



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Josué Silvino da Silva

Desafios e Limitações no Ensino de Sequências, com Ênfase em Progressões Aritméticas e Geométricas

Cuiabá/MT 2025

Josué Silvino da Silva

**Desafios e Limitações no Ensino de Sequências, com
Ênfase em Progressões Aritméticas e Geométricas**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica. Linha de pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica.

Prof. Dr. Pedro Manuel Sanchez Aguilar
Orientador

Prof. Dr. João de Sousa
Coorientador

Cuiabá - MT
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586d Silva, Josué Silvino da.
Desafios e Limitações no Ensino de Sequências, com Ênfase em Progressões Aritméticas e Geométricas [recurso eletrônico] / Josué Silvino da Silva. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 72 f., il. color., pdf). -- 2025.

Orientador: Pedro Manuel Sánchez Aguilar.
Coorientador: João de Sousa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2025.
Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.
Inclui bibliografia.

1. Sequências. 2. Progressões. 3. Aprendizagem Baseada em Problemas. 4. Educação Básica. 5. LibreOffice Calc. I. Sánchez Aguilar, Pedro Manuel, *orientador*. II. Sousa, João de, *coorientador*. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

**AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 -
CUIABÁ/MT**

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT.ICET@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: DESAFIOS E LIMITAÇÕES NO ENSINO DE SEQUÊNCIAS, COM ÊNFASE EM
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS**

AUTOR: MESTRANDO JOSUÉ SILVINO DA SILVA

Dissertação defendida e aprovada em 28 de março de 2025.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Prof. Dr. Pedro Manuel Sanchez Aguilar (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. Prof. Dr. Hector Flores Callisaya (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. Prof. Dr. Jorge Mauricio Jaramillo Monsalve (Membro externo)

Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 28/03/2025.



Documento assinado eletronicamente por **JORGE MAURICIO JARAMILLO MONSALVE**,
Usuário Externo, em 28/03/2025, às 21:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no §
3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **HECTOR FLORES CALLISAYA**, **Docente da**
Universidade Federal de Mato Grosso, em 31/03/2025, às 10:33, conforme horário oficial de Brasília,
com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **PEDRO MANUEL SANCHEZ AGUILAR**,
Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT / ICET -
UFMT, em 31/03/2025, às 10:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art.
4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0,
informando o código verificador **7768902** e o código CRC **E4D197B2**.

Referência: Processo nº 23108.040389/2024-17

SEI nº 7768902

A Divina Santissima Trindade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, à Virgem Maria Santíssima, mãe de Jesus Cristo, sob o título de Nossa Senhora Aparecida, e ao glorioso Santo Antônio pela intercessão. Agradeço também à minha esposa e companheira, Juliana Aurélia Silveira Hortêncio Silva, que sempre me apoiou e me incentivou a acreditar em mim e na minha capacidade. Aos meus filhos, Brenno Henrique Silveira Hortêncio Silva e Brunno Giovanni Silveira Hortêncio Silva, pela paciência que tiveram comigo, nas muitas vezes em que não pude jogar bola com eles para me dedicar aos estudos.

Em especial, expresso minha gratidão ao meu orientador, Pedro Sánchez, e ao meu coorientador, João de Sousa, por sempre acreditarem em mim e dedicarem-se intensamente para que eu alcançasse o sucesso!

Muito obrigado a todos.

Aos que aqui chegaram,
vale lembrar o seguinte provérbio
chinês:

*Diga-me e eu esquecerei. Mostre-me
e eu lembrarei. Envolve-me e eu
entenderei.*

Confúcio.

Resumo

Neste trabalho, a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) foi aplicada ao ensino de Sucessões e Progressões, utilizando situações do cotidiano para tornar o aprendizado mais significativo e dinâmico. Os alunos foram incentivados a explorar padrões numéricos e identificar regularidades presentes em diferentes contextos. Para a compreensão das progressões aritméticas, foram propostas atividades como o cálculo do custo de corridas de táxi e a construção de uma torre de canudos, permitindo que os estudantes analisassem a variação constante entre os termos. Já as progressões geométricas foram abordadas por meio da análise do crescimento exponencial da COVID-19, demonstrando como conceitos matemáticos se aplicam a fenômenos reais. Além disso, ferramentas tecnológicas, como o LibreOffice Calc, foram utilizadas para otimizar os cálculos, reduzir a sobrecarga operacional e permitir maior foco na interpretação dos resultados. Dessa forma, a abordagem adotada não apenas facilitou a assimilação dos conteúdos, mas também estimulou o pensamento crítico e a autonomia dos alunos no processo de aprendizagem.

Palavras chave: Sequências; Progressões; Aprendizagem Baseada em Problemas; Educação Básica; LibreOffice Calc.

Abstract

In this work, the Problem-Based Learning (PBL) methodology was applied to the teaching of Sequences and Progressions, using real-life situations to make learning more meaningful and dynamic. Students were encouraged to explore numerical patterns and identify regularities in different contexts. To understand arithmetic progressions, activities such as calculating taxi fare costs and building a straw tower were proposed, allowing students to analyze the constant variation between terms. Geometric progressions, in turn, were addressed through the analysis of the exponential growth of COVID-19, demonstrating how mathematical concepts apply to real-world phenomena. Additionally, technological tools such as LibreOffice Calc were used to optimize calculations, reduce operational workload, and allow greater focus on interpreting results. Thus, the adopted approach not only facilitated content assimilation but also stimulated critical thinking and student autonomy in the learning process.

Keywords: Sequences; Progressions; Playful activities; Basic education.

Lista de Figuras

1.1	Calendário Egípcio. Fonte: Revista de História e Teoria das Ideias Vol. 23	7
1.2	Frações unitárias. Fonte: Howard Eves [9]	7
1.3	Tabuada de Louvre. Fonte: Department of Near Eastern Antiquities of the Louvre	9
1.4	Tabuada YBC 7289. Fonte: Universidade de Yale	10
1.5	Números Triangulares. Fonte: Howard Eves [9]	11
1.6	Números Quadrados. Fonte: Howard Eves [9]	11
1.7	$Q_4 = T_4 + T_3$. Fonte: Howard Eves [9]	11
1.8	Números Pentagonais. Fonte: Howard Eves [9]	12
1.9	$P_5 = 5 + 3T_4$. Fonte: Howard Eves [9]	12
1.10	Problema dos coelhos	16
1.11	Espiral de Fibonacci	17
1.12	Concha de náutilus	18
1.13	Via Láctea	18
1.14	Soma de Oresme. Fonte: Stillwell [14]	19
3.1	Saeb/Ideb, INEP - 2023	34
3.2	Modelo de ensino tradicional	36
3.3	Quantidade de erros identificados em cinquenta testes	37
3.4	Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP)	38
3.5	Planilha em branco	43
3.6	Valores de n	44
3.7	Inserindo a_n	44
3.8	planilha associando n a a_n	45
3.9	Função soma	46
3.10	Soma dos valores de B2 até B21	46

3.11	Dados reais presentes em uma corrida de táxi	48
3.12	Torre de canudos	51
3.13	Quantidade de canudos em cada par de termos extremos	54
3.14	Número de infecções por minuto	57
4.1	Ranking do IDEB das escolas de Mato Grosso	71
4.2	Painel do IDEB da Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro	72

Lista de Tabelas

3.1	Crescimento de uma planta	42
3.2	Temperatura de uma placa	42
3.3	Fórmulas para diferentes sequências no LibreOffice Calc	45
3.4	Valor da corrida por quilômetro percorrido	49
3.5	Pessoas infectadas a cada minuto	58

Lista de siglas

A seguir, segue-se as siglas utilizadas nesta dissertação.

Profmato Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional;

UFMT Universidade Federal de Mato Grosso;

ICET Instituto de Ciências Exatas e da Terra;

DMAT Departamento de Matemática.

Sumário

Introdução	1
1 Um Breve Relato Histórico das Sequências Numéricas	6
1.1 As Sequências no Egito	6
1.2 As Sequências na Babilônia	8
1.3 As Sequências na Grécia	10
1.4 As Sequências na Idade Média	15
1.5 As Sequências na Idade Moderna	20
2 Conceitos Fundamentais de Sequências e Progressões	24
2.1 Progressões Aritméticas	26
2.2 Progressões Geométricas	29
3 Sequência Didática: Aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas usando a Metodologia ABP	34
3.1 Descrição do Problema	35
3.2 Metodologia	38
3.3 Público-Alvo	40
3.4 Objetivos	40
3.5 Dinâmica 1: Explorando Sequências Numéricas com LibreOffice Calc . . .	41
3.5.1 Introdução às Sequências Numéricas	41
3.5.2 Calculando os Termos e a Soma dos Termos de uma Sequência no LibreOffice Calc	43
3.6 Dinâmica 2: Formulação do Conceito de Progressão Aritmética a Partir do Cálculo do Valor de uma Corrida de Táxi	47
3.6.1 Apresentação do problema	47

3.6.2	Intervenção pedagógica para formulação do conceito de Progressão Aritmética	48
3.7	Dinâmica 3: Descobrimos a Fórmula da Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética de Forma Prática com Canudos	50
3.7.1	Materiais	51
3.7.2	Apresentação do problema	51
3.7.3	Intervenção pedagógica para a formulação da soma dos termos de uma Progressão Aritmética	52
3.8	Dinâmica 4: O Crescimento do COVID-19 e a Matemática das Progressões Geométricas	56
3.8.1	Apresentação do problema	56
3.8.2	Intervenção pedagógica para formulação do conceito de Progressão Geométrica	57
4	Conclusão	62
	Referências Bibliográficas	64
	Apêndice	66
4.1	Teste diagnóstico	66
4.2	Ranking e painel do IDEB da Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro	71

Introdução

Seguindo a orientação do Profmat esta dissertação versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto na sala de aula.

Durante minha trajetória como professor de matemática nas escolas do estado de Mato Grosso, sempre observei as dificuldades que os alunos enfrentam para aprender essa disciplina. A matemática, muitas vezes, é vista como um grande desafio, e essa percepção negativa impacta diretamente o desempenho dos estudantes. Atualmente, trabalho na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, em Várzea Grande, onde o problema da aprendizagem matemática se mostra especialmente preocupante. A última avaliação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) revelou que a escola ocupa a penúltima colocação entre todas as instituições do município de Várzea Grande no que se refere ao desempenho em matemática, com uma média de apenas 3,63, veja Figuras 4.1 e 4.2. Esse resultado me motivou a buscar estratégias que possam auxiliar os alunos a superar suas dificuldades e, conseqüentemente, melhorar o rendimento da escola na próxima avaliação.

Com esse objetivo, realizei entrevistas com meus colegas e outros docentes da rede pública de ensino do estado de Mato Grosso. A partir dessas conversas, percebi que a maioria dos professores ainda adota um modelo tradicional de ensino, no qual o conhecimento é transmitido de forma expositiva, e os alunos apenas reproduzem mecanicamente as informações recebidas. Embora essa abordagem tenha sido amplamente utilizada ao longo das décadas, ela apresenta limitações significativas.

Primeiramente, esse modelo não leva em consideração a diversidade de ritmos e estilos de aprendizagem dos alunos, o que resulta em lacunas no entendimento, especialmente para aqueles que encontram dificuldades em acompanhar o ritmo das explicações. Além disso, a ênfase excessiva na memorização mecânica de fórmulas e procedimentos, sem uma contextualização adequada, faz com que os alunos decorem conceitos sem realmente

compreendê-los. Esse fator dificulta a aplicação do conhecimento em situações reais e reduz o interesse pela matemática, tornando-a uma disciplina desmotivadora para muitos estudantes.

Essa percepção foi reforçada quando entrevistei os alunos da Escola Elizabeth Maria Bastos Mineiro e de outras escolas do estado. Ao serem questionados sobre os desafios que enfrentam na disciplina, muitos expressaram frustrações com frases como: “Decoro as fórmulas, mas não sei como aplicá-las na minha vida” e “O professor explica a fórmula, e nós apenas repetimos os exercícios sem realmente entender”. Esses relatos evidenciam a necessidade de repensar a abordagem pedagógica, tornando o ensino da matemática mais significativo e aplicado ao cotidiano dos estudantes.

Diante desse cenário, comecei a pesquisar metodologias inovadoras que pudessem transformar a forma como a matemática é ensinada e assimilada pelos alunos. Foi então que encontrei na literatura a metodologia Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), que se mostrou uma alternativa promissora.

A ABP propõe um ensino mais ativo, no qual os alunos constroem conhecimento a partir da resolução de problemas contextualizados. Essa metodologia incentiva a reflexão, o pensamento crítico e a aplicação dos conceitos teóricos em situações do dia a dia. Além disso, a ABP está alinhada com diversas competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente aquelas que promovem o desenvolvimento de habilidades cognitivas, socioemocionais e de atuação no mundo.

Na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, onde leciono, identifiquei que um dos temas que os alunos mais têm dificuldade é Sucessões e Progressões. Para compreender melhor o nível de conhecimento dos estudantes, realizei um teste diagnóstico no primeiro dia de aula, e os resultados evidenciaram uma grande defasagem nesse conteúdo. Diante desse desafio, decidi elaborar uma sequência didática baseada na ABP, utilizando quatro dinâmicas que envolvem problemas reais do cotidiano dos alunos.

Na primeira dinâmica, os alunos são apresentados a problemas que envolvem padrões numéricos do seu dia a dia, como o crescimento de uma planta ao longo do tempo ou a variação da temperatura de uma placa metálica em diferentes condições. Esses problemas foram escolhidos por serem familiares e contextualizados, o que facilita a conexão dos alunos com o conteúdo. Com essas atividades, os alunos conseguiram assimilar bem os conceitos de sequência e termo de uma sequência, identificando padrões e compreendendo como os termos se relacionam entre si.

Inicialmente, os alunos calcularam manualmente os primeiros termos das sequências propostas, o que permitiu que eles internalizassem o processo e desenvolvessem uma

compreensão básica do conceito. No entanto, à medida que o número de termos aumentava, os estudantes rapidamente perceberam que o cálculo manual se tornava trabalhoso e demorado. Essa percepção foi crucial, pois abriu espaço para a introdução de ferramentas tecnológicas que otimizam o processo de resolução de problemas.

Foi nesse momento que apresentei o LibreOffice Calc, uma ferramenta de planilha eletrônica que permite calcular os termos de uma sequência e somar seus elementos de forma rápida e prática. A utilização dessa ferramenta não apenas facilitou os cálculos, mas também demonstrou aos alunos como a tecnologia pode ser uma aliada no aprendizado da matemática. Eles puderam observar como o uso de uma planilha eletrônica pode agilizar processos repetitivos, permitindo que se concentrem na interpretação dos resultados e na aplicação dos conceitos, em vez de se perderem em cálculos tediosos.

Nas segunda e terceira dinâmicas, os alunos são conduzidos à descoberta das progressões aritméticas através do cálculo do custo de uma corrida de táxi. Nesse problema, os alunos analisam como o valor da corrida varia de acordo com a tarifa inicial (bandeirada) e o valor cobrado por quilômetro percorrido, compreendendo que a diferença entre os termos consecutivos é constante, o que é a principal característica de uma progressão aritmética. Além disso, essa atividade permite discutir conceitos como o termo geral de uma progressão Aritmética.

Para entender a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, foi utilizada a construção de uma torre de canudos. A cada etapa, os alunos observam como a torre cresce de forma constante à medida que novos andares são adicionados. A altura da torre segue um padrão de adição constante, característico de uma progressão aritmética. Em seguida, eles são desafiados a calcular a quantidade total de canudos necessários para construir a torre após a adição de um determinado número de andares, o que resulta na fórmula da soma de uma progressão aritmética de maneira natural.

Na quarta dinâmica, o conceito de progressão geométrica é introduzido de forma impactante, utilizando um exemplo de grande relevância social: o crescimento do número de casos de COVID-19. Esse tema, além de ser próximo da realidade dos alunos, permite demonstrar como a matemática está presente na compreensão e análise de fenômenos globais.

Inicialmente, os estudantes são convidados a analisar dados simulados sobre a propagação da doença. Eles observam que, em uma pandemia, o número de pessoas infectadas não cresce de forma linear, mas sim de maneira acelerada, seguindo um padrão característico de progressão geométrica. Esse momento da atividade desperta a curiosidade dos alunos, pois muitos já ouviram falar sobre o crescimento exponencial da COVID-19, mas poucos compreendem matematicamente como isso acontece.

A partir dessa observação, os conceitos fundamentais da progressão geométrica começam a ser introduzidos de maneira natural. Os alunos identificam que, a cada ciclo de contágio, o número de infectados se multiplica por um fator fixo, e essa taxa de crescimento corresponde à razão da progressão geométrica. Esse processo facilita a compreensão intuitiva do conceito, pois os estudantes percebem que, ao invés de somar uma quantidade fixa (como ocorre na progressão aritmética), os valores se multiplicam sucessivamente.

Com esse entendimento, os alunos são desafiados a determinar o número total de infectados após um determinado período de tempo, assumindo uma taxa fixa de transmissão. Nesse momento, eles começam a perceber que somar os termos de uma progressão geométrica é essencial para calcular o número total de casos acumulados ao longo dos ciclos de contágio. A partir dessa necessidade prática, a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita é introduzida.

