionário Houaiss da língua portuguesa* [recurso eletrônico]. Rio de Janeiro: Objetiva; Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia, 2009. CD-ROM, 1. edição. lix, 1.986 p.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004. p. 07-38.

FERREIRA, Francelise Ide Alves. **Uma trajetória de Ensino e Aprendizagem para o Estudo de Números Inteiros**. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Angela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM, SP, v. 4, n. 7, p. 1-4, 1990.

HQEM. Retrato de família. **Projeto de Extensão História em Quadrinhos no Ensino de Matemática**. Programa Dá Licença. IME-UFF, 2025.

LARA, Cibele Passos Bezerra. **Uma proposta de ensino dos números inteiros baseada na resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Vitória/ES, Universidade Federal do Espírito Santo, 2021.

LINARDI, Patrícia Rosana. **Quatro jogos para números inteiros: uma análise**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

LORENZATO, Sérgio. **O uso de material concreto no ensino de matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MACHADO, Maurício de Souza. **Estratégias pedagógicas com uso de Tecnologia de Informação e Comunicação: uma abordagem para a construção de conhecimento em operações aritméticas básicas e nas chamadas "regras de sinais".** Dissertação. Pontifícia Universidade católica de São Paulo PUC/SP. Mestrado em Educação Matemática. 2010.

MACLAURIN, Colin (1742). **Traité des Fluxions**. (Transleted by P. Pezenas, 1749).

MACLAURIN, Colin (1748). **Traité d' Algèbre et de La manière de l'appliquer**. Paris: C.A. Jombert, 1753.

MARTINI, Grasiela. **Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros**. Trabalho de conclusão de curso de licenciatura em matemática 2010. Porto Alegre: UFRGS.

MARTINS, Éllen. **Uma proposta didática para o ensino dos números inteiros e suas operações**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Niterói/RJ, Universidade Federal Fluminense, 2019.

MEGID, Maria Auxiliadora. **Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com números relativos**. In: FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela (org.) Por trás da porta que matemática acontece? Campinas, SP; FE\UNICAMP, 2001.

MEISTER, Julio César. **Estudando dificuldades na compreensão de números inteiros**. Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

MORETTI, Méricles T. **A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática**. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SBEM, ano 9, n. 9–10, p. 1–6, 2005.

NETO, Francisco Tavares da Rocha. **Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal do Ceará, 2010.

OLIVEIRA, Andressa Alves Gonçalves de. **Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros por Meio de Materiais Manipuláveis: uma Experiência no Sétimo ano do Ensino Fundamental**. 2020. Dissertação (Instituto de Ciências Exatas - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2020. Orientadora: Prof.° Dd.° Eulina Coutinho Silva do Nascimento.

PONTE, João Pedro da. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. Lisboa: IIE e SPCE, 1992. p. 16.

PONTE, João Pedro da. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 4, p. 2–10, 1992.

REZENDE, Wanderley Moura; DASSIE, Bruno Alves. **Epistemologia dos Números Relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática**. Boletim GEPEM, [S. l.], n. 57, 2010. DOI: 10.69906/GEPEM.2176-2988.2010.301.

REZENDE, Wanderley Moura; DASSIE, Bruno Alves. **Números Negativos e Imprensa no Brasil: as discussões no Periódico União Acadêmica**. Educação Matemática e suas Tecnologias, v. 4, p. 259-268, 2019.

SÁ, Pedro Franco de; ANJOS, Luis Jorge Souza dos. **Números Negativos: Uma trajetória Histórica**. 2011. Trabalho apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática. Aracaju, 2011.

SCHUBRING, Gert. **A Noção de Multiplicação: Um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática**. Bolema (Rio Claro/SP), ano 15, n. 18, p. 26-52, 2002.

SCHUBRING, Gert. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos**. Rio de Janeiro: E-LIMC, 2012.

SCHUBRING, Gert. **Rupturas no estudo matemático dos números negativos**. Boletim GEPEM, n. 37, p. 51-65, 2000.

SCHUBRING, Gert. **Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência**. Bolema, Rio Claro (SP), ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

SILVA, Priscila Ferreira. **Materiais manipulativos na aprendizagem de números inteiro**s*.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) **-** UFRGS, 2017.

SOARES, Pércio José. **O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

TODESCO, Humberto. Um **Estudo com os Números Inteiros nas Séries Iniciais: Re-Aplicação da Pesquisa de Passoni**. Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2006.

APÊNDICE – PRODUTO EDUCACIONAL

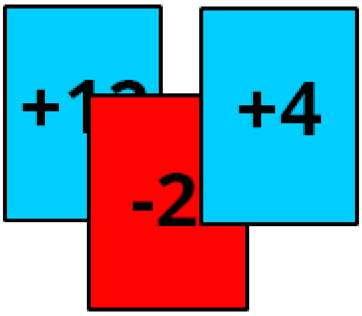
Operando números inteiros com recursos lúdicos e manipulativos

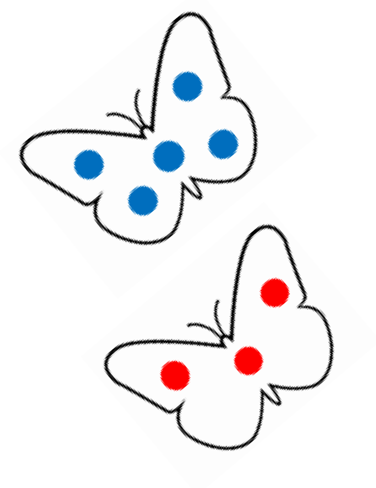
Higor Soares do Amparo

Wanderley Moura Rezende

Produto Educacional

Operando números inteiros com recursos lúdicos e manipulativos





HIGOR SOARES DO AMPARO

WANDERLEY MOURA REZENDE

PROFMAT

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

uff

Niterói – AGOSTO/2025

ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

SUMÁRIO

Introdução

Os números fazem parte do nosso cotidiano de diversas formas. Desde cedo, estamos acostumados a lidar com os números naturais: contar objetos, marcar a idade, calcular valores e medir quantidades. No entanto, à medida que observamos situações mais complexas do dia a dia, percebemos que há momentos em que os números naturais não são suficientes.

Como representar uma temperatura abaixo de zero? Um saldo negativo no banco? Um time que perde pontos em um campeonato? Para compreender e resolver esses tipos de situações é necessário conhecer um novo conjunto numérico: os números inteiros, que incluem os números positivos, os negativos e o zero.

Este produto educacional, elaborado como uma proposta didática inspirada nos estudos apresentados na dissertação *"Menos vezes menos é mais": dificuldades no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos* (AMPARO, 2025), tem como objetivo apresentar os números inteiros de forma gradual, significativa e divertida. Por meio de materiais manipuláveis, jogos e atividades interativas, os alunos serão convidados a explorar os significados, aprender as regras de sinais e realizar operações básicas com números inteiros.

O objetivo é que os alunos compreendam os conceitos e desenvolvam estratégias de raciocínio para lidar com os desafios matemáticos de forma crítica e autônoma. O uso de jogos será um dos principais recursos para estimular o interesse, o engajamento e a aprendizagem colaborativa.

As atividades foram inicialmente planejadas para alunos do 7º ano do ensino fundamental, mas podem ser adaptadas para outras séries, conforme o julgamento do professor. Elas são eficazes tanto para revisão quanto para introdução de conteúdos, e podem beneficiar significativamente alunos em fases mais avançadas da aprendizagem.

Para utilizar este recurso de maneira eficiente, recomenda-se que o professor siga a seguinte sequência, articulando o uso dos diferentes materiais manipuláveis: cartum para introdução dos números inteiros, fichas coloridas para representar números e operações, o jogo das borboletas para trabalhar adição e subtração, e o circuito multiplicativo para explorar a multiplicação de inteiros, além das cartas coloridas para a divisão.

A sequência está organizada nos seguintes capítulos:

1. Roda de Conversa
2. Representação dos Números Inteiros com as Fichas Coloridas
3. Adição e Subtração com as Fichas Coloridas
4. O Jogo das Borboletas
5. Multiplicação com Fichas Coloridas
6. Circuito Multiplicativo
7. Divisão de Números Inteiros

1. RODA DE CONVERSA

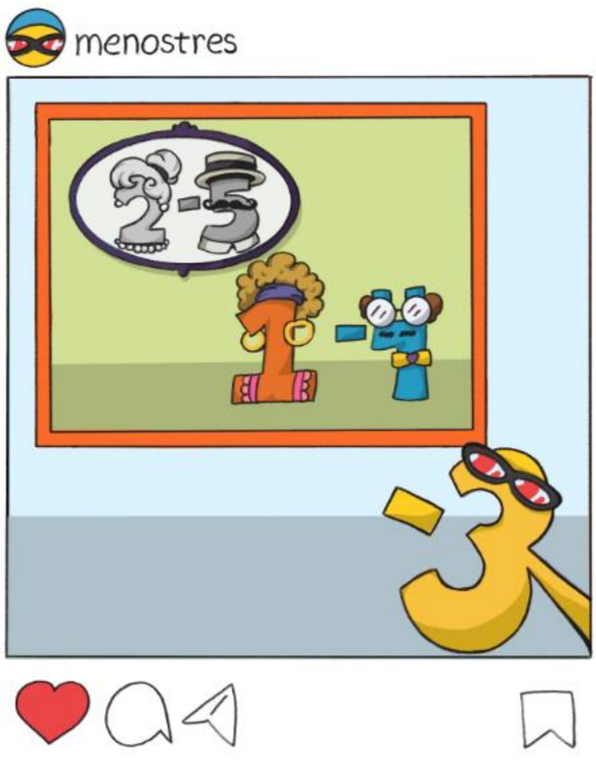
1.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A atividade consiste em um cartum e em algumas perguntas para que se inicie uma roda de conversa, com base nos relatos dos alunos sobre o que entenderam através da observação do quadrinho.

RECOMENDAÇÕES: Com base na aplicação do material em sala de aula, é recomendado que seja aplicado em 1 tempo de aula (50 minutos).

1.2 A ATIVIDADE

Atividade 1: Observe o quadrinho a seguir:



Fonte: (HQEM, 2025)

Discuta com seu colega ao lado, ou com seu grupo, sobre o quadrinho e responda aos seguintes itens:

a. Apresente outro casal que também faz parte dessa família.
b. O que os casais dessa família têm em comum?
c. Qual sobrenome você daria para essa família?

1.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Inicialmente sugerimos que explore algumas subtrações simples que resultem nos números naturais, por exemplo, 5 – 2 esperando que os alunos respondam o resultado correto que é 3. A seguir, indague a turma para a situação contrária de uma subtração utilizando os números naturais, de modo que inverta a ordem dos números, ou seja, quanto é 2 – 5?

Neste momento, apresente o quadrinho e abra um diálogo entre os alunos, pedindo para que expliquem o que entenderam do cartum. Importante ficar atento aos comentários para que consiga concluir que nos números inteiros sempre teremos a família de cada número, seja ele positivo ou negativo. Pergunte a eles quais outros “parentes” também poderiam compor a família do -3.

Agora, é sugerido que apresente o conjunto dos números inteiros explicando que essa subtração não é possível nos naturais e por isso é necessário a utilização de um conjunto que comporte mais números, que nesse caso é o conjunto dos números inteiros. Deixe claro que nos números inteiros teremos números positivos e os números negativos, além do zero que é um número neutro por não ser nem positivo e nem negativo.

Se necessário, como uma atividade adicional, peça aos alunos para que citem famílias de outros números. Uma família interessante para se trabalhar é a do número zero, concluindo ao final que uma mesma quantidade positiva se anula com uma mesma quantidade negativa, através da subtração de equivalências, tema que será abordado melhor com as fichas coloridas.

2. REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS COM FICHAS COLORIDAS

2.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

O material é inspirado nos estudos apresentados na dissertação *Uma proposta didática para o ensino dos números inteiros e suas operações* (MARTINS, 2019) e consiste em fichas coloridas azuis e vermelhas, entretanto é possível, à gosto do professor, colorir das cores que achar melhor.

É sugerido que os alunos formem grupos, onde cada grupo recebe um kit com 40 fichas, sendo 20 azuis e 20 vermelhas.

Cada ficha azul representa uma unidade positiva e cada vermelha uma unidade negativa. A mecânica principal das fichas coloridas é o anulamento de fichas: cada ficha azul anula uma vermelha, e vice-versa. Isto é: fichas azuis e vermelhas podem ser incluídas e retiradas aos pares. Esta mecânica é a base para o manuseio das fichas.

RECOMENDAÇÕES: Com base no que foi abordado e apresentado em relação às fichas coloridas, sugerimos uma primeira atividade para que os alunos possam apenas manusear o material e registrar na folha de atividades os resultados feitos com as fichas, descobrindo diferentes representações para números inteiros, o que é possível em 1 tempo de aula (50 minutos). Segue a sugestão de exercícios para trabalhar representações.

