

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –  
PROFMAT**

**SUSANA WILLEMANN STIMAMIGLIO**

**ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS: A ARTE COMO CONTEXTO PARA O  
ENSINO DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

**JOINVILLE**

**2025**

**SUSANA WILLEMANN STIMAMIGLIO**

**ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS: A ARTE COMO CONTEXTO PARA O  
ENSINO DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

Orientador: Viviane Maria Beuter

**JOINVILLE**

**2025**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da  
Biblioteca Universitária Udesc,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Stimamiglio, Susana Willemann  
ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS : A ARTE COMO  
CONTEXTO PARA O ENSINO DE MATRIZES E  
TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO / Susana  
Willemann Stimamiglio. -- 2025.  
101 p.

Orientadora: Viviane Maria Beuter  
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa  
de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede  
Nacional, Joinville, 2025.

1. Grupos. 2. Matrizes. 3. Escher. 4. Geogebra. I. Beuter,  
Viviane Maria . II. Universidade do Estado de Santa Catarina,  
Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede  
Nacional. III. Título.

**SUSANA WILLEMANN STIMAMIGLIO**

**ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS: A ARTE COMO CONTEXTO PARA O  
ENSINO DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

Orientador: Viviane Maria Beuter

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof.a Dr.a Viviane Maria Beuter  
UDESC/CCT

Membros:

Prof.a Dr.a Graciela Moro  
UDESC/CCT

Prof.a Dr.a Kelly Roberta Mazzutti Lübeck  
UNIOESTE

Joinville, 27 de agosto de 2025

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e pela perseverança que me guiou ao longo da caminhada acadêmica, permitindo que eu persistisse e progredisse mesmo diante dos desafios.

Agradeço a minha orientadora Professora Viviane por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa e pela paciência nos momentos em que a vida me fez deixar a dissertação de lado.

A todos os professores do PROFMAT que, com dedicação e entusiasmo, não apenas me incentivaram a ingressar no curso, mas também proporcionaram reflexões profundas sobre o ensino e a matemática.

Ao meu marido, Gustavo, meus agradecimentos pelo suporte incondicional, pela ajuda nos momentos difíceis e, sobretudo, pela compreensão diante da minha ausência nos finais de semana.

Sou imensamente grata aos meus pais, que sempre valorizaram a educação e me ofereceram apoio emocional e financeiro fundamentais para enfrentar os muitos desafios do mestrado. Ao meu irmão, agradeço por despertar em mim o espírito de superação, incentivando minha competitividade de forma positiva.

Aos colegas e amigos do PROFMAT e da matemática, agradeço pela parceria nos estudos, pela troca de conhecimentos e pelo apoio mútuo para superar os desafios do programa.

Por fim, agradeço a UDESC, instituição que me acolheu desde a graduação e que, durante o mestrado, me ofereceu a bolsa PROMOP, um recurso importante para meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

*Adoramos o caos porque amamos produzir  
ordem. (M.C. Escher)*

## RESUMO

Uma das tarefas do professor de matemática é incentivar os alunos a se dedicarem à disciplina, já que muitos não simpatizam com os cálculos e definições envolvidos. O papel do professor vai além de dominar o conteúdo: é preciso compreender a melhor forma de explicá-lo e antecipar as dificuldades que podem surgir. Nesse sentido, a contextualização da matemática constitui uma estratégia didática relevante. Neste trabalho, exploramos conceitos de álgebra, como grupos, grupos de matrizes e grupos de isometrias: reflexões; translações e rotações, com o objetivo de caracterizar essas isometrias e utilizá-las no ensino de matrizes no ensino médio. Para contextualizar e despertar o interesse dos alunos, realizamos também uma pesquisa sobre Escher e suas obras, que desempenham papel cativante ao exemplificar os conceitos e acrescentar um fator histórico e artístico às aulas. Com base nessas ideias, elaboramos uma sequência didática que busca oferecer ao professor do ensino básico uma abordagem para o ensino de matrizes articulada às noções de isometria, ilustradas pelas obras de Escher. Para avaliar esse material, realizamos uma análise bibliográfica comparativa de livros do ensino básico e de trabalhos acadêmicos relacionados ao tema, que auxiliaram a destacar temáticas pouco abordadas que posteriormente foram desenvolvidas no produto educacional criado. O objetivo final é integrar isometrias e matrizes ao ensino de matemática no ensino médio, utilizando a arte como recurso para promover a contextualização e a motivação dos estudantes.

**Palavras-chave:** Grupos. Matrizes. Escher. Geogebra.

## ABSTRACT

One of the tasks of the mathematics teacher is to encourage students to dedicate themselves to the subject, since many do not sympathize with the calculations and definitions involved. The teacher's role goes beyond mastering the content: it is necessary to understand the best way to explain it and to anticipate the difficulties that may arise. In this sense, contextualizing mathematics constitutes a relevant didactic strategy. In this work, we explore algebraic concepts such as groups, matrix groups, and groups of isometries: reflections; translations and rotations, with the aim of characterizing these isometries and applying them to the teaching of matrices in high school. To contextualize and spark students' interest, we also carried out research on Escher and his works, which play an appealing role in exemplifying the concepts and adding a historical and artistic dimension to the lessons. Based on these ideas, we designed a didactic sequence that seeks to provide high school teachers with an approach to teaching matrices articulated with the notions of isometry, illustrated by Escher's works. To evaluate this material, we conducted a comparative bibliographic analysis of school textbooks and academic studies related to the theme, which helped highlight topics that are rarely addressed and were later developed in the educational product created. The ultimate goal is to integrate isometries and matrices into the teaching of mathematics in high school, using art as a resource to promote contextualization and student motivation.

