



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Geisiane de Moura Vettorazzi

Empacotamento de Retângulos: Uma Ferramenta para o Ensino da Matemática

Cuiabá/MT 2025

Geisiane de Moura Vettorazzi

Empacotamento de Retângulos: Uma Ferramenta para o Ensino da Matemática

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ciências e Humanidades para Educação Básica. Linha de pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica.

Prof. Dr. Hector Flores Callisaya Orientador

Cuiabá - MT
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

V592e Vettorazzi, Geisiane de Moura.
Empacotamento de Retângulos: Uma Ferramenta para o Ensino da Matemática [recurso eletrônico] / Geisiane de Moura Vettorazzi. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 63 f., pdf). -- 2025.

Orientador: Hector Flores Callisaya.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2025.
Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.
Inclui bibliografia.

1. Geometria Computacional. 2. Educação Básica. 3. Problemas de Empacotamento.. I. Callisaya, Hector Flores, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT.ICET@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: EMPACOTAMENTO DE RETÂNGULOS: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

AUTOR: MESTRANDA GEISIANE DE MOURA VETTORAZZI

Dissertação defendida e aprovada em 11 de abril de 2025.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Prof. Dr. Hector Flores Callisaya** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Prof. Dr. Pedro Manuel Sanchez Aguilar** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes** (Membro externo)

Instituição: Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Cuiabá, 11/04/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Cruvinel Lemes, Usuário Externo**, em 11/04/2025, às 19:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **HECTOR FLORES CALLISAYA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/04/2025, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **PEDRO MANUEL SANCHEZ AGUILAR**, **Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT / ICET - UFMT**, em 12/04/2025, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7815509** e o código CRC **EB45F5A8**.

*À Deus, que me concede todos os dias
a energia da vida, que me dá força,
coragem e perseverança para atingir
meus objetivos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder força, sabedoria e perseverança para concluir esta etapa da minha vida.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Hector Flores Callisaya, pela sua inestimável orientação, apoio e incentivo durante todo o processo de elaboração deste TCC. Agradeço a paciência, as valiosas sugestões e a constante disponibilidade para me auxiliar na superação dos desafios encontrados. Sem a sua expertise e dedicação, este trabalho não seria possível. Estendo ainda meu agradecimento ao Prof. Dr. Pedro Manuel Sánchez Aguilar coordenador do programa, que sempre me apoiou em todas as etapas do curso.

Sou grata à minha família e amigos pelo apoio incondicional durante toda a minha trajetória acadêmica. Agradeço aos meus pais, Marli e Aquiles, por acreditarem em mim e me incentivarem a sempre buscar meus sonhos. Agradeço também a minha querida amiga Silvana, que mesmo distante esteve presente em minha vida em mais essa fase, e a minha afilhada Maísa e minha sobrinha Emanuely por me proporcionarem momentos de descontração e alegria.

Minha gratidão ao meu namorado Fredson, que me incentivou a seguir em frente e me ofereceu suporte emocional constante.

Finalmente, agradeço à Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMT) por me proporcionar a oportunidade de realizar este TCC. Agradeço especialmente ao Departamento de Matemática e ao corpo docente do programa que me proporcionaram experiências e conhecimentos inestimáveis para que eu chegasse até aqui.

*O sucesso nasce do
querer, da determinação e persistência
em se chegar a um objetivo. Mesmo
não atingindo o alvo, quem busca
e vence obstáculos, no mínimo fará
coisas admiráveis.*

José de Alencar

Resumo

Este trabalho apresenta a formulação de um modelo de programação linear inteira para a otimização do empacotamento de retângulos em um domínio poligonal especificado. O problema é definido como a determinação da disposição de retângulos, com possibilidade de rotação de noventa graus, visando maximizar a utilização da área disponível em um domínio delimitado por inequações lineares. O modelo proposto aborda desafios relacionados à eficiência no uso do espaço, às restrições geométricas e à viabilidade das soluções.

Palavras chave: Geometria Computacional; Educação Básica; Problemas de Empacotamento.

Abstract

This work presents the formulation of an integer linear programming model for optimizing the packing of rectangles within a specified polygonal domain. The problem is defined as determining the arrangement of rectangles, including the possibility of ninety-degree rotation, aiming to maximize the utilization of the available area in a domain bounded by linear inequalities. The proposed model addresses challenges related to space efficiency, geometric constraints, and solution feasibility.

Keywords: Computational Geometry; Basic Education; Packing Problems.

Lista de Figuras

1.1	Sistema Conjuntivo	7
1.2	Sistema disjuntivo	8
1.3	O conjunto C_1 1.3(a) é um conjunto convexo, pois qualquer segmento de reta está contido em C_1 . Contudo, o conjunto C_2 1.3(b) não é convexo, uma vez que o segmento que une p e q não está contido em C_2	9
1.4	Fecho convexo de C	10
1.5	Quadrados em triangulo equilátero	11
1.6	Retângulo com rotação de noventa graus	12
1.7	Sobreposição e inclusão	14
1.8	$\frac{5}{2}m(m - 1) + 4km$	17
2.1	Representação dos domínios convexos P_1 , P_2 e P_3 , utilizados em problemas de corte e empacotamento.	23
2.2	Corte ótimo de uma folha A4 P_1 , com dimensões $W = 21.0$ cm $H = 29.7$ cm.	25
2.3	Corte de uma folha triangular P_2 com área 311.84	27
2.4	Corte um domínio triangular P_3 com área 311.84	28
3.1	Retângulos 12cm x 4cm	35
3.2	Retângulos 12cm x 4cm	35
3.3	Retângulos 12cm x 5cm	36
3.4	Retângulos 12cm x 5cm	36
3.5	Retângulos 12cm x 6cm	37
3.6	Retângulos 12cm x 6cm	37

Lista de Tabelas

2.1	Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_1 , com dimensões $W = 21,0\text{ cm}$ e $H = 29,7\text{ cm}$	26
2.2	Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_2 , com dimensões $W = 21,0\text{ cm}$ e $H = 29,7\text{ cm}$	27
2.3	Resultados obtidos para o domínio P_3 com área de 311,84.	28
3.1	Cálculo das áreas dos retângulos	33
3.2	Quantidade máxima de retângulos que cabem em uma folha A4	34
3.3	Aproveitamento de retângulos em uma folha A4	34
3.4	Resultados dos cálculos de empacotamento de retângulos em uma folha A4	37

Lista de siglas

A seguir, segue-se as siglas utilizadas nesta dissertação.

Profmat Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional;

UFMT Universidade Federal de Mato Grosso;

ICET Instituto de Ciências Exatas e da Terra;

DMAT Departamento de Matemática.

Sumário

Introdução	1
1 Empacotamento de retângulos em polígonos	4
1.0.1 Definições	7
1.0.2 Modelo de Programação Inteira Mista	11
1.0.3 Equações para o Empacotamento de Quadrados em Poliedros	15
2 Experimentos numéricos	20
2.1 Solver GLPK	20
2.1.1 JuMP	21
2.2 Algoritmo	22
2.2.1 Interpretação dos domínios no contexto do empacotamento de retângulos	24
3 Problemas de corte no ensino da otimização	29
3.1 Proposta 1: Corte de retângulos em uma folha de papel A4	31
3.1.1 Tema da aula:	31
3.1.2 Objetivos Gerais	31
3.2 Desenvolvimento do tema	32
3.2.1 Primeiro Momento	33
3.2.2 Segundo Momento	35
3.2.3 Terceiro Momento	37
3.2.4 Resultados	39
4 Considerações finais	41
Bibliografia	45

Anexo I 46

Anexo II 48

Introdução

O ensino da Matemática, quando aliado a abordagens práticas e visuais, pode proporcionar uma aprendizagem mais significativa e engajadora para os alunos. Nesse contexto, a proposta deste trabalho está baseada no empacotamento de retângulos em uma folha A4 que surge como uma estratégia didática eficiente para explorar conceitos fundamentais da Álgebra e Geometria.

Este estudo propõe um modelo de programação linear inteira para otimizar o arranjo de retângulos dentro de um domínio poligonal predefinido. O problema consiste em determinar a melhor distribuição dessas figuras geométricas, permitindo rotações de noventa graus, com o intuito de maximizar o aproveitamento da área disponível, respeitando as restrições impostas por inequações lineares.

A abordagem desenvolvida busca solucionar desafios ligados à eficiência no uso do espaço, levando em conta limitações geométricas e a viabilidade das soluções geradas. Para isso, diferentes configurações de empacotamento são analisadas a fim de identificar a organização mais eficaz dos retângulos dentro da área definida. O modelo proposto possibilita a exploração de estratégias de otimização e sua aplicação em contextos práticos, auxiliando na solução de problemas relacionados à alocação eficiente de recursos e ao planejamento espacial.

O problema de empacotamento consiste em encontrar maneiras de organizar figuras geométricas dentro de um espaço delimitado, minimizando desperdícios e otimizando o aproveitamento da área disponível [5]. Essa abordagem favorece o desenvolvimento do pensamento lógico e da visualização espacial, competências essenciais para a compreensão de problemas matemáticos complexos.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos, o primeiro capítulo traz os principais conceitos do problema de empacotamento de polígonos, que busca fundamentar a abordagem proposta, sendo essencial estabelecer um arcabouço teórico sólido por meio da definição formal de conceitos fundamentais, demonstrações matemáticas e

a formulação de lemas sobre o empacotamento de polígonos. Esse capítulo teórico possibilita a formalização precisa do problema, evitando ambiguidades e fornecendo um referencial rigoroso para a análise dos resultados. Além disso, as demonstrações matemáticas permitem validar propriedades importantes, como limites superiores e inferiores da ocupação da área, garantindo que as soluções obtidas sejam consistentes e bem fundamentadas. A formulação de lemas auxilia na generalização dos resultados, permitindo a aplicação do modelo a outros formatos geométricos e variantes do problema, como empacotamento tridimensional ou restrições adicionais. Além de seu papel teórico, essa estruturação também serve como referência para a implementação computacional, assegurando que os algoritmos desenvolvidos sigam as definições matemáticas estabelecidas. Dessa forma, a relação entre teoria e prática se mantém coesa, permitindo a comparação eficiente com outras abordagens da literatura e facilitando a análise da eficiência do modelo proposto.

O segundo capítulo aborda o empacotamento de retângulos em polígonos, apresentando a abordagem de programação utilizando a linguagem Julia, uma linguagem de alto nível. A implementação do modelo de empacotamento de retângulos em polígonos contará com o uso de bibliotecas especializadas, como JuMP e GLPK, para a resolução do modelo matemático, além de pacotes de visualização, como Plots.jl, para representar graficamente os resultados obtidos. A utilização de Julia proporcionará maior eficiência computacional e flexibilidade na formulação e solução do problema. São apresentadas as soluções geradas pelo algoritmo para a quantidade máxima de retângulos que podem ser empacotados em uma folha A4, bem como a quantidade máxima de retângulos que podem ser empacotados em uma folha triangular com área de $311,84 \text{ cm}^2$.

O terceiro capítulo traz uma proposta didática, sendo realizada em *in loco*, adotando uma abordagem qualitativo-quantitativa, fundamentada nas ideias de Filho e Gamboa [14] e tem como objetivo principal incentivar os alunos a explorarem diferentes configurações para a disposição dos retângulos na folha A4, analisando as possibilidades de preenchimento máximo do espaço. Durante essa atividade, conceitos como área, proporção e porcentagem são trabalhados de forma prática e contextualizada, permitindo uma aprendizagem mais concreta. Além disso, o problema estimula a formulação de hipóteses, a experimentação e a validação de estratégias, tornando o processo de ensino mais rico, investigativo e interativo.

O quarto e último capítulo trata das considerações finais, ressaltando como a utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática amplia as possibilidades de experimentação e análise, possibilitando a criação de cenários variados para a resolução do problema proposto. A proposta de ensino baseada no empacotamento de retângulos

em uma folha A4, aliada a linguagem Julia, não apenas favorece o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais, mas também promove a interdisciplinaridade, integrando conceitos de programação e modelagem computacional ao ensino da Geometria. Essa abordagem inovadora contribui para a formação de estudantes mais críticos e autônomos, capazes de analisar problemas de forma sistemática e propor soluções eficientes. Assim, a Matemática deixa de ser apenas um conjunto de regras e fórmulas abstratas e passa a ser vista como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas do cotidiano e para a tomada de decisões fundamentadas.

No Anexo I, são apresentadas um roteiro breve das atividades desenvolvidas ao longo do trabalho. No Anexo II, são apresentadas as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [10] que se pretende contemplar com o desenvolvimento de cada atividade.

Empacotamento de retângulos em polígonos

Os problemas de corte e empacotamento são encontrados em diversas áreas industriais, com o objetivo comum de otimizar a utilização de material. Nesses problemas, um objeto maior, geralmente retangular é dividido em peças menores, também retangulares com dimensões específicas. A indústria de papel e plástico, por exemplo, enfrenta o desafio de cortar grandes rolos em folhas menores, enquanto a madeira busca transformar toras em tábuas de medidas padronizadas. Na metalurgia, a otimização ocorre no corte de barras em peças menores, e na indústria têxtil, na divisão de rolos de tecido em moldes para confecção de roupas [13]. Em todos esses casos, o objetivo é maximizar a quantidade de peças obtidas, minimizando o desperdício de material e consequentemente, os custos de produção.

