

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT**

**ISABELA CAROLINE HASSE**

**ENSINO DE GEOMETRIA NO 6º ANO: UMA PROPOSTA ALINHADA AOS  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

**JOINVILLE**

**2025**

**ISABELA CAROLINE HASSE**

**ENSINO DE GEOMETRIA NO 6º ANO: UMA PROPOSTA ALINHADA AOS  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROF-MAT), do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC.

Orientador: Prof.a Dr.a Elisandra Bar de Figueiredo

**JOINVILLE**

**2025**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da  
Biblioteca Universitária Udesc,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Hasse, Isabela Caroline

Ensino de Geometria no 6º ano : Uma proposta alinhada aos  
Registros de Representações Semióticas / Isabela Caroline Hasse. --  
2025.

95 p.

Orientadora: Prof.a Dr.a Elisandra Bar de Figueiredo  
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional,  
Joinville, 2025.

1. Geometria. 2. Ângulos. 3. Triângulos. 4. Quadriláteros. 5.  
Ensino Fundamental.. I. Figueiredo, Prof.a Dr.a Elisandra Bar de. II.  
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências  
Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em  
Matemática em Rede Nacional. III. Título.

**ISABELA CAROLINE HASSE**

**ENSINO DE GEOMETRIA NO 6º ANO: UMA PROPOSTA ALINHADA AOS  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROF-MAT), do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC.

Orientador: Prof.a Dr.a Elisandra Bar de Figueiredo

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof.a Dr.a Elisandra Bar de Figueiredo  
UDESC/CCT

Membros:

Prof.a Dr.a Eliane Bihuna de Azevedo  
UDESC/CCT

Prof. Dr. Mateus Bernardes  
UTFPR

Joinville, 27 de fevereiro de 2025

Àqueles que amo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha professora e orientadora, Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo, por me dar todo apoio necessário durante todo o processo de elaboração da dissertação, mas também por toda sua ajuda durante o mestrado.

À Universidade do Estado de Santa Catarina, em especial ao campus CCT, pela oportunidade de cursar um programa de qualidade e excelência, assim como pela ajuda financeira concedida através da bolsa do PROMOP.

À todos os professores que tive a oportunidade de encontrar durante minha vida escolar, acadêmica e profissional, em especial meus professores de matemática, que me apresentaram este mundo incrível.

Agradeço também a todos os meus amigos e colegas de estudo e profissão que, direta ou indiretamente, me ajudaram a chegar até aqui.

“O olhar do poeta projeta no visível  
as formas de objetos desconhecidos, e  
sua palavra dá aos nada inalcançáveis  
um lugar e um nome.”  
(O Sonho de uma Noite de Verão)

## RESUMO

Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e no ensino de geometria no ensino básico, foi realizada com o objetivo de examinar e sintetizar o conhecimento presente em teses e dissertações já produzidas sobre o tema, identificando contribuições relevantes para o desenvolvimento de um produto educacional inovador voltado ao ensino de geometria no 6º ano do ensino fundamental. O trabalho segue uma abordagem qualitativa e interpretativa ao atender a questão de investigação ‘De que maneira o ensino de geometria no ensino básico atrelado com os Registros de Representação Semiótica pode ser trabalhado em sala de aula?’. A pesquisa bibliográfica resultou em 16 trabalhos acadêmicos da ‘Lista das Dissertações de Mestrado dos alunos do PROFMAT’ e do ‘Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES’, os quais foram analisados a fim de conhecer seus métodos, resultados e possíveis contribuições ao produto educacional produzido. Os resultados das análises culminaram em um material pedagógico destinado ao professor de matemática que consiste em um conjunto de atividades que podem ser aplicadas com turmas de 6º ano do ensino fundamental nos conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros, em sintonia com as ideias de Duval.

**Palavras-chave:** Geometria. Ângulos. Triângulos. Quadriláteros. Ensino Fundamental.

## **ABSTRACT**

This research, based on the Theory of Registers of Semiotic Representations, by Raymond Duval, and the teaching of geometry in elementary school, was conducted with the aim of examining and synthesizing the knowledge present in theses and dissertations already produced on the subject, identifying relevant contributions for the development of an innovative educational product aimed at teaching geometry in the 6th grade of elementary school. The work follows a qualitative and interpretative approach to address the research question 'How can the teaching of geometry in elementary school linked to Semiotic Representation Records be worked on in the classroom?'. The bibliographic research resulted in 16 academic works from the 'List of Master's Dissertations of PROFMAT Students' and from the 'CAPES Theses and Dissertations Catalog', which were analyzed in order to understand their methods, results and possible contributions to the educational product produced. The results of the analyses culminated in a pedagogical material intended for mathematics teachers, consisting of a set of activities that can be applied to 6th grade elementary school classes in the content of angles, triangles and quadrilaterals, in line with Duval's ideas.

**Keywords:** Geometry. Angles. Triangles. Quadrilaterals. Elementary School.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de Tratamento no contexto da Geometria . . . . .	29
Figura 2 – Exemplo de Conversão no contexto da Geometria . . . . .	30
Figura 3 – Ângulos do Tangram . . . . .	76
Figura 4 – Ângulos de um Relógio . . . . .	77
Figura 5 – Classificação de Ângulos . . . . .	78
Figura 6 – Medição e Classificação de Triângulos . . . . .	79
Figura 7 – Construção de um Trapézio . . . . .	80
Figura 8 – Construção de um Retângulo pelo Geogebra . . . . .	81
Figura 9 – Questão de Classificação de Triângulos . . . . .	82
Figura 10 – Questão de Classificação de Ângulos . . . . .	82
Figura 11 – Jogo de Dominó com Ângulos . . . . .	83
Figura 12 – Jogo de UNO com Triângulos . . . . .	84
Figura 13 – Jogo dos Pontinhos sobre Quadriláteros . . . . .	85
Figura 14 – Mapa Mental sobre Quadriláteros . . . . .	85

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Busca por trabalhos do PROFMAT . . . . .	35
Quadro 2 – Trabalhos selecionados do PROFMAT . . . . .	36
Quadro 3 – Busca por trabalhos da CAPES . . . . .	37
Quadro 4 – Trabalhos selecionados da CAPES . . . . .	38

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1	O ENSINO DE GEOMETRIA . . . . .	15
2.1.1	A Geometria presente no Currículo . . . . .	16
2.1.2	A Importância do Ensino de Geometria . . . . .	19
2.1.3	O Problema a ser Enfrentado . . . . .	21
2.2	OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA . . . . .	24
2.2.1	As Atividades Cognitivas Fundamentais . . . . .	28
2.2.2	As Apreensões em Geometria . . . . .	31
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>PRODUTO EDUCACIONAL . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>89</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria é um dos pilares da Matemática, presente nas escolas desde o ensino infantil e acompanhando o estudante para além da sua vida escolar. Tal conteúdo matemático está presente no dia a dia das pessoas sem que estas tenham consciência disso. Pode ser encontrado em diversas situações como logotipos de empresas, plantas baixas de casas e terrenos, artesanato, coreografias e até mesmo em esportes (Kluppel, 2012).

Formalizada a partir de um processo crescente de mais de 2200 anos, a disciplina pode ser caracterizada como uma ferramenta de descrição e interação com o meio em que se vive, sendo vista como uma parte intuitiva e concreta da Matemática (Pavanello; Franco, 2007). Por ter grande facilidade em ser encontrada no cotidiano do educando, vem apresentando novas aplicações e meios de exposição do seu conteúdo.

As noções que envolvem a Geometria contribuem para a aprendizagem de números e medidas, já que estimula o aluno a perceber semelhanças e diferenças, e identificar regularidades (Brasil, 1997). Seu estudo envolve um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico, o que também promove a interdisciplinaridade com as outras áreas do conhecimento (Brasil, 2018).

Apesar de sua relevância, a geometria é frequentemente desvalorizada nos processos de ensino e de aprendizagem, tanto pelos estudantes quanto pelos educadores. Essa desvalorização resulta, muitas vezes, na omissão do ensino de geometria em diversas escolas, devido a falta de tempo ou disposição dos professores (Filho; Tavares, 2016).

Tal situação tem motivado a busca por métodos e técnicas que facilitem o ensino e a aprendizagem desse conteúdo. Entre as alternativas destacadas, encontra-se o pensamento relacionado à Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvido por Raymond Duval em sua obra 'Sémiosis et pensée humaine', que oferece caminhos promissores para superar os desafios do ensino da Geometria.

A escolha desta teoria para o presente trabalho como solução do problema do ensino da geometria se deu justamente pela gama de possibilidades que a TRRS apresenta e utiliza, tendo como foco principal a utilização de diferentes representações no ensino dos conteúdos geométricos para o 6º ano do ensino fundamental.

Por meio de sua teoria, Duval apresenta um caminho para a aprendizagem da Matemática que ressalta a necessidade de utilização de vários registros de representação para um mesmo objeto matemático, sendo de suma importância que o aluno consiga transitar entre os registros e que consiga diferenciar o objeto e a sua representação.

O presente estudo foi pensado de modo a trabalhar com a TRRS no ensino de Geometria no 6º ano do ensino fundamental, procurando identificar as contribuições da teoria no contexto da problemática do ensino de Geometria. Inicialmente, o estudo envolveria a aplicação de uma sequência didática em turmas de 6º ano de uma escola municipal de Joinville, Santa Catarina, porém, devido a mudanças contratuais da autora, essa aplicação não foi possível de ser realizada.

Seguindo o mesmo tema, decidiu-se por fazer uma pesquisa bibliográfica em teses e dissertações acadêmicas relacionadas ao ensino de Geometria e à teoria de Duval, tendo a seguinte questão de investigação: ‘De que maneira o ensino de Geometria no ensino básico atrelado com os Registros de Representação Semiótica pode ser trabalhado em sala de aula?’.

O objetivo do trabalho foi examinar e sintetizar o conhecimento presente em teses e dissertações já produzidas sobre o tema, identificando contribuições relevantes para o desenvolvimento de um produto educacional voltado ao ensino de Geometria no 6º ano do ensino fundamental.

O segundo capítulo da dissertação trata da fundamentação teórica do trabalho, organizada em dois subcapítulos que abordam, respectivamente, a Geometria e os registros de representação de semiótica, temas centrais do trabalho e também do produto educacional produzido.

A seção direcionada ao ensino de Geometria está subdividida em três partes, a primeira trata do papel da área de estudo no currículo escolar brasileiro, a segunda parte aborda sua importância no ensino básico e a terceira examina o estado atual do ensino de Geometria, que é frequentemente caracterizado por situações de descaso e abandono por parte de muitos docentes.

A segunda parte da fundamentação teórica faz menção à TRRS, proposta pelo filósofo, psicólogo e professor francês Raymond Duval. A teoria ressalta a importância, e até mesmo a necessidade, da utilização de diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, de modo que possibilite ao aluno a compreensão dos processos matemáticos envolvidos.

No terceiro capítulo será apresentada a metodologia utilizada na pesquisa bibliográfica, uma pesquisa de caráter qualitativo que analisou ao todo 16 trabalhos acadêmicos que abordam o ensino de Geometria aliado aos registros de representação de semiótica, sendo duas dissertações da Lista das dissertações de mestrado dos alunos do PROFMAT e o restante do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, uma tese e 13 dissertações.

Na revisão de literatura situada no quarto capítulo, trata-se da análise dessas dissertações e tese acerca do método utilizado para relacionar o ensino de Geometria com a teoria de Duval. Ao final de cada análise, a autora faz um breve comentário sobre como o produto educacional produzido foi enriquecido de alguma forma a partir da leitura e estudo do trabalho.

O quinto capítulo deste trabalho apresenta o produto educacional produzido, que trata de um conjunto de tarefas originais produzidas tendo como inspiração os resultados obtidos através da revisão de literatura, que abordam os conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros para o 6º ano do ensino fundamental, apresentando o tema, as habilidades trabalhadas e como a TRRS foi articulada no processo do ensino-aprendizagem.

Ao final da dissertação, no sexto capítulo, estão presentes algumas considerações acerca desta dissertação e produto educacional voltado ao ensino básico.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados aspectos relacionados ao conteúdos de Geometria e à TRRS, iniciando com um breve desenrolar histórico seguido de suas respectivas contribuições para com o trabalho, sempre levando em consideração o objetivo geral da dissertação.

### 2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria é uma das principais áreas de estudo da Matemática e debate temas como plano, espaço, formas e figuras, sendo possíveis, e até mesmo incentivadas, atividades que façam relação com o cotidiano e com aplicações práticas. O seu estudo proporciona ao aluno desenvolver um pensamento único, que lhe permite compreender, descrever e representar o seu mundo, de maneira estruturada. Além disso, a Geometria também proporciona ao professor o trabalho com situações-problema, um tema pelo qual alunos costumam se interessar naturalmente durante as aulas (Brasil, 1997).

O pensamento geométrico é dito como necessário ao investigar propriedades, produzir argumentos convincentes e montar conjecturas, ele pode ser desenvolvido nos alunos baseando-se no estudo de deslocamentos no espaço, formas e elementos de figuras planas e espaciais (Brasil, 2018). Porém, além de abordar as formas e os elementos, o trabalho acerca dos conteúdos geométricos também pode ser feito a partir das relações interdisciplinares dentro do ambiente escolar, o que enriquece ainda mais o conteúdo para o estudante.

Como a Geometria estimula a criança a observar o seu redor percebendo semelhanças, diferenças e regularidades, ela consegue, a partir de uma exploração de objetos do mundo físico, como pinturas, esculturas, artesanato e elementos da natureza, estabelecer conexões entre a Matemática e as outras áreas de conhecimento (Brasil, 1997).

Para Neto (2022) existem pelo menos quatro razões para a inserção dos conteúdos de Geometria no ensino básico:

- A Razão Cultural: Onde é possível colocar *Os Elementos* de Euclides como uma das maiores sínteses de conhecimento humano, parte da herança cultural.
- A Razão Matemática: Sendo a Geometria imprescindível para a construção de um corpo de conhecimentos, do ensino básico até fazer a transição para o ensino superior.
- A Razão Metodológica: Por utilizar a argumentação lógico-dedutiva no ensino dos conteúdos geométricos.
- A Razão Pragmática: devido às várias aplicações de conteúdos geométricos na ciência e no cotidiano.

Essas quatro razões apresentadas são de suma importância e devem ser contempladas no ensino básico e também na formação dos professores, estes que atuarão diretamente com os estudantes em sala de aula (Neto, 2022).

### 2.1.1 A Geometria presente no Currículo

O conteúdo de Geometria consta em currículos educacionais brasileiros a bastante tempo, e ao longo desse período houveram mudanças em sua apresentação e modelo de abordagem em sala de aula. Por este motivo é de grande importância um estudo destes documentos, tendo como finalidade a investigação de fatores relacionados ao ensino de Geometria.

Até o ano de 1996, a Lei Federal n. 5.692, de 11 de agosto de 1971, definiu as diretrizes e bases da educação nacional, onde determinou objetivos e propostas para a educação na época, porém, deixava aos estados brasileiros a responsabilidade de formular as propostas curriculares, utilizadas pelas escolas de seus territórios e, conseqüentemente seus respectivos sistemas de ensino (Brasil, 1997).

Conforme mudanças ocorriam no panorama nacional e internacional da educação, coube ao Brasil reformular a organização curricular de suas escolas, inserindo as novas diretrizes elaboradas pelo Governo Federal de orientação à educação no país.

Nasceram assim, em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais, conhecido como PCN, tendo como objetivo a melhoria da educação no Brasil, sendo um referencial de qualidade para o ensino, mas sem configurar um modelo curricular homogêneo e impositivo, considerando as diversidades socioculturais das regiões brasileiras e autonomia dos professores em suas salas de aula (Brasil, 1997).

O documento é dividido em volumes, estipulando uma área do conhecimento por volume, são elas: Língua Portuguesa; Matemática; Ciências Naturais; História; Geografia; Arte; Educação Física. Sendo que o volume três trata da Matemática.

Além dos volumes, os PCNs também são organizados em ciclos de dois anos, sendo o primeiro ciclo referente ao 2º e 3º ano (1ª e 2ª série na época), o segundo ciclo, à 4º e 5º ano (3ª e 4ª série), terceiro ciclo se refere ao 6º e 7º ano (5ª e 6ª série) e, finalizando o ensino fundamental, tendo o quarto ciclo com 8º e 9º ano (7ª e 8ª série).

A divisão em ciclos foi estabelecida como uma tentativa de melhorar a integração de conhecimentos dentro do regime seriado, de modo que não trazia incompatibilidade com a estrutura do ensino fundamental. Essa forma de organização assegurava a continuidade do processo educativo, uma vez que permitia aos professores adaptar as ações pedagógicas com necessidades da turma, sem deixar de lado as expectativas de aprendizado do período em questão (Brasil, 1997).

No terceiro volume, o objetivo dos PCNs se torna adequar o trabalho escolar com a nova realidade, onde a Matemática ganha cada vez mais espaço em diversos campos da atividade humana, dando importância à reflexão do papel da Matemática com a formação da cidadania (Brasil, 1997).

Ao considerar o terceiro ciclo (6º e 7º ano) e quarto ciclo (8º e 9º ano) do ensino fundamental, conteúdos matemáticos são organizados em blocos, são eles: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação.

O bloco que faz referência ao estudo da Geometria é o **Espaço e Forma**, que contempla não apenas formas, mas também noções de posição, localização e deslocamento, dando devida importância às transformações geométricas e percepções espaciais.

No terceiro ciclo, o ensino de Matemática visa o desenvolvimento do pensamento geométrico de maneira a levar o aluno a:

- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução (Brasil, 1997, p. 64-65).

Neste momento é perceptivo como o produto educacional produzido nesta dissertação atende corretamente os PCNs, pois trata do ensino de Geometria para turmas de 6º anos (terceiro ciclo), abordando os conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros.

Já no quarto ciclo, o ensino matemático visa o desenvolvimento do pensamento geométrico de modo a levar o aluno a:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais (Brasil, 1997, p. 81-82).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) terminam suas considerações sobre o bloco Espaço e Forma ressaltando que situações cotidianas, em conjunto com o mundo profissional, demandam um pensar geométrico dos indivíduos, que deve ser trabalhado desde cedo no âmbito escolar.

Depois de 20 anos da criação dos PCNs, é criada a Base Nacional Comum Curricular, não para substituir os parâmetros já estabelecidos no documento de 1997, e sim para reunir as informações contidas nesse e outros documentos oficiais, de modo a organizar as aprendizagens essenciais da educação básica.

Conhecido como BNCC (Brasil, 2018), o documento tem caráter normativo e define um conjunto de aprendizagens que todos os estudantes do país devem desenvolver ao longo do período acadêmico.

O documento é dividido em três etapas: ensino infantil, fundamental e médio, abordando cada área do conhecimento separadamente, e categorizando cada uma delas por ano, unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Para o Ensino Fundamental - Anos Finais, a área da Matemática apresenta as seguintes unidades temáticas: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Para a BNCC (Brasil, 2018), o ensino da unidade Geometria nos anos finais é tratado como a consolidação e ampliação dos conceitos abordados anteriormente, o documento foca nas transformações de figuras geométricas planas, bem como seus elementos, congruências e semelhanças.

No 6º ano do ensino fundamental, os objetos de conhecimento da Geometria são plano cartesiano, prismas, pirâmides, polígonos, figuras semelhantes, retas paralelas e perpendiculares, esses objetos se organizam em um total de oito habilidades.

Já no 7º ano, os objetos de conhecimento da unidade de Geometria são transformações geométricas no plano cartesiano, translação, rotação, reflexão, circunferência, relações entre os ângulos formados por retas paralelas e transversais, triângulos e polígonos regulares, aumentando também o número de habilidades, que passa para dez.

Os objetos do conhecimento de Geometria do 8º ano são congruência de triângulos, construções de ângulos e polígonos regulares, mediatriz, bissetriz e simetrias de translação, reflexão e rotação, apresentando apenas cinco habilidades.

Por fim, o último ano do ensino fundamental, 9º ano, apresenta os seguintes objetos de conhecimento em Geometria: relações entre os ângulos formados por retas paralelas e transversais; relações entre arcos e ângulos na circunferência; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; retas paralelas cortadas por transversais; polígonos regulares; distância entre pontos; vistas ortogonais de figuras espaciais, no total somando oito habilidades.

O documento utilizado até hoje pelas escolas ressalta por diversas vezes a importância da Geometria e, como foi mostrado anteriormente, trabalha com a progressão dos conteúdos de forma a construir o pensar geométrico ao longo do processo educacional, consolidando ainda mais as habilidades.

Apenas os quatro anos finais do ensino fundamental foram destacados neste subcapítulo, porém a Geometria está presente nos currículos de todas as etapas pedagógicas do ensino fundamental até o ensino médio. A escolha do enfoque do 6º ao 9º ano se deu pelo conteúdo abordado no produto educacional.

A seguir, será abordada a importância do ensino de Geometria no processo educacional dos alunos, trazendo novamente os documentos PCN e BNCC como amparo, evidenciando o posicionamento dos documentos oficiais em relação ao campo da Matemática.

### 2.1.2 A Importância do Ensino de Geometria

Como já mencionado, a Geometria está presente nos currículos escolares a, no mínimo, 27 anos, considerando a criação dos PCNs. Desde essa época, os órgãos responsáveis pela educação no Brasil já consideravam o estudo geométrico essencial para a formação básica.

Para os PCNs (Brasil, 1997), o desenvolvimento da capacidade de observação do espaço tridimensional e a comunicação acerca dos conteúdos assim contemplados é cada vez mais indispensável dentro de sala de aula, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno.

Já a BNCC (Brasil, 2018), ressalta ao longo de seu capítulo Matemática, que o pensamento geométrico é necessário na investigação das suas propriedades, na realização de conjecturas e na produção de argumentos geométricos. Além de apontar atividades de construção, representação e interdependência como conteúdos geométricos fundamentais para a formação do saber do estudante.

Os documentos oficiais não são os únicos a se atentar na importância do ensino da geometria, ao longo dos anos muito se fala da prática pedagógica envolvendo conteúdos geométricos. Livros, artigos e periódicos apresentam ano a ano contribuições ao conteúdo matemático, evidenciando novas metodologias de aprendizagem e novos recursos de ensino, tudo com o intuito de melhorar o ambiente escolar, possibilitando assim uma melhor aprendizagem por parte dos alunos e, conseqüentemente, um melhor rendimento em geometria, um conteúdo matemática de grande notoriedade.

Kobayashi (2001) é um exemplo disso, a autora do livro voltado ao ensino de geometria no nível infantil salienta durante suas reflexões que o estudo da geometria pode ser interpretado e discutido no retomar de seus primórdios, para ela “estudar o espaço geométrico é estudar a história da geometria, é retomar às mais simples observações advindas da capacidade dos seres humanos de reconhecer configurações físicas e espaciais, comparar formas e tamanhos” (Kobayashi, 2001, p.17), o que mostra que mesmo importante, a geometria veio do simples, das observações e experiências, tornando-se aos poucos como é conhecida.

Outros autores também consideram a progressão de conhecimentos como a base do ensino de geometria, de modo a considerar as experiências prévias dos alunos como elementos de referência nas atividades de sala planejadas pelos professores, tendo a função complementar o conhecimento, de forma a contribuir de pouco a pouco na construção do conhecimento matemático, em específico o geométrico (Mandarino, 2014).

Esses elementos de referência do aluno passam por um processo que o permite evoluir e progredir seu aprendizado, deixando de ser um conhecimento raso para se aprimorar cada vez mais, dessa forma é possível dizer que os conceitos geométricos “constituem parte importante do conhecimento matemático uma vez que, por meio deles, o estudante desenvolve funções psíquicas específicas que lhe permitem compreender, descrever e representar de forma organizada, o espaço em que vive” (Locatelli, 2015, p. 75).

As contribuições do ensino da Geometria também ganham destaque em trabalhos acadêmicos, para o aluno, a contribuição que a geometria promove é essencial para o seu desenvolvimento, pois não apenas estimula seus esquemas cognitivos, mas também possibilita a visualização espacial de figuras e formas, a resolução de problemas (sejam eles do cotidiano ou não) e a compreensão dos objetos presentes no ambiente em que está inserido, além das construções de relações espaciais e análises de formas e figuras (Costa, 2019).

O contato em sala de aula do estudante com os conceitos da Geometria permite desde cedo que estes “investiguem, visualizem e experimentem em relação aos objetos presentes em seu redor e desenvolvam noções de orientação espacial” (Oliveira; Gonçalves, 2018, p. 101), tendo isso em vista, uma das várias maneiras de se estudar o conteúdo é realizando as chamadas construções geométricas, maneiras de expressar e representar objetos geométricos por meio dos conhecimentos previamente adquiridos e de instrumentos analógicos e/ou digitais.

Os apontamentos e discussões realizados durante anos de produções acadêmicas, evidenciam a Geometria como

um campo de conhecimento reconhecido e de inquestionável importância para a formação dos alunos, pois além do desenvolvimento de um raciocínio geométrico, permite o desenvolvimento de outros tipos de raciocínio, de habilidades, em especial a capacidade de discriminação de formas e a manipulação destas (Kluppel, 2012, p. 27).

Para discutir a importância do estudo geométrico no currículo escolar e na vida dos estudantes, seria possível citar outros inúmeros autores e suas mais variadas ideias, porém falar de Geometria não é difícil, o mundo todo a conhece e entende o seu valor, bem como o de suas aplicações no cotidiano, o conteúdo vem sendo estudado por milhares de anos, assim criando cada vez mais vertentes e aumentando o seu tamanho.

Sendo assim, sua importância pode ser resumida nos dois objetivos discutidos por Fonseca et al. (2007), o primeiro deles ligado à sua dimensão instrumental e o segundo ligado à sua dimensão formativa. Para as autoras, o olhar para com a Geometria deve ser tratado para além do conteúdo escolar, possibilitando a visão do conteúdo matemático como experiência da humanidade, processo e produto de suas necessidades materiais e de seu pensamento, categorizada como uma das raízes da Matemática e, ao mesmo tempo, patrimônio cultural.

O primeiro objetivo tem ligação à dimensão instrumental da Geometria, desenvolvendo principalmente a capacidade de medir, de modo que essa utilização na vida cotidiana permita o reconhecimento da sua importância e ultrapasse assim para um aspecto mais formativo, sendo o segundo objetivo, que aborda as habilidades básicas de percepção e classificação, alicerces para o exercício de atividades que demandem competências geométricas.

Assim é possível compreender que a Geometria é conhecida e valorizada pelos órgãos oficiais, pesquisadores do tema e pela comunidade escolar, porém, um ponto que vale a atenção é o problema que se tem percebido em relação ao aprendizado dela, principalmente depois de entender sua importância dentro e fora do âmbito escolar e identificar baixos níveis de rendimento de alunos do ensino básico nesse conteúdo, circunstância apresentada e discutida a seguir.

### 2.1.3 O Problema a ser Enfrentado

A Matemática é uma ciência cujas aplicações são percebidas em muitas áreas, sendo a Geometria um ramo que possui um grande número de aplicações diretas e também relações com outros conteúdos da própria disciplina. Esta área de estudo vem apresentando construções geométricas presentes desde os primórdios da humanidade, tendo fundamental importância na construção dos conhecimentos dos povos antigos que serviram de base matemática para o que se tem hoje em dia (Pouzada et al., 2021).

Infelizmente o ensino da geometria vem enfrentando um problema caracterizado como descaso dentro das salas de aula. Relatos presentes em estudos indicam que o conteúdo escolar foi descartado dos currículos e também de cursos preparatórios de formação de professores por muito tempo, acarretando em consequências nos dias de hoje no que se percebe como deficiência de aprendizagem (Santos; Leal, 2021).