**Keywords:** Groups. Matrices. Escher. Geogebra.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>MAURITS CORNELIS ESCHER</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1	A VIDA E AS OBRAS DE ESCHER . . . . .	15
3.1.1	A fase da realidade visível . . . . .	16
3.1.2	A fase das Simetrias . . . . .	16
<b>4</b>	<b>LADRILHAMENTOS</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>GRUPOS</b> . . . . .	<b>33</b>
5.1	CONCEITOS INICIAIS . . . . .	33
5.1.1	Grupos de Matrizes . . . . .	40
5.1.2	Homomorfismos de Grupos . . . . .	48
<b>6</b>	<b>ISOMETRIAS NO PLANO</b> . . . . .	<b>51</b>
6.1	ISOMETRIAS . . . . .	51
6.1.1	Translação . . . . .	55
6.1.2	Rotação . . . . .	57
6.1.3	Reflexão . . . . .	63
6.1.4	Reflexão Deslizante . . . . .	71
6.2	RELAÇÕES ENTRE ISOMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES	73
<b>7</b>	<b>PRODUTO EDUCACIONAL</b> . . . . .	<b>81</b>
7.1	MOTIVAÇÕES À CRIAÇÃO DO PRODUTO . . . . .	81
7.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	85
7.2.1	Análise das dissertações do PROFMAT . . . . .	85
7.2.2	Análise de Livros Didáticos . . . . .	89
7.3	CONSTRUÇÃO DO PRODUTO E A SUGESTÃO DE APLICAÇÃO . . . .	92
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>96</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Para introduzir esse trabalho, gostaria de deixar claras as motivações que me levaram a produzi-lo. Quando entrei na graduação em Licenciatura em Matemática na UDESC o meu pensamento era unicamente dar aulas no Ensino Básico. A matemática, a princípio não era tão importante. Porém, ao longo do curso, as aulas de matemática pura foram tornando-se prioridade e desenvolvendo em mim uma vontade de aprofundar certos conceitos. Ao terminar o curso, me vi procurando por mestrados nessa área de pesquisa e iniciei um curso de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Por outro lado, disciplinas que até então eram de fácil compreensão na graduação revelaram uma matemática que eu nem imaginava existir, trazendo desafios muito maiores do que o esperado. Diante disso, o PROFMAT surgiu como uma segunda opção, por ser o curso mais próximo da área que eu desejava dentro das opções disponíveis na cidade onde morava.

Dessa maneira, com o passar das semanas o PROFMAT foi fazendo cada vez mais sentido no meu cotidiano e trazendo melhoras significativas na minha didática em sala de aula, até então como professora temporária em escolas estaduais de Santa Catarina. No ano de 2023, me tornei efetiva como professora de matemática no município de Joinville, onde resido. A partir disso, muitas experiências vivenciadas nesse ano trouxeram reflexões e ponderamentos que antes não existiam. O dia a dia cansativo, com as cobranças por notas melhores por parte dos alunos, a exaustão ao precisar trabalhar nos finais de semana e uma segunda opção ao meu alcance me fizeram desistir, pelo menos temporariamente, da docência.

Essas experiências me levaram a perceber, de forma amarga, que ensinar o conteúdo da disciplina é apenas uma das muitas tarefas de um professor. Se essa fosse a única atribuição da profissão, provavelmente haveria muito mais docentes no mundo.

O professor, além de ser responsável pelo processo de ensino em uma escola, atua como mediador de problemas em sala e como “psicólogo” de seus alunos, acumulando tarefas que muitas vezes o sobrecarregam. Percebe-se isso ao entrar em uma sala dos professores, principalmente em escolas públicas, onde se ouvem reclamações quanto ao desinteresse dos alunos nas aulas. Dessa forma, o professor busca sempre inovar em sua prática para que a aprendizagem do aluno seja facilitada, além de tornar mais leve o seu dia a dia em sala.

A matemática, por si própria, pode ser algo muito abstrato para os alunos do ensino básico, afinal, nenhum aluno viu um sinal de adição pela rua. Logo, essa falta de contextualização dos conteúdos pode se tornar um problema para o ensino dessa disciplina de tanta importância, como afirma Ferreira et al. (2020, p. 3), “É preciso reconhecer que o caráter disciplinar do ensino pode prejudicar a aprendizagem do sujeito, por dificultar o estabelecimento de conexões dos conceitos teóricos com as situações concretas do mundo da vida”.

A fim de atenuar esse problema e despertar maior interesse dos alunos às aulas de matemática, os professores buscam novos métodos para indicar que ela está presente em lugares

que nem se imagina, de modo a despertar a curiosidade do aluno para que ele se torne protagonista de sua aprendizagem. Afinal, é “necessário um processo de interiorização dos significados para que se desenvolva a aprendizagem” (Reis e Nehring, 2017, p. 3). Com isso, esta dissertação busca apresentar uma maneira de motivar o ensino de isometrias no plano e matrizes aos alunos do ensino médio, especialmente do segundo ao terceiro ano, de forma lúdica, prática e contextualizada, colocando o aluno como protagonista.

No desenvolvimento deste trabalho, serão estudadas teorias matemáticas mais específicas, que não fazem parte do currículo do ensino básico, mas que o professor que ministrar as aulas precisa conhecer, a fim de desenvolver melhor as atividades propostas nesta dissertação e no produto educacional a ela atrelado.

Dentre os tópicos que serão abordados, o foco principal são as isometrias no plano cartesiano. Isometrias são transformações geométricas (funções bijetoras) que preservam distâncias, ou seja, figuras submetidas a essas transformações mantêm sua forma e tamanho. Entre as principais isometrias estudadas estão as translações, rotações e reflexões.

É por meio das obras de Maurits Cornelis Escher e das isometrias no plano que estabelecemos uma relação entre arte e matemática. Embora Escher não tenha utilizado formalmente conceitos matemáticos ao criar suas obras, suas gravuras e construções geométricas oferecem uma motivação para o ensino de isometrias e de matrizes para alunos do ensino médio. Dessa forma, esta dissertação busca explorar não apenas a interdisciplinaridade entre matemática e artes, mas também as conexões entre diferentes campos da matemática, como geometria e álgebra.

Para o estudo das isometrias, utilizaremos a teoria de grupos, que permite compreender as propriedades e a composição dessas transformações. Ao desenvolver esta pesquisa, encontramos uma interseção entre as isometrias e as transformações lineares, o que possibilita caracterizar as isometrias por meio de operações de determinadas matrizes. Com essa abordagem, podemos fornecer aos alunos a percepção da unidade da matemática, compreendendo que conceitos aparentemente distintos, como transformações geométricas e operações matriciais, estão conectados.

Esse trabalho está organizado em quatro partes principais. Após a apresentação da metodologia, o foco recai sobre o artista gráfico M. C. Escher. Suas criações com diversos padrões desafiam a mente e revelam muita matemática por trás de suas obras. A maneira como o artista misturou a arte com a matemática foi inovadora para a sua época e os padrões servem como exemplo do que desejamos estudar, destacando os conceitos de ladrilhamento e suas características.

A segunda parte apresenta os conteúdos necessários para compreender as isometrias e a matemática por trás dos ladrilhamentos. Serão abordados grupos, subgrupos, homomorfismo de grupos e exemplos de grupos, principalmente os formados por matrizes. Definiremos isometrias, aprofundando os conceitos de rotações, translações e reflexões. Além de revisar brevemente transformações lineares, apresentando e demonstrando propriedades e teoremas pertinentes ao tema.