Durante o ensino de sucessões e progressões, a aplicação da metodologia ABP na elaboração da sequência didática tem apresentado resultados promissores. Acredito que, com a continuidade dessa abordagem, será possível melhorar significativamente o desempenho dos alunos, reduzindo as lacunas de aprendizagem e, conseqüentemente, elevando a nota da escola Estadual Elizabeth Maria Bastos Mineiro no IDEB. Além disso, espero que essa experiência inspire outros professores a adotarem metodologias inovadoras em suas práticas pedagógicas, promovendo uma transformação significativa no ensino da matemática na rede pública. Ao tornar o aprendizado mais dinâmico e contextualizado, podemos despertar nos estudantes uma nova perspectiva sobre a matemática, tornando-a mais acessível, compreensível e aplicada ao seu cotidiano.

No primeiro capítulo deste trabalho, são destacados alguns princípios históricos baseados em fatos e registros que permeiam o desenvolvimento dos conceitos de sequências e progressões, ressaltando alguns dos principais matemáticos da história que contribuíram para a evolução desse conhecimento. É traçada uma linha do tempo, iniciando pelos registros do Egito Antigo, passando pela Babilônia, avançando pela Idade Média e chegando à Idade Moderna, destacando matemáticos que tiveram um papel fundamental no crescimento da matemática e no desenvolvimento desses conceitos.

No segundo capítulo, são apresentadas as definições matemáticas de progressões aritméticas e geométricas, acompanhadas das demonstrações das fórmulas que sustentam esses conceitos. A compreensão aprofundada desses tópicos é fundamental para que o professor domine a teoria e consiga aplicá-la de forma eficaz no ensino da matemática, tornando o aprendizado mais claro e significativo para os alunos.

No terceiro capítulo, apresentamos de forma detalhada a construção de uma sequência

didática para o ensino de sequências e progressões, utilizando a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas. Essa sequência foi cuidadosamente planejada para auxiliar tanto os professores, oferecendo uma guia prática e inovadora para o ensino desses conteúdos, quanto os alunos, proporcionando uma aprendizagem mais significativa e engajante.

Um Breve Relato Histórico das Sequências Numéricas

Desde a antiguidade, as sequências numéricas têm desempenhado um papel fundamental no avanço da matemática, estando presentes no cotidiano das sociedades ao longo da história e tornando-se essenciais em diversas situações. Neste capítulo, apresentamos uma breve história das sequências numéricas, tendo como principais referências as obras de Carl B. Boyer [3] e Howard Eves [9].

1.1 As Sequências no Egito

De acordo com Carl B. Boyer [3], por volta de 3000 a.C., os egípcios enfrentavam o desafio de prever as inundações do Rio Nilo, um evento fundamental para determinar o momento adequado para o plantio e garantir colheitas suficientes para sua subsistência. Através da observação da natureza, eles perceberam uma relação entre as enchentes anuais do rio e o aparecimento da estrela Sopdet, ou Sirius, também conhecida como a Estrela do Cão.

Os egípcios notaram que as inundações aconteciam logo após o surgimento de Sopdet no horizonte leste, antes do nascer do sol. Com base nessa observação, concluíram que esse fenômeno se repetia a cada 365 dias. A partir disso, criaram um calendário anual baseado nas inundações, que consistia em doze meses de trinta dias, com cinco dias adicionais dedicados a festividades. Esse calendário, estruturado a partir de padrões naturais, reflete o conceito de sequência na organização do tempo. Embora o calendário egípcio não seja uma sequência numérica em sentido estrito — já que não há crescimento ou

diminuição linear (progressão aritmética) ou multiplicativa (progressão geométrica) — ele exemplifica um padrão cíclico e ordenado, refletindo um pensamento lógico e sistemático. Esse calendário é um exemplo de como os egípcios usaram sua observação e organização para enfrentar os desafios naturais e sociais de sua época.

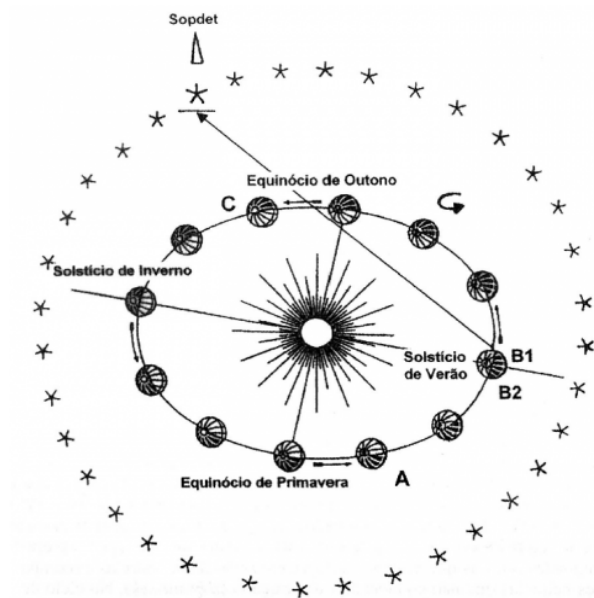


Figura 1.1: Calendário Egípcio. Fonte: Revista de História e Teoria das Ideias Vol. 23

Segundo Howard Eves [9], os egípcios representavam frações unitárias ($1/n$) na escrita hieroglífica colocando um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Para a fração especial $2/3$, utilizava-se um símbolo distinto, e, ocasionalmente, outro símbolo era empregado para $1/2$.

$$\begin{aligned} \text{O} &= \frac{1}{3}, & \text{O} &= \frac{1}{4}, \\ \text{O} &\text{ ou } \text{—} & &= \frac{1}{2}, \\ \text{O} &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Figura 1.2: Frações unitárias. Fonte: Howard Eves [9]

O Papiro de Rhind, considerado um dos principais registros matemáticos deixados pelos egípcios, contém exemplos de frações da forma $2/n$, destacando o método egípcio de

decomposição em frações unitárias. Segundo Carl B. Boyer [3], os egípcios provavelmente usaram a seguinte fórmula para obter os elementos da sequência $(2/n)$:

$$\boxed{\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Além disso, o Papiro de Rhind, conforme descrito por Boyer, apresenta no Problema 79 uma situação que envolve uma progressão geométrica. O enunciado do problema é o seguinte: "7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16807 hecates."

Boyer explica que o problema solicita o cálculo da soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas de trigo e medidas de grão, ou seja, a soma dos cinco primeiros elementos da sequência geométrica (7^n) . Neste caso específico, usando (2.7), o cálculo da soma é dado por:

$$\frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1}.$$

Embora os egípcios não possuíssem uma notação simbólica como a matemática moderna, o fato do problema se basear em uma progressão geométrica com razão 7 revela uma compreensão implícita das propriedades dessas sequências, mesmo sem a formalização do conceito de progressão geométrica tal como é feito hoje. Isso ilustra a habilidade dos egípcios em resolver questões matemáticas complexas, mesmo utilizando uma abordagem puramente algorítmica e sem o formalismo algébrico que seria desenvolvido muitos séculos depois.

1.2 As Sequências na Babilônia

Segundo Howard Eves [9], por volta de 2000 a.C., a aritmética babilônica já havia se desenvolvido em uma álgebra retórica avançada. Não apenas equações quadráticas eram resolvidas, mas também algumas cúbicas eram discutidas. Foi encontrada uma tábua que fornecia os valores das sequências (n^2) e (n^3) , para n de 1 a 30, utilizada na resolução dessas equações. Além disso, essa tabela também incluía os valores da sequência $(n^2 + n^3)$ correspondente a esse mesmo intervalo, e era empregada para resolver equações do tipo $x^3 + x^2 = b$.

Otto Neugebauer, um renomado historiador da matemática, conforme aponta Howard Eves [9], analisou diversos textos matemáticos babilônicos e destacou exemplos notáveis de problemas envolvendo sequências. Entre eles, na tábua do Louvre, datada de aproximadamente 300 a.C., Neugebauer identificou dois problemas particularmente interessantes que demonstram o uso sofisticado de progressões pelos babilônios.

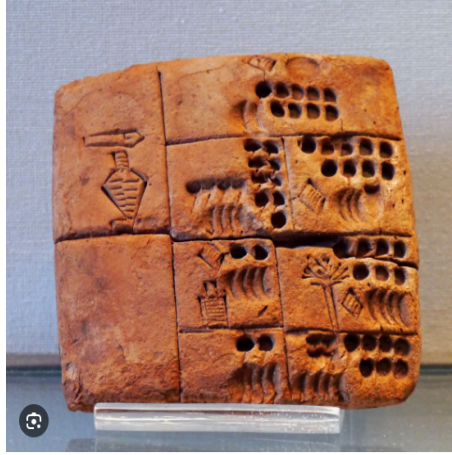


Figura 1.3: Tabuada de Louvre. Fonte: Department of Near Eastern Antiquities of the Louvre

Um deles afirma que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

Este resultado pode ser obtido aplicando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica com razão 2, veja (2.7),

O outro problema encontrado por Neugebauer também envolve uma aplicação matemática avançada: a soma dos quadrados dos primeiros dez números naturais,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \left[1 \left(\frac{1}{3} \right) + 10 \left(\frac{2}{3} \right) \right] 55 = 385.$$

O que é facilmente verificado usando a seguinte fórmula:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^n i$$

Os dois problemas acima mostram que os babilônios já possuíam métodos para calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão 2 e a soma dos primeiros n números ao quadrado, embora não na forma algébrica moderna.

Por outro lado, Para Carl B. Boyer [3], a Tabuada YBC 7289 demonstra que os babilônios utilizavam métodos aproximativos que podem ser entendidos como sequências numéricas para calcular $\sqrt{2}$. O valor registrado, 1.414222, apresenta uma diferença de menos de 0.000008 em relação ao valor real, evidenciando a precisão impressionante do método.



Figura 1.4: Tabuada YBC 7289. Fonte: Universidade de Yale

Embora os babilônios não conhecessem o conceito formal de sequência como o entendemos atualmente, sua abordagem era iterativa e, segundo Boyer, o método consistia em calcular os termos da seguinte sequência:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2},$$

onde a é o número cujo raiz quadrada está sendo buscada e a_n é o valor aproximado da iteração anterior. Embora os babilônios não tivessem a terminologia matemática atual, suas técnicas de cálculo de raízes quadradas podem ser vistas como precursoras dos métodos iterativos modernos, que utilizam sequências numéricas para aproximações sucessivas.

1.3 As Sequências na Grécia

Como destacado por Howard Eves [9], os gregos antigos, especialmente os pitagóricos, representavam os números por meio de pontos e os classificavam com base em diferentes configurações geométricas. Esses números, conhecidos como números figurados, expressavam a quantidade de pontos dispostos em formas geométricas específicas, como triângulos, quadrados e pentágonos.

Os números triangulares, por exemplo, correspondem a uma sequência de pontos que podem ser organizados na forma de triângulos equiláteros, originando a sequência numérica 1, 3, 6, 10, $\dots$, veja Figura 1.5.

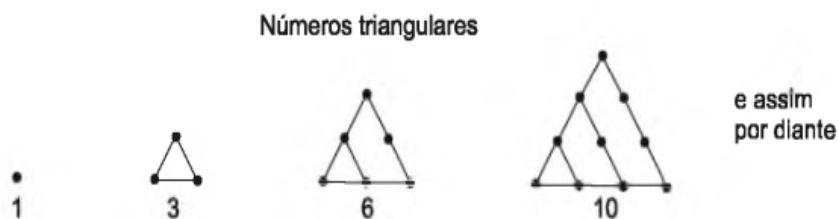


Figura 1.5: Números Triangulares. Fonte: Howard Eves [9]

Se indicarmos o n -ésimo número triangular como T_n , ele é dado pela soma dos n primeiros números naturais:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por outro lado, os números quadrados representam a quantidade de pontos que formam um quadrado, gerando a sequência numérica $1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \dots$, veja Figura 1.6.

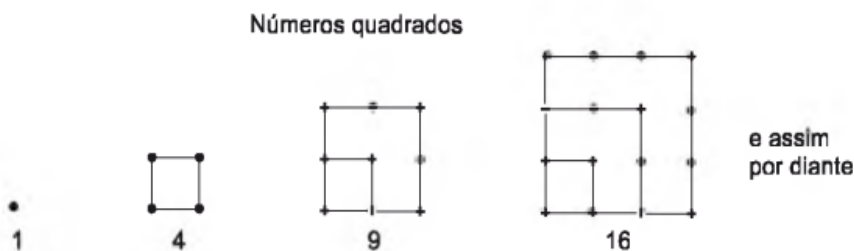


Figura 1.6: Números Quadrados. Fonte: Howard Eves [9]

Denotando por Q_n o n -ésimo número quadrado, como ilustrado na Figura 1.7, os gregos observaram que ele pode ser expresso como a soma de dois números triangulares consecutivos, isto é, $Q_n = T_n + T_{n-1}$.



Figura 1.7: $Q_4 = T_4 + T_3$. Fonte: Howard Eves [9]

Finalmente, os números pentagonais representam a quantidade de pontos que podem

ser organizados na forma de pentágonos crescentes. Esses números geram a sequência numérica $1, 5, 12, 22, \dots$, veja Figura 1.8.

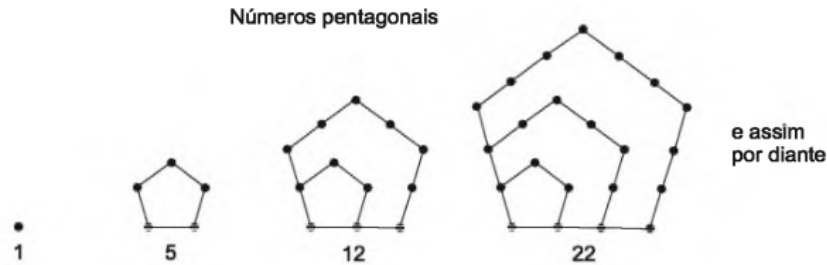


Figura 1.8: Números Pentagonais. Fonte: Howard Eves [9]

Conforme observado geometricamente pelos gregos, veja Figura 1.9, o n -ésimo número pentagonal P_n pode ser expresso como a soma de n mais 3 vezes T_{n-1} , ou seja, $P_n = n + 3T_{n-1}$.

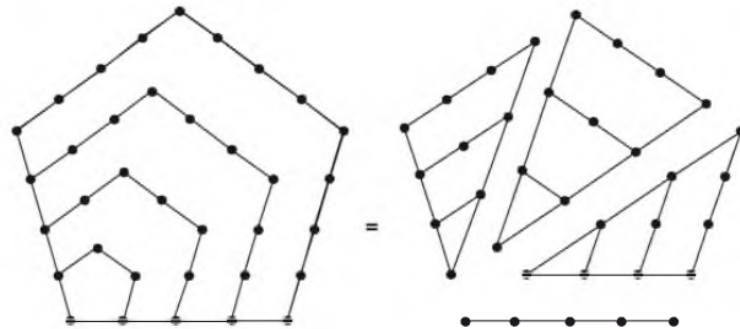


Figura 1.9: $P_5 = 5 + 3T_4$. Fonte: Howard Eves [9]

Um filósofo grego que exerceu uma forte influência no desenvolvimento da matemática foi Zenão de Eléia, a quem se atribui uma conexão fundamental com o conceito de sequência infinita, ilustrado no famoso paradoxo de Aquiles e a Tartaruga. O paradoxo apresenta Aquiles competindo em uma corrida contra uma tartaruga que recebeu uma vantagem inicial. Conforme descrito por Carl B. Boyer [3], o objetivo do paradoxo é demonstrar que, por mais rápido que Aquiles corra, ele nunca conseguirá alcançar, e muito menos ultrapassar, a tartaruga, mesmo que esta se mova lentamente. Isso acontece porque, ao alcançar o ponto inicial onde a tartaruga estava, ela já terá avançado uma pequena distância. Quando Aquiles percorre essa nova distância, a tartaruga já terá se deslocado um pouco mais, e esse processo continua indefinidamente. Assim, segundo o raciocínio do paradoxo, o veloz Aquiles jamais consegue alcançar a lenta tartaruga.

Para compreender melhor a relação entre o paradoxo de Aquiles e as sequências, observe que, matematicamente, o paradoxo pode ser representado da seguinte forma:

1. Suponha que Aquiles corre a uma velocidade v_a e a tartaruga, mais lenta, corre a uma velocidade v_t , com $v_a > v_t$.
2. A tartaruga começa com uma vantagem inicial d_0 .
3. Após um tempo $t_1 = d_0/v_a$, Aquiles alcança o ponto inicial da tartaruga, mas ela já avançou uma distância adicional $d_1 = v_t \cdot t_1$.
4. Depois, Aquiles leva outro tempo $t_2 = d_1/v_a$ para alcançar a nova posição da tartaruga, mas ela já avançou mais um pouco $d_2 = v_t \cdot t_2$.