Com a criação de documentos oficiais como LDB, PCNs e BNCC, voltados à educação brasileira, foi possível ver um avanço no que se diz à valorização de todos os ramos da Matemática, incluindo a Geometria, lhe dando a devida atenção e importância que merece, no entanto é possível notar que o descaso com esse conteúdo matemático é de conhecimento geral, sendo até mencionado nos documentos, a fim de reafirmar sua importância.

No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (Brasil, 1997, p. 122).

Mesmo que a valorização da Geometria esteja acontecendo nos documentos oficiais, a prática escolar se mostra contrária ao apresentado no papel, resultados de avaliações de larga escala mostram que o desempenho de alunos do ensino básico em relação aos conteúdos de Geometria é muito baixo, por exemplo o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) que no ano de 2015 trouxe resultados insatisfatórios e preocupantes sobre o rendimento dos estudantes participantes.

De acordo com o relatório publicado, a categoria ‘Espaço e Forma’, bloco do conteúdo matemático que aborda a geometria, foi cotada como sendo aquela com o maior índice de dificuldade, considerando que esse resultado foi observado em praticamente todas as unidades da Federação (Brasil, 2016), o que mostra que os alunos apresentam uma melhor performance no que se diz respeito à cálculos aritméticos e menor desempenho nas questões de Geometria, mesmo que esta seja a que mais aborda conteúdos presentes no cotidiano do estudante.

Infelizmente os relatórios publicados nas edições de 2018 e 2022 do PISA não fazem referência a categoria ‘Espaço e Forma’, na realidade nem mesmo mencionam o conteúdo de geometria, o que impossibilita uma análise de avanços ou retrocessos no desempenho dos alunos nas questões que envolvem os conteúdos.

Esse problema já vinha sendo denunciado por Pavanello (1993) há mais de 30 anos, na época a razão para que a Geometria fosse deixada de lado por décadas foi a lei nº 5.692/71 que, dentre várias funções, concedia às escolas liberdade de escolha na organização das disciplinas, o que possibilitava que professores deixassem de incluir o conteúdos geométricos durante o ano escolar ou até mesmo reservassem o fim do ano letivo para fazer essa abordagem, principalmente em escolas públicas.

O motivo pelo qual muitos professores acabavam deixando esse conteúdo matemático de lado era a insegurança ao ministrar as aulas de geometria, por não terem um bom domínio do conteúdo, além disso, um outro motivo atrelado a esse descaso é o fato de que muitos professores acreditam que a Geometria deve ceder seu espaço a outros ramos da matemática, como os conteúdos voltados à álgebra, aritmética e a teoria dos conjuntos, uma convicção da época ligada a questões de ordem educacional (Pavanello, 1993).

Mesmo agora, com a lei revogada, ainda existem dados que comprovam a desvalorização da geometria no âmbito escolar, seja através do rendimento dos alunos e de materiais didáticos produzidos. Pavanello em entrevista recente comentou:

Eu ainda vejo a dificuldade dos alunos e futuros professores de Matemática quando se fala em Geometria [...] O que os professores me diziam nesses cursos é que em sala de aula eles trabalhavam tudo de Álgebra, a Geometria ficava por último e não dava tempo (Moran et al., 2023, p. 6-7).

A autora também comenta sobre a importância da formação do professor como forma sanar o problema, para ela tanto conteúdo como os processos necessários para ensinar os futuros alunos devem ser estudados durante sua formação, no entanto, enquanto os professores não mostrarem domínio do conteúdo e não saberem ensinar e explicar, o problema segue. Pensando nos professores já ativos no meio escolar, a formação continuada ganha destaque como forma de lidar com o problema, estabelecendo uma conexão entre as universidades e a educação básica, partindo do professor ou até mesmo das secretarias de educação a ideia e o incentivo à participação (Moran et al., 2023).

De acordo com Fonseca et al. (2007), no que cabe aos professores, ensinar Geometria pode trazer um certo desconforto em alguns casos, o que não acontece quando considerado o ensino de números por exemplo, esse desconforto encontrado pode ser refletido no pouco tempo dedicado ao trabalho de conceitos geométricos, mas também na falta de clareza sobre o que ensinar ou quais habilidades desenvolver nesse nível de ensino.

Além disso, autora também expõe que os professores muitas vezes ignoram as propostas curriculares oficiais de modo que suas práticas pedagógicas não se identificam com os conteúdos, orientações e planejamentos propostos, deixando de ministrar aulas sobre Geometria ou então ensinando de maneira insatisfatória, entretanto, para ela “isso não ocorre porque, tais professores estejam em desacordo com elas, mas porque não tiveram oportunidade de analisá-las ou sequer conhecê-las.” (Fonseca et al., 2007, p.18).

Outra situação encontrada expõe a realidade de muitos professores ao utilizarem apenas um único livro didático para preparação de seus planos de aula, sem ter a possibilidade de conhecer e analisar seus autores, bem como suas concepções acerca da Matemática e do ensino (Fonseca et al., 2007). Em análises realizadas em livros didáticos foi possível perceber que o conteúdo de Geometria era abordado sempre ao final de cada volume, fazendo com que muitos dos professores que utilizam a coleção deixassem de ensinar por falta de oportunidade, considerando o tempo acelerado do ambiente escolar (Moreira, 2013).

O problema de descaso se torna ainda mais grave quando se retoma a análise da importância da geometria no cotidiano e o nível de exigência que seus conteúdos demandam no caminhar dos anos escolares, tanto para professores quanto para os alunos. Para isso outros meios de sanar os problemas são explorados, entre eles os métodos de ensino, que tem grande influência na aprendizagem de conteúdos matemáticos considerando que estudantes frequentemente descrevem suas aulas de matemática como monótonas e sem relação com a sua realidade, fato que dificulta “a aprendizagem de alguns conceitos que poderiam ser melhor compreendidos, se relacionados a atividades do dia-a-dia” (Pouzada et al., 2021, p. 42).

Considerando as lacunas no ensino deixadas pelo longo período de descaso no tratamento dos conteúdos do campo da Geometria, recentemente cresce a tendência de resgate da importância desse conteúdo matemático para a formação dos alunos do ensino básico (Santos, 2020). O decaimento do interesse e do desempenho dos alunos nesses conteúdos resultou no aumento da preocupação de professores e pesquisadores acerca da problemática, tanto no âmbito escolar quanto no universitário (Freitas, 2013).

Através de pesquisas acadêmicas, foi percebido que a educação brasileira vem apresentando mudanças e avanços em relação ao descaso com o ensino da Geometria, porém a situação continua preocupante, as tentativas de melhorar o currículo da Geometria são válidas mas permanecem pouco significativas no dia a dia escolar (Moura; Krindges; Wielewski, 2020).

Os resultados obtidos através de programas de avaliações, assim como as experiências relatadas e dados publicados apresentam indicativos de um problema sistêmico no ensino (Silva; Bisognin, 2022). Atualmente existe a necessidade de apoio aos docentes que ensinam matemática no ensino básico, pois o problema não está restrito aos participantes de sua pesquisa, é um problema global no que se tem sobre o ensino de Geometria.

Isto é, não é um problema de apenas um docente, de apenas um aluno, de apenas uma escola, de apenas um município, de apenas um estado, de apenas um país, mas, sim, é um problema típico do mundo em que vivemos (Silva; Bisognin, 2022, p. 43-44).

Pensando nisso, o produto educacional produzido no presente trabalho de dissertação se propõe a auxiliar professores a ministrar conteúdos de Geometria para os seus alunos do 6º ano do ensino fundamental tendo como apoio a TRRS, uma teoria interessada no papel exercido pelas representações dos objetos matemáticos nos processos de ensino e de aprendizagem, a TRRS foi apresentada e discutida no seguinte subcapítulo.

## 2.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O ensino de Geometria auxilia o aluno a compreender o espaço físico em que se encontra, melhorar seu raciocínio lógico e a compreender outros conteúdos acadêmicos, sejam esses matemáticos ou não, fazendo com que o estudo geométrico seja indispensável no decorrer da caminhada escolar.

Porém, ao considerar que os objetos matemáticos, em particular os geométricos, não existem fisicamente, as dificuldades de compreensão dos alunos aumentam, gerando a necessidade de procura de representações e metodologias a fim de sanar o problema sem desconsiderar os aspectos cognitivos dos estudantes (Moran, 2015).

Um ponto positivo deste campo de estudo que pode auxiliar nessa busca foi levantado pelos PCN (Brasil, 1997) ao mostrar que os parâmetros indicam que as atividades de Geometria propiciam ao professor construir junto aos seus alunos um caminho a partir de experiências concretas, sem deixar de esquecer a importância da articulação apropriada entre três domínios: espaço físico, figuras geométricas e representações gráficas, o que leva a pensar nas diferentes maneiras que um objeto matemático pode ser trabalhado em sala de aula.

A BNCC (Brasil, 2018) também contribui nesse aspecto ao mostrar como o estudo da Matemática é intrinsecamente relacionado às compreensões sem deixar de lado as aplicações, de modo que o uso de recursos didáticos como malhas quadriculadas, jogos, livros, vídeos e softwares tem papel essencial na compreensão e na utilização das noções matemáticas, deixando claro que os materiais precisam estar integrados as situações que levem os alunos a reflexão e sistematização do conteúdo.

É de conhecimento geral a existência de diferentes maneiras de lecionar um conteúdo matemático, mas a escolha do tipo de representação do objeto tende a influenciar diretamente a compreensão do aluno em relação ao conceito e às propriedades, o que torna fundamental uma boa escolha de representação por parte do professor, levando em conta a situação em que a aula está sendo trabalhada (Moran, 2015)

Uma alternativa que ressalta essa necessidade de utilização de diversos registros de representação para um mesmo objeto matemático é dada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

O desenvolvimento da teoria proposta pelo psicólogo e filósofo francês Raymond Duval, teve início em 1986 e foi criada a fim de estudar e analisar o funcionamento do pensamento para a aquisição do conhecimento de um indivíduo. Nele o autor da teoria ressalta a importância da utilização de diversos registros de representação para o mesmo objeto matemático como um caminho para a aprendizagem Matemática.

A pesquisa de Duval teve como finalidade principal evidenciar a relevância que a semiótica traz para o estudo matemático, os estudos desse autor enfatizam a necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica que levem a melhoria no processo de aprendizagem dos alunos (Facundo, 2023).

O fato é que objetos matemáticos não estão acessíveis à percepção como os objetos reais estão, principalmente ao considerar o ponto de vista do aluno, de modo que se torna necessária a utilização de representantes. Por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre esses objetos matemáticos têm uma direta dependência em um sistema de representação semiótica. Desse modo, é possível identificar o papel fundamental que as representações semióticas desempenham no estudo matemático (Duval, 2023).

Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. Desde Descartes e Kant, ela está no centro de toda reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo (Duval, 2009, p. 29).

Ao falar de representação é de extrema importância conseguir diferenciar os dois tipos de representação presentes no processo cognitivo. São elas: as representações mentais e as representações semióticas. Enquanto as representações mentais são entendidas como o conjunto de imagens e de conceitualizações que um indivíduo tem sobre um objeto e sobre a situação em que ele está associado, as representações semióticas são as produções constituídas pela utilização de signos pertencentes ao sistema de representação mais conveniente (Duval, 2023).

É importante salientar que um tipo de representação não tem mais valor que o outro, já que o desenvolvimento da representação semiótica depende de uma interiorização da representação mental, enquanto somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas, o que não é possível com a representação mental (Duval, 2023).

A palavra “representação” é muito utilizada sob a forma verbal “representar” e na Matemática a representação de um objeto pode ocorrer de formas diferentes, sendo pelo uso de uma escrita, uma anotação ou um símbolo ao representar, por exemplo, números, funções e vetores, ou então pelo uso de traçados e figuras visuais que representam segmentos, pontos ou círculos (Duval, 2023).

Sabendo destas representações “é essencial jamais confundir os objetos matemáticos [...] com suas representações [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes” (Duval, 2009, p. 14), de modo que não é possível a compreensão Matemática sem a distinção de um objeto e sua representação.

Essa confusão pode acarretar na perda da compreensão e dos conhecimentos adquiridos, tornando os objetos rapidamente inutilizados ao longo do contexto da aprendizagem, seja pelos alunos não lembrarem do conteúdo ou porque o objeto permaneceu com uma representação inerte, que não sugere tratamento (Duval, 2023).

Assim surge a seguinte questão: “Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?” (Duval, 2023, p. 4), um paradoxo cognitivo do pensamento matemático que estabelece de um lado, que a apreensão dos objetos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, por outro lado, que somente por meio das representações é que a atividade sobre esses objetos se torna possível.

Porém, ao falar de geometria, os objetos matemáticos quando representados podem ser diferentes daqueles que a situação exige ver (Duval, 2012), ou seja a visualização de um objeto matemático por meio de um desenho não torna simples o ato de perceber as características particulares que esse objeto tem (Moran, 2015), de modo a se fazer necessário o contato com várias representações de um mesmo objeto .

Na atividade matemática é essencial poder mobilizar vários registros de representação semiótica no decorrer do ensino de um mesmo conteúdo, seja através de figuras, gráficos, língua natural, entre outros. Utilizar esse recurso de variedade de registros se caracteriza como condição necessária para que os objetos matemáticos abordados não sejam confundidos com as suas representações, e que possam também ser reconhecidos em cada uma das representações escolhidas (Duval, 2023).

No contexto da Geometria, a utilização das várias representações semióticas pode ser atrelada ao vasto leque de possibilidades de atividades que fazem os alunos trabalharem com e sobre as figuras geométricas:

As variações das atividades ocorrem tanto sobre a tarefa a fazer (reproduzir uma figura conforme um modelo ou construir, ou efetuar medidas, ou ainda, descrever para um outro aluno construir a figura) e o modo da atividade solicitada (modalidade concreta utilizando um material manipulável, modalidade representacional se dedicando à produção gráfica, ou modalidade técnica impondo certos instrumentos) (Duval, 2022, p. 6).

Tendo em conta os mais variados tipos de representação, o autor da TRRS levanta a seguinte questão: “A que corresponde a existência de muitos registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano?” (Duval, 2023, p. 13), apresentando em seguida três respostas possíveis a esta questão, respostas estas diferentes entre si mas não de forma excludente, apenas estão situadas em níveis diferentes de descrição da atividade cognitiva. Sendo que as duas primeiras respostas são geralmente as mais utilizadas na explicação da necessidade.

A primeira resposta apresentada faz referência a economia de tratamento, na qual a existência de muitos registros de representação permite a mudança de um deles a fim da realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e potencializada, considerando que no estudo da Matemática, “as relações entre objetos podem ser representadas de maneira mais rápida e mais simples para compreender por fórmulas literais do que por frases” (Duval, 2023, p. 14).

A segunda resposta trata da complementaridade dos registros, em que a natureza de um registro semiótico escolhido para representar um objeto matemático impõe elementos significativos do conteúdo que representa, “esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama” (Duval, 2023, p. 15), ou seja, de um registro a outro não estão representados os mesmos aspectos do conteúdo. Dessa forma, a utilização de um maior número de registros possibilita um melhor entendimento do objeto.

A terceira e última resposta dada pelo autor aborda o fato de que a conceitualização implica na coordenação de registros de representação, e se apoia em duas hipóteses, uma delas faz a reflexão de que se o registro é bem escolhido as representações deles são suficientes para a compreensão total do conteúdo, enquanto a outra considera que a compreensão de um conteúdo repousa sobre a utilização de ao menos dois registros e se manifesta pela rapidez e espontaneidade das conversões.

Ao se pensar na Geometria dentre todos os domínios de conhecimentos que os alunos devem adentrar na Matemática, ela é aquela que exige uma atividade cognitiva mais completa, pois carece do gesto, da linguagem e do olhar (Duval, 2022), modo que cabe ao professor construir caminhos a fim de que seus alunos sejam convidados a construir, raciocinar e ver ao estudar o conteúdo.

As figuras geométricas exercem um papel importante na aprendizagem da geometria, já que na maioria dos casos são integrantes do problema proposto fazendo parte da construção ou do enunciado do problema, sendo aquilo proposto pelo enunciado ou pela própria figura a partir da utilização de signos (Moretti; Cansa, 2023).

Visualizar e produzir os enunciados na Geometria requer funcionamentos cognitivos diferentes e mais complexos daqueles encontrados em outro conteúdo matemático, já que a compreensão dos conteúdos só pode ser adquirida a partir da combinação de visualização e linguagem, condições cognitivas indispensáveis para o aprendizado geométrico (Duval, 2022).

Em resumo, as figuras geométricas dependem de pelo menos dois registros de representação que funcionam de forma paralela e independente, vale lembrar que uma mesma representação visual pode ter vários enunciados diferentes, enquanto que para o mesmo enunciado, diferentes representações visuais podem ser empregadas (Duval, 2022).

O que traz novamente a fala sobre a necessidade de representações, “O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação” (Duval, 2023, p. 5).

Ao considerar o uso da TRRS em salas de aula, o autor da teoria evidencia que o professor que se dispõe a conhecer e empregá-la na sua prática docente necessita de uma completa mudança de perspectiva sobre as atividades matemáticas, e complementa com duas indicações: o uso de quadros para a organização das informações dadas ou encontradas e também a resolução de problemas, fazendo com que os alunos, no futuro, consigam utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais (Duval, 2023).

Tendo em mente a função de validação de um sistema semiótico com o registro de representação (Santos, 2020), Duval (2009) estabelece três atividades cognitivas fundamentais de representação, a formação de representações semióticas e conformidade às regras de um sistema semiótico, o tratamento de representações semióticas e expansão informal e a conversão de representações e mudança de registro. Os conceitos atrelados à este trio de atividades foram esclarecidos separadamente.

### 2.2.1 As Atividades Cognitivas Fundamentais

As representações semióticas nada mais são do que as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais, como um meio que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, tornando-as visíveis e acessíveis aos outros por meio da comunicação. Porém, no estudo da Matemática, essas representações não têm apenas a finalidade de comunicação, na verdade elas são necessárias no desenvolvimento das atividades matemáticas, de modo que os tratamentos sobre os objetos matemáticos dependem diretamente do sistema de representação escolhido (Duval, 2009).

De modo geral, ao considerar o progresso do conhecimento humano, é possível constatar que esse desenvolvimento sempre veio acompanhado da criação de sistemas semióticos novos, de modo que essa pluralidade permitiu uma grande diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas, bem como suas representações mentais.

É possível definir *noésis* como a apreensão conceitual de um objeto, enquanto podemos tratar de *semiósis* como a produção de uma representação semiótica. Dessa forma, para o autor da teoria, seria comum supor que a *noésis* é independente da *semiósis*, porém, como existe a necessidade da utilização das representações semióticas para certas funções cognitivas fundamentais, Duval conclui que “não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício *noésis*” (Duval, 2009, p. 17) e complementa com “não há *noésis* sem *semiósis* enquanto houver vontade de ensinar matemática” (Duval, 2023, p. 6).

A relação entre *semiósis* e *noésis* faz referência somente aos sistemas que permitem três atividades de representação, cuja distinção é essencial para a análise cognitiva das tarefas e também das condições de aprendizagem conceitual, são elas a **Formação**, o **Tratamento** e a **Conversão**, explicados a seguir.

#### **Formação**

A atividade de formação de representações semióticas permite a representação de um certo conjunto de conhecimentos. Essas representações podem vir nas formas de enunciação de uma frase, composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema ou então expressão de uma forma (Santos, 2020; Duval, 2023). É possível interpretar uma formação de representações como uma descrição, através do registro da língua natural.

É de extrema importância que a formação de representações semióticas respeite regras próprias ao sistema empregado, não apenas pelos motivos ligados à comunicação, mas também para que se torne possível a utilização dos meios de tratamento oferecidos pelos sistemas semiótico empregado (Duval, 2009).

Essas regras podem ser gramaticais, regras de formação ou então entraves de construções de figuras. De modo geral, o conhecimento dessas regras de conformidade não estão ligadas à competência para formar representações, apenas reconhecê-las (Duval, 2023).

## Tratamento

A atividade de tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada, ou seja, trata da sua transformação em uma representação no registro inicial, o que caracteriza uma transformação interna a um registro (Santos, 2020).

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas (Duval, 2009, p. 56-57).

Um exemplo de transformação por meio do registro da língua natural é a paráfrase, já que reformula o enunciado dado em outro, a fim de substituí-lo e explicá-lo, já o cálculo é a forma de tratamento próprio das expressões simbólicas, como o cálculo numérico, algébrico ou proposicional (Duval, 2009; Duval, 2023).

Pensando no contexto do ensino de Geometria, a atividade de representação de tratamento pode ser exemplificada como a transformação no registro algébrico, como mostra a Figura 1.

Nela um mesmo registro de representação, o registro algébrico, é utilizado em dois momentos para mostrar que os lados de um triângulo equilátero são congruentes, também é possível reparar na falta de um registro numérico para dar valor a essas medidas.

Figura 1 – Exemplo de Tratamento no contexto da Geometria

**Medidas dos lados de um Triângulo Equilátero**

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} \quad \longrightarrow \quad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

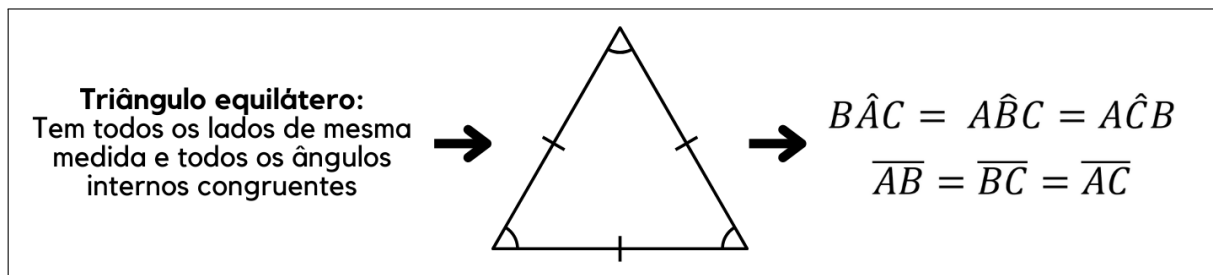
Ainda no contexto do tratamento referente à figura geométrica, a reconfiguração vem como a atividade que possibilita diversas maneiras de visualizar uma representação, implicando na visualização das propriedades do objeto em diferentes posições (Santos, 2020). De maneira mais geral, pode-se dizer que a atividade de tratamento de uma representação semiótica corresponde a sua expansão informacional (Duval, 2009).

## Conversão

O ato de conversão, como atividade cognitiva, é caracterizado como a transformação da representação de um objeto, situação ou informação dada em um registro em uma representação em outro registro, de modo a conservar parte ou a totalidade do conteúdo inicialmente representado, sendo assim, a conversão é uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida (Duval, 2009; Duval, 2023).

Para ilustrar a conversão dentro do ensino da Geometria, é possível trazer novamente o caso do objeto matemático triângulo equilátero, representado na Figura 2, na qual é possível visualizar uma transformação do registro em língua natural para o registro figural e, por fim, para um registro algébrico, de modo que todas as representações apresentem o mesmo conceito mesmo passando pelo processo de conversão duas vezes.

Figura 2 – Exemplo de Conversão no contexto da Geometria



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Duval também explora alguns casos de conversão encontrados diariamente. São eles: Ilustração, sendo a conversão de uma representação na língua natural em uma representação figural; Descrição ou Interpretação, como passagem inversa à ilustração, quando a representação passa de figural para a de língua natural; Tradução, que pode ser entendida como a conversão de uma representação linguística numa língua específica, para uma representação linguística em outra língua ou outro tipo de linguagem; Colocação dos dados em equação a partir de um enunciado de um problema matemático, tratando da conversão do registro de língua natural em um registro simbólico, podendo ser algébrico ou numérico (Duval, 2023; Duval, 2009).

Infelizmente dificuldades são encontradas no ensino da matemática, principalmente no que se diz ao privilégio à formação e ao tratamento de representações semióticas e no fato de que “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos” (Duval, 2009, p. 63).

Porém, observações de aula e análises mostram que ausência de coordenação entre diferentes registros cria frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais, enquanto aprendizagens centradas nas mudanças e coordenações desses registros de representação possui efeitos espetaculares na produção e compreensão de conteúdo (Duval, 2009).

## 2.2.2 As Apreensões em Geometria

Ao considerar o estudo da Geometria, as figuras utilizadas possuem propriedades heurísticas a serem exploradas, e essas figuras podem ser representadas de diversas formas, o que é aconselhável, e o sujeito que interage com essas representações fica suscetível a interpretações, denominadas apreensões (Duval, 2012; Moran, 2015).

Vale ressaltar que para Duval não existe hierarquia entre as apreensões em Geometria, mas sim uma subordinação de uma a outra dependendo do problema em questão, de modo geral as atividades propostas para o ensino básico fazem a apresentação perceptiva a que subordina as demais (Moretti, 2013).

As quatro apreensões em Geometria sugeridas Duval (2023) são: Discursiva, Operatória, Perceptiva e Sequencial.

### **Discursiva**

A apreensão discursiva diz respeito a interpretação de unidades figurais com a utilização de um vocabulário considerado a condensação das informações, dando atenção especial à articulação dos enunciados baseados em uma rede semântica de propriedades (Duval, 2012).

É importante ressaltar que a apreensão discursiva presente nas figuras diferencia radicalmente as atividades de demonstração das atividades de construção. Enquanto as atividades de construção apenas descrevem o procedimento de uma construção que é exigido dos alunos em sua tarefas, as atividades de demonstração mencionadas fazem com que a apreensão discursiva da figura privilegie as articulações dos enunciados e dos objetos auxiliando na interpretação (Moran, 2015).

Dentro do processo da apreensão discursiva de figuras, as unidades figurais elementares, bem como os objetos matemáticos utilizados no raciocínio executivo, podem ter o mesmo número de dimensões, além disso, pode existir congruência entre o tratamento figural heurístico e a ordem dos passos da dedução, tudo em função das hipóteses dadas no início do processo (Duval, 2023).

### **Operatória**

A apreensão operatória de figuras faz referência a uma apreensão centrada nas possíveis modificações de uma figurinha inicial e nas reorganizações dessas modificações (Duval, 2012), como exemplo podem ser citadas as manipulações, ampliações, reduções, composições e comparações dos objetos.

Ela está relacionada com as várias modificações e reorganizações que podem ser feitas a uma figura de modo a ajudar a resolução de algum problema proposto, realizar essas operações significa efetuar tratamentos figurais (Moran, 2015).

Duval (2012), a fim de mostrar a riqueza e complexidade da apreensão operatória, afirma que uma figura pode ser modificada de várias maneiras e para cada tipo de modificação, diversas operações são possíveis, apresentando também três tipos de operações: a mereológica, a ótica e a posicional.

A modificação mereológica se faz em função da relação parte e todo, na qual é possível que o aluno divida uma figura em subfiguras, crie uma figura a partir de outras etc. Já a modificação ótica, possibilita o aluno a aumentar, diminuir ou deformar uma figura, de modo que a forma inicial pode ser conservada ou alterada. Já a modificação posicional mantém o mesmo tamanho e forma da figura, havendo variação apenas no que se diz à orientação, rotação e translação do objeto matemático.

### **Perceptiva**

A apreensão perspectiva é o imediato reconhecimento visual da forma, o que possibilita sua impressão visual e, conseqüentemente, identificação.

A organização de elementos de um campo perceptivo que constitui um objeto em destaque deste campo é uma forma encontrada para definir e conceitualizar a palavra figura, de acordo com a sua dimensão essa figura pode apresentar elementos como pontos, traços ou zonas (Duval, 2012).