A terceira parte desse trabalho apresenta algumas motivações que auxiliaram na elabo-

ração do produto educacional, assim segue uma breve revisão bibliográfica, com a análise de algumas dissertações do banco do PROFMAT, trazendo experiências, especialmente na aplicação de produtos educacionais, para complementar e justificar o que desejamos desenvolver. Além das dissertações, foram analisados os livros didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras.

A última parte traz uma proposta de atividade de ensino de matrizes no ensino básico, anexada a esse trabalho como produto educacional. A sequência, contextualizada e interdisciplinar, foi pensada principalmente para alunos do segundo ano do ensino médio, buscando motivar a aprendizagem e alinhar o conteúdo à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense.

Por fim, o objetivo principal deste trabalho é buscar estratégias, metodologias e abordagens didáticas que possam contribuir para a questão: “Como integrar isometrias e matrizes ao ensino de matemática no ensino médio, a partir da arte, de modo a promover a contextualização e a motivação dos alunos?”. Para isso, os objetivos específicos incluem: apresentar os problemas que a aprendizagem de uma matemática descontextualizada pode trazer; destacar os benefícios da interdisciplinaridade no âmbito escolar; evidenciar a matemática nas obras de Escher e fundamentar tais conceitos. Além disso, busca apresentar uma proposta de aula contextualizada sobre matrizes, embasada nas temáticas analisadas nos livros didáticos e trabalhos acadêmicos.

## 2 METODOLOGIA

Como mencionado na Introdução, o objetivo deste trabalho é buscar estratégias, metodologias e abordagens didáticas que possam contribuir para a questão: “Como integrar isometrias e matrizes ao ensino de matemática no ensino médio, a partir da arte, de modo a promover a contextualização e a motivação dos alunos?”. Em busca do alcance do nosso objetivo, alguns métodos foram adotados.

Definir a metodologia e os passos que a pesquisa seguiu foi importante para seu andamento. De fato, como enuncia Matias-Pereira (2016, p. 42), “métodos constituem os instrumentos básicos que ordenam de início o pensamento em sistemas, traçam de modo ordenado a forma de proceder do cientista ao longo de um percurso para alcançar um objetivo preestabelecido”.

Este trabalho adota uma abordagem qualitativa, voltada à compreensão do fenômeno investigado por meio da interpretação de conteúdos teóricos. Nesse contexto, a pesquisa é de natureza bibliográfica, fundamentando-se na análise de livros, artigos científicos, dissertações e outros documentos acadêmicos relevantes ao tema. De fato, uma pesquisa é considerada bibliográfica quando “elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de periódicos e atualmente com material disponibilizado na Internet” (Matias-Pereira, 2016, p. 91). Este tipo de pesquisa, baseia-se, essencialmente, em definir um conjunto de trabalhos, artigos e outros materiais relacionados ao assunto investigado, para embasar o trabalho como um todo e também para orientar o rumo a ser seguido.

A pesquisa bibliográfica é uma ótima maneira de reunir informações de diversas fontes, como afirma Gil (2022, p. 44): “A principal vantagem da pesquisa bibliográfica está no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”.

Nesse sentido, consideramos que

o pesquisador qualitativo utiliza técnicas para coletar dados, como a observação não estruturada, entrevistas abertas, revisão de documentos, discussão em grupo, avaliação de experiências pessoais, registro de histórias de vida, e interação e introspecção com grupos ou comunidades. (Sampieri, Collado e Lucio, 2013, p. 34)

Além disso, Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 35) destacam que “o enfoque qualitativo busca principalmente a “dispersão ou expansão” dos dados e da informação”. Assim, o caminho trilhado para a realização deste trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, baseada na revisão de documentos como livros, dissertações e vídeos relacionados ao tema, com o objetivo de ampliar as informações já existentes sobre o uso das simetrias de Escher no ensino de matemática.

Nos trabalhos analisados, sejam dissertações e livros didáticos, as sequências didáticas encontradas utilizam a contextualização por meio das obras de Escher apenas para o ensino de geometria. Já na sequência didática proposta neste trabalho, de maneira diferenciada, mostramos

como é possível explorar as translações, rotações e reflexões presentes nas obras de Escher também para o ensino de matrizes e transformações lineares.

Como o método utilizado para o desenvolvimento do produto educacional foi por meio de uma sequência didática, destacamos a definição em que tratamos de “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” (Zabala, 1998, p. 24).

Assim, é importante que a sequência possua tema bem definido, data, duração, ano ou público-alvo. Além disso, Cardoso (2024, p. 15) indica que “é necessário compreender os objetivos propostos, o conteúdo em jogo, a metodologia a ser executada, os recursos utilizados e a avaliação dos alunos da sequência”. Para assim estruturar a sequência didática da melhor maneira e trazer mais sucesso ao processo de ensino e aprendizagem.

Ainda, tanto no produto educacional, quanto nesta dissertação seguiremos a linha de pensamento de Creswell (2014, p. 50):

Os pesquisadores qualitativos reúnem múltiplas formas de dados, como entrevistas observações e documentos, em vez de se basearem em uma única fonte de dados. A seguir examinam todos os dados e procuram entender o seu significado, organizando-os em categorias ou temas que perpassam todas as fontes de dados.

Tendo em vista isso, para fazer a seleção e leitura das dissertações e livros didáticos, utilizamos o que indica Marconi e Lakatos (2017) como fases da leitura informativa: reconhecimento; exploratória; seletiva; reflexiva; crítica; interpretativa e explicativa.

As autoras enunciam que o processo inicia-se com o reconhecimento ou leitura prévia do material, realizada de forma rápida, a fim de identificar o tema ou assunto de interesse. Em seguida, passa-se à pré-leitura ou leitura exploratória, caracterizada por uma sondagem para localizar informações pertinentes. Posteriormente, ocorre a fase seletiva, na qual se realiza uma leitura mais atenta do material previamente selecionado.

As etapas seguintes demandam maior análise: a leitura reflexiva avalia o sentido e a intenção do autor, como destaca Marconi e Lakatos (2017, p. 34): “mais profunda do que as anteriores, refere-se ao reconhecimento e avaliação das informações, das intenções e dos propósitos do autor. Procede-se à identificação das frases-chave para saber o que o autor arma e por que o faz”.