2.2 A ATIVIDADE

ATIVIDADE 1: Utilizando as fichas coloridas, represente os seguintes números inteiros, de três maneiras distintas:

a) +5

b) -3

c) +10

d) -8

e) 0

2.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Os estudantes devem cumprir a tarefa para que experimentem a representação com as fichas. É importante que o professor incentive diferentes tipos de representação para o mesmo número inteiro, especialmente para o zero. Isso será chave para a operação de adição e subtração com números inteiros.

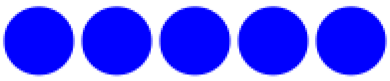
Algo que pode acontecer é o aluno representar um número apenas com a quantidade correspondente de fichas de uma cor. Por exemplo, representar o -2 utilizando somente duas fichas vermelhas. É importante destacar a necessidade de usar o conceito de anulação entre fichas vermelhas e azuis, além de incentivar a representação do mesmo número de diferentes formas, promovendo uma compreensão mais profunda do conteúdo.

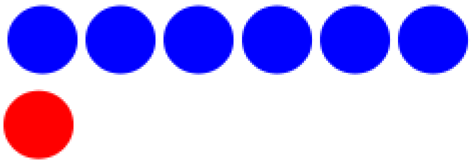
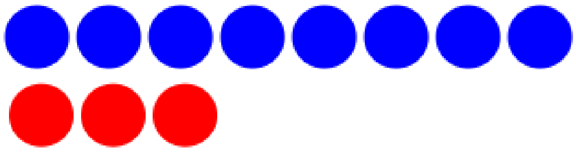
Uma possibilidade é abordar números opostos, mostrando aos alunos que as quantidades de fichas que se anulam representam números simétricos, que quando adicionados resultam em zero.

Segue algumas das possíveis representações para cada um dos itens da atividade proposta anteriormente.

a) +5

Quadro 1 – Sugestões de representações - item a

Primeira sugestão	

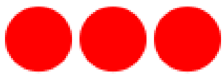
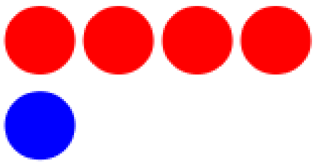
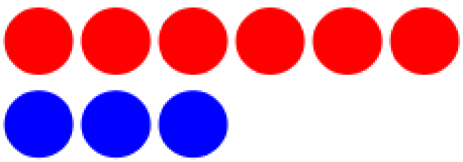
Segunda sugestão	
Terceira sugestão	

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que a primeira representação é sempre a imediata, aquela que os alunos logo irão sugerir, uma vez que é intuitivo pensar que o +5 é representado por cinco fichas azuis. Nas outras, é importante sempre enfatizar que só é possível através do anulamento de fichas, que resulta em zero e que por esse motivo podemos ter várias representações para o número +5.

b) -3

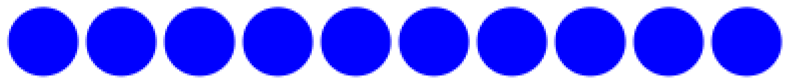
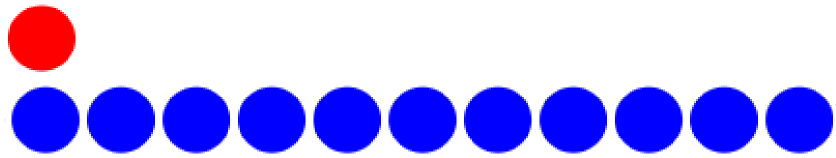
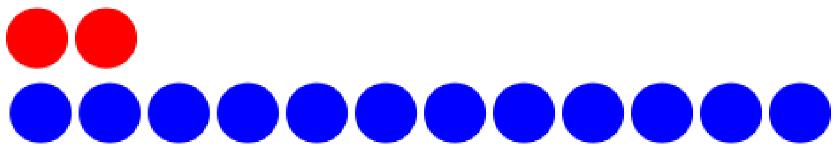
Quadro 2 – Sugestões de representações – item b

Primeira sugestão	
Segunda sugestão	
Terceira sugestão	

Fonte: Elaborado pelo autor

c) +10

Quadro 3 - Sugestões de representações – item c

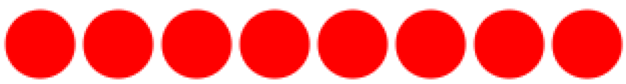
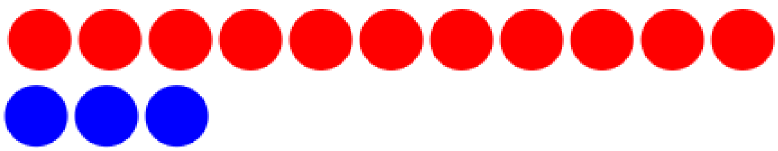
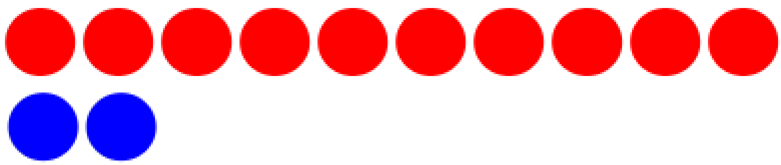
Primeira sugestão	
Segunda sugestão	
Terceira sugestão	

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que para o +10 já se utiliza mais fichas. Para as atividades em sala, é bom trabalhar com números de módulos pequenos, para um melhor manuseio das fichas, evitando erros ao trabalhar com quantidades maiores.

d) -8

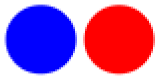
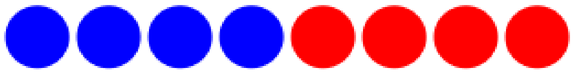
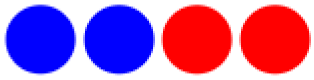
Quadro 4 - Sugestões de representações – item d

Primeira sugestão	
Segunda sugestão	
Terceira sugestão	

Fonte: Elaborado pelo autor

e) 0

Quadro 5 - Sugestões de representações – item e

Primeira sugestão	
Segunda sugestão	
Terceira sugestão	

Fonte: Elaborado pelo autor

3. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM AS FICHAS COLORIDAS

3.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

O material consiste em auxiliar os alunos na representação dos cálculos feitos com números inteiros, esclarecendo o funcionamento das regras de sinais, utilizando fichas coloridas.

O kit do material é composto por:

Fichas coloridas em azul para representar as quantidades positivas;

Fichas coloridas em vermelho para representar as quantidades negativas;

Fichas de controle para a realização dos cálculos algébricos;

Importante ressaltar que ele é composto por uma regra básica:

Qualquer quantidade de fichas azuis se anula com a mesma quantidade de fichas vermelhas (Regra do cancelamento).

É sugerido que a manipulação seja realizada em grupo, onde cada grupo recebe um kit com 40 fichas, sendo 20 azuis e 20 vermelhas.

RECOMENDAÇÕES: Com base na aplicação do material em sala de aula, é recomendado que seja aplicado em 2 ou 3 tempos de aula (50 minutos cada).

3.2 A ATIVIDADE

ATIVIDADE 1. Utilizando as fichas, realize as operações indicadas:

a) (+2) + (+5)

b) (+2) + (-5)
c) (-2) + (+5)
d) (-2) + (-5)

Fonte: Elaborado pelo autor

ATIVIDADE 2: Utilizando as fichas, realize as operações indicadas:

a) (+1) - (+4)
b) (+4) - (-1)
c) (+1) - (-4)
d) (-1) - (+4)

e) (-1) - (-4)

Fonte: Elaborado pelo autor

ATIVIDADE 3. Crie duas adições e duas subtrações com números inteiros para que os colegas de outro grupo resolvam.

3.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Para que os alunos compreendam corretamente a adição e a subtração, é fundamental o uso das fichas coloridas: as azuis representam quantidades positivas e as vermelhas, negativas, retomando a ideia já explorada na introdução aos números inteiros.

Propomos iniciar o estudo das operações com atividades que envolvam as fichas, em que a adição é interpretada como acréscimo e a subtração como retirada. Também se utiliza o cancelamento de pares de fichas opostas, conforme as regras previamente discutidas.

Para facilitar a compreensão dos exercícios propostos, resolveremos cada item proposto na próxima seção. Essa abordagem tem como objetivo esclarecer a aplicação prática do material abordado, permitindo que o professor compreenda melhor a utilização das fichas.

A abordagem será feita em dois momentos: primeiro, a adição, com foco na reunião de quantidades; depois, a subtração, com base na remoção de uma quantidade previamente definida.

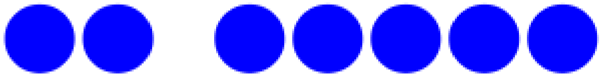
3.3.1 ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO AS FICHAS COLORIDAS

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1

a) (+2) + (+5)

A ideia inicial é que temos duas fichas azuis e vamos acrescentar cinco fichas azuis, o que resulta em sete fichas azuis, ou seja, +7.

Figura 1 - Adição (+2) + (+5)



Fonte: Elaborado pelo autor

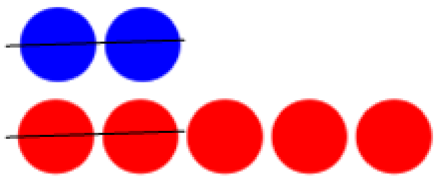
Deixe claro que nesse exemplo, não temos nenhum cancelamento a ser feito, logo basta adicionar as quantidades. Portanto (+2)+(+5) = +7

b) (+2) + (-5)

Inicialmente temos duas fichas azuis para representar o +2 e cinco fichas vermelhas para representar o -5.

Depois disso, verificamos se ocorreu algum tipo de cancelamento. Nesse caso, podemos cancelar duas fichas azuis com duas fichas vermelhas (+2 com -2). O resultado final será a quantidade de fichas que restarem após retirar os cancelamentos, ou seja, três fichas vermelhas (figura 2), de onde concluímos que (+2) + (-5) = (-3).

Figura 2 - Adição (+2) + (-5)



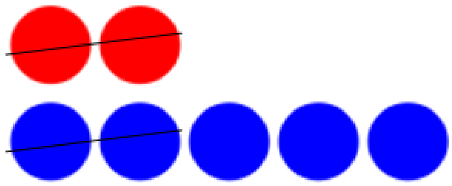
Fonte: Elaborado pelo autor

c) (-2) + (+5)

Neste item c, estamos interessados em juntar duas fichas vermelhas com cinco fichas azuis. É importante estar atento às quantidades das cores que os alunos estão manipulando, para que se evitem erros por desatenção.

Após os alunos agruparem as fichas necessárias, enfatize que podem determinar o resultado anulando as duas fichas vermelhas com a mesma quantidade de fichas azuis (figura 3). As três fichas azuis que restam nos fazem concluir que (-2) + (+5) = (+3).

Figura 3 - Adição (-2) + (+5)

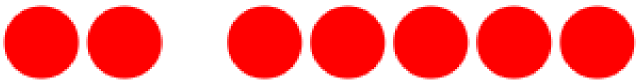


Fonte: Elaborado pelo autor

d) (-2) + (-5)

Neste ponto acreditamos que os alunos já farão esse item bem rápido, que consiste em agrupar duas fichas vermelhas com cinco fichas vermelhas, que irá resultar em um total de sete fichas vermelhas (figura 4), ou seja, (-2) + (-5) = (-7).

Figura 4 - Adição (-2) + (-5)



Fonte: Elaborado pelo autor

Observação: não mostramos a manipulação algébrica, deixamos para fazer uma demonstração na parte de subtração, mas se achar interessante, é possível trabalhar com algebrismo já nesse momento.

3.3.2 SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO AS FICHAS COLORIDAS

Vejamos agora a resolução dos itens envolvendo as subtrações sugeridas. Importante que apresente as subtrações ressaltando que o objetivo durante a manipulação das fichas será sempre retirar fichas de uma quantidade dada inicialmente, o que pode causar estranheza. Contudo, caso haja questionamentos, deixe claro que durante a execução da tarefa irão entender a mecânica das subtrações utilizando as fichas coloridas.

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2

a) (+2) - (+5)

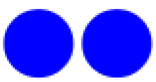
Para a subtração, em alguns casos, além de usarmos a regra do cancelamento, também será usado como recurso inserirmos o número zero, que pode ser representado como qualquer quantidade equivalente de fichas azuis e vermelhas. Isso já deve ter sido bem trabalhado com os alunos a fim de que se torne facilmente entendido nesse ponto da aula.