Repetindo este processo infinitamente, obtém-se uma sequência infinita (progressão geométrica) de tempos, cuja razão é $(v_t/v_a) < 1$, a saber:

$$\frac{d_0}{v_a}, \frac{d_0}{v_a} \cdot \frac{v_t}{v_a}, \frac{d_0}{v_a} \cdot \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^2, \dots$$

Apesar da sequência ser infinita, o tempo total t que Aquiles leva para alcançar a tartaruga é dado por

$$t = \frac{d_0}{v_a} + \frac{d_0}{v_a} \cdot \frac{v_t}{v_a} + \frac{d_0}{v_a} \cdot \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^2 + \dots$$

Como a soma S dos termos de uma progressão geométrica com razão $r < 1$ e primeiro termo b é dada pela fórmula:

$$S = \frac{b}{1 - r}.$$

Temos que, no caso de Aquiles, a soma total t é finita,

$$t = \frac{\frac{d_0}{v_a}}{1 - \frac{v_t}{v_a}} = \frac{d_0}{v_a - v_t}.$$

o que significa que ele alcança e ultrapassa a tartaruga em um tempo finito, resolvendo o paradoxo.

O paradoxo de Aquiles exemplifica como uma sequência infinita pode ser usada para modelar uma situação aparentemente contraditória. A aplicação da matemática moderna, por meio de somas convergentes de sequências infinitas, resolve o paradoxo ao demonstrar que, embora existam infinitas etapas a serem completadas, o tempo ou a distância total

dessas etapas é finito. Isso mostra a profundidade e a importância do conceito de sequências infinitas na compreensão de problemas envolvendo o infinito e a continuidade.

Outro matemático grego de grande relevância foi Euclides, conhecido por sua obra *Os Elementos*, composta por treze livros ou capítulos. Segundo Carl B. Boyer [3], essa obra contém diversas proposições matemáticas fundamentais. Em particular, no Livro IX, Proposição 35, encontra-se uma fórmula para calcular a soma de números em progressão geométrica, apresentada de maneira elegante, embora pouco usual:

"Se tantos números quanto quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e do último números iguais ao primeiro, então, assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem."

Embora a terminologia e a forma de apresentação do texto original sejam diferentes das utilizadas atualmente, a fórmula essencial para a soma de uma PG finita pode ser derivada dessa descrição. De fato, a expressão "*números em proporção contínua*" refere-se a uma progressão geométrica, ou seja,

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n$$

onde cada número é obtido multiplicando o anterior por um mesmo número q . A frase "*se subtrairmos do segundo e do último números iguais ao primeiro*" significa calcular

$$aq - a \text{ e } aq^n - a.$$

Já a frase "*o excesso do segundo está para o primeiro, assim como o excesso do último está para todos os que o precedem*" equivale a igualdade

$$\frac{a(q-1)}{a} = \frac{a(q^n-1)}{a(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}.$$

Essa relação permite deduzir a fórmula geral para a soma de uma PG de n termos, como a conhecemos hoje, isto é, fazendo $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$,

$$\boxed{S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}}.$$

A forma moderna de deduzir esta fórmula é dada em (2.7).

Os problemas mencionados demonstram que os gregos tinham um conhecimento avançado sobre sequências numéricas. Apesar de não disporem da notação moderna para expressar suas ideias, suas descobertas exerceram uma influência significativa no

desenvolvimento desse conceito.

1.4 As Sequências na Idade Média

Durante a Idade Média, diversos matemáticos fizeram contribuições importantes para o estudo das sequências numéricas. Aqui, mencionaremos apenas Fibonacci e Oresme.

Como citado por Howard Eves [9], no início do século XIII, destacou-se Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, considerado o matemático mais talentoso da Idade Média. Nascido em Pisa, um importante centro comercial da época, Fibonacci recebeu parte de sua educação em Bejaia, no norte da África, onde seu pai trabalhava como agente alfandegário. Durante essas viagens, ele teve contato direto com a matemática árabe e oriental, o que o levou a se convencer da superioridade dos métodos de cálculo indo-arábicos.

Em 1202, após retornar a Pisa, Fibonacci publicou sua obra mais famosa, o "*Liber Abaci*", revisada e expandida em uma segunda versão em 1228. Ele abordava aritmética e álgebra elementares, fortemente influenciado pelos trabalhos de Al-Khowarizmi e Abu Kamil. Dividido em 15 capítulos, o "*Liber Abaci*" ensinava a leitura e escrita dos novos numerais, métodos de cálculo com inteiros e frações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas, e soluções de equações lineares e quadráticas. A obra também continha uma rica coleção de problemas matemáticos que influenciaram gerações de estudiosos. Para Carl B. Boyer [3], entre esses problemas, o que mais inspirou os matemáticos posteriores foi, sem dúvida, o seguinte:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Para resolver este problema, Fibonacci observou que no final do primeiro mês temos um par de coelhos. No final do segundo mês, o primeiro par gera um novo par, resultando em 2 pares. No final do terceiro mês, o primeiro par gera outro novo par, que somado ao par que nasceu no mês anterior, totaliza 3 pares. No final do quarto mês, o primeiro par gera um novo par, o par que nasceu no segundo mês gera outro, e somando o par do mês anterior, temos 5 pares. Essa lógica se repete a cada mês, formando a sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, u_n, \dots$$

Essa sequência ficou conhecida como Sequência de Fibonacci. Geometricamente, essa sequência pode ser representada da seguinte forma:

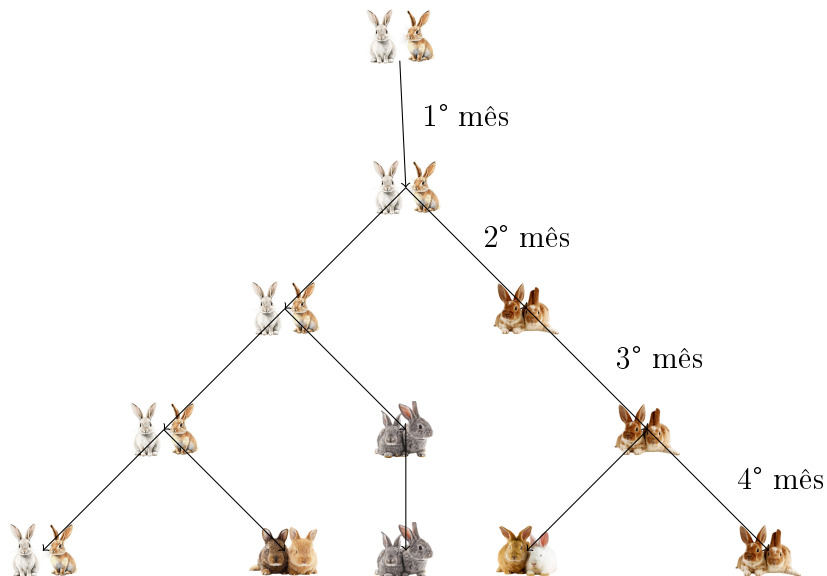


Figura 1.10: Problema dos coelhos

A característica mais interessante da Sequência de Fibonacci, segundo Carl B. Boyer [3], é que cada número é a soma dos dois números anteriores. Por exemplo:

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5, \dots$$

Assim, para calcular o termo u_n da Sequencia de Fibonacci podemos usar seguinte formula:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

A sequência de Fibonacci, embora inicialmente pareça ser apenas um exercício matemático envolvendo o crescimento populacional de coelhos, manifesta-se em diversas áreas da natureza e da arte. Conforme mencionado por Carl B. Boyer [3], o número

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

é conhecido como seção áurea, um número irracional que ocorre frequentemente em padrões naturais e obras artísticas. Esse número está intimamente relacionado à sequência de Fibonacci por meio da seguinte igualdade:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

De fato, fazendo $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1}/u_n$,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n-2}}{u_n} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-2}}{u_n} = 1 - \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}} \\ &= 1 - \frac{L}{\frac{1}{L}} = 1 - L^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

A sequência de Fibonacci também permite a construção de uma figura conhecida como Espiral de Fibonacci. Essa espiral é formada por uma série de arcos conectados, desenhados dentro de quadrados cujos lados têm comprimentos que seguem os números da sequência de Fibonacci.

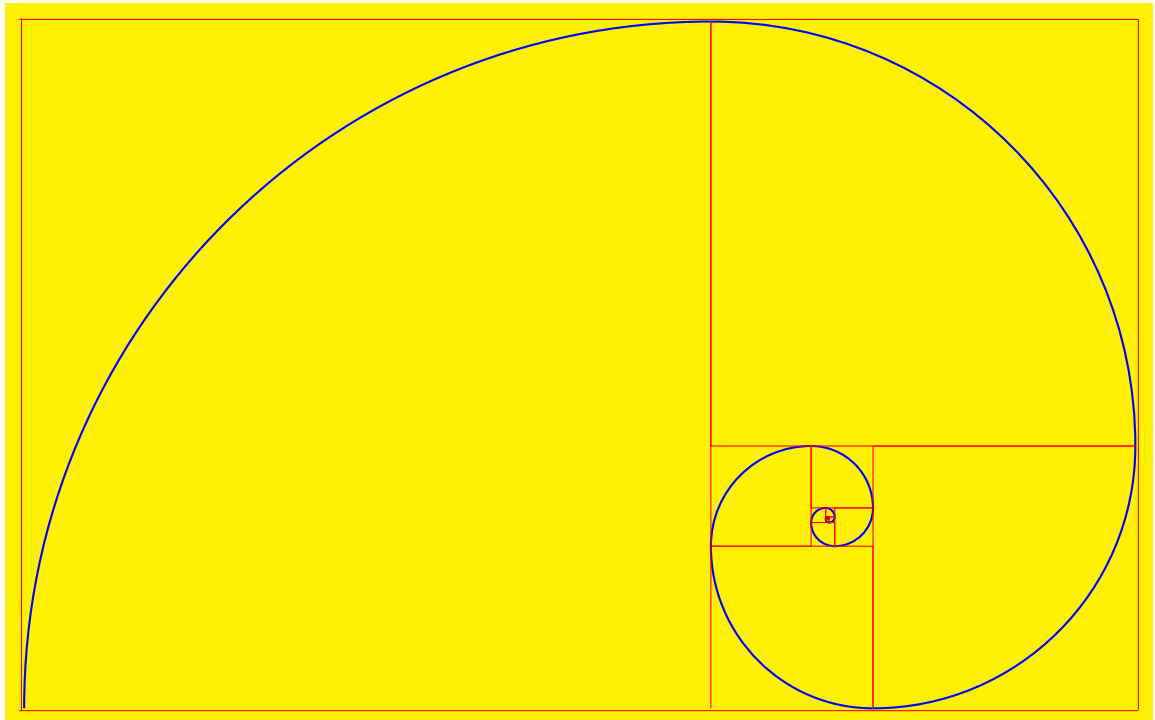


Figura 1.11: Espiral de Fibonacci

Para construí-la, comece desenhando dois quadrados adjacentes, ambos com lado um, que servirão como base inicial. Em seguida, adicione novos quadrados ao redor dos anteriores, de forma que o comprimento de cada lado corresponda ao próximo número na sequência de Fibonacci. Cada novo quadrado deve ser posicionado de modo a compartilhar

um lado com os já existentes, criando um padrão em crescimento. Dentro de cada quadrado, trace um arco conectando dois vértices opostos, seguindo o contorno externo de forma contínua. A sequência desses arcos resulta na formação da Espiral de Fibonacci.

A espiral de Fibonacci aparece frequentemente na natureza, como nas conchas de náutilos, onde suas curvas seguem esse padrão geométrico.



Figura 1.12: Concha de náutilos

De maneira similar, em galáxias espirais como a Via Láctea, as estrelas estão organizadas em braços espirais que se assemelham ao padrão de Fibonacci.



Figura 1.13: Via Láctea

Além disso, o padrão também é observado em plantas, como na disposição das sementes de girassóis, na formação de pinhas e na distribuição das folhas em caules.

Outro matemático da Idade Média destacado por Carl B. Boyer [3] foi Nicole Oresme, que se destacou como um dos pioneiros no estudo de sequências numéricas. Oresme mostrou que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2.$$

Segundo Stillwell [14], Oresme utilizou uma representação gráfica, veja a Figura 1.14, para demonstrar esse resultado de forma simples e elegante.

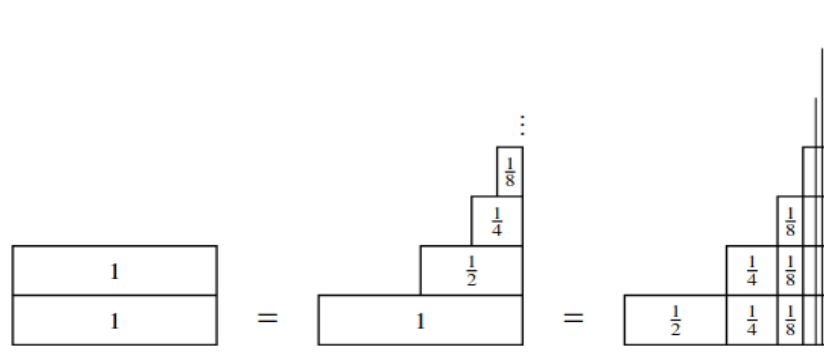


Figura 1.14: Soma de Oresme. Fonte: Stillwell [14]

Oresme também conseguiu resolver, pelo mesmo método gráfico, outros casos mais complexos, como a soma da série.

$$\frac{1 \cdot 3}{4} + \frac{2 \cdot 3}{16} + \frac{3 \cdot 3}{64} + \cdots + \frac{n \cdot 3}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

Outra contribuição de Oresme foi apresentar a primeira demonstração na história da matemática de que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

é divergente. Segundo Carl B. Boyer [3], Oresme agrupou os termos em blocos da seguinte forma:

$$(1), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right), \cdots,$$

de modo que o m -ésimo grupo inclui 2^{m-1} termos. Ele observou que a soma de cada grupo era maior que $1/2$. Assim, à medida que a série prossegue, os grupos de termos somam valores cada vez maiores, fazendo com que a soma total cresça indefinidamente, sem limite.

Os trabalhos de Fibonacci e Oresme estabeleceram uma ponte entre a matemática medieval e o início da matemática moderna, preparando o terreno para o desenvolvimento do estudo rigoroso de sequências e séries, que se tornaria essencial nos séculos posteriores.

1.5 As Sequências na Idade Moderna

Na Idade Moderna, o estudo das sequências numéricas se expandiu significativamente, com vários matemáticos fazendo contribuições notáveis. Segundo Howard Eves [9], John Napier (1550–1617), matemático escocês, desenvolveu o conceito de logaritmo como uma ferramenta para simplificar cálculos complexos, especialmente as multiplicações e divisões de números grandes, muito comuns em astronomia e navegação. Napier associou números em progressão geométrica (PG) a números em progressão aritmética (PA) para criar essa noção. Mais especificamente, a cada termo da progressão geométrica:

$$10^7, 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right), 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2, 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3, \dots$$

Napier associou os termos da progressão aritmética:

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Com base nessa relação, Napier definiu o logaritmo de um número da seguinte forma:

$$\text{Se } N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L \quad \text{então} \quad Nap \log(N) = L.$$

Essa definição permitiu a Napier criar uma tabela de logaritmos. Assim, por exemplo,

$$Nap \log(10^7) = 0 \quad \text{e} \quad Nap \log \left(10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)\right) = 1.$$

Ao lidar com o problema de calcular o produto de dois números x e y , onde:

$$x = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_1} \quad \text{e} \quad y = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_2},$$

Napier observou que:

$$\frac{xy}{10^7} = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_1+L_2}.$$

Portanto, o logaritmo do produto é:

$$Nap \log \left(\frac{xy}{10^7}\right) = L_1 + L_2.$$

Assim, para calcular xy , Napier somava os logaritmos de x e y , e em seguida buscava na tabela de logaritmos o número cujo logaritmo fosse $L_1 + L_2$. O valor do produto xy seria esse número multiplicado por 10^7 .

Outro matemático notável da Idade Moderna foi Isaac Newton, que nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de Natal de 1642. Para Carl B. Boyer [3], embora Newton tenha vivido no início da Idade Moderna, sua influência foi extraordinária em diversas áreas do conhecimento, incluindo o cálculo, a mecânica clássica e a matemática em geral.

Newton fez contribuições notáveis ao estudo de sequências e séries infinitas. Por exemplo, segundo Stillwell [14], ele desenvolveu a fórmula binomial generalizada, conhecida como Série Binomial de Newton:

$$(1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \dots$$

Newton utilizou essa fórmula com $a = -x^2$ e $n = -1/2$, embora a escolha do n não seja natural, ele conseguiu integrar essa fórmula termo a termo, derivando a expansão em série para o seno inverso

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Essa dedução é um exemplo impressionante do uso de sequências e séries infinitas por Newton para representar funções e resolver problemas matemáticos complexos, que na época eram considerados extremamente desafiadores. Essas ferramentas também são amplamente utilizadas hoje em dia para cálculos numéricos e simulações computacionais.

Um matemático contemporâneo de Isaac Newton foi Gottfried Wilhelm Leibniz, nascido em Leipzig em 1646. Segundo Carl B. Boyer [3], aos quinze anos, Leibniz ingressou na universidade local e, aos dezessete, concluiu seu bacharelado em artes. Com apenas vinte anos, ele estava preparado para obter o grau de doutor em direito, mas a universidade recusou seu pedido devido à sua juventude. Em resposta a essa negativa, Leibniz deixou Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf.

