Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Warley Taveira Santos

A Harmonia dos Números: A Matemática das Escalas Musicais

Cuiabá/MT, 05 de Agosto 2025

Warley Taveira Santos

A Harmonia dos Números: A Matemática das Escalas Musicais

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ciências e Humanidades para a Educação Básica. Linha de pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica.

Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes
Orientador

Cuiabá - MT Cuiabá/MT, 05 de Agosto 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237h Santos, Warley Taveira.
A Harmonia dos Números: A Matemática das Escalas Musicais [recurso eletrônico] / Warley Taveira Santos. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 47 f., il. color., pdf). -- 2025.

Orientador: Ruikson Sillas de Oliveira Nunes.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2025.
Modo de acesso: World Wide Web: https://ri.ufmt.br.
Inclui bibliografia.

1. Escala Pitagórica. 2. Progressões Geométricas. 3. Interdisciplinaridade. 4. Ensino de Matemática. I. Nunes, Ruikson Sillas de Oliveira, *orientador.* II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT.ICET@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO**: A HARMONIA DOS NÚMEROS: A MATEMÁTICA DAS ESCALAS MUSICAIS**

AUTOR: **MESTRANDO WARLEY TAVEIRA SANTOS**

Dissertação defendida e aprovada em 5 de agosto de 2025.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes** (Presidente Banca/orientador)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
2. **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza** (Membro Interno)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
3. **Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini** (Membro externo)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Cuiabá, 05/08/2025.

Documento assinado eletronicamente por **ALDI NESTOR DE SOUZA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 05/08/2025, às 15:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **RUIKSON SILLAS DE OLIVEIRA NUNES**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 05/08/2025, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Alex Ferreira Rossini registrado(a) civilmente como Alex**, **Usuário Externo**, em 05/08/2025, às 17:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **8217049** e o código CRC **C8E466A0**.

Referência: Processo nº 23108.040389/2024-17 SEI nº 8217049

A meus queridos pais, que acreditaram em meu potencial e me incentivaram a estudar e sempre buscar conhecimento. Este trabalho é um reflexo de todo o amor e dedicação que vocês sempre me ofereceram.

Agradecimentos

É com imensa gratidão que venho agradecer a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes, meu mais sincero agradecimento pela confiança depositada, pela colaboração e pela orientação precisa que me acompanhou desde os primeiros passos na escolha do tema até a finalização desta dissertação.

Aos professores do Profmat, sou grato por cada aula, por cada conhecimento compartilhado e pela paixão com que nos guiaram. Aos meus colegas de curso, a troca de experiências e a colaboração mútua foram um grande diferencial em minha jornada, e sou especialmente grato às minhas queridas amigas Geisiane Vettorazzi e Joseane Santana, que com seu incentivo e apoio constante, tornaram este período de estudos mais leve e inspirador.

Aos meus colegas de trabalho, Gilma Profeta, Jucelene Sabala, Luciano Neris, Nayara Bigliardi e Tainá Camargo, meu reconhecimento pela confiança e incentivo que me deram para conciliar o trabalho com os estudos do mestrado.

Por fim, e não menos importante, aos meus amados pais, por sua presença, orações e por serem a base de todo o meu percurso. A satisfação e orgulho de vocês foi e sempre será a minha maior motivação.

Muito obrigado a todos.

Pitágoras não era só um filósofo,
era um DJ da Grécia Antiga,
misturando números e harmonia.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma proposta pedagógica que busca integrar a Matemática e a Música como estratégia para o ensino contextualizado e interdisciplinar no Ensino Médio. O foco central da investigação está na aplicação do conceito de progressão geométrica à estrutura das escalas musicais, demonstrando como as frequências sonoras se organizam de forma matemática. A pesquisa contempla uma revisão teórica sobre os fundamentos físicos do som, a história da relação entre música e matemática e a construção das escalas Pitagórica, Cromática e Temperada. Com base nesse referencial, foi desenvolvido um plano de aula que utiliza a música como recurso didático para o ensino de progressões geométricas, alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A proposta visa favorecer a aprendizagem significativa, a formação crítica e a ampliação do interesse dos estudantes pela matemática, por meio de uma abordagem inovadora e interdisciplinar.

Palavras chave: Ensino de Matemática; Escala Pitagórica; Progressões Geométricas; Interdisciplinaridade; Educação Contextualizada.

Abstract

This dissertation presents a pedagogical proposal aimed at integrating Mathematics and Music as a strategy for contextualized and interdisciplinary teaching in high school education. The core focus lies in applying the concept of geometric progression to the structure of musical scales, showing how sound frequencies are mathematically organized. The research includes a theoretical review of the physical foundations of sound, the historical relationship between music and mathematics, and the construction of the Pythagorean, Chromatic, and Equal Temperament scales. Based on this framework, a lesson plan was developed that uses music as a didactic resource to teach geometric progressions, in accordance with the guidelines of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC). The proposal aims to promote meaningful learning, critical thinking, and increased student interest in mathematics through an innovative and interdisciplinary approach.

Keywords: Mathematics Teaching; Pythagorean scale; Geometric Progressions; Interdisciplinarity; Contextualized Education.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de siglas

A seguir, segue-se as siglas utilizadas nesta dissertação.

Profmat	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional;
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso;
ICET	Instituto de Ciências Exatas e da Terra;
DMAT	Departamento de Matemática.

Sumário

Introdução

A matemática, por muitas vezes, é percebida nas salas de aula como um conjunto de fórmulas prontas e procedimentos mecânicos. Já a música, em contrapartida, costuma ser vista como uma forma de arte livre, intuitiva e profundamente emocional. No entanto, o que poucos percebem é que, por trás da harmonia sonora que tanto nos encanta, existe uma arquitetura precisa, fundamentada em relações matemáticas cuidadosamente construídas ao longo da história. E é justamente nesse ponto de encontro — entre a lógica e a sensibilidade — que este trabalho se desenvolve.

A proposta desta dissertação nasce do desejo de tornar o ensino da matemática mais acessível, significativo e inspirador para os estudantes do Ensino Médio. Ao explorar as relações matemáticas que fundamentam as escalas musicais, buscamos construir pontes entre o mundo dos números e o universo sonoro, oferecendo uma abordagem interdisciplinar que desperte o interesse e promova a aprendizagem ativa. A matemática deixa de ser apenas um conteúdo a ser memorizado para se tornar uma ferramenta viva, presente no cotidiano, nas expressões culturais e até mesmo nas melodias que escutamos sem perceber sua estrutura.

Inspirado pela trajetória de Pitágoras — um dos primeiros a enxergar na música uma expressão matemática — este trabalho percorre o caminho que une frequência sonora e razão matemática, mostrando como escalas musicais como a Pitagórica e a Igualmente Temperada revelam padrões de progressões geométricas. Ao compreender essas conexões, é possível ampliar o repertório de estratégias didáticas que ressignificam o ensino de temas como a função exponencial e as sequências numéricas.

Além da fundamentação teórica, que se apoia em estudiosos como Marcos do Carmo Pereira (PEREIRA, 2013, p. 91) e Oscar Joo Abdounur (ABDOUNUR, 2006), esta pesquisa apresenta uma proposta prática com planos de aula que utilizam a música como elemento motivador para o ensino das progressões geométricas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por sua vez, oferece suporte legal e pedagógico ao destacar o papel da matemática na formação integral dos estudantes, bem como a valorização de metodologias que favoreçam a resolução de problemas, a construção de argumentos e o pensamento crítico. A ideia central é oferecer aos professores uma alternativa concreta para abordar conteúdos matemáticos de forma mais contextualizada, dialogando com os interesses dos alunos e promovendo uma aprendizagem mais envolvente.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos principais. No primeiro, abordamos os fundamentos físicos do som, destacando como ondas mecânicas se relacionam com a produção musical. No segundo capítulo, exploramos a construção histórica das escalas musicais Pitagóricas, evidenciando o uso de razões matemáticas para a criação de intervalos sonoros. O terceiro capítulo apresenta a escala musical igualmente temperada, que corrige limitações das escalas anteriores e traz a progressão geométrica como eixo organizador das frequências. Por fim, o quarto capítulo conecta diretamente a teoria à prática pedagógica, propondo o uso da música como metodologia ativa para o ensino da matemática no Ensino Médio. Diante de um cenário educacional cada vez mais desafiador, marcado pela dispersão de atenção e pela dificuldade de engajamento dos estudantes, propomos aqui um convite à experimentação. A matemática pode — e deve — dialogar com outras linguagens e saberes. Quando isso acontece, ela se torna mais próxima, mais humana e, quem sabe, até mais encantadora.