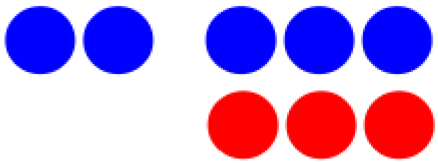
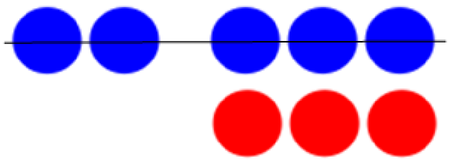
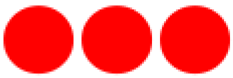
Neste item, demonstre aos alunos que o primeiro número representa a quantidade inicial de fichas que temos, que são duas fichas azuis, e queremos desta quantidade retirar cinco fichas da mesma cor. O que a princípio ao olhar dos alunos não será possível. Sendo assim, questione aos discentes o que falta na quantidade inicial para que consigam retirar as cinco fichas azuis desejadas. Caso tenham dificuldades, o professor pode estimular os alunos a concluir que é necessário colocar três fichas azuis a fim de completar as cinco que devem ser retiradas.

Entretanto, para que não se altere o resultado inicial, temos que inserir o zero, de maneira que não modifique essa quantidade. Sendo assim, além de inserir as três fichas azuis, iremos também inserir três vermelhas, uma vez que (+3) + (-3) = 0.

Observe o quadro de modo a facilitar a visualização

Quadro 6 – Representação algébrica de (+2) - (+5)

Registro com as fichas	Registro com os números
	(+2)

	(+2) + (+3) + (-3)
	(+2) + (+3) + (-3) - (+5) = = [(+2) + (+3) - (+5)] + (-3) = 0 + (-3)
	(-3)

Fonte: Elaborado pelo autor

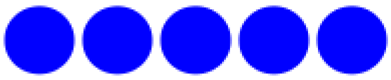
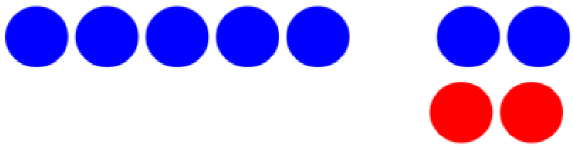
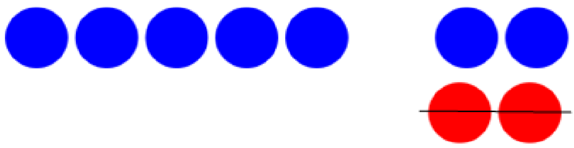
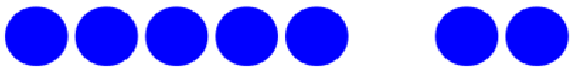
Observe que esse quadro permite que o entendimento das etapas fique mais fácil. Fazer esse esquema no quadro construindo com os alunos as representações com as fichas e com os números pode deixar a aula mais agradável por se tornar menos abstrata aos alunos cada etapa.

b) (+5) - (-2)

Temos a princípio cinco fichas azuis e queremos retirar duas fichas vermelhas. Novamente, iremos adicionar o zero, de forma a obter aquilo que queremos retirar. Nesse momento, é importante estimular os alunos a criarem uma linha de raciocínio que os leve a pensar na quantidade de fichas que irá adicionar nas cinco fichas azuis que já se tem a priori.

Se tiverem entendido a dinâmica das fichas, é esperado que respondam que é necessário inserir duas fichas vermelhas que posteriormente serão retiradas, porém também é necessário inserir duas azuis, pois estamos inserindo o zero. A seguir podemos retirar as duas fichas vermelhas, restando sete fichas azuis que indicam que o resultado da subtração é +7. Observe o esquema algébrico (Quadro 7).

Quadro 7 – Representação algébrica de (+5) - (-2)

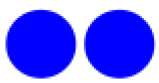
Registro com as fichas	Registro com os números
	(+5)
	(+5) + [(+2) + (-2)]
	(+5) + (+2) + (-2) - (-2) = = (+5) + (+2) + [(-2) - (-2)] = = (+5) + (+2) + 0
	(+7)

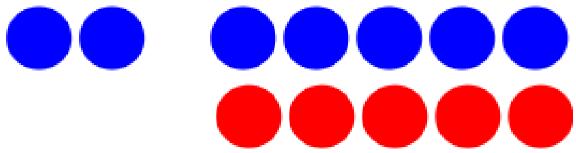
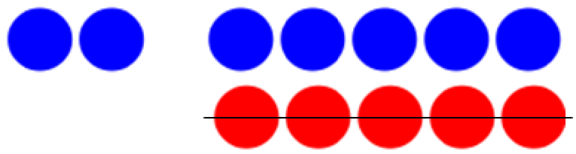
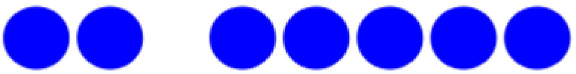
Fonte: Elaborado pelo autor

c) (+2) - (-5)

De um total de duas fichas azuis queremos retirar cinco fichas vermelhas. Para isso, precisamos inserir as cinco fichas vermelhas, sem esquecer de inserir também cinco fichas azuis, que é o zero, pela regra do cancelamento. Após isso, retiramos as cinco fichas vermelhas, restando sete fichas azuis que nos dá como resultado da subtração o +7.

Quadro 8 – Representação algébrica de (+2) - (-5)

Registro com as fichas	Registro com os números
	(+2)

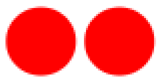
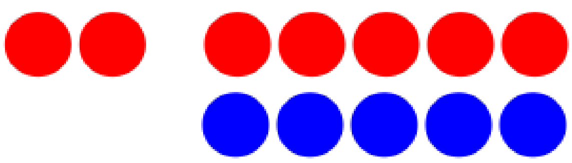
	(+2) + [(+5) + (-5)]
	(+2) + (+5) + (-5) - (-5) = = (+2) + (+5) + [(-5) - (-5)] = = (+2) + (+5) + 0
	(+7)

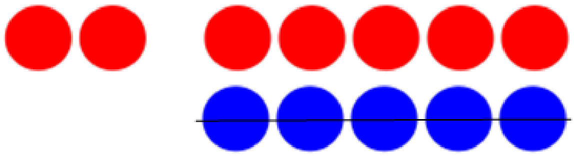
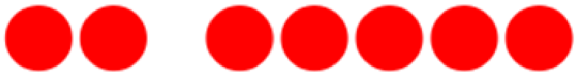
Fonte: Elaborado pelo autor

d) (-2) - (+5)

Seguindo nossa manipulação com as fichas coloridas, neste item temos duas fichas vermelhas e queremos retirar cinco azuis, para tanto indague aos alunos o que se deve fazer. É natural que respondam prontamente que devem ser inseridas cinco fichas azuis, assim como cinco fichas vermelhas, para em seguida ser possível retirar as cinco azuis, restando assim sete fichas vermelhas, que representam -7 como resultado da subtração.

Quadro 9 – Representação algébrica de (-2) - (+5)

Registro com as fichas	Registro com os números
	(-2)
	(-2) + [(-5) + (+5)]

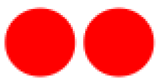
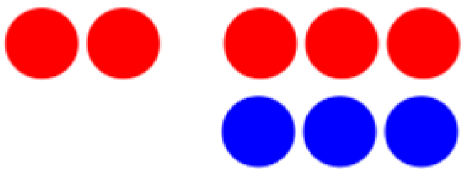
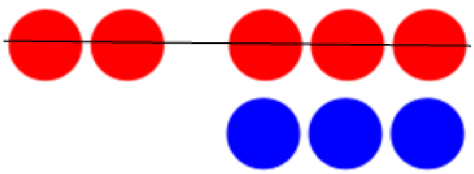
	(-2) + (-5) + (+5) - (+5) = = (-2) + (-5) + [(+5) - (+5)] = = (-2) + (-5) + 0
	(-7)

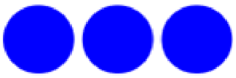
Fonte: Elaborado pelo autor

e) (-2) - (-5)

No último item sugerido, temos a subtração de dois números inteiros negativos. Temos a princípio duas fichas vermelhas e queremos retirar cinco fichas dessa mesma cor. Como não temos as cinco fichas necessárias, iremos inserir fichas vermelhas até que chegue ao total desejado. Construa junto com os alunos a ideia no quadro e conclua ser necessário inserir mais três fichas vermelhas, não esquecendo nunca de também inserir a mesma quantidade de fichas da outra cor, nesse caso, três azuis. Observe o quadro abaixo.

Quadro 10 – Representação algébrica de (-2) - (-5)

Registro com as fichas	Registro com os números
	(-2)
	(-2) + [(-3) + (+3)]
	(-2) + (-3) + (+3) - (-5) = = (+3) + [((-2) + (-3)) - (-5) = = (+3) + [(-5) - (-5)] = (+3) + 0

	(+3)

Fonte: Elaborado pelo autor

Após retirarmos as cinco fichas vermelhas, de acordo com a subtração dada, nos restam três fichas azuis, que nos apresenta o resultado da subtração como +3.

Quanto à atividade 3, pedir aos alunos que escolham números dentro da quantidades de fichas que se tem em cada grupo.

4. O JOGO DAS BORBOLETAS

4.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

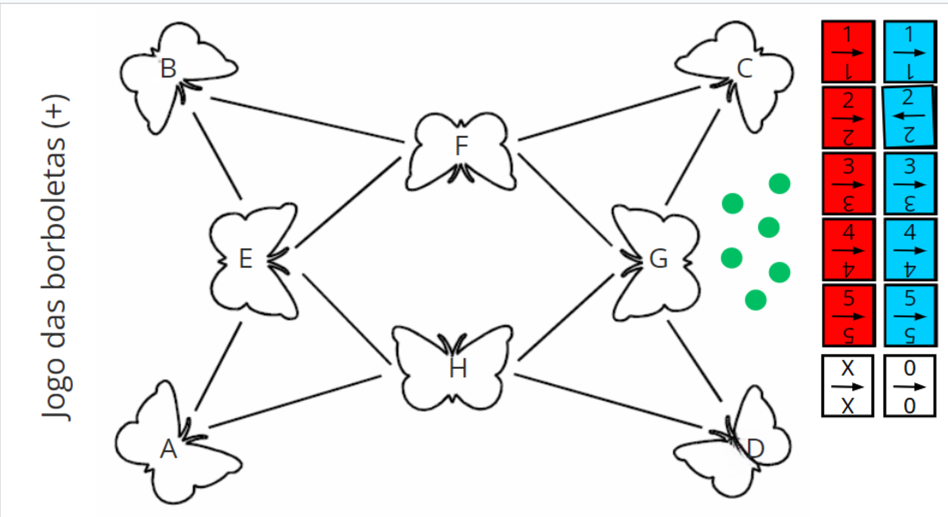
O jogo didático foi desenvolvido com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros no contexto da Educação Básica, proporcionando aos alunos uma abordagem mais lúdica, interativa e significativa dos conteúdos matemáticos, ele explora a adição e a subtração de números inteiros.

Esta proposta faz parte da dissertação intitulada *Quatro jogos para números inteiros: uma análise*, de autoria de Patrícia Rosana Linardi, elaborada no ano de 1998, sob orientação do professor Doutor Roberto Ribeiro Baldino, no curso de Mestrado da Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (Campus de Rio Claro). A dissertação tem como tema central os números inteiros, e o jogo foi concebido como parte prática da pesquisa, com base nas necessidades observadas no ensino de matemática para alunos do 7° ano do ensino fundamental.

O jogo é composto por um tabuleiro, cartas coloridas de azul, vermelho e brancas, além de fichas para preencher as borboletas.

<u>Tabuleiro e cartas do Jogo das borboletas</u>

Figura 5 - Tabuleiro e cartas jogo das borboletas



Fonte: Adaptação de (Linardi, 1998, pág. 23/25)

RECOMENDAÇÕES: Com base na aplicação do material em sala de aula, é recomendado que seja aplicado em 2 tempos de aula (50 minutos cada).

4.2 CONHECENDO O JOGO

Regras e dinâmicas do jogo das borboletas

O jogo das borboletas é iniciado após um sorteio prévio para determinar o primeiro jogador. Em seguida, cada jogador sorteará três cartas do monte que contém 44 cartas. Sendo:

- ➔ 2 brancas com o zero
- ➔ 2 brancas com o curinga (x)
- ➔ 20 vermelhas, sendo 4 de cada número
- ➔ 20 azuis, sendo também 4 de cada número

O primeiro jogador escolhe uma determinada quantidade de fichas, que estarão disponíveis próximas ao tabuleiro, e as colocará sobre uma das borboletas. Em seguida, irá pôr uma de suas três cartas sobre uma das trajetórias ligada a borboleta onde depositou as fichas, preenchendo a outra borboleta que está ligada pela trajetória, através da carta. Essa quantidade de fichas da segunda borboleta irá depender da seguinte regra:

- ➔ Se a carta sobre a trajetória for azul, o número de fichas na borboleta de onde parte a flecha mais o número da carta deve ser igual ao número de fichas na borboleta para onde a flecha aponta.
- ➔ Se a carta sobre a trajetória for vermelha, o número de fichas na borboleta de onde parte a flecha menos o número da carta, deve ser igual ao número de fichas na borboleta para onde a flecha aponta.