Em oposição a isso, a leitura crítica distingue e hierarquiza as ideias principais e secundárias. Já a leitura interpretativa relaciona os argumentos do autor com os objetivos do pesquisador, permitindo selecionar apenas o que é relevante para a resolução do problema. Por fim, a leitura explicativa busca verificar a consistência e a validade dos argumentos apresentados, sendo especialmente importante em trabalhos acadêmicos mais complexos.

Dessa maneira, este trabalho será constituído a partir de uma pesquisa bibliográfica, com o objetivo de definir todos os conceitos de álgebra necessários para uma melhor compreensão

do conteúdo proposto, tornando o produto educacional aplicável da melhor forma possível, ainda que ele, por si só, seja suficiente para que o professor o utilize em sala de aula. De modo complementar, serão apresentados o contexto histórico e as características das obras de Escher, elementos que podem instigar o interesse dos alunos na aula. Por último, realizaremos uma análise qualitativa de livros didáticos e dissertações, buscando interpretá-los e, com este trabalho, ampliar os estudos já existentes sobre o tema.

### 3 MAURITS CORNELIS ESCHER

Ao observar as obras de M. C. Escher, naturalmente, algumas sensações vêm à tona. O desconforto pode ser uma delas, pois o artista desafia o real e cria cenários lúdicos, brincando com perspectiva e profundidade. De fato, como afirma Tjabbes (2010, p. 9), “Escher era um gênio da imaginação lúdica e um artesão habilidoso nas artes gráficas, mas a chave para muitos dos seus efeitos surpreendentes é a matemática”.

#### 3.1 A VIDA E AS OBRAS DE ESCHER

M. C. Escher nasceu em 17 de junho de 1898, na Holanda, em uma família da alta burguesia. Desde cedo, ele e os irmãos aprenderam a trabalhar com madeira e a tocar instrumentos musicais; no caso de Maurits, o escolhido foi o violoncelo. (Tjabbes, 2010). Ao decidir seguir a carreira de artista não obteve apoio de seus familiares, pois os mesmos achavam que Escher não teria segurança econômica. Foi seu professor Samuel Jesserun de Mesquita que incentivou o jovem artista e convenceu sua família pelo talento contido em Escher.

Escher produzia suas obras a partir de entalhos em madeira e pedra, ditas técnicas de Xilogravuras e Litografias, explicadas a seguir.

Xilogravuras são feitas mediante o corte de um desenho num bloco de madeira; nas litografias, faz-se um desenho sobre uma pedra plana especialmente tratada. A xilogravura é uma forma de impressão em relevo: uma goiva é usada para esculpir um bloco de madeira, formando sulcos e produzindo uma imagem no primeiro plano. A tinta é aplicada a essas partes e, em seguida, uma folha de papel é pressionada sobre o bloco de madeira com a tinta. A litografia é uma forma de impressão plana: a tinta é aplicada à pedra lisa e o papel é, em seguida, colocado em cima. Todas as cópias de uma série são idênticas: embora a cor possa variar, a imagem ou a representação é sempre a mesma. (Tjabbes, 2010, p. 43)

A partir das técnicas que aprendeu, Escher tentava traduzir suas sensações nas diversas fases de produção que passou a longo da sua vida. Iniciou seus estudos na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas em Haarlem, porém logo, por instrução do professor Samuel, passou a estudar na Escola de Arte de Haarlem, na Holanda, formando-se em 1921.

A partir de então, em 1922, Escher partiu para uma viagem pela Europa, passou pela França, Itália, Espanha, entre outros países. Em 1924, casou-se com Jetta Umiker com quem teve três filhos: Georges, Arthur e Jan. Para cuidar da saúde de Arthur e fugir da Itália fascista de Benito Mussolini, mudaram-se para Suíça em 1935, logo após para a Bélgica e por fim, em 1941 em meio a Segunda Guerra Mundial, voltaram a Holanda, morando em Baarn.

### 3.1.1 A fase da realidade visível

As diferentes regiões em que Escher e sua família moraram contribuíram muito para as suas criações. Podemos identificar ao longo da vida do artista que suas obras foram marcadas por duas fases. “A primeira, até 1937, correspondeu à realidade visível, ao mundo físico, e seus trabalhos foram influenciados por lugares e culturas que conheceu, expressando uma preocupação com a estrutura espacial e demonstrando muito talento no uso de perspectiva, sem negar sua formação.” (Fainguelernt e Nunes, 2015, p. 29)

Em decorrência das visitas às cidades italianas e espanholas, aconteceu a inclusão em seus trabalhos dos diversos ângulos, paisagens e elementos da natureza diferentes, antagônicos ao que conhecia das planícies da Holanda. Notamos essas características em muitas de suas obras dessa época, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Obra de Escher: "Fara San Maritino"(1928)



**Fonte:** ESCHER, M. C. (2025)

### 3.1.2 A fase das Simetrias

Na segunda fase da sua vida como artista, Escher mudou seu estilo, “usando a imaginação e a visão detalhista, afastando-se do mundo físico e buscando uma certa regularidade”, e assim “produziu composições utilizando várias geometrias.” (Fainguelernt e Nunes, 2015, p. 29).

Por exemplo, os mosaicos do castelo de Alhambra em Granada na Espanha, uma das cidades que visitou e que muito o cativou, foram uma grande inspiração para que o artista explorasse as tesselações, compondo obras a partir de translações e rotações de figuras, de modo a justapô-las sem espaços em branco e sem sobreposição. Os azulejos árabes que revestiam os muros do castelo foram essenciais para suas próximas criações. (FATHAUER, 2021).

O ladrilhamento, na matemática, “está associado ao recobrimento do plano utilizando determinadas composições de polígonos” (Bonjorno, Giovanni e Câmara, 2020b, p. 31). Quando estamos criando um ladrilhamento cuidamos para que os polígonos não se sobreponham um ao outro e que não tenham espaços em branco entre cada figura. Percebemos semelhanças dessa padronagem na Figura 2 abaixo, que traz um dos mosaicos do Castelo de Alhambra.

Figura 2 – Mosaico do Castelo de Alhambra

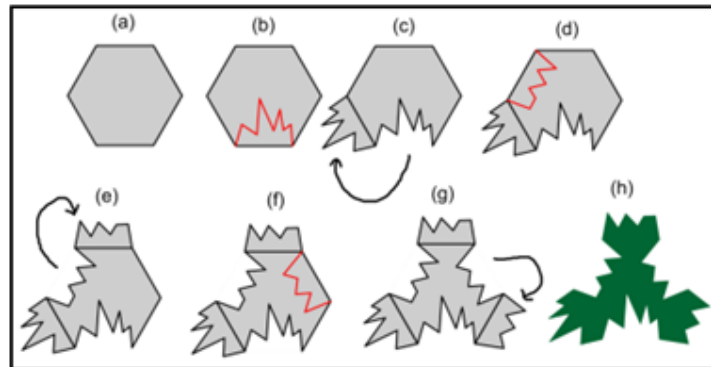


**Fonte:** Dreamstime (2025)

Tjabbes (2010) comenta que Escher diferenciava seus trabalhos feitos de ladrilhamento dos já criados por não utilizar apenas formas geométricas simples, mas sim imagens realísticas. Sendo que as mais utilizadas eram figuras de animais, principalmente lagartos, peixes e pássaros.