Leibniz compartilhou com Newton o crédito pelo desenvolvimento do cálculo, embora suas abordagens fossem bastante distintas. Leibniz dedicou-se profundamente ao estudo de sequências e séries infinitas, explorando tanto seus fundamentos teóricos quanto suas diversas aplicações práticas. Por exemplo, conforme Carl B. Boyer [3], em 1676, Huygens propôs a Leibniz o problema de calcular a soma dos inversos números triangulares, veja Figura 1.5, ou seja,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots$$

Para resolver o problema, Leibniz descompôs habilidosamente cada termo em uma soma de duas frações, fazendo uso da igualdade:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

A seguir, Leibniz calculou a soma dos n primeiros números triangulares:

$$2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

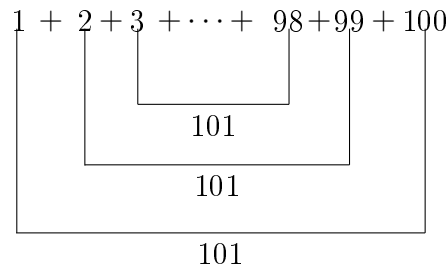
De onde ele obteve facilmente que:

$$\boxed{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots = 2.}$$

Howard Eves [9] destaca Carl Friedrich Gauss (1777-1855) como o maior matemático da primeira metade do século *XIX* e, possivelmente, de todos os tempos. Reconhecido como um prodígio desde a infância, Gauss demonstrou seu talento já aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática. Seu professor deu à turma a seguinte tarefa:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

para mantê-los ocupados. Para sua surpresa, Gauss rapidamente apresentou o resultado correto, utilizando um raciocínio elegante: percebeu que na soma dos números naturais de 1 a 100, a soma dos termos equidistantes dos extremos era constante e igual a 101, e como existiam 50 pares de termos equidistantes, a soma seria exatamente 50×101 oferecendo um resultado igual a 5.050.



É evidente que Gauss naquele momento não chegou a uma fórmula e nem generalizou o resultado, mas foi um passo importante que contribuiu de modo decisivo para o estudo das progressões aritméticas e geométricas. A partir dessa observação, chegou-se à fórmula para calcular a soma S_n dos n primeiros números de uma progressão aritmética, veja (2.2).

Posteriormente, Gauss se destacou em vários ramos importantes da Matemática, sendo considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Na atualidade, os matemáticos têm se dedicado ao estudo de sequências numéricas mais complexas e à aplicação dessas sequências em diversos campos do conhecimento. Com o avanço das técnicas analíticas e computacionais, tornou-se possível investigar séries e sequências que antes eram inacessíveis, utilizando ferramentas de cálculo avançado, teoria dos números e análise funcional. As aplicações dessas sequências abrangem uma ampla gama de áreas, incluindo a física teórica, a biologia matemática, a economia, a informática e a engenharia, onde são utilizadas para modelar fenômenos dinâmicos, otimizar processos e resolver problemas práticos complexos.

Conceitos Fundamentais de Sequências e Progressões

Neste capítulo, utilizaremos como referência os livros de Luís Lopes [10] e Elon Lages Lima [8]. Nosso objetivo é apresentar os conceitos básicos relacionados às sequências numéricas, com ênfase nas progressões aritméticas e geométricas. Neste contexto, abordaremos as definições formais de sequência, Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), que são dois tipos específicos de sequências. Além disso, exploraremos de maneira detalhada as propriedades fundamentais dessas progressões, incluindo a fórmula para o cálculo do n -ésimo termo e a soma dos n primeiros termos.

Iniciamos este capítulo introduzindo o conceito de sequência

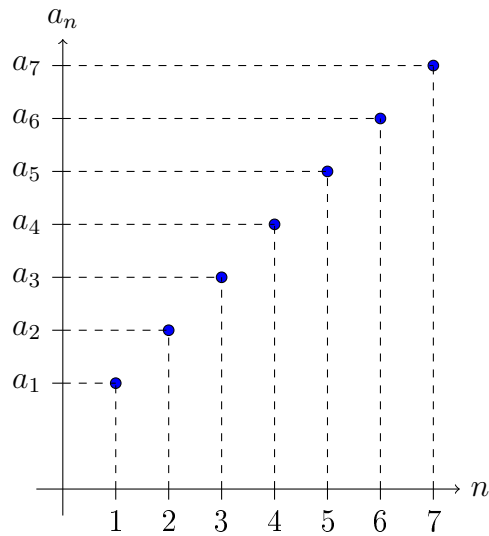
Uma sequência em $\mathbb{R}$ é uma função

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) \end{aligned}$$

O valor $a(n)$ será representado por a_n e chamado o n -ésimo termo da sequência. Escrevemos

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{ou simplesmente} \quad (a_n)$$

para indicar uma sequência. Geometricamente, uma sequência (a_n) pode ser representada da seguinte forma:



Por exemplo, para a sequência (n^2) temos que $a_n = n^2$ e seus termos são:

$$1, 4, 16, \dots, n^2, \dots$$

Além disso, para $(n(n+1)/2)$ seu n -ésimo termo é $a_n = n(n+1)/2$ e seus elementos são:

$$1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

Dizemos que uma sequência é crescente se:

$$m < n \Rightarrow a_m < a_n.$$

É decrescente se:

$$m < n \Rightarrow a_m > a_n.$$

E é constante quando:

$$m < n \Rightarrow a_m = a_n.$$

Por exemplo, $1, 4, 16, \dots, n^2, \dots$ é uma sequência crescente, enquanto

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

é decrescente.

Sejam (a_n) um sequencia e $m < k \leq l < p$.

- Se $k \neq l$

$$\cdots, \overbrace{a_m, \dots, a_k}^{k-m}, \cdots, \overbrace{a_l, \dots, a_p}^{p-l}, \cdots$$

Diremos que os termos a_k e a_l são equidistantes dos termos a_m e a_p quando $k - m = p - l$.

- Se $k = l$

$$\cdots, \overbrace{a_m, \dots, a_k}^{k-m}, \overbrace{a_k, \dots, a_p}^{p-k}, \cdots$$

Diremos que $a_k = a_l$ é o termo central entre a_m e a_p se $k - m = p - k$.

Por exemplo, para (a_n) , com $a_n = 4n - 2$, temos que $a_4 = 14$ e $a_9 = 32$ são equidistantes dos termos $a_1 = 2$ e $a_{12} = 44$, pois $4 - 1 = 12 - 9$.

Exemplos interessantes de sequencias são as progressões.

2.1 Progressões Aritméticas

Definição 2.1.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem se que*

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde r é um número real fixo chamado razão.

Observe que,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = a_1 + nr. \tag{2.1}$$

Daí que,

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + \cdots + a_1 + (n-1)r \\
&= na_1 + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]r \\
&= na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r = \left[a_1 + \frac{(n-1)}{2}r \right] n \\
&= \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right] n = \left[\frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \right] n.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$,

$$\boxed{S_n = \left[\frac{a_1 + a_n}{2} \right] n.} \quad (2.2)$$

Por exemplo, 2, 6, 10, $\cdots$ é uma *PA* de razão $r = 4$. Além disso, a partir de (2.1), seu termo n -ésimo é dado por

$$a_n = 2 + 4(n-1),$$

e, a partir de (2.2), a soma dos seu n primeiros termos é

$$S_n = \left[\frac{2 + 2 + 4(n-1)}{2} \right] n = 2n^2.$$

Teorema 2.1.2. *Uma Progressão Aritmética (PA) é crescente se sua razão for positiva, decrescente se for negativa e constante se for zero.*

Demonstração. De fato, de (2.1), para $m < n$,

$$a_n - a_m = (n - m)r.$$

Assim,

$$a_n - a_m > 0 \text{ quando } r > 0, \text{ e } a_n - a_m < 0 \text{ quando } r < 0.$$

□

Por exemplo, 2, 6, 10, $\cdots$ é uma *PA* crescente; 3, 3, 3, $\cdots$ é uma *PA* constante e; $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-4$, $\sqrt{3}-8$, $\cdots$ é uma *PA* decrescente, pois sua razão $r = -4$. O termo n -ésimo dessa *PA*, conforme a equação (2.1), é dado por:

$$a_n = \sqrt{3} - 4(n-1).$$

Além disso, a soma dos n primeiros termos dessa PA , conforme a equação (2.2), é:

$$S_n = \left[\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4(n-1)}{2} \right] n = [\sqrt{3} - 2(n-1)]n = (\sqrt{3} + 2)n - 2n^2.$$

Definição 2.1.3. *Dado dois números a e b , com $a < b$, interpolar (aritmeticamente) ou inserir k termos intermediários entre a e b consiste em construir uma progressão aritmética (a_n) , com $k+2$ termos, de modo que:*

$$a_{n+1} = a + \left(\frac{b-a}{k+1} \right) n, \quad n = 0, 1, \dots, k+1. \quad (2.3)$$

Por exemplo, interpolar k termos entre 5 e 14 consiste em construir (a_n) tal que:

$$a_{n+1} = 5 + \left(\frac{9}{k+1} \right) n, \quad n = 0, 1, \dots, k+1.$$

Em particular, para $k = 2$, obtemos a PA :

$$5, 8, 11, 14.$$

Observação 2.1.4. *Quando $k = 1$ e $n = 1$ em (2.3), dizemos que*

$$M = \frac{a+b}{2}$$

é a média aritmética de a e b .

Por exemplo, para a_k , a_{k+1} e a_{k+2} termos de uma PA , temos, de acordo com (2.1), que

$$\frac{a_k + a_{k+2}}{2} = \frac{a_1 + (k-1)r + a_1 + (k+1)r}{2} = a_1 + kr = a_{k+1}.$$

Portanto, a_{k+1} é a média aritmética de a_k e a_{k+2} , ou seja,

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Em particular, 8 é a média aritmética de 11 e 5, e 6 é a média aritmética de 2 e 10.

Teorema 2.1.5. *Em toda PA , se a_k e a_l são equidistantes dos termos a_m e a_p , então $a_k + a_l = a_m + a_p$.*

Solução. Como a_k e a_l são equidistantes dos termos a_m e a_p , então $k + l = p + m$. Daí que, de (2.1),

$$\begin{aligned} a_k + a_l &= a_1 + (k-1)r + a_1 + (l-1)r \\ &= 2a_1 + (k+l-2)r = 2a_1 + (p+m-2)r \\ &= a_1 + (m-1)r + a_1 + (p-1)r \\ &= a_m + a_p. \end{aligned}$$

□

Por exemplo, vimos que, para a sequência (a_n) , com $a_n = 4n - 2$, os termos $a_4 = 14$ e $a_9 = 32$ são equidistantes dos termos $a_1 = 2$ e $a_{12} = 44$. Portanto,

$$a_4 + a_9 = a_1 + a_{12},$$

o que pode ser facilmente verificado.

Corolário 2.1.6. *Em toda PA, se a_k é o termo central de a_m e a_p , então*

$$a_k = \frac{a_m + a_p}{2}.$$

Demonstração. De fato, do teorema acima, $2a_k = a_m + a_p$. □

2.2 Progressões Geométricas

Definição 2.2.1. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que*

$$\boxed{a_{n+1} = a_n q},$$

onde q é um número real fixo, diferente de 0 e de 1, chamado razão.

De acordo com a definição de progressão geométrica (PG), temos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_{n+1} = a_1 q^n.} \quad (2.5)$$

Em geral, se conhecemos o valor de a_m , para todo $n > m$, podemos escrever, a partir de (2.5), que $a_m = a_1 q^{m-1}$. Assim, usando novamente (2.5), temos:

$$a_{n+1} = a_1 q^n = \frac{a_m}{q^{m-1}} q^n = a_m q^{n-m+1}.$$

Consequentemente,

$$\boxed{a_{n+1} = a_m q^{n-m+1}, n > m.} \quad (2.6)$$

Por outro lado, para calcular o produto dos n primeiros termos de uma PG, utilizamos mais uma vez (2.5),

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdots a_1 q^{n-1} = a_1^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = a_1^n q^{(n-1)n/2}.$$

Ou seja, fazendo $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$,

$$\boxed{P_n = a_1^n q^{(n-1)n/2}.$$

Além disso, a equação (2.5) também permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 [1 + q + \cdots + q^{n-1}] \\ &= a_1 \left[\frac{q^n - 1}{q - 1} \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$,

$$\boxed{S_n = a_1 \left[\frac{q^n - 1}{q - 1} \right].} \quad (2.7)$$

Por exemplo, 2, 6, 18, 54, $\cdots$ é uma PG de razão $q = 3$. Além disso, a partir de (2.5), seu termo n -ésimo é dado por

$$a_n = 2(3^{n-1}),$$

e, a partir de (2.7), a soma dos seu n primeiros termos é

$$S_n = 2 \left[\frac{3^n - 1}{2} \right] = 3^n - 1.$$

Teorema 2.2.2. 1. Uma PG com termos positivos é crescente se $q > 1$ e decrescente se $0 < q < 1$.

2. Uma PG composta por termos negativos será crescente se $0 < q < 1$ e decrescente se $q > 1$.

Demonstração. Apresentaremos a demonstração apenas para o caso em que a PG possui termos positivos, pois o caso com termos negativos é análogo.

De fato, de (2.5), para $m < n$, tem-se:

$$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}.$$

Portanto,

$$\frac{a_n}{a_m} > 1 \text{ se } q > 1, \text{ e } \frac{a_n}{a_m} < 1 \text{ se } 0 < q < 1.$$

□

Por exemplo, 2, 6, 18, 54, $\dots$ é uma PG crescente e

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$$

é decrescente, pois sua razão é $q = 1/5$. Além disso, de (2.5), seu termo n -ésimo é dado por

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

e, a partir de (2.7), a soma dos seu n primeiros termos é

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{-\frac{4}{5}} = \frac{5^n - 1}{4(5^{n-1})}.$$

Definição 2.2.3. Dado dois números a e b possuindo o mesmo sinal, com $a < b$, interpolar geometricamente a e b consiste em construir uma progressão geométrica (a_n) , com $k + 2$ termos, de modo que:

$$\boxed{a_{n+1} = a \left(\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, k+1.} \quad (2.8)$$

Por exemplo, interpolar geometricamente 5 e 14 consiste em construir uma progressão

geométrica (a_n) tal que:

$$a_{n+1} = 5 \left(\sqrt[k+1]{\frac{14}{5}} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, k+1.$$

Em particular, para $k = 2$, obtemos a PG :

$$5, \quad 5 \left(\sqrt[3]{\frac{14}{5}} \right), \quad 5 \left(\sqrt[3]{\frac{14}{5}} \right)^2, \quad 14.$$

Observação 2.2.4. Quando $k = 1$ e $n = 1$ em (2.8), dizemos que

$$\boxed{M_g = \sqrt{ab}.}$$

é a média geométrica de a e b .

Por exemplo, para a_k , a_{k+1} e a_{k+2} termos de uma PG , com o mesmo sinal, temos, de acordo com (2.5), que

$$\sqrt{a_k a_{k+2}} = \sqrt{a_1 q^{k-1} a_1 q^{k+1}} = a_1 q^k = a_{k+1}.$$

Portanto, a_{k+1} é a media geométrica de a_k e a_{k+2} , ou seja,

$$\boxed{a_{k+1} = \sqrt{a_k a_{k+2}}, \quad k = 1, 2, \dots} \quad (2.9)$$

Em particular, na progressão geométrica 2, 6, 18, 54, $\dots$, o número 6 é a média geométrica de 2 e 18, enquanto 18 é a média geométrica de 6 e 54.

Teorema 2.2.5. Em toda PG , se a_k e a_l são equidistantes dos termos a_m e a_p , então $a_k a_l = a_m a_p$.

Demonstração. Como a_k e a_l são equidistantes dos termos a_m e a_p , então $k + l = p + m$. Daí que, de (2.5),

$$\begin{aligned} a_k a_l &= a_1 q^{k-1} a_1 q^{l-1} \\ &= a_1^2 q^{k+l-2} = a_1^2 q^{p+m-2} \\ &= a_1 q^{m-1} a_1 q^{p-1} \\ &= a_m a_p. \end{aligned}$$

□

Por exemplo, para (a_n) , com $a_n = 2(3^{n-1})$, os termos $a_4 = 54$ e $a_9 = 13122$ são equidistantes dos termos $a_1 = 2$ e $a_{12} = 354294$. Portanto,

$$a_4 a_9 = a_1 a_{12},$$

o que pode ser facilmente verificado.

Corolário 2.2.6. *Em toda PG, se a_k é o termo central de a_m e a_p , ambos com o mesmo sinal, então*

$$a_k = \sqrt{a_m a_p}.$$

Demonstração. De fato, do teorema acima, $a_k^2 = a_m a_p$. □

Sequência Didática: Aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas usando a Metodologia ABP

A disciplina que mais causa dores de cabeça para alunos e professores nas escolas públicas de Várzea Grande é, sem dúvida, a matemática, conforme ilustrado na Figura 3.1.