Diante da importância desse tipo de problema em aplicações reais, a matemática e a ciência da computação oferecem modelos e técnicas para otimização do uso do espaço. No contexto educacional, explorar esses desafios por meio de experimentos e jogos pode tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente. Os professores frequentemente buscam novas metodologias para aprimorar o ensino de matemática e a introdução de problemas de corte e empacotamento no ambiente escolar pode estimular o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos geométricos e algorítmicos. Assim, apresenta-se o seguinte problema:

Problema 1.0.1. *Dada uma folha de papel A4 com dimensões padrão (21cm x 29,7cm), determina-se o padrão de corte ótimo que maximiza a quantidade de retângulos com dimensões w e h (em centímetros), permitindo translações e rotações de 90 graus.*

No processo de solução do problema 1.0.1 utilizando o método de tentativa e erro,

podem ser destacadas as seguintes etapas que contribuem para o aprendizado:

1. Identificação de combinações de cortes: A geração de todas as possíveis formas de corte da folha de papel apresenta desafios significativos, devido à ampla gama de alternativas.
2. Medição da área aproveitada: Em cada tentativa é necessário calcular a área total ocupada pelos retângulos, o que permite avaliar a eficiência de cada padrão de corte.
3. Comparação de soluções: A análise comparativa das soluções obtidas possibilita a identificação daquela que maximiza a utilização da área disponível, minimizando o desperdício e aproximando-se da solução ideal.

Apesar disso, é importante ressaltar que ao utilizar o método de tentativa e erro, é pouco provável encontrar a solução ótima que maximiza a área utilizada e minimiza o desperdício de material. Essa dificuldade se deve à natureza NP-completa desse tipo de problema [8], portanto, encontrar a solução exata de forma eficiente é um desafio.

Estudos amplamente documentados sobre corte e empacotamento de retângulos em domínios convexos, como os apresentados em [1], [9] e [3], enfatizam a modelagem do problema por meio de programação linear inteira. Esses trabalhos abordam domínios convexos, definidos como aqueles nos quais qualquer segmento de reta entre dois pontos está contido no domínio, considerando translações e rotações de 90 graus. O objetivo principal é otimizar o uso do material e minimizar o desperdício, especialmente em aplicações industriais.

Este trabalho concentra-se no problema de maximizar a quantidade de retângulos idênticos que podem ser empacotados em um contêiner, com foco na redução do desperdício em problemas de corte. Consideram-se translações e rotações de 90 graus para os retângulos. Problemas relacionados, como o empacotamento de retângulos com dimensões distintas ou outros tipos de itens, têm sido amplamente estudados na literatura [1], [4], [6]. Diversas abordagens heurísticas têm sido desenvolvidas para resolver problemas de corte e empacotamento [2], [6]. A modelagem matemática desses problemas apresenta desafios intrínsecos, devido à geometria do contêiner ou domínio e aos movimentos permitidos. Ademais, a eficácia do modelo matemático está diretamente vinculada às hipóteses assumidas, como destacado em [4] e [3].

Neste capítulo abordaremos sobre empacotamento de retângulos em polígonos que é um problema de otimização que envolve a disposição de um conjunto de retângulos dentro de um polígono, de forma que eles não se sobreponham e otimizem o espaço seguindo

algum critério. Esse tipo de problema aparece em diversas aplicações, como design de embalagens, corte de materiais, alocação de espaço e planejamento urbano.

O problema de empacotamento de retângulos em polígonos é uma questão clássica de otimização combinatória e geometria computacional. Ele surgiu no contexto de aplicações práticas e teóricas relacionadas ao uso eficiente de espaço. O problema apareceu inicialmente em situações práticas, como no corte de materiais (madeira, papel, tecido, metal) em fábricas, onde era necessário minimizar o desperdício ao cortar peças retangulares de um estoque de material com formato poligonal. Outro exemplo está na organização de cargas em contêineres ou veículos de transporte, onde a eficiência no empacotamento reduz custos e melhora a logística.

Na década de 1950 e 1960, com o surgimento dos computadores, problemas de otimização começaram a ser formalizados matematicamente. O problema de empacotamento de retângulos foi analisado como uma extensão de problemas de empacotamento clássico (como o problema da mochila e o problema de corte de estoque). Ele também aparece no design de circuitos integrados na microeletrônica, onde componentes retangulares devem ser posicionados dentro de áreas poligonais com restrições espaciais e elétricas. O problema também tem raízes em pesquisas matemáticas sobre a otimização de recursos e disposição geométrica. Ele foi formalizado como um problema de programação linear inteira ou não linear em muitos casos.

Quando se discute sobre o empacotamento manual é necessário seguir alguns passos, como por exemplo: Definir o polígono; Listar os retângulos; Escolher uma estratégia; Colocar em ordem de tamanhos; Rotação; Preencher o polígono; e as Interações possíveis.

Para o empacotamento por programação, as linguagens e ferramentas comuns são: Python, C++, ou Java. Porém, neste trabalho utilizaremos a linguagem Julia, que é uma linguagem de programação poderosa para resolver problemas de otimização e geometria.

Para usar o Julia é necessário instalar alguns pacotes, definir o polígono, listar os retângulos, criar um modelo de otimização, resolver o problema e visualizar o resultado. Assim, brevemente os códigos utilizados são: o JuMP, o GLPK e o PLOTS.JL. O JuMP é usado para configurar as variáveis (posições e rotações) e adicionar restrições. O GLPK resolve o problema de otimização linear. O Plots.jl desenha o polígono e os retângulos encaixados.

O presente trabalho busca maximizar a quantidade de retângulos idênticos que podem ser empacotados em um contêiner, que é um caso clássico de problemas de corte e empacotamento. Nesse contexto, o objetivo principal é minimizar o desperdício (ou maximizar o aproveitamento do material) ao organizar retângulos idênticos em um espaço delimitado.

O empacotamento de polígonos, quando adaptado para a educação básica, pode ser uma ferramenta poderosa para ensinar conceitos fundamentais de matemática, geometria e pensamento lógico.

1.0.1 Definições

Seja o sistema de m equações lineares com n incógnitas:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \quad (1.1)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \quad (1.2)$$

$$\vdots \quad (1.3)$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \leq b_m \quad (1.4)$$

Definição 1.0.1. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaz as inequações (1.1) a (1.4) do sistema é chamado de solução do sistema conjuntivo.

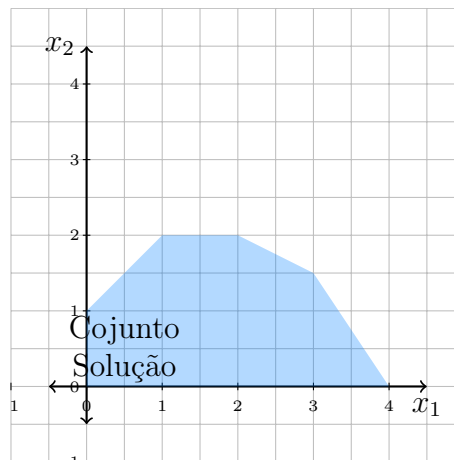


Figura 1.1: Sistema Conjuntivo

Definição 1.0.2. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaz ao menos uma inequação (1.1) a (1.4) do sistema é chamado de solução do sistema disjuntivo.

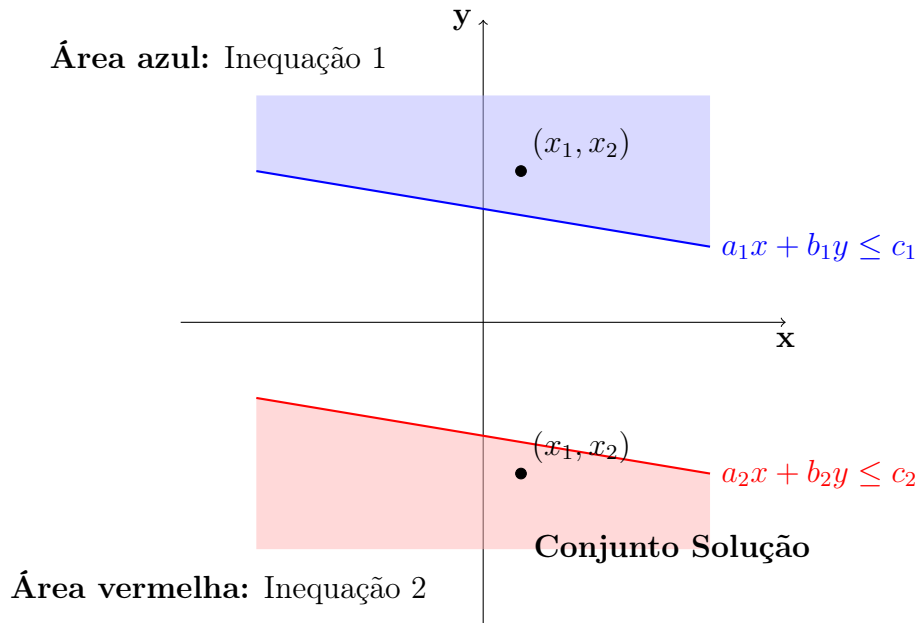


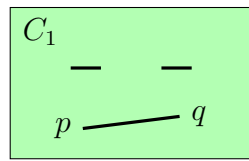
Figura 1.2: Sistema disjuntivo

A definição apresentada descreve um sistema de inequações lineares em que um conjunto de variáveis deve satisfazer todas as desigualdades estabelecidas. No contexto do empacotamento de retângulos, esse sistema de equações lineares pode ser interpretado como um modelo para garantir que os retângulos sejam dispostos corretamente dentro de um espaço determinado, respeitando restrições de tamanho e posição. Cada variável pode representar a ocupação ou a posição de um retângulo dentro do domínio disponível, enquanto os coeficientes das inequações impõem restrições para assegurar que os retângulos permaneçam dentro dos limites do espaço e não se sobreponham. Assim, a solução do sistema representa uma configuração viável na qual os retângulos estão devidamente alocados sem violar as restrições impostas.

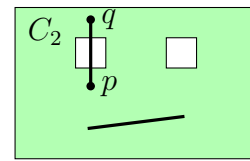
No problema de empacotamento de retângulos, onde é necessário organizar retângulos dentro de um espaço limitado sem sobreposição, podemos utilizar uma formulação baseada em sistemas disjuntivo e conjuntivo para representar as restrições e soluções.

Definição 1.0.3. Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto convexo se para quaisquer $p, q \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se $\alpha p + (1 - \alpha)q \in C$.

O conjunto vazio, o plano \mathbb{R}^2 , e o conjunto que contém um ponto são conjuntos convexos.



(a) Conjunto convexo



(b) Conjunto não convexo

Figura 1.3: O conjunto C_1 1.3(a) é um conjunto convexo, pois qualquer segmento de reta está contido em C_1 . Contudo, o conjunto C_2 1.3(b) não é convexo, uma vez que o segmento que une p e q não está contido em C_2 .

A definição 1.0.3 caracteriza um conjunto como convexo se, para quaisquer dois pontos dentro desse conjunto, o segmento de reta que os liga também estiver inteiramente contido nele. No contexto do empacotamento de retângulos, essa propriedade tem implicações importantes na forma como os espaços disponíveis são modelados e utilizados.

Se considerarmos um espaço onde os retângulos devem ser alocados, um conjunto convexo representa uma região na qual qualquer posição intermediária entre dois pontos possíveis de alocação também é viável. Isso significa que não há barreiras ou restrições dentro desse espaço que impeçam a movimentação ou a continuidade do empacotamento.

A imagem 1.3(a) ilustra um conjunto convexo, no qual qualquer segmento entre dois pontos pertence à mesma região. Isso sugere que os retângulos podem ser posicionados sem encontrar restrições internas. Já a imagem 1.3(b) mostra um conjunto não convexo, onde existem áreas inacessíveis ou bloqueadas, como obstáculos ou espaços já ocupados. Nesse caso, a disposição dos retângulos pode ser mais complexa, exigindo soluções que respeitem essas discontinuidades no espaço disponível.

Ao lidar com o empacotamento de retângulos em polígonos, a convexidade do espaço de alocação pode simplificar ou complicar o problema. Um espaço convexo permite estratégias mais diretas de posicionamento, enquanto espaços não convexos exigem algoritmos mais sofisticados para evitar sobreposições e garantir um uso eficiente da área disponível.

Definição 1.0.4. *Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é limitado, quando existe $M > 0$ tal que $\|p\| \leq M$ para todo $p \in C$.*

Essa definição trata da limitação de um subconjunto C em \mathbb{R}^n , ou seja, ela estabelece que existe um valor finito M tal que a norma de qualquer ponto p pertencente a C não ultrapassa esse limite. Em outras palavras, o conjunto C está contido dentro de uma região de raio M , garantindo que ele não se estenda indefinidamente.