Escher criava os ladrilhos utilizados em suas obras a partir de formas geométricas, como quadrados, triângulos e hexágonos. Ele escolhia uma figura geométrica e, partir dessa base, criava diferentes ilustrações. Essa técnica é comumente chamada de “Técnica da Dentada”, pois ao tomar uma figura geométrica, retira-se um pedaço de um lado para acoplá-lo em outro. Por exemplo, ao tomar um hexágono, como mostra na Figura 3, retiramos qualquer pedaço de um dos lados e acoplamos esse pedaço em outro lado. Repetindo essa tarefa mais vezes, criamos uma imagem totalmente diferente da primeira utilizada.

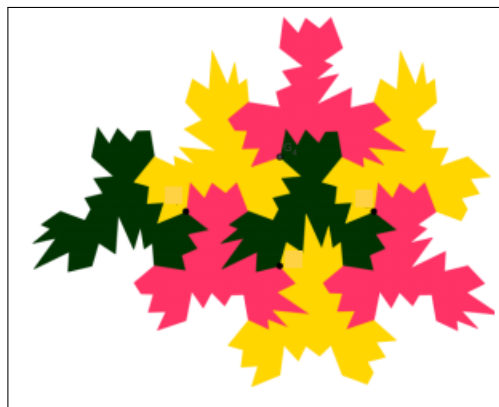
Figura 3 – Construção de uma imagem a partir da técnica da dentada



**Fonte:** Alves (2014, p. 31)

Essa imagem criada se encaixa perfeitamente com ela mesma, formando um ladrilhamento sem espaços em branco, como vemos na Figura 4.

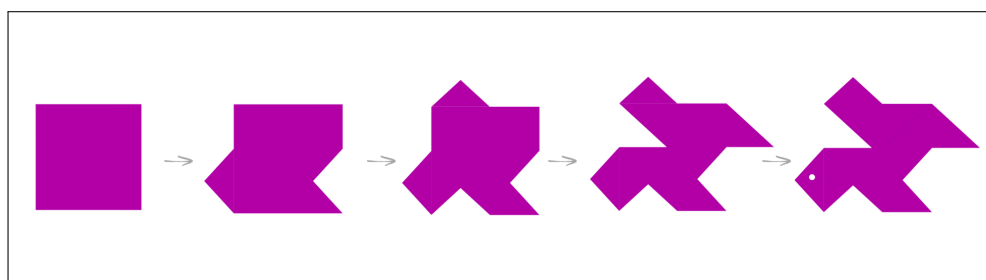
Figura 4 – Ladrilhamento



**Fonte:** Alves (2014, p. 31)

Utilizando essa técnica, construímos uma figura que apelidamos de “Camelo Maurício” e que será empregada posteriormente no estudo das isometrias. Como ilustrado na Figura 5, partimos de um quadrado e retiramos dele triângulos; cada triângulo extraído de um lado foi anexado (concatenado) a outro lado do quadrado. Por fim, acrescentamos o detalhe do olho para caracterizar o animal.

Figura 5 – Ladrilhamento - Camelo Maurício

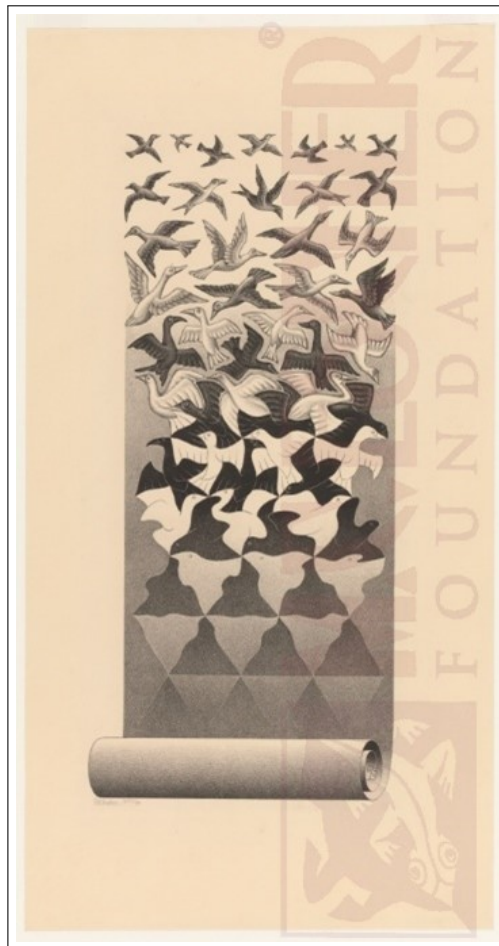


**Fonte:** Produção da Autora (2025)

Aqui, fica a sugestão de trabalhar a imaginação e criar algo similar a partir de um quadrado, de um triângulo equilátero ou de um hexágono regular. Veremos mais adiante por que escolhemos apenas esses tipos de figuras geométricas e não outros polígonos regulares.

Depois de construída a sua figura base para as tesselações, Escher produzia suas obras. Na sua visão, o ladrilhamento era uma maneira de expressar a sua fascinação pela eternidade e pelo infinito de diferentes maneiras. Com essa técnica de construção visual, o artista conseguia também trabalhar com a metamorfose, transformando figuras em pássaros estáticos para pássaros voando, criando uma sensação de transformação, como podemos perceber na obra “Libertação” criada em 1955 em litografia. Nela os pássaros são criados a partir de triângulos, se tornam mais realistas e se libertam no papel, saindo voando. Notamos esse padrão na obra representada na Figura 6.

Figura 6 – Obra de Escher: "Libertação"(1955)



**Fonte:** ESCHER, M. C. (2025)

Além disso, o artista explorou também o conceito abstrato de limite. Não o limite que definimos a partir de derivadas, mas a interpretação intuitiva desse objeto matemático. Para isso, ele usava ladrilhamentos com progressões, tornando as figuras criadas cada vez menores ou maiores, dependendo da sensação que desejava transmitir.