Figura 3.1: Saeb/Ideb, INEP - 2023

Segundo Piaget [11], diferentemente de outras disciplinas, a matemática demanda um raciocínio lógico estruturado e um nível elevado de abstração, o que pode tornar sua assimilação particularmente desafiadora. Além disso, para Ausubel [1], os conceitos matemáticos são cumulativos, ou seja, a compreensão de novos conteúdos depende diretamente do domínio de conhecimentos anteriores. Quando há lacunas nessa base,

elas tendem a se acumular ao longo do tempo, dificultando ainda mais o processo de aprendizagem.

Outro fator determinante para as dificuldades em matemática é a forma tradicional de ensino, que frequentemente enfatiza a repetição mecânica de cálculos e fórmulas sem a devida contextualização. Essa abordagem pode tornar a disciplina abstrata, desmotivadora e, muitas vezes, intimidadora para os alunos.

De acordo com D'Ambrosio [6], a matemática ensinada nas escolas deve estar conectada à realidade dos estudantes, refletindo seu cotidiano, sua cultura e seus modos de pensar. Ensinar matemática de forma isolada e descontextualizada compromete seu significado e reduz seu potencial como ferramenta para a compreensão do mundo.

Com base nessa perspectiva, é fundamental repensar as estratégias pedagógicas nas escolas públicas de Várzea Grande, adotando abordagens que tornem a matemática mais acessível, envolvente e aplicável à vida dos alunos. Isso pode ser alcançado por meio da contextualização dos conteúdos, do uso de metodologias ativas e da valorização do pensamento crítico e criativo no aprendizado.

Neste capítulo, discutimos as dificuldades no ensino de progressões aritméticas e geométricas na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, que vão, sem dúvida, além do caráter abstrato desses conceitos. Esses desafios estão também associados ao desinteresse de muitos alunos e à falta de contextualização prática por parte dos professores. Tais fatores tornam o ensino das progressões ainda mais complexo, prejudicando a aprendizagem significativa e limitando a aplicação desses conceitos no cotidiano dos estudantes.

Diante desse cenário, propomos uma sequência didática como alternativa ao ensino tradicional da matemática, buscando superar suas limitações. Nosso objetivo é aprimorar o ensino de progressões na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro por meio de problemas contextualizados e diretamente vinculados à realidade dos alunos. Essa abordagem não só facilita a compreensão dos conceitos, mas também desperta o interesse dos estudantes, evidenciando a relevância das progressões em situações práticas do cotidiano.

3.1 Descrição do Problema

Ao longo da minha trajetória como professor de Matemática na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, em Várzea Grande, e por meio de entrevistas com outros docentes da rede pública de ensino da cidade, observei que o ensino de progressões aritméticas e geométricas, na maioria das vezes, segue um modelo tradicional.

Nesse modelo, segundo Freire [7], o professor assume o papel de principal transmissor do conhecimento, enquanto os alunos são colocados em uma posição mais passiva, limitando-se a receber e reproduzir informações. Esse método de ensino geralmente adota uma sequência estruturada e, muitas vezes, rígida, com ênfase em explicações verbais e práticas repetitivas de exercícios.

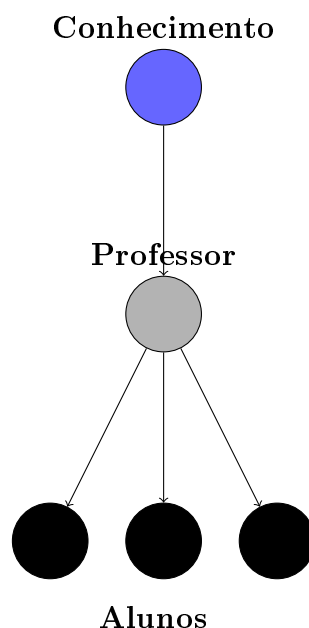


Figura 3.2: Modelo de ensino tradicional

Segundo Proença [12], o modelo de ensino tradicional representa uma metodologia linear e deficiente, que conduz os alunos a uma compreensão superficial e inadequada dos conceitos matemáticos.

Essa abordagem, embora bem-intencionada, apresenta limitações significativas. Em primeiro lugar, ela não considera a diversidade de ritmos e estilos de aprendizagem dos alunos, o que pode resultar em lacunas de compreensão para aqueles que não conseguem acompanhar o ritmo das explicações. Além disso, a ênfase excessiva na repetição mecânica de fórmulas e procedimentos, sem uma contextualização adequada, pode levar os alunos a memorizar conceitos sem realmente compreendê-los. Isso dificulta a aplicação desses conhecimentos em situações práticas e desestimula o interesse pela matemática.

Na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, esse problema torna-se evidente a partir da análise de testes simples aplicados aos estudantes, os quais revelam que muitos alunos enfrentam dificuldades na resolução de problemas e exercícios relacionados a progressões aritméticas e geométricas, veja Teste 4.1. A seguir, apresentam-se os principais erros identificados em cinquenta testes analisados:

- E_1 . Dificuldade em identificar quando uma progressão é aritmética ou geométrica;
- E_2 . Incapacidade de determinar corretamente a razão de uma progressão;
- E_3 . Confusão entre a soma dos termos de uma progressão e a busca pelo termo n -ésimo;
- E_4 . No associam as progressões a situações do cotidiano;
- E_5 . Dificuldade em formalizar matematicamente problemas envolvendo progressões.

Esses erros mostram que os alunos têm problemas tanto na compreensão dos conceitos fundamentais quanto na aplicação adequada dos procedimentos necessários para a resolução das atividades propostas.

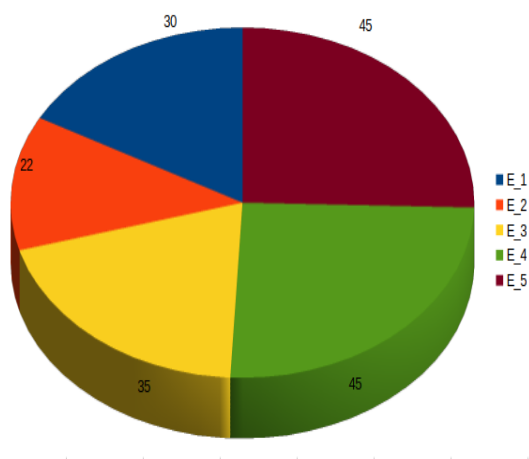


Figura 3.3: Quantidade de erros identificados em cinquenta testes

Por outro lado, o desinteresse dos alunos gera cansaço e um elevado nível de estresse, o que, por sua vez, frustra a prática pedagógica do professor, já que ele não consegue alcançar os resultados planejados nem contar com a participação ativa dos estudantes nas aulas. Quando questionados sobre as dificuldades enfrentadas nos testes analisados, os alunos expressam suas frustrações por meio de frases como:

- "Decoro as fórmulas, mas não sei como aplicá-las na minha vida."
- "O professor explica a fórmula, e nós apenas repetimos os exercícios sem realmente entender."
- "Tenho dificuldade porque ainda não aprendi bem frações e potências."
- "Não consigo compreender o significado dos cálculos."

- "Depois da escola, preciso trabalhar, e quase não sobra tempo para estudar em casa."

Diante desse cenário, o professor se vê impossibilitado de aplicar suas estratégias pedagógicas no ensino de progressões, o que, em muitos casos, resulta em adoecimento físico e psicológico, culminando no afastamento de suas funções após recomendações médicas respaldadas por perícias realizadas pelos órgãos administrativos estaduais.

3.2 Metodologia

Com o intuito de auxiliar os professores das escolas públicas de Várzea Grande a despertar o interesse dos alunos, questionamos os estudantes sobre o que poderia facilitar o aprendizado de progressões aritméticas e geométricas. Em resposta, eles apresentaram diversas sugestões, tais como:

- "Seria mais fácil aprender se usássemos exemplos do cotidiano."
- "Precisamos de mais exemplos variados, porque muitas vezes uma única explicação não é suficiente para entender o conteúdo."
- "Se tivéssemos acesso a vídeos explicativos e jogos, o aprendizado seria mais dinâmico e interessante."

As sugestões apresentadas pelos alunos alinham-se diretamente aos princípios da metodologia de **Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP)**. Essa abordagem pedagógica propõe que os alunos aprendam de forma ativa, por meio da resolução de problemas reais ou contextualizados, promovendo a aplicação prática dos conceitos teóricos, veja Souza e Dourado [13].

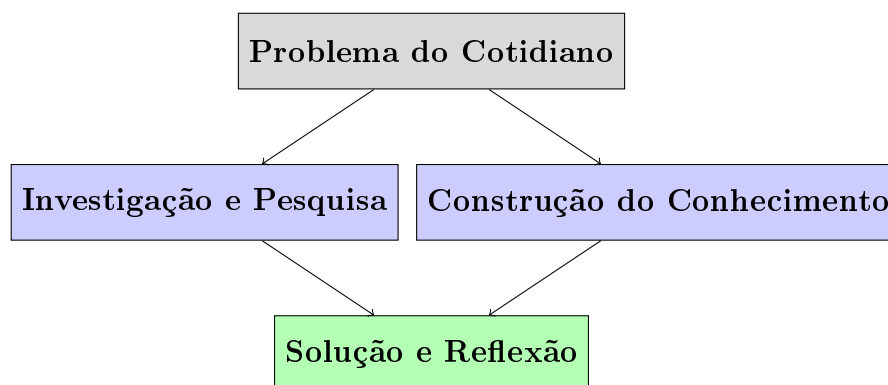


Figura 3.4: Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP)

Além disso a ABP se alinha com diversas competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2018, especialmente as que envolvem o desenvolvimento de habilidades cognitivas, socioemocionais e de atuação no mundo. Alguns dos principais eixos da BNCC que se conectam com a ABP incluem:

- **Conhecer, compreender e utilizar diferentes linguagens.** A ABP favorece o uso de diversas linguagens (oral, escrita, matemática, visual, etc.) para resolver problemas, incentivando a comunicação e a expressão de diferentes formas.
- **Dominar conhecimentos e habilidades.** A ABP envolve os alunos em situações que demandam o uso de conhecimentos disciplinares para resolver problemas. Esse processo ativa o aprendizado significativo e o domínio de conteúdos.
- **Pensamento crítico e resolução de problemas.** A ABP se alinha diretamente com essa competência, pois os alunos são desafiados a pensar criticamente e a buscar soluções para problemas, utilizando a pesquisa, análise e argumentação.
- **Autoconhecimento e autocuidado.** A ABP exige que os alunos desenvolvam autonomia no processo de aprendizagem. Isso pode incentivar o autoconhecimento à medida que eles gerenciam o próprio aprendizado, buscando estratégias para resolver problemas de forma independente.
- **Responsabilidade e cidadania.** Ao trabalhar com problemas reais, muitas vezes relacionados à comunidade e à sociedade, os alunos desenvolvem uma consciência crítica e uma postura cidadã, essencial para a resolução de questões locais ou globais.

Dessa forma, a ABP surge como uma alternativa de ensino para os professores das escolas públicas de Cuiabá, permitindo conectar o ensino de progressões aritméticas e geométricas à realidade dos alunos, ao mesmo tempo em que aborda suas dificuldades e necessidades de forma mais dinâmica e envolvente.

Neste sentido, este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática para o ensino de progressões aritméticas e geométricas, baseada na metodologia ABP, com problemas diretamente relacionados à realidade dos alunos. A proposta tem como objetivo sua aplicação em sala de aula como uma estratégia motivadora, envolvente e atrativa para os estudantes, além de estar alinhada às competências da BNCC. Para isso, a proposta foi desenvolvida com base nas seguintes habilidades da BNCC:

- **EM13MAT310:** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, com estratégias como o diagrama de árvore.

- **EM13MAT507:** Identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, analisando propriedades, deduzindo fórmulas e resolvendo problemas.
- **EM13MAT508:** Identificar e associar progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos, analisando propriedades, deduzindo fórmulas e resolvendo problemas.

Para a implementação da sequência didática, serão apresentadas quatro dinâmicas estruturadas como problemas. Cada etapa do processo será detalhada para garantir que os alunos desenvolvam o conhecimento gradualmente. Além disso, serão sugeridas intervenções pedagógicas específicas que o professor poderá adotar para garantir que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados, favorecendo a construção ativa do conhecimento matemático pelos estudantes.

3.3 Público-Alvo

O **público-alvo** refere-se a um grupo específico de consumidores, estudantes ou indivíduos para os quais uma mensagem, produto ou serviço é direcionado, considerando características como idade, renda, localização, interesses e necessidades.

Esta sequência didática é voltada para estudantes do ensino médio, especialmente aqueles do 8º e 9º anos, que estão iniciando ou aprofundando seus conhecimentos sobre sequências numéricas, com foco em progressões aritméticas e geométricas.

3.4 Objetivos

Durante a aplicação da sequência didática em sala de aula, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender a definição e as principais características das progressões aritmética e geométrica, incluindo a razão e o termo geral.
- Identificar e construir sequências aritméticas e geométricas em diferentes contextos, reconhecendo padrões e regularidades.
- Aplicar os conceitos das progressões aritmética e geométrica na resolução de problemas, incluindo o cálculo de termos, somatórios e outras propriedades.

- Utilizar as progressões aritmética e geométrica como ferramentas de análise para resolver problemas contextualizados, relacionando-os a situações do cotidiano.
- Desenvolver o raciocínio lógico e a argumentação matemática por meio da manipulação e exploração de sequências aritméticas e geométricas.
- Desenvolver autonomia, pensamento crítico e cooperação por meio da metodologia ABP.

3.5 Dinâmica 1: Explorando Sequências Numéricas com LibreOffice Calc

Aproveitando que cada aluno tem disponibilidade de um Chromebook nas escolas de Várzea Grande, esta dinâmica explorará o conceito de sequências numéricas utilizando o LibreOffice Calc. Esta poderosa ferramenta de planilha eletrônica gratuita permitirá uma abordagem didática, facilitando a compreensão do conceito de sequências, fundamental para o estudo posterior de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas. Abaixo, apresento uma sequência de atividades para auxiliar os professores na exploração e manipulação de sequências numéricas.

3.5.1 Introdução às Sequências Numéricas

O conceito de sequência numérica pode parecer abstrato para os alunos, mas está presente em diversas situações do dia a dia. Para introduzi-lo, o professor pode explorar contextos familiares aos estudantes, mostrando como a ideia de associar um número natural n a um número real a_n se manifesta na prática. O objetivo é construir o entendimento gradualmente, partindo de exemplos simples e concretos para, então, formalizar a definição matemática.

A seguir, apresentamos algumas sugestões de situações cotidianas que podem ser utilizadas para introduzir o conceito de sequência numérica de forma intuitiva e progressiva:

Imaginem que vocês estão cuidando de uma plantinha em casa. No primeiro dia, ela tem 5 cm de altura. A cada dia que passa, ela cresce 2 cm. Você quer acompanhar o crescimento dela ao longo do tempo para saber quando ela atingirá uma altura específica (por exemplo, 13 cm) ou para planejar quando transplantá-la para um vaso maior.

Para acompanhar o crescimento da planta, o professor propõe a construção de uma

tabela. Na primeira linha, os alunos registram o número de dias (n), e na segunda linha, anotam a altura da planta (a_n) correspondente a cada dia.

Dia (n)	1	2	3	4	5
Altura (a_n)	5 cm	7 cm	9 cm	11 cm	13 cm

Tabela 3.1: Crescimento de uma planta

Vejamos outra situação do cotidiano em que o conceito de sequência aparece.

Imagine que você aqueceu um pedaço de metal até 100°C e o deixou esfriar em uma sala onde a temperatura ambiente é de 20°C . Suponha que a temperatura do metal diminua 10°C a cada minuto. Vamos acompanhar como a temperatura do metal muda ao longo do tempo.

Seguindo a mesma lógica do problema anterior, o professor orienta os alunos na criação de uma tabela para monitorar a temperatura do metal.

Minuto (n)	0	1	2	3	4
Temperatura (a_n)	100°C	90°C	80°C	70°C	60°C

Tabela 3.2: Temperatura de uma placa

A partir das Tabelas 3.1 e 3.2, o professor chama a atenção dos alunos para um conceito fundamental:

- Para cada número natural n (representando o dia ou o minuto, respectivamente), associamos um número real a_n (altura da planta ou temperatura da placa metálica, respectivamente).

Esses exemplos ilustram como as sequências numéricas aparecem naturalmente em diversas situações do nosso dia a dia. Neste momento, o professor introduz a definição formal de sequência numérica:

O que é uma Sequência Numérica?

Uma sequência é uma lista de números que associa a cada número natural n um número real a_n , ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n)\end{aligned}$$

A seguir, o professor deve explicar que a_n é chamado de **termo geral** ou **termo n -ésimo** da sequência. Além disso, deve destacar que, em muitas sequências, a_n obedece a

uma regra ou fórmula que depende de n . Essa regra pode ser expressa matematicamente por uma equação ou descrita verbalmente. Por exemplo, as expressões

$$a_n = 3 + 2n, \quad a_n = 100 - 10n$$

representam o termo geral das sequências apresentadas nas Tabelas 3.1 e 3.2, respectivamente. O professor deve destacar aos alunos que o cálculo dos termos a_n da sequência pode se tornar trabalhoso à medida que n cresce, especialmente quando envolve valores muito grandes.