O processo da apreensão perceptiva de figuras permite o destaque de: Integrações de Estímulos (como os contrastes de brilho em algumas figuras); Leis de Agrupamento de Estímulos; Identificação das Formas (bem como os indicadores de profundidade, distância e número de dimensões) (Duval, 2023).

A apreensão perceptiva é considerada a operação semiocognitiva mais importante do processo de aprendizagem da Geometria, pois outras apreensões dependem dela, não só por conta do ato de olhar, mas também por ser ela responsável por outras operações (Moretti; Cansa, 2023).

### **Sequencial**

A apreensão sequencial é solicitada em atividades de construção ou descrição, tendo o objetivo final de reproduzir uma figura (Duval, 2012).

Ela é marcada pela construção de uma figura geométrica e corresponde à ordem de como ocorre sua produção, de modo que não depende somente de propriedades geométricas, mas também demanda a integração de instrumentos como compasso, régua e softwares (Duval, 2023).

Considerando os conteúdos de ângulo, triângulos e quadriláteros presentes no produto educacional, a apreensão sequencial foi muito solicitada pelas tarefas propostas, principalmente no que se diz ao uso de instrumentos para a construção dos objetos matemáticos ao seguir orientações.

### 3 METODOLOGIA

O estudo da Geometria é uma das áreas da Matemática com vasto campo de atuação, podendo ser encontrada no dia a dia do aluno, na natureza, em outras disciplinas do currículo escolar e até mesmo no mercado de trabalho, por esse motivo merece devida atenção e dedicação por parte dos educadores e educandos.

Sua importância é estudada e discutida a milhares de anos, e em geral vem da possibilidade de descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte mais intuitiva, concreta e ligada à realidade dentro da disciplina da Matemática, sendo assim fundamental na formação de alunos (Passos, 2000).

Embora haja consenso sobre a importância da geometria no contexto escolar e até mesmo pós-escolar, diferentes avaliações de ensino no Brasil mostram um desempenho insatisfatório de alunos do ensino fundamental em questões relativas ao campo da Geometria (Bellemain; Lima, 2010).

Infelizmente o conteúdo tem sido pouco trabalhado em aulas de Matemática ou então explorado de maneira equivocada pelos educadores durante o processo de ensino-aprendizagem. Algumas das razões por trás desse problema são o excesso de formalização dentro de sala, a falta de confiança dos educadores em ministrar os conteúdos e também a pouca articulação entre conteúdo e prática (Costa, 2019).

Outra razão para o eventual descaso com o ensino da Geometria é o senso comum de alguns educadores ao considerar a visão dos objetos e a manipulação dos mesmos como recursos suficientes de aprendizado do aluno (Passos, 2000).

O baixo rendimento nesta área da Matemática também vem sendo observado em avaliações educacionais de outros países, o que indica um longo caminho a ser percorrido até ser possível uma melhor compreensão em relação ao estudo da Geometria dentro do ensino fundamental (Bellemain; Lima, 2010).

Na busca por métodos e técnicas que facilitem o processo de compreensão da Geometria “uma alternativa para a efetivação da aprendizagem dos alunos em Matemática advém do modelo de funcionamento cognitivo de pensamento, relacionado a registros de representações semióticas” (Kluppel, 2012, p.34), teoria desenvolvida por Raymond Duval.

Tendo o foco no ensino de Geometria no contexto do ensino básico, o presente trabalho tem como objetivo examinar e sintetizar o conhecimento presente em teses e dissertações já produzidas sobre o tema, identificando contribuições relevantes para o desenvolvimento de um produto educacional inovador voltado ao ensino de Geometria no 6º ano do ensino fundamental, incorporado no Apêndice A.

Durante toda a pesquisa, a questão de investigação foi levantada e, em certas ocasiões, discutida dentre os documentos analisados, sendo ela: “De que maneira o ensino de Geometria no ensino básico atrelado com os Registros de Representação Semiótica pode ser trabalhado em sala de aula?”.

Atendendo a natureza do objetivo e da questão de investigação, esse estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, onde a busca por dados faz o pesquisador percorrer diversos caminhos e utilizar vários procedimentos e instrumentos de constituição e análise de dados (Kripka; Scheller; Bonotto, 2015).

A interpretação por parte do pesquisador é de extrema importância dentre os métodos qualitativos, assim como suas opiniões acerca do conteúdo. Geralmente as coletas de dados ocorrem por meio de entrevistas com questões abertas, mas também podem ocorrer em forma de questionários ou pesquisas bibliográficas (Pereira, 2018).

Ao invés de definir singularmente a pesquisa de caráter qualitativo, é possível considerar cinco características suas:

- estudar o significado da vida das pessoas, nas condições da vida real;
- representar as opiniões e perspectivas das pessoas (participantes) de um estudo;
- abranger as condições contextuais em que as pessoas vivem;
- contribuir com revelações sobre conceitos existentes ou emergentes que podem ajudar a explicar o comportamento social humano; e
- esforçar-se por usar múltiplas fontes de evidência em vez de se basear em uma única fonte. (Yin, 2016, p. 22)

Como o presente trabalho tem caráter teórico, a estratégia utilizada foi a da pesquisa bibliográfica, iniciando com uma revisão de literatura envolvendo trabalhos relacionados com o tema escolhido e passando para a análise de teses e dissertações com temáticas semelhantes, dando destaque aos pontos fortes de cada uma, relacionando-as entre si e promovendo melhorias ao trabalho proposto (Flick, 2012).

Uma pesquisa bibliográfica é feita com base em textos, porém, diferente da pesquisa documental, que analisa dados provindos de fontes primárias que não receberam nenhum tratamento analítico, esta utiliza as chamadas fontes secundárias que abrangem toda a bibliografia pública em relação ao tema escolhido, como artigos científicos, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses e dissertações (Kripka; Scheller; Bonotto, 2015).

Uma análise bibliográfica como esta, embora pouco explorada na área da educação, assim como em outras áreas, trata-se de uma valiosa técnica de abordagem de dados qualitativos, que complementa as informações obtidas e desvenda aspectos novos do tema, os documentos constituem uma fonte poderosa de dados de modo a fundamentar as afirmações e declarações do pesquisador (Lüdke; André, 2013).

A análise feita a partir dos documentos escolhidos, teses de doutorado e dissertações de mestrado, tinha como intenção responder a questão de investigação do trabalho, ou seja, de que modo o ensino de Geometria no ensino básico pode ser trabalhado tendo como suporte os Registros de Representação Semiótica.

A pesquisa bibliográfica trata de uma modalidade de pesquisa que é comumente apresentada como a revisão de literatura, porém não é apenas isso, ela ganha muita importância pelo fato de buscar novas descobertas a partir de materiais já elaborados e produzidos, como livros, artigos, periódicos etc, impulsionando assim o aprendizado (Oliveira; Silva; Silva, 2021).

Uma vantagem da pesquisa e análise bibliográfica é o fato que esta não possui uma fonte reativa, o que permite a obtenção de dados quando o acesso ao sujeito é impraticável, não tendo a necessidade de interação e possível alteração comportamental do participante ou mesmo de seu ponto de vista. (Lüdke; André, 2013).

Partindo da perspectiva do pesquisador, é por meio da pesquisa bibliográfica que ele:

toma conhecimento da dimensão teórica acerca de seu tema de pesquisa; constrói a fundamentação teórica de forma segura e confiável; e elenca as conceituações necessárias que darão sustentação teórica à pesquisa que se pretende desenvolver (Oliveira; Silva; Silva, 2021, p. 96).

Esta pesquisa foi organizada de modo a buscar trabalhos na base de teses e dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). A escolha de realizar essa busca no banco do programa de mestrado se deu justamente por ser o programa no qual o trabalho está inserido, tendo como objetivo ter a noção do que já foi produzido e enriquecer o programa ainda mais. A pesquisa bibliográfica feita no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES se deu pela necessidade de uma maior abrangência no quesito da educação Matemática, não se limitando apenas ao programa de mestrado.

Por não ter uma quantidade tão grande de trabalhos em comparação com a CAPES, o mecanismo de pesquisa da Lista das dissertações de mestrado dos alunos do PROFMAT é bem mais básico, fazendo a busca por palavras apenas nos títulos da dissertação, sem uso de filtros para limitar os resultados com base em critérios específicos, o que dificulta a busca de dissertações.

No Quadro 1 estão relacionadas as palavras-chave utilizadas na pesquisa e a quantidade de trabalhos apresentados em cada caso.

Quadro 1 – Busca por trabalhos do PROFMAT

<b>Palavras-chaves</b>	<b>Número de dissertações</b>
Registros de representação semiótica	12
Geometria semiotica	0
Geometria registros representação	0

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

A inserção da palavra *Geometria* acabou por limitar o mecanismo de pesquisa, como é possível verificar no Quadro 1, de modo que este termo teve de ser analisado em outro momento, por meio da leitura de títulos e resumos.

Outras palavras-chaves também foram usadas no processo de pesquisa, porém não resultaram em trabalhos diferentes dos já apresentados, portanto a busca resultou em 12 trabalhos.

Destas, após a leitura dos títulos e resumos, restaram apenas duas dissertações, o motivo dessa nova filtragem se deu pelo fato de que a maioria dos trabalhos não aborda o conteúdo de Geometria, e sim outros conteúdos matemáticos, como esse filtro não pode ser aplicado na hora de fazer a busca, ele ocorreu por meio da leitura.

No Quadro 2, estão relacionados os nomes dos autores, anos de publicação e títulos das duas dissertações do PROFMAT a serem analisadas após busca e filtragem, seguindo a ordem cronológica de publicação.

Quadro 2 – Trabalhos selecionados do PROFMAT

<b>Autor e Ano</b>	<b>Título</b>
Marciano Mauro Pagliarini (2016)	Abordagem Metodológica para o Ensino de Trigonometria por meio de Material Manipulável e Registros de Representação Semiótica.
Graciele Rempel (2021)	Tangram nos Livros Didáticos de Matemática: Um Estudo à Luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Ambos os trabalhos tinham a divulgação autorizada pelos autores, portanto a análise pode ocorrer normalmente. Um ponto interessante para a análise das dissertações do PROFMAT foi que, enquanto a dissertação de Pagliarini (2016) abordou o tema no ensino médio, o trabalho de Rempel (2021) focou no ensino fundamental, o que deixou a análise mais completa, considerando a aplicação no ensino básico.

A busca por teses e dissertações da CAPES aconteceu de modo completamente diferente do anterior por causa do grande número de trabalhos contidos na plataforma, considerando que ela está disponível de forma online desde o ano de 2002, sendo atualizada semanalmente desde então (CAPES, 2024).

O Catálogo de Teses e Dissertações tem por objetivo facilitar o acesso às informações de teses e dissertações de programas de pós-graduação stricto sensu do Brasil, sua ferramenta de pesquisa permite a busca por autor, título, resumo, palavras-chave, linha de pesquisa, entre outros, além do uso dos operadores booleanos *AND*, *NOT* e *OR* (CAPES, 2024).

A busca realizada retornou um número muito grande de trabalhos, o que tornava a análise qualitativa da pesquisa inviável, fazendo-se necessário o uso do filtro *ANO*, selecionando trabalhos de 2014 até 2024, fazendo com que o número de trabalhos resultantes fosse bem menor do que o resultado da busca anterior, se tornando também mais preciso e atual.

Outro mecanismo utilizado para filtrar e reduzir o número de trabalhos acadêmicos foi o operador booleano *AND* para combinar palavras-chaves na busca, de modo que todos os termos apareçam.

As palavras-chave escolhidas na pesquisa levaram em conta o conteúdo de Geometria atrelado à TRRS e também os conteúdos abordados no produto educacional produzido.

No Quadro 3 tem-se a relação entre as palavras-chave utilizadas na busca e a quantidade de teses e dissertações exibidas, após a filtragem por ano.

Quadro 3 – Busca por trabalhos da CAPES

<b>Palavras-chaves</b>	<b>Número de dissertações</b>
Registros de representação semiótica AND geometria AND ensino básico	7
Registros de representação semiótica AND geometria AND 6º ano	1
Registros de representação semiótica AND geometria AND ensino fundamental	5
Registros de representação semiótica AND triângulos	5
Registros de representação semiótica AND quadriláteros	0
Registros de representação semiótica AND ângulos	0

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

As buscas por dissertações com os conteúdos de quadriláteros e ângulos não retornaram nenhum trabalho de tese ou dissertação, obtendo-se resultado apenas no conteúdo de triângulos, o que mostra uma lacuna no que diz respeito à produções relacionadas a esses dois conteúdos educacionais, de modo que o produto educacional produzido no presente trabalho se propõe a abordar os três conteúdos (ângulos, triângulos e quadriláteros) considerando o processo de construção do conhecimento riquíssimo para o aprendizado dos alunos.

Outro ponto de destaque é a inclusão do termo 6º ano na busca, mais uma vez fazendo relação ao produto educacional, mesmo com a utilização do termo ensino básico na busca anterior, esta resultou em um trabalho diferente dos encontrados até então e, por isso, a dissertação foi incluída na análise.

Dos 18 trabalhos resultantes da busca cujo Quadro 3 faz referência, dois não possuem divulgação autorizada pelos autores e dois apareceram mais de uma vez nos resultados da pesquisa, portanto a análise passa a contar com apenas 14 trabalhos acadêmicos procedentes da plataforma da CAPES, ainda assim um número condizente com a pesquisa de caráter qualitativo realizada.

De modo contrário ao processo anterior, como houve uma melhor filtragem na busca por dissertações da plataforma da CAPES em comparação com as do PROFMAT, não houve a necessidade de uma leitura de títulos e resumos para verificar se os temas condizem com o esperado. No Quadro 4 estão apresentados os nomes dos autores das dissertações selecionadas após filtragem por ano, seus respectivos títulos, assim como os anos de publicação, seguindo uma ordem cronológica.

Quadro 4 – Trabalhos selecionados da CAPES

<b>Autor e Ano</b>	<b>Título</b>
Amanda Barbosa da Silva (2014)	Triângulos nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Um Estudo sob a Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.
Mariana Moran (2015)	As Apreensões em Geometria: Um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais.
Diego da Silva Pinto Martinelli (2017)	Geometria Analítica: Articulando Registros Algébricos e Geométricos com o GRAFEQ.
Janaína da Silva Corrêa (2017)	Registros de Representação Semiótica Mobilizados na Obtenção do Volume de um Cilindro: Uma Atividade Orientada pelos Princípios da Modelagem Matemática.
Juliane Carla Berlanda (2017)	Mobilizações de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o Auxílio do Software Geogebra.
Micarlla Priscilla Freitas da Silva (2017)	Histórias em Quadrinhos em Contexto Matemático: Uma Proposta para o Ensino de Triângulos à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.
Priscila Arcego (2017)	Representações Semióticas Mobilizadas no Estudo da Área do Círculo no Ensino Fundamental.
Ana Carolina Igawa Barbosa (2018)	Aprendizagem Significativa do Conceito de Polígono: Uma Sequência Didática para o Sexto Ano do Ensino Fundamental.
Cleide Ribeiro Mota Arinos (2018)	Um Estudo de Potencialidades das Representações Semióticas na Aprendizagem de Áreas de Triângulos e Quadriláteros por Alunos do Quinto E Sexto Anos do Ensino Fundamental.
Valéria da Silva Santos (2020)	Registros de Representações Semióticas Mobilizados por Professores de Matemática no Ensino dos Prismas.
Daniele Vargas Oliveira (2021)	Visualização Espacial no Ensino Fundamental: Rotações no Geogebra.
Renata Camargo Dos Passos Barros (2021)	Entre o Plano e o Espaço: As Relações entre Figuras Planas e Espaciais em uma Coleção de Livros Didáticos de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental.
Elizangela Brito Xavier da Conceição (2023)	A Abordagem de Triângulos em um Livro de Geometria Euclidiana Plana a ser Utilizado nas Licenciaturas em Matemática no Estado da Bahia: Um Estudo a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.
Gilberto de Oliveira Facundo (2023)	Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio: Uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

A partir das análises de dissertações, a questão de investigação do trabalho foi levantada: “De que maneira o ensino de Geometria no ensino básico atrelado com os Registros de Representação Semiótica pode ser trabalhado em sala de aula?”, onde foi feita a investigação trabalho a trabalho com finalidade conhecer os métodos aplicados, seus resultados e as possíveis contribuições ao produto educacional.

Por fim, foi elaborado este produto educacional comentado acima, que consiste em um material pedagógico voltado às práticas do professor de Matemática, um conjunto de atividades prontas, com fáceis adaptações, para ser aplicado com as turmas de 6º ano do ensino fundamental nos conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros.

As atividades propostas estão em sintonia com as ideias de Duval, ao levar em conta três diferentes maneiras de abordar o mesmo conteúdo, desenvolvendo o desenho geométrico com régua e compasso, atividades de medição manual e recursos tecnológicos.

## 4 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo serão apresentadas as análises feitas a partir dos trabalhos acadêmicos selecionados pela pesquisa e consulta em duas importantes bases de dados acadêmicos, a “Lista das Dissertações de Mestrado dos Alunos” do PROFMAT e o “Catálogo de Teses e Dissertações” da CAPES.

No total foram contabilizados 16 trabalhos, sendo uma tese de doutorado e 15 dissertações de mestrado, todos relacionados ao presente estudo, oferecendo diferentes perspectivas do tema. Todos trabalhos foram produzidos e publicados entre os anos de 2014 e 2024, suas análises seguiram uma ordem cronológica de publicação, detalhada abaixo.

1. Silva (2014)
2. Moran (2015)
3. Pagliarini (2016)
4. Martinelli (2017)
5. Corrêa (2017)
6. Berlanda (2017)
7. Silva (2017)
8. Arcego (2017)
9. Barbosa (2018)
10. Arinos (2018)
11. Santos (2020)
12. Oliveira (2021)
13. Rempel (2021)
14. Barros (2021)
15. Conceição (2023)
16. Facundo (2023)

Durante a análise procurou-se entender de que forma cada trabalho foi elaborado e de que maneira a TRRS foi utilizada, para isso, buscou-se responder às seguintes perguntas: Qual a metodologia escolhida? Qual a fundamentação teórica usada no trabalho? Qual a contribuição para o processo de ensino e de aprendizagem? De que forma a Teoria de Registro de Representação Semiótica foi abordada? Foi produzido um material educacional?

Ao final de cada análise, pelo menos um parágrafo foi produzido no qual procurou-se entender de que maneira a dissertação ou tese analisada contribuiu com a produção do presente produto educacional, levando em conta que esta contribuição poderia ser realizada ao explorar um dos registros de representação, aplicar uma sequência didática, analisar um material educacional ou até mesmo dar destaque ao problema da pesquisas. Todas as contribuições provenientes dessas análises foram discutidas no capítulo voltado ao produto educacional.

Silva (2014), em sua dissertação intitulada “Triângulos nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Um Estudo sob à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica”, investigou as representações gráficas dos triângulos em livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, sem apresentar um produto educacional ao final de seu trabalho.

Os livros selecionados para a análise fazem parte das coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD do ano de 2013, sendo 22 coleções que totalizaram 110 volumes, é importante salientar que tanto os materiais destinados aos alunos quanto os documentos intitulados “Manual do Professor” passaram por análise, porém de forma separada.

O trabalho se propôs a responder duas questões de investigação, a primeira trata da variabilidade de representações gráficas de um triângulo a respeito de suas categorias, na qual a autora investiga se existe um equilíbrio entre as representações num conjunto de coleções didáticas. Já a segunda questão de investigação aborda com qual frequência as atividades com triângulos solicitam conversão entre o registro da língua natural e o registro figural.

Ao buscar o suporte teórico, Silva (2014) faz levantamentos importantes sobre os Registros de Representação de Semiótica, realizando um recorte da Teoria de Duval adequado ao trabalho. Considerando conteúdos matemáticos dos anos iniciais do ensino fundamental, o trabalho deu foco a dois registros, língua natural e figural.

Além da Teoria de Duval, a autora também traz uma revisão de pesquisas correlatas, um breve resumo de três trabalhos acadêmicos no qual os autores apontam as dificuldades encontradas por alunos dos anos iniciais e finais do ensino fundamental em conteúdos envolvendo triângulos, principalmente na identificação desses objetos matemáticos e nas suas representações.

Os procedimentos metodológicos, bem como a análise de resultados, foram divididos em três partes, a primeira trata do objetivo específico de: “Analisar a variabilidade das representações gráficas de triângulos, quanto a três critérios: comprimento dos lados; medida dos ângulos e posição na página” (Silva, 2014, p. 27) no qual foram contabilizadas as mais variadas representações de triângulos e como foram classificadas.

A segunda parte aborda a conversão entre os registros de representação encontrados nos livros didáticos, questão estabelecida no segundo objetivo específico: “Identificar nas coleções selecionadas e focalizando no triângulo, as atividades de conversões do registro na língua natural para o registro figural e do registro figural para o registro na língua natural” (Silva, 2014, p. 27).

A última parte faz uma análise dos manuais dos professores, de que modo as orientações pedagógicas envolvem, ou não, as questões dos registros de representação semiótica, considerando os materiais como suporte aos docentes.

A análise dos resultados se deu em cinco partes e caracterizou-se em uma pesquisa quantitativa, nela foi possível perceber a variedade limitada de representações gráficas dos triângulos em relação ao comprimento de lados, medida de ângulos e posição relativa dos triângulos na página.

A primeira parte tratou do comprimento dos lados dos triângulos, na qual a autora apresenta dados que mostram que quase todas as representações feitas utilizam triângulos equiláteros e isósceles, sendo que a representação de triângulos escalenos também existe nas coleções, mas apresenta uma quantidade bem menor em relação às outras.

A medida dos ângulos foi tratada na segunda parte da análise, nela foi constatado que as representações dos triângulos acutângulo e retângulo são muito maiores do que as do triângulo obtusângulo, fato esse que de acordo com Silva (2014) aumenta as chances dos alunos apresentarem dificuldades no reconhecimento dos triângulos obtusângulos, bem como na compreensão das propriedades comuns a todos os triângulos.

A terceira parte da análise foi voltada à posição das representações gráficas dos triângulos na página, a qual mostrou que a representação é feita de modo que um dos lados seja paralelo à margem inferior da página do livro, tendo o terceiro vértice acima desse lado, chamada de posição horizontal, infelizmente como mais da metade das representações foram encontradas nessa posição, existe prejuízo quanto à aquisição do objeto matemático pelos alunos.

As atividades de conversão foram o foco da quarta parte, na qual a autora se propôs a analisar a conversão de registro verbal para registro figural e vice-versa, pela sua pesquisa foi possível constatar que as conversões realizadas eram quase sempre feitas no próprio texto do livro didático, em raras ocasiões eram propostas como atividades para os alunos, além disso pouquíssimas situações de conversão de registros ocorriam no decorrer do ensino de triângulos.

A quinta e última parte da análise de resultados foi voltada aos manuais dos professores, tendo como objetivo verificar as orientações dirigidas aos docentes de modo a fazê-los explorar a variabilidade das representações dos triângulos, infelizmente os resultados obtidos mostraram poucas orientações em relação a esse tema e as raras situações encontradas mostravam ser feitas de forma superficial o que dificulta ainda mais a compreensão do aluno, pois nem mesmo seu professor está sendo orientado a passar esse conhecimento.

Silva (2014) finaliza seu trabalho constatando que as análises confirmaram sua hipótese inicial de que as coleções de livros não contribuem positivamente para a aprendizagem da geometria pela falta de variação de representações. A autora também comenta que existe a possibilidade de prolongamento desse estudo e expõe pontos que ainda podem ser investigados.

De modo geral, a análise realizada mostrou que coleções de livros didáticos não podem ser utilizadas de modo exclusivo por um professor, pois mesmo que tenham o papel de auxiliá-lo no seu trabalho, nem sempre abordam ou exploram todos os aspectos necessários para uma boa compreensão dos alunos, assim, o presente produto educacional foi desenvolvido como um material auxiliar e complementar para uso de professores.

A dissertação de Silva (2014) traz muitas contribuições ao presente trabalho, a partir da leitura foi possível perceber que a representação de um triângulo feita de forma limitada traz consequências sérias ao aprendizado dos alunos. Pensando no produto educacional, foram elaboradas tarefas com diferentes representações de triângulos em relação a medidas de comprimento, medida de ângulo e posição na página.

O trabalho de Moran (2015) foi a única tese analisada nesta revisão de literatura, é intitulada como “As Apreensões em Geometria: Um Estudo com Professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais” e se propõe a investigar a influência dos tipos de registros figurais durante a exploração dos conceitos de Geometria, num contexto de resolução de problemas, voltado à professores da educação básica e ensino superior.

O trabalho teve como questão norteadora saber como o tipo de registro figural influencia as apreensões de figuras geométricas de professores de Matemática da educação básica, sendo abordado três tipos de registro figural: os materiais manipuláveis, os softwares de Geometria e as expressões gráficas.

A tese de Moran (2015) é riquíssima em detalhes quando se trata do seu suporte teórico, não só abordando o tema da TRRS, mas dando destaque na apresentação e descrição dos registros de representação em geometria, os três registros figurais utilizados na pesquisa e o registro da língua natural.

Tendo como princípio que a representação do objeto influencia diretamente na compreensão de seu conceito bem como suas propriedades, os registros figurais e os registros das línguas na Geometria ganham foco no decorrer do texto.

Os registros figurais são apresentados como meio de auxílio na compreensão e resolução dos problemas, oferecendo perspectivas diferentes e possibilitando ao aluno os tratamentos figurais. Já os registros das línguas são apontados com um sistema semiótico que privilegia as ditas operações discursivas indo além da função de se comunicar, a autora também ressalta a diferença entre a língua natural e a língua formal.

Os procedimentos metodológicos da tese foram separados em duas etapas, na primeira foi realizado um curso de extensão de 40 horas para 30 professores da rede pública, no qual conteúdos de Geometria, por meio dos três tipos de registros figurais, foram explorados e discutidos.

A intenção por trás desta primeira etapa, o produto educacional da tese, foi dar aos professores a oportunidade de conhecer e trabalhar com os registros, nele temas como o ensino dos polígonos, círculos, fractais e topologia pode ser apresentado por meio de expressões gráficas, materiais manipuláveis e do GeoGebra.

Todo o curso foi dividido em quatro blocos, sendo que o final teve foco na aplicabilidade dos conteúdos estudados em sala de aula, no qual coube aos professores participantes apresentarem algumas de suas tarefas e aplicações feitas com seus respectivos alunos, a autora também relatou que durante toda a aplicação foi possível perceber que os professores participantes se mostraram cada vez mais empenhados em conhecer os registros e dispostos a utilizá-los de forma variada em suas aulas.

A segunda etapa da pesquisa foi realizada após três meses o curso de extensão e se deu por meio de uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, contando com o auxílio de 15 dos 30 professores participantes da primeira etapa que se dispuseram a participar da pesquisa após o curso, por já terem o conhecimento base das representações figurais.

Nessa etapa houve a aplicação individual de uma sequência de tarefas, tendo o objetivo de “observar se há alguma relação entre as apreensões perceptivas, operatórias e discursivas com o tipo de registro figural, seja ele material ou na forma de softwares de geometria ou desenhos feitos à mão” (Moran, 2015, p. 72), o que permitiu a autora analisar os registros mobilizados para a resolução dos problemas, assim como os tratamentos efetivados e a interpretação figural realizada em cada tipo de registro.

Os dados da pesquisa foram coletados por meio da aplicação de uma sequência de cinco tarefas, durante o processo, os participantes foram divididos em três grupos de cinco pessoas. O objetivo de Moran (2015) com a sequência era explorar as propriedades Matemáticas por meio dos registros figurais, seguindo uma progressão de manipulações práticas ou concretas até seus registros discursivos e uma comunicação em geral.