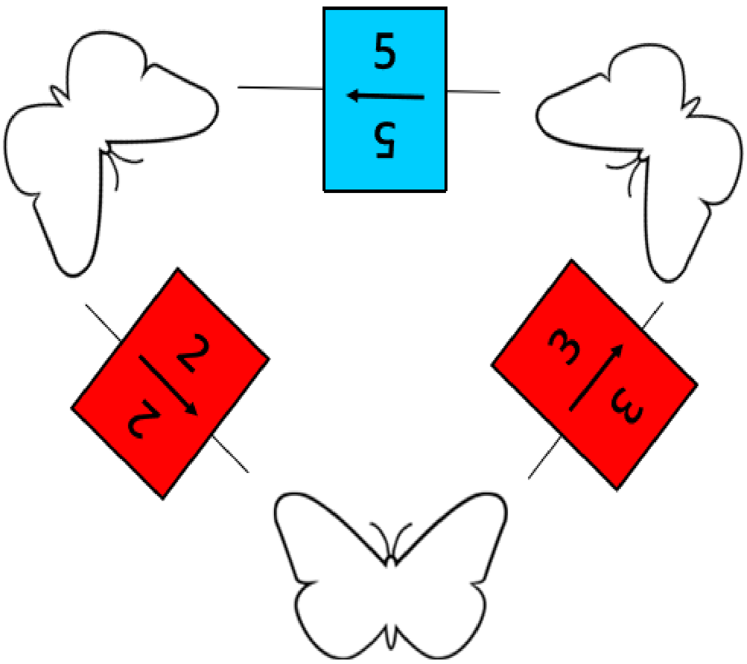
Após terminar sua jogada, o jogador sorteará outra carta do monte, ficando sempre com três cartas na mão.

O próximo jogador fará o mesmo feito pelo jogador anterior, desde que ponha uma carta sobre uma das trajetórias que ligam uma das borboletas já preenchidas a outra vazia, completando-a com a quantidade correta de fichas de modo a satisfazer a regra do jogo.

Quando um jogador coloca uma carta na última trajetória vaga, fechando o circuito, ele ganha 1 ponto se esse circuito for externo e 2 pontos caso seja o interno. A cada circuito fechado, o jogador recebe um cartão com o respectivo ponto, para ao final somar e verificar quem possui mais pontos, consagrando o vencedor.

4.3 A ATIVIDADE

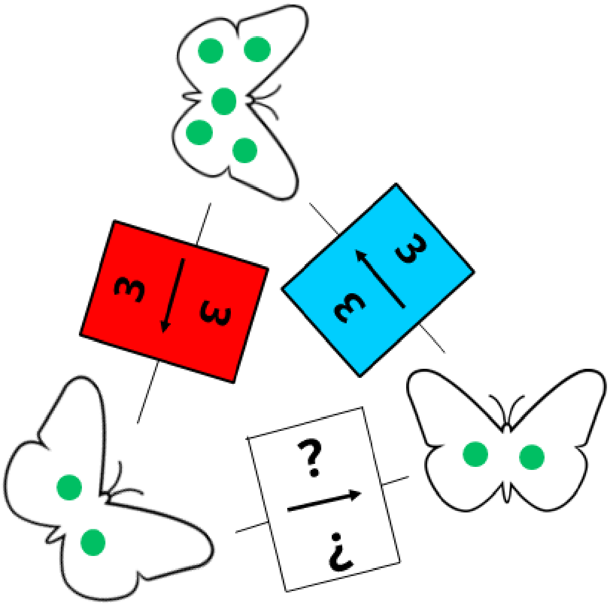
ATIVIDADE 1. Complete as borboletas com algarismos, respeitando a regra de adição e subtração conforme os números e as cores das cartas para que se obtenha um circuito correto.



Fonte: Elaborado pelo autor

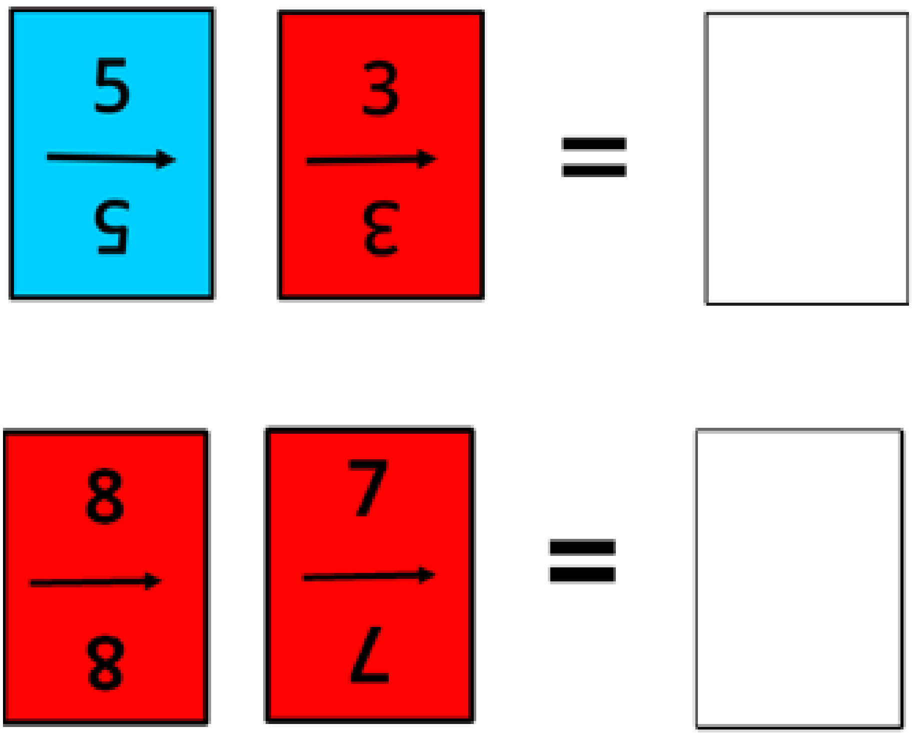
ATIVIDADE 2. Qual a carta que fecha esse circuito? Não vale a carta curinga!

.



Fonte: Elaborado pelo autor

ATIVIDADE 3. Com base no jogo das borboletas, complete as cartas em branco.



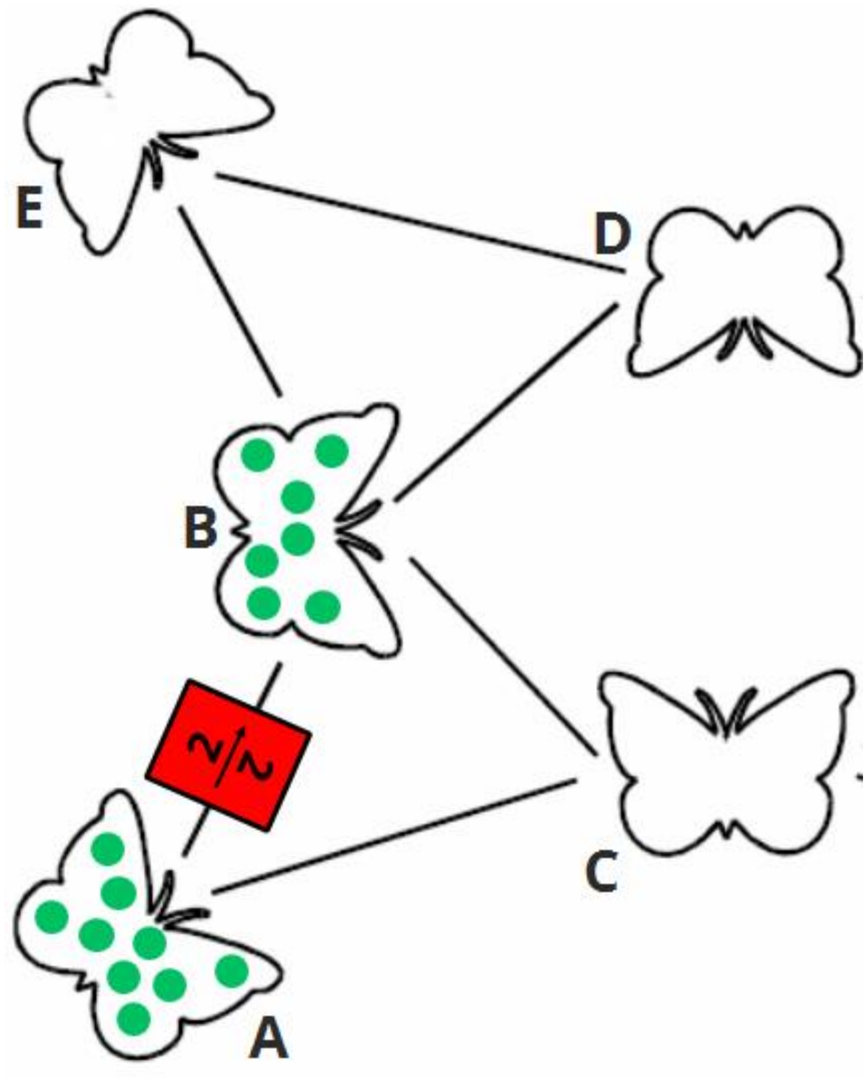
Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Acreditamos que, com exemplos práticos de possíveis jogadas do jogo das borboletas, podemos facilitar o entendimento do professor que deseja aplicar o jogo em sala de aula.

Observe um exemplo:

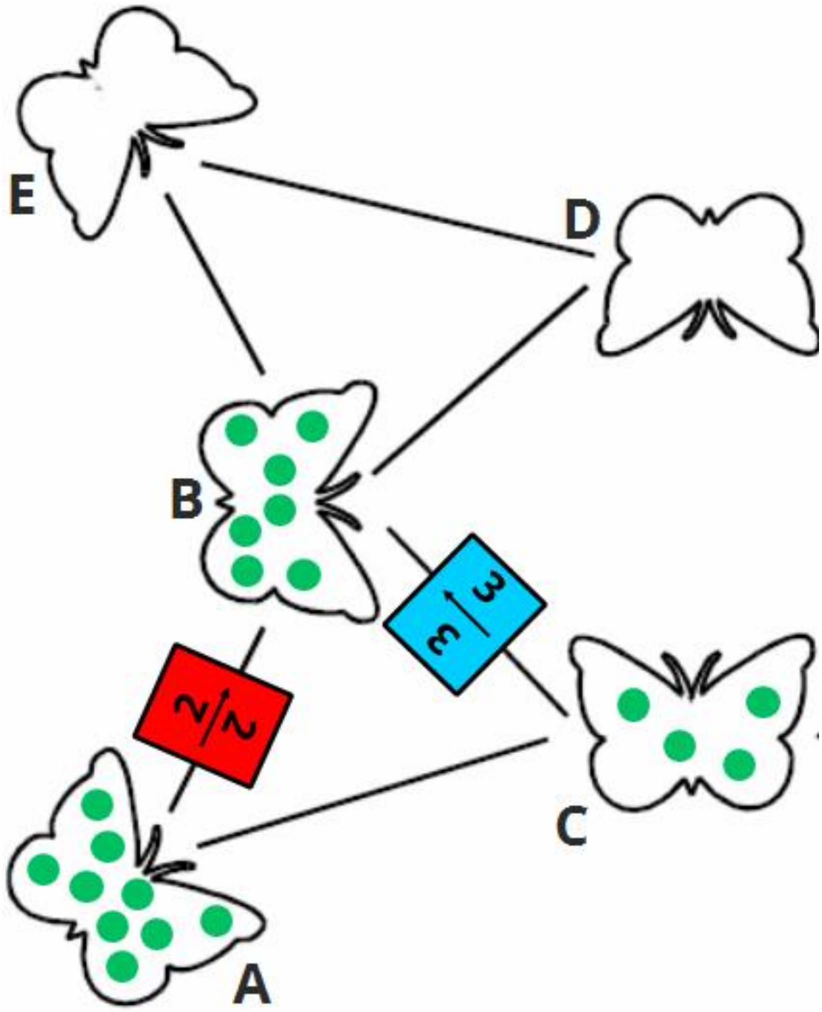
Figura 6 - Jogo das borboletas - exemplo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste exemplo, vamos supor que o primeiro jogador colocou 9 fichas na borboleta A e colocou a carta vermelha com número 2 sobre a trajetória apontando para a borboleta B. Seguindo a regra do jogo, a quantidade de fichas na borboleta B deve ser igual a 7 (figura 6), pois é necessário subtrair da quantidade de fichas da borboleta A o número da carta vermelha sobre a trajetória. O próximo jogador teria que jogar uma de suas cartas em uma das trajetórias que está ligada a uma das borboletas já preenchidas com fichas. Suponhamos que pôs a carta 3 azul (figura 7), sendo assim ele deveria preencher a borboleta C com 4 fichas, pois a quantidade de fichas na borboleta de onde parte a flecha mais a quantidade da carta colocada sobre a trajetória deve ser igual a 7. Lembrando que os valores são adicionados, pois a carta é azul.