Felizmente, existem ferramentas tecnológicas que facilitam esse trabalho. Um exemplo é o software LibreOffice, que permite realizar cálculos automaticamente por meio de planilhas eletrônicas, reduzindo erros e economizando tempo. Com o LibreOffice Calc, é possível inserir a fórmula do termo geral, gerar rapidamente vários termos da sequência e até criar gráficos para visualizar o comportamento da sequência. Dessa forma, os alunos podem explorar melhor as propriedades das progressões e entender como as expressões matemáticas se traduzem em valores concretos.

3.5.2 Calculando os Termos e a Soma dos Termos de uma Sequência no LibreOffice Calc

Passo a passo no Computador:

- **Passo 1:** Abrir o LibreOffice Calc e criar uma nova planilha.

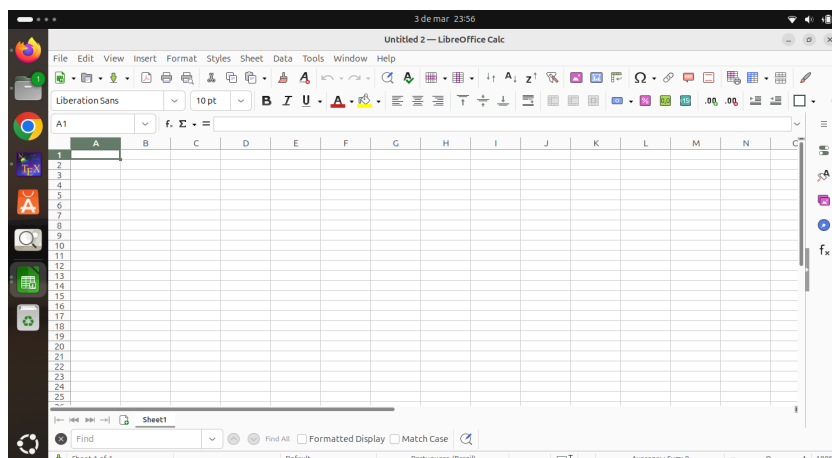


Figura 3.5: Planilha em branco

- **Passo 2:** Preencher os valores de n (números naturais):

- Na célula A1, digitar n .
- Na célula A2, digitar 1, e na A3, digitar 2.
- Selecione as células A2 e A3, e arraste para baixo até A21, por exemplo, para preencher automaticamente os valores de n .

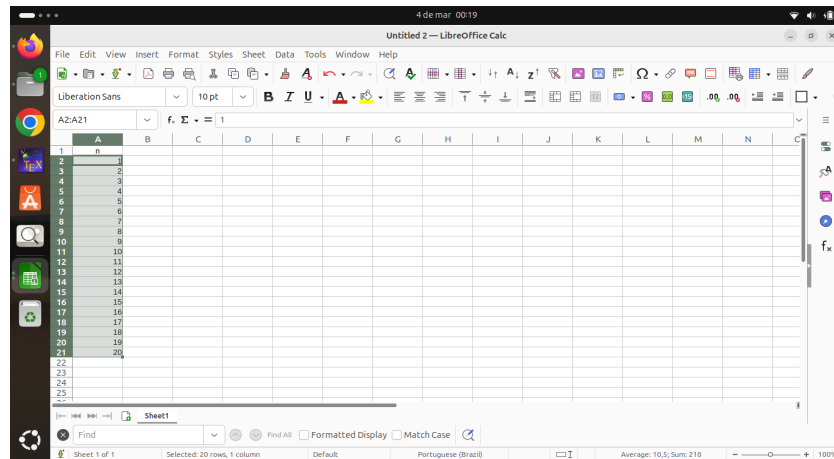


Figura 3.6: Valores de n

● **Passo 3:** Criar uma fórmula para a_n :

- Na célula B1, digite $a(n)$.
- Escolha uma sequência. Por exemplo, $a_n = 3 + 2n$, insira a fórmula em B2:

$$= 3 + 2 * A2$$

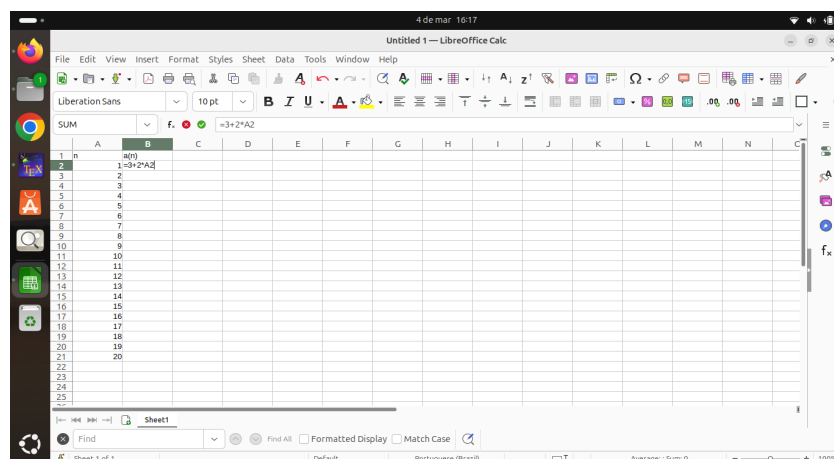


Figura 3.7: Inserindo a_n

- **Passo 4:** Para preencher os próximos valores de a_n , clique na célula B2 e arraste para baixo ate B21.

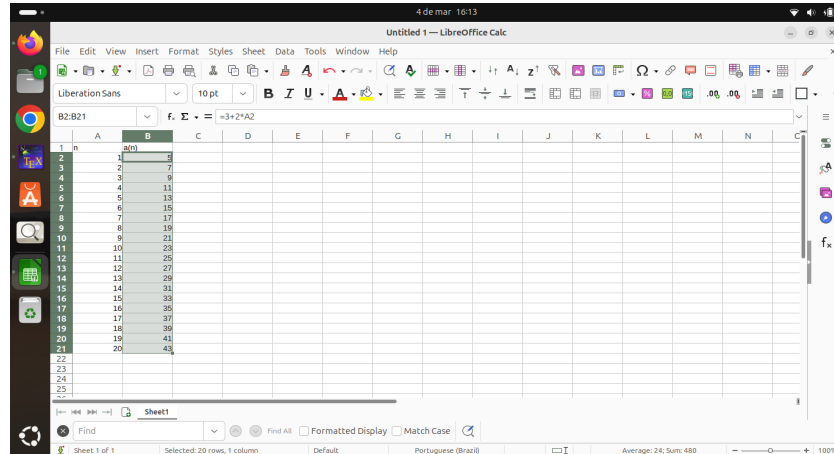


Figura 3.8: planilha associando n a a_n

No LibreOffice, é possível ajustar as fórmulas para diferentes tipos de sequências. Por exemplo, o professor pode orientar os alunos na construção das seguintes sequências:

Tipo de Sequência	Fórmula no LibreOffice Calc
$a_n = 100 - 10n$	=100-10*A2
$a_n = 5 + 2n$	=5+2*A2
Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	=B1+B2 (usar preenchimento automático a partir de B3)
$a_n = 2^n$	=2^A2
$a_n = 5 \times 3^{n-1}$	=5 * 3^(A2-1)

Tabela 3.3: Fórmulas para diferentes sequências no LibreOffice Calc

- **Passo 5:** Para calcular a soma dos termos, escolha uma célula vazia (por exemplo, B22) e utilize a função soma:

$$=SOMA(B2 : B21)$$

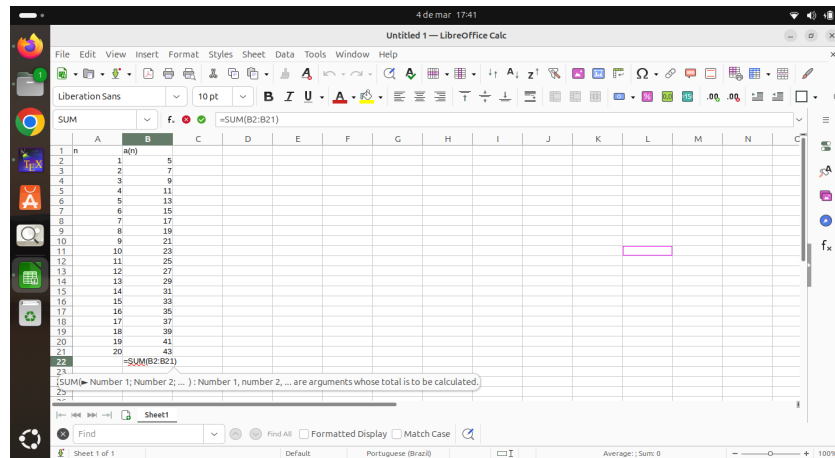


Figura 3.9: Função soma

- **Passo 6:** Depois de digitar a função soma, pressione Enter. A célula B22 exibirá a soma dos valores de B2 até B21. No caso do exemplo, o cálculo seria:

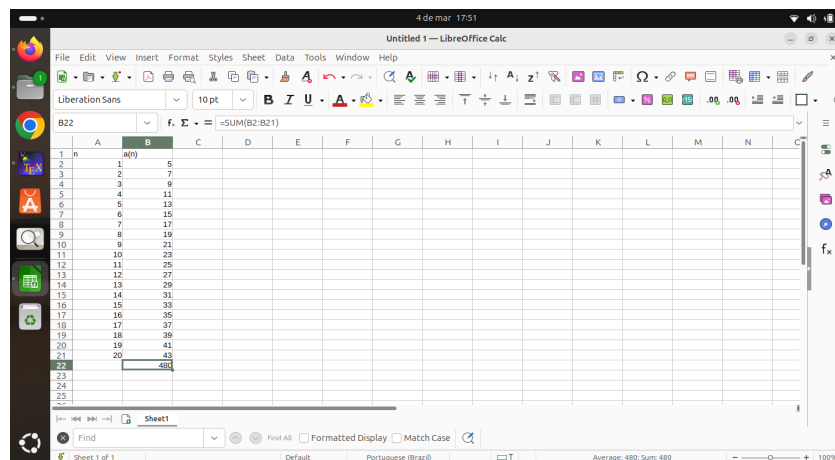


Figura 3.10: Soma dos valores de B2 até B21

Observação 3.5.1. Como prática, o professor pode orientar os alunos na soma dos termos das sequências apresentadas na Tabela 3.3.

3.6 Dinâmica 2: Formulação do Conceito de Progressão Aritmética a Partir do Cálculo do Valor de uma Corrida de Táxi

3.6.1 Apresentação do problema

O professor pode iniciar a aula contextualizando o problema, utilizando a seguinte sugestão ou outra que ele achar conveniente:

O que vocês acham que acontece com o valor de uma corrida de táxi à medida que a distância percorrida aumenta? Será que o custo cresce de maneira constante? E como podemos prever o valor total da corrida antes mesmo de entrar no táxi?

Nesta atividade, vamos investigar essas questões e, de forma intuitiva, deduzir um conceito matemático chamado Progressão Aritmética. Ao final, vocês não apenas compreenderão como funciona a tarifação de táxis, mas também serão capazes de aplicar a ideia de progressão aritmética em diversas situações do dia a dia.

A seguir, o professor deve organizar os alunos em grupos e propor uma investigação sobre como funciona a tarifação de táxis na cidade de Várzea Grande. Para isso, os alunos podem utilizar diferentes métodos de pesquisa, como:

- Consultar a tabela de tarifas por meio de pesquisas na internet, utilizando os Chromebooks disponibilizados pela escola;
- Sair às ruas para entrevistar motoristas de táxi e obter informações diretamente com os profissionais;
- Simular corridas em aplicativos de transporte para comparar valores e formas de cobrança;
- Ou adotar outras estratégias de investigação que o professor considerar relevantes.

O objetivo é que os alunos colem dados reais e concretos, tais como:

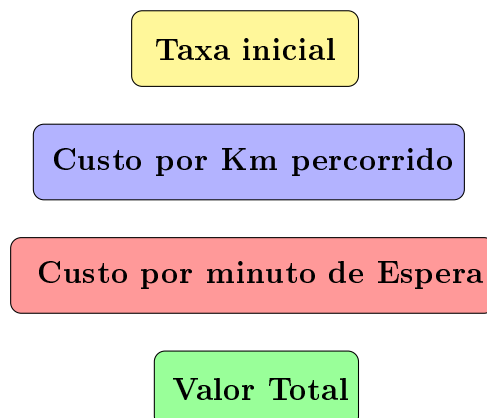


Figura 3.11: Dados reais presentes em uma corrida de táxi

1. **Taxa inicial (Bandeirada):** Quando o passageiro entra no táxi, é cobrado um valor fixo conhecido como "bandeirada". Essa taxa representa a tarifa básica, que cobre os custos iniciais da corrida, independentemente da distância percorrida.
2. **Custo por quilômetro percorrido:** Após a bandeirada, o valor da corrida aumenta conforme o táxi percorre a distância. Esse aumento costuma ser constante, ou seja, a cada quilômetro percorrido, há uma taxa adicional registrada no taxímetro, um dispositivo instalado nos táxis para medir automaticamente a distância percorrida e o tempo gasto durante a corrida.
3. **Custo por tempo de Espera:** Se o táxi permanecer parado por algum motivo (como no trânsito ou aguardando o passageiro), pode haver cobrança por tempo de espera. Esse valor é geralmente calculado de forma contínua, com base nos minutos parados.
4. **Valor total:** Denotando a taxa inicial por B , o custo por quilômetro percorrido por C e o custo por minuto de espera por T , o valor de uma corrida de táxi é dado por:

$$V = B + C(d) + T(t),$$

onde d representa a quantidade de quilômetros percorridos e t o tempo de espera em minutos.

3.6.2 Intervenção pedagógica para formulação do conceito de Progressão Aritmética

Para deduzir o conceito de progressão aritmética a partir do valor de uma corrida de táxi, o professor deve orientar os alunos a considerar um cenário em que não há custo

adicional por tempo de espera. Suponha que, ao investigar a tarifação de táxis em Várzea Grande, os alunos descobriram que a tarifa inicial é $B = R\$ 5$ e o custo por quilômetro percorrido é $C = R\$ 2$. Nesse momento, o professor pede a cada grupo de alunos que calcule o custo de uma corrida para diferentes distâncias:

Quilometragem	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor em reais	7	9	11	13	15	17	19	21

Tabela 3.4: Valor da corrida por quilômetro percorrido

A partir da Tabela 3.4, os alunos obtêm a seguinte sequência de números:

$$7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \dots \quad (3.1)$$

Com base nessa sequência de valores, o professor pode estimular a análise dos grupos com as seguintes perguntas:

1. Qual a diferença entre um valor e o anterior?

- **Resposta:** Sempre $9 - 7 = 2$, $11 - 9 = 2$, etc.

2. Como os valores estão aumentando?

- **Resposta:** A cada quilômetro, o valor aumenta em 2 reais.

Agora que os alunos identificaram um padrão de crescimento constante na sequência de valores da corrida, o professor pode formalizar esse conceito como uma progressão aritmética.

O que é uma Progressão Aritmética?

Uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se um mesmo valor fixo ao termo anterior. Esse valor fixo é chamado de razão da Progressão Aritmética e é geralmente denotado por r .

Após o professor apresentar o conceito de progressão aritmética, os alunos devem ser capazes de reconhecer que a sequência de valores (3.1) gerada pelo problema do táxi é uma progressão aritmética de razão $r = 2$.

Continuando nossa análise da sequência (3.1), o próximo objetivo é deduzir a fórmula do termo n -ésimo. Para isso, o professor pode estimular os alunos com a seguinte pergunta:

3. Existe um critério para determinar cada termo da sequência de valores (3.1)?

- **Resposta:** Sim! Os alunos podem perceber que sempre somamos 2 repetidamente, de acordo com a quantidade de quilômetros percorridos:
 - Para $d = 1 \text{ km}$: $V_1 = R\$ 7$.
 - Para $d = 2 \text{ km}$: $V_2 = R\$ 9 = R\$ 7 + R\$ 2$.
 - Para $d = 3 \text{ km}$: $V_3 = R\$ 11 = R\$ 7 + R\$ 2 + R\$ 2$.
 - Para $d = 4 \text{ km}$: $V_4 = R\$ 13 = R\$ 7 + R\$ 2 + R\$ 2 + R\$ 2$.
 - E assim por diante, os grupos podem notar que os termos da sequência (3.1) segue um padrão:

$$V_d = 7 + \overbrace{2 + 2 + \cdots + 2}^{d-1}, \quad d = 1, 2, \dots$$

Neste ponto, o professor deve introduzir a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Termo Geral

Dada uma progressão aritmética $V_1, V_2, V_3, \dots$ de razão r , temos que a relação entre os termos é dada por:

$$V_d = V_1 + (d - 1)r, \quad d = 1, 2, \dots$$

Os alunos devem ser capazes de perceber que, como a sequência (3.1) é uma progressão aritmética de razão 2, a fórmula do termo geral permite calcular diretamente o valor da corrida para qualquer distância d percorrida, sem a necessidade de montar a sequência completa.