No contexto de um problema de empacotamento de retângulos em polígonos, essa definição pode ser interpretada da seguinte forma:

O conjunto C representa a região poligonal onde os retângulos devem ser acomodados. A limitação imposta por M indica que todos os retângulos devem estar contidos dentro desse domínio, sem ultrapassá-lo. Em um problema prático, M pode representar uma medida máxima de largura ou altura disponível no polígono para o empacotamento.

Isso garante que a solução do problema de empacotamento respeite um limite espacial, evitando que retângulos sejam posicionados fora dos contornos do polígono. Portanto, essa definição ajuda a estabelecer uma restrição fundamental para a viabilidade do empacotamento: todos os retângulos devem estar contidos dentro dos limites do polígono, respeitando um tamanho máximo definido por M .

Definição 1.0.5. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. O fecho convexo de C , denotado $\text{conv}(C)$, é o menor subconjunto convexo em \mathbb{R}^n que contém C (ou, equivalentemente, a interseção de todos os conjuntos convexos em \mathbb{R}^n que contém C).*

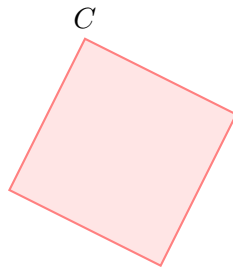


Figura 1.4: Fecho convexo de C

A definição apresentada refere-se ao fecho convexo de um conjunto C em \mathbb{R}^n , que é o menor subconjunto convexo que contém C . Isso significa que o fecho convexo de C é a menor região convexa que engloba todos os pontos de C , podendo ser visto como a interseção de todos os conjuntos convexos que contém C . No caso de dois pontos p e q no plano \mathbb{R}^2 , o fecho convexo é simplesmente o segmento de reta entre eles.

No contexto de empacotamento de retângulos em polígonos, o conceito de fecho convexo tem implicações diretas. Se um conjunto de retângulos estiver distribuído dentro de um domínio poligonal, o fecho convexo desse conjunto define a menor região convexa que os contém. Isso pode ser usado para determinar limites para a disposição dos retângulos, garantindo que um certo grupo de peças caiba dentro de uma área mínima convexa. Além disso, se o domínio onde os retângulos devem ser empacotados não for convexo, trabalhar com seu fecho convexo pode ajudar a aproximar soluções, especialmente quando estratégias de otimização consideram restrições geométricas mais simples. Em problemas de corte e empacotamento, entender o fecho convexo pode auxiliar

na criação de heurísticas para o posicionamento eficiente dos retângulos dentro de uma região, reduzindo espaços vazios e melhorando o aproveitamento do material.

Definição 1.0.6. *Seja $P \subset R^2$ um conjunto limitado e convexo. Dado uma sequência de retângulos $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, dizemos que sequência \mathcal{P} é um empacotamento ou corte em P se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $R_i \subset P$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, cada retângulo R_i está completamente contido em P .
2. A interseção entre quaisquer dois retângulos é vazia, ou seja, $A(R_i \cap R_j) = 0$ para todo $i \neq j$, onde $A(\cdot)$ denota a área da interseção dos retângulos.

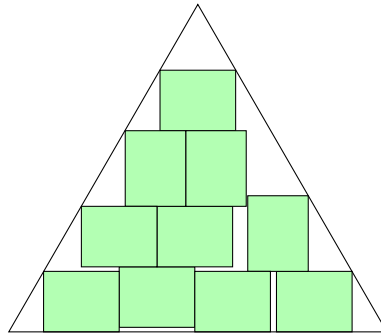


Figura 1.5: Quadrados em triângulo equilátero

O conjunto P é denominado domínio de corte ou empacotamento, é geralmente descrito por um sistema de inequações lineares ou não lineares. No restante deste trabalho, assumiremos que P é descrito por um número finito de inequações lineares, isto é, P é um polígono. Em problemas de otimização de corte ou empacotamento de retângulos, o objetivo principal é, dado um domínio P , determinar o empacotamento que maximize a quantidade de retângulos dispostos no interior do domínio P . A formulação desse problema pode ser expressa da seguinte forma:

$$\max\{m \in Z \mid \{R_1, R_2, \dots, R_m\} \text{ é um empacotamento de } P\}$$

1.0.2 Modelo de Programação Inteira Mista

Seja R_1, \dots, R_m um conjunto de m retângulos, cada um definido por sua largura w_i , altura h_i e centro (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, m$; o problema consiste em encontrar a configuração

mais eficiente de cortá-los ou empacotá-los, permitindo translações em qualquer direção e rotação de noventa graus.

Considere um retângulo com dimensões w e h . Para modelar a rotação, introduzimos uma variável binária r , isto é, que assume os valores 0 ou 1. A variável r indica se o retângulo está na orientação original ($r = 0$) ou rotacionado em noventa graus no sentido anti-horário ($r = 1$). As variáveis que assumem valores binários e representam escolhas entre duas alternativas são comumente denominadas variáveis binárias ou disjuntivas.

Desta forma, podemos definir a transformação de noventa graus no sentido anti-horário da seguinte maneira:

$$w_r = (1 - r)w + rh, \quad (1.5)$$

$$h_r = rw + (1 - r)h. \quad (1.6)$$

Quando $r = 0$, não temos rotação, pois:

$$w_0 = w, \quad (1.7)$$

$$h_0 = h. \quad (1.8)$$

Quando $r = 1$, temos a rotação de noventa graus, pois:

$$w_1 = w, \quad (1.9)$$

$$h_1 = h. \quad (1.10)$$

Essas escolhas são mutuamente exclusivas, ou seja, o retângulo não pode estar simultaneamente nas duas orientações, como a figura 1.5.

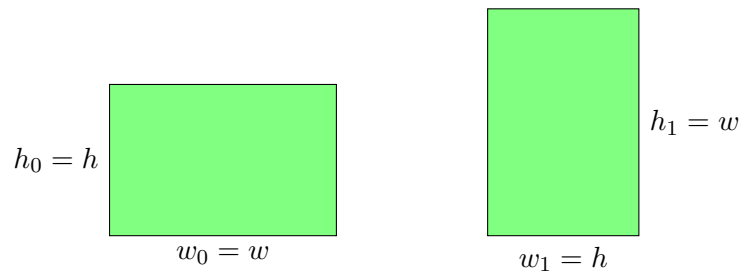


Figura 1.6: Retângulo com rotação de noventa graus

Consideremos um empacotamento de R_1, R_2, \dots, R_m em um domínio P . Para modelar as duas possíveis orientações, horizontal ou vertical, de cada retângulo, definem-se as variáveis binárias r_1, r_2, \dots, r_m para cada retângulo R_1, R_2, \dots, R_m , respectivamente, obtendo-se m variáveis binárias e as rotações possíveis do retângulo.

$$w_i = (1 - r_i)w + r_i h \quad (1.11)$$

$$h_i = r_i w + (1 - r_i)h \quad (1.12)$$

onde $i = 1, \dots, m$.

Para determinar se um retângulo de dimensões w e h pode ser considerado um corte viável ou um empacotamento dentro do domínio P , é necessário verificar se todos os seus vértices estão contidos no interior do domínio. Caso o domínio seja definido por inequações algébricas, essa verificação equivale a assegurar que os vértices do retângulo satisfaçam as inequações que descrevem o domínio P .

Lema 1.0.7. *Um retângulo R_i de vértices $v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}, v^{i,pn}$, está contido no domínio P se, e somente se, todos os vértices do retângulo R_i estão contidos no domínio P , isto é $v_i, l \in P$, para todo $l \in \{pp, np, nn, pn\}$ onde*

$$v^{i,pp} = \left(x_i + \frac{w_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}\right) \quad (1.13)$$

$$v^{i,np} = \left(x_i - \frac{w_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}\right) \quad (1.14)$$

$$v^{i,nn} = \left(x_i - \frac{w_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2}\right) \quad (1.15)$$

$$v^{i,pn} = \left(x_i + \frac{w_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2}\right) \quad (1.16)$$

Demonstração. Por hipótese, o domínio P é um conjunto convexo e cada retângulo R_i é um conjunto convexo limitado que possui quatro vértices, portanto, se os vértices $v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}, v^{i,pn}$ do retângulo estão no conjunto P , o fecho convexo também está contido em P , e

$$R_i = \text{conv}(\{v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}, v^{i,pn}\}) \subset P \quad (1.17)$$

Embora a condição de que todos os vértices de um retângulo estejam contidos em um domínio seja necessária para que o retângulo esteja completamente dentro do domínio, ela não é suficiente. A convexidade do domínio é fundamental para garantir a inclusão total do retângulo no domínio.

Para garantir um corte ou empacotamento válido, é essencial que não haja sobreposição

entre os retângulos. Para isso, estabelecem-se condições algébricas que determinam se dois retângulos se intersectam. Fixando um retângulo R_i , considera-se as diferentes posições de outro retângulo de modo que não haja sobreposição, conforme ilustrado na Figura 1.7, assegurando que a área da sobreposição seja nula.

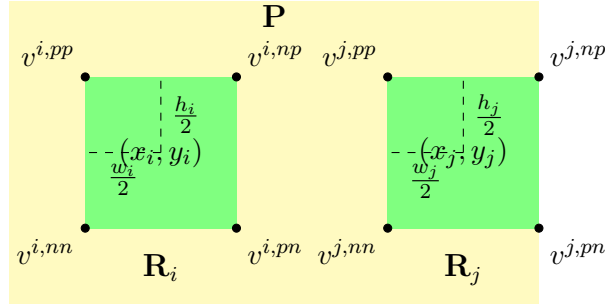


Figura 1.7: Sobreposição e inclusão

Lema 1.0.8. *Dado um par de retângulos R_i e R_j , não há sobreposição entre eles se, e somente se, uma das seguintes inequações for satisfeita:*

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) \leq x_i - x_j, \forall i < j, \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) \leq x_j - x_i, \forall i < j, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) \leq y_i - y_j, \forall i < j, \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) \leq y_j - y_i, \forall i < j, \quad (1.21)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstração. Dado um retângulo R_i , com centro em (x_i, y_i) , consideramos quatro possíveis translações para outro retângulo R_j , com centro em (x_j, y_j) . Com respeito à separação dos retângulos na direção do eixo x . Se o retângulo R_j estiver à direita do retângulo R_i , para evitar sobreposição, a distância é maior ou igual à metade da soma das larguras dos dois retângulos, isto é, deve-se satisfazer a inequação (1.19), conforme mostrado na Figura (1.7). Outra possibilidade é a translação de R_j para o lado esquerdo do retângulo R_i , a distância dos centros é maior ou igual a metade da soma das larguras dos dois retângulos, neste caso R_i está completamente à direita de R_j , caso em que a inequação (1.18) deve ser satisfeita. Similarmente, com respeito ao movimento do retângulo R_j em relação ao eixo y , se R_j estiver acima de R_i , a distância vertical deve ser maior que a

média das alturas, conforme a inequação (1.21). Da mesma forma, se R_j estiver abaixo de R_i , a inequação (1.20) deve ser satisfeita.

O lema 1.0.8 fornece uma forma algébrica de determinar se dois retângulos se sobrepõem. No entanto, como apenas uma das restrições precisa ser satisfeita para garantir a não sobreposição, a verificação da não sobreposição de um conjunto de retângulos envolve a resolução de um sistema de restrições disjuntivas, a saber, as inequações (1.18)(1.19) (1.20) e (1.21).

1.0.3 Equações para o Empacotamento de Quadrados em Poliedros

Quando restrições impõem a escolha de uma única condição entre várias alternativas, empregam-se variáveis binárias e o método M-grande. As variáveis binárias indicam a condição selecionada em cada solução, enquanto o método M-grande permite reformular restrições inativas, tornando-as irrestritas.

Exemplo 1.0.9. *Seja o conjunto Ω um subconjunto limitado do plano euclidiano definido pelas restrições disjuntivas:*

$$ax + by \leq 0 \tag{1.22}$$

$$cx + dy \leq 0, \tag{1.23}$$

onde $x, y \geq 0$. Como o conjunto Ω é limitado, existe $M > 0$ tal que:

$$ax + by \leq M \tag{1.24}$$

$$cx + dy \leq M. \tag{1.25}$$

para todo (x, y) em Ω .

Para que somente uma das restrições (1.22) ou (1.23) seja satisfeita, define-se a variável binária r tal que:

$$ax + by \leq M \cdot r \tag{1.26}$$

$$cx + dy \leq M \cdot (1 - r). \tag{1.27}$$

Como resultado, obtém-se um sistema (1.26 - 1.27) com variáveis $x, y \in \Omega$ reais e $r \in \{0, 1\}$ binárias.