Figura 7 – Jogo das borboletas – exemplo 1.1

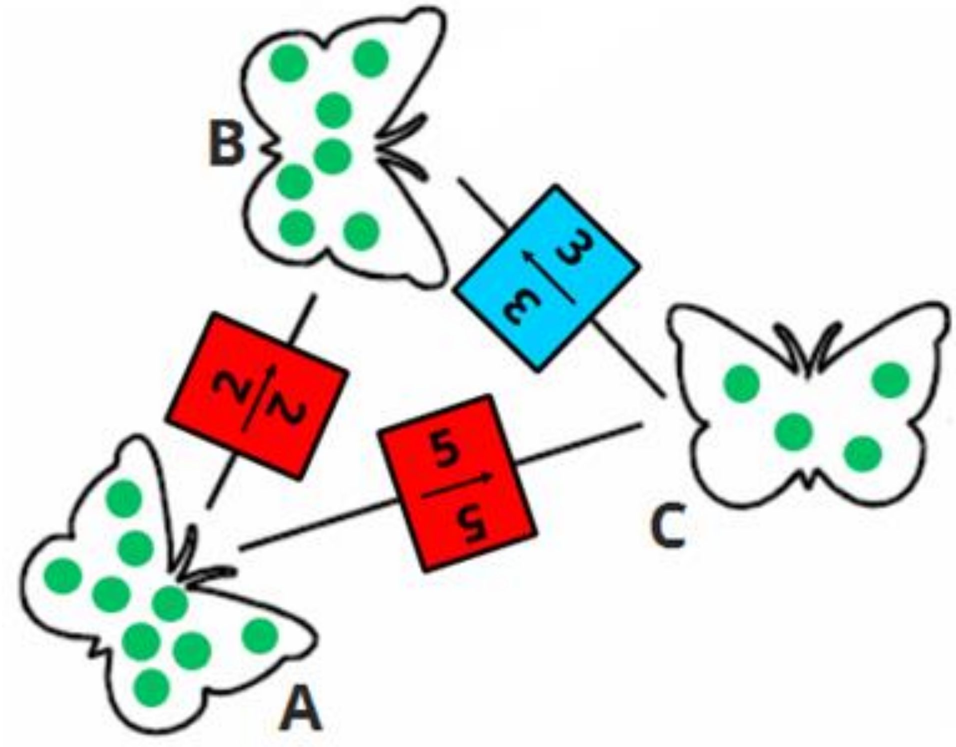


Fonte: Elaborado pelo autor

Esse pode ser um exemplo que pode ser apresentado aos alunos para que compreendam a ideia do jogo. Neste momento o professor pode os questionar sobre qual a carta que um jogador pode completar o circuito e garantir um ponto.

Temos três possibilidades, a primeira é um jogador possuir uma carta azul com número 5, outra é possuir uma vermelha com número 5 ou ainda possuir o curinga que pode ser colocada em qualquer momento do jogo e sempre tem valor absoluto, ou seja, pode assumir qualquer valor. Uma das possibilidades está ilustrada a seguir (figura 8).

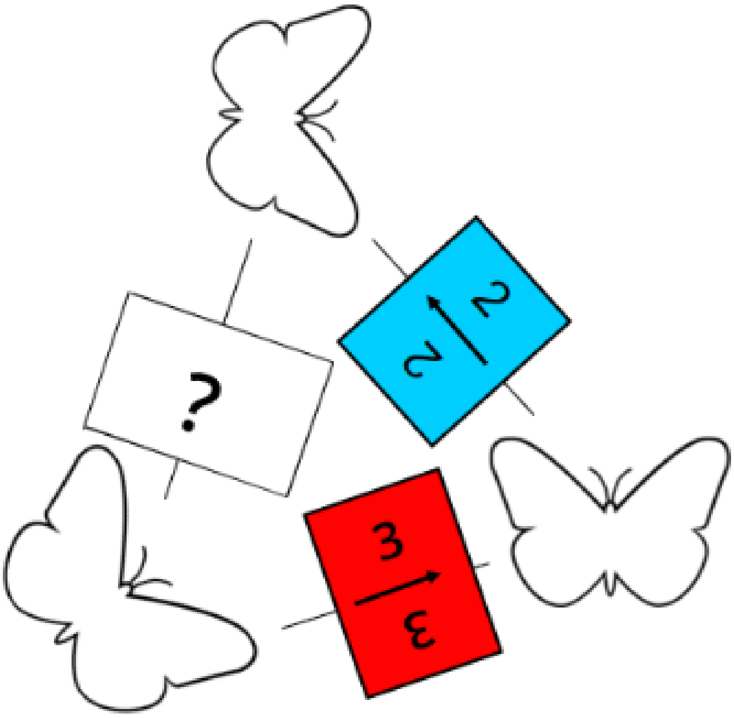
Figura 8 – Jogo das borboletas – exemplo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos ainda a versão que chamamos de abstrata, que se joga sem as fichas, que deve ser enfatizado pelo professor. O correto é estimular os alunos a pensarem nas cartas a serem colocadas nas trajetórias. Veja um exemplo a seguir:

Figura 9 – Jogo das borboletas – exemplo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

No modo abstrato, o objetivo é mostrar ao aluno que independente da quantidade de fichas colocadas nas borboletas, a carta a fechar o circuito sempre será aquela que irá resultar no número zero quando operamos as cartas. No exemplo acima, a carta que fecha o circuito será a 1 azul. Isso permite ao aluno entender as operações sendo feitas de forma mais clara quando comparado com o modo concreto.

5. MULTIPLICAÇÃO COM FICHAS COLORIDAS

5.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

As fichas serão novamente trabalhadas, seguindo as mesmas regras já trabalhadas anteriormente para a soma e subtração.

O material consiste em auxiliar os alunos na representação das multiplicações feitas com números inteiros, esclarecendo o funcionamento das regras de sinais, utilizando fichas coloridas.

O kit do material é composto por:

Fichas coloridas em azul para representar as quantidades positivas;

Fichas coloridas em vermelho para representar as quantidades negativas;

Fichas de controle para a realização dos cálculos algébricos;

Importante ressaltar que ele é composto por três regras:

Uma ficha azul corresponde a uma unidade positiva.

Uma ficha vermelha corresponde a uma unidade negativa.

Qualquer quantidade de fichas azuis se anula com a mesma quantidade de fichas vermelhas (Regra do cancelamento).

RECOMENDAÇÃO: Com base na aplicação do material em sala de aula, é recomendado que seja aplicado em 2 tempos de aula (50 minutos cada).

5.2 A ATIVIDADE

ATIVIDADE 1 Utilizando as fichas, realize as multiplicações indicadas:

a) (+2) x (+4)
b) (+2) x (-4)
c) (-5) x (+3)
d) (-2) x (-3)

Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

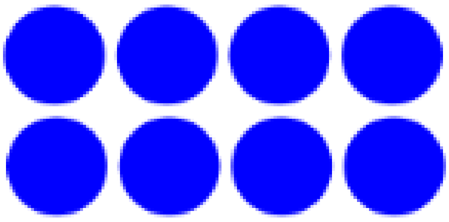
Como nesse momento os alunos já estão familiarizados com as fichas, sugerimos que introduza a multiplicação com o auxílio das mesmas. Ressaltando nesse momento que a multiplicação de inteiros é uma operação dada como uma extensão natural da multiplicação dos naturais.

A ideia é começarmos com dois números positivos para irmos embasando a multiplicação de números inteiros. Vamos à resolução dos itens sugeridos na atividade:

a) (+2) x (+4)

Importante deixar claro nesse momento que esse produto pode ser reescrito como uma soma de parcelas iguais, ou seja, (+4)+(+4). Portanto, podemos representar essa multiplicação adicionando duas vezes quatro fichas azuis, que resulta em 8 fichas azuis (+8). Portanto (+2) x (+4) = +8

Figura 10 - Multiplicação com as fichas - letra a

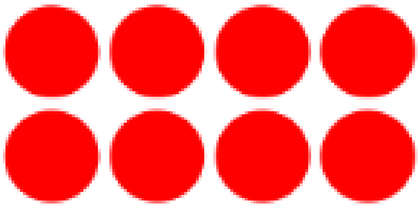


Fonte: Elaborado pelo autor

b) (+2) x (-4)

Nesse caso queremos a quantidade duas vezes -4, portanto, basta adicionar quatro fichas vermelhas duas vezes, totalizando um total de oito fichas vermelhas. Logo (+2) x (-4) = -8.

Figura 11 - Multiplicação com as fichas - letra b



Fonte: Elaborado pelo autor

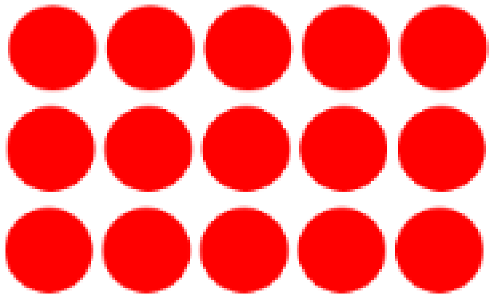
c) (-5) x (+3)

Importante destacar que em produtos onde o primeiro fator é negativo, sempre podemos utilizar a comutativa, ou seja, podemos inverter a ordem dos fatores e pensar de modo igual ao exemplo anterior. Observe:

(-5) x (+3) = (+3) x (-5)

Então, podemos adicionar o -5 três vezes. Para isso, basta adicionar cinco fichas vermelhas por três vezes (figura 12).

Figura 12 - Multiplicação com as fichas - letra c



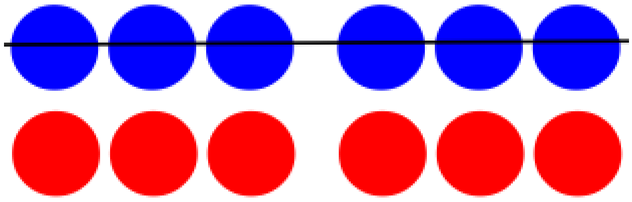
Fonte: Elaborado pelo autor

Logo (-5) x (+3) = -15, uma vez que ficamos com 15 fichas vermelhas.

d) (-2) x (-3)

Deixar claro para os alunos que quando temos (+2) x (+3) o que fazemos é adicionar dois grupos de 3 fichas azuis. Agora quando temos (-2) x (-3) o que queremos é retirar dois grupos de 3 fichas vermelhas, para isso precisamos desses dois grupos de 3 fichas vermelhas, porém temos também que adicionar dois grupos de fichas azuis para adicionar o zero. A seguir podemos retirar os dois grupos de três fichas vermelhas como queríamos inicialmente, restam então dois grupos de três fichas azuis, que nos dá o resultado da multiplicação.

Figura 13 - Multiplicação com as fichas - letra d



Fonte: Elaborado pelo autor

Ou seja: (-2) x (-3) = +6

6. CIRCUITO MULTIPLICATIVO

6.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

Esse material faz parte de uma adaptação do jogo das borboletas e do jogo das araras da dissertação intitulada *Quatro jogos para números inteiros: uma análise*, de autoria de Patrícia Rosana Linardi, elaborada no ano de 1998, sob orientação do professor Doutor Roberto Ribeiro Baldino, no curso de Mestrado da Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (Campus de Rio Claro).

O jogo é composto por um único circuito triangular do tabuleiro do jogo das borboletas, fichas nas cores azuis e vermelhas para preencher as borboletas e cartas coloridas numeradas.