Observação 3.6.1. *Como exercício, o professor pode pedir que os alunos utilizem o LibreOffice, conforme demonstrado na Dinâmica 1, para calcular os 20 primeiros termos da progressão 3.1.*

3.7 Dinâmica 3: Descobrendo a Fórmula da Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética de Forma Prática com Canudos

Nesta dinâmica, buscamos conduzir os alunos à dedução intuitiva da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética por meio da utilização de canudos.

3.7.1 Materiais

Durante o desenvolvimento da dinâmica, serão necessários os seguintes materiais:

- Canudos de cores variadas (ou palitos, tiras de papel, etc.);
- Tesoura;
- Fita adesiva ou cola;
- Régua (opcional, para medir os canudos);
- Folha de papel ou cartolina para anotações.

3.7.2 Apresentação do problema

O professor pode começar a aula contextualizando o problema, seguindo esta sugestão ou ajustando conforme achar mais apropriado:

Vocês já perceberam como muitos objetos ao nosso redor possuem formas geométricas, como quadrados e pentágonos? E se pudéssemos construir uma torre com essas figuras utilizando materiais simples, como canudos? Agora, imaginem que estamos construindo a seguinte torre com canudos:

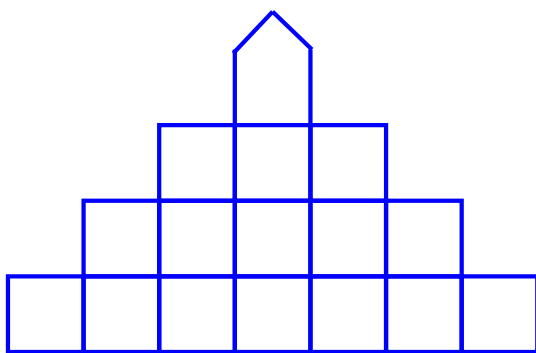


Figura 3.12: Torre de canudos

Quantos canudos seriam necessários para construir uma torre de 100 andares, seguindo esse padrão?

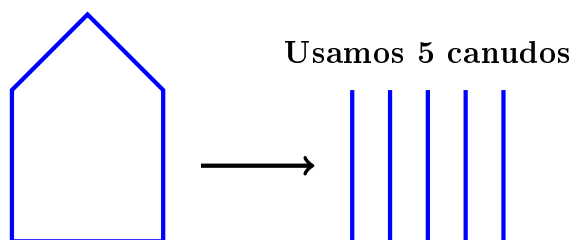
Para incentivar os alunos a resolver o problema de calcular o número de canudos necessários para construir a torre, o professor pode fazer perguntas que os ajudem a identificar o padrão e a aplicar conceitos matemáticos de forma lógica. Aqui estão algumas sugestões de perguntas:

- Qual é a quantidade de canudos usada para construir o ultimo andar? E para o penúltimo?
- Você consegue identificar um padrão entre o número de canudos usados para construir os andares da torre? Quantos canudos a mais são adicionados para cada andar?
- Como podemos expressar a quantidade de canudos usados para construir o n-ésimo andar?
- Qual seria a fórmula para calcular o total de canudos necessários para construir a torre?

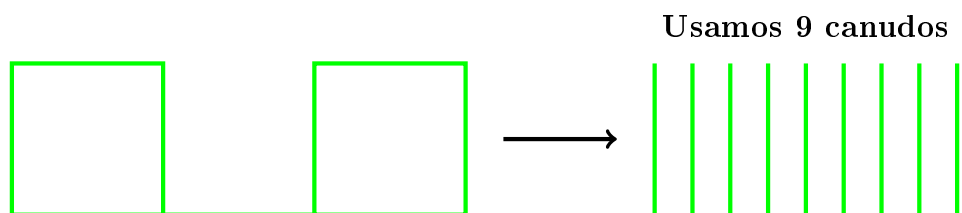
3.7.3 Intervenção pedagógica para a formulação da soma dos termos de uma Progressão Aritmética

O professor deve dividir a turma em grupos de 3 a 5 alunos, dependendo do tamanho da classe. Cada grupo receberá um pacote de canudos e os materiais necessários, como régua, tesoura e fita adesiva ou cola. Em seguida, o professor deve orientar cada grupo a cortar os canudos em tamanhos específicos, garantindo precisão com o uso da régua. Após o corte, o professor deve seguir as seguintes etapas:

1. **Montagem da progressão aritmética:** Nesta etapa, o professor deve incentivar os alunos a construir o último andar da torre utilizando os canudos previamente preparados. Durante essa construção, os alunos devem observar que são necessários exatamente 5 canudos para completar essa parte da estrutura. Em seguida, os alunos devem registrar essa quantidade em uma folha de papel.



Continuando a construção da torre, o professor deve orientar cada grupo a montar o penúltimo andar da torre e registrar a quantidade de canudos utilizados. Nesse nível, são necessários 9 canudos.

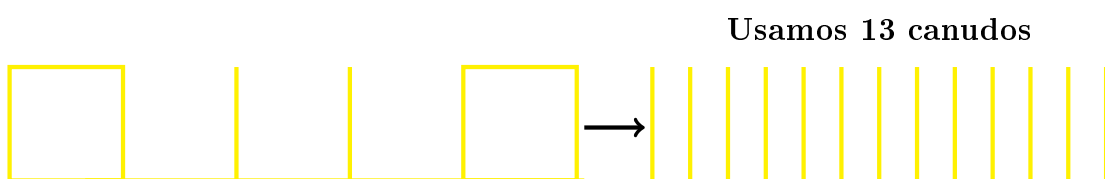


Neste momento, o professor deve questionar os alunos:

- "A quantidade de canudos utilizados no penúltimo andar é maior ou menor do que no último andar?"

Resposta: Os alunos devem observar que a quantidade de canudos utilizados aumenta em 4 unidades em relação ao último andar.

Depois, o professor deve solicitar que cada grupo construa o antepenúltimo andar da torre e registre a quantidade de canudos utilizados nessa etapa. No antepenúltimo andar, são necessários 13 canudos para a construção da figura.



Novamente, o professor pode estimular discussões entre os grupos, promovendo questionamentos como:

- Quantos canudos a mais o antepenúltimo andar tem em relação ao penúltimo?

Resposta: Os alunos observam e concluem que há 4 canudos a mais.

- Como podemos prever quantos canudos serão necessários para construir um novo andar da torre?

Resposta: Os alunos identificam um padrão na sequência e percebem que basta adicionar 4 canudos a cada novo andar

À medida que os alunos analisam os dados obtidos, eles começam a reconhecer um padrão numérico na quantidade de canudos necessários para cada nível da torre. Seguindo essa lógica e observando as figuras, eles chegam à seguinte sequência de números:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots \quad (3.2)$$

2. **Cálculo da Soma:** Usando o conhecimento adquirido na Dinâmica 2, os alunos devem ser capazes de observar que a sequência apresentada em (3.2) é uma progressão aritmética de razão $r = 4$. Dessa forma, para determinar a quantidade de canudos utilizados nos primeiros andares da torre, os alunos podem utilizar a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética:

Por exemplo, usando essa fórmula, o professor pode pedir a cada grupo que calcule os termos 98, 99 e 100 da sequência (3.2). Assim, temos:

$$\begin{aligned} V_{98} &= 5 + (97)4 = 393 \\ V_{99} &= 5 + (98)4 = 397 \\ V_{100} &= 5 + (99)4 = 401 \end{aligned}$$

Assim, os alunos devem observar que a progressão aritmética dada em (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots, 393, 397, 401$$

Agora, o professor deve pedir a cada grupo que emparelhe os termos extremos, observando o padrão na soma:

50 pares

Soma de cada par é 406	5	9	13	$\dots$	201
	401	397	393	$\dots$	205

Figura 3.13: Quantidade de canudos em cada par de termos extremos

Observação 3.7.1. A Figura 3.13 pode ser reproduzida por cada grupo utilizando canudos, substituindo os números pela quantidade correspondente de canudos e contando-os para determinar o total em cada par de termos extremos. No entanto, essa construção não foi realizada aqui, pois a torre que desejamos construir possui 100 andares.

Da Figura 3.13,

$$\begin{aligned} V_1 + V_{100} &= 5 + 401 = 406 \\ V_2 + V_{99} &= 9 + 397 = 406 \\ V_3 + V_{98} &= 13 + 393 = 406 \\ &\vdots \end{aligned}$$

O professor questiona:

- O que vocês observam sobre a soma dos pares?

Resposta: Cada grupo deve notar que cada par apresenta a mesma soma.

Como há um total de $50 = 100/2$ pares, a soma dos 100 primeiros termos da progressão (3.2) pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{100} &= (V_1 + V_{100}) + (V_2 + V_{99}) + (V_3 + V_{98}) + \cdots + (V_{50} + V_{51}) \\ &= \frac{100}{2}(V_1 + V_{100}) \\ &= 20300 \end{aligned}$$

representa a quantidade de canudos necessários para construir uma torre de 100 andares.

Esse processo permite que os alunos compreendam a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética

Soma dos termos de uma Progressão Aritmética

Dada uma progressão aritmética $V_1, V_2, V_3, \dots$ de razão r , temos que a soma dos d primeiros termos é dada por

$$S_d = \frac{d}{2}(V_1 + V_d).$$

Dessa forma, os alunos conseguem calcular rapidamente a soma dos termos de uma progressão aritmética sem precisar somar termo por termo, desenvolvendo o raciocínio matemático e a compreensão sobre padrões numéricos.

Observação 3.7.2. *Como exercício, o professor pode pedir que os alunos utilizem o LibreOffice, conforme desenvolvido na Dinâmica 1, para verificar que a quantidade de canudos é, de fato, 20.300.*

3.8 Dinâmica 4: O Crescimento do COVID-19 e a Matemática das Progressões Geométricas

Nesta dinâmica, exploraremos o conceito de progressões geométricas através de um problema contextualizado: a pandemia de COVID-19. A partir dessa situação, deduziremos as fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma progressão geométrica.

3.8.1 Apresentação do problema

O professor pode iniciar a aula contextualizando o problema, utilizando a seguinte sugestão ou outra que ele achar conveniente:

Você faz parte de uma equipe de cientistas em Várzea Grande, trabalhando na linha de frente da saúde pública. A cidade enfrenta um surto de COVID-19, uma doença nova e altamente contagiosa. Para conter a propagação e proteger a população, é essencial compreender a dinâmica de contágio. Inicialmente, uma pessoa infectada é identificada. No primeiro minuto, essa pessoa transmite o vírus para duas outras. No minuto seguinte, cada uma dessas duas infectadas transmite para mais duas, e assim sucessivamente. Se a transmissão continuar nesse ritmo, quantas pessoas podem ser infectadas ao final de uma hora?

Para incentivar os alunos a resolver o problema, o professor pode fazer perguntas que os ajudem a identificar padrões e a aplicar conceitos matemáticos de forma lógica. Aqui estão algumas sugestões de perguntas:

- Quantas novas infecções ocorrem a cada minuto? Vocês conseguem identificar um padrão nesse crescimento?
- Se essa doença continuar se espalhando nesse ritmo, vocês acham que muitas pessoas ficarão doentes rapidamente? Como podemos prever isso?
- Como podemos calcular o número total de pessoas infectadas após um determinado número de minutos?
- O que aconteceria se cada pessoa infectada transmitisse o vírus para três pessoas em vez de duas? Como isso afetaria o crescimento?
- Por que é importante entender esse tipo de crescimento para tomar decisões em saúde pública?

3.8.2 Intervenção pedagógica para formulação do conceito de Progressão Geométrica

Com o objetivo de auxiliar os alunos na compreensão do padrão de crescimento da infecção, o professor deve dividir os alunos em grupos e pedir que simulem a propagação do vírus minuto a minuto, anotando o número de infectados a cada minuto. O professor pode propor a seguinte pergunta:

- Quantas novas infecções ocorrem a cada minuto?

Para melhorar o entendimento do número de infectados a cada minuto, o professor pode sugerir a cada grupo, antes de responder à pergunta, a criação da seguinte representação visual:

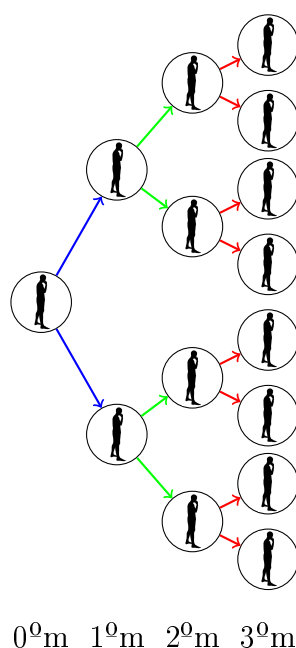


Figura 3.14: Número de infecções por minuto

Resposta:

- **0º minuto:** 1 pessoa infectada.
- **1º minuto:** 2 novas pessoas infectadas.
- **2º minuto:** 4 novas pessoas, pois cada uma das duas pessoas infectadas no minuto 1 infectou outras duas.

- o **3º minuto:** 8 novas pessoas infectadas, resultado da propagação do vírus por cada um dos quatro infectados no segundo minuto, que transmitiram a doença para duas pessoas cada.
- o E assim por diante.

Usando a Figura 3.14, o professor incentiva os alunos a criar a seguinte tabela:

Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7
Pessoas infectadas	1	2	4	8	16	32	64	128

Tabela 3.5: Pessoas infectadas a cada minuto

A partir da Tabela 3.5, os alunos obtêm a seguinte sequência de números:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots \quad (3.3)$$

Com base nessa sequência de valores, o professor pode estimular a análise dos grupos com as seguintes perguntas:

1. Qual a relação entre o número de infectados em um minuto e o número de infectados no minuto seguinte?

- **Resposta:** Sempre $2 \div 1 = 2$, $4 \div 2 = 2$, $8 \div 4 = 2$, etc.

2. Como os valores estão aumentando?

- **Resposta:** A cada minuto, a quantidade de infectados duplica.

Após os alunos identificarem o padrão de crescimento constante na sequência de infectados, o professor pode introduzir o conceito de progressão geométrica para formalizar essa observação.

O que é uma Progressão Geométrica?

Uma Progressão Geométrica é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do termo anterior por um valor constante. Esse valor constante é chamado de razão da progressão geométrica, geralmente representado pela letra q . A razão pode ser um número positivo, negativo ou fracionário.

Após o professor apresentar o conceito de progressão geométrica, os alunos devem ser capazes de reconhecer que a sequência de valores (3.3) gerada pelo problema é uma progressão geométrica de razão $q = 2$.

Continuando nossa análise da sequência (3.3), o próximo objetivo é deduzir a fórmula do termo n -ésimo da progressão geométrica. Para isso, o professor pode guiar os alunos por meio de perguntas que os incentivem a pensar de forma crítica e a descobrir a fórmula por si mesmos. Uma abordagem possível é:

3. Existe um critério para determinar cada termo da sequência de valores (3.3)?

• **Resposta:** Sim!. Definindo p_t como o número de pessoas infectadas no minuto t , temos que:

- Para 0º minuto: $p_0 = 1$.
- Para 1º minuto: $p_1 = 2 = 1 \times 2$.
- Para 2º minuto: $p_2 = 4 = 1 \times 2 \times 2$
- Para 3º minuto: $p_3 = 8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$.
- Para 4º minuto: $p_4 = 16 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- E assim por diante, os grupos podem notar que os termos da sequência (3.3) segue um padrão:

$$p_n = 1 \times \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Neste ponto, o professor deve introduzir a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

Termo Geral

Dada uma progressão geométrica $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ de razão q , temos que a relação entre os termos é dada por:

$$p_t = p_0 q^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Os alunos devem perceber que, como a sequência (3.3) é uma progressão geométrica de razão 2, a fórmula do termo geral possibilita calcular diretamente a quantidade de novas pessoas infectadas em qualquer minuto t , sem a necessidade de construir a sequência completa minuto a minuto. Essa eficiência é uma das vantagens de utilizar a fórmula geral da progressão geométrica, permitindo uma análise rápida e precisa do crescimento do contágio ao longo do tempo.

Observação 3.8.1. *A fórmula do termo geral aqui é diferente daquela apresentada em (2.5) porque, neste caso, a progressão geométrica inicia no termo zero, enquanto em (2.5) a progressão geométrica inicia a partir do termo um. Essa diferença no índice inicial afeta a expressão do termo geral.*

Dando continuidade à análise da sequência apresentada em (3.3), nosso objetivo agora é deduzir a quantidade total de pessoas infectadas em uma hora. Esse procedimento nos permitirá estabelecer a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Usando fórmula do termo geral, o professor pode pedir a cada grupo que calcule os termos 58, 59 e 60 da sequência (3.3). Assim, temos:

$$p_{58} = 2^{58}, \quad p_{59} = 2^{59} \text{ e } p_{60} = 2^{60}. \quad (3.4)$$

Observação 3.8.2. *O professor deve destacar aos alunos que os números obtidos são extremamente grandes. Por exemplo, após 60 minutos, o modelo prevê*

$$2^{60} = 1.152.921.504.606.846.976.260$$

novas pessoas infectadas. Esse crescimento ilustra como a COVID-19 é uma doença altamente contagiosa e perigosa, ressaltando a importância de medidas de contenção.