A obra na Figura 7, denominada de “Limite Circular IV” criada em 1960 em xilogravura, é composta por anjos e demônios, dando o contraste e criando um padrão. Escher explicou que “os componentes se reduzem de dentro para fora. Os seis maiores, três anjos brancos e três demônios pretos, estão ordenados radialmente em volta do centro” de forma que “céu e inferno aparecem alternadamente seis vezes”. (Tjabbes, 2010, p. 116).

Figura 7 – Obra de Escher: "Limite Circular IV"(1960)



**Fonte:** ESCHER, M. C. (2025)

Ao analisar uma obra como essa, notamos o nível de excentricidade e talento que o Escher possuía. Hoje, facilmente conseguimos construir algo parecido por meio de softwares e imagens digitais. Porém, na época, o artista não poderia imaginar que esses meios existiriam. Ele elaborava detalhadamente seu rascunho, talhava manualmente a madeira e, em seguida, imprimia sua obra final em uma folha.

Nos seus relatos, Escher, ao construir a obra “Cada vez menor” em 1958 em xilogravura, conta que

adotei uma redução contínua e quase maníaca até alcançar o limite da execução na prática. Eu dependia de quatro fatores: a qualidade da madeira usada na matriz, o gume bem amolado de minha ferramenta, a firmeza de minha mão e, especialmente, a acuidade de minha visão, que contou com a ajuda de uma lente com aumento de 12 vezes. (Tjabbes, 2010, p. 114)

Assim, podemos perceber o cuidado do artista com cada detalhe, veja a obra na Figura 8.

Figura 8 – Obra de Escher: "Cada vez menor"(1958)



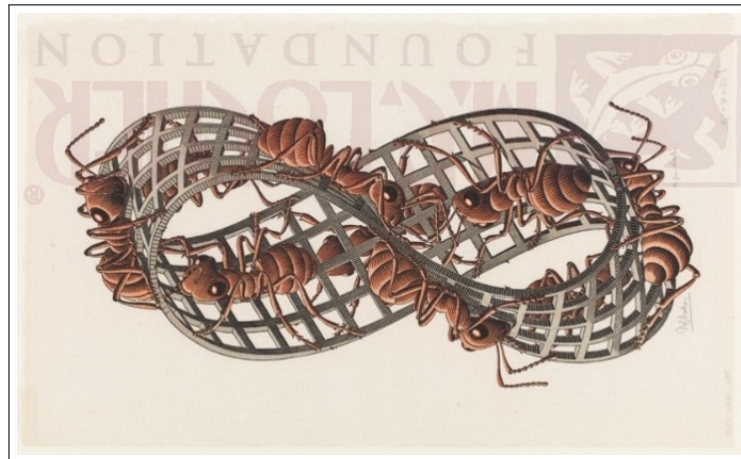
**Fonte:** ESCHER, M. C. (2025)

Ainda, Escher não estava totalmente satisfeito com seus feitos, comentava que a “redução centrípeta mais uma vez demonstrou-se insatisfatória, por causa de seus limites externos arbitrários” (Tjabbes, 2010, p. 114). Realmente a realidade palpável não consegue transmitir todas as noções que Escher gostaria, muitas dessas só conseguimos representar efetivamente a partir da linguagem matemática.

Temas como eternidade e infinito são presentes em muitas obras de Escher, principalmente nos trabalhos executados mais no final da sua carreira. Combinando dessa forma “disciplinas artísticas tradicionais e conhecimentos matemáticos específicos, característica incomum para a época” (Tjabbes, 2010, p. 121).

Em vista disso, Escher gostava de trabalhar com o irreal, trazer em suas obras situações e espaços impossíveis. Ele afirmava que “a realidade a nossa volta, o mundo tridimensional que nos rodeia, é muito comum, muito sem graça, muito banal para nós. Nós buscamos o não natural ou o sobrenatural, aquilo que não existe, um milagre” (Tjabbes, 2010, p. 129). Um exemplo disso, é a sua representação da Fita de Mobius na obra “Fita de Mobius II” de 1963.

Figura 9 – Obra de Escher: "Fita de Mobius II"(1963)



**Fonte:** ESCHER, M. C. (2025)

Podemos concluir que Escher é uma grande inspiração, mostrando que podemos criar muito mais do que apenas aquilo que os nossos olhos veem. O mundo das ideias e da imaginação pode ser muito maior que o ambiente que temos ao nosso entorno. Parte dessa imaginação e desse raciocínio pode ser utilizado para estimular o entendimento de conceitos matemáticos mais abstratos, especialmente a álgebra, que não é palpável.

Como já dizia Einstein,

a imaginação é mais importante do que o conhecimento, pois o conhecimento é limitado, enquanto a imaginação pode abranger tudo o que existe no mundo, incentiva o progresso, é fonte de evolução e, no sentido estrito, é fator real de investigação científica. (Fainguelernt e Nunes, 2015, p. 16)

Assim, podemos perceber que a matemática pode ser uma aliada no ensino de arte, enquanto a arte se revela uma ferramenta valiosa para o ensino da matemática.

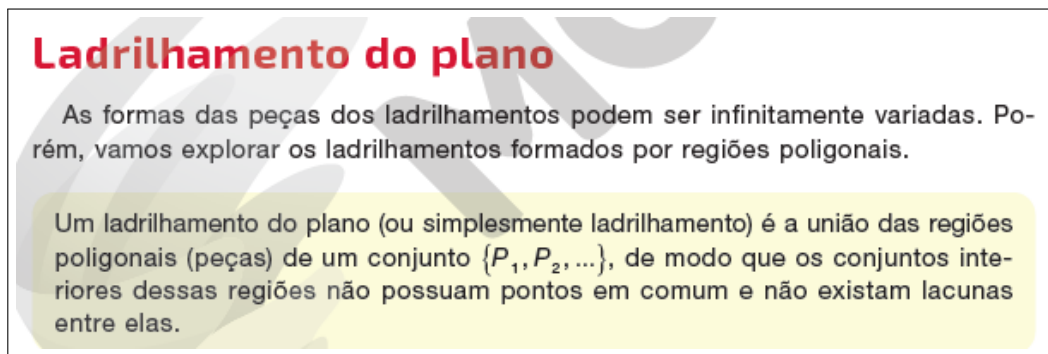
No próximo capítulo, veremos os modelos de ladrilhamentos que podemos encontrar e entender melhor como Escher as utilizava em suas obras com tanto sucesso, de modo a aplicá-las ao nosso contexto com o objetivo de ensino da matemática.