Capítulo 1

A Música e a Física

A música pode ser pensada como um conjunto harmônico de sons que são agradáveis ao ouvido humano. É certo que o elemento fundamental da música é o "som". No entanto, para fazermos uma definição formal do que é "Música" precisamos nos fundamentar nos processos físicos da Ondulatória, que é um ramo da física que estuda ondas sonoras. Podemos definir o som como sendo uma vibração que se propaga por um meio (gás, líquido ou sólido) a partir da vibração de suas moléculas. Os sons são percebidos por nós quando suas ondas chegam aos nossos ouvidos, e suas vibrações são traduzidas em estímulos elétricos e direcionados ao nosso cérebro que as interpreta.

> O som é uma onda mecânica longitudinal que, ao se propagar no ar e chegar à nossa orelha, faz vibrar uma membrana chamada tímpano, a qual, por sua vez, ocasiona impulsos elétricos que percorrem alguns nervos até atingir o cérebro, produzindo a sensação de audição. (Calcada, Sampaio, 2012, p.412).

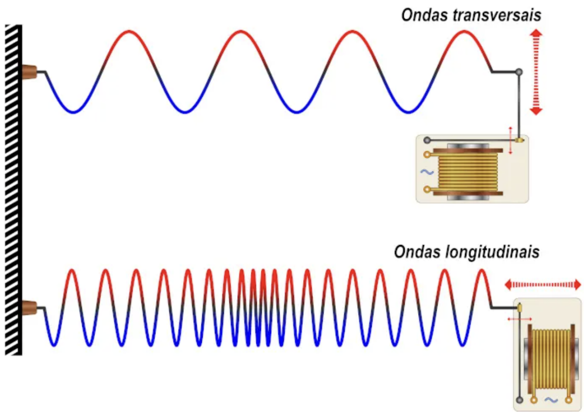
Para isto vamos estudar alguns conceitos gerais das ondas mecânicas.

1.1 Ondas mecânicas

Uma onda pode ser entendida como uma perturbação que se propaga em um meio material, transportando energia, sem transportar matéria. Na natureza encontramos diversos tipos de ondas: Mecânicas, Eletromagnéticas e Ondas de Matéria. Aqui nos interessa fazer uma breve explanação dos principais elementos das ondas mecânicas, pois a música é composta de sons que se propagam pelo ar em forma de ondas. Ondas mecânicas são ondas que precisam de um meio material para se propagarem, tais ondas podem ser divididas em duas classes:

- Ondas Transversais: quando a direção do deslocamento das moléculas do material é perpendicular à direção em que a onda se propaga. Um exemplo deste tipo de onda é a onda produzida em uma corda amarrada por uma de suas extremidades e na outra, uma pessoa faz um movimento harmônico contínuo, com a mão, pra cima e pra baixo.
- Ondas Longitudinais: quando a direção do deslocamento das moléculas do meio de propagação é paralela à direção da onda. Um exemplo de ondas longitudinais são as ondas sonoras.

Figura 1.1: Ondas Transversais e Longitudinais



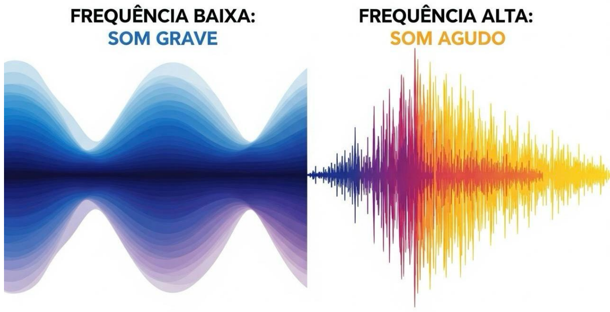
Fonte: https://www.preparaenem.com/fisica/ondas-periodicas.htm

As ondas sonoras vão muito além da utilidade para comunicação entre os seres de uma espécie. Sua importância também é encontrada nos projetos de prospecção sísmica, para identificação da natureza das formações rochosas embaixo do solo, pois ondas sonoras propagam diferentemente em cada tipo de material. Este processo é amplamente utilizado pelos mineradores com objetivo de encontrar minerais, como ferro, petróleo, gás natural, entre outros. Na medicina, as ondas sonoras são utilizadas em aparelhos como o de ultrassom. Outra aplicação para o uso de ondas sonoras foi o desenvolvimento dos sonares, que são dispositivos construídos para detectar pequenas frações de sons, muito utilizados em navios e submarinos. Na biologia também estão presentes as ondas sonoras, pois algumas espécies animais, tais como morcegos e golfinhos, tem sonares naturais, um sistema complexo chamado de ecolocalização que atua na emissão, reflexão, captação e análise das ondas sonoras. As principais características das ondas mecânicas são:

- Comprimento de Onda (λ): entende-se como comprimento de onda a distância entre dois vales ou duas cristas consecutivas. Sua unidade de medida no SI é o metro (m).

- Frequência (f): é o número de oscilações realizadas por um ponto de material por onde a onda está sendo transmitida. Sua unidade de medida é o Hertz[1] (Hz), onde: 1 Hertz = 1 Hz = 1 oscilação / s.

Figura 1.2: Frequências: Oscilações por unidade de tempo



Fonte própria

- Velocidade (v): é a velocidade com que a onda se propaga em um meio material. Sua unidade de medida é o metro por segundo (m/s). Com respeito às ondas sonoras, a velocidade de onda varia conforme as propriedades elásticas e inercial do meio.

  Temos que: $v = \lambda \cdot f$

  Veja abaixo uma tabela que mostra a velocidade do som em diferentes meios.

Tabela 1.1: Velocidade do som

Meio	Velocidade (m/s)
Ar (0ºC)	331
Ar (20ºC)	343
Hélio	965
Hidrogênio	1284
Água (0ºC)	1402
Água (20ºC)	1482
Alumínio	6420
Aço	5941
Granito	6000

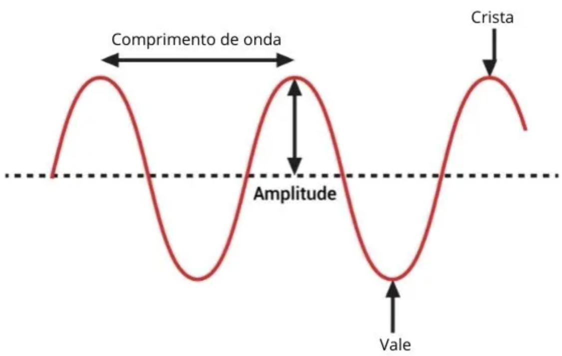
Fonte própria

[1] Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) foi um físico alemão que comprovou a existência das ondas eletromagnéticas, previstas por James Clerk Maxwell. Em sua homenagem, a unidade de frequência do Sistema Internacional — hertz (Hz) — recebeu seu nome, representando um ciclo por segundo.

- Amplitude (a): é a altura que a onda pode alcançar. Os pontos mais altos da onda (cristas) são onde encontramos a amplitude máxima e os pontos mais baixos (vale), onde estão a amplitude mínima. Sua unidade no Sistema internacional (SI) é o metro (m).

- Período (T): é o tempo após o qual o movimento de um elemento oscilante começa a se repetir. Sua unidade de medida é em segundos (s).

Figura 1.3: Elementos das ondas



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/ondas-periodicas.htm

Através de experimentos com o proposito de estabelecer uma equação que modele a propagação do som em um meio, chegou-se à conclusão de que este comporta-se como uma onda senoidal, estabelecendo assim a seguinte equação:

$$y = a_m.sen(kx \pm \omega t) \tag{1.1}$$

Onde:

a_m é a amplitude máxima;

k é quantidade de comprimento de onda num intervalo de 2π metros, definido por: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

ω é a frequência angular da onda definido por: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o período da onda.

A frequência f se relaciona com ω por: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

A velocidade de onda sonora é estabelecida por: $v = \lambda \cdot f$

1.2 Música - A combinação de vários sons

Dentro do grande espectro do estudo do som, vamos encontrar uma classe de sons especiais que são as músicas. Música pode ser definida do ponto de vista físico, como sendo um conjunto de sons que é construído com base em escalas musicais, que são repetidas e tocadas sequencialmente, ou como explica o antropólogo e etnomusicólogo britânico John Blacking, música é som organizado humanamente (Blacking, 1973, p.4). Aqui ele ressalta que qualquer som pode ser música, desde que esteja organizado por humanos com uma intenção cultural.

Os sons musicais podem ser gerados por instrumentos de corda (violino, guitarra, violão), de percussão (tambores, bateria, xilofone), por instrumentos de sopro (flauta, saxofone, clarinete) ou eletrônicos (teclados). Todos estes instrumentos têm em sua composição uma parte que vibra, e que ao entrar em vibração pressiona o ar à sua volta, criando uma onda sonora com mesma frequência da oscilação do material. Como foi dito acima, a música é formada por um conjunto de sons os quais são arranjados em uma escala. Desta forma, na construção da música podemos destacar três elementos essenciais:

- Nota Musical: É o termo usado para designar um elemento mínimo do som. Cada nota tem uma duração e corresponde a uma frequência.