Teorema 1.0.10. *O conjunto de retângulos $\{R_1, \dots, R_m\}$ de lados w_i e h_i é um empacotamento ou corte no domínio P se, e somente se, existe $M > 0$ talque:*

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq Mq_{ij}^{xp}, \quad \forall i < j \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq Mq_{ij}^{xn}, \quad \forall i < j \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq Mq_{ij}^{yp}, \quad \forall i < j \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq Mq_{ij}^{yn}, \quad \forall i < j \quad (1.31)$$

$$q_{ij}^{xp} + q_{ij}^{xn} + q_{ij}^{yp} + q_{ij}^{yn} = 3, \quad \forall i < j \quad (1.32)$$

$$v^{i,l}(x_i, y_i) \in P, \quad \forall l = 1, 2, 3, 4. \quad (1.33)$$

sendo $q_{i,j}^k \in \{0, 1\}$, $(x_i, y_i) \in \mathfrak{R}^2$ e os vértices do retângulo R_i estão contidos no domínio, isto é: $v^{i,l}(x_i, y_i) \in P, \forall l \in \{pp, np, nn, pn\}$.

Demonstração. Seja R_i com $i = 1, \dots, m$, um empacotamento ou corte e $(x_i, y_i) \in P$ os centros dos retângulos, de lados w_i e h_i . Como P é um conjunto limitado, então o conjunto definido pelas restrições (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) é limitado, por tanto existe um número $M > 0$ tal que satisfaz as restrições lineares conjuntivas.

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq M, \quad \forall i < j \quad (1.34)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) - x_i + x_j \leq M, \quad \forall i < j \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) + y_i - y_j \leq M, \quad \forall i < j \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) - y_i + y_j \leq M, \quad \forall i < j \quad (1.37)$$

Pelo lema 1.0.8, apenas uma das inequações (1.18),(1.19),(1.20),(1.21) é verdadeira. Assim, existe uma variável binária $q_{i,j}^l$ para indicar se a inequação é verdadeira ou não, sendo $q_{i,j}^l = 0$ se é verdadeira e $q_{i,j}^l = 1$ caso contrário. Desta forma, obtemos as restrições (1.29),(1.28),(1.31),(1.30). Como os retângulos estão contidos no domínio, em particular os vértices pertencem ao domínio P .

Reciprocamente, as inequações (1.29),(1.28),(1.31),(1.30) e a equação de ativação (1.32), garantem que não existe sobreposição, por tanto $A(R_i \cap R_j) = 0$, e o lema 1.0.7, assegura que a sequência de retângulos é um empacotamento ou corte no domínio P .

Como consequência do Teorema 1.0.10, para verificar a viabilidade de um determinado

corte ou empacotamento, reduz-se o problema à verificação da satisfação de um conjunto de restrições conjuntivas com variáveis mistas, reais e inteiros. Conseqüentemente, a eficiência na busca por um empacotamento é determinada pela existência de um modelo matemático adequado e o método usado para resolver restrições mistas.

O principal desafio em problemas de corte consiste em maximizar a quantidade de cortes, minimizando o desperdício. Essa otimização, por sua vez, implica um aumento no número de itens m , e, conseqüentemente, no número de restrições a serem verificadas. No caso particular da verificação de sobreposição, é necessário resolver um sistema linear com $3m$ variáveis, e

$$\frac{5}{2}m(m - 1) \tag{1.38}$$

restrições, e

$$4km \tag{1.39}$$

restrições para verificar a inclusão, sendo k o numero de restrições que determina o domínio. Na Figura 1.8, observa-se o crescimento quadrático do número de restrições.

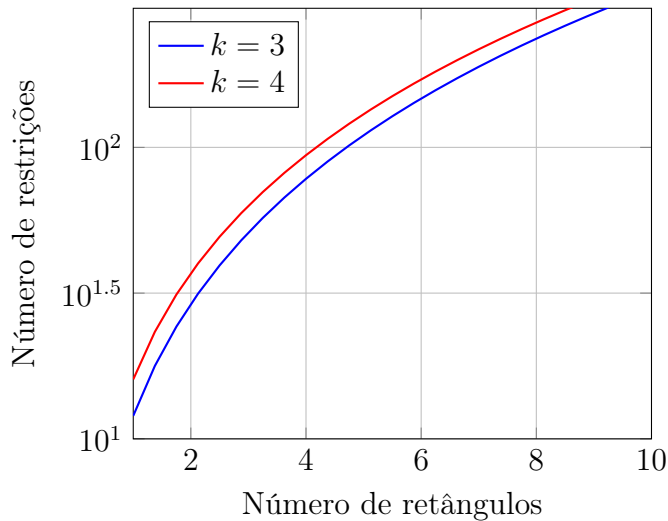


Figura 1.8: $\frac{5}{2}m(m - 1) + 4km$

Limitante Superior para o Número de Retângulos

O problema de corte consiste em determinar a melhor maneira de dividir uma peça maior (o domínio) em peças menores (retângulos) de forma a minimizar o material desperdiçado. Em outras palavras, busca-se maximizar o número de retângulos que podem ser acomodados dentro do domínio, permitindo rotações de noventa graus, mas encontrar o

número máximo não é uma tarefa fácil, pois é necessário resolver as restrições disjuntivas.

Considerando um domínio P e retângulos com lados w_i e h_i , é possível calcular um limitante superior para o número de itens que pode ser obtido. De fato:

$$R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m \subset P$$

$$mA(R_1) \leq A(P), \text{ pois } A(R_1) = A(R_j), \forall j = 2 \dots m$$

$$m \leq \frac{A(P)}{wh}, A(R_1) = wh$$

$$m \leq \left\lfloor \frac{A(P)}{wh} \right\rfloor \quad (1.40)$$

Para determinar esse limite, considera-se que cada retângulo possui largura w e altura h . Se a área do domínio P for dada por $A(P)$, o número máximo de retângulos que podem ser inseridos sem sobreposição é limitado pela razão entre a área total disponível e a área de um único retângulo:

$$m \leq \frac{A(P)}{wh}$$

Essa relação expressa que, na melhor das hipóteses, o número total de retângulos não pode ultrapassar o valor obtido dividindo a área do domínio pela área de um retângulo. No entanto, como m deve ser um número inteiro e não pode haver frações de retângulos, utiliza-se a função piso (ou parte inteira inferior), representada por $\lfloor \cdot \rfloor$ para garantir que o resultado seja um número inteiro:

$$m \leq \left\lfloor \frac{A(P)}{wh} \right\rfloor$$

Esse limite superior representa a melhor ocupação teórica do espaço, ou seja, um cenário ideal onde o empacotamento dos retângulos consegue utilizar todo o domínio sem desperdícios. Entretanto, na prática, o número real de retângulos que podem ser inseridos

pode ser menor, pois a forma do domínio e restrições geométricas podem impedir um empacotamento perfeito. Isso ocorre porque, mesmo que a área total permita determinado número de retângulos, pode não ser possível organizá-los de maneira que preencham o espaço de forma eficiente.

Portanto, valor (1.40) representa um limite superior para o número de retângulos que podem ser empacotados no domínio. A igualdade só é atingida quando é possível aproveitar 100% do espaço disponível.

Experimentos numéricos

Neste capítulo buscamos demonstrar um método que consiste em um algoritmo guloso que busca maximizar o número de retângulos de dimensões fixas (largura w e altura h) que podem ser cortados em uma folha maior, considerando rotações de noventa graus. O algoritmo inicia com um retângulo e incrementa esse número iterativamente, isto é, fazemos $m \leftarrow m + 1$, até que não seja mais possível acomodar os m retângulos dentro da folha, isto é: o sistema (1.29),(1.28),(1.31),(1.30) não tem solução factível, e definimos como solução ótima igual a: $m - 1$.

2.1 Solver GLPK

O GLPK (GNU Linear Programming Kit) é uma biblioteca e um solver de programação linear e inteira, desenvolvida como parte do projeto GNU. Ele é usado para resolver problemas de otimização, onde o objetivo é minimizar ou maximizar uma função linear, sujeita a restrições lineares.

Desenvolvido como parte do projeto GNU, o GLPK oferece uma solução robusta e eficiente para otimização matemática, sendo empregado em diversas áreas como logística, alocação de recursos, corte e empacotamento, e otimização de processos industriais.

A programação linear e inteira é essencial para modelar problemas onde é necessário encontrar um valor ótimo (máximo ou mínimo) de uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. No caso da programação linear inteira, algumas ou todas as variáveis precisam assumir valores inteiros, o que torna o problema mais complexo e computacionalmente desafiador.

As principais características do GLPK se destaca por sua versatilidade e eficiência,

possuindo várias características que o tornam uma escolha popular para resolver problemas de otimização.

O Método Simplex é utilizado para resolver problemas de programação linear de forma eficiente. O Método do Ponto Interior é mais adequado para problemas de grande escala. Já o Branch-and-Bound é uma técnica usada para resolver problemas de programação inteira, explorando todas as possíveis soluções inteiras e descartando aquelas que não levam a uma solução ótima.

O GLPK pode ser utilizado diretamente por meio de sua API em linguagem de programação C, mas também possui interfaces para outras linguagens populares como Python (via PyGLPK), Julia (via JuMP), R, e Java, permitindo uma ampla gama de aplicações. Ele é um Software Livre e de Código Aberto.

Sendo parte do projeto GNU, o GLPK é um software open-source, disponível gratuitamente e com possibilidade de modificações conforme a necessidade dos usuários.

Devido à sua capacidade de resolver problemas complexos de otimização, o GLPK é amplamente utilizado em diferentes domínios.

2.1.1 JuMP

JuMP é um pacote da linguagem de programação Julia para modelagem e resolução de problemas de otimização. Ele fornece uma interface de alto nível para resolver problemas de otimização linear, inteira, quadrática e não linear, permitindo que você descreva de maneira clara e concisa problemas de otimização matemática. O JuMP é amplamente utilizado por sua flexibilidade e desempenho, além de ser compatível com diversos solvers de otimização.

Uma das grandes vantagens do JuMP é sua compatibilidade com uma ampla gama de solucionadores de otimização, como o GLPK, tornando-o uma opção flexível para diferentes aplicações e possibilitando sua utilização em diversas áreas do conhecimento, incluindo logística, finanças, engenharia e inteligência artificial.

Além disso, o JuMP é altamente otimizado para a linguagem Julia, o que proporciona uma modelagem rápida e eficiente, aproveitando ao máximo os recursos computacionais disponíveis. Ele permite não apenas a formulação de problemas, mas também a análise dos resultados, oferecendo funcionalidades para inspeção de variáveis, análise de sensibilidade e ajustes nos modelos.

Na prática, o JuMP tem sido amplamente utilizado para resolver desafios complexos, como planejamento de produção, alocação de recursos, otimização de rotas e redes, design de sistemas elétricos e modelagem de portfólios financeiros. Sua integração com outras bibliotecas da linguagem Julia facilita ainda mais a implementação de soluções robustas,

possibilitando o uso combinado com pacotes de visualização, estatística e aprendizado de máquina.

```
using JuMP
using GLPK
# Criando um modelo de otimização
model = Model(GLPK.Optimizer)
# Definindo as variáveis
@variable(model, x >= 0)
@variable(model, y >= 0)

# Definindo a função objetivo
@objective(model, Max, 3x + 2y)

# Definindo as restrições
@constraint(model, x + y <= 4)
@constraint(model, x - y >= 1)

# Resolvendo o modelo
optimize!(model)

# Obtendo os resultados
println("Status: ", termination_status(model))
println("Valor ótimo de x: ", value(x))
println("Valor ótimo de y: ", value(y))
println("Valor da função objetivo: ", objective_value(model))
```

2.2 Algoritmo

Os domínios considerados para os experimentos são: um retângulo de largura W e altura H (Figura 2.1), um triângulo retângulo (Figura 2.2) e um triângulo isósceles (Figura 2.3). Nestes três casos, o domínio é descrito por restrições lineares, permitindo a utilização de um solver de programação linear mista. No entanto, a abordagem pode ser estendida a qualquer domínio convexo.

Sejam P_1, P_2 e P_3 domínios definidos como:

$$P_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left| \begin{array}{l} -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2} \end{array} \right. \right\} \quad (2.1)$$

$$P_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left| \begin{array}{l} -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ -\frac{H}{W} x + y \leq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (2.2)$$

$$P_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left| \begin{array}{l} -\frac{H}{2} \leq y \\ -\frac{2H}{W} x + y \leq \frac{H}{2} \\ \frac{2H}{W} x + y \leq \frac{H}{2} \end{array} \right. \right\} \quad (2.3)$$

Para a validação experimental, foram consideradas as dimensões padrão de uma folha A4, com largura $W = 21,0$ cm e altura $H = 29,7$ cm. A partir dessa folha, foram definidos diferentes domínios geométricos, como um triângulo retângulo, um triângulo isósceles e outras formas poligonais convexas. Esses domínios estão representados nas Figuras 2.1(a), 2.1(b) e 2.1(c), e servirão como base para os experimentos numéricos apresentados ao longo deste trabalho.