## 4 LADRILHAMENTOS

Um ladrilhamento é um conjunto de formas geométricas (ladrilhos) que se encaixam preenchendo uma superfície sem deixar nenhum espaço em branco e sem se sobreporem. O ladrilhamento é um tipo de padronagem, que pode ser definido como um design bidimensional que normalmente possui um tipo de simetria (Fathauer, 2021).

Essa definição é a mesma utilizada nos livros do ensino básico, como podemos notar na Figura 10, que mostra um recorte do livro da coleção Diálogo no tema Geometria Plana de Moderna (2020b), no qual é definido a convenção de ladrilhamento.

Figura 10 – Ladrilhamentos



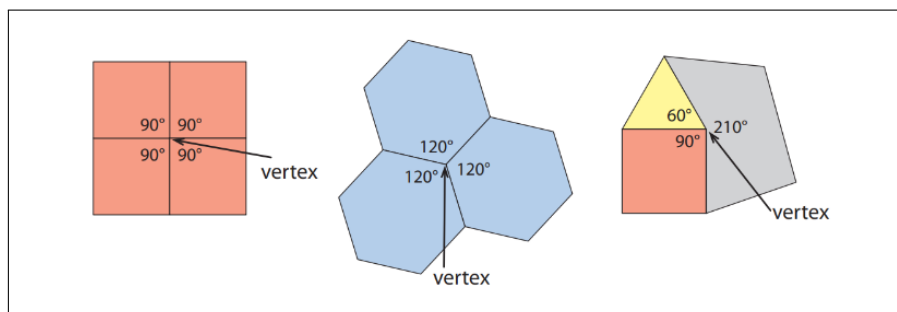
Fonte: Moderna (2020b, p. 107)

Os ladrilhamentos, ou as tesselações, são utilizados desde o início das civilizações, como em cestos indígenas, mosaicos em palácios, vitrais em igreja e nas vestimentas. Os exemplos de Escher, vistos anteriormente, são mais atuais e exemplificam bem o que queremos mostrar.

Os ladrilhamentos são classificados como Ladrilhamentos Regulares, Semirregulares e Demirregulares. Para entender melhor esses termos, vamos definir alguns itens auxiliares.

**Definição 4.0.1.** Um *nó* (ou *vertex*) é ponto de encontro entre três ou mais figuras.

Figura 11 – Exemplos de Nó (Vertex)

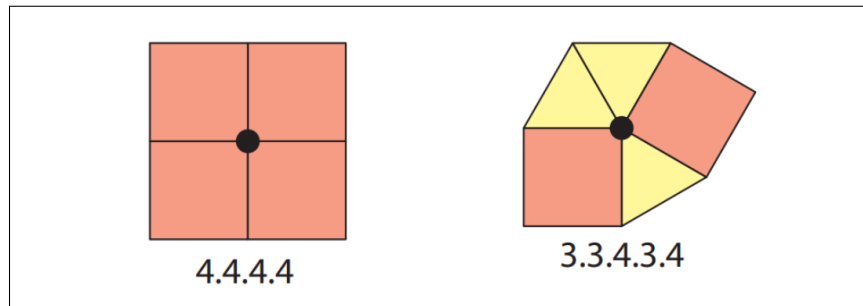


Fonte: Fathauer (2021, p. 19)

Observamos que, no ponto de encontro dos polígonos, a soma de seus ângulos internos deve ser igual a  $360^\circ$ . Além disso, podemos classificá-los de diferentes maneiras. Por exemplo, o

encontro de vértices de quatro quadrados forma um tipo de nó distinto daquele obtido pela junção de um triângulo, um quadrado e um pentágono. Para representar essa classificação, utilizamos o número de lados de cada polígono e a sequência em que aparecem no encontro. A Figura 12 ilustra alguns exemplos desses nós.

Figura 12 – Tipos de Nó

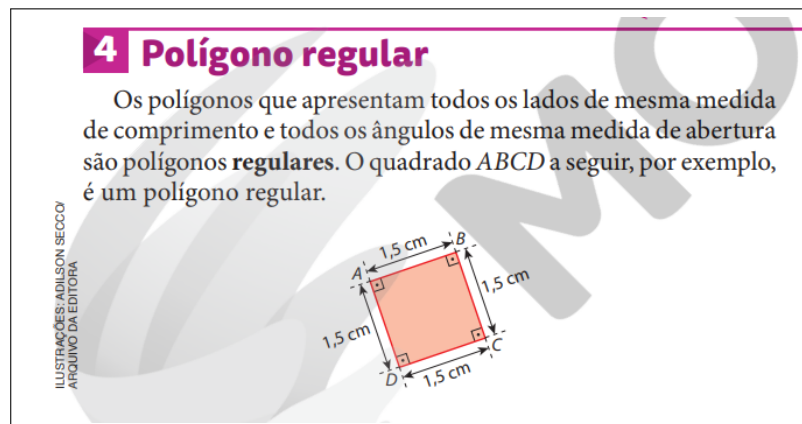


Fonte: Fathauer (2021, p. 22)

Quando há o encontro de quatro quadrados, chamamos o nó de 4.4.4.4. Já no caso do encontro de três triângulos e dois quadrados, no formato mostrado na Figura 12, classificamos o nó como 3.3.4.3.4.

Relembramos que polígonos regulares são aqueles cujos lados têm todos o mesmo comprimento e cujos ângulos internos possuem medidas iguais. A Figura 13 ilustra essa definição em um recorte de um livro de matemática utilizado em aulas do 8º ano do Ensino Fundamental.

Figura 13 – Definição de Polígono Regular



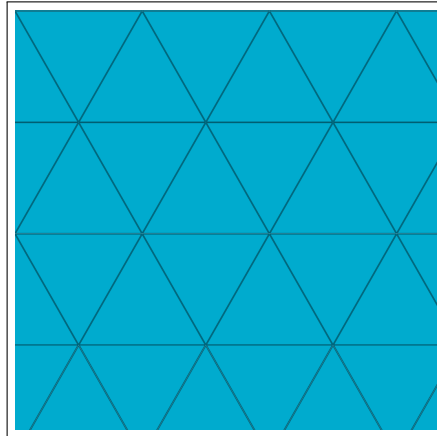
Fonte: Gay (2022b, p. 139)

A seguir, vamos apresentar as definições de diferentes ladrilhamentos.

**Definição 4.0.2.** *Ladrilhamento Regular:* aquele que utiliza apenas polígonos regulares congruentes entre si como ladrilhos, de modo que se forma apenas um tipo de nó.