Para realizarmos a multiplicação, as cartas do jogo possuem novas funções:

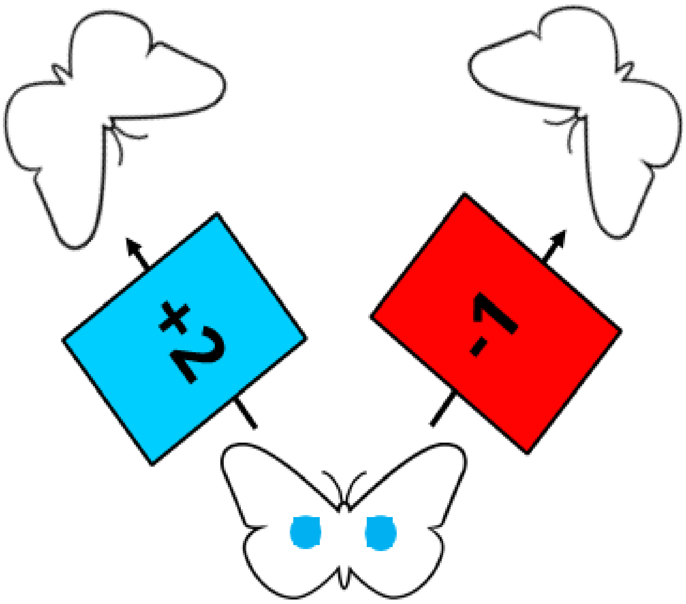
- ➔ O número da carta indica por quanto devemos multiplicar a quantidade de fichas na borboleta de onde parte a flecha;
- ➔ O sinal do número indica se as cores das fichas serão alteradas ou não:
    - ◆ Se a carta tiver sinal positivo (+), a cor das fichas para onde a flecha aponta deverá ser a mesma das fichas, na borboleta de onde a flecha parte
    - ◆ Se a carta for negativa (-) estas cores deverão ser diferentes uma da outra.

RECOMENDAÇÃO: Com base na aplicação do material em sala de aula, é recomendado que seja aplicado em 2 tempos de aula (50 minutos cada).

6.2 A ATIVIDADE

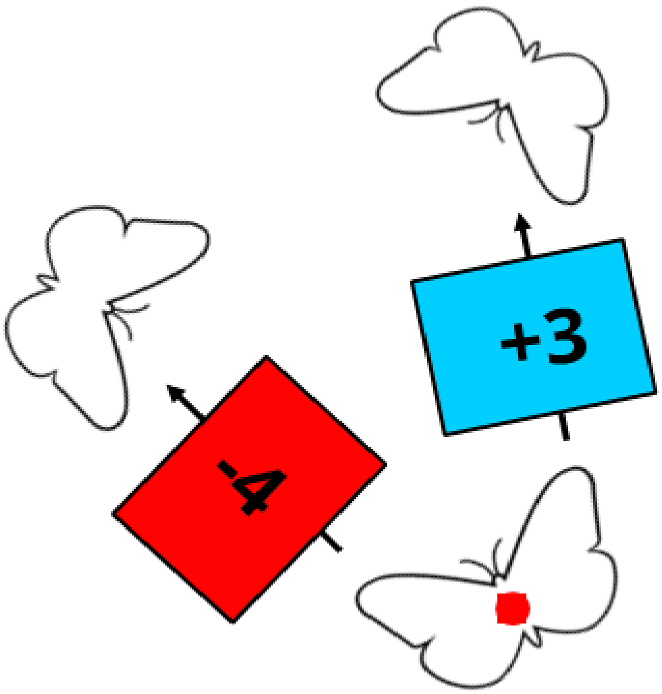
ATIVIDADE 1. Em cada item, complete as borboletas vazias com a quantidade correta de fichas da cor correta.

a)



Fonte: Elaborado pelo autor

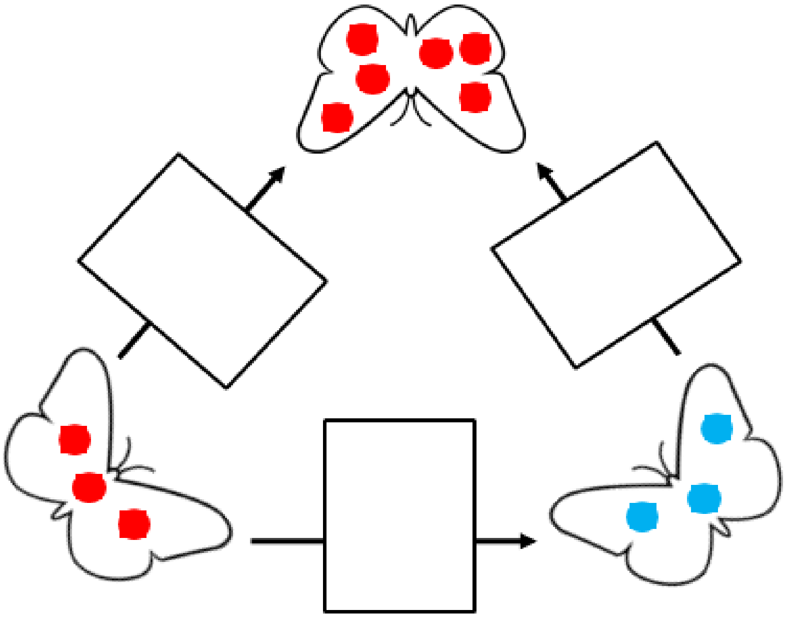
b)



Fonte: Elaborado pelo autor

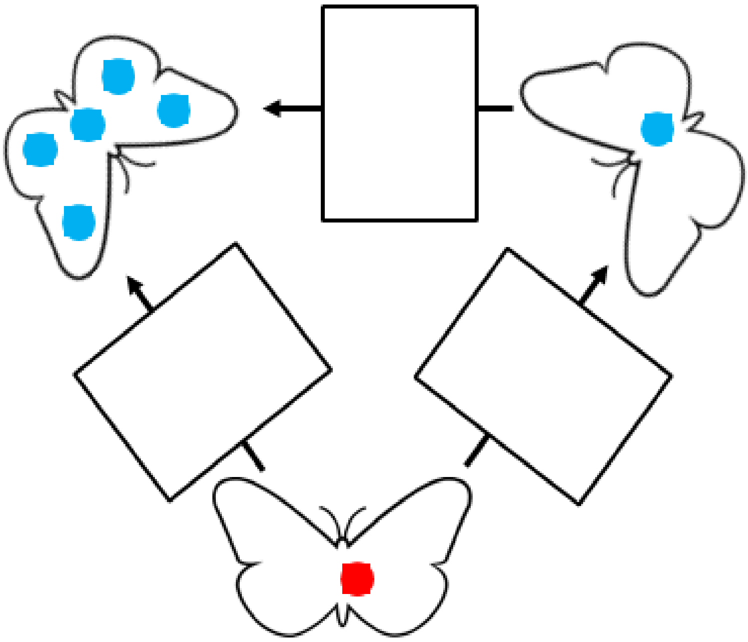
ATIVIDADE 2 Preencha com as cartas corretas cada trajetória de modo a fechar todo o circuito.

a)



Fonte: Elaborado pelo autor

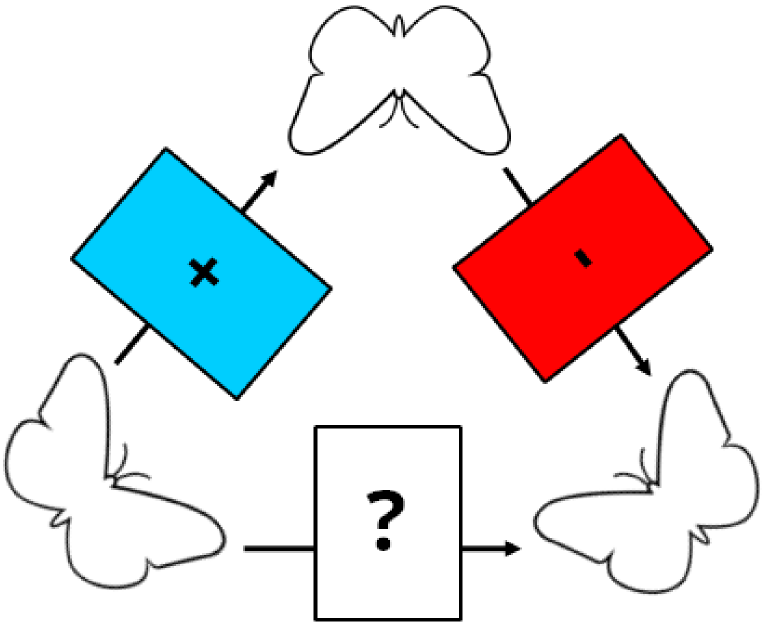
b)



Fonte: Elaborado pelo autor

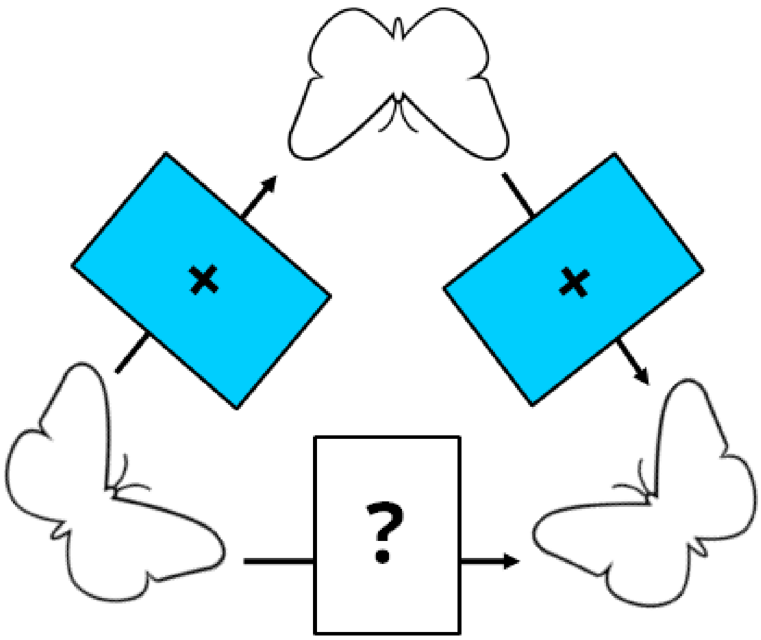
ATIVIDADE 3. Observe as figuras abaixo e descubra qual é a cor da carta que está oculta?

a)



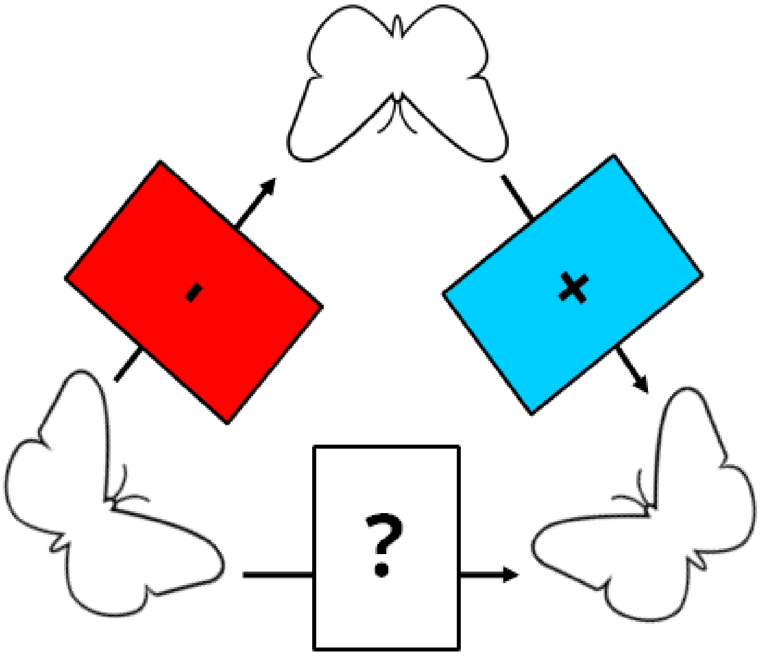
Fonte: Elaborado pelo autor

b)



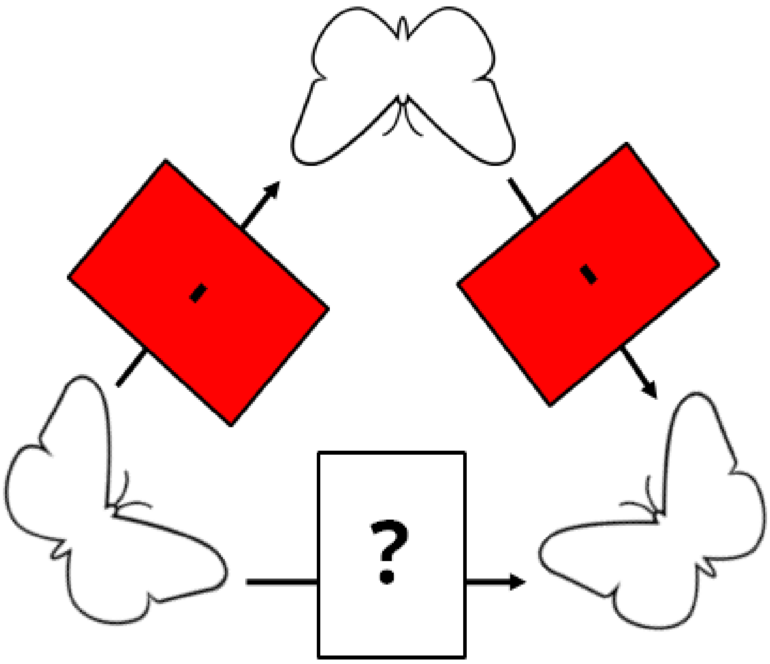
Fonte: Elaborado pelo autor

c)



Fonte: Elaborado pelo autor

d)



Fonte: Elaborado pelo autor

ATIVIDADE 4. Complete o quadro a seguir, com base no que resolveu nos exercícios anteriores.