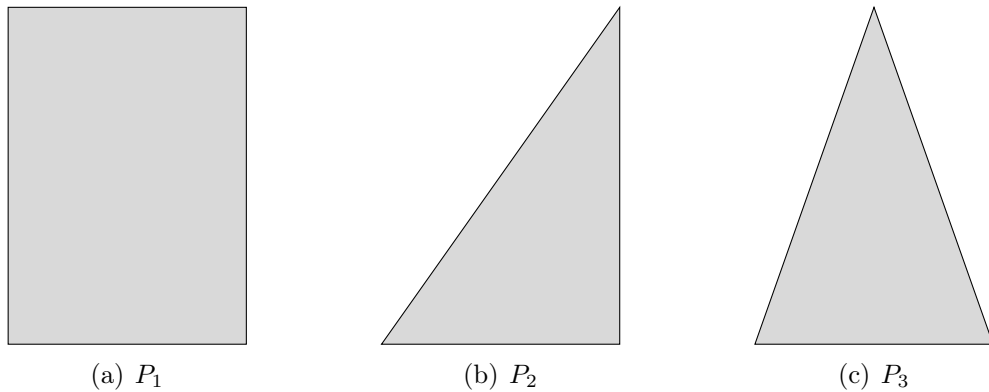


Figura 2.1: Representação dos domínios convexas P_1, P_2 e P_3 , utilizados em problemas de corte e empacotamento.

Os itens 2.1, 2.2 e 2.3 descrevem três domínios geométricos convexas — um retângulo (P_1), um triângulo retângulo (P_2) e um triângulo isósceles (P_3) que são utilizados como regiões de empacotamento para retângulos menores. O objetivo é organizar esses retângulos dentro dos domínios sem sobreposição, maximizando o aproveitamento do

espaço disponível e minimizando perdas.

2.2.1 Interpretação dos domínios no contexto do empacotamento de retângulos

O domínio P_1 é definido pelo conjunto de pontos (x, y) que satisfazem as restrições:

1. Esse domínio representa um espaço retangular dentro do qual os retângulos menores devem ser posicionados.
2. Como suas bordas são paralelas aos eixos cartesianos, os retângulos podem ser organizados de maneira simples, formando uma grade regular.

O domínio P_2 é definido por:

1. Esse domínio corresponde a um triângulo retângulo com uma base horizontal e uma hipotenusa inclinada.
2. O empacotamento de retângulos aqui é mais complexo porque os retângulos não podem ultrapassar a fronteira inclinada, exigindo cortes adaptados ao formato triangular.
3. Estratégias como empilhar retângulos maiores na base e menores próximos à hipotenusa podem ser usadas para minimizar espaços vazios.

O domínio P_3 é definido pelas restrições:

1. Esse domínio representa um triângulo isósceles onde as laterais convergem para um vértice superior.
2. O empacotamento aqui é ainda mais desafiador porque a região útil diminui à medida que se sobe no triângulo.
3. Retângulos menores são mais adequados para preencher as áreas superiores, enquanto os maiores devem ser alocados na base.

Habilidade Contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): [EM13MAT405](#)

A fim de garantir a viabilidade computacional dos experimentos, estabelecemos um tempo máximo de execução de 10 minutos para a resolução de cada instância do sistema disjuntivo.

A Figura 2.2 apresenta alguns exemplos de soluções obtidas pelo algoritmo.

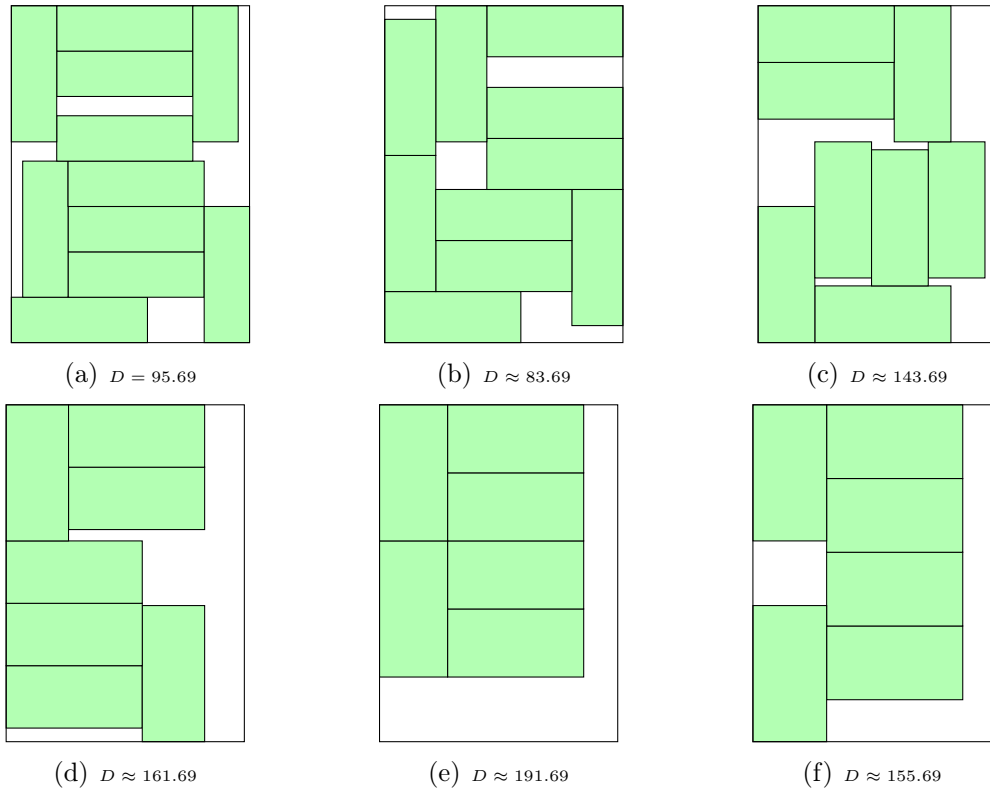


Figura 2.2: Corte ótimo de uma folha A4 P_1 , com dimensões $W = 21.0$ cm $H = 29.7$ cm.

Assim, a Figura 2.2 apresenta seis soluções distintas geradas por um algoritmo heurístico. Cada solução mostra um arranjo diferente dos retângulos menores dentro da folha, destacando em verde as partes aproveitadas e deixando em branco as áreas desperdiçadas. As soluções variam em eficiência devido à natureza heurística do algoritmo, ou seja, não garantem um resultado ótimo, mas buscam boas soluções aproximadas.

Em cada solução encontrada, calcularam-se a área total do domínio, a área efetivamente utilizada nos cortes e a área de material não aproveitada, ou seja, o desperdício. A Tabela 2.1 apresenta um resumo dos resultados obtidos para todas as soluções avaliadas. A melhor solução, que minimiza o desperdício, foi encontrada utilizando retângulos com dimensões de $12\text{cm} \times 4,5\text{cm}$, resultando em um desperdício de $83,69\text{ cm}^2$, com uma densidade de aproveitamento de $86,58\%$ conforme apresentado na Figura 2.2(b).

Já outras configurações, como a da Figura 2.2(e), apresentaram maior desperdício $191,69\text{cm}^2$ e uma densidade inferior $69,95\%$, mostrando que o arranjo dos retângulos impacta significativamente a eficiência do corte.

A Tabela 2.1 detalha os resultados dessas configurações, listando:

1. Corte: referência à figura correspondente na Figura 2.2.
2. Base e altura: dimensões dos retângulos utilizados na solução.
3. Solução: número de retângulos empacotados na configuração.
4. Desperdício: área não aproveitada na folha (em *cm*).
5. Densidade: percentual da área da folha efetivamente utilizada.
6. Limitante: um valor de referência para avaliar a qualidade da solução.

Corte	Base	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
2.2(a)	12	4	11	95.69	84.66%	12.99
2.2(b)	12	4.5	10	83.69	86.58%	11.54
2.2(c)	12	5	8	143.69	76.95%	10.39
2.2(d)	12	5.5	7	161.69	74.95%	9.45
2.2(e)	12	6	6	191.69	69.95%	8.66
2.2(f)	12	6.5	6	155.69	75.03%	7.99

Tabela 2.1: Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_1 , com dimensões $W = 21,0\text{ cm}$ e $H = 29,7\text{ cm}$.

Esse estudo é essencial para otimizar processos industriais, onde cada centímetro de material economizado pode representar uma grande redução de custos ao longo da produção.

Assim, o problema 1.0.1 tem a solução mais eficiente considerando os casos adotados, aquela em que retângulos empacotados apresentam dimensões de $12\text{ cm} \times 4,5\text{ cm}$.

A Figura 2.3 apresenta uma análise do corte de retângulos dentro de um domínio triangular P_2 , cujo objetivo é maximizar o aproveitamento da área disponível e minimizar o desperdício, são apresentados seis diferentes arranjos gerados pelo solver GLPK, onde os retângulos preenchidos em verde representam as áreas utilizadas e os espaços em branco indicam o desperdício. Cada solução busca organizar os retângulos dentro do triângulo de maneira eficiente, levando em consideração diferentes dimensões dos retângulos.

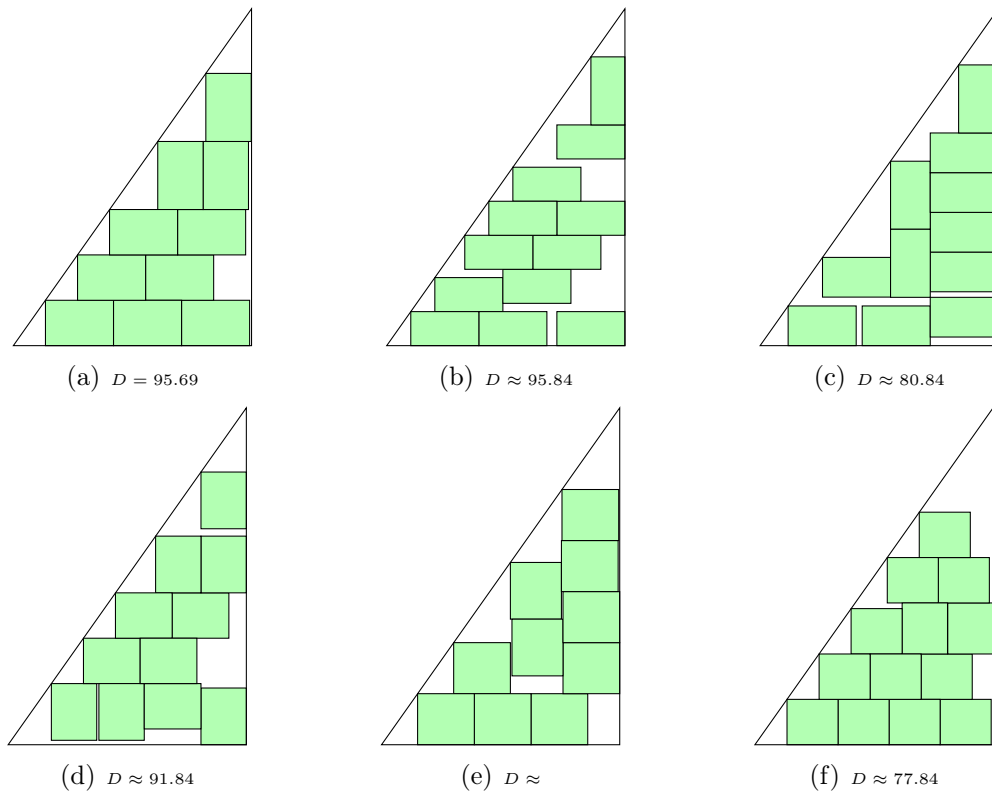


Figura 2.3: Corte de uma folha triangular P_2 com área 311.84

Corte	Largura	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
2.3(a)	6	4	10	71.84	76.95%	12.99
2.3(b)	6	3	12	95.84	69.30%	17.32
2.3(c)	6	2.5	11	80.84	74.08%	14.84
2.3(d)	5	4	11	91.84	70.56%	15.59
2.3(e)	5	4.5	10	86.84	72.22%	13.85
2.3(f)	4.5	4.0	13	77.84	75.03%	17.32

Tabela 2.2: Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_2 , com dimensões $W = 21,0\text{ cm}$ e $H = 29,7\text{ cm}$

Os resultados da Tabela 2.2 indicam que a configuração representada pela Figura 2.3(a) foi a mais eficiente, com 76,95% da área do triângulo utilizada e um desperdício de $71,84\text{ cm}^2$. Em contraste, outras configurações, como a da Figura 2.3(b), apresentaram maior desperdício $95,84\text{ cm}^2$ e uma densidade inferior 69,30%. Esses valores mostram que a escolha das dimensões dos retângulos influencia diretamente no aproveitamento da área.