- Intervalo: É a diferenciação de tom entre duas notas. Seu tamanho é medido pela distância entre duas notas musicais, cujo valor, em termos de frequência, é a razão entre as frequências de duas notas.

- Oitava: É o intervalo entre duas notas onde uma tem o dobro ou a metade da frequência da outra.

Com respeito a organização de uma música, ela está essencialmente ligada a relações matemáticas. Conceitos como o de oitava, escalas e acordes, são construídos a partir de conceitos lógicos usando relações matemáticas e propriedades aritméticas. Esta relação é tão importante que levou o matemático e filósofo alemão Gottfried Wiljelm Leibniz (1646 – 1716) a dizer: Ouvir música é um exercício secreto de aritmética da alma, que desconhece estar contando (LEIBNIZ, 1712, p. 437).

Neste trabalho vamos fazer um estudo dos conceitos e propriedades aritméticas usados na construção de algumas escalas musicais. Como ao longo da história foram propostos muitos modelos de escalas musicais, vamos estudar apenas algumas delas, que são as Escalas Pitagórica Diatônica e a Escala de Temperamento Igual.

Capítulo 2

Escalas Musicais Pitagóricas (Diatônica e Cromática)

A história da música é tão antiga quanto o desenvolvimento da humanidade, e suas relações são tão estreitas que a música sempre esteve presente, sofrendo influências e influenciando o comportamento humano no decorrer do tempo. A música sempre esteve presente nas manifestações religiosas.

> Os gregos atribuíram a música uma origem divina e acreditavam que seus inventores e primeiros intérpretes eram deuses e semideuses, como Apolo e Orfeu. A música possuía poderes mágicos, era capaz de curar doenças, purificar o corpo e operar milagres. A música era um elemento indissociável das cerimônias religiosas, no culto a Apolo utilizava-se a lira e no de Dionísio, o áulo (PIRES; DÉBORA, 2019, p.28).

Ela está presente também em rituais tribais, na comunicação para interações sociais ou simplesmente para expressão de sentimentos e emoções. Toda expressão musical é obtida através da manipulação de instrumentos ou mesmo a própria voz ou corpo para emitir sons de forma consonante. De maneira bem simples a música pode ser definida como um conjunto harmonioso de sons agradáveis ao ouvido humano ou como a define Jean-Jacques Rousseau em seu Dicionário de Música, a música é a arte de combinar os sons de maneira agradável (Rousseau, 2021, p.195).

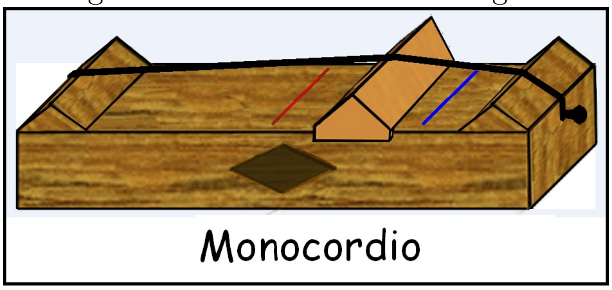
A menor fração desses sons aos quais nos referimos, é conhecida como nota musical ou nota sonora. Segundo Bohumil Med [1] , em seu livro Teoria da Música, a nota musical é um sinal gráfico que representa a altura e duração dos sons musicais (MED, 1986). No

[1]Musicólogo, professor e historiador da música, foi fundador e presidente da Sociedade Cultural Brasil - República Tcheca, uma associação de compatriotas de Brasília.

entanto, para que tenhamos uma música, é necessário que essas notas estejam dispostas em escalas, obedecendo algumas regras por meio de um exercício aritmético de divisão e multiplicação, tendo como base o princípio físico de frequência sonora.

No mundo ocidental, pelo que conhecemos, foi Pitágoras (cerca de 500 a.C.), o mesmo famoso pelo teorema que leva seu nome, que primeiro se dedicou a estudar a música de forma científica. Em uma lenda contada por Guido D'Arezzo[2](1026), no tratado sobre música intitulado Micrologus, Pitágoras ficou espantado ao passar por uma oficina e perceber a harmonia que ressoava da batida de martelos numa bigorna. Decorrente das observações desse evento, posteriormente ele viria a construir o monocórdio, (veja a figura), um instrumento como a própria etimologia da palavra sugere, é um instrumento de uma única corda, cujas notas ao serem tocadas consecutivamente produziam um conjunto de sons harmônicos.

Figura 2.1: Monocórdio de Pitágoras



Fonte: https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/.

Através desse instrumento, Pitágoras fez importantes observações e estabeleceu, pela primeira vez na história, a relação entre a Música e a Matemática, iniciando assim novos estudos, criando a primeira escala musical, conhecida como Escala Pitagórica e contribuindo posteriormente para a teoria musical, e a regulagem de afinação de instrumentos. Tais contribuições tiveram grande relevância para o desenvolvimento da música contemporânea e suas ideias permanecem presentes até hoje.

[2]Guido D'Arezzo (992 — 1050 d.C.) foi um monge beneditino italiano e um dos mais influentes teóricos da música medieval. É considerado o pai da notação musical moderna e o responsável pela criação do sistema de solmização que deu origem ao solfejo (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si).

Figura 2.2: Retrato de Pitágoras (570 - 480 a.C.)

Fonte: https://www.meisterdrucke.pt/

Em suas observações no monocórdio, Pitágoras percebeu que os sons emitidos tinham variações dependendo do tamanho da divisão realizada na corda, pois a frequência ao vibrar é inversamente proporcional ao tamanho da corda. Segundo o site Clubes de Matemática da OBMEP, em seu artigo, Pitágoras, o Músico, a nota emitida ao tocar a corda inteira era a mesma obtida quando se tocava apenas a sua metade, porém o som da metade era mais agudo do que da corda inteira e, portanto, a frequência da metade da corda era o dobro da frequência da corta inteira. Fato: ao vibrar só a metade de uma corda esticada, você reduz o comprimento da parte que pode vibrar, o que aumenta a frequência. Como a relação e inversamente proporcional, "cortar"o comprimento pela metade, dobra a frequência.

Com isso, pode-se entender que a partir de uma nota inicial, essa será repetida (numa frequência dobrada) toda vez que multiplicarmos a sua frequência por uma potência de $2^n, n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo:

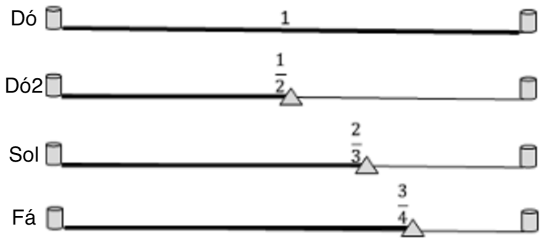
$f_0 =$ frequência da nota base

$f_n = f_0 \times 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$, frequência da mesma nota, n oitavas acima ou abaixo.

- Dada uma frequência $f_1 = 220$ Hz (Lá)
- Uma oitava acima temos: $220Hz \times 2 = 440Hz$ (Lá mais agudo).

Assim, quando n aumenta, a nota fica mais aguda e quando n diminui, a nota tocada fica mais grave. Ele notou ainda que havia consonância entre os sons produzidos quando se tocava a corda inteira, e algumas frações de seu tamanho: $1/2$ (metade da corda), $2/3$ (dois terços da corda) e $3/4$ (três quartos da corda). Essas proporções deram origem à escala pitagórica inicial, fundamentando a construção das primeiras quatro notas: uníssono, quarta, quinta e oitava. Essas notas eram o que corresponde hoje às notas Dó, Fá, Sol e Dó$_2$.

Figura 2.3: Frações da Escala Pitagórica



Fonte: https://primeirosacordes.com.br/teoria/pit%C3%A1goras-e-as-ra%C3%ADzes-das-notas-musicais.html#google_vignette

2.1 Escala Diatônica Pitagórica

Como vimos anteriormente, cada nota musical é definida por uma frequência sonora específica, na qual sua unidade é determinada em Hertz (Hz). Essa escala é composta por sete notas musicais cujos nomes (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) foram sugeridos também por Guido D'Arezzo que retirou seis das silabas iniciais das primeiras seis frases do texto de um hino a São João Batista.