Pelas análises dos resultados de Moran (2015), foi possível perceber as diferenças de utilização de cada um dos três registros figurais. A utilização dos materiais manipuláveis ganhou destaque quando atrelado ao uso de ferramentas como tesoura, régua, lápis e também de dobraduras, que se mostrou um forte auxiliar no raciocínio dos participantes. Além disso, foi constatado através das análises que o uso desses materiais induziam manipulações como recortes e sobreposições, criando a ideia de estar manipulando o próprio objeto matemático, o que facilitava nas resoluções.

Em relação ao uso dos softwares geométricos, Moran (2015) destaca o registro figural como grande facilitador nos movimentos das figuras, tanto ao mudar de lugar quanto ao mudar de posição relativa ou de tamanho, movimentações que facilitaram as conversões entre registro figural e língua natural necessárias para algumas resoluções devido a facilidade de visualização.

Enquanto isso, o uso das expressões gráficas ocorreram atreladas aos desenhos à mão livre e uso de régua, o que induziu os professores participantes a realizar a transformação dos registros figurais para os registros numéricos. Além disso, o registro foi responsável por despertar o maior número de raciocínios envolvidos no desenvolvimento de cálculos, porém, notou-se que os professores tiveram dificuldades na visualização de elementos importantes em algumas tarefas.

A autora da tese finaliza seu trabalho concluindo que o sucesso na resolução de problemas de Geometria está diretamente relacionado aos registros de figuras disponíveis para sua solução, já que cada representação figural traz contribuições diferentes e específicas na resolução. Também sugere futuros trabalhos onde há a aplicabilidade das tarefas em alunos de educação básica bem como graduandos de Matemática.

O produto educacional construído no presente trabalho ganhou incontáveis contribuições advindas da tese analisada, a partir da compreensão de como os diferentes registros podem levar ao aluno à diferentes resoluções, aumenta-se a necessidade de uma grande variedade de tarefas propostas, pois “é importante que o sujeito conheça diferentes representações para um mesmo objeto matemático, pois cada uma delas desenvolve aspectos cognitivos e matemáticos particulares” (Moran, 2015, p. 228).

Pagliarini (2016), em sua dissertação intitulada “Abordagem Metodológica para o Ensino de Trigonometria por meio de Material Manipulável e Registros de Representação Semiótica” teve como intuito desmistificar o estudo da trigonometria abordando as diferentes formas de representação de funções trigonométricas.

O estudo se deu pelos 20 anos de experiência do pesquisador como professor de matemática no ensino fundamental e médio, observando o comportamento de educandos e colegas docentes quanto aos conteúdos de trigonometria. Suas observações mostraram a diferença de pensamento envolvida na causa da problemática do ensino desses conteúdos de trigonometria, pelo ponto de vista do docente a falta de atenção e de dedicação dos educandos são os principais responsáveis. Já pela ótica dos alunos, o grande problema no processo de aprendizagem na trigonometria é a abstração excessiva e a dificuldade de aplicação e utilização dos conteúdos.

Ao ministrar aulas para o ensino médio, o autor procurou dar significado para os valores trigonométricos, um caminho até então alternativo e diferenciado para o mesmo, que ainda não tinha conhecimento sobre a Teoria da Linguagem Semiótica.

O caminho encontrado por ele consistia na construção e uso de um círculo trigonométrico, no qual os alunos posicionavam um ângulo e percebiam, a partir de manipulação, os valores que até então seriam encontrados somente em tabelas ou calculadoras, ao longo dos anos em que trabalhou com trigonometria, foi possível perceber a mudança dos educandos em relação ao conteúdo, eles passaram a dar mais atenção e apresentaram uma melhora significativa no raciocínio lógico.

Pensando numa maneira de contribuir para além de sua própria sala de aula, o autor produziu uma primeira oficina para um grupo de professores de Matemática e delineou uma de suas questões de investigação: “Na visão docente, a inserção do Material Manipulável fortalece o aprendizado trigonométrico e facilita o entendimento dos diferentes Registros de Representação Semióticas levando os alunos a uma compreensão do conteúdo?” (Pagliarini, 2016, p. 11).

Num segundo momento, a oficina trabalhada com docentes foi aplicada aos alunos de maneira adaptada, tendo como foco as outras questões de investigação: “em quais aspectos, a inserção do Círculo Trigonométrico Manipulável e o trânsito entre Registros de Representação Semiótica, como abordagem metodológica, poderá ajudar (ou não) e será (ou não) importante na aprendizagem de conhecimentos relativos à Trigonometria?” (Pagliarini, 2016, p. 11).

A pesquisa realizada teve caráter metodológico qualitativo e o objetivo de desenvolver uma abordagem pautada na conversão entre registros algébricos e geométricos da trigonometria por meio de manipulação do círculo trigonométrico, posicionando a chapa móvel no ângulo desejado e fazendo as leituras das relações trigonométricas. O foco principal foi elevar a aprendizagem dos alunos bem como sua autonomia na resolução de problemas.

O referencial teórico de seu trabalho apresentou estudos sobre alguns aspectos históricos da trigonometria, conseguindo dar atenção a cada uma das seis relações trigonométricas. A TRRS também foi abordada em sua pesquisa, na qual os materiais manipuláveis ganharam maior destaque.

A análise da aplicação feita com professores confirmou as hipóteses do autor, os docentes participantes tinham sim o costume de trabalhar a trigonometria sem dar a devida atenção às construções, o que mantinha a visão clássica de que a trigonometria é abstrata, porém, após a aplicação, os docentes puderam perceber a razão e importância do trânsito entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, entendendo o seu significado e afirmando que a TRRS pode e deve ser usada no ensino de trigonometria, sugerindo futuras aplicações em suas próprias turmas.

A última parte da aplicação com professores ocorreu de forma a solicitar uma avaliação do material utilizado e produzido, nessa avaliação os professores evidenciaram como o uso do material manipulável facilitou a visualização dos ângulos e dos valores das relações estudadas, Pagliarini (2016) complementa que esse fato ocorre justamente pela presença de uma representação semiótica diferente da habitual.

A aplicação da oficina com os educandos não foi muito diferente, durante o processo foi possível constatar que os alunos passaram a discutir mais a respeito dos valores das relações, internalizando assim os conceitos das seis relações trigonométricas, além disso, as atividades foram efetuadas com rapidez e sucesso na maioria dos casos, nem necessariamente tiveram exatidão mas foram considerados pelo autor bem próximo dos reais, o que demonstra a assimilação da lógica matemática envolvida.

Contudo ficou evidenciado o fortalecimento no raciocínio lógico, dos educandos e, com a última atividade, evidenciou-se que após o manuseio do Material Manipulável, a resolução de atividades que envolvam conhecimentos trigonométricos se torna mais prática e menos abstrata (Pagliarini, 2016, p. 94).

O autor finaliza suas considerações finais apontando como os estudos atrelados aos registros de representação semióticas, quando alinhados à construção e utilização de materiais manipuláveis, facilitam o entendimento das relações trigonométricas permitindo assim a desmistificação de que esse objeto matemático é complexo e abstrato, auxiliando assim o processo de aprendizagem do aluno.

A partir de todo o trabalho realizado desde o desenvolvimento da oficina até suas considerações finais, permitiram ao autor evidenciar que, embora seja um método mais trabalhoso e que demande mais tempo de preparação, o aproveitamento e aprendizado proporcionado por trabalhar dessa forma é muito maior do que quando utilizados os métodos usuais.

A dissertação de Pagliarini (2016) mostra novamente a importância que os materiais manipuláveis trazem ao processo de ensino-aprendizagem. As oficinas construídas se caracterizam como seu produto educacional produzido e proporcionaram ao autor mostrar os benefícios dos materiais manipuláveis no processo de ensino dos alunos, bem como em formações à docentes. Sua dissertação traz grandes contribuições ao produto educacional do presente trabalho mesmo sendo voltada ao ensino médio, já que, mesmo antes de se pensar na dissertação ou em registro de representação semióticas, o autor já percebia os resultados em suas aulas.

Na dissertação de Martinelli (2017), intitulada “Geometria Analítica: Articulando Registros Algébricos e Geométricos com o GrafEq”, o autor desenvolveu uma investigação e criação de uma proposta de idade que o para ensino de Geometria analítica em um ambiente informatizado. Esta investigação se deu pelo ensino da Geometria analítica e as possibilidades didáticas da sua realização em ambientes informatizados, tendo como finalidade a verificação de como as mídias digitais contribuem na articulação de registros algébricos e geométricos.

A metodologia utilizada por Martinelli (2017) foi a da Engenharia Didática, para valorizar tanto o aspecto teórico como o experimental da pesquisa, já que a mesma agrega características de pesquisa-ação, desenvolvendo situações de sala de aula que levam o pesquisador a descrever e analisar seus resultados de aplicação (Almouloud; Silva, 2012). Sua fundamentação teórica se baseou inteiramente na TRRS, trazendo um pouco do seu histórico e da justificativa de seu trabalho em abordar as conversões e representações feitas a partir das atividades propostas.

Seu campo de pesquisa foi uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola da rede pública do Rio Grande do Sul, contando com 33 alunos, e teve a seguinte questão norteadora: “Como o uso de recursos tecnológicos, em particular o software GrafEq, pode auxiliar na aprendizagem de Geometria Analítica e na articulação de registros Algébricos e Geométricos?” (Martinelli, 2017, p. 42).

Seguindo os modelos propostos por sua metodologia de pesquisa, o autor procurou identificar as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem no conteúdo de Geometria analítica propondo oito atividades prévias, nas quais objetivava-se a identificação das principais dificuldades. Vale ressaltar que essas atividades desenvolvidas são consideradas como produto educacional de sua dissertação.

Nas análises feitas por Martinelli (2017), constatou-se que a grande maioria dos alunos apresentaram dificuldades em realizar tratamentos e conversões de registros algébricos para geométricos, acreditou-se que o uso de mídias digitais possa ter se tornado um obstáculo considerando que os alunos participantes não estavam acostumados a utilizar o computador como forma de estudo.

Após os estudos preliminares serem realizados foi elaborada uma sequência de ensino com atividades que auxiliavam a aprendizagem de Geometria analítica, tendo como finalidade apresentar o conteúdo de maneira distinta da forma tradicional. Ainda considerando a atividade anterior, algumas escolhas foram feitas em relação à abordagem e realização das atividades, como a articulação dos registros algébricos e geométricos, a possibilidade de se trabalhar em grupos e a utilização do recurso computacional GrafEq.

A primeira atividade iniciou com exercícios que utilizavam as representações algébricas de algumas regiões no plano cartesiano, o objetivo dos alunos era reconhecer e articular as regiões retangulares no plano através de inequações do primeiro grau, essa etapa foi realizada através da exploração do software pelos grupos de forma que os alunos conseguiram experimentar suas teorias através dos comandos do GeoGebra, vale ressaltar que por motivos externos não foi possível a utilização do GrafEq, este sendo substituído no início das atividades.

Pelas análises realizadas durante e após a aplicação da atividade, o autor conseguiu identificar que a maioria dos grupos realizavam as construções corretamente, realizando as conversões entre o registro algébrico e geométrico, porém também aponta algumas dificuldades encontradas ao longo do caminho, principalmente no que se diz a expressar os resultados obtidos por meio da língua escrita.

A partir da análise da primeira atividade, Martinelli (2017) sugere algumas reformulações, principalmente no resgate feito pelo docente de alguns conceitos matemáticos necessários para a realização, pois considera que seus objetivos estabelecidos para a primeira atividade foram parcialmente atingidos.

A proposta da segunda atividade era o resgate dos conceitos explorados na primeira através de construções de regiões retangulares, nela a maioria dos grupos conseguiu construir suas teorias e exploraram bem o software em sala, reconhecendo com facilidade as regiões obtidas através das inequações, porém ainda apresentando alguma dificuldade relacionada a escrita. As análises concluíram que os objetivos da atividade foram plenamente atingidos, considerando que os grupos constantemente realizavam as conversões de registros necessárias.

A terceira e última atividade explorou retas e inequações do primeiro grau no plano cartesiano, os alunos deveriam reconhecer suas posições relativas e estabelecer relações entre os parâmetros angulares. O objetivo proposto nesta atividade foi parcialmente atingido, pois alguns alunos não conseguiram realizar as construções propostas e mostraram pouco conhecimento em relação às definições de retas paralelas e perpendiculares.

O autor acredita que poderia ter explorado alguns conceitos necessários para as atividades antes de aplicá-las e recomenda a outros professores que realizem essas aulas prévias, possibilitando assim um melhor aproveitamento das atividades propostas.

De modo geral a prática realizada atingiu os objetivos previamente propostos pelo autor, como ele deixa claro ao declarar que “as explorações realizadas no GrafEq permitiram aos alunos fazerem conclusões empiricamente, servindo a tecnologia como ferramenta motivadora de novas descobertas” (Martinelli, 2017, p. 147).

Todas as atividades propostas na pesquisa foram inseridas na dissertação como apêndices e se caracterizam como o produto educacional da dissertação, entre essas atividades se encontra um tutorial do software GrafEq, que possibilita que outros professores consigam aplicar a sequência didática com seus alunos.

Durante toda a sua análise de resultados é possível perceber como a utilização de um software computacional motiva os alunos e enriquece seu aprendizado, além de motivar a inserção de tarefas utilizando os softwares computacionais ao presente produto educacional, o qual fez utilização do software GeoGebra.

Pensando no produto educacional da dissertação de Martinelli (2017) e no produto do presente trabalho, é possível perceber similaridades, principalmente no uso do software GeoGebra e na preocupação de possibilitar e facilitar o uso do material a qualquer professor que se disponha a utilizá-lo.

Corrêa (2017), em sua dissertação intitulada “Registros de Representação Semiótica Mobilizados na Obtenção do Volume de um Cilindro: Uma Atividade Orientada pelos Princípios da Modelagem Matemática”, procurou desenvolver um estudo que trouxesse uma abordagem diferenciada ao alinhar a modelagem Matemática e a teoria de registro de representação semiótica.

O estudo teve o objetivo de investigar se e como os acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática mobilizam o registro de representação semiótica ao explorarem os conceitos de volume de combustível de um cilindro utilizando os princípios da modelagem Matemática em atividade de sala de aula.

O referencial teórico da pesquisa de Corrêa (2017) é dividido em duas partes, o primeiro aborda o início da modelagem Matemática no Brasil, trazendo um breve relato histórico e pontos importantes da estratégia de ensino, para a autora a modelagem Matemática proporciona aos alunos a oportunidade de buscar em seu próprio contexto, os fenômenos a serem estudados e compreendidos, tudo por meio de instrumentos matemáticos.

A segunda parte aborda a TRRS de Raymond Duval, apresentando o seu histórico e suas definições, mas também apontando suas relações e contribuições às atividades de modelagem Matemática.

Assim como o presente trabalho, a dissertação de Corrêa (2017) também traz um apanhado de pesquisas relacionadas ao estudo, nele são analisadas cinco pesquisas desenvolvidas através da modelagem Matemática sob a luz da TRRS, os conteúdos analisados desses estudos forneceram à dissertação dados sobre a dinâmica do alinhamento entre as representações e a modelagem.

A partir do objetivo do estudo delineado, seguiu-se uma abordagem metodológica de pesquisa qualitativa tendo um caráter descritivo, os dados foram adquiridos a partir da análise de protocolos de atividades de modelagem e anotações da autora no decorrer do desenvolvimento das questões.

Os estudantes da licenciatura em Matemática foram escolhidos como participantes da pesquisa pela necessidade de que futuros professores reconheçam a importância de mobilizar diferentes representações em um mesmo conteúdo matemático, dando importância ao contato com as diferentes alternativas de ensino dentro da graduação, sendo a modelagem Matemática uma possibilidade que instiga a pesquisa, a criatividade e atribui significados aos conceitos matemáticos.

Um conjunto de três atividades foi elaborado seguindo os princípios da modelagem Matemática, as atividades eram compostas por dez itens que abordavam os conceitos de volume do cilindro, envolvendo uma discussão de temas da realidade. As atividades utilizadas foram disponibilizadas nos apêndices, caracterizando como o produto educacional do trabalho de dissertação.

A primeira atividade foi realizada dentro da etapa de interação, tendo o propósito de atuar como um preparatório, nele os participantes começavam a explorar e ter acesso à informações sobre o objeto matemático estudado, o volume de combustível dentro de um tanque cilíndrico.

Composta por quatro itens auxiliares, a atividade teve como objetivo “levar estudantes à compreensão da equivalência de volumes entre graduações consecutivas da vara” (Corrêa, 2017, p. 70), no qual os participantes da pesquisa tinham liberdade de utilizar os mais variados tipos de registro para resolver cada item, mas no geral mobilizaram apenas os registros figurais e de língua natural.

Seguindo para a segunda atividade, os licenciandos tinham como objetivo elaborar um modelo matemático que pudesse representar uma situação-problema levantada em um contexto real, seguindo etapas de modelagem matemática. Nessa atividade os diferentes registros de representação foram emergindo naturalmente através das estratégias de resolução e manipulação dos conceitos matemáticos envolvidos, o que mostrou êxito por parte dos participantes em relação aos procedimentos adotados para interpretação e resolução da situação problema. Por demandar um maior número de tratamentos e conversões, a segunda atividade se mostrou a mais trabalhosa para os participantes.

A terceira e última atividade retomou a situação problema inicial para iniciar a etapa de verificação e validação do modelo obtido, de modo que “foram necessárias discussões entre eles e a pesquisadora acerca dos caminhos e registros de representações obtidos no processo de construção do modelo” (Corrêa, 2017, p. 66), a etapa foi considerada a mais interessante e criativa pelos participantes, já que eles puderam fazer uso do software GeoGebra para a construção da representação gráfica do modelo encontrado anteriormente.

Mesmo ocorrendo algumas dificuldades durante a realização das atividades, a autora considera as experiências realizadas como positivas no contexto do ensino de matemática, considerando que as atividades propostas possibilitaram reflexões e também uma postura investigativa dos participantes, ela também relata que o estudo gerou um crescimento nas futuras ações dos participantes e também dela própria, ela comenta que a experiência da pesquisa teve um grande impacto no aprendizado, interesse e curiosidade dos acadêmicos durante o desenvolvimento das atividades.

A modelagem como alternativa de ensino aliada aos registros de representação semiótica apresentou aos envolvidos possibilidades de discussão em sala de aula com relação a temas oriundos de um contexto real, além de ser instrumento para abordar conteúdos matemáticos de forma diferenciada, relacionando-os às demais áreas do conhecimento (Corrêa, 2017, p. 97).

Corrêa (2017) finaliza seu trabalho fazendo a reflexão de como o uso da modelagem Matemática em sala de aula requer uma mudança de postura e de mentalidade por parte da comunidade e dos professores, sendo esta talvez a maior dificuldade em sua utilização como alternativa de ensino.

Partindo dessa reflexão, a inserção de novas metodologias no trabalho de ensino de Matemática fica cada vez mais evidente como forma de despertar a curiosidade dos alunos, instigando-os a participar das aulas e se interessar pelo conteúdo, sendo esse um dos pontos principais da elaboração do produto educacional produzido.

A dissertação de Berlanda (2017), intitulada como “Mobilizações de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o Auxílio do Software GeoGebra”, trabalha com a possibilidade de integração de tecnologia às aulas de Matemática, tendo como foco o uso do software GeoGebra.

A escolha do software se fez com o intuito de possibilitar a construção de conhecimento dos alunos por meio de manipulação de objetos matemáticos, com fácil visualização e boa dinamicidade, criando novos caminhos de investigação, diferente dos até então oportunizados em sala.

Tendo como problema de pesquisa, a autora se propôs a responder a seguinte questão de investigação: “Como os registros de representação semiótica são mobilizados na abordagem de trigonometria no triângulo retângulo, com o auxílio do software GeoGebra, a partir de uma sequência de atividades com alunos do 1º ano do ensino médio?” (Berlanda, 2017), a qual se fez através de atividades que buscavam explorar formas diferenciadas de abordar o conteúdo de trigonometria.

A sequência foi aplicada em uma turma de 35 alunos do primeiro ano do ensino médio em uma escola da rede pública do Rio Grande do Sul, na qual Berlanda (2017) era professora regente de Matemática. Todo conteúdo foi ministrado em três encontros durante o horário escolar, tendo foco nas construções e transformações geométricas e enfatizando as quatro apreensões da Geometria de acordo com os registros de representação semiótica: discursiva, operatória, perceptiva e sequencial.

Tendo o objetivo de analisar maneiras em que os registros de representação semiótica podem ser mobilizados no contexto da trigonometria do triângulo retângulo, atividades investigativas foram elaboradas com o auxílio do software Geogebra e da metodologia da Engenharia Didática. Esta metodologia se propõe a fazer aparecer fenômenos didáticos nas condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula, caracterizando-se pela concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino (Almouloud; Silva, 2012).

A escolha por essa metodologia se deu pela preocupação de inovar dentro do campo educativo, procurando novos caminhos para experiências surgidas em sala de aula, não sendo uma metodologia que busca a verdade única e sim e novos caminhos para experiências no âmbito escolar (Berlanda, 2017).

A dissertação foi organizada partindo de um capítulo introdutório, seguido por uma revisão de literatura que descreve, assim como o presente trabalho, um mapeamento realizado em pesquisas já desenvolvidas acerca do tema. Passando para o terceiro capítulo destinado a fundamentação teórica, no qual os registros de representação de semiótica foram apresentados e discutidos, interligando-os à Geometria.

No quarto capítulo é descrita a metodologia utilizada, Engenharia Didática, na qual a autora traz definições e concepções, além da sua justificativa por trás da escolha do método: “Essa metodologia além de unir os saberes práticos e teórico do professor contribui para que o aluno seja o autor principal durante o processo educativo” (Berlanda, 2017, p. 68).

O quinto capítulo relata como foi a aplicação da sequência didática na turma do ensino médio, considerando essa sequência como seu produto educacional e apresentando todas as análises feitas a partir das discussões em sala de aula e dos resultados obtidos pelos alunos.

No início do processo, os alunos receberam uma folha impressa contendo o roteiro de todas as atividades, as quais realizaram de forma individual em um computador para que posteriormente suas realizações fossem discutidas em pequenos grupos e então coletivamente com a turma. A avaliação dos alunos foi feita ao decorrer de todo o processo, tendo foco no progresso dos estudantes, empenho nas aulas, participação oral e em sua capacidade de argumentação e realização das atividades.

Toda a análise de resultados da sequência didática foi feita em relação às apreensões da geometria e dividida em três blocos, em que cada atividade foi analisada de modo minucioso. O primeiro bloco teve o objetivo de introduzir noções de seno, cosseno e tangente aos alunos, fazendo-os explorar as razões entre as medidas dos lados de triângulos retângulos.

O objetivo do segundo bloco foi formalizar o conceito de razão e de ângulos adjacentes e opostos, fazendo com que os alunos explorassem as nomenclaturas usuais dos lados de um triângulo retângulo, mas também o registro simbólico nas definições de seno, cosseno e tangente.

O terceiro e último bloco teve como objetivo formalizar os conceitos de seno, cosseno e tangente partindo do recurso criado pela autora, de modo a apresentar a trigonometria presente no triângulo retângulo e possibilitar aos alunos a manipulação das figuras, de modo que identificassem e mobilizassem os registros em língua natural, figural, algébrico e numérico.

De modo geral, foi perceptível que os alunos conseguiram entender os conceitos envolvidos nas atividades sem apresentar dificuldades em relação aos recursos utilizados, sendo possível afirmar que as diferentes representações do mesmo objeto possibilitam uma diferente forma de explorar o conteúdo.

Além disso, a utilização do software de GeoGebra contribuiu para a visualização e interpretação dos elementos geométricos explorados, o que possibilitou a liberdade na movimentação dos objetos, vale ressaltar que os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade em relação à utilização do recurso, aspecto que contribuiu diretamente na exploração das apreensões e na conversão dos registros de língua natural durante a análise.

Outro ponto levantado foi o fato dos alunos terem de responder na folha impressa de forma escrita, em língua natural, algo que eles afirmaram não estarem acostumados, principalmente na disciplina de Matemática, a qual na maioria dos casos possibilita os alunos a dar respostas utilizando a representação numérica ou então através de seus cálculos.

Berlanda (2017) finaliza seu trabalho expondo sua satisfação em relação à pesquisa, durante todo o processo a utilização do software pareceu auxiliar a coordenação de diversos registros, considerando que os alunos poderiam explorar os objetos geométricos visualizando de diferentes tamanhos e posições. A autora também destaca a importância de que a pesquisa do tema continue, o que impulsiona o presente trabalho a desenvolver atividades voltadas ao uso de GeoGebra, sejam atividades prontas ou de construção de objetos matemáticos.

Na dissertação de Silva (2017), intitulada “Histórias em Quadrinhos em Contexto Matemático: Uma Proposta para o Ensino de Triângulos à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica”, a autora se propõe a promover interação e articulação entre a linguagem Matemática e a linguagem natural por meio do gênero textual da História em Quadrinho (HQ).

Ancorada na literatura, realizou discussões sobre a relevância da educação Matemática, da língua natural e das histórias em quadrinhos, apresentando definições e características dos temas escolhidos, mas também justificando o porquê de suas escolhas no decorrer do trabalho.

Na busca pelo suporte teórico, escolheu a TRRS, no qual ressalta que “quanto maior for a diversidade de conversão de registros, maior será a mobilização necessária ao estudante para apreender o objeto envolvido” (Silva, 2017, p. 59).

Assim a autora aborda o conteúdo de triângulos em turmas do 8º ano do ensino fundamental a partir de uma HQ, traçando assim um modelo de aplicação da teoria de Duval com as concepções de leitura, escrita e oralidade, é importante ressaltar que o material foi utilizado em cinco turmas, mas apenas uma delas participou da análise de resultados. Além da história em quadrinhos produzida como o produto educacional do trabalho, também é apresentado um “Guia de Orientação de Aplicação da HQ” tendo foco em auxiliar professores a trabalhar com o material de acordo com suas realidades educacionais.

O processo de produção da HQ foi feito em várias etapas, na primeira delas se fez roteiro e produção da primeira versão de forma digital, passando por uma revisão feita pela própria autora e uma segunda revisão feita por um professor de língua portuguesa. Antes de levar o produto às turmas de 8º ano, a HQ também passou por validações, sendo apresentada para um grupo de alunos do 9º ano a fim de coletar dados e informações sobre a qualidade e adequação do material.

Enquanto isso, a validação do guia para aplicação foi feita em um grupo composto por oito professores, contemplando as disciplinas de Matemática, língua portuguesa e anos iniciais, tendo propósito de coletar contribuições que possibilitaram melhoria do material.

Com HQ pronta, as aplicações nas turmas de 8º ano começaram, ao todo foram nove encontros em horário de aula, considerando que Silva (2017) já era professora de sala das turmas.

No desenrolar do processo, os alunos foram introduzidos ao método utilizando HQ, fizeram leitura compartilhada, individual ou em grupos, discussão dos temas abordados ao final de cada leitura e resolução de exercícios do livro didático atrelados aos conteúdos vistos na HQ. Durante todo o processo os alunos tiveram de fazer suas próprias anotações em relação aos conteúdos abordados e suas opiniões acerca do uso da HQ, essas anotações foram recolhidas por Silva (2017), assim como atividades elaboradas durante o processo e o questionário final aplicado aos estudantes, todo esse material foi analisado na dissertação e também avaliado, resultando numa nota aos estudantes.

A análise dos resultados foi feita de modo qualitativo e se propôs a responder a seguinte questão de investigação: “Quais as contribuições que as Histórias em Quadrinhos, baseadas nos registros de representação semiótica, trazem para o ensino de Triângulos” (Silva, 2017, p. 17).