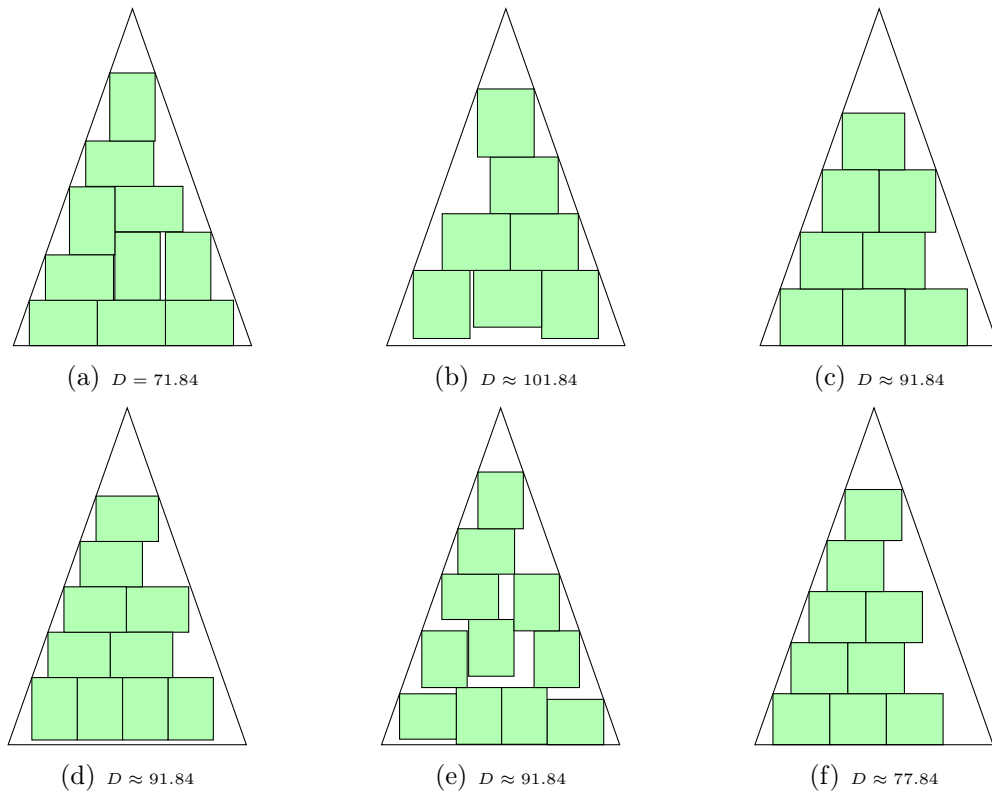


Figura 2.4: Corte um domínio triangular P_3 com área 311.84

Corte	Largura	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
2.4(a)	6	4	10	71.84	76.95%	12.99
2.4(b)	6	5	7	101.84	67.35%	10.39
2.4(c)	5.5	5	8	91.84	70.56%	11.33
2.4(d)	5.5	4	10	91.84	70.56%	14.17
2.4(e)	5	4	11	91.84	70.56%	15.59
2.4(f)	5	4.5	9	109.34	64.94%	13.85

Tabela 2.3: Resultados obtidos para o domínio P_3 com área de 311,84.

Em um triângulo isósceles, a configuração de corte que maximizou o aproveitamento do material, conforme demonstrado na Tabela 2.3 e na Figura 2.4(a), resultou em um aproveitamento de 76,93%. E o maior desperdício ocorreu na Figura 2.4(f), com $109,34\text{cm}^2$ e com densidade inferior a 64,94%.

Os códigos-fonte completos em Julia dos algoritmos e modelos apresentados neste trabalho podem ser acessados no repositório <https://github.com/hector-fc/packrec/>.

Problemas de corte no ensino da otimização

À medida que se debate a relevância do ensino da matemática formal nas escolas e suas aplicações no cotidiano, surge a necessidade de considerar o conhecimento prévio dos alunos, ou seja, aquilo que já sabem e aprenderam. Nesse contexto, o planejamento do professor deve levar em conta esses saberes, buscando identificar formas de enriquecer o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e ampliar sua compreensão da matemática.

Os problemas de empacotamento aparecem em diversas áreas do dia a dia e profissões, como na logística e transporte, auxiliando como empilhar caixas em um caminhão da forma mais eficiente. Na arquitetura e design, usado para distribuir móveis em um espaço pequeno. E ainda no comércio e sustentabilidade, para reduzir desperdícios no corte de tecidos ou papel.

Para compreender melhor a construção do conhecimento matemático, a teoria das etapas do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget oferece contribuições valiosas.

De acordo com Piaget In [11], a construção do conhecimento ocorre por meio de diferentes estágios: adaptação, organização, assimilação, acomodação e equilíbrio majorante. Um exemplo desse processo pode ser observado na aprendizagem de um aluno ao se deparar com novos conceitos. Inicialmente, ele se adapta ao conteúdo apresentado, relacionando-o com conhecimentos prévios. Em seguida, organiza as informações para assimilá-las. Ao alcançar uma compreensão mais profunda do tema, ele passa pelo processo de acomodação. Por fim, ao explorar exemplos e diferentes situações sobre o assunto, consegue formular soluções, demonstrando que atingiu o estágio de equilíbrio majorante.

Neste sentido, as propostas apresentadas estão alinhadas às Diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [10]. Nesse cenário, evidencia-se a relevância da incorporação de recursos tecnológicos como instrumentos capazes de potencializar e qualificar o processo de ensino e aprendizagem.

A BNCC [10] traz em seu escopo Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio e afirma:

"Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente"

Dessa forma, pretende-se criar oportunidades para o desenvolvimento de estratégias que, além de diversificar a rotina das aulas, contribuam para reduzir dificuldades e facilitar a assimilação de conhecimentos na área da matemática.

Nesse contexto, os problemas de empacotamento que não têm uma única solução, pode ser visualizado como um desafios aos alunos da educação básica, onde estes são incentivados a experimentar diferentes estratégias, testar hipóteses e aprender com os erros, tornando-se mais criativos na abordagem de desafios.

Buscamos neste trabalho evidenciar como problemas de empacotamento na educação básica torna a matemática mais prática, envolvente e significativa, preparando os alunos para desafios futuros e estimulando um aprendizado mais ativo e dinâmico.

Ao analisar os problemas de empacotamento, percebemos que estes envolvem conceitos matemáticos fundamentais, como área, perímetro, transformações geométricas, proporção e escala.

Para introduzir a proposta de atividades vamos utilizar a Metodologia de Resolução de Problemas. Segundo Polya [12], a resolução de problemas pode ser conduzida por meio de quatro etapas fundamentais que favorecem o desenvolvimento do raciocínio matemático. A primeira etapa consiste na compreensão do problema, momento em que o estudante deve ler atentamente o enunciado, identificar as informações fornecidas, o que está sendo solicitado e quais são os dados relevantes para a resolução. Em seguida, passa-se à elaboração de um plano, em que o aluno traça estratégias possíveis, relaciona o problema a situações semelhantes previamente resolvidas e escolhe o caminho mais adequado para alcançar a solução. A terceira etapa é a execução do plano, fase em que a estratégia escolhida é colocada em prática, por meio de cálculos, representações, testes ou esquemas. Por fim, ocorre a revisão e verificação, quando o estudante analisa criticamente a solução obtida, confere se ela responde ao que foi proposto inicialmente e considera outras formas possíveis de resolução, estimulando a reflexão e o aprimoramento do próprio processo.

A BNCC [10] reconhece a metodologia de resolução de problemas como um dos eixos estruturantes do ensino de Matemática. Essa abordagem é valiosa por promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da capacidade de argumentação, além de estimular a criatividade e a autonomia dos estudantes. Ao colocar o aluno como protagonista de sua aprendizagem, a resolução de problemas contribui diretamente para o desenvolvimento de diversas competências gerais previstas no documento. Além disso, a metodologia favorece a interdisciplinaridade e aproxima os conteúdos escolares da realidade dos estudantes, tornando a aprendizagem mais significativa. Como destaca a própria BNCC [10]:

"... resolver e elaborar problemas, compreendendo que o raciocínio matemático se desenvolve a partir da busca de soluções para situações-problema, com ou sem o uso de recursos tecnológicos."

A proposta destacada nesta pesquisa é baseada em sequências didáticas que em suma, como explica Dolz, [7], é composta por um conjunto de atividades articuladas entre si, planejadas para conduzir os alunos ao desenvolvimento de determinadas competências. Essas atividades são organizadas de forma coerente, levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e buscando promover avanços na aprendizagem.

Com base nas diretrizes dos documentos oficiais, apresentamos a seguir uma proposta de atividades que promovem a integração entre Matemática e Tecnologia. Essa proposta é voltada para o Ensino Médio e foi elaborada de forma flexível, permitindo sua adaptação a diferentes séries, conforme as necessidades e o contexto de cada turma.

3.1 Proposta 1: Corte de retângulos em uma folha de papel A4

3.1.1 Tema da aula:

Otimizando o uso do papel: Como aproveitar melhor uma folha A4?

3.1.2 Objetivos Gerais

Desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolução de problemas dos alunos, aplicando conceitos geométricos para otimizar o uso do espaço em uma folha A4. Além disso, busca-se fomentar o trabalho em grupo, estimular a criatividade e a inovação, e explorar a importância da otimização de recursos no cotidiano. A aula também visa

desenvolver habilidades de análise e revisão, incentivando os alunos a refletirem sobre suas soluções e considerar alternativas mais eficientes.

3.2 Desenvolvimento do tema

O experimento terá como público alvo, alunos do 1º ano do Ensino Médio, com duração aproximada de 6h aulas de 45 minutos, utilizamos como recursos, folhas de papel A4 ($21\text{ cm} \times 29,7\text{ cm}$), régua, tesoura, lápis ou canetas coloridas, modelos de retângulos impressos desenhados com diferentes dimensões.

A sequência didática sobre problemas de empacotamento de retângulos em uma folha A4 tem como objetivo principal desenvolver o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos matemáticos fundamentais, como área, perímetro, frações, multiplicação e divisão do espaço. Os estudantes são desafiados a planejar diferentes formas de organizar os retângulos dentro da folha, explorando estratégias para minimizar desperdícios e otimizar o uso do espaço disponível. Além disso, a sequência didática permite que os alunos resolvam problemas de otimização, testando diferentes configurações e justificando suas escolhas com base em argumentos matemáticos.

Essa abordagem busca aproximar a matemática do cotidiano, relacionando o empacotamento de retângulos com situações reais, como o corte de materiais, a organização de embalagens e a logística. Ao longo do processo, os alunos trabalham de forma colaborativa, discutindo estratégias e comparando soluções, o que contribui para o desenvolvimento da argumentação matemática e do pensamento crítico. Dessa forma, a sequência didática não apenas aprimora o conhecimento matemático, mas também estimula habilidades de resolução de problemas e tomada de decisão.

A Sequência Didática foi desenvolvida para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, baseada em Resolução de Problemas aliada à Engenharia Didática. Suas atividades incluem análises preliminares, que consideram os principais obstáculos epistemológicos do conceito trabalhado, bem como as concepções e dificuldades dos alunos. A Sequência Didática foi organizada em três etapas. A primeira envolve um diagnóstico para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre áreas. Na segunda, são desenvolvidas atividades que auxiliam na construção desse conceito. Por fim, a terceira etapa propõe uma avaliação para verificar as aprendizagens adquiridas ao longo do processo.

A realização desta pesquisa envolveu a participação de alunos do 1º ano do Ensino Médio, pertencentes a uma turma na qual leciono Matemática. Essa turma faz parte de uma Escola Estadual localizada em Mato Grosso. A pesquisa foi realizada de forma in loco, adotando uma abordagem qualitativo-quantitativa, fundamentada nas ideias de

Filho e Gamboa 1995, que afirmam que os dados de uma pesquisa, quando analisados dentro de um contexto social, podem ir além da interpretação quantitativa, incorporando também uma análise qualitativa [14]. Durante a pesquisa, foram aplicadas atividades que faziam parte de uma sequência didática previamente elaborada e detalhada.

3.2.1 Primeiro Momento

Habilidade Contemplada: [EM13MAT201](#)

Inicialmente, foi realizada um diálogo com os alunos com o objetivo de explicar o que é um problema de empacotamento e sua aplicabilidade, em diversas indústrias (como marcenaria, costura e gráfica), em que é preciso cortar peças de formatos específicos aproveitando ao máximo o material disponível. Mostramos a folha de papel A4 e perguntamos: "Como podemos cortar o maior número possível de retângulos sem desperdício?".

Esse tema conecta o problema matemático a uma questão ecológica e prática do dia a dia. Os alunos podem explorar estratégias para reduzir desperdícios ao recortar formas em uma folha de papel, relacionando isso com a economia de recursos na indústria gráfica, na confecção de embalagens ou até mesmo no corte de tecidos na moda e na costura

Nesta primeira fase da sequência didática, exploramos o conceito de áreas, especificamente, área de retângulos. A turma foi organizada em duplas para favorecer as possíveis discussões. E a área uma folha A4 foi dada como um problema em questão.

Os alunos discutiram entre si qual seria o tamanho aproximado da área de uma folha A4. Posteriormente, foi indicado a eles as dimensões de 21cm de largura e $29,7\text{cm}$ de comprimento. A partir do conceito de área de retângulo, eles calcularam sua área correspondente, chegando ao resultado de $623,7\text{cm}^2$.