Portanto, a partir de (3.4), os alunos devem perceber que a progressão geométrica apresentada em (3.3) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{58}, 2^{59}, 2^{60}.$$

Neste momento, o professor propõe a seguinte questão:

- Como podemos determinar o número total de pessoas infectadas?

Resposta: A quantidade total de pessoas infectadas corresponde à soma dos 61 termos da progressão (3.3), que pode ser expressa por:

$$S_{61} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60}.$$

- A soma pode ser calculada facilmente?

Resposta: Não! Pois os termos tornam-se muito grandes a partir do 11º termo.

Vamos descobrir um jeito de calcular isso de forma mais rápida.

- O que aconteceria se pegássemos todos os termos de S_{61} e os multiplicássemos por 2?

Resposta: A nova soma seria:

$$2S_{61} = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{59} + 2^{60}.$$

- O que acontece quando subtraímos S_{61} de $2S_{61}$?

Resposta: Após a subtração, restou

$$\begin{aligned} 2S_{61} - S_{61} &= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{60} + 2^{61}) - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2^{61} - 1. \end{aligned}$$

- Qual é a forma mais simples de expressar S_n após a subtração?

Resposta: Podemos factorar S_{61} para obter:

$$S_{61}(2 - 1) = 2^{61} - 1.$$

e, portanto,

$$S_{61} = \frac{2^{61} - 1}{2 - 1}$$

representa o número total de pessoas infectadas após uma hora.

Em seguida, o professor deve destacar que os alunos chegaram à fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica e apresentá-la formalmente.

Soma dos termos de uma Progressão Geométrica

Dada uma progressão geométrica $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ de razão q , temos que a soma dos t primeiros termos é dada por

$$S_t = \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Observação 3.8.3. *Como exercício, o professor pode pedir que os alunos utilizem o LibreOffice Calc, seguindo o método desenvolvido na Dinâmica 1, para calcular a quantidade total de pessoas infectadas após uma hora. Essa atividade permitirá que os alunos apliquem os conceitos de sequências numéricas e funções em um contexto prático, reforçando o aprendizado de forma interativa*

Conclusão

Este trabalho teve como objetivo auxiliar os professores do ensino básico das escolas públicas, com ênfase especial nos docentes da Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro, em Várzea Grande, Mato Grosso, diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem de sequências e progressões numéricas. Para isso, adotamos a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), utilizando atividades contextualizadas no cotidiano dos alunos. Os resultados indicam que essa estratégia favorece o pensamento crítico, a organização de ideias e a argumentação matemática, tanto por parte dos alunos quanto dos professores.

Ao atuar como mediador desse processo, o professor amplia sua percepção sobre o ensino da matemática, compreendendo que essa disciplina vai além da mera aplicação de fórmulas e técnicas. Ela está profundamente conectada à construção do conhecimento a partir da realidade dos estudantes. Além disso, a utilização de ferramentas tecnológicas, como o LibreOffice, mostrou-se um recurso valioso para potencializar a compreensão e a visualização dos conceitos matemáticos, permitindo simulações interativas e tornando o ensino mais acessível, dinâmico e eficaz.

Dessa forma, concluímos que este trabalho pode contribuir significativamente para o ensino-aprendizagem da matemática, servindo tanto como material de apoio na elaboração de planos de aula quanto como referência para oficinas matemáticas. Nessas oficinas, os professores podem aprofundar o estudo das definições e propriedades das sequências e progressões, promovendo uma experiência de aprendizado mais interativa e significativa.

Por fim, a integração adequada dessas temáticas ao currículo escolar pode transformar o ensino da matemática em uma jornada mais envolvente e eficaz. Além de colaborar para a melhoria dos índices de desempenho dos alunos, essa abordagem contribui para

a formação de cidadãos críticos, capazes de aplicar conceitos matemáticos em diferentes contextos do cotidiano. Embora sua implementação represente um desafio, quando aliada à dedicação e à inovação pedagógica, tem o potencial de gerar impactos positivos e duradouros na educação.

Referências Bibliográficas

- [1] Ausubel, David P.; *A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes, 1982.
- [2] Ávila, Geraldo S.; *Introdução à análise matemática*, Ed. 2, São Paulo, SP, Editora. Edgard Blücher Ltda, 1999.
- [3] Boyer, Carl B.; *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [4] Carvalho, Silva; Costa, Maria C.; *Padrões Numéricos e Seqüências*. São Paulo: Moderna, 1997
- [5] Cunha, João Francisco E.; *Sequências e Séries: abordagem e aplicações no ensino médio*. São Luís, MA, 2014.
- [6] D'Ambrosio, U.; *Etnomatemática—elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [7] Freire, Paulo; *Educação como prática da liberdade*. 30^a ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2007.
- [8] Lima, Elon Lages; *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] Eves, Howard; *Introdução a história da matemática*. Tradução Hygino H.Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [10] Lopes, Luis; *Manual de Progressões*. Rio de Janeiro: Interciência 1998.
- [11] Piaget, J.; *O nascimento da inteligência na criança*. 3.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- [12] Proença, M. C.; *Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula*. Maringá: EdUEM, 2018.

- [13] Souza, Samir; Dourado, Luis; *Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo*. HOLOS, Natal, v. 5, n. 31, p. 182-200, 2015. D
- [14] Stillwell, John; *Mathematics and its history*. New York: Springer 1989.

Apêndice

4.1 Teste diagnóstico

O teste foi aplicado na Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro e teve uma duração de duas horas. A avaliação possibilitou observar diferentes níveis de dificuldade entre os alunos no aprendizado de sequências matemáticas, com ênfase em progressões aritméticas e geométricas.

A seguir, apresentamos os resultados dos testes de dois alunos. O primeiro aluno demonstrou certa familiaridade com as progressões aritméticas, conseguindo resolver algumas questões corretamente. Esse desempenho sugere que ele possui um entendimento inicial sobre os padrões dessas sequências e a lógica por trás de sua construção. No entanto, também foram notadas lacunas conceituais e dificuldades na aplicação de fórmulas e estratégias de resolução.

Por outro lado, ao se deparar com questões sobre progressões geométricas, o aluno encontrou dificuldades significativamente maiores, não conseguindo resolvê-las de forma satisfatória. Esse resultado sugere que sua familiaridade com esse conteúdo é bastante limitada, possivelmente devido à complexidade adicional imposta pela natureza multiplicativa dessas sequências em comparação com o caráter aditivo das progressões aritméticas.

A ausência de respostas corretas ou estratégias adequadas para abordar as questões revela a necessidade de um trabalho pedagógico mais aprofundado nesse tema, abordando desde os conceitos fundamentais até a aplicação prática das fórmulas e propriedades das

progressões geométricas.

Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro

Aluno(a): _____

Profº: Josué Silvino

Turma: 3ª ano C

Atividades Diagnósticas

Questão 1: Considere a sequência (3, 7, 11, 15, ...). Qual é o 10º termo dessa progressão aritmética?

3, 7, 11, 15... $\frac{?}{a_{10}}$ $n = 4$

$$10^\circ = 39$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 4$$

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 4$$

$$a_{10} = 3 + 36$$

$$a_{10} = 39$$

Questão 2: A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. Sabendo que o primeiro termo é 5 e a razão é 10, qual é o valor do 15º termo?

5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125, 135... $\frac{?}{a_{15}}$ $n = 10$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{15} = 5 + (15-1) \cdot 10$$

$$a_{15} = 5 + 14 \cdot 10$$

$$a_{15} = 5 + 140$$

$$a_{15} = 145$$

$$15^\circ = 145$$

Questão 3: Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razão é $r = 6$. Qual é o valor do termo a_8 ?

$$a_8 = 4 + (8-1) \cdot 6$$

$$a_8 = 4 + 7 \cdot 6$$

$$a_8 = 4 + 42$$

$$a_8 = 46$$

Questão 4: A sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma progressão geométrica. Qual é o 6º termo dessa progressão?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_6 = 2 + 3^{5-1}$$

$$a_6 = 2 + 3^5$$

$$a_6 = 2 + 243$$

$$a_6 = 245$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Questão 5: A soma dos 4 primeiros termos de uma progressão geométrica é 30. Sabendo que o primeiro termo é 3 e a razão é 2, qual é o 4º termo dessa progressão?

$$Q_4 = 3 + 2^{4-1}$$

$$Q_4 = 3 + 2^3$$

$$Q_4 = 3 + 8$$

$$Q_4 = 11$$

E

Questão 6: Se a razão de uma progressão geométrica é $q = \frac{1}{2}$ e o primeiro termo é $a_1 = 8$, qual é o valor do 5º termo?

?

Questão 7: Considere a progressão geométrica (3,6,12,24,...). Determine a razão dessa PG.

?

Questão 8: Dada a progressão aritmética 2,5,8,11,..., determine a razão dessa PA.

?

Questão 9: Dada a progressão geométrica 5,10,20,40,... responda:

a) Qual é a razão da progressão?

?

b) Qual é o 6º termo dessa progressão?

?

c) Qual é a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão?

?

O segundo aluno apresentou dificuldades significativas em ambos os temas, não conseguindo acertar nenhuma das questões propostas. Esse resultado indica que ele pode enfrentar desafios tanto na compreensão conceitual quanto na aplicação prática das progressões, sugerindo, assim, a necessidade de um acompanhamento pedagógico mais

direcionado para ajudá-lo a desenvolver as habilidades necessárias.

Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro

Aluno(a):

Data:

Profº: Josué Silvino

Turma: 3º C

Atividades Diagnósticas

Questão 1: Considere a sequência (3, 7, 11, 15, ...). Qual é o 10º termo dessa progressão aritmética?

$$a_{10} = 3 + (10 - 1) \cdot 4$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 4$$

$$a_{10} = 27 + 4$$

$$a_{10} = 31$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Questão 2: A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. Sabendo que o primeiro termo é 5 e a razão é 10, qual é o valor do 15º termo?

$$a_{15} = 5 + (15 - 1) \cdot 10$$

$$a_{15} = 5 + 14 \cdot 10$$

$$a_{15} = 5 + 140$$

$$a_{15} = 145$$

Questão 3: Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razão é $r = 6$. Qual é o valor do termo a_8 ?

$$a_8 = 4 + 8 \cdot 6$$

$$a_8 = 4 + 48$$

$$a_8 = 52$$

$$a_8 = 52$$

Questão 4: A sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma progressão geométrica. Qual é o 6º termo dessa progressão?

$$a_6$$

Questão 5: A soma dos 4 primeiros termos de uma progressão geométrica é 30. Sabendo que o primeiro termo é 3 e a razão é 2, qual é o 4º termo dessa progressão?

$$a_4 = 3 \cdot (4-1) \cdot 2$$

$$a_4 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$a_4 = 3 \cdot 6$$

$$a_4 = 18$$



Questão 6: Se a razão de uma progressão geométrica é $q = \frac{1}{2}$ e o primeiro termo é $a_1 = 8$, qual é o valor do 5º termo?

?

Questão 7: Considere a progressão geométrica (3,6,12,24,...). Determine a razão dessa PG.

?

Questão 8: Dada a progressão aritmética 2,5,8,11,..., determine a razão dessa PA.

?

Questão 9: Dada a progressão geométrica 5,10,20,40,... responda:

a) Qual é a razão da progressão?

?

b) Qual é o 6º termo dessa progressão?

?

c) Qual é a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão?

?

Diante desses resultados, torna-se evidente a necessidade de estratégias pedagógicas diferenciadas para atender às dificuldades individuais de cada aluno.

4.2 Ranking e painel do IDEB da Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro

Na Figura 4.1 e 4.2, é apresentado o ranking do IDEB, que reflete o desempenho dos alunos em Matemática em diferentes instituições de ensino. Nesse contexto, observa-se que a Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro ocupa uma das últimas posições, evidenciando desafios no aprendizado dessa disciplina. Esse resultado ressalta a necessidade de uma análise mais aprofundada dos fatores que podem estar influenciando esse desempenho, como metodologias de ensino, recursos disponíveis, formação docente e engajamento dos alunos. A partir dessa análise, podem ser propostas estratégias pedagógicas mais eficazes para melhorar os índices de aprendizagem e, consequentemente, elevar a posição da escola no ranking.

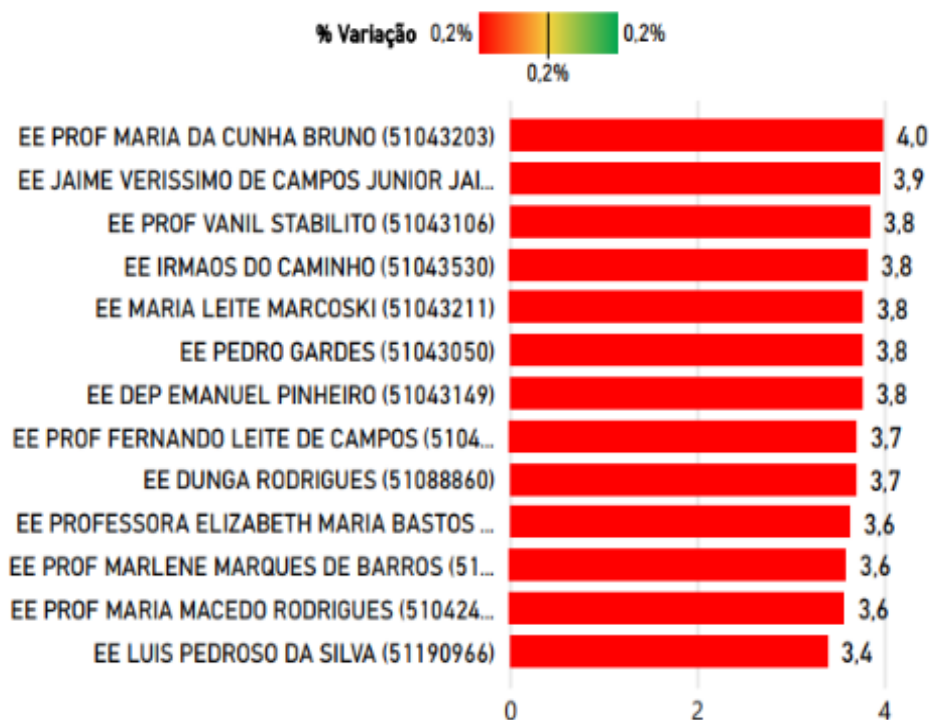


Figura 4.1: Ranking do IDEB das escolas de Mato Grosso

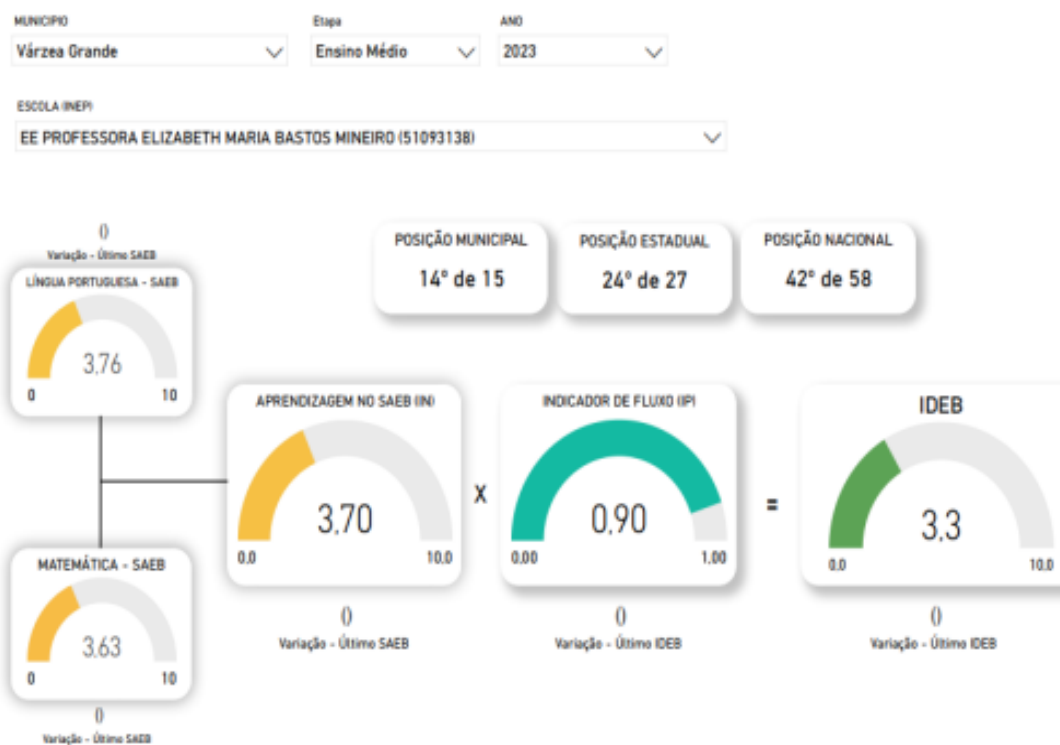


Figura 4.2: Painel do IDEB da Escola Estadual Professora Elizabeth Maria Bastos Mineiro