O capítulo destinado à discussão e análise dos dados foi dividido em duas partes, análises de questionários e produções dos alunos. O primeiro questionário teve o objetivo de coletar informações pertinentes ao gosto pelo gênero da HQ alunos do 9º ano, possibilitando alterações no material a partir das sugestões dadas. O segundo questionário foi direcionado aos professores e teve o intuito de ajustar o guia de orientação produzido. O questionário final teve a finalidade de analisar as impressões dos alunos do 8º ano participantes acerca das aulas com HQ realizadas, os quais se mostraram muito satisfeitos com o método de ensino, entusiasmados e curiosos.

A análise das produções dos alunos contou com três instrumentos de coleta de dados, são eles a atividade avaliativa em dupla, a atividade com resolução de problemas e as anotações dos alunos durante as aulas. A atividade avaliativa em dupla contribuiu significativamente ao apresentar uma grande diversidade de representações e também de mobilização dessas representações.

A atividade com resolução de problemas levou os alunos a mobilizar diversos registros de representação, dentre eles é possível destacar a língua natural e o registro geométrico. A terceira atividade realizada serviu para autora identificar quais assuntos os alunos já tinham domínio e quais eram novos ao seu conhecimento, assim foi possível comparar o desempenho nas duas primeiras atividades que contemplavam os novos conteúdos, a autora constatou então que houve aprendizado, já que a grande maioria das atividades foi realizada com êxito.

O processo de análise considerou a conversão realizada pelos alunos entre registros de desenho, registros algébricos, registros numéricos e língua natural, no qual foram apresentadas todas as questões e expostas, de maneira geral, qual o pensamento utilizado pelos alunos para responder às questões, vale ressaltar que todas as questões eram abertas e precisavam ser justificadas pelos alunos.

Para a autora, a TRRS não serviu somente como suporte para o desenvolvimento das atividades, mas também aproximou e estabeleceu um maior diálogo entre a Matemática e a língua natural, favorecendo o desenvolvimento de prática de leitura, escrita e fala nas aulas de Geometria.

(...) o uso do Gênero Histórias em Quadrinhos nas aulas de Matemática, proporciona um melhor desenvolvimento nos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que estimula a leitura, a escrita e a fala, favorecendo a construção de conceitos matemáticos e possibilita aulas mais dinâmicas e atrativas (Silva, 2017, p. 197).

Silva (2017) finaliza suas considerações finais afirmando que a partir de seu trabalho foi possível trazer inovação e mudança positiva de rotina dentro das aulas de Matemática, desenvolvendo a língua natural como aliada nos processos de ensino-aprendizagem.

Através da leitura do trabalho de Silva (2017) foi possível perceber a importância da relação entre a língua natural e a Matemática, de modo que tarefas de conversão foram atribuídas no produto educacional, com o intuito de melhorar o entendimento do estudante ao trabalhar com leitura, escrita e oralidade.

Arcego (2017), na dissertação intitulada “Representações Semióticas Mobilizadas no Estudo da Área do Círculo no Ensino Fundamental”, se propôs a realizar uma pesquisa qualitativa envolvendo duas coleções de livros didáticos adotadas na escola em que leciona, assim como os cadernos dos estudantes, além de desenvolver uma sequência de atividades com alunos do 9º ano utilizando material manipulável e o software GeoGebra.

Com o intuito de sugerir indicativos que potencializam o ensino de Geometria, a autora se dispôs a responder sua questão de investigação: “Como se constitui o estudo da área do círculo no Ensino Fundamental de uma Escola Municipal de Erechim/RS, quando se tomam livros didáticos, cadernos e protocolos de uma sequência de atividades?” (Arcego, 2017, p. 25-26).

Para isto, buscou como fundamentação teórica a relação entre o ensino da Geometria e a TRRS, tendo grande foco nos diferentes tipos de registro: registro de língua natural, registro numérico, registro algébrico, registro tabular, registro figural e registro gráfico.

A análise de conteúdo de coleções de livros didáticos se fez por meio uma coleção voltada aos anos iniciais e outra aos anos finais, considerando que os encaminhamentos dados em anos escolares anteriores são relevantes para a formalização da área do círculo feita no 8º e 9º ano.

O processo de análise foi feito de modo minucioso e gerou várias comparações entre coleções e entre os níveis acadêmicos, questões de conversão de registros de representação foram alguns dos pontos positivos levantados durante a análise, porém, um ponto negativo foi o uso de nomenclaturas incorretas de elementos geométricos encontrados em alguns livros didáticos. De modo geral, o conteúdo de círculo era mais explorado no quinto ano na coleção dos anos iniciais e no nono ano na coleção dos anos finais, vale ressaltar que nem todas as representações listadas anteriormente foram mobilizadas nas coleções de livros didáticos.

A análise de cadernos dos alunos foi feita com o intuito de investigar novamente as propostas que envolvem o círculo no decorrer dos nove anos, considerando a introdução do estudo do círculo, a evolução da abordagem dos conceitos e as representações e apreensões mobilizadas nos enunciados das atividades.

Para que a análise fosse possível considerando uma abordagem qualitativa, Arcego (2017) coletou cadernos de dois alunos de cada uma das turmas do ensino fundamental da escola, totalizando 18 cadernos do 1º ao 9º ano. Num panorama geral, os resultados obtidos não foram muito diferentes dos encontrados pela análise de livros didáticos, vale considerar que os alunos utilizam caderno e livro didático em conjunto.

Pela análise foi possível identificar que nem todos os registros de representação eram utilizados nos cadernos dos alunos, exemplos disso são as construções geométricas e as explicações por meio da linguagem natural que não foram encontradas.

De modo geral observou-se que as atividades efetivadas em sala de aula não atendem a perspectiva de Duval no que se diz à mobilização concomitante de diferentes tipos de registro e aplicações em diferentes situações. Sabendo disso, considerou-se pertinente o desenvolvimento de uma proposta de exploração figural da área do círculo alinhada a outras representações, gerando assim o produto educacional produzido.

A sequência de atividades desenvolvida por Arcego (2017) teve como objetivo explorar a área do círculo em uma pequena turma de 9º ano da escola, utilizando os materiais manipuláveis e o software GeoGebra, contando com quatro atividades que totalizavam 29 itens a serem respondidos e justificados pelos alunos. Para a elaboração das atividades a autora se atentou àqueles aspectos identificados durante as análises das coleções de livros didáticos e de cadernos, de modo a sanar possíveis dificuldades dos alunos e promover um melhor aproveitamento de suas aulas.

A atividade 1 orientava o aluno a manipular três círculos de mesmo raio a fim de construir um retângulo, com o auxílio de sete questões norteadoras à atividade com material manipulável, assim, mobilizando concomitantemente os registros discursivos e figurais.

Já a atividade 2 utilizava o software GeoGebra para retomar o conteúdo de sessões do círculo já estudada na atividade anterior, fazendo com que os alunos aumentassem o número de setores de um círculo, manipulando-os mesmos para formar uma figura similar à um retângulo, comparando assim as áreas do retângulo e do círculo inicial para que, de maneira gradativa, encontrassem um valor cada vez mais próximo de pi.

Enquanto isso, a atividade 3 teve o foco nas representações figurais e algébricas das áreas mencionadas na atividade anterior, o software GeoGebra continuou sendo usado e suas ferramentas contribuíram muito nas discussões e reflexões dos alunos durante a resolução dessa atividade, a autora destaca que, pela necessidade de compreender as propriedades geométricas das figuras, as apreensões perceptiva, discursiva e operatória foram mobilizadas.

A atividade 4 utilizou das áreas de polígonos inscritos de modo a permitir que o aluno observasse que, quanto maior o número de lados do polígono, mais próxima sua área ficava da área do círculo, utilizando para isso as representações gráficas e numéricas, a autora destaca que a apreensão discursiva teve destaque nesta atividade, pois ela era usada ao relacionar as figuras e suas respectivas propriedades.

Todas as atividades tiveram como foco central a construção da definição da área de um círculo, os enunciados das atividades levavam ao aluno, por meio de experimentações, a deduzir a fórmula. Ao final da análise das respostas, foi constatado que mais da metade dos alunos mobilizaram simultaneamente mais de um registro no estudo da área do círculo, o que se mostrou um elemento favorável ao ensino-aprendizagem da Geometria.

Arcego (2017) finaliza sua dissertação justificando a busca da valorização do ensino de Geometria e na espera de que o seu trabalho tenha despertado o interesse em promover essa abordagem e investigação de outros elementos relacionados à temática, evidenciando que outros níveis da educação básica e ensino superior ainda carecem de atenção.

A dissertação de Arcego (2017) foi muito importante ao considerar a variedade de registros de representação abordados, pois, enquanto alguns autores se limitam a dois ou três tipos, ela aborda pelo menos seis, mostrando o quão rica pode ser a abordagem de geometria utilizando a TRRS. Além disso seu trabalho joga luz ao problema encontrado em muitos livros didáticos, a falta de variedade de registros de representação em objetos matemáticos.

Barbosa (2018), em sua dissertação intitulada “Aprendizagem Significativa do Conceito de Polígono: Uma Sequência Didática para o Sexto Ano do Ensino Fundamental”, se propôs a analisar as contribuições que uma sequência didática direcionada aos alunos do 6º ano do ensino fundamental quando atrelada a TRRS.

O trabalho teve o intuito de contribuir com pesquisas, reflexões e compreensões provenientes de sua revisão bibliográfica sobre a aprendizagem da Geometria, para isso a autora adotou a seguinte pergunta norteadora: “como uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do sexto ano do ensino fundamental pode contribuir para a aprendizagem do conceito de polígono?” (Barbosa, 2018, p. 19).

Ancorada na literatura, a autora buscou os conceitos de ensino de Geometria plana no ensino fundamental, aprendizagem significativa, registros de representação semiótica e conceito de polígono como sua fundamentação teórica, interligando os temas de modo a justificar suas escolhas no trabalho.

Ao trabalhar com ensino de Geometria, documentos oficiais foram analisados buscando entender como os conceitos geométricos se encaixam no processo de ensino-aprendizagem dos alunos, no qual foi possível verificar que esses demandam uma reflexão acerca da seleção de conteúdos, mas também a busca de novos significados, assim, a Teoria da Aprendizagem Significativa foi escolhida como processo de aprendizagem para a aplicação da pesquisa.

A teoria proposta por David Ausubel na década de 60, trata de um processo que permite uma nova informação se relacionar com uma estrutura de conhecimento específico, de modo a modificar, ampliar ou complementar o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aluno (Barbosa, 2018).

Para o criador da teoria, a aprendizagem significativa é aquela que permite ao indivíduo relacionar os conhecimentos adquiridos com as novas informações recebidas (Ausubel, 2003), desse modo houve a necessidade de planejar adequadamente o material didático produzido no trabalho para que este fosse organizado de maneira sequencial e lógica, com o intuito de motivar o aluno a aprender significativamente.

A TRRS, de Duval, foi utilizada no trabalho a fim de analisar as respostas adquiridas a partir da aplicação da sequência didática, ou seja, as produções dos alunos nas tarefas, de modo que foram analisados os processos de formação, tratamento e conversão de registros de representação.

A pesquisa do trabalho foi feita na instituição que a autora já ministrava suas aulas, e contemplou 32 alunos do sexto ano, a escolha de tema foi feita a partir das inquietações de Barbosa (2018) quanto professora e o método de coleta empregado foi o de observação, utilizando gravações e anotações feitas no decorrer do processo.

A mesma foi caracterizada como “pesquisa do professor”, a qual não mostra preocupação com originalidade, validade e reconhecimento por parte da comunidade científica, mas sim caráter instrumental e utilitário buscando o conhecimento da realidade, visando a melhoria das práticas pedagógicas (Carneiro, 2008).

A sequência didática construída visava a formação do conceito de polígono envolvendo o reconhecimento, a definição e análise de propriedades, as atividades foram realizadas partindo do conceito de linhas poligonais e construindo assim o conhecimento de pouco a pouco ao longo de 15 aulas ministradas pela autora, que já era professora dos alunos antes da proposta.

A primeira atividade realizada teve o objetivo de apresentar os conceitos de linhas poligonais, para isso a professora construiu um quadro dividido ao meio com várias figuras e, através de perguntas norteadoras e discussões com os alunos, foi construindo o conhecimento apresentando as diferenças e semelhanças das figuras em cada um dos lados do quadro. Para que não houvesse confusão entre os conteúdos, foi elaborado um total de três quadros, um focado no conteúdo de linhas poligonais e não poligonais, outro focado apenas em linhas poligonais fechadas e abertas, para que o último trabalhasse as linhas poligonais simples e não simples.

A segunda atividade teve o objetivo de identificar linhas poligonais e classificá-las por meio da decomposição de figuras, durante o processo a autora utilizou canudos de diferentes tamanhos como material manipulável. Já a terceira atividade teve o objetivo de classificação dos polígonos utilizando um mapa conceitual como recurso didático, os alunos recebiam um mapa conceitual e também cartões com figuras que deveriam ser agrupadas em dois grupos distintos cada vez, o mapa serviu como instrumento de visualização, o qual os alunos puderam classificar suas figuras em linhas poligonais e não poligonais, fechadas e abertas, simples e não simples, e até mesmo classificá-las de acordo com o número de lados de cada uma.

Desenhos, materiais concretos, trabalhos em equipe e jogos foram algumas das alternativas escolhidas por Barbosa (2018) ao trabalhar na sua sequência didática, no total a professora trabalhou com três tipos de representação: língua natural, geométrica e numérica, justificando assim a escolha da teoria de Duval como fundamentação teórica.

A autora ressalta que as figuras utilizadas na sequência didática proporcionaram aos alunos a participação na formação dos seus próprios registros de representação semiótica, considerando que além da apreensão de cada figura também existiu o conjunto de indagações, fazendo com que os alunos tomassem consciência das regras de formação de um registro cognitivo. Além disso, “a avaliação do conhecimento prévio dos alunos e a organização hierárquica do conteúdo foram imprescindíveis para a elaboração da sequência de atividades e para a metodologia a ser adotada” (Barbosa, 2018, p. 97).

De modo geral, tanto o material produzido (produto educacional), quanto as produções dos alunos mostraram indicativos de aprendizagem significativa do conceito de polígonos, além disso, os alunos mostraram uma participação ativa nas discussões, desenvolvimento de atividades e preenchimento das fichas de resposta, o que também melhorou os aspectos afetivos entre turma e professora nas interações.

A dissertação de Barbosa (2018) confirma novamente bons resultados atrelados a uma aplicação de sequência didática com uso da TRRS. O presente produto educacional se inspirou no trabalho da autora por conta de seus resultados obtidos pelas aplicações de jogos, materiais concretos e desenhos, alternativas de abordagem encontradas nos três conteúdos do produto.

A dissertação de Arinos (2018) intitulada como “Um Estudo de Potencialidades das Representações Semióticas na Aprendizagem de Áreas de Triângulos e Quadriláteros por Alunos do Quinto e Sexto Anos do Ensino Fundamental”, utiliza da Engenharia Didática e da teoria de Duval na aplicação de uma sequência didática voltada ao conteúdo de área.

A metodologia escolhida foi a da Engenharia Didática, ao considerar as realizações em sala de aula e também permitir prever dificuldades e possíveis estratégias inseridas na atividade. Dessa maneira, a sequência didática foi organizada e conduzida por meio de atividades planejadas e analisadas previamente, tendo como finalidade a observação de situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa.

Tendo o objetivo de investigar aprendizagens de alunos do quinto e sexto anos diante de situações envolvendo várias representações semióticas nas abordagens de áreas de triângulos e quadriláteros, Arinos (2018) buscou suporte teórico na teoria de Duval ao relacionar os elementos da pesquisa considerando os modos de ver a Geometria, bem como as conversões e os tratamentos dos registros figural, numérico, algébrico e de língua natural.

Os procedimentos metodológicos de sua pesquisa contaram com a participação de 12 alunos do 5º e 6º ano do ensino fundamental durante o contraturno de suas aulas, estes foram divididos em duplas para a realização da sequência didática produzida e seus resultados foram coletados a partir de gravações de áudio e vídeo.

Seguindo a metodologia da Engenharia Didática, todo o procedimento foi composto por quatro fases, na primeira delas chamada análise preliminar, a pesquisa se apoiou em conhecimentos didáticos efetuados em estudos realizados anteriormente, como uma revisão de literatura. Nesta análise procurou-se identificar possíveis dificuldades de compreensão do conceito e analisar a atual proposta de abordagem do conteúdo, a partir dela foi possível perceber a necessidade de elaborar atividades que focam nas situações de comparação de área e utilização/articulação de diversos registros para representar um mesmo objeto matemático.

A segunda fase trata da concepção e análise a priori, apoiando-se nos estudos realizados na primeira fase a autora decide agir sobre as variáveis no sistema de ensino, elaborando assim a sua sequência didática que levou em consideração “as possíveis dificuldades enfrentadas e as estratégias traçadas pelos alunos, sujeitos de nosso estudo, em cada atividade, bem como as superações dessas diante dos diversos registros e representações”(Arinos, 2018, p. 78).

Experimentação é como chamada-se a terceira fase da metodologia, ela consiste na aplicação da sequência didática construída na fase anterior com os sujeitos da pesquisa, no caso os alunos de 5º e 6º ano. Nesta fase foram realizadas a explicação dos objetivos da pesquisa, os combinados entre professor e alunos, a aplicação das atividades em cada seção e o registro das observações realizadas.

Quarta e última fase trata-se da análise a posteriori e validação, na qual as hipóteses feitas no início são validadas ou refutadas, o confronto de priori com a posteriori deve ser feito ao final de cada sessão tendo a finalidade de realizar alterações nas sessões posteriores, o que permite correções e novos direcionamentos a sequência didática.

No total, Arinos (2018) dividiu sua sequência didática, que também se caracteriza como produto educacional, em oito sessões, nas quais se propôs a cumprir seus objetivos específicos de analisar as dificuldades apresentadas nos cálculos, analisar as transformações geométricas no plano que envolvem composição, decomposição e reconfiguração de figuras planas e, por fim, identificar e analisar as estratégias mobilizadas por eles na superação de suas dificuldades.

A sessão número um teve o objetivo de calcular áreas de peças de tangram a partir da peça quadrada, o que não requer conhecimentos escolares relativos ao conceito de área, trabalhando somente com reconfigurações, decomposições e composições entre as peças, caracterizando um material manipulável. A sessão dois teve objetivo e dinâmica parecidos, porém trabalhado na malha quadriculada.

A construção de triângulos e quadriláteros foi explorada na sessão três, na qual os alunos utilizaram o geoplano e a malha quadriculada para construir polígonos de uma área específica. Enquanto isso, a sessão quatro tratou da medida dos lados e da construção de quadriláteros com régua e esquadro, mas também com peças de tangram.

A sessão cinco trabalhou com o cálculo de áreas envolvendo situações do cotidiano dos alunos, apresentando problemas dos quais os alunos deveriam obter a resposta através do uso de fórmulas. Já na sessão seis, utilizou-se novamente a malha quadriculada ao solicitar que os alunos calculassem a área das figuras, sem ter a obrigação de usar as fórmulas algébricas, já que a malha proporciona outros métodos de resolução.

Na sessão sete, os alunos determinam áreas de maneiras diferentes, na primeira atividade utilizando recursos figurais e na segunda, partindo de um enunciado que contém apenas a língua natural, elaborando as figuras para resolver a questão.

Por fim, a sessão oito finaliza a sequência didática propondo aos alunos representar figuras no geoplano, calcular suas áreas e transcrever as respostas em uma malha quadriculada, tudo isso seguindo o enunciado que utiliza apenas da língua natural e do registro numérico, é perceptível que no decorrer da sequência didática, diversos registros de representações foram abordados com os alunos, de modo que foi evidente para a autora a evolução dos raciocínios e a criação de novas formas de resolução.

A autora finaliza suas considerações expondo sua satisfação com o método escolhido e os resultados obtidos:

Com a articulação da linguagem, visualização, representações e registros mobilizados pelos alunos, pudemos compreender os raciocínios e dúvidas elaborados por eles, e assim propor outras atividades e questionamentos que contribuíssem para superação de dificuldades, visando a utilização de diferentes estratégias para determinar áreas de triângulos e quadriláteros (Arinos, 2018, p. 253).

A dissertação de Arinos (2018) contribui muito no que se diz ao uso de uma grande variedade de registros de representação, mas também aborda um tópico muito interessante, a resolução de atividades por diversos caminhos, o que dá liberdade ao aluno e enriquece ainda mais suas discussões entre si.

Na dissertação intitulada “Registros de Representações Semióticas Mobilizados por Professores de Matemática no Ensino dos Prismas”, Santos (2020) se propôs a entrevistar e observar as aulas de quatro professores de Matemática, tendo o objetivo de compreender de que forma eles mobilizam os registros de representação semiótica no ensino de prismas, em turmas de 6º ano do ensino fundamental.

Ancorada na teoria de Duval, a autora considera a diversidade de tipos de representação de semiótica necessária e também apresenta os diferentes tipos de registros de representação semiótica, bem como as atividades cognitivas fundamentais para validar um sistema semiótico como registro de representação, sendo eles a formação, o tratamento e a conversão.

Além da fundamentação teórica, Santos (2020) também realiza uma revisão de literatura tendo como objetivo compreender o panorama do ensino de Geometria no Brasil, com foco no ensino dos prismas, e em como este é abordado em pesquisas, tanto anais de congressos, periódicos, documentos oficiais e guia de livros didáticos foram consultados.

Partindo dessa revisão foi possível a identificação de alguns problemas enfrentados por professores no ensino dos prismas, como a falta de articulação do pensamento geométrico com o cotidiano, evidenciando também a falta de preparo de alguns professores e a necessidade de uma formação continuada. Felizmente a pesquisa apontou uma considerável superação do abandono do ensino de Geometria no Brasil, considerando que o estudo dos sólidos geométricos está presente em documentos oficiais e guias de livros didáticos, contendo recomendações para o trabalho com materiais manipuláveis e planificações.

Mesmo possuindo lacunas devido ao seu longo período de abandono, a importância do ensino da Geometria foi enfatizada na pesquisa, sendo justificada pela sua capacidade de permitir compreender, descrever e representar o mundo, estabelecendo conexões entre Matemática e demais disciplinas. Justificando assim o tema da dissertação:

Portanto, tomar conhecimento sobre a importância deste campo da matemática e como está o seu ensino, na visão dos participantes desta pesquisa, é crucial para compreendermos a maneira como eles mobilizam as representações externas na sala de aula (Santos, 2020, p. 83-84).

A fim de alcançar os objetivos delimitados, a autora optou por realizar uma pesquisa qualitativa e exploratória dividida em duas partes, num primeiro momento uma entrevista com os professores participantes e depois a observação de suas aulas acerca do conteúdo de prismas, tendo anotações em geral e gravação de áudio e vídeo como instrumentos de coleta de dados.

A entrevista foi realizada com quatro professores que se dispuseram a participar da pesquisa e se caracteriza como semiestruturada, o que possibilita a liberdade e espontaneidade dos participantes. O objetivo por trás da entrevista foi conhecer o professor enquanto indivíduo social, mas também tomar conhecimento de como está o ensino dos prismas na educação básica partindo do ponto de vista do educador, levando-se em consideração que a dificuldade de visualização e a falta de habilidade e experiência dos alunos tornam-se agravantes das dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem.

Em suas considerações parciais, Santos (2020) aponta que os professores têm noção da importância do ensino de Geometria na educação básica, pois favorece o desenvolvimento da abstração, do pensamento geométrico e da compreensão do espaço, porém reconhecem que o ensino não é feito de maneira satisfatória, usando como justificativa a abordagem inadequada dos conteúdos nos livros didáticos e a inexistência de recursos didáticos que auxiliam na mediação dos conteúdos.

A etapa de observação de aula aconteceu do início até o término do ensino de prismas, na qual não houve um padrão de quantidade de aulas observadas por turma, o processo teve o objetivo de identificar os diferentes registros de representação semiótica propostos pelo professor durante a aula, assim como as transformações e apreensões mobilizadas, as quatro turmas observadas eram regidas pelos mesmos quatro professores que participaram da etapa da entrevista.

Mesmo que todos os professores tenham afirmado, na etapa da entrevista, realizar atividades que envolvem as transformações semióticas, nem todos os registros de representação foram mobilizados nas aulas observadas, de modo geral o registro em língua natural e figural em perspectiva foram os mais utilizados.

Algumas lacunas observadas nessa etapa podem trazer prejuízos para aprendizagem dos alunos, limitando a compreensão deles com relação ao objeto matemático prismas, dentre elas estão tratamentos em um único sentido, trabalho de conversão durante a mediação das aulas mas não nas atividades propostas aos alunos e a falta de conversão entre língua natural e o figural planejado.

Santos (2020) finaliza suas considerações ressaltando a importância que cursos de formação de professores podem agregar à teoria de registros de representação semiótica, visando a preparação do professor para o reconhecimento do trabalho dos diferentes registros e da necessidade de diversificação de tratamentos e conversões nos diferentes momentos do processo. Além disso, ressalta a existência de outros aspectos dessa temática a serem pesquisados, visando contribuir para uma melhor compreensão do processo de ensino de Geometria na educação básica.

Tendo foco no olhar do professor em relação ao ensino de Geometria aliado à TRRS, a dissertação de Santos (2020) teve grande contribuição na justificativa do produto educacional produzido neste trabalho, mesmo que a autora em questão não tenha desenvolvido um produto. Essa contribuição faz referência ao fato de que seu trabalho é voltado às práticas do professor, explicando como a teoria de Duval funciona e trazendo atividades prontas que podem ser utilizadas de maneira livre, sem a necessidade de seguir um plano educacional pronto e engessado.

Outro tópico que vale ressaltar, é a maneira como os processos de tratamento e conversão foram mobilizados durante as aulas observadas, os apontamentos feitos pela autora durante análise ressaltam a importância de trabalhar esses processos tanto no momento de explicação do professor, quanto nos momentos de atividades dos alunos, mesmo que essas atividades demandem um esforço maior por parte do aluno.

Oliveira (2021), na dissertação intitulada “Visualização Espacial no Ensino Fundamental: Rotações no Geogebra”, se propõe a analisar as contribuições que o software GeoGebra traz no processo de visualização espacial por meio de uma sequência didática que envolve os conteúdos de rotação e de superfícies de revolução.

A fim de consolidar sua investigação, a autora fundamentou sua pesquisa na TRRS e também no Processo de Visualização na Matemática pela perspectiva de Angel Gutiérrez. Na análise da teoria de Duval, houve maior foco nas transformações de tratamento e conversão, principalmente ao considerar a variedade de representações disponíveis para utilização por meio do software GeoGebra.

Enquanto isso, o Processo de Visualização exposto por Angel Gutiérrez, foi escolhido para o trabalho ao considerar fundamental as habilidades desenvolvidas que possibilitem construção, movimentação, transformação e análise de imagens mentais de objetos 3D que derivam da sua representação plana, sendo o GeoGebra perfeitamente funcional a partir de seus recursos. Além disso, a autora também elaborou uma revisão de literatura, em que analisou cinco trabalhos relacionados ao tema.

A metodologia empregada na pesquisa de Oliveira (2021) utilizou de uma abordagem qualitativa de caráter investigativo, de modo a aplicar a sequência didática produzida e analisar os resultados obtidos. O processo de aplicação foi feito de maneira remota por conta da pandemia de covid e contou com a participação de seis alunos do ensino fundamental, sendo dois do 8º ano e quatro do 9º ano.

Como o software GeoGebra foi utilizado durante todo o processo de aplicação da sequência didática, os dados provenientes da pesquisa foram coletados a partir das atividades respondidas pelos alunos e salvas na plataforma, além da transcrição das gravações dos encontros e de um diário de campo. Todo o processo de aplicação da sequência contabilizou 12 horas divididas em seis encontros.