Seguidamente, foi proposto que eles calculassem as áreas de três retângulos com as dimensões de $12\text{cm} \times 4\text{cm}$, $12\text{cm} \times 5\text{cm}$ e $12\text{cm} \times 6\text{cm}$, respectivamente, conforme a Tabela 3.1.

Dimensões do Retângulo (cm)	Cálculo da Área	Área (cm^2)
$12\text{ cm} \times 4\text{ cm}$	12×4	48 cm^2
$12\text{ cm} \times 5\text{ cm}$	12×5	60 cm^2
$12\text{ cm} \times 6\text{ cm}$	12×6	72 cm^2

Tabela 3.1: Cálculo das áreas dos retângulos

Na segunda fase, os alunos deveriam considerar e associar os cálculos executados na primeira fase para responder alguns problemas.

Problemas Propostos:

1. Quantos retângulos de **12 cm** × **4 cm** cabem em uma folha A4?
2. Quantos retângulos de **12 cm** × **5 cm** cabem em uma folha A4?
3. Quantos retângulos de **12 cm** × **6 cm** cabem em uma folha A4?

Os alunos fizeram algumas apostas sobre a quantidade de retângulos que caberiam na folha A4 para cada uma das situações propostas. E adiante executaram alguns cálculos, considerando apenas números inteiros como resultados possíveis, como demonstra a Tabela 3.2.

Dimensões (cm)	Área (cm²)	Máx. Retângulos na A4
12 × 4	48	12
12 × 5	60	10
12 × 6	72	8

Tabela 3.2: Quantidade máxima de retângulos que cabem em uma folha A4

Analisando os cálculos efetuados, foi pedido aos alunos que indicassem em qual situação consideravam que havia melhor aproveitamento da folha A4, e a resposta foi unanime, indicando o caso do retângulo de dimensões 12cm x 4cm, visto que era possível acondicionar mais quantidade de retângulos com essas dimensões.

Após algumas discussões, os alunos iniciaram os cálculos para verificar em qual situação realmente ocorria melhor aproveitamento da folha A4. Como eles estavam estudando o componente curricular sobre proporção e percentuais, recorreram a porcentagens para verificar a área ocupada em cada um dos casos. Para cada situação eles consideraram a área ocupada pela quantidade máxima de retângulos que era possível empacotar na folha A4, conforme Tabela 3.3.

Caso	Cálculo	Resultado Aproximado (%)
1	$\frac{48 \times 12}{623.7}$	92%
2	$\frac{60 \times 10}{623.7}$	96%
3	$\frac{72 \times 8}{623.7}$	92%

Tabela 3.3: Aproveitamento de retângulos em uma folha A4

Ao analisar os cálculos executados, fizeram a correspondência de quanto mais próximo de 100%, maior seria a área ocupada pelos retângulos, contrariando a resposta dada inicialmente, visto que a maior cobertura era realizada no caso da dimensão 12cm x 5cm, ocupando uma área aproximada de 96% da folha A4.

3.2.2 Segundo Momento

Habilidades contempladas: [EM13MAT201](#) e [EM13MAT307](#)

Na atividade seguinte, cada dupla de alunos recebeu uma folha A4 e um retângulo de dimensões 12cm x 4cm, cujo objetivo era empacotar 12 retângulos como projetado nos cálculos. Fizeram várias tentativas, dispondo os retângulos na vertical e horizontal, porém conseguiram encaixar no máximo 11 retângulos.

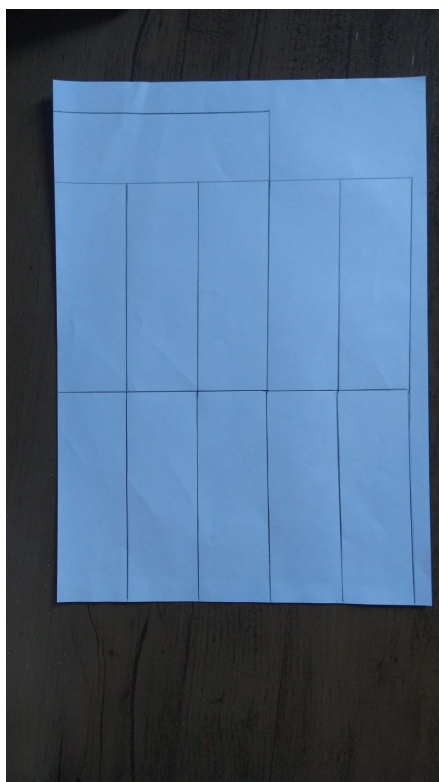


Figura 3.1: Retângulos 12cm x 4cm

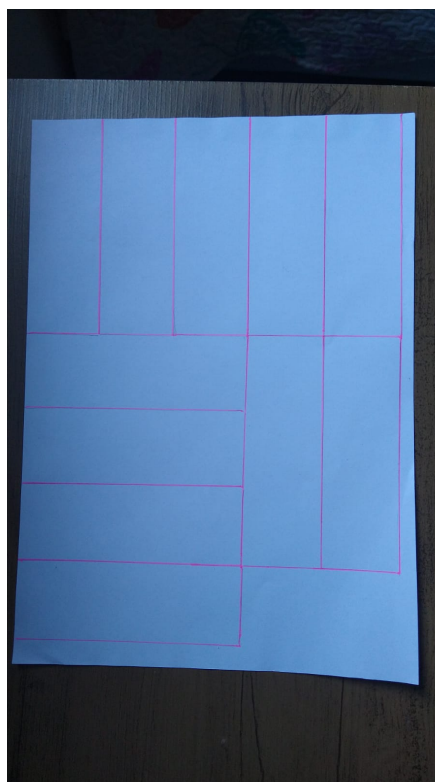


Figura 3.2: Retângulos 12cm x 4cm

As Figuras 3.1 e 3.2, demonstram que as duplas de alunos chegaram em soluções semelhantes, cada dupla pensou em uma disposição de retângulos diferente, porém ambas conseguiram acondicionar 11 retângulos na folha A4.

Posteriormente, receberam uma folha A4 e um retângulo de dimensões 12cm x 5cm, cujo objetivo era empacotar 10 retângulos, porém após algumas tentativas conseguiram empacotar no máximo 9 retângulos.

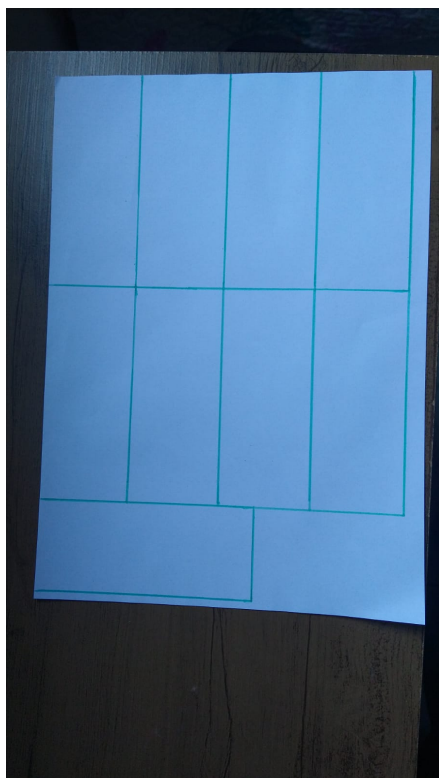


Figura 3.3: Retângulos 12cm x 5cm

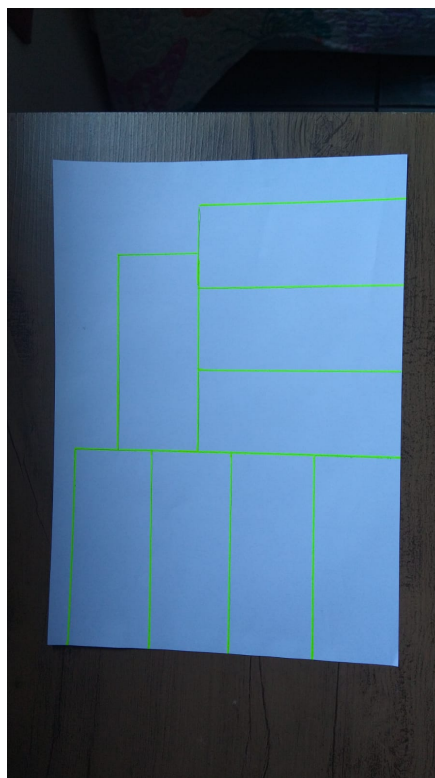


Figura 3.4: Retângulos 12cm x 5cm

Na Figura 3.3, a dupla de alunos conseguiu empacotar 9 retângulos, organizando-os na vertical e horizontal, na Figura3.4, a dupla conseguiu encaixar apenas 8 retângulos.

Por fim, receberam uma folha A4 e um retângulo de dimensões 12cm x 6cm, cujo objetivo era empacotar 8 retângulos, porém conseguiram empacotar apenas 6 retângulos.

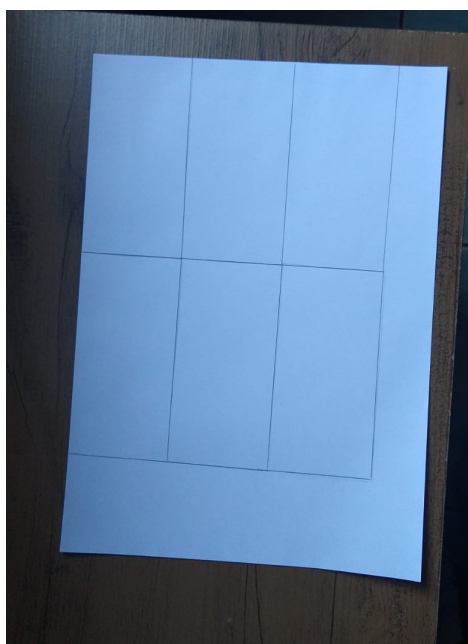


Figura 3.5: Retângulos 12cm x 6cm

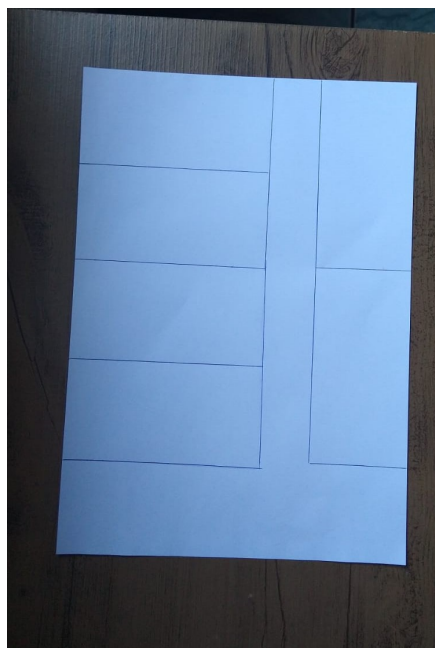


Figura 3.6: Retângulos 12cm x 6cm

As Figuras 3.5 e 3.6 demonstram que os alunos pensaram em disposições diferentes, porém, ambas as duplas conseguiram empacotar 6 retângulos.

Em seguida, fizeram cálculos sobre a área efetivamente ocupada, chegando aos resultados da Tabela 3.4.

Caso	Cálculo	Resultado Aproximado (%)
1	$\frac{48 \times 11}{623.7}$	84,6%
2	$\frac{60 \times 9}{623.7}$	86,5%
3	$\frac{72 \times 6}{623.7}$	69,2%

Tabela 3.4: Resultados dos cálculos de empacotamento de retângulos em uma folha A4

3.2.3 Terceiro Momento

Habilidades contempladas: [EM13MAT307](#) e [EM13MAT301](#)

Ao comparar os resultados nas tabelas 3.3 e 3.4, os alunos perceberam que o aproveitamento da área no caso concreto de cortes é menor do que os resultados obtidos inicialmente.

Na atividade seguinte os alunos deveriam responder por que as áreas obtidas nas Tabelas 3.3 e 3.4 eram divergentes. Eles apontaram que o problema estaria na disposição

da folha, se pudesse por exemplo, recortar e colar as sobras daria para empacotar mais retângulos.

Assim, o problema 1.0.1, tem a melhor solução considerando as dimensões trabalhadas pelos alunos aquela que apresenta retângulos de dimensões $12\text{cm} \times 5\text{cm}$.

A terceira etapa da sequência didática consistia em uma avaliação, sendo realizada em três momentos distintos, garantindo com que os alunos pudessem refletir sobre o processo, compreender os conceitos envolvidos e aplicar seus conhecimentos na prática.

A avaliação diagnóstica foi realizada nas atividades iniciais na qual os alunos exploraram o conceito de cálculo de áreas e disposição de figuras geométricas em um espaço limitado. Essa etapa permitiu identificar o conhecimento prévio dos estudantes e suas possíveis dificuldades em relação ao conceito de otimização de espaço e aproveitamento de material.