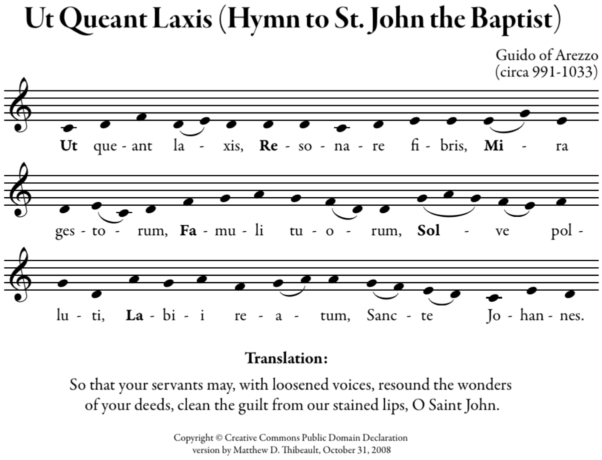
As frases iniciais do hino eram:

UT *queant laxis,*
Re*sonare fibris,*
Mi*ra gestorum,*
Fa*muli tuorum,*
Sol*ve polluti,*
La*bii reatum.*
Sa*ncte Ioannes*

Que significa:

"Para que nós,teus servos,
possamos elogiar claramente
o milagre e
a força dos teus atos,
absolve nossos
lábios impuros,
São João"

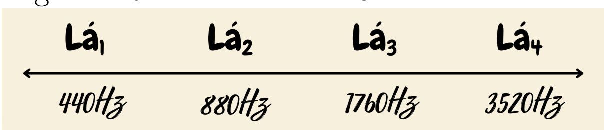
Figura 2.4: Hino litúrgico católico: Ut queant laxis



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ut_Queant_Laxis_MT.png.

Após a sétima nota, quando chegamos à oitava, ela recebe o mesmo nome da primeira, mas em uma oitava superior, ou seja, com uma frequência dobrada. Assim, temos o que é conhecido como intervalo de oitava. A distribuição das notas em um intervalo de oitava é feita entre as frequências f_0 e $2f_0$. Para isso vamos considerar a frequência fundamental $f_0 =$ dó$_1$ e $2f_0$ que corresponde à frequência duplicada, uma oitava acima, sendo $2f_0 =$ dó$_2$.

Figura 2.5: Intervalos de Oitavas da nota Lá



Fonte própria

Vejamos, agora, como determinar as frequências das sete notas componentes da escala diatônica (dó ré, mi, fá, sol, lá e si) dentro do intervalo f_0 à $2f_0$.

A partir da frequência fundamental dó$_1$, dividindo a corda em $\frac{2}{3}$ de seu comprimento, obtemos a nota musical conhecida como sol, cuja frequência é $\frac{3}{2}$ da frequência de dó$_1$, que é correspondente a 1 dividido por $\frac{2}{3}$, pois fisicamente, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento. Esse intervalo de dó à sol, ficou conhecido como Quinta Pitagórica, pois 3+2 = 5.

O processo para obtenção da escala diatônica, é feito por meio de um exercício matemático de multiplicar a frequência fundamental por potências $(\frac{3}{2})^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, para aplicarmos intervalos de quinta sobre as notas basta multiplicarmos por $\frac{3}{2}$.

Dessa forma, segue que:

- Multiplicando f_0 por $\frac{3}{2}$, obtemos a frequência $\frac{3}{2}f_0$ (sol).
- Multiplicando $\frac{3}{2}f_0$ por $\frac{3}{2}$ obtemos a frequência $\frac{9}{4}f_0$, que é a frequência da nota ré. Como $\frac{9}{4}$ está no intervalo $[2f_0\ ,\ 4f_0]$, fazemos a divisão da frequência por 2, assim, obtemos $\frac{9}{8}f_0$, que é a mesma nota ré, porém agora na oitava anterior, no intervalo de $[f_0\ ,\ 2f_0]$.
- Multiplicando $\frac{9}{8}f_0$ por $\frac{3}{2}$ obtemos $\frac{27}{16}f_0$, que é a frequência no intervalo fundamental associado à nota lá.
- Multiplicando $\frac{27}{16}f_0$ por $\frac{3}{2}$ obtemos $\frac{81}{32}f_0$, que é a frequência da nota mi, também no intervalo $[2f_0\ ,\ 4f_0]$. Devemos, portanto, como no caso da nota ré, dividir por 2. Assim obtemos $\frac{81}{64}f_0$ no intervalo de $[f_0\ ,\ 2f_0]$.
- Multiplicando $\frac{81}{64}f_0$ por $\frac{3}{2}$ obtemos $\frac{243}{128}f_0$, que é a frequência da nota si.
- Por último, a nota fá é uma nota que está uma quinta abaixo da nota dó$_2$, que tem a frequência $2f_0$. Assim, diferentemente das anteriores, ela é obtida dividindo a frequência $2f_0$ por $(\frac{3}{2})$, obtendo $\frac{4}{3}f_0$.

Portanto, temos a seguinte distribuição:

Tabela 2.1: Frações na Escala Pitagórica

dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
$1f_0$	$\frac{9}{8}f_0$	$\frac{81}{64}f_0$	$\frac{4}{3}f_0$	$\frac{3}{2}f_0$	$\frac{27}{16}f_0$	$\frac{243}{128}f_0$	$2f_0$

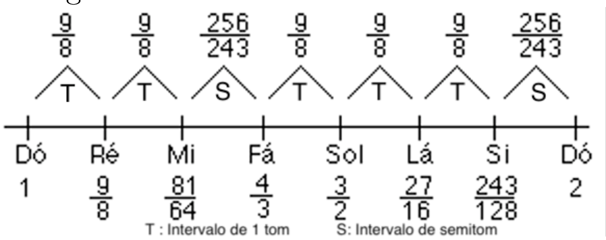
O tom musical é definido pela distância entre duas notas e estas distâncias são obtidas pela razão entre as frequências das duas.

É importante saber os intervalos entre cada altura, pois, certos intervalos (como a quinta) produzem sons mais consonantes, outros (como a segunda) criam tensão, além disso, as melodias são definidas pela sequência de intervalos, não só pelas notas isoladas. Por exemplo, o intervalo entre Mi e Ré é dado por: $(\frac{81}{64})\ /\ (\frac{9}{8}) = (\frac{9}{8})$.

Já o intervalo entre Fá e Mi é dado por: $(\frac{4}{3})\ /\ (\frac{81}{64}) = (\frac{256}{243})$

Através da escala pitagórica obtida acima, veremos a seguir um gráfico de distribuição dos tons na escala:

Figura 2.6: Intervalo das notas musicais



Fonte: https://iazzetta.eca.usp.br/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html.

Desta forma, percebemos que ao calcularmos os intervalos entre todas as alturas da escala diatônica teremos apenas 2 valores, a saber $\frac{9}{8}$ e $\frac{256}{243}$, chamados de tom e semitom pitagórico diatônico. Por isso, esta escala é chamada de Escala Pitagórica Diatônica.

2.2 Escala Cromática

A escala cromática é uma variante da Escala Pitagórica Diatônica e pode ser observada em um violão ou em um piano. Foi estabelecida na idade média pelo monge italiano Guido d'Arezzo (992 – 1050 d.C.). Ela consiste em uma escala de 12 notas. Basicamente, ela divide os sete tons e semitons da escala diatônica em 12 semitons iguais. A construção da escala cromática é também realizada por meio de progressão das quintas, isto é, por multiplicar a frequência fundamental por potências $(\frac{3}{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Na escala cromática, os intervalos de oitava são os mesmos da Diatônica, o que muda é a distância entre as notas musicais dentro desse intervalo.

Para esboçar a construção da escala Cromática, partiremos do intervalo de frequência fundamental, $[f_0, 2f_0]$. Como na seção anterior, f_0 é a frequência fundamental, associada ao dó$_1$ e $2f_0$ é a frequência da nota dó$_2$.

Para obter as notas da escala cromática no intervalo $[f_0, 2f_0]$, aplicaremos a progressão das quintas sobre a frequência fundamental f_0.

Tabela 2.2: Frações na Escala Cromática

NOTA	Aplicação das Quintas	Frequências
dó	$f_0 \times (\frac{3}{2})^0 = 1$	f_0
sol	$f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2} f_0$
ré	$\frac{3}{2} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{9}{8} f_0$
lá	$\frac{9}{8} f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{27}{16} f_0$
mi	$\frac{27}{16} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{81}{64} f_0$
si	$\frac{81}{64} f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{243}{128} f_0$
$fa^{\#}$	$\frac{243}{128} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{729}{512} f_0$
$do^{\#}$	$\frac{729}{512} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{2187}{2048} f_0$
$sol^{\#}$	$\frac{2187}{2048} f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{6561}{4096} f_0$
$re^{\#}$	$\frac{6561}{4096} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{19683}{16384} f_0$
$la^{\#}$	$\frac{19683}{16384} f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{59049}{32768} f_0$
$mi^{\#}$	$\frac{59049}{32768} f_0 \times (\frac{3}{2}) \div 2$	$\frac{177147}{131072} f_0$
$si^{\#}$	$\frac{177147}{131072} f_0 \times (\frac{3}{2})$	$\frac{531441}{262144} f_0$

Fonte própria

Da nota do_1 até si$^{\#}$ temos os doze semitons estabelecidos pela escala cromática e a nota si$^{\#}$ deveria corresponder à nota do_2.