Sentença	Expressão algébrica	Sinal da expressão
Um número positivo vezes um número positivo é igual a:	(+) x (+)	
Um número positivo vezes um número negativo é igual a:		
Um número negativo vezes um número positivo é igual a:		
Um número negativo vezes um número negativo é igual a:		

Fonte: Elaborado pelo autor

6.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

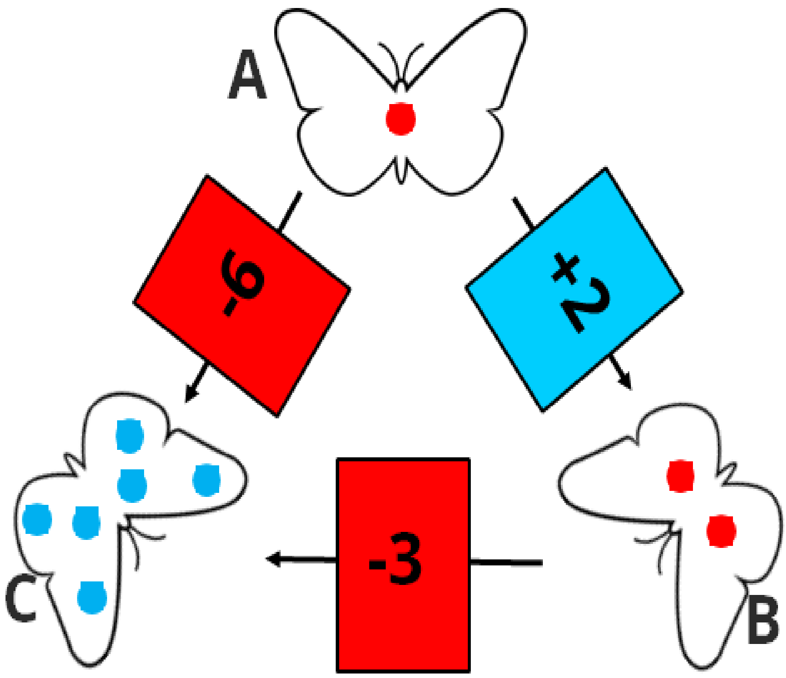
Para uma melhor compreensão da proposta apresentada neste trabalho, optamos por realizar uma abordagem mais prática na parte que trata da multiplicação de números inteiros, que consideramos uma etapa importante e significativa deste trabalho. Acreditamos que, ao resolver alguns exemplos práticos, conseguimos demonstrar de maneira mais clara e objetiva como aplicar os conceitos desejados, além de tornar a explicação mais acessível tanto para o professor quanto para outros leitores.

Assim, explicamos o uso do material a partir da resolução passo a passo de exemplos, com o objetivo de evidenciar como o conteúdo pode ser explorado de forma didática, facilitando o aprendizado dos alunos e reforçando os fundamentos da multiplicação de números inteiros.

Observe alguns exemplos:

Exemplo 1

Figura 14 - Exemplo 1 – Circuito Multiplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste exemplo é possível observar que ao colocar uma ficha vermelha na borboleta A e uma carta +2 na trajetória em direção à borboleta B, é necessário preencher a borboleta B com duas fichas vermelhas, pois pela regra do jogo 1 x 2 = 2 e como a carta é positiva as fichas na borboleta de chegada segue a mesma cor da borboleta de onde parte a flecha.

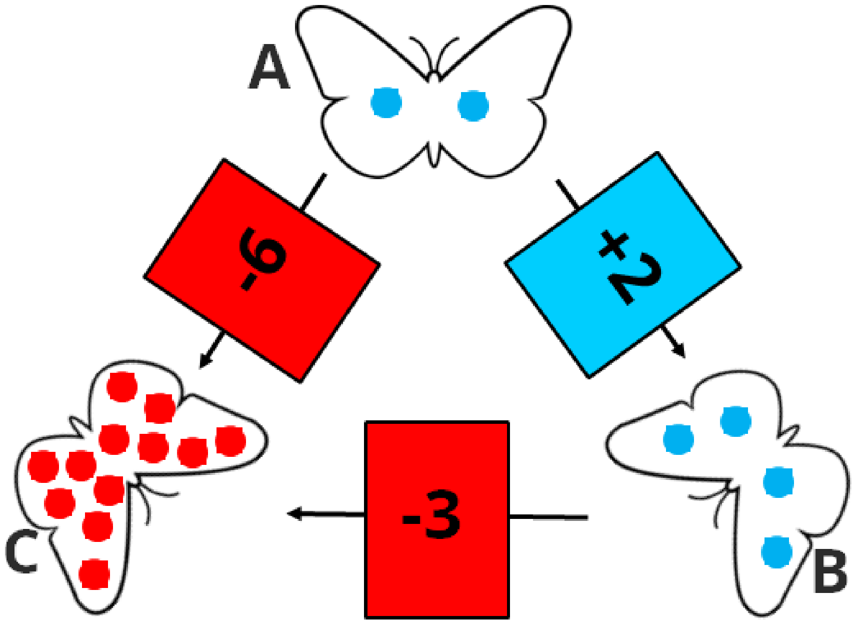
Na trajetória da borboleta B para a borboleta C está a carta -3, que permite determinar a quantidade de fichas na borboleta de chegada. Serão seis azuis, pois 2 x 3 = 6 e como a carta é negativa a cor das fichas na borboleta de chegada vai mudar, ou seja, fichas azuis.

Por último, na trajetória ligando as borboletas A e C, só uma carta fecha de forma correta o circuito. Como as cores são diferentes nas duas borboletas, será necessário uma carta negativa. Para determinar o número basta descobrir o número multiplicado pela quantidade de fichas da borboleta A resulta na quantidade referente às fichas da borboleta C, que nesse exemplo são seis fichas azuis. Portanto a carta que fecha o circuito é -6.

Observe agora o exemplo 2, onde são usadas as mesmas cartas, mas não a mesma quantidade de fichas.

Exemplo 2:

Figura 15 – Exemplo 2 – Circuito Muliplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse circuito, perceba que ele é composto pelas mesmas cartas do exemplo 1. Porém, ao iniciar colocando duas fichas azuis na borboleta A, a borboleta B também ficou com fichas azuis, pois a carta sobre a trajetória é representada por um número positivo. Como já entendido, essa quantidade de fichas é resultado do produto entre a quantidade de fichas na borboleta A e o número presente na carta sobre a trajetória.

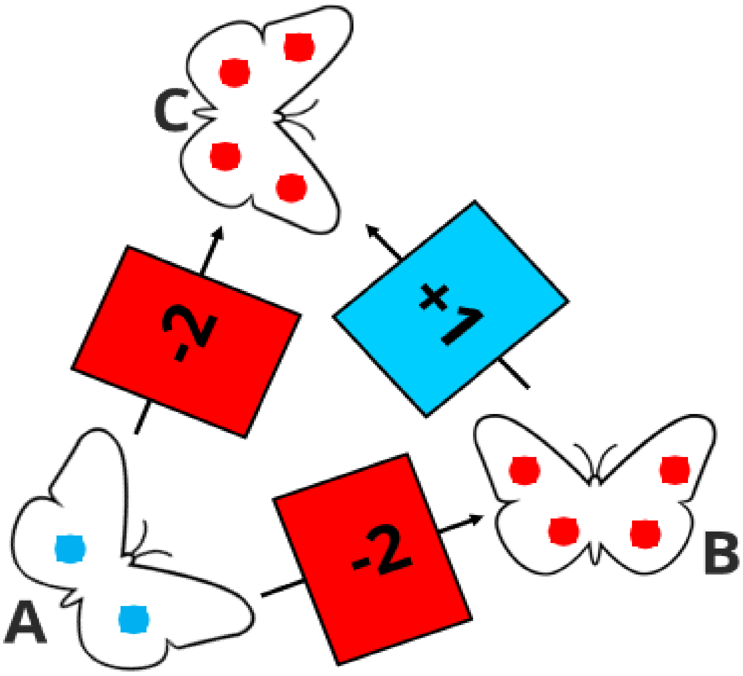
Já da borboleta B para a borboleta C, temos uma carta vermelha com sinal negativo, o que indica que as fichas na borboleta de chegada devem trocar de cor. Importante perceber que quando vamos da borboleta A para a C, que é o “caminho direto” também trocamos de cor, pois a carta sobre a trajetória também nos apresenta um número negativo.

Sendo assim, é importante que o aluno perceba que o que vai interessar não é a quantidade de fichas em cada borboleta, mas sim os sinais em cada carta da trajetória, e que o “caminho direto”, na verdade, sempre vai depender das cartas utilizadas nas outras duas trajetórias do circuito. Por isso é importante, diferente do jogo das borboletas, as setas já indicando as direções para onde cada borboleta se dirige.

Vale ressaltar que, como é possível ver, dependendo do tamanho do circuito utilizado com os alunos, não é indicado usar muitas fichas nas borboletas. Caso assim o faça, o risco de dar uma quantidade de fichas que as borboletas não comportam é grande, dificultando a visualização.

Exemplo 3.

Figura 16 - Exemplo 3 – Circuito Multiplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor

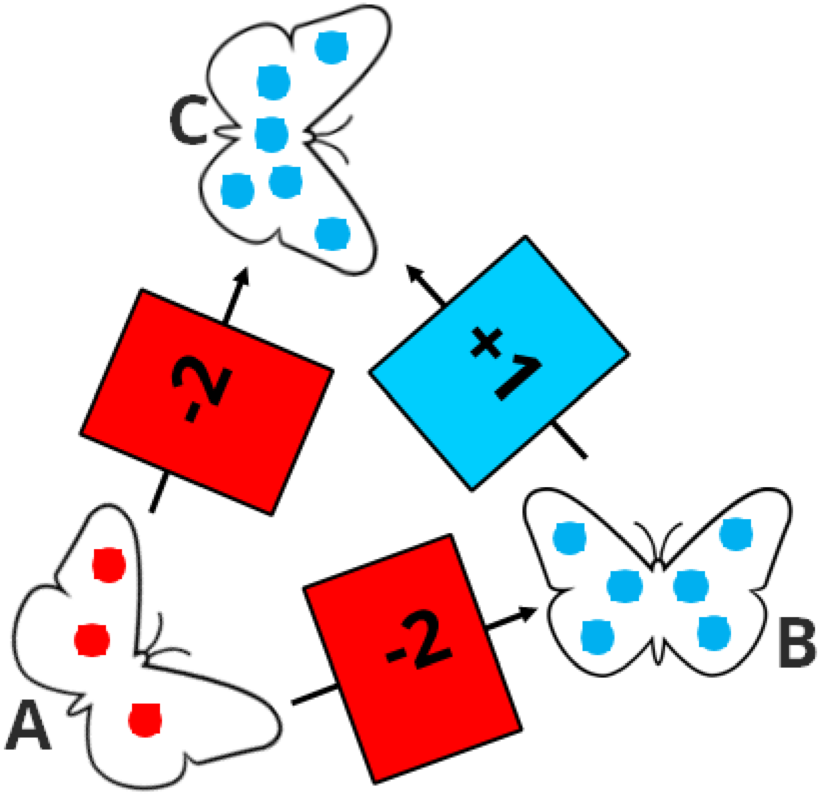
Partindo da borboleta A, onde foram colocadas duas fichas azuis, até a borboleta B, através da operação feita com a carta -2, a borboleta de chegada foi preenchida com quatro fichas vermelhas. Houve mudança de cor entre as borboletas, por operar com uma carta negativa.

De B para C não houve mudança de cor, uma vez que a carta sobre a trajetória ligando as duas borboletas é uma carta positiva. Por fim, a trajetória ligando A e C é preenchida com a carta -2, por haver mudança de cor, pois o número multiplicado por 2 que resulta em 4 é o próprio 2.

Vamos pensar no mesmo exemplo anterior, mudando apenas a quantidade de fichas nas borboletas

Exemplo 4:

Figura 17 - Exemplo 4 – Circuito Muliplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor

A diferença deste exemplo para o anterior, é que foram colocadas três fichas vermelhas na borboleta A. Mas como já foi mencionado, isso não é importante, pois o seu objetivo deve ser fazer com que o aluno chegue à conclusão que as cartas presentes nesse circuito nos mostra na verdade a regra dos sinais para a multiplicação. Nesse caso, quando operamos um número negativo com um número positivo, o produto final é negativo.