O primeiro encontro buscou familiarizar os alunos com o software, apresentando os seus recursos e oportunizando atividades que apresentassem as janelas algébrica, 2D e 3D, utilizadas durante toda a sequência, mobilizando assim os registros gráfico e algébrico. O segundo encontro teve como objetivo trabalhar a visualização tridimensional através da rotação de pontos e segmentos de reta, utilizando e apresentando a ferramenta de controle deslizante para construção.

Os três encontros seguintes trabalharam em progressão, nos quais os alunos utilizam das ferramentas conhecidas e do conceito de rotação de pontos para analisar construções prontas e fazer suas próprias construções, exercitando habilidades de rotação nos três eixos.

O sexto e último encontro abordou todos os temas trabalhados anteriormente de modo a dar um fechamento à pesquisa, nele, os alunos partiram de imagens de superfícies de revolução tendo que descrever e construir os segmentos necessários, num segundo momento eles poderiam livremente escolher um objeto para realizar a construção, na espera que os alunos conseguissem aplicar todos os recursos e estratégias previamente desenvolvidos.

Toda a análise das atividades teve como foco as situações relevantes à luz do aporte teórico e procuraram responder a questão norteadora da pesquisa: “Quais as contribuições do GeoGebra no processo de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?” (Oliveira, 2021, p. 13)

Ao longo da aplicação da sequência didática, produto educacional de sua dissertação, foi possível observar que os alunos conseguiam verbalizar suas interpretações de maneira clara, porém não se expressavam tão bem quando incentivados a escrevê-la, ou seja, demonstravam domínio sobre a situação porém não conseguiam utilizar o registro de língua natural solicitado pela sequência.

Outro ponto levantado pela autora diz respeito às dificuldades encontradas nos primeiros encontros em relação a visão tridimensional e bidimensional, de modo que o tratamento não foi intuitivo, isso se deve ao fato de que até então os alunos tinham esse contato apenas através da observação e interpretação, passando agora a serem mais ativos em relação às construções.

Oliveira (2021) também destaca que as construções solicitadas no decorrer das atividades nem sempre ocorreram de maneira direta, os dados obtidos das respostas dos alunos geralmente eram resultados de uma sequência de tentativas baseadas em erro e acerto, vale ressaltar que a escolha do software GeoGebra foi muito importante nesse sentido, pois o mesmo possibilita as correções durante o processo de maneira fácil e prática.

Durante a análise dos dados obtidos, foi possível perceber que “no decorrer dos encontros, os alunos mostraram maior autonomia e melhor desempenho na realização das atividades, o que entendemos ser um indício de incorporação das habilidades de visualização” (Oliveira, 2021, p. 114), o que se mostra um resultado positivo em relação à aplicação da TRSS aliada ao ensino de geometria.

Todo trabalho de pesquisa de Oliveira (2021) utilizou o software GeoGebra para mobilizar os registros de representação envolvidos no conteúdo, considerando que as janelas algébrica, 2D e 3D eram trabalhadas a todo momento, mas vale ressaltar que a sequência didática era voltada ao ensino de alunos do 8º e 9º ano, alunos que já são bem habituados com o uso do plano cartesiano, o que não acontece com o público alvo do presente produto educacional, 6º ano, impossibilitando assim a utilização desse recurso do software.

Dois pontos da dissertação de Oliveira (2021) ganham destaque na elaboração do produto educacional desenvolvido, são eles as perguntas norteadoras e a progressão das construções realizadas pelos alunos. As perguntas norteadoras durante a sequência didática elevam a autonomia dos alunos durante o processo, considerando que elas os guiam durante as reflexões e análises, além disso, também estimulam a mobilização do registro de linguagem neutra para responder questões acerca do conteúdo.

Outro ponto que ganhou destaque foi a progressão do nível de atividades de construção pelo software, considerando que as atividades iniciais foram elaboradas com o intuito de familiarizar os alunos com os controles e ferramentas, levando-os a conseguir mobilizar diferentes registros no sexto e último encontro.

Rempel (2021), em sua dissertação intitulada “Tangram nos Livros Didáticos de Matemática: Um Estudo à Luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica”, se propôs a realizar uma pesquisa qualitativa e bibliográfica envolvendo três coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental, sem desenvolver um produto educacional em seu trabalho.

Como fundamentação teórica, a autora se baseia na TRRS esclarecendo e exaltando a importância das quatro apreensões geométricas: apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão sequencial e apreensão operatória.

No processo de escolha das coleções de livros didáticos de matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLDD do ano de 2020, a autora decidiu por analisar as três coleções já escolhidas pela rede municipal e estadual de educação de sua região, tendo como objetivo responder sua questão de investigação: “Como os olhares e as apreensões geométricas podem ser mobilizados em atividades que envolvem o tangram, em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental?” (Rempel, 2021, p. 14)

Partindo de uma pré-análise, foram identificadas duas maneiras de exploração do tangram dentro dos livros didáticos, sendo como recurso didático ou como figura geométrica, ou seja, como atividade que mobiliza a confecção e/ou manipulação física das peças ou apenas como imagem de apoio. Além disso, o tangram foi trabalhado em atividades voltadas ao aluno e também em sugestões de trabalho nos livros didáticos voltados ao professor.

A análise da primeira coleção de livros determinou que o tangram aparece nos quatro volumes, fato verificado apenas nesta coleção. No material do 6º ano, o tangram foi utilizado em três momentos: na classificação de triângulos e quadriláteros, em uma atividade cuja resolução partia da reprodução do seu molde e também em atividades de comparação entre medidas das áreas das peças.

Os materiais voltados ao 7º, 8º e 9º anos, apresentam o tangram em sugestões de atividade complementar no livro didático do professor. No 7º ano, apresentava a reprodução do tangram como formação de figuras associadas aos polígonos. Já no 8º ano, uma atividade que propõe calcular a medida da área de cada peça e também da figura formada. Enquanto isso, no 9º ano, a atividade sugerida utiliza seu molde para reconstrução de figuras semelhantes às imagens de alguns polígonos.

A segunda coleção de livros só apresenta o tangram nas suas versões disponíveis ao professor e além disso são identificadas apenas atividades para 6º e 8º ano. No material destinado ao 6º ano, o tangram é utilizado no estudo das frações, enquanto no 8º é utilizado como indicação para o estudo dos paralelogramos.

A terceira e última coleção de livros didáticos aborda o tangram somente no 6º e 7º ano do ensino fundamental. No material destinado ao 6º ano há uma atividade que apresenta o passo a passo da criação das peças por meio de dobraduras no capítulo destinado ao estudo de “Ângulos e Polígonos” e outra atividade que introduz o conceito de área no capítulo voltado às “Grandezas Geométricas”. Já no 7º ano, o tangram é utilizado no capítulo “Perímetro, Área e Volume”, apresentando um estudo sobre a equivalência de áreas.

Em todas as atividades a apreensão perceptiva estava presente, o que permitiu o reconhecimento das formas das subfiguras que compõem o tangram, esse fato é justificado pela autora ao considerar que o reconhecimento do formato das suas peças e do seu formato como um todo é imediato, sendo os conhecimentos perceptivos os primeiros a aparecerem quando há interação com figuras.

Além da apreensão perspectiva, a apreensão operatória também ganhou destaque por ser mobilizada na grande maioria das tarefas encontradas, considerando a potencialização de suas propriedades heurísticas e de visualização à medida que as peças eram reconfiguradas para a criação de diferentes figuras, ou seja, quando a operação semiótica de reconfiguração era executada nas peças do tangram.

Contrastando com as demais, a apreensão sequencial foi requerida em apenas uma atividade de uma das três coleções de livros didáticos, sendo mobilizada na construção do tangram por meio de um passo a passo com a utilização do registro das figuras, uma atividade elaborada para o 6º ano no material da terceira coleção de livros.

Num panorama geral, a análise das três coleções de livros didáticos de matemática resultou em apenas 13 atividades, sendo sete destinadas aos materiais dos alunos e seis atividades sugeridas no livro do professor. A análise também mostrou que a maior incidência de tarefas que envolvem o tangram é no 6º ano, que totaliza oito atividades, enquanto que a menor incidência está no 9º ano, com apenas uma atividade, mostrando que à medida que os anos de estudo avançam, o contato com o tangram diminui.

Contudo, a autora complementa que “por ser um material lúdico e atraente, o tangram pode desafiar o aluno a empregar diversas táticas e conhecimentos, ampliando o raciocínio lógico-matemático e desenvolvendo a percepção espacial” (Rempel, 2021, p. 88). Além disso, ela também enfatiza que todas as considerações de sua dissertação de mestrado dizem respeito às análises de apenas três coleções de livros didáticos de matemática, não podendo fazer a generalização para as demais coleções, ou seja, é possível que haja um número grande de atividades que abordem o tangram, possibilitando assim a interação entre alunos e os diversos conteúdos matemáticos.

Pela análise da dissertação de Rempel (2021), é possível perceber como um mesmo material matemático pode ser trabalhado de diversas formas, mas infelizmente ainda não é utilizado buscando exercer todo o seu potencial. A utilização do tangram foi realizada em conteúdos de geometria plana, grandezas e medidas, frações, porcentagens, entre outros, e mostrou como esse recurso didático, que mobiliza diferentes apreensões, pode e deve ser utilizado com mais frequência no processo de ensino-aprendizagem.

Procurando aprimorar o produto didático produzido no presente trabalho, procurou-se elaborar tarefas de construção e manipulação das peças de tangram em cada um dos três conteúdos, além disso, a utilização do material foi pensada de maneira a combinar os conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros, fazendo assim um apanhado geral ao final da sequência didática do professor.

A dissertação de Barros (2021), intitulada como “Entre o Plano e o Espaço: As Relações entre Figuras Planas e Espaciais em uma Coleção de Livros Didáticos de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental”, tem como proposta a realização de uma pesquisa qualitativa com delineamento documental pela análise de uma coleção de livros didáticos adotada pela Secretaria de Educação de sua região, sem o desenvolvimento de um produto educacional ao final do trabalho.

A escolha de uma análise documental de livros didáticos de matemática se fez ao considerar o material como grande fonte de conhecimento e ferramenta de auxílio ao professor:

o livro didático é um dos principais instrumentos e, ao mesmo tempo, uma fonte concentrada de informação impressa utilizada por grande parte dos professores e alunos nas escolas brasileiras. Tal característica permite inferir que o livro didático se configura como base para escolarização e o letramento de muitos discentes brasileiros (Barros, 2021, p. 61).

Revisando a literatura, Barros (2021) realizou uma pesquisa bibliográfica em dissertações e teses relacionadas ao tema, tendo o objetivo de compreender de que forma o assunto vem sendo abordado dentro da comunidade acadêmica, além disso, também consultou os documentos oficiais relacionados à educação, os quais deixaram claro seu incentivo ao uso de novas metodologias e técnicas de ensino no campo da Matemática.

Ao buscar suporte teórico e metodológico, a autora utilizou a TRRS de Duval para estudar as possibilidades proporcionadas pelas figuras bi e tridimensionais utilizadas nos livros e realizou suas análises à luz do modelo de Van Hiele acerca do ensino e da aprendizagem da geometria.

O modelo abordado foi desenvolvido pelo casal de professores Van Hiele em decorrência às suas preocupações quanto ao baixo rendimento de seus alunos no estudo da Geometria. Um ponto levantado na época como principal fator causador dessa dificuldade foram os diferentes níveis de aprendizagens encontrados em uma mesma sala de aula, assim, o modelo criado constitui em uma teoria cognitiva que avalia as habilidades do aluno em geometria, estabelecendo assim, cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico (Barros, 2021)

O nível um, também chamado nível básico, de visualização ou de reconhecimento, é o estágio inicial, onde os alunos se limitam às considerações visuais, ou seja, suas concepções de espaço e reconhecimento de figuras são adquiridos apenas pela aparência. Já no nível dois, tratado como análise, os alunos conseguem raciocinar sobre conceitos geométricos de forma informal, levando em conta suas partes e atributos, podendo distinguir características e perceber propriedades.

De modo a seguir uma hierarquia de níveis, na qual é possível verificar a progressão dos conhecimentos, no nível três, abstração, o pensamento geométrico dos alunos já os permitem fazer comparações entre propriedades, podendo relacionar figuras ou objetos ao estabelecer relações entre elas, porém sem construir discursos argumentativos por conta própria. Apenas no nível quatro os alunos compreendem o significado dessa dedução como forma de estabelecer a teoria geométrica, entendendo assim o papel dos teoremas e demonstrações utilizadas em aula, por esse motivo, o quarto nível leva o nome “dedução formal”.

O quinto e último nível, rigor, é aquele que o aluno consegue enxergar a geometria de forma abstrata, manipulando objetos independente do seu conteúdo ou da forma de registro empregada. A decisão de Barros (2021) foi utilizar os trabalhos de Van Hiele no sentido de que todo o novo conhecimento seja acompanhado nos conhecimentos anteriores, considerando a hierarquia dos cinco níveis de aprendizagem.

Os procedimentos metodológicos adotados tiveram como foco a análise dos quatro livros de matemática pertencentes à coleção adotada no estado do Paraná no ano de 2020, essa análise incluiu também o manual do professor, considerando a possibilidade desses apresentarem situações ou sugestões complementares ao material do aluno.

A organização da análise foi constituída de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, sendo a última responsável por destacar atividades que indicassem mobilização das apreensões geométricas, atividades que indicassem a preocupação em construir conhecimento novo a partir dos conhecimentos anteriores e de que forma o manual do professor contribuiu para auxiliar sua tarefa e sala de aula.

Com as análises feitas, foi possível a identificação de que apenas os volumes referentes ao 6º e 9º ano exploraram de forma sucinta os sólidos geométricos, tratando dos conceitos de bi e tridimensionalidade, que vai de encontro com as concepções elaboradas por Van Hiele, considerando que as tarefas geométricas precisam ser apresentadas em uma sequência que permite a progressão dos níveis. Desse modo, a construção do pensamento geométrico é realizada de maneira pouco significativa em relação a evolução dos níveis de aprendizagem.

Considerando a TRRS, a análise da coleção mostrou que o material atende consideravelmente o que foi estabelecido por Duval, no que se diz a presença e sincronia dos registros figurais e discursivos, bem como as apreensões da geometria. De modo geral as atividades que apresentavam os tratamentos discursivos e figurais nem sempre ocorriam de modo simultâneo ou interativo, o que interfere na compreensão e pode vir a comprometer a aprendizagem dos alunos.

A autora finaliza suas considerações ressaltando o professor como mediador do conhecimento, o qual tem o poder de decidir o que utilizaram ou não em suas aulas, nesse contexto, o livro didático não deve ser tratado como única fonte do conhecimento, pois, pela análise da coleção escolhida concluiu-se que:

a compreensão da transição entre conceitos geométricos planos para espaciais e vice-versa fica comprometida, pois tal passagem fica a cargo apenas do professor, pois em nenhum momento os autores apresentaram situações que favorecessem a transição do espaço para o plano (Barros, 2021, p. 89).

Toda discussão realizada por Barros (2021) ressalta novamente a importância da construção do conhecimento feita passo a passo, de modo gradativo, mas além disso, também mostra que o professor deve procurar diferentes fontes e materiais ao ensinar, pensando-se nisso, a construção de um produto educacional voltado às práticas pedagógicas de Geometria foi realizado neste trabalho, a fim de auxiliar o educador na construção do conhecimento de seus alunos.

Na dissertação de Conceição (2023), intitulada “A Abordagem de Triângulos em um Livro de Geometria Euclidiana Plana a ser Utilizado nas Licenciaturas em Matemática no Estado da Bahia: um Estudo a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica” a autora destaca a importância do livro durante o ensino superior e realiza um estudo com foco nos exercícios e problemas sobre triângulos em um livro de geometria plana voltado aos cursos de licenciatura em matemática, sem desenvolver um produto educacional atrelado ao seu trabalho.

A fim de discutir a importância da geometria sob o olhar de outros autores, mas também conhecer a realidade do tratamento dado aos triângulos nos livros do ensino superior, Conceição (2023) realiza uma revisão de literatura através de pesquisas de artigos em periódicos brasileiros, esta por sua vez revela que a maioria dos artigos encontrados não aborda conteúdos de triângulos voltados ao ensino superior, o que mostra a falta de preocupação dos pesquisadores acerca do tema, aumentando ainda mais a relevância de seu trabalho.

Além da revisão de literatura, a autora também aborda a sua fundamentação teórica atrelada ao estudo dos triângulos, de modo a explicitar conteúdos de geometria essenciais na formação de um professor de matemática, nesse capítulo ela destaca que o objeto geométrico triângulo pode se referir a vários conteúdos porém se restringe aos temas de congruência e semelhança de triângulos, considerando que o livro escolhido trata desses assuntos.

A outra parte da fundamentação teórica trata da TRRS e na sua importância no entendimento das dificuldades de ensino-aprendizagem da Geometria, além da contribuição que a teoria de Duval traz ao orientar todo o trabalho pedagógico de análise produzido, levando em conta os diferentes tipos de registros semióticos e as apreensões relacionadas ao ensino da Geometria.

Com o objetivo de compreender a abordagem de triângulos no livro de Geometria Euclidiana Plana mais mencionado no Projeto Pedagógico de Curso das Licenciaturas em Matemática das Instituições Públicas no Estado da Bahia, a autora recorreu a TRRS para analisar os avanços nas discussões de conceitos, exercícios e problemas ao analisar se estes contemplam os tratamentos, conversões e apreensões segundo Duval, para isso, duas edições do livro foram analisadas, a primeira de 1995 e a segunda de 2012.

A pesquisa realizada teve caráter qualitativo e se propôs a compreender a abordagem das duas edições do livro, toda a análise dos materiais foi feita capítulo a capítulo, trazendo imagens de suporte e textos de modo a comparar e explicitar as diferenças encontradas durante a leitura. Essa análise teve seu foco direcionado a dois capítulos das duas edições do livro, o capítulo quatro referente a congruência de triângulos e o capítulo sete que faz referência a semelhança de triângulos.

O início da análise de dados se deu por meio da elaboração de uma tabela na qual se nomeou e enumerou os elementos encontrados no decorrer dos capítulos dos dois livros, de forma geral a autora encontrou uma diferença no número de elementos de exercícios e problemas, em que a versão mais recente do livro teve um número maior de elementos apresentados, enquanto isso, o número de elementos de definições, axiomas, teoremas, proposições e provas se manteve o mesmo.

Ao final da análise à luz da TRRS de Duval, Conceição (2023) pode trazer suas considerações acerca do material encontrado ao verificar os dois livros em seus contextos teóricos do conteúdo, ambos apresentaram os registros discursivo, simbólico e figural, tendo geralmente o registro discursivo como partida (língua natural) e o registro simbólico como chegada, vale ressaltar que o registro figural foi encontrado em alguns momentos em conjunto com o discursivo como partida, porém, em nenhum momento foram encontrados conteúdos de exercícios ou problemas com a passagem inversa desses registros.

Em relação aos exercícios e problemas que envolvem a construção da representação de um triângulo, um número muito pequeno de questões foi encontrado, 11,9% no livro de 1995 e 2,2% no de 2012, esse dado mostra que as apreensões geométricas não foram mobilizadas de maneira efetiva no decorrer dos livros.

Ao abordar as questões de construção de um triângulo, as apreensões perceptiva e sequencial seriam mobilizadas ao fazer o aluno seguir as instruções para a construção deste registro figural a partir do discursivo, enquanto isso a apreensão operatória surgiria pelo tratamento da figura e a apreensão discursiva pela explicação das propriedades e definições.

A autora também levanta a hipótese de que, ao utilizar livros com pouca quantidade de construções de triângulos durante o ensino superior, o ensino básico pode ser afetado, considerando que os autores de livros didáticos voltados ao ensino fundamental ou médio são formados em matemática e, por não vivenciarem ou ter tido pouca vivência em questões que envolvem a construção geométrica, acabam levando isso às suas produções, Conceição (2023) deixa claro que suas hipóteses necessitam de um estudo mais aprofundado, e deixa como recomendação para futuros trabalhos.

Outro ponto levantado pela autora foi a falta de mudanças ou acréscimos no decorrer do texto sobre os conceitos geométricos abordados, de modo que em ambas as edições os textos eram idênticos.

Mesmo tendo o intuito de ser um material que expusesse uma visão mais ampla do que seria ensinado na educação básica, a autora aponta que o livro “não possibilita para que o professor realize uma transposição didática do objeto geométrico triângulo para um saber a ser ensinado, já que não é discutido ou demonstrado o sentido inverso (ida e volta) segundo a TRRS.” (Conceição, 2023, p. 83).

A partir da dissertação produzida por Conceição (2023), é possível entender como a formação de licenciandos em matemática, no qual os conteúdos matemáticos deveriam ser explicados de forma ampla e completa, ainda demonstra a existência de lacunas no processo de ensino-aprendizagem, o que leva a falta de conhecimento em relação aos registros de representação que poderiam estar sendo aplicados e trabalhados no ensino básico como aliados do futuro professor.

Sua dissertação incentiva a produção de um Produto Educacional voltado às práticas do professor, apresentando-os à TRRS e expondo maneiras diferentes de se trabalhar com essa teoria a fim de promover o ensino dos seus alunos.

Facundo (2023), em sua dissertação intitulada “Alguns Conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio: Uma Abordagem Vetorial baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica”, tem o objetivo de apresentar diferentes conteúdos de Geometria Analítica, de modo a fazer um contraponto entre duas diferentes maneiras de abordagem do conteúdo no contexto do ensino médio, uma delas realizada por meio de coordenadas cartesianas e a outra por meio do uso de vetores.

O autor utiliza da TRRS para obter uma compreensão geral de como pode abordar conteúdos geométricos em sala de aula, além de colaborar na formação inicial e continuada do professor de matemática, oferecendo instrumentos necessários para chegar aos seus objetivos de modo mais efetivo.

A estrutura elaborada por Duval é enfatizada no que se diz a importância dos diferentes tipos de registros utilizados nas representações matemáticas, suas relações e manipulações, para Facundo (2023). Sob a perspectiva da TRRS é possível obter uma melhor compreensão do significado e da estrutura dos conceitos matemáticos, fazendo com que o ensino da geometria se torne mais eficaz.

Depois de suas considerações acerca da TRRS, o autor apresenta uma breve descrição da relação da geometria e dos vetores com a BNCC, no qual expõe a teoria de Duval como proposta de ensino a fim de abordar o conteúdo proposto no documento oficial, buscando alcançar as habilidades estabelecidas pelo mesmo e diversificar as atividades práticas, utilizando os variados registros de representação para tal.

Tendo a finalidade de desenvolver atividades voltadas ao ensino da Geometria Analítica, Facundo (2023) apresenta, no terceiro capítulo de sua dissertação, conceitos, definições e operações com vetores, conteúdos necessários para o desenvolvimento das demonstrações e tarefas propostas ao final de seu trabalho. Neste terceiro capítulo são abordando os temas de produto escalar, projeção ortogonal, ângulo entre vetores, soma de vetores, entre outras definições e operações.

Durante a apresentação desses conceitos e definições, o autor utiliza os diferentes tipos de registro de representação, como uma preparação para as atividades que se propôs a construir no final do trabalho, seu produto educacional. Ao todo são mobilizados registros discursivos, numéricos e figurais, se apropriando de definições, notações matemáticas, plano cartesiano e demonstrações em geral.

As atividades propostas por Facundo (2023) foram divididas em quatro categorias, são elas: Área de um triângulo, Distância de ponto reta, Ângulo entre retas e Condição de alinhamento de três pontos. Cada um dos conteúdos geométricos apresenta duas formas de abordagem, uma utiliza das coordenadas cartesianas e a outra dos vetores, ao final de cada categoria, o autor usa como exemplo a resolução de uma questão proveniente de vestibulares e/ou exames de admissão, para assim mostrar como as duas formas de abordagem podem ser escolhidas no processo de resolução de uma questão de Geometria Analítica, de maneira a exemplificar a existência de novos caminhos para se encontrar uma resposta.

A área de um triângulo é a primeira categoria trabalhada nas propostas de atividade, Facundo (2023) explora esse tema utilizando coordenadas a partir de uma conversão de registro gráfico para algébrico, na qual a área do triângulo é determinada a partir da área de um retângulo, já na abordagem utilizando vetores, o autor utiliza de projeções ortogonais para determinar a altura do triângulo e assim, conseguir determinar sua área, também utiliza da conversão de registro gráfico para registro algébrico dos vetores utilizados. O autor finaliza suas considerações sobre a categoria, através da resolução de uma questão adaptada do vestibular da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, utilizando as fórmulas obtidas anteriormente .

A segunda categoria abordada trata da distância de ponto à reta, ao tratar das coordenadas ele calcula a distância a partir de uma reta perpendicular, já ao tratar dos vetores utiliza novamente da projeção ortogonal, em ambos os casos o autor utiliza da conversão do registro gráfico para o algébrico. Suas considerações acerca da categoria finalizam com a resolução de uma questão adaptada do exame de admissão da Escola de Especialistas de Aeronáutica.

Ângulo entre retas é abordado na terceira categoria, utilizando coordenadas Facundo (2023) expõe os conceitos e demonstrações através do uso de registros figurais e divide as demonstrações em três casos, já na utilização de vetores, opta por uma abordagem única utilizando o tratamentos algébricos. Para finalizar a categoria, resolveu uma questão adaptada do vestibular da Universidade de Pernambuco.

A quarta e última categoria trata da condição de alinhamento de três pontos, o qual o autor utiliza dos elementos do registro gráfico e de tratamentos algébricos para chegar na resolução, ao utilizar coordenadas, abordando apenas a conversão do registro gráfico para o registro algébrico na etapa de utilização dos vetores. As atividades são finalizadas novamente pela resolução de uma questão da Universidade Católica do Rio de Janeiro.

De modo geral, as principais habilidades desenvolvidas através das atividades propostas são: Tratamento algébrico; Conversão de registros algébricos e geométricos; Reconhecimento de figuras geométricas no plano cartesiano; Operação com vetores.

O autor finaliza suas considerações apresentando sua vontade de aplicar as atividades desenvolvidas em uma turma de ensino médio, avaliando assim sua aplicabilidade e eficácia, além disso, destaca que não propõe uma mudança na forma de ensinar a geometria analítica, apenas apresenta alternativas diferentes de abordagem.

Mesmo tratando de um conteúdo matemático do ensino médio, Geometria Analítica, a dissertação de Facundo (2023) traz grandes contribuições ao presente trabalho, principalmente no que se diz sobre a resolução de questões por duas abordagens diferentes, desenvolvendo liberdade e autonomia no aluno ao resolver tarefas.

Ao trabalhar com diferentes registros de representação, aumentam as possibilidades de resolução de uma questão, o que facilita a compreensão do conteúdo de maneira geral e o enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem da geometria, pontos levantados pelo autor e considerados na elaboração do presente produto educacional, no qual um material voltado ao ensino de ângulos, triângulos e quadriláteros será elaborado.

As leituras e análises das 15 dissertações e da única tese tiveram grande importância para o andamento do presente trabalho, sem essas produções acadêmicas não seria possível entender de que forma a TRRS pode ser abordada em salas de aula do ensino básico, considerando que não houve nenhuma aplicação de sequências didáticas no trabalho.

Como finalização da revisão de literatura, retomam-se as cinco perguntas comentadas no início do capítulo: Qual a metodologia escolhida? Qual a fundamentação teórica usada no trabalho? Qual a contribuição para o processo de ensino e de aprendizagem? De que forma a Teoria de Registro de Representação Semiótica foi abordada? Foi produzido um material educacional?