Observação 2.2.1. *É importante observar na tabela acima que na construção das frequências ré, mi, $fa^{\#}$, $do^{\#}$, $re^{\#}$ e $mi^{\#}$ as frequências apareceram com uma divisão por 2. Esta divisão é necessária para o reposicionamento da nota musical associada na oitava fundamental. Por exemplo, na construção da frequência para nota ré, temos que* $\frac{3}{2} f_0 \times (\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} f_0$ *é maior que* $2f_0$. *Desta forma esta frequência estaria representando uma nota em uma oitava superior, isto é, na oitava* $[2f_0, 4f_0]$. *Daí, a correção feita por dividir por 2, reposiciona a nota na oitava fundamental.*

A distribuição da escala cromática no intervalo de oitava $[d_1, d_2]$ é:

Figura 2.7: Escala Cromática de dó

Fonte: https://queroaprenderagora.com.br/notas-de-violao/.

Note que o ideal é que a nota si$^{\#}$ estabelecida na escala cromática fosse a nota do_2.

Porém, isto não ocorre de fato, pois a frequência de do_2 é $2f_0$, enquanto a frequência de si$^{\#}$ é $\frac{531441}{262144}f_0 \cong 2{,}0272f_0$. Assim vemos que a nota si$^{\#}$ é um pouco mais aguda que a nota do_2. A razão entre essas frequências é:

$$\frac{2{,}0272}{2} = 1{,}01364.$$

Esta razão é chamada na literatura musical de *Coma Pitagórica*. Como define Cordeiro (2020) em seu artigo Escala Temperada, "A coma é o menor intervalo musical perceptível ao ouvido humano." Temos assim que no intervalo musical de 1 tom existem nove desses comas.

Utilizaremos a representação inglesa para as notas musicais. Vejamos:

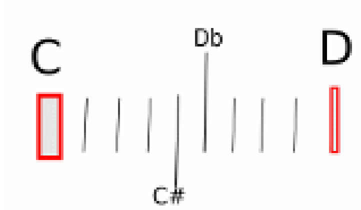
Tabela 2.3: Notas Musicais: representação inglesa

dó	ré	mi	fá	sol	lá	si
C	D	E	F	G	A	B

Fonte própria

Por exemplo, ao tocarmos uma nota qualquer (dó) e subirmos nove comas, aumentaremos um tom acima, ou seja (ré).

Figura 2.8: Comas entre dó e ré



Fonte: https://eduardocordeiro.com.br/

Como visto anteriormente, a escala musical é composta por tons e semitons, sendo este último, o menor intervalo musical presente na música ocidental. Por exemplo, entre dó (C) e ré (D), temos o dó$^{\#}$ (C$^{\#}$) ou ré^{b} (D^{b}) chamados de notas enarmônicas, que ocorre quando duas notas de mesmo som têm nomes diferentes. Temos ainda, a depender da semântica utilizada, que o semitom está a 4 ou 5 comas de uma nota de referência.

Embora para a música da Idade Média a escala cromática fosse satisfatória, porém, já por volta do século XV, com o aperfeiçoamento dos instrumentos musicais percebeu-se que a Coma Pitagórica influenciava bastante na afinação dos instrumentos musicais.

Vejamos como isso se dava na prática:

Ao afinar um instrumento na escala de dó, temos que a próxima nota da escala é o dó$^{\#}$, que está localizado 4 comas acima. Tudo certo até aqui para tocar uma música no tom de dó, porém, ao transpor o tom para dó$^{\#}$, a próxima nota da escala é ré, que está a 5 comas acima. Nesse caso, já se percebe a diferença de 1 coma entre a nota tônica e a segunda nota da escala. Assim o instrumento estará bem afinado na escala de dó, mas o som produzido vai soar desafinado ou dissonante quando uma música for executada em outro tom. Isso acontece em toda escala cromática.

Figura 2.9: Os Comas na Escala Cromática

Fonte: https://eduardocordeiro.com.br/

Sendo assim, outras escalas musicais foram propostas. Entre elas destacamos a Escala de Igual Temperamento ou Temperamento igual, que objetiva eliminar essa diferença das comas e acabar com o problema da afinação dos instrumentos. A construção dessa tabela será apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 3

Escala Musical Igualmente Temperada

Com a criação da Escala Cromática pelo monge Guido d'Arezzo no século XI, a música ocidental regida pela Igreja Católica, passou por um período de expressivo desenvolvimento. No entanto, por volta dos séculos XV, XVI e XVII, com a criação de instrumentos musicais mais sofisticados, percebeu-se que a afinação deles usando a escala cromática apresentava dissonância por causa da Coma Pitagórica, como foi visto no capítulo anterior. Desta forma, nasce entre os músicos teóricos uma busca por um sistema de afinação que permitisse modular livremente entre tonalidades sem gerar dissonâncias intoleráveis e pudesse extinguir ou pelo menos atenuar o problema das comas pitagóricas. Assim, surgiram várias ideias de divisão da oitava diatônica. Estas divisões ficaram conhecidas como temperamento.

Diversos sistemas de Bom Temperamento surgiram, buscando formas para tornar todas as tonalidades utilizáveis. A ideia do temperamento igual em 12 semitons, ou seja, dividir a oitava em intervalos matematicamente iguais, começou a ganhar força no Renascimento e no Barroco, no final do século XVI. Não há um único criador da escala igualmente temperada. Foi um processo evolutivo que envolveu matemáticos, físicos e músicos ao longo de séculos, mas é atribuído o feito a duas pessoas, Chu-Tsaiyu (1584) e Simon Stevin (1585). No entanto, somente no final do século XVII que a Escala Igualmente Temperada foi estabelecida pelo músico alemão Andreas Werckmeister[1]. Esta escala propunha, após as 12 divisões iguais para os semitons, que não houvesse um intervalo de diferença entre o 13º semitom e o do_2. Dessa forma se propôs a seguinte construção.

O intervalo de oitavas é o mesmo do Pitagórico, com intervalo fundamental de frequências associadas $[f_0, 2f_0]$.

[1]Andreas Werckmeister, organista, compositor e teórico alemão (30 de novembro de 1645 - 26 de outubro de 1706) foi um organista, teórico musical e compositor alemão da era barroca.

A ideia consiste em dividir o intervalo de oitava em doze partes iguais, a fim de trabalhar em uma progressão geométrica em que cada um de seus termos representa uma nota da escala igualmente temperada.

Assim,

$N_1 = N_1$

$N_2 = N_1.r$ (r é a razão da PG)

$N_3 = N_2.r = N_1.r^2$

$N_4 = N_3.r = N_1.r^3$

$\vdots$

$N_n = N_1.r^{n-1}$ (Termo Geral)

N_i representa a i-ésima nota musical.

Como a ideia era obter 12 notas no intervalo de oitava $[f_0,\ 2f_0]$, sendo que f_0 corresponde ao primeiro termo da PG, ou seja, N_1 e $2f_0$ o décimo terceiro termo, N_{13}, segue que o 13º ponto da PG acima deve ser o dobro do termo inicial. Assim,

$N_{13} = 2N_1$

Ou seja,

$N_1.r^{12} = 2N_1 \Rightarrow r^{12} = 2$

Assim fica descoberto a razão da PG que tem a propriedade desejada:

$r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

Desta forma, o termo geral da PG deve ser

$N_n = N_1.2^{\frac{n-1}{12}}$

Em termos das frequências, temos:

$f_n = 2^{\frac{n-1}{12}}.f_0$

Daí:

$n = 1 \Rightarrow 2^{\frac{1-1}{12}}.f_0 = 2^0.f_0 = f_0$

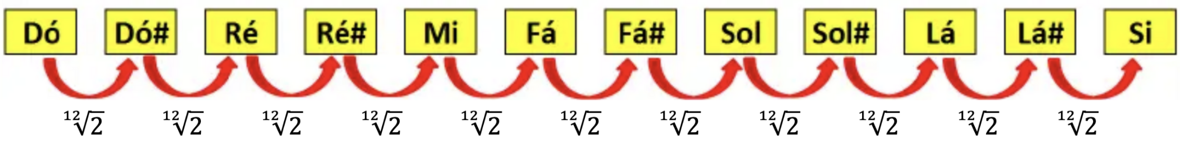
$n = 2 \Rightarrow 2^{\frac{2-1}{12}}.f_0 = 2^{\frac{1}{12}}.f_0$

$n = 3 \Rightarrow 2^{\frac{3-1}{12}}.f_0 = 2^{\frac{2}{12}}.f_0$

$\vdots$

$n = 13 \Rightarrow 2^{\frac{13-1}{12}}.f_0 = 2^{\frac{12}{12}}.f_0 = 2f_0$

Figura 3.1: Escala Igualmente Temperada



Fonte: https://pt.scribd.com/document/448646652/Modulo-1-1-4-Escala-Cromatica

Alguns benefícios à música ocidental foram observados à partir da adoção da escala igualmente temperada:

- **Possibilidade de Modulação:** Permitiu aos compositores e cantores transitar livremente entre tons diferentes, sem gerar dissonâncias perceptíveis, expandindo as possibilidades harmônicas e possibilitando a criação de um vasto repertório musical que explora as diferentes tonalidades e as relações harmônicas complexas.
- **Padronização para Instrumentos de Teclado:** Tornou a construção e a afinação de instrumentos de teclado como o piano e o órgão muito mais práticas e consistentes em todas as teclas.
- **Base para a Música Popular Moderna:** A maioria dos estilos de música popular contemporânea, do jazz ao rock e ao pop, utiliza o sistema de afinação igualmente temperado.