A quantidade de fichas em cada borboleta segue as regras, acreditamos que após esses exemplos tenha ficado claro qual o objetivo do circuito multiplicativo e sua contribuição para a regra de sinais para a multiplicação.

7. DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

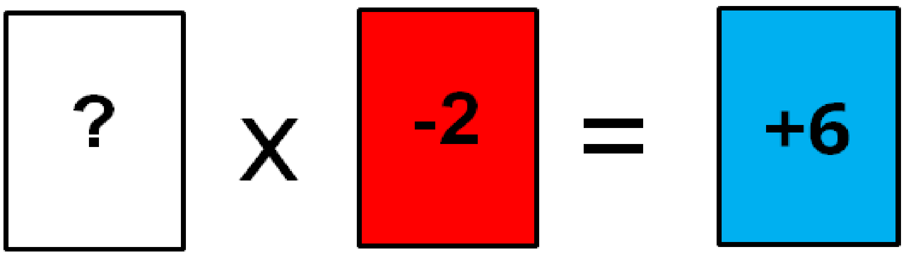
7.1 DESCRIÇÃO DO MATERIAL

A divisão será trabalhada como sendo a operação inversa da multiplicação. Na divisão não utilizaremos as fichas, serão utilizadas cartas numeradas de -10 a +10, cartas com sinais de interrogação e sinais operatórios de divisão e multiplicação. A ideia é apenas trabalhar divisões simples, com o intuito que os alunos entendam as regras dos sinais e percebam a ligação com a multiplicação.

7.2 A ATIVIDADE

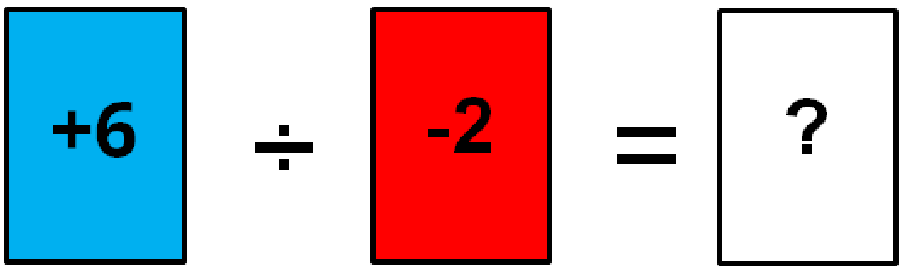
ATIVIDADE 1 Observe as cartas e responda ao que se pede.

a) Qual o valor desconhecido na multiplicação abaixo?



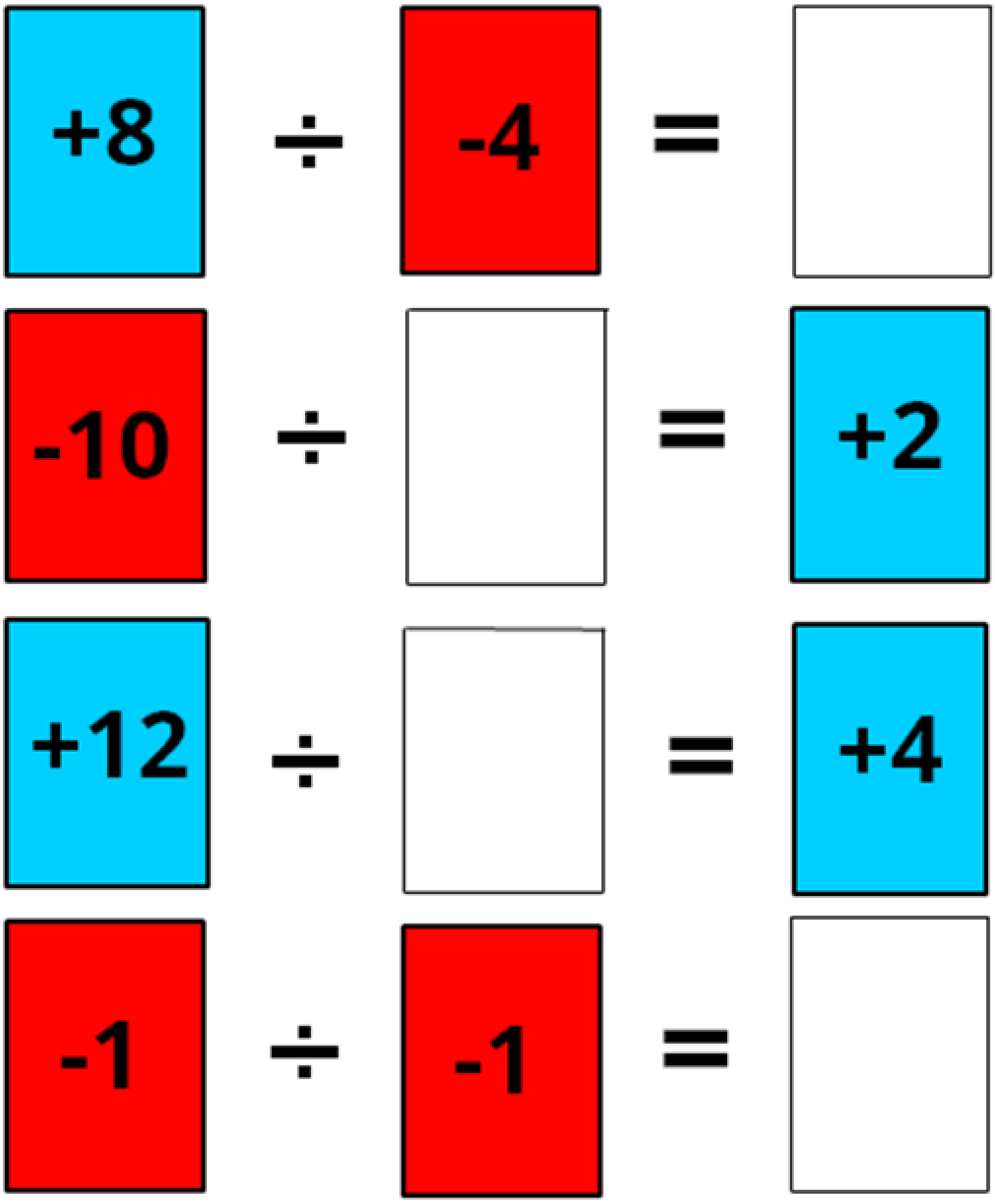
Fonte: Elaborado pelo autor

b) Sabendo que a divisão é a operação inversa da multiplicação, qual o quociente da divisão?



Fonte: Elaborado pelo autor

ATIVIDADE 2. Preencha as cartas em branco com a cor e o número correto.



Fonte: Elaborado pelo autor

7.3 CONVERSANDO COM O PROFESSOR

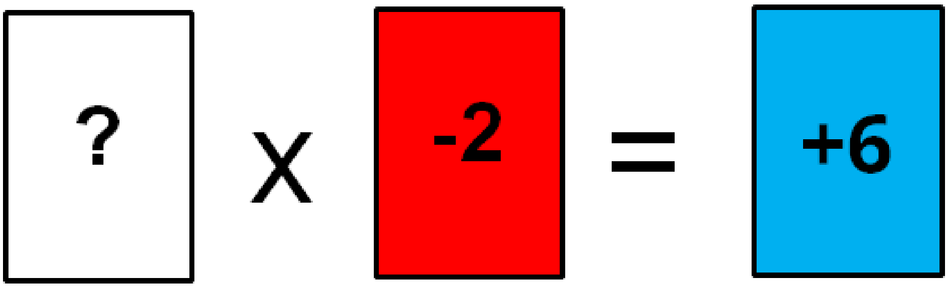
Como comentado acima, a divisão de números decimais não será tão explorada, uma vez que queremos apenas que os alunos compreendam que as regras de sinais da multiplicação se estendem para divisão. A divisão pode ser trabalhada com a mesma ideia do jogo quem sou eu.

Sendo assim, como sugestão, temos cartas coloridas onde o professor deve posicioná-las armando uma divisão de modo que a tarefa do aluno seja completar com a carta correta que deixa a divisão correta.

Importante durante a realização da tarefa enfatizar que estamos apenas trabalhando com divisões exatas, por isso a importância de o professor selecionar as cartas para serem efetuadas as divisões de modo a não cair uma divisão não exata.

Na proposta, pensamos no esquema a seguir.

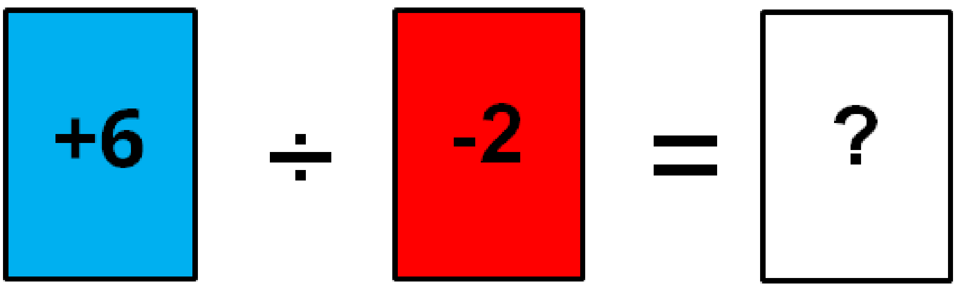
Figura 18 - Divisão – Resolução – Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Para resolver essa divisão iremos pensar em qual o número multiplicado por -2 que resulta em +6, ressaltando que a multiplicação é a operação inversa da divisão. Portanto, podemos transformar a divisão na seguinte multiplicação:

Figura 19 - Divisão – Resolução – Parte 2

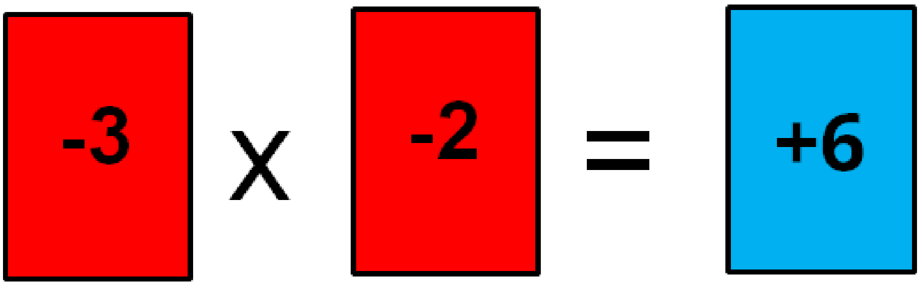


Fonte: Elaborado pelo autor

Para resolver esse problema, vamos relembrar com os alunos o que já sabem da multiplicação de números inteiros, observando que se um dos fatores é negativo e o produto é positivo, devemos saber que o outro fator também será negativo. Ressaltando nesse momento, que as possibilidades de um produto ser positivo são ambos os fatores terem os mesmos sinais, nesse caso, ambos negativos.

A partir daí, basta pensar qual o número multiplicado por 2 resultará em 6, obtendo como resultado o número 3, porém como mencionado acima, negativo.

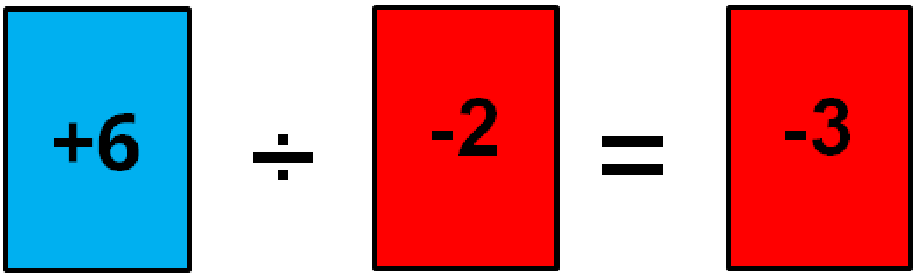
Figura 20 - Divisão – Resolução – Parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, já podemos concluir que o resultado da divisão inicial será -3, uma vez que o resultado encontrado na multiplicação nos fornece o quociente desejado.

Figura 21 - Divisão – Resolução – Parte 4



Fonte: Elaborado pelo autor

REFERÊNCIAS

AMPARO, Higor Soares do. “**Menos vezes menos é mais”: dificuldades no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Niterói/RJ, Universidade Federal Fluminense, 2025.

HQEM. Retrato de família. **Projeto de Extensão História em Quadrinhos no Ensino de Matemática**. Programa Dá Licença. IME-UFF, 2025.

LINARDI, Patrícia Rosana. **Quatro jogos para números inteiros: uma análise**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

MARTINS, Éllen. **Uma proposta didática para o ensino dos números inteiros e suas operações**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Niterói/RJ, Universidade Federal Fluminense, 2019.