A primeira pergunta trata da metodologia escolhida pelo autor em seu trabalho. Através das leituras e análises foi possível identificar que a metodologia qualitativa foi utilizada em todos os materiais, o que condiz com a pesquisa por dissertações e teses relacionadas ao estudo de Geometria combinado com a TRRS. Vale ressaltar a utilização da metodologia da engenharia didática atrelada à pesquisa qualitativa em três dissertações, de Martinelli (2017), Berlanda (2017) e Arinos (2018), como forma de combinar as observações e análise das atividades de ensino com a prática docente. A fundamentação teórica utilizada nos trabalhos foi o foco da segunda pergunta e, através das leituras, foi possível perceber que na grande maioria dos casos a TRRS e temas envolvendo os conteúdos de geometria foram os mais utilizados.

A terceira pergunta teve como objetivo entender a contribuição que os trabalhos apresentaram para o ensino e aprendizagem dos conteúdos, assim se tornam importantes aqueles com foco em aplicações de sequências didáticas, pois através do uso da TRRS conseguiram obter avanços dos seus resultados com alunos e/ou professores.

De modo a responder a quarta pergunta, notou-se que a TRRS foi abordada de diferentes formas nos trabalhos analisados. Em algumas dissertações a teoria foi utilizada na construção de sequências didáticas, já em outras, foram o foco na busca por tarefas em materiais pedagógicos. Em ambos os casos, a teoria de Duval foi apresentada em todos os trabalhos de modo a apresentar a história, os conceitos envolvidos e os resultados encontrados.

A quinta e última pergunta faz referência à produção, ou não, de um material educacional atrelado ao trabalho. Pelas leituras e análises foi possível considerar que a tese de doutorado e outras 10 dissertações apresentaram ao final do seu trabalho um produto educacional voltado ao ensino de Geometria atrelado TRRS, mas vale ressaltar que a grande maioria destes materiais caracterizam-se como a sequência didática utilizada em cada pesquisa.

Todo o material analisado contribuiu para o desenvolvimento do produto educacional de nome “Ângulos, Triângulos e Quadriláteros: Caderno de Tarefas baseado na Teoria de Registros de Representação Semiótica”, desenvolvido durante todo o processo de leitura dos trabalhos acadêmicos e direcionado ao estudo de Geometria para o 6º ano do ensino fundamental.

No seguinte capítulo, o produto educacional será apresentado de forma a retomar argumentos trazidos na revisão de literatura como base para a criação das tarefas produzidas.

## 5 PRODUTO EDUCACIONAL

Tendo em vista a importância dada ao estudo da Geometria no ensino da Matemática e o seu eventual abandono por parte de professores e comunidade escolar, se teve a ideia de construir um material de apoio ao ensino do conteúdo matemático com o auxílio da TRRS. O material de nome “Ângulos, Triângulos e Quadriláteros: Caderno de Tarefas baseado na Teoria de Registros de Representação Semiótica” disponibiliza tarefas referentes aos conteúdos de ângulos, triângulos e quadriláteros abordados no sexto ano do ensino fundamental, de modo a promover a coordenação de vários registros de representação.

É importante ressaltar que a utilização do termo ‘tarefa’ faz referência a qualquer coisa solicitada pelo professor a qual cabe o aluno realizar, não sendo apenas um problema, pois dependendo da interpretação do aluno, suas características podem mudar, por outro lado, o termo ‘atividade’ é tido como a resposta do aluno, a ação do mesmo em responder a tarefa solicitada (Swan, 2014). Por esse motivo, no decorrer do produto educacional produzido, apenas o termo ‘tarefa’ ou ‘sequência de tarefas’ será utilizado.

A partir das análises feitas em 16 trabalhos acadêmicos que abordam o ensino de diferentes conteúdos geométricos atrelados à TRRS, foi possível reunir as informações importantes para elaboração e construção do produto educacional, utilizando de resultados, ideias e sequências didáticas produzidas, aplicadas e analisadas nas 15 dissertações de mestrado, bem como na única tese de doutorado.

Vale ressaltar que nem todos os trabalhos acadêmicos analisados apresentaram a aplicação de alguma sequência didática voltada à formação de alunos do ensino básico, ou então de professores de Matemática, seis trabalhos de dissertação se propuseram a analisar o material didático utilizado no ensino da Geometria, os livros didáticos, investigando se os registros de representação estão sendo mobilizados e, em casos afirmativos, se essa utilização está sendo feita de modo satisfatório e de que modo o material didático orienta o professor quanto a sua utilização. Destacam-se aqui as dissertações de mestrado de Silva (2014), Arcego (2017), Rempel (2021), Barros (2021), Conceição (2023) e Facundo (2023).

Um exemplo disso é o trabalho de Silva (2014), que verificou em diferentes coleções de livros didáticos, que muitos materiais não apresentam a definição de triângulos e, além disso, muitos dos registros de representação utilizados não exploram a diversidade dos triângulos, o que poderia condicionar o aluno a entender erroneamente o objeto matemático triângulo como a sua representação, essa sendo feita através do registro figural de um triângulo equilátero, tendo assim pouca variabilidade quanto ao comprimento dos lados e a medida dos ângulos, mas também quanto a posição relativa na página.

Arcego (2017) também pode identificar pouca mobilização concomitante de diferentes tipos de registro em suas análises, mas além disso, constatou que a falta dessas mobilizações nos livros didáticos era trazida também aos cadernos dos alunos e as aulas dos professores, mostrando uma grande dependência do livro didático.

Outros trabalhos como os de Barros (2021) e Conceição (2023) também mostraram que a seção voltada ao conteúdo geométrico propõe poucas tarefas que envolvam construções, relacionadas às apreensões sequenciais em Geometria, além disso as tarefas que envolvem planificações e explorações também são pouco encontrados. Barros (2021) complementa ao tratar da reorganização de um livro didático de modo a promover o ensino da Geometria, considerando que este conteúdo matemático está sempre nos últimos Capítulos dos materiais didáticos utilizados pelos professores.

A importância do livro didático para o processo de ensino-aprendizagem dentro do ensino básico já é de conhecimento geral. Muitos professores o utilizam de forma a complementar sua sequência didática, porém outros criam uma relação de completa dependência com esse material. Tendo conhecimento desse fato e de que nem sempre um livro didático pode abordar os conteúdos apresentados fazendo uso da mobilização concomitante de diferentes representações, justifica-se a criação e elaboração de um produto educacional que auxilie o professor na elaboração de seu plano de aula com o uso da TRRS.

Mesmo que os livros didáticos propostos pela comunidade escolar possuam tarefas que utilizam os mais diversos tipos de registros de representação, é importante entender que cabe ao professor a função de fazer com que seus alunos utilizem e se beneficiem das atividades propostas. O aluno dificilmente conseguirá reter as informações necessárias se não tiver uma boa base e orientação por parte do seu professor, logo é necessário que a formação de professores, seja ela inicial ou continuada, possibilite que esse educador tenha contato com teorias educacionais, como a de Duval.

Quatro autores propuseram em seus trabalhos acadêmicos a aplicação de sequências didáticas voltadas à formação do docente de matemática, são eles: Moran (2015), Pagliarini (2016), Corrêa (2017) e Santos (2020).

Pagliarini (2016) exemplifica bem a relação de professores com a TRRS. Durante a aplicação de sua oficina ele confirmou sua suspeitas quanto ao desconhecimento da teoria de Duval pelos professores, mas após a aplicação pode perceber que os docentes entenderam a razão e a importância do trânsito entre as diferentes formas de registro. Segundo relatos coletados a maioria dos participantes acredita que:

se conseguirem fazer com que os educandos visualizem um mesmo objeto matemático sob diferentes formas, ou seja, consigam fazer o trânsito entre as diferentes representações com o objeto em questão, um grande passo será dado no sentido de garantir que o aluno se aproprie do conhecimento (Pagliarini, 2016, p. 95).

Tendo consciência de que muitos professores de matemática não têm conhecimento acerca da teoria de Duval, uma breve explicação foi adicionada no produto educacional como forma de apresentar TRRS e como ela pode ser utilizada em sala de aula. Além disso, cada tarefa desenvolvida no produto tem uma breve explicação de como pode ser utilizado em sala de aula, trazendo estratégias de aplicação e de construção e/ou produção do material.

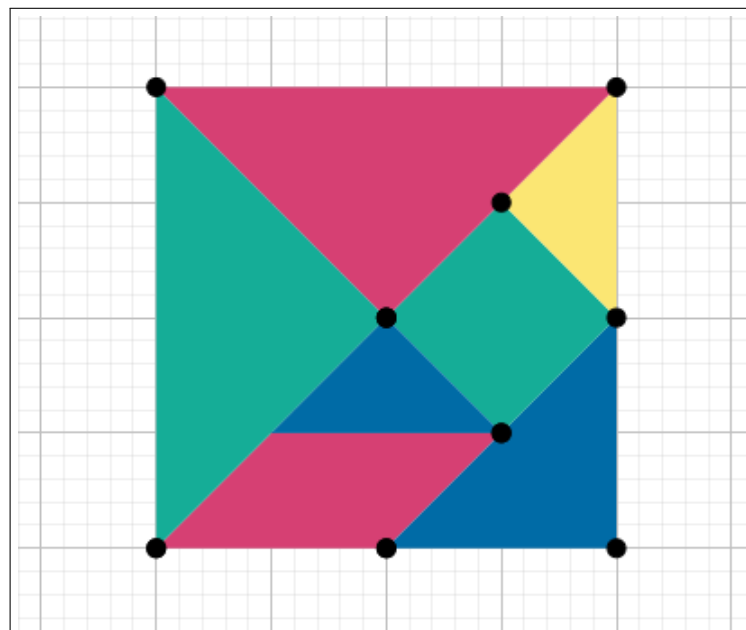
Todos os trabalhos acadêmicos analisados no capítulo de revisão de literatura tiveram grande importância no desenvolvimento do produto educacional, mas aqueles que desenvolveram uma aplicação de sequências didáticas com alunos e se propuseram a analisar os resultados alcançados foram as que mais contribuíram para a produção do material, pois proporcionaram uma análise de como as tarefas envolvendo diversos registros podem ser aplicados, de que maneira funcionam, quais os desafios enfrentados etc. Nessa perspectiva, destacam-se os autores Pagliarini (2016), Martinelli (2017), Berlanda (2017), Silva (2017), Arcego (2017), Barbosa (2018), Arinos (2018) e Oliveira (2021).

Com o intuito de facilitar a conversão das representações dos objetos trigonométricos, Pagliarini (2016) elaborou em sua sequência didática o uso de um material manipulável, despertando a curiosidade dos seus alunos sobre o assunto e permitindo que eles desvinculassem a trigonometria ao uso restrito de fórmulas.

Compreendendo-se que um objeto matemático possui diferentes formas de ser representado e aceitando-se que algumas dessas representações podem ser demonstradas através da utilização do Material Manipulável (Pagliarini, 2016, p. 37).

A primeira tarefa do presente produto educacional produzido que mobilizou o material manipulável utilizou das peças de Tangram para medição de ângulos internos de triângulos e quadriláteros, ilustrado na Figura 3, tendo o conhecimento da medida de apenas um ângulo de uma peça, os alunos eram orientados a descobrir os ângulos internos de todas as outras peças através de manipulações como rotação, ampliação e sobreposição.

Figura 3 – Ângulos do Tangram



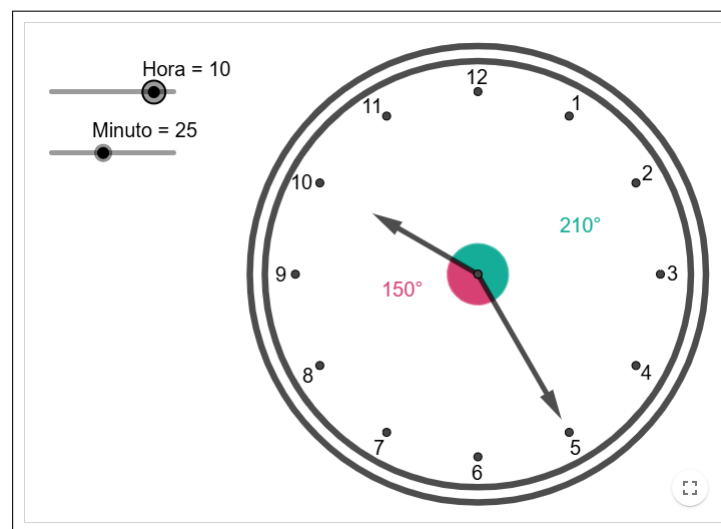
Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Vale ressaltar que as peças do Tangram representadas no applet sofriam modificações pelas manipulações, mas mantinham as medidas de seus ângulos e a proporção de seus lados.

A segunda tarefa utilizou um relógio de ponteiro como material manipulável, como mostra a Figura 4, seu objetivo era trabalhar o conceito de ângulo como volta completa ou incompleta, de modo a estudar os ângulos formados pelos ponteiros dos relógios.

A tarefa dispõe de várias questões norteadoras que obrigam o aluno a realizar as manipulações necessárias nos ponteiros das horas e dos minutos, representando assim diversas aberturas de ângulo, em diversas posições relativas ao relógio. Como exemplo pode-se trabalhar os casos em que os ponteiros do relógio formam dois ângulos rasos, ou então um ângulo nulo e um ângulo completo, é importante ressaltar que as questões norteadoras podem ser de múltipla escolha ou então como questão aberta.

Figura 4 – Ângulos de um Relógio



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Considerando que os conceitos de ângulos complementares e suplementares não são abordados no 6º ano pela BNCC, esses conteúdos não foram introduzidos na tarefa, apenas algumas questões de investigação e reflexão. Como os ponteiros do relógio formam dois ângulos suplementares, o material manipulável dispõe de duas cores para diferenciá-los, cores essas também utilizadas no ângulo de abertura de ambos.

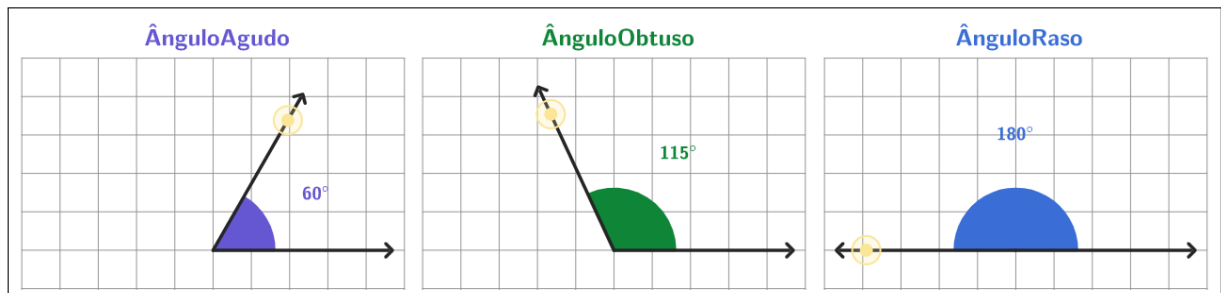
A última tarefa que utiliza de material manipulável para o conteúdo de ângulos é feita através de um applet que apresenta a classificação do ângulo, através da manipulação dos alunos, dessa forma o applet apresenta a classificação do ângulo conforme o aluno controla o cursor presente em um de seus lados.

Na Figura 5 é possível perceber o applet em três momentos diferentes, em que através do cursor do computador, o aluno pode aumentar ou diminuir a abertura do ângulo, o que muda a cor do mesmo, sua medida de abertura em graus e sua classificação.

Novamente perguntas norteadoras são utilizadas a fim de direcionar o aluno e auxiliá-lo no seu processo de aprendizagem, através delas o aluno é levado a manipular o applet de determinada forma a fazê-lo responder os questionamentos.

Por conta da programação que o applet do GeoGebra apresenta, não foi possível que as classificações de ângulo nulo e completo fossem acrescentadas na tarefa, pois o cursor do aluno estaria na mesma posição e classificaria ao mesmo tempo um ângulo nulo e um ângulo completo, o que poderia confundir o aluno. Mesmo com esse pequeno problema, as duas classificações foram mencionadas nas perguntas norteadoras.

Figura 5 – Classificação de Ângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Um ponto interessante da utilização do software GeoGebra, é que o livro produzido e disponibilizado pelo presente produto educacional proporciona ao professor utilizar as tarefas adequando-as e modificando-as se necessário, além disso, o docente também consegue visualizar, em tempo real, a resolução das atividades pelos seus alunos.

A utilização de softwares foi observada nas dissertações de Martinelli (2017) e Berlanda (2017), todas as suas análises referentes ao uso dos GeoGebra se mostraram positivas em relação a teoria de Duval, tanto pela fácil mobilização de diversos registros de representação semiótica pelo tratamento figural, como pela facilidade de exploração e articulação de registros algébricos e geométricos.

A utilização de softwares no ensino da matemática vem crescendo e se encontra em constante evolução, até mesmo para Duval, o autor da TRRS, os softwares são considerados positivos e o seu uso é incentivado.

De um ponto de vista cognitivo, os softwares trazem três grandes inovações. A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela (...). Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! (Freitas; Rezende, 2013, p. 32).

Para os conteúdos de triângulos e quadriláteros do presente produto educacional foi possível a elaboração de tarefas que utilizassem materiais manipuláveis na sua forma física, as duas tarefas são bem semelhantes e tratam da medição e classificação dos polígonos, toda a tarefa é elaborada de modo que os alunos, em equipes, utilizem ferramentas como régua e transferidores para classificar as peças.

Enquanto a tarefa voltada ao conteúdo de triângulos aborda a classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos internos de cada peça, a tarefa voltada ao conteúdo de quadriláteros aborda a classificação entre trapézios e paralelogramos.

Na Figura 6 é possível observar como seria a realização dessa tarefa no conteúdo de triângulos, na imagem as peças são feitas a partir de um corte a laser de uma placa de MDF, mas para o produto educacional foram disponibilizadas ‘páginas para impressão’, dessa forma o professor consegue imprimir as peças em um material mais acessível, a folha de tamanho A4.

Figura 6 – Medição e Classificação de Triângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Além das páginas para impressão, o produto educacional também dispõe de uma tabela, na qual os alunos registram os dados coletados através de suas medições, e também de um gabarito, no qual o docente consegue corrigir a resolução dos alunos de maneira mais prática ao guiar-se pelo nome dado a cada peça.

O produto educacional produzido também é constituído de tarefas relacionadas à construções geométricas norteadas por um passo a passo, dessa forma as tarefas de construção de ângulos e polígonos resultam na conexão entre as apreensões discursiva e sequencial, sendo que a última corresponde à ordem de como ocorre a produção da figura.

As tarefas aparecem nos três conteúdos abordados e estimulam os alunos a construir ângulos, triângulos e quadriláteros através do uso do software GeoGebra, mas também a partir de ferramentas como régua, compasso, esquadro e transferidor, como mostra a Figura 7.

Vale ressaltar que no capítulo direcionado ao estudos dos ângulos, foram abordadas as construções de ângulos a partir de uma medida de abertura dada em graus, e também as medições de ângulos em figuras geométricas.

É importante destacar que todas as tarefas que envolvem a construção de ângulos, triângulos ou quadriláteros sempre se iniciam com uma construção em conjunto com o professor, é indicado que o docente realize sua própria construção no quadro (se possível), tendo assim o efeito de suporte para seus alunos.

Após essa primeira construção, os alunos são convidados a realizar outras, agora sem o auxílio do professor, tendo como amparo apenas os passos de construção, as novas medidas e a primeira construção realizada, O que demanda uma maior responsabilidade e independência dos alunos.

Essas atividades contam com um passo a passo a ser seguido para cada construção realizada, nesses passos os registros de língua natural e numérico são mobilizados. Cabe ao aluno identificar, pelos registros numéricos, os elementos do objeto matemático em construção e, pela língua natural, seguir as orientações de desenho.

Figura 7 – Construção de um Trapézio

**TRAPÉZIO**

Vamos construir um trapézio de altura igual a 8 cm, base maior igual a 15 cm e base menor igual a 10 cm.

1º passo: Começamos traçando um segmento de reta AB com medida igual a 15 cm, esta será a base maior do trapézio.

2º passo: Com auxílio do esquadro, traçamos uma reta perpendicular à base maior, esta será a altura do trapézio, portanto tem medida igual a 8 cm.

3º passo: No topo do segmento da altura, traçamos outro segmento perpendicular CD (com o auxílio do esquadro), este segmento será a base menor do trapézio, logo deve medir 10 cm.

4º passo: Ligando os pontos iniciais e finais dos segmentos AB e CD, encontramos o trapézio ABCD.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

A mobilização desses dois registros, assim como o tratamento entre eles são considerados por Duval (2009) os mais privilegiados dentro do ensino, dentre os motivos atrelados a esse privilégio está a existência de regras para realizar atividade de tratamento dos registros, como da língua natural para o registro numérico, por outro lado a conversão na maioria das vezes não dispõe das mesmas regras, e além disso suas regras mudam conforme o sentido da mudança de registro se altera.




Quanto ao registro da língua natural, é possível dizer que:

A grande variedade de tipos de discursos que ela permite produzir depende de operações irredutíveis a uma gramática ou a regras. A utilização da língua não tem nada a ver com o funcionamento de um sistema formal. Ela repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas e que todo ato de expressão e de compreensão de um discurso produz mobilizando os diversos graus (Duval, 2011, p. 76).

Em relação aos registros numéricos, é possível encontrá-los dentre os mais variados meios de representação discursiva, o que os diferem dos demais é o fato de que seus tratamentos realizados são principalmente algoritmos e seus sistemas de escrita podem ser da forma binária, decimal, fracionária etc.

Nas tarefas de construções que utilizam o software GeoGebra, outro registro foi mobilizado além da língua natural e do registro numérico, no caso o registro figural. Esse registro foi mobilizado dentro das orientações de construção em língua natural de modo a utilizar figuras que representam os ícones do software, como mostra a Figura 8, dessa forma o aluno consegue se orientar melhor na interface do programa.

Figura 8 – Construção de um Retângulo pelo Geogebra

Passos
1) Crie o ponto $A$ em qualquer lugar do plano.
2) Criar a base desse retângulo, utilizar a ferramenta <b>Segmento com Comprimento Fixo</b>  , situada no terceiro conjunto de ferramentas. Ao selecionar ela, clique no ponto $A$ e digite o comprimento 12, assim a ferramenta criará o ponto $B$ de modo que $\overline{AB} = 12$ .
2) Utilizando a ferramenta <b>Reta Perpendicular</b>  , situada no quarto conjunto de ferramentas, crie duas retas perpendiculares à $\overline{AB}$ , uma que por $A$ e outra que passe por $B$ , dessa maneira garantimos que os ângulos internos do quadrilátero são retos.
3) Trace dois círculos de raio igual a 8, um centrado em $A$ e outro em $B$ .
4) Marque o ponto $C$ na interseção do círculo de centro em $B$ com a reta que passa por $B$ .
5) Marque o ponto $D$ na interseção do círculo de centro em $A$ com a reta que passa por $A$ .
6) Já tendo o quatro vértices do quadrilátero, basta utilizar o ícone  para finalizar a construção.

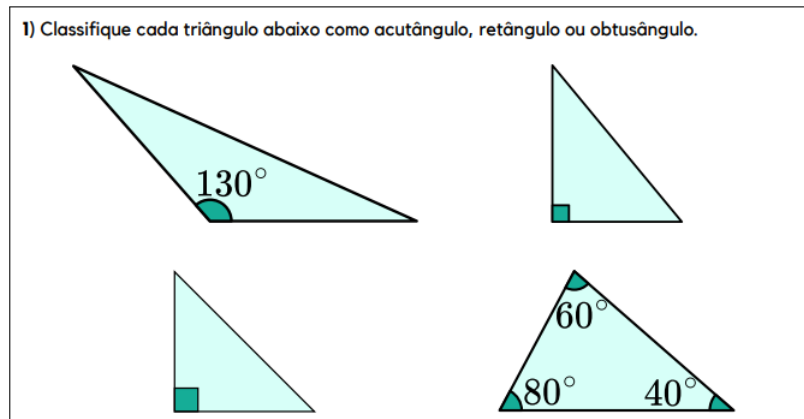
Fonte: Elaborado pela autora (2024).

No que se tem sobre as representações figurais, seu papel dentro do ensino de matemática, principalmente na Geometria, auxilia a compreensão e resolução de problemas, “a imagem ou figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária” (Moran, 2015, p. 30.), de modo que a representação figural pode oferecer novas perspectivas ao aluno, sem abandonar a proposta do texto.

A grande maioria das tarefas produzidas no produto educacional mobiliza os registros figural, numérico e de língua natural, porém o sentido empregado nas transformações nem sempre é o mesmo, as questões de classificação de ângulos e triângulos ilustradas abaixo nas Figuras 9 e 10 são exemplos disso.

A questão de classificação de triângulos tem como registros de partida o figural, o numérico e o de língua natural, contemplando o enunciado da questão, o registro de chegada é apenas o de língua natural. Já a questão de classificação de ângulos tem uma variação entre os registros de partida e de chegada, que variam entre língua natural e numérico. É importante ressaltar que o conceito por trás de ambas as tarefas é o mesmo classificar um objeto matemático a partir de uma característica dada de um determinado registro.

Figura 9 – Questão de Classificação de Triângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Enquanto a Figura 9 ilustra uma conversão de um registro de representação figural para a língua natural, a Figura 10 mostra a conversão do registro da língua natural para o registro numérico, ou vice-versa.

Figura 10 – Questão de Classificação de Ângulos

1) Complete a tabela abaixo a partir das classificações de um ângulo:

CLASSIFICAÇÃO	DEFINIÇÃO
NULO	
AGUDO	
	= 90°
OBTUSO	
RASO	
	> 180°
	= 360°

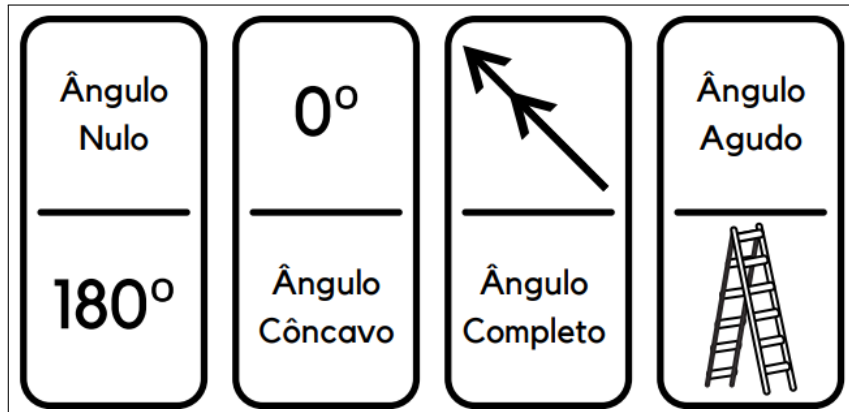
Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O primeiro jogo produzido relacionou o conteúdo de ângulos com o jogo de dominó, como mostra a Figura 11, a escolha foi feita considerando a mudança dos sete números de um jogo de dominó tradicional pelas sete classificações dos ângulos, porém, essas classificações foram apresentadas de maneira a mobilizar três tipos de registro.

Dessa forma, uma peça do dominó que fizesse referência ao ângulo agudo poderia levar o termo ‘ângulo agudo’ (registro de língua natural), uma figura que representasse uma abertura entre 0° e 90° (registro figural) ou simplesmente a medida em graus dessa abertura (registro numérico).

Assim, os alunos mobilizam os três tipos de registro ao mesmo tempo, sendo que não há distinção no jogo entre os registros utilizados para representar uma mesma classificação de ângulo, ou seja, qualquer peça pode ser utilizada desde que represente a mesma classificação de ângulo daquela peça que já está na mesa.