3.1 A Construção de Instrumentos Musicais

A construção de instrumentos musicais modernos baseia-se em uma frequência de referência conhecida como afinação padrão. No sistema temperado adotado no Ocidente, a afinação mais comum utiliza a frequência de 440 Hz, correspondente à nota Lá (A4) da quarta oitava do piano. Essa frequência serve como base para o cálculo de todas as outras notas da escala cromática.

No caso dos instrumentos de sopro, como flautas e trompetes, os comprimentos dos tubos são projetados para que as colunas de ar vibrem precisamente nessas frequências padronizadas. Já nos instrumentos de corda, como violão ou violino, a afinação depende da espessura, tensão e comprimento das cordas, ajustados de forma a reproduzir as frequências estabelecidas pela afinação de referência. Por fim, teclados e pianos são fabricados com base nas frequências derivadas do A4 = 440 Hz, o que garante uniformidade e compatibilidade sonora entre diferentes instrumentos.

Essa padronização permite a modulação entre diferentes tonalidades e é um dos principais pilares que sustentam a prática musical moderna, especialmente no que diz respeito à música tonal e à composição harmônica complexa.

Piston (1987) em sua obra Harmonia, destaca que o desenvolvimento do sistema tonal e a compreensão das relações entre as tonalidades permitiu aos compositores expandir suas possibilidades expressivas. Ele pontua ainda que qualquer acorde, ou qualquer grupo de tons, pode ser interpretado em qualquer tonalidade.

Capítulo 4

Utilização das Escalas Musicais como Metodologia Ativa para o Ensino-aprendizagem da Matemática

4.1 Metodologias ativas

As metodologias ativas são estratégias de ensino-aprendizagem em que o aluno deixa de ser apenas um receptor de informações e passa a ter um papel protagonista no processo de aprender.

Nelas, o estudante participa ativamente, resolvendo problemas, discutindo, pesquisando, experimentando e construindo o próprio conhecimento, enquanto o professor atua como mediador e facilitador, guiando e apoiando o processo.

Exemplos de metodologias ativas

- Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) $\rightarrow$ alunos resolvem problemas reais ou simulados.
- Sala de Aula Invertida (Flipped Classroom) $\rightarrow$ o aluno estuda o conteúdo antes da aula (vídeos, textos, podcasts) e o encontro é usado para discussão e prática.
- Estudos de Caso $\rightarrow$ análise de situações reais ou fictícias para desenvolver pensamento crítico.
- Aprendizagem por Projetos $\rightarrow$ criação de projetos que integram conteúdos de diferentes disciplinas.

- Gamificação $\rightarrow$ uso de elementos de jogos (pontuação, desafios, recompensas) para engajar.

- Rodas de conversa e debates $\rightarrow$ incentivam argumentação, escuta e construção coletiva.

- Oficinas e experimentos práticos $\rightarrow$ mão na massa para consolidar conceitos.

Nesse plano, vamos nos apoiar na Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP), ao propor atividades em grupo para o cálculo das frequências das notas musicais, a elaboração de tabelas e a comparação de escalas. Do mesmo modo, a organização em etapas que incluem momentos de estudo prévio, demonstração prática, resolução colaborativa e apresentação dos resultados alinha-se à lógica da Sala de Aula Invertida, na qual o espaço da aula é privilegiado para a aplicação dos conhecimentos e não apenas para sua exposição.

A integração entre o plano de aula proposto e as metodologias ativas reforça não apenas a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de competências mais amplas, como trabalho em equipe, comunicação, criatividade e autonomia intelectual, em consonância com os pressupostos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

4.2 A Necessidade de Contextualização Matemática no Ensino Médio

A educação matemática no ensino médio enfrenta desafios sem precedentes no cenário contemporâneo, marcado por um ambiente repleto de distrações e pela difícil tarefa de manter a atenção dos adolescentes. As inovações tecnológicas que oferecem um fluxo constante de informações e entretenimento, têm modificado radicalmente a forma como os jovens se relacionam com o conhecimento. Nesse contexto, a matemática, frequentemente vista como um conteúdo abstrato e distante da realidade, precisa urgentemente de uma abordagem que a torne mais pertinente e acessível para os alunos.

Vejamos,

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre porque e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior

> parte dos programas consiste em coisas mal-acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para a ciência cristalizada. Não é sem razão que a história da matemática vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância. (D'AMBRÓSIO, UBIRATAN. 2009, p. 29.)

A contextualização matemática se apresenta como uma estratégia fundamental para engajar os estudantes e facilitar a compreensão dos conceitos. Ao conectar a teoria com situações práticas do dia a dia, os professores podem demonstrar a aplicação dos conteúdos matemáticos em contextos relevantes e significativos, aumentando a motivação dos alunos e a sua disposição para aprender. Além disso, essa abordagem contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da habilidade de resolução de problemas, competências indispensáveis no mundo atual.

Estudiosos da educação têm enfatizado a importância de tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, utilizando exemplos que dialoguem diretamente com a vivência dos estudantes. O educador e matemático Richard Rusczyk, em seus escritos, ele enfatiza a necessidade de ensinar matemática de maneira que os alunos possam se envolver ativamente no aprendizado, incentivando a curiosidade e a solução de problemas.

> A matemática deve ser mais do que apenas uma coleção de técnicas para resolver problemas: deve ser um campo rico de exploração, conexão e descoberta. Quando os alunos são incentivados a fazer perguntas e a se envolver em tarefas que estimulam o pensamento crítico, eles desenvolvem uma relação mais profunda com a matemática. (RUSCZYK, Richard. 2011)

Paul Lockhart, matemático e educador americano, também discute a importância de um ensino mais significativo:

> A matemática deve ser apresentada como uma atividade criativa, onde os alunos podem explorar, inventar e descobrir. Somente assim conseguimos transformar o aprendizado em algo apaixonante e significativo. (Lockhart. 2009)

Nesse contexto está bem ilustrado a necessidade de um ensino de matemática que vá além da memorização e do cálculo, propondo um aprendizado baseado na interação e na exploração. Isso não apenas cria um ambiente mais estimulante, mas também permite que os alunos visualizem a utilidade da matemática em suas vidas, desde a gestão financeira pessoal até a análise de dados e informações que permeiam a sociedade.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes para o ensino de Matemática no Ensino Médio, enfatizando a importância da contextualização e da aplicação prática dos conhecimentos matemáticos. No documento ela destaca:

> A Matemática deve possibilitar aos estudantes o desenvolvimento da capacidade de analisar, argumentar, generalizar e abstrair, bem como de estabelecer conexões entre diferentes ideias matemáticas e entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, além de situações do cotidiano. (BNCC – Ensino Fundamental – Matemática, página 266)

Muitos educadores ainda enfrentam dificuldades para implementar essa abordagem em suas práticas pedagógicas. Fatores como a falta de formação adequada, a resistência à mudança curricular e a pressão por resultados em avaliações padronizadas podem dificultar a adoção de metodologias que priorizem a aplicação prática do conhecimento.

Diante desse panorama, vemos uma eminente necessidade de renovação dos currículos e a criação de ambientes de aprendizagem que valorizem e desenvolvam o processo de contextualização de conteúdos matemáticos nas escolas da educação básica.

4.3 Aplicação das Escalas Musicais no ensino das Progressões Geométricas

Neste capítulo apresentaremos uma estratégia que pode ser adotada para tornar essa prática uma realidade nas salas de aula. Exploraremos a intersecção entre as escalas musicais e as progressões geométricas, revelando como conceitos matemáticos podem iluminar a compreensão e a apreciação da música.