Durante o desenvolvimento da sequência, foi utilizada uma avaliação formativa, com registros das estratégias utilizadas pelos alunos para organizar os retângulos na folha A4. Os estudantes foram incentivados a justificar suas escolhas e discutir alternativas para otimizar o espaço disponível. Além disso, foi proposto desafios progressivos, como modificar a orientação dos retângulos ou considerar cortes e recombinações para melhor aproveitamento da área. Como professora pude acompanhar o processo por meio da observação direta e do estímulo à argumentação matemática, verificando a evolução da compreensão dos alunos.

Ao final da sequência, a avaliação somativa foi realizada por meio de uma atividade prática e de uma reflexão sobre as atividades trabalhadas. Na atividade prática, os alunos deveriam organizar um determinado número de retângulos de diferentes dimensões em uma folha A4, registrando suas estratégias e cálculos. Já na reflexão, os estudantes responderam a questões como: "Por que os resultados teóricos e práticos podem ser diferentes?", "O que poderia ser feito para melhorar o aproveitamento da área?" e "Quais estratégias foram mais eficazes no empacotamento dos retângulos?". Essa etapa permitiu avaliar a capacidade dos alunos de aplicar os conceitos aprendidos, além de sua habilidade de análise e argumentação.

Por fim, a avaliação incluiu um momento de autoavaliação e avaliação por pares, no qual os estudantes puderam refletir sobre seus próprios avanços e trocar percepções com os colegas. Esse processo buscou incentivar a autonomia e o pensamento crítico, consolidando a aprendizagem de forma mais significativa.

3.2.4 Resultados

O ensino da matemática usando empacotamento de retângulos em uma folha A4 se destaca pela importância desse tipo de abordagem, pois proporciona aos alunos uma experiência prática e significativa no aprendizado de conceitos fundamentais. A atividade permitiu que os estudantes compreendessem, de forma concreta, a relação entre cálculos matemáticos e sua aplicação em problemas do mundo real, além de estimular habilidades como raciocínio lógico, organização espacial e resolução de problemas.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos foram incentivados a fazer previsões, testar hipóteses, realizar cálculos e comparar resultados, o que contribuiu para uma aprendizagem mais reflexiva e investigativa. A possibilidade de manipular fisicamente os cortes da folha A4 ajudou a reforçar os conceitos matemáticos abordados e tornou o processo mais dinâmico e interativo.

Além disso, a atividade favoreceu a discussão sobre a otimização do uso de recursos e a minimização de desperdícios, temas relevantes tanto para a matemática quanto para outras áreas do conhecimento e do cotidiano. Os desafios encontrados ao longo do processo, como a dificuldade em encaixar os retângulos de forma eficiente ou a discrepância entre os cálculos teóricos e a prática concreta, serviram como oportunidades valiosas para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos alunos na resolução de problemas.

Com base nos resultados e na análise realizada, concluímos que o problema 1.0.1 não tem apenas uma solução ótima, pois depende das restrições impostas pelas dimensões dos retângulos a serem empacotados. Assim, foi possível determinar soluções eficientes dentro de cada caso analisado, tanto pelo algoritmo quanto pelos alunos na prática. Portanto o empacotamento de retângulos pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de matemática, integrando conceitos teóricos e aplicações práticas por meio de programação e experimentação. O uso da linguagem Julia se mostrou adequado para a modelagem do problema, enquanto a sequência didática proposta evidenciou a viabilidade da abordagem no contexto escolar. Como trabalhos futuros, sugerimos a ampliação do estudo para outras séries do ensino básico, bem como a investigação de diferentes metodologias pedagógicas que possam potencializar ainda mais o aprendizado por meio da matemática aplicada.

Dessa forma, a integração da programação na resolução de problemas matemáticos não apenas facilita a obtenção de soluções mais eficientes, mas também torna o aprendizado mais dinâmico e interativo. Os alunos conseguem visualizar a aplicação prática dos conceitos matemáticos, tornando o processo de aprendizagem mais significativo e engajador. Isso demonstra como a linguagem computacional não substitui o raciocínio humano, mas potencializa a capacidade de resolver problemas complexos de maneira mais

eficaz e estruturada.

Considerações finais

Neste trabalho, investigamos o problema do empacotamento de retângulos e sua aplicabilidade no ensino de matemática para alunos do 1^o ano do Ensino Médio. No primeiro capítulo, abordamos os conceitos fundamentais relacionados ao tema, explorando definições matemáticas, teoremas e princípios que fundamentam o estudo do empacotamento de polígonos em espaços limitados. Essa base teórica foi essencial para compreender a complexidade do problema e sua relevância tanto no contexto acadêmico quanto em aplicações práticas.

No segundo capítulo, apresentamos a implementação computacional do problema utilizando a linguagem Julia. A escolha dessa linguagem se deu por sua eficiência em cálculos matemáticos e manipulação de estruturas de dados, permitindo a execução de algoritmos de empacotamento de maneira otimizada. Foram exploradas diferentes estratégias de corte e arranjo dos retângulos em uma folha A4, analisando o desempenho das soluções propostas em termos de aproveitamento de espaço e minimização do desperdício. Os resultados obtidos demonstraram que o uso de programação computacional é uma ferramenta poderosa para a resolução desse tipo de problema.

O terceiro capítulo do trabalho foi dedicado à aplicação prática do tema no ensino médio, por meio de uma sequência didática estruturada. Os alunos foram incentivados a explorar o problema de empacotamento de retângulos como uma forma de desenvolver o raciocínio lógico e a visualização geométrica. A experiência mostrou que a abordagem ativa e experimental contribuiu significativamente para o engajamento dos estudantes, facilitando a compreensão de conceitos matemáticos como área, proporção e otimização.

A linguagem Julia, em particular, é altamente otimizada para cálculos matemáticos e manipulação de dados, tornando-se uma excelente escolha para resolver esse tipo de

problema 1.0.1. Com a implementação de algoritmos apropriados, é possível testar um grande número de combinações em um curto espaço de tempo, identificar padrões e encontrar soluções mais eficientes do que aquelas obtidas manualmente. Além disso, a programação permite modelar diferentes cenários e comparar estratégias, o que auxilia na compreensão de como diferentes abordagens impactam o resultado final.

Além da otimização do processo, esse tipo de experimento contribui significativamente para a aprendizagem matemática dos alunos. Ao trabalhar com empacotamento de retângulos, conceitos fundamentais da geometria, como área, perímetro, dimensões e proporções, são reforçados de maneira prática e aplicada. Esse tipo de abordagem estimula o desenvolvimento do pensamento crítico, uma vez que os alunos são incentivados a formular hipóteses, testar soluções e analisar seus erros para aperfeiçoar suas estratégias.

Diante dos experimentos realizados, fica evidente que a combinação entre o método exploratório dos alunos e o uso da linguagem computacional Julia potencializa a aprendizagem e a resolução de problemas de cortes e empacotamento de retângulos. A programação não apenas otimiza a busca por soluções eficientes, reduzindo o esforço manual e o tempo gasto com tentativas aleatórias, mas também contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico e matemático dos alunos.

Ao experimentar diferentes configurações manualmente, os alunos exercitam a formulação de hipóteses e o raciocínio espacial, enquanto a implementação computacional permite validar suas ideias e expandir sua compreensão por meio de simulações rápidas e precisas. Esse equilíbrio entre experimentação prática e modelagem computacional torna o aprendizado mais significativo, aproximando os conceitos matemáticos de aplicações concretas e demonstrando a importância da tecnologia na resolução de problemas reais.

Além disso, o uso da linguagem Julia e de algoritmos computacionais reforça a interdisciplinaridade entre matemática e programação, preparando os alunos para desafios que exigem análise, abstração e uso de ferramentas digitais. Ao integrar esses elementos ao ensino, proporcionamos uma experiência mais rica e alinhada às demandas do mundo atual, onde a capacidade de resolver problemas de forma estruturada e eficiente é cada vez mais valorizada. Dessa forma, iniciativas como essa demonstram o grande potencial da computação para enriquecer o ensino e transformar a maneira como os alunos interagem com a matemática.

Dessa forma, conclui-se que o empacotamento de retângulos em uma folha A4 é uma estratégia pedagógica eficaz para o ensino de conceitos matemáticos, permitindo que os alunos aprendam de maneira ativa e participativa. A experiência reforça a importância de metodologias que valorizam a experimentação e a construção do conhecimento por meio da exploração e da análise de situações reais, contribuindo para um ensino mais

significativo e motivador.

E ainda, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [10], esse tipo de atividade está alinhado às competências gerais da Matemática, especialmente no que diz respeito à utilização de conhecimentos geométricos para compreender e atuar sobre o mundo real, como previsto nas habilidades do Ensino Médio, tais como a Habilidade [EM13MAT301](#), que propõe a resolução de problemas por meio da modelagem e análise de situações reais. Além disso, essa abordagem favorece a interdisciplinaridade, ao permitir a articulação entre Matemática, Tecnologia e Sustentabilidade.

Bibliografia

- [1] R. Andrade e E. G. Birgin. “Symmetry-breaking constraints for packing identical rectangles within polyhedra”. Em: *Optim. Lett.* 7.2 (2013), pp. 375–405.
- [2] N. S. Assis e S. Rangel. “Uma Heurística baseada EM programação dinâmica para o problema de corte bidimensional guilhotinado 2-estágios”. Em: *Trends Comput. Appl. Math.* 23.4 (2022), pp. 683–703.
- [3] J. E. Beasley. “An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure”. Em: *Oper. Res.* 33 (1985), pp. 49–64.
- [4] Ernesto G. Birgin et al. “Packing circles within ellipses”. Em: *Int. Trans. Oper. Res.* 20.3 (2013), pp. 365–389.
- [5] Hector Callisaya e Geisiane Vettorazzi. “Empacotamento de retângulos em polígonos”. Em: *Revista Professor de Matemática On line* 2024 (2024). DOI: [10 . 21711 / 2319023x2024 / pmo1240](https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1240). URL: [https : / / doi . org / 10 . 21711 / 2319023x2024/pmo1240](https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1240).
- [6] A. Cassioli e M. Locatelli. “A heuristic approach for packing identical rectangles in convex regions”. Em: *Comput. Oper. Res.* 38 (2011), pp. 1342–1350.
- [7] Joaquim Dolz, Michele Noverraz e Bernard Schneuwly. “Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento”. Em: *Gêneros orais e escritos na escola*. Ed. por Joaquim Dolz e Bernard Schneuwly. Campinas: Mercado de Letras, 2004, pp. 95–128.
- [8] Robert J. Fowler, Michael S. Paterson e Steven L. Tanimoto. “Optimal packing and covering in the plane are NP-complete”. Em: *Journal of The Franklin Institute* 12.3 (1981), pp. 133–137.
- [9] C. O. López e J. E. Beasley. “Packing unequal rectangles and squares in a fixed size circular container using formulation space search”. Em: *Comput. Oper. Res.* 94 (2018), pp. 106–117.

- [10] Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. [http : / / basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 29 abr. 2025. Brasília, DF, 2017.
- [11] Marco Antônio Moreira. Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências: comportamentalismo, construtivismo e humanismo. Acesso em: 15 fev. 2025. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. URL: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios5.pdf>.
- [12] George Pólya. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Trad. por Heitor Lisboa de Araújo. 2^a ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [13] Khadija Hadj Salem et al. “Mathematical models for the two-dimensional variable-sized cutting stock problem in the home textile industry”. Em: *Eur. J. Oper. Res.* 306.2 (2023), pp. 549–566.
- [14] José Camilo dos Santos Filho e Silvio Sánchez Gamboa. *Pesquisa educacional: quantidade-qualidade*. Ed. por Silvio Sánchez Gamboa. São Paulo: Cortez, 1995.

Anexo I

Roteiro de atividade

- 1. Vamos recordar o cálculo de área de retângulos.
- 2. O tamanho de uma folha A4 é 21cm de largura e 29,7 cm de comprimento. Qual é sua área?
- 3. Agora imagine um retângulo de 4cm de largura e 12cm de comprimento. Qual é a sua área?
- 4. Agora imagine um retângulo de 5cm de largura e 12cm de comprimento. Qual é a sua área?
- 5. Agora imagine um retângulo de 6cm de largura e 12cm de comprimento. Qual é a sua área?
- 6. Quantos retângulos 4cm X 12cm cabem numa folha A4?
- 7. Quantos retângulos 5cm X 12cm cabem numa folha A4?
- 8. Quantos retângulos 6cm X 12cm cabem numa folha A4?
- 9. Há sobras? De quantos porcentos é o aproveitamento da folha ? Considere os três casos.
- 10. Agora, pegue uma folha A4 e desenhe retângulos de acordo com as medidas indicadas.
- 11. Analise em qual caso você obteve melhor aproveitamento da folha.
- 12. Quais são soluções encontradas em cada caso?

- 13. Você conseguiu acondicionar 12 retângulos no primeiro caso? 10 retângulos no segundo caso? E 8 retângulos no terceiro caso?
- 14. O que você acha que aconteceu para conseguir acondicionar apenas 11 no primeiro caso, 9 no segundo caso e 6 no terceiro caso?
- 15. O que poderia ser feito para empacotar o máximo de retângulos em cada caso, de acordo com os cálculos feitos inicialmente ?

Anexo II

- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.