Figura 11 – Jogo de Dominó com Ângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O segundo jogo foi produzido como tarefa referente ao conteúdo de triângulos e tem como base o jogo UNO, suas regras assemelham-se muito ao jogo original, no qual as cartas possuem quatro cores diferentes que podem ser usadas para se relacionar além do objeto matemático contido em cada carta, porém, ao invés dos números de zero a nove, as cartas apresentam as seis classificações que um triângulo pode ter.

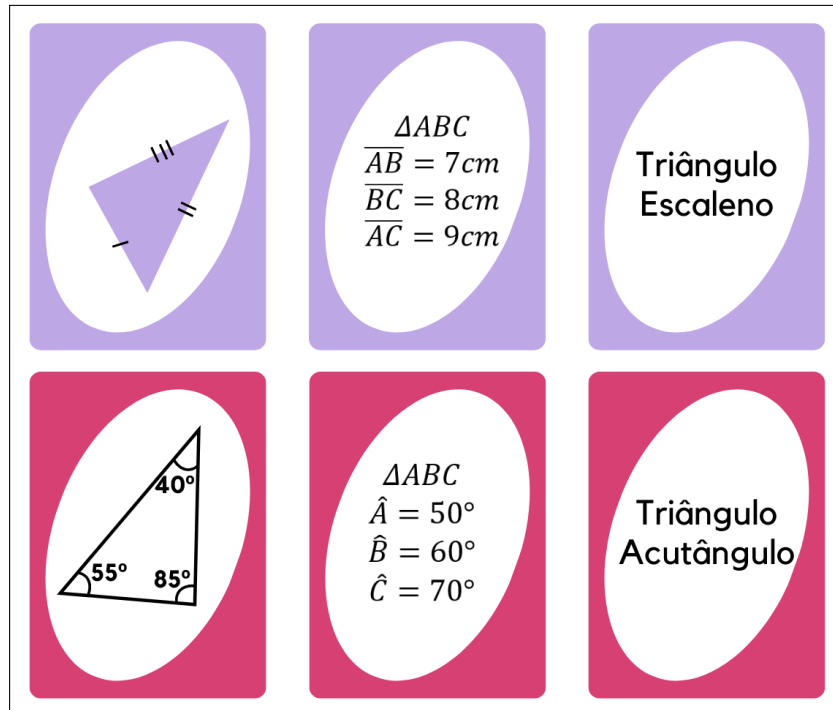
Dessas seis classificações apresentadas nas cartas, três fazem referência à medida dos ângulos internos de um triângulo (logo um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo) enquanto as outras três classificações são referentes às medidas de seus lados (triângulo equilátero, isósceles ou escaleno).

É importante salientar que, por se tratar de um material pedagógico voltado ao sexto ano, as relações entre as duas classificações dos triângulos ainda não são mencionadas, seguindo as habilidades estabelecidas pela BNCC, dessa forma mesmo que um triângulo equilátero tenha todos os seus ângulos de medida igual a  $60^\circ$  e possa ser classificado também como um triângulo acutângulo, uma carta que faz referência ao triângulo acutângulo não pode ser posta em cima de uma carta referente ao triângulo equilátero, ou vice-versa. Esse fato também consta nas orientações voltadas ao professor, que também orienta que a sobreposição dessas cartas só pode ocorrer se ambas tiverem a mesma cor, uma regra já estabelecida pelo jogo tradicional.

Na Figura 12 é possível visualizar algumas das cartas do jogo, cartas essas que mostram triângulos escalenos e triângulos acutângulos com suas representações sendo mobilizadas, novamente, por três registros de representação: registros figural (imagens de triângulos que indicam as medidas dos seus ângulos internos ou a relação entre a medida de seus lados), registro numérico (comprimento de cada lado ou medida de abertura de cada ângulo) e língua natural (classificação de cada triângulo por escrito).

Dessa maneira, independente da cor, a carta que apresenta o desenho de um triângulo escaleno pode ser sobreposta por uma que traga sua definição por meio do registro numérico, ou então por uma carta que apresente sua classificação por meio da língua natural, o mesmo ocorre para o triângulo acutângulo também representado na Figura 12.

Figura 12 – Jogo de UNO com Triângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

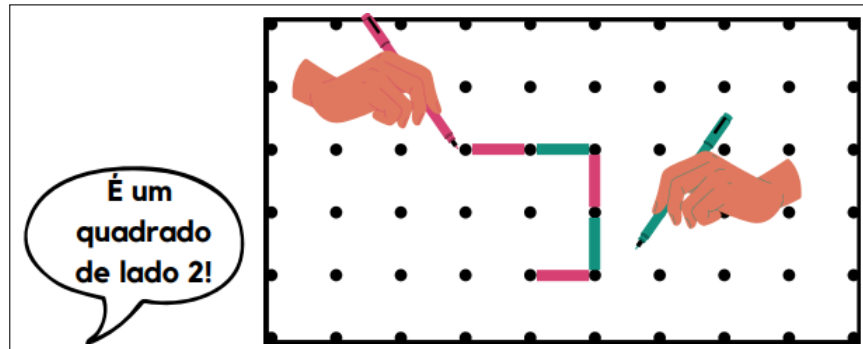
Obedecendo às regras do UNO tradicional, o jogo produzido para o produto educacional também conta com ‘cartas bônus’, as quais não têm relação nenhuma com o conteúdo de triângulos, mas colaboram com o andamento da partida.

O terceiro e último jogo faz referência ao conteúdo de quadriláteros e também envolve suas classificações e medidas, o denominado ‘Jogo dos Pontinhos’ não teve como base nenhum jogo já comercializado como os outros jogos do produto educacional, mas teve como inspiração o jogo ‘Imagem e Ação’.

Diferente dos outros dois jogos, este possibilita que os alunos participem em equipes. Em cada rodada, dois alunos escolhidos como os desenhistas retiram uma única carta que, através do registro numérico e de língua natural, apresenta o quadrilátero que deverá ser desenhado pouco a pouco, como mostra a Figura 13. O objetivo das equipes é adivinhar primeiro qual o quadrilátero desenhado.

É de extrema importância que as informações contidas na carta que fazem referências às medidas dos lados e alturas dos quadriláteros sejam mantidas no desenho, de modo que a representação de um quadrado de lado com comprimento de duas unidades não possa ser desenhada no quadro com outra medida.

Figura 13 – Jogo dos Pontinhos sobre Quadriláteros

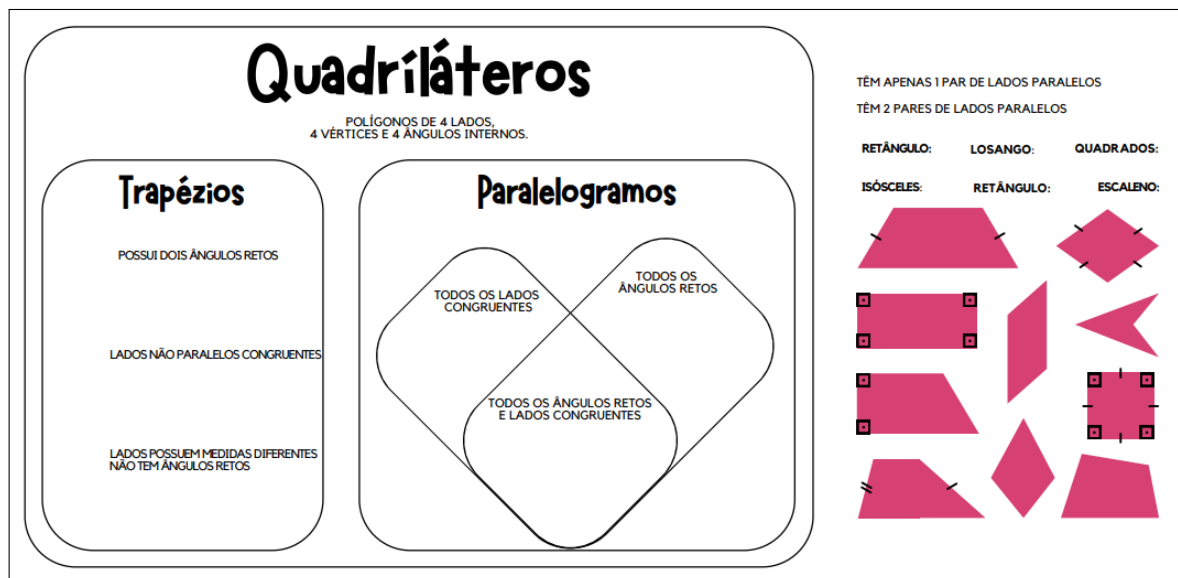


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Nesse e nos outros dois jogos produzidos no produto educacional, todo material necessário para utilização do jogo está disponível para impressão, como cartas, peças, folha de desenho ou regras. Além disso, também constam instruções de uso específicas para o professor, assim como dicas de conservação do material, para que o mesmo possa ser utilizado por muito tempo.

Para finalizar o capítulo voltado do produto educacional, é preciso mencionar os mapas mentais produzidos ao final de cada capítulo. Ele poderá ser utilizado pelo docente como material de apoio na resolução de provas ou tarefas e também como tarefa de revisão do conteúdo.

Figura 14 – Mapa Mental sobre Quadriláteros



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

No produto educacional, esses mapas foram apresentados de duas maneiras, uma delas traz toda a relação do objeto matemático com seus elementos de forma finalizada, pronta para impressão e utilização, já a segunda maneira apresentada faz do aluno parte importante para a construção do mapa mental, isso porque a folha de impressão não contém todo o conteúdo, parte dele será entregue aos alunos de forma separada e caberá aos mesmos colar ou escrever os elementos faltantes, como mostra a Figura 14.

Nos mapas é possível perceber a mobilização dos registros de língua natural, figurais e também registros numéricos, mesmo que em pouca quantidade. O motivo por trás da pouca representação através do registro numérico se fez pela possibilidade de confusão por parte dos alunos em relacionar os números do mapa mental com valores fixos a todos os ângulos ou polígonos representados, assim foi preferível o trabalho com simbologias ao invés de números.

Toda tarefa contida no produto educacional foi previamente explicada e associada a uma ou mais habilidades da BNCC, de modo a facilitar o entendimento dos professores e auxiliá-los na produção de seu plano de aula. Os registros de representação mobilizados em cada tarefa também foram apresentados aos professores, de modo que os mesmos consigam entendê-los e fazer as associações necessárias com a TRRS.

As folhas de impressão de cada tarefa foram apresentadas logo em seguida, desse modo o professor consegue utilizar o material de forma prática. Todo o material foi produzido colorido, mas pode ser impresso em preto e branco sem prejudicar o entendimento. Além disso, todas as tarefas que demandam dos alunos uma resposta e não uma construção, tiveram anexados um gabarito, de modo auxiliar o professor na correção das tarefas.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomando como ponto de partida o objetivo da dissertação de examinar e sintetizar o conhecimento presente em trabalhos acadêmicos produzidos sobre o ensino de Geometria atrelado a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com a finalidade de identificar contribuições relevantes para o desenvolvimento de um produto educacional voltado ao 6º ano do ensino fundamental, são apresentadas algumas considerações que finalizam este trabalho.

A geometria foi e ainda é uma das mais importantes ramificações da matemática, seu ensino influencia até hoje no cotidiano das pessoas, tenham elas consciência disso ou não. Por esse motivo, se fez a escolha de produzir um trabalho de dissertação voltado a esse conteúdo matemático, que envolvesse um método de aprendizagem diferente do tradicional e que priorizasse o entendimento dos conteúdos por parte dos alunos de forma eficaz.

Através de pesquisas voltadas à fundamentação teórica do trabalho, foi possível averiguar uma certa recorrência de relatos de professores e pesquisadores acerca do descaso com a geometria, tanto no ensino básico quanto no superior. A falta de tempo ou de habilidades em ministrar essas aulas eram frequentemente empregadas como raiz do problema, sendo assim, surgiu a ideia da produção de um material voltado ao ensino de Geometria que ficasse a disposição de professores, facilitando e agilizando o processo de produção de plano de aula, além de utilizar uma metodologia capaz de auxiliar os alunos do ensino fundamental na compreensão dos conteúdos geométricos.

Assim, através de conversas com alunos e professores do programa de mestrado e pesquisas em livros e trabalhos acadêmicos, a teoria de Duval, TRRS, foi escolhida como meio de se realizar um resgate do ensino da Geometria, de forma a mobilizar os registros de representação de um mesmo objeto matemático levando a apreensão dos conteúdos de forma mais leve e abrangente por parte dos alunos.

Dessa forma o trabalho se propôs a seguir uma abordagem qualitativa e interpretativa ao atender a questão de investigação 'De que maneira o ensino de Geometria no ensino básico atrelado com os Registros de Representação Semiótica pode ser trabalhado em sala de aula?'

A fim de responder tal questão, o trabalho se propôs a encontrar teses e dissertações que abordassem esse tema a fim de contribuir com a produção do produto educacional, assim foi realizada a pesquisa através da Lista das Dissertações de Mestrado dos alunos do PROFMAT e do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, que resultou em 15 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado.

Todos os trabalhos encontrados tiveram grande importância, não só para o produto educacional, mas também para o entendimento e compreensão da relação estabelecida entre a teoria de Duval e o ensino de matemática como um todo. As leituras e análises dos trabalhos acadêmicos possibilitaram o surgimento de ideias até então não consideradas para o trabalho ou para o produto, de modo que toda a revisão de literatura produzida foi de suma importância para a realização da dissertação.

Considerando as diferentes propostas e abordagens dos 16 trabalhos acadêmicos, os mesmos contribuíram de diferentes formas na produção desta dissertação. Os autores que se propuseram a analisar materiais didáticos utilizados por professores e identificar onde a TRRS era ou poderia estar sendo utilizada, tiveram seus trabalhos como grande influência na produção do produto educacional, de modo que os acertos encontrados nas análises dos livros didáticos eram trazidos para o produto, enquanto os erros eram corrigidos ou evitados.

Por outro lado, aqueles trabalhos que se disponibilizaram a aplicar oficinas ou sequências didáticas à professores de matemática, ajudaram na presente dissertação ao expor como muitos professores não tiveram a devida formação em relação aos conteúdos de Geometria, ou como estes não têm conhecimento sobre novas metodologias de ensino, mas que ainda estão dispostos a conhecer a TRRS e atualizar seus métodos de ensino, pontos de grande importância e motivação para a produção do produto educacional.

Enquanto isso, os trabalhos que se propuseram a aplicar sequências didáticas abordando os conteúdos de Geometria e a mobilização de vários registros de representação para o mesmo objeto matemático com alunos do ensino básico, contribuíram para o trabalho ao mostrar, em suas análises, que a mobilização da TRRS no ensino matemático é possível e traz contribuições no aprendizado dos alunos, mesmo que existam percalços e dificuldades relacionadas à mudança de metodologia.

A construção do produto educacional não se fez somente após as leituras e análises dos trabalhos acadêmicos, durante todo o processo de escrita do trabalho novas ideias relacionadas às tarefas e atividades eram incluídas no material, dessa forma, as tarefas passavam por diversas atualizações e revisões antes de serem consideradas finalizadas, o que de certo modo ajudou muito no enriquecimento do produto.

A todo tempo, a viabilização do produto educacional para professores de ensino básico foi tido como foco principal, a intenção por trás da construção de tarefas, folhas de impressão e livros em softwares é de que o docente consiga utilizar esse material de forma prática e rápida, considerando a grande demanda de trabalho destinada ao professor dentro de uma escola.

Inicialmente a intenção por trás da construção do produto educacional era aplicar o material nas turmas de 6º ano na qual a autora ministrava a disciplina de matemática, com a finalidade de validar ou não o material como auxiliador do processo de ensino, no entanto, devido a questões contratuais essa aplicação não foi possível de ser realizada. Ainda assim, abrem-se as possibilidades de futuras produções acadêmicas acerca do uso deste produto educacional.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT - A Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>>. Acesso em: 25 nov. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 51.
- ARCEGO, P. **Representações Semióticas Mobilizadas no Estudo da Área do Círculo no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado) — UFSM, Santa Maria, 2017. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=5226481](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5226481)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 40, 55, 56, 74 e 76.
- ARINOS, C. R. M. **Um Estudo de Potencialidades das Representações Semióticas na Aprendizagem de Áreas de Triângulos e Quadriláteros por Alunos do Quinto E Sexto Anos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado) — UFMS, Campo Grande, 2018. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=6322780](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6322780)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 40, 59, 60, 73 e 76.
- AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003. Citado na página 57.
- BARBOSA, A. C. I. **Aprendizagem Significativa do Conceito de Polígono: Uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) — UFU, Uberlândia, 2018. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=10386667](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=10386667)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 40, 57, 58 e 76.
- BARROS, R. C. P. **Entre o Plano e o Espaço: As relações entre figuras planas e espaciais em uma coleção de livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) — UNESPAR, Maringá, 2021. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=11469594](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11469594)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 40, 67, 68, 74 e 75.
- BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Capítulo 8: Grandezas e medidas. **Coleção Explorando o Ensino de Matemática**, Ministério da Educação. Brasília, v. 17, p. 167–200, 2010. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1YEh9owm1XUHdwsT9QNR36dl3YFdhx6Bn/view?usp=sharing>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado na página 33.
- BERLANDA, J. C. **Mobilizações de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o Auxílio do Software Geogebra**. Dissertação (Mestrado) — UFSM, Santa Maria, 2017. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=5163240](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5163240)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 6 vezes nas páginas 40, 51, 52, 73, 76 e 78.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1997. Citado 7 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 19, 21 e 24.

BRASIL. **Brasil no PISA 2015**: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Brasília, 2016. Citado na página 21.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Matemática. Brasília, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 13, 15, 17, 18, 19 e 24.

CAPES. **Catálogo de Teses e Dissertações**. 2024. Disponível em: <<https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/info>>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado na página 36.

CARNEIRO, V. Contribuições para a formação do professor de matemática pesquisador nos mestrados profissionalizantes na Área de ensino. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 199–222, 2008. Disponível em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1722>>. Acesso em: 25 nov. 2024. Citado na página 57.

CONCEIÇÃO, E. B. X. **A Abordagem de Triângulos em um Livro de Geometria Euclidiana Plana a ser Utilizado nas Licenciaturas em Matemática no Estado da Bahia**: Um estudo a partir da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado) — UFOB, Barreiras, 2023. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=15120608](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=15120608)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 40, 69, 70, 74 e 75.

CORRÊA, J. S. **Registros de Representação Semiótica Mobilizados na Obtenção do Volume de um Cilindro**: Uma atividade orientada pelos princípios da modelagem matemática. Dissertação (Mestrado) — UFSM, Santa Maria, 2017. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=5305689](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5305689)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 40, 49, 50 e 75.

COSTA, A. P. **A Construção de um Modelo de Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**: O caso dos quadriláteros. Tese (Doutorado) — UFPE, Recife, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/33431>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo i). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 25, 27, 28, 29, 30 e 80.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. **PROEM**, Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo, v. 1, 2011. Citado na página 80.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **REVEMAT - A Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118–138, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 26, 31 e 32.

DUVAL, R. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Tradução: Cleide Ribeiro Mota Arinos, José Luiz Magalhães de Freitas e Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 17, p. 01–52, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/85937/48701>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT - A Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2023. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/54097>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado 8 vezes nas páginas 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

FACUNDO, G. O. **Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio**: Uma abordagem vetorial baseada na teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado) — IFSP, São Paulo, 2023. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=13789415](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=13789415)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 24, 40, 71, 72 e 74.

FILHO, M. A.; TAVARES, A. H. C. A educação matemática e o ensino-aprendizagem de geometria: Causas e consequências da deficiência e como fazer a excelência. **Revista Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, RN, v. 2, n. 4, p. 55–63, 2016. Disponível em: <<https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/594>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado na página 13.

FLICK, U. **Introdução à Metodologia de Pesquisa**: Um guia para iniciantes. Tradução: Magda Lopes. Porto Alegre: Penso, 2012. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788565848138/pageid/1>>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado na página 34.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2007. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788582179055/>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 23.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymnod Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, p. 10–34, 2013. Disponível em: <<https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5946/3969>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado na página 78.

FREITAS, V. P. **Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — UFAM, Manaus, 2013. Disponível em: <<https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4780>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 23.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. Dissertação (Mestrado) — UEPG, Ponta Grossa, 2012. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/1325>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 13, 20 e 33.

KOBAYASHI, M. C. M. **A construção da geometria pela criança**. Bauru: Edusc, 2001. Citado na página 19.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: Conceitos e caracterização. **Revista de investigaciones UNAD**, Bogotá, v. 14, n. 2, p. 55–73, 2015. Disponível em: <<https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2335/1440>>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado na página 34.

LOCATELLI, S. C. **Ensino de Geometria: O que revelam as tarefas escolares?** Dissertação (Mestrado) — UEM, Maringá, 2015. Disponível em: <<http://old.ppe.uem.br/dissertacoes/2015/2015%20-%20Sueli.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 19.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação - Abordagens Qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/978-85-216-2306-9>>. Acesso em: 02 nov. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

MANDARINO, M. F. Objetivos do ensino de geometria no processo de alfabetização. **Geometria no ciclo da alfabetização - Salto para o Futuro**, Rio de Janeiro. Ano XXIV. Boletim 7, p. 9–15, 2014. Disponível em: <<https://silo.tips/download/issn-geometria-no-ciclo-de-alfabetizaaao>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 19.

MARTINELLI, D. S. P. **Geometria Analítica: Articulando registros algébricos e geométricos com o grafeq**. Dissertação (Mestrado) — UFSM, Santa Maria, 2017. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=5129397](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5129397)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 6 vezes nas páginas 40, 47, 48, 73, 76 e 78.

MORAN, M. **As Apreensões em Geometria: Um estudo com professores da educação básica acerca de registros figurais**. Tese (Doutorado) — UEM, Maringá, 2015. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=3107782](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3107782)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 8 vezes nas páginas 24, 26, 31, 40, 43, 44, 75 e 81.

MORAN, M. et al. O ensino da geometria: entrevista com a professora Regina Maria Pavanello. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 28, n. 79, p. 1–11, 2023. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3431/2343>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 22.

MOREIRA, N. J. S. **Continuidade(s) e ruptura(s) nos livros didáticos "A conquista da matemática"**: como ensinar a partir de orientações metodológicas da educação matemática (1982-2009). Dissertação (Mestrado) — UFS, São Cristóvão, 2013. Disponível em: <<https://ri.ufs.br/jspui/handle/123456789/5157>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 23.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 2, p. 289–303, 2013. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/568/679>>. Acesso em: 20 dez. 2024. Citado na página 31.

MORETTI, M. T.; CANSA, A. Releitura das apreensões em geometria e a ideia de expansão figural a partir dos estudos de raymond duval. **JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 16, n. 4, p. 303–310, 2023. Disponível em: <<https://jjeem.pgsscogna.com.br/jjeem/article/view/10789/6977>>. Acesso em: 20 dez. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 32.

MOURA, L. K. J.; KRINDGES, A.; WIELEWSKI, G. D. As vantagens do modelo de Van Hiele no ensino de geometria. **Educação Matemática em Revista - RS**, Canoas, v. 2, n. 21, p. 56–65, 2020. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/2355/1768>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 23.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. Citado na página 15.

OLIVEIRA, D. V. **Visualização Espacial no Ensino Fundamental: Rotações no geogebra**. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, Porto Alegre, 2021. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=11075897](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11075897)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 40, 63, 64 e 76.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D. Construções em geometria euclidiana plana: as perspectivas abertas por estratégias didáticas com tecnologias. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 92–116, 2018. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/D4s4yQXNf9dcmc4Gf4fdgfP/?format=pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 20.

OLIVEIRA, G. S.; SILVA, G. O.; SILVA, M. M. A pesquisa bibliográfica nos estudos científicos de natureza qualitativos. **Revista Prisma**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 1, p. 91–109, 2021. Disponível em: <<https://revistaprisma.emnuvens.com.br/prisma/article/view/45>>. Acesso em: 02 nov. 2024. Citado na página 35.

PAGLIARINI, M. M. **Abordagem Metodológica para o Ensino de Trigonometria por meio de Material Manipulável e Registros de Representação Semiótica**. Dissertação (Mestrado) — UTFPR, Pato Branco, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1859>>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 6 vezes nas páginas 36, 40, 45, 46, 75 e 76.

PASSOS, C. M. B. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A geometria na sala de aula**. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, 2000. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/183802>>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado na página 33.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Regina-Pavanello/publication/277799094\\_O\\_abandono\\_do\\_ensino\\_da\\_geometria\\_no\\_Brasil\\_causas\\_e\\_consequencias\\_p7-18/links/60af91e3299bf13438eeaf94/O-abandono-do-ensino-da-geometria-no-Brasil-causas-e-consequencias-p7-18.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Regina-Pavanello/publication/277799094_O_abandono_do_ensino_da_geometria_no_Brasil_causas_e_consequencias_p7-18/links/60af91e3299bf13438eeaf94/O-abandono-do-ensino-da-geometria-no-Brasil-causas-e-consequencias-p7-18.pdf)>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 22.

PAVANELLO, R. M.; FRANCO, V. S. A construção do conhecimento geométrico no ensino fundamental: Análise de um episódio de ensino. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática - SBEM**. Belo Horizonte: [s.n.], 2007. Disponível em: <[https://www.sbembrasil.org.br/files/ix\\_enem/Html/comunicacaoCientifica.html](https://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html)>. Acesso em: 20 nov. 2024. Citado na página 13.

PEREIRA, A. S. e. a. **Metodologia da pesquisa científica**. 1. ed. Santa Maria, RS: UAB/NTE/UFSM, 2018. Citado na página 34.

POUZADA, T. A. et al. Discursos de professores de matemática sobre o ensinar geometria com o uso de tecnologias digitais. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 9, n. 20, p. 40–59, 2021. Disponível em: <<https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/388/260>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

REMPEL, G. **Tangram nos Livros Didáticos de Matemática**: Um estudo à luz da teoria de registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado) — UFFS, Chapecó, 2021. Disponível em: <[https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=6222&id2=171055620](https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6222&id2=171055620)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 5 vezes nas páginas 36, 40, 65, 66 e 74.

SANTOS, S. M. F.; LEAL, D. A. O ensino de matemática no brasil com ênfase na geometria. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v. 7, n. 1, p. 10647–10662, 2021. Disponível em: <<https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/23911/19182>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 21.

SANTOS, V. S. **Registros de Representações Semióticas Mobilizados por Professores de Matemática no Ensino dos Prismas**. Dissertação (Mestrado) — UFPE, Recife, 2020. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=9289093](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9289093)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 8 vezes nas páginas 23, 27, 28, 29, 40, 61, 62 e 75.

SILVA, A. B. **Triângulos nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: Um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado) — UFPE, Recife, 2014. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=196152](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=196152)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 40, 41, 42 e 74.

SILVA, D. S. F.; BISOGNIN, V. Ensino da geometria nos anos finais do ensino fundamental: um problema sistêmico. **Revista Educar Mais**, Pelotas, v. 6, p. 28–45, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/educarmais/article/download/2648/1950>>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 23.

SILVA, M. P. F. **Histórias em Quadrinhos em Contexto Matemático**: Uma proposta para o ensino de triângulos à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado) — UFRN, Natal, 2017. Disponível em: <[https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=5658151](https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5658151)>. Acesso em: 07 nov. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 40, 53, 54 e 76.

SWAN, M. Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In: **Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática – EIEM**. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática: [s.n.], 2014. p. 7–25. Citado na página 74.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788584290833/>>. Acesso em: 10 nov. 2024. Citado na página 34.