O estudo das Progressões Geométricas (PG's) no 2º ano do Ensino Médio é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos, proporcionando a compreensão de sequências numéricas com um padrão multiplicativo constante. Este conceito possui aplicações práticas em diversas áreas, como matemática financeira (cálculo de juros compostos), biologia (crescimento populacional), física (decaimento radioativo) e informática (algoritmos de busca). Ao explorar as propriedades e fórmulas das PG's, os estudantes aprimoram suas habilidades de identificar padrões, generalizar relações e resolver problemas complexos. A abordagem deste tema, alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), visa estimular a autonomia intelectual dos alunos, o pensamento crítico e a capacidade de aplicar o conhecimento matemático em diferentes contextos, preparando-os para desafios futuros no ensino superior e no mundo do trabalho.

Como já foi abordado, as escalas musicais são sequências de notas organizadas em intervalos específicos e cada uma é associada a um valor numérico (frequência), permitindo que se estabeleçam relações e padrões que refletem as propriedades das progressões geométricas. Tomando duas notas adjacentes, a relação de frequência entre elas em uma escala pode ser descrita por razões que se alinham com as progressões geométricas, onde cada termo subsequente é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante, ou seja, cada nova nota é obtida multiplicando a frequência da nota anterior por esta razão.

Pitágoras e seus seguidores acreditavam que a harmonia musical era intrinsecamente ligada às proporções numéricas. A construção das escalas pitagóricas se baseia em intervalos musicais definidos por razões numéricas simples, e a geração das notas na escala pitagórica através da multiplicação sucessiva da frequência fundamental por $\frac{3}{2}$ (e subsequentes oitavas, que correspondem à multiplicação ou divisão por 2) demonstra claramente o conceito de uma Progressão Geométrica. A fórmula para encontrar a frequência de qualquer nota na escala pitagórica pode ser vista como uma aplicação do termo geral de uma PG. Se considerarmos a frequência fundamental como o primeiro termo (a_1) e a razão como $\frac{3}{2}$, podemos generalizar a relação para encontrar a frequência de qualquer nota dentro de um determinado número de quintas $(\frac{3}{2})$. Vejamos exemplos de progressão geométrica dentro de um intervalo de oitavas:

Na música ocidental, a oitava segue uma relação de 2:1. Isso significa que, se uma nota tem uma frequência de 440 Hz (a nota Lá), a nota uma oitava acima terá uma frequência de 880 Hz. Temos aqui uma progressão geométrica, onde cada próximo termo na escala representa uma multiplicação da frequência por uma razão (q) constante igual a 2. Assim, temos a PG (440, 880, 1760, ...)

Ao tomarmos uma frequência inicial como ponto de partida, a geração das notas seguintes da escala pitagórica pode ser compreendida como uma aplicação direta da razão da quinta pitagórica $\frac{3}{2}$. Como foi visto anteriormente, cada nova nota é obtida multiplicando-se a frequência anterior por essa razão. Assim, a sequência de frequências que define a escala pitagórica assume a forma de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é a frequência fundamental e a razão é a quinta pitagórica. A importância de conhecer essa escala, sua obtenção e aplicá-la aos conceitos matemáticos de progressões, nos mostra que uma única razão, a quinta justa, aplicada de forma sequencial, é capaz de gerar uma série de notas interconectadas por relações harmônicas consonantes.

4.4 Plano de Aula: A Escala Musical e as Progressões Geométricas

Componente Curricular: Matemática

Ano: 2º Ano do Ensino Médio

Duração: 2 aulas (aproximadamente 100 minutos)

Tema: A Escala Musical como uma Progressão Geométrica

Justificativa:

Esta aula busca integrar dois campos do conhecimento aparentemente distintos: a matemática e a música. Ao explorar a relação entre a escala musical e as progressões geométricas, os alunos poderão desenvolver habilidades de pensamento lógico, abstrato e crítico (Competência 2 da BNCC), além de aprimorar a capacidade de interpretar, analisar e resolver problemas (Competência 4 da BNCC) em um contexto interdisciplinar.

A compreensão da estrutura matemática subjacente à música contribui para uma visão mais ampla e integrada do conhecimento (Competência 1 da BNCC), incentivando a curiosidade intelectual e a busca por conexões entre diferentes áreas (Competência 5 da BNCC). Além disso, a exploração de um tema culturalmente relevante como a música pode despertar o interesse e a motivação dos alunos para o estudo da matemática.

Ao final da aula, espera-se que os alunos consigam compreender e aplicar o conceito de progressão geométrica em um contexto prático e significativo, fortalecendo a autonomia (Competência 9 da BNCC) no processo de aprendizagem e a capacidade de comunicar e argumentar suas ideias (Competência 3 da BNCC).

Objetivos:

Geral: Compreender a relação matemática entre as notas de uma escala musical diatônica e as progressões geométricas.

Específicos:

- Identificar a razão da progressão geométrica na escala musical temperada. (Habilidade EM13MAT303[1] - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo do termo geral de uma progressão geométrica.)

- Aplicar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica para determinar a frequência de notas em diferentes oitavas. (Habilidade EM13MAT303)

- Analisar as implicações matemáticas da divisão da oitava em doze semitons iguais. (Habilidade EM13MAT501 - Analisar e utilizar informações sobre diferentes fenômenos sociais, culturais, econômicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a temas como saúde, sustentabilidade, tecnologia, diversidade cultural, entre outros.)

- Estabelecer conexões entre conceitos matemáticos e fenômenos musicais. (Habilidade EM13MAT503 - Investigar e comparar diferentes tipos de sequências

[1] Os códigos da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) são formados por letras e números que representam a etapa de ensino, a área de conhecimento, a unidade temática, o ano escolar e o código específico da habilidade.

numéricas (progressões aritmética e geométrica), identificando regularidades e construindo algoritmos para obter termos específicos ou a soma de seus termos.)

Recursos:

- Quadro branco ou projetor
- Pincel ou caneta para quadro branco
- Instrumento musical (piano, teclado, violão ou software de simulação)
- Calculadora (opcional)
- Material impresso com a tabela de frequências das notas musicais (exemplo: Dó central = 261.63 Hz)
- Computador com acesso à internet (para demonstrações ou pesquisas)

Metodologia:

4.4.1 Aula 1 (50 minutos): Introdução à Escala Musical e Progressões Geométricas

Introdução (10 minutos):

- 0–5 min - Início da aula

  Iniciar a aula com uma breve discussão sobre a música e sua presença no cotidiano dos alunos. Perguntar se eles já se questionaram sobre a organização das notas musicais e a relação entre elas. Apresentar o conceito de escala musical diatônica (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó) e sua repetição em diferentes oitavas. Demonstrar no instrumento musical a sonoridade das notas em diferentes oitavas, enfatizando a relação de "dobro"na frequência entre oitavas adjacentes.

  Professor: toca uma sequência curta (Dó, Mi, Sol, Dó - em duas oitavas) no instrumento ou reproduz via app.

  Alunos: ouvir e anotar se percebem "a mesma nota mais aguda/mais grave".

- 5–12 min - Apresentação dos objetivos + motivação.

  Professor: expõe objetivos e pergunta rapidamente: "O que faz uma nota ser o dobro de frequência de outra?" (esperar respostas) Mostrar slide com esquema da escala diatônica vs cromática.

  Revisão de Progressões Geométricas (15 minutos):

- 12–22 min - Relembrar o conceito de sequência numérica e progressão geométrica (PG).

  Definir razão de uma PG (o quociente constante entre um termo e seu antecessor). Apresentar a fórmula do termo geral de uma PG:

  $$a_n = a_1.q^{n-1},$$

  onde:

  a_n é o n-ésimo termo,

  a_1 é o primeiro termo,

  q é a razão e

  n é o número de termos.

  Fazer 2 exemplos numéricos simples.

  Pedir 1 exercício-resposta oral a um aluno (verificar compreensão).

- 22–30 min - Oitava = razão 2 Apresentar a tabela de frequências de algumas notas musicais, mostrando como a frequência dobra a cada oitava. Ex.: Dó4 (261,63 Hz) e Dó5 (523,25 Hz).

  Professor: tocar como exemplo a nota Dó em diferentes oitavas (ex: Dó1, Dó2, Dó3) e mostrar que suas frequências formam uma progressão geométrica de razão 2.

- 30–40 min — Introdução da divisão em 12 semitons (calcular q)

  Discutir como a divisão da oitava em 12 semitons iguais implica em uma razão constante entre as frequências de notas adjacentes dentro da mesma oitava.

  Introduzir a ideia de que essa razão não é um número inteiro, mas um valor que, elevado à décima segunda potência, resulta em 2 (a duplicação da frequência na oitava).

  Calcular a razão aproximada dessa progressão geométrica: $\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$.

  Mostrar como cada semitom representa um aumento de aproximadamente 5.946% na frequência da nota anterior.

- 40–50 min — Atividade individual curta + saída formativa.

  Entregar mini-folha com 3 questões curtas (ex.: calcular a frequência de uma nota 3 semitons acima de 440 Hz).

4.4.2 Aula 2 (50 minutos): Aplicando a Progressão Geométrica na Escala Musical

Objetivos da aula 2: aplicar fórmula em escala cromática, calcular conjuntos de frequências, comparar escalas e produzir relatório curto.

- 0–5 min — Retomada breve

  Revisitar o conceito da razão da progressão geométrica na escala temperada $\sqrt[12]{2}$.

- 5–15 min — Exemplo guiado (passo a passo com A4=440 Hz)

  Escolher uma nota como ponto de partida (ex: Lá com frequência de 440 Hz) e calcular a frequência das demais notas da escala cromática ascendente utilizando a fórmula do termo geral da PG, onde a_1 é a frequência do Lá, $q = \sqrt[12]{2}$ e n varia de 1 a 12.

  Orientar os alunos a utilizarem a calculadora para realizar os cálculos.

  Anotar as frequências encontradas no quadro, relacionando-as com as notas musicais correspondentes (Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si).

  Atividade Prática (25 minutos):

- 15–20 min — Organização dos grupos e distribuição de tarefas

  Dividir a turma em pequenos grupos.

  Formar grupos de 3–4 integrantes; entregar às equipes uma nota fundamental diferente (ex.: grupo 1 recebe Dó3, grupo 2 Ré3, grupo 3 Fá3, etc.) com valor de frequência de referência (ou a instrução "use A4=440 e calcule referente a A4").

- 20–40 min - Cálculos em grupo Incentivar os alunos a discutirem em grupo e a compartilharem suas estratégias de cálculo. Cada grupo deverá:

  Calcular as 12 frequências da escala cromática ascendendo a partir da nota recebida.

  Registrar em tabela (coluna: nota, semitons from base, fórmula aplicada, valor numérico).

  Tocar/gerar os tons correspondentes (com app ou instrumento) para verificar a sequência sonora.

  Discussão e Conclusão (10 minutos):

  Promover uma discussão em grupo sobre os resultados obtidos, comparando as diferentes escalas geradas a partir de diferentes notas fundamentais.

Refletir sobre a importância da padronização da escala temperada para a música ocidental.

Concluir a aula reforçando a conexão entre a matemática (progressões geométricas) e a música, mostrando como a matemática pode explicar a estrutura e a harmonia musical.

Avaliação:

Participação e envolvimento dos alunos nas discussões e atividades propostas.

Observação da capacidade dos alunos em aplicar a fórmula do termo geral da PG para calcular as frequências das notas musicais.

Análise das soluções apresentadas pelos grupos na atividade prática.

Entrega de um relatório individual ou em grupo sobre a atividade prática, contendo os cálculos realizados e as conclusões sobre a relação entre a escala musical e as progressões geométricas.

Observações:

O professor pode adaptar o nível de profundidade dos cálculos e das discussões de acordo com o nível da turma.

É interessante utilizar um software musical ou um aplicativo de afinador para visualizar e comparar as frequências calculadas com as frequências reais das notas musicais.

Pode-se propor como atividade complementar uma pesquisa sobre outras escalas musicais e suas possíveis relações matemáticas.

A aula pode ser enriquecida com exemplos musicais que ilustrem a sonoridade dos intervalos e a progressão das notas na escala.

Ao utilizar o exemplo das escalas pitagóricas, o professor pode tornar o conceito abstrato de Progressão Geométrica mais tangível e interessante para os alunos, mostrando uma aplicação histórica e culturalmente relevante da matemática. Isso pode aumentar a motivação e a compreensão do conteúdo, além de reforçar a ideia de que a matemática está presente em diversas manifestações do mundo ao nosso redor.

Referências Bibliográficas

[1] PEREIRA, Marcos do Carmo. *Matemática e Música - De Pitágoras aos dias de hoje*. Dissertação do Profmat UniRio, Rio de Janeiro, p.91, 2013.

[2] ABDOUNUR, O. J. *Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

[3] CALÇADA, C. S.; SAMPAIO, J. L. Física Clássica, 2: Termologia, Óptica e Ondas. São Paulo: Atual, 2012.

[4] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, Jearl: Fundamentos de Física 2, Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 4ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 1996.

[5] BLACKING, John. *How Musical Is Man?* Seattle: University of Washington Press, p.4, 1973.

[6] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Opera Omnia. Vol. 3. Edição de Ludovic Dutens. Genebra: Fratres de Tournes, 1768. Carta a Christian Goldbach, 17 abr. 1712, p. 437–438.

[7] PIRES, Débora Costa. *História da música: Antiguidade ao Barroco.* 253p, Indaial: UNIASSELVI, 2019.

[8] ROUSSEAU, Jean-Jacques. *Dicionário de música.* São Paulo: Fundação Editora da Unesp, 2021.

[9] MED, Bohumil. *Teoria da Música.* 3ª edição, Rio de Janeiro, Editora: Musimed, 1986.

[10] CORDEIRO, Eduardo. *Escala Temperada.* Disponível em https://eduardocordeiro.com.br/Escala_Temperada.html, Pelotas-RS, jul/2020. Acesso em: 04 fevereiro 2025.

[11] LOCKHART, Paul. *A Mathematician's Lament.* USA: Bellevue Literary Press, 2009.

[12] Brasil. BNCC: Base Nacional Comum Curricular - Computação. Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images//historico/anexo_parecer_cneceb_n_2_2022_bncc_computacao.pdf. Acessado em: 16 de janeiro de 2025.

[13] MELO, Pâmella Raphaella. *Ondas periódicas, 2002.* Disponível em: https://www.preparaenem.com/fisica/ondas-periodicas.htm. Acesso em: 11 Janeiro 2025.

[14] História da Música, Pitágoras e a Escala Musical. Disponível em: https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/. CEEJA Marilia, 2020. Acesso em: 14 Janeiro 2025.

[15] Meisterdrucke, Retrato de Pitágoras, Disponível em: https://www.meisterdrucke.pt/. Acesso em: 25 Janeiro 2025.

[16] D'AMBRÓSIO, Ubiratan, *Educação Matemática da teoria a prática: Uma breve Introdução da matemática e sua história.* 17ª edição São Paulo: Papirus Editora, p.17-29, 2009.

[17] THIBEAULT, Matthew D. *UT queant laxis*, 2008. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ut_Queant_Laxis_MT.png. Acesso em: 04 Fevereiro 2025.

[18] Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/problema-pitagoras-o-musico/. Acesso em 10 Agosto 2025

[19] IAZZETTA, Fernando. *Escala Pitagórica*, 2000. Disponível em: https://iazzetta.eca.usp.br/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html. Acesso em: 12 Fevereiro 2025.

[20] Quero Aprender Agora, Escala Cromática de dó. Disponível em: https://queroaprenderagora.com.br/notas-de-violao/. Acesso em: 11 Março 2025.

[21] GODWIN, Joscelyn. *Harmonies of Heaven and Earth: Mysticism in Music from Antiquity to the Avant-Garde*. Rochester, Vermont: Inner Traditions, 1987.

[22] RA – Revista de Antropologia, v. 46, n. 1, 2003. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ra/a/PnnKJTCvbQzVyN4dXMrsHyw/?lang=pt. Acesso em: 17 maio 2025.

[23] PISTON, Walter. *Harmony.* 5th ed. New York: W. W. Norton & Company, 1987.

[24] D'AREZZO, Guido. *Micrologus*. Disponível em https://pt.scribd.com/document/670755158/Guido-Micrologus-Eng. Acesso em 12 Agosto 2025

[25] RUSCZYK, Richard. *Mathematical Adventures: A Collection of Insights and Ideas*. USA: Art of Problem Solving, 2011.

[26] MORSE, Philip M.; INGARD, Kuno. *Theoretical Acoustics*. Princeton: Princeton University Press, 1968.

[27] BENSON, Donald J. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2007.

[28] LI, Hailong; Chakraborty, Kalyon; Kanemitsu, Shigeru: Music as Mathematics of Senses, Advances in Pure Mathematics, (8), 845-862, 2018.

[29] MENEZES, F. *A acústica em palavras e sons.* São Paulo: Ateliê Editorial, 2004.

[30] WERCKMEISTER, Andreas D. *Microtonal Encyclopedia*. Disponível em: https://www.calendarz.com/pt/on-this-day/november/30/andreas-werckmeister. Acesso em: 12 Agosto 2025.