Podemos observar o exemplo apresentado na Figura 14, em que temos um ladrilhamento composto por triângulo equiláteros, no qual o nó é composto pelo ponto de encontro de seis triângulos (3.3.3.3.3.3).

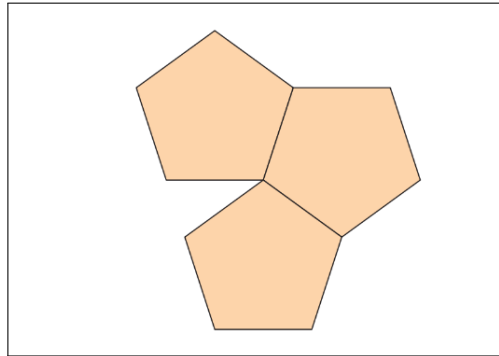
Figura 14 – Ladrilhamento Regular



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Notamos que apenas triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares permitem a formação de ladrilhamentos regulares. Isso ocorre porque, nesses casos, a soma dos ângulos internos dos polígonos que se encontram em um vértice é exatamente  $360^\circ$ , permitindo que o padrão se repita sem lacunas. Por outro lado, outros polígonos, como o pentágono regular, não permitem esse arranjo, pois a junção de três pentágonos em um vértice resulta em um ângulo total menor que  $360^\circ$ , e não é possível adicionar um quarto pentágono para completar o ladrilhamento sem deixar espaços vazios, como ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Ladrilhamento de Pentágonos



**Fonte:** Fathauer (2021, p. 21)

Notamos que um polígono regular tem todos os seus ângulos internos congruentes. Pela fórmula do ângulo interno  $\theta_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ , podemos demonstrar que, para  $n > 6$ , temos que  $\theta > 120^\circ$ , pois

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n} > 120^\circ,$$

$$180(n-2) > 120n,$$

$$180n - 120n > 360,$$

$$60n > 360$$

e

$$n > 6.$$

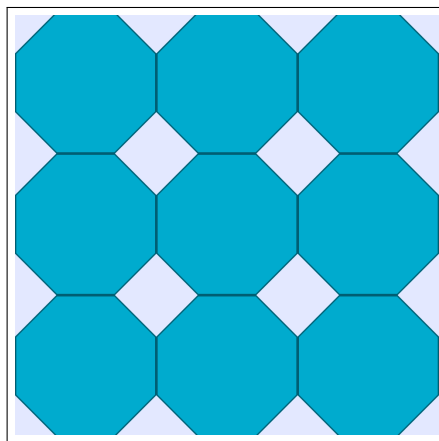
Dessa maneira, concluímos que qualquer polígono regular com mais de seis lados possui ângulos internos maiores que  $120^\circ$ . Assim, ao tentar formar um ladrilhamento, basta que três desses polígonos se encontrem em um nó para que a soma dos ângulos exceda  $360^\circ$ , tornando impossível a formação de um padrão regular sem lacunas.

Segue a definição de um ladrilhamento semirregular :

**Definição 4.0.3.** *Ladrilhamento Semirregular:* aquele formado por dois ou mais tipos de polígonos regulares, mantendo apenas uma configuração de nó ao longo do padrão.

Observamos na Figura 16, que o nó é formado pelo encontro de dois octógonos e um quadrado, sendo classificado como 8.8.4.

Figura 16 – Ladrilhamento Semirregular



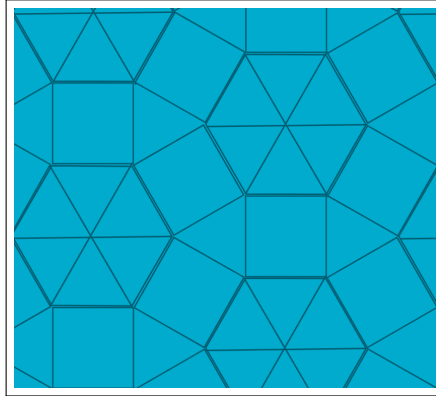
**Fonte:** Produção da autora (2025)

Por fim, o Ladrilhamento Demirregular tem a seguinte definição.

**Definição 4.0.4.** *Ladrilhamento Demirregular:* aquele formado por dois ou mais tipos de polígonos regulares, apresentando diferentes tipos de nós ao longo do padrão.

A Figura 17 exemplifica um ladrilhamento utilizando triângulos e quadrados. Observamos que os nós presentes nesse padrão são formados, de um lado, pelo encontro de seis triângulos (3.3.3.3.3.3) e, de outro, pelo encontro de dois quadrados e três triângulos (3.4.3.4.3). Esse exemplo ilustra um ladrilhamento demirregular, no qual dois ou mais tipos de polígonos regulares são combinados e aparecem diferentes tipos de nós ao longo do padrão.

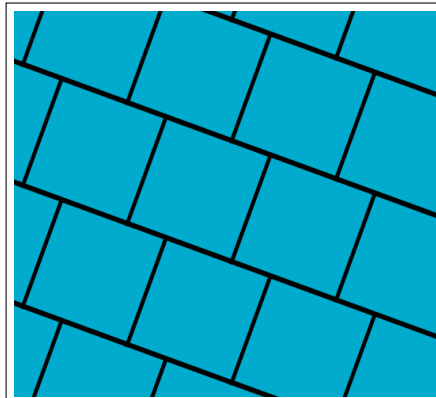
Figura 17 – Ladrilhamento Demirregular



**Fonte:** Produção da autora (2025)

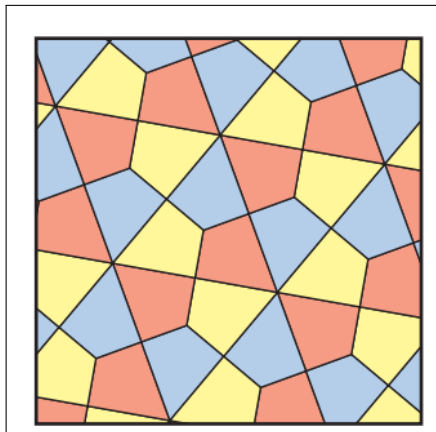
Além desses, podemos observar muitos outros tipos de ladrilhamentos que não seguem definições específicas, como aqueles formados lado a lado ou que utilizam polígonos não regulares. Alguns exemplos são ilustrados nas Figuras 18 e 19.

Figura 18 – Ladrilhamento com quadrados lado a lado



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Figura 19 – Ladrilhamento com polígonos irregulares



**Fonte:** Fathauer (2021, p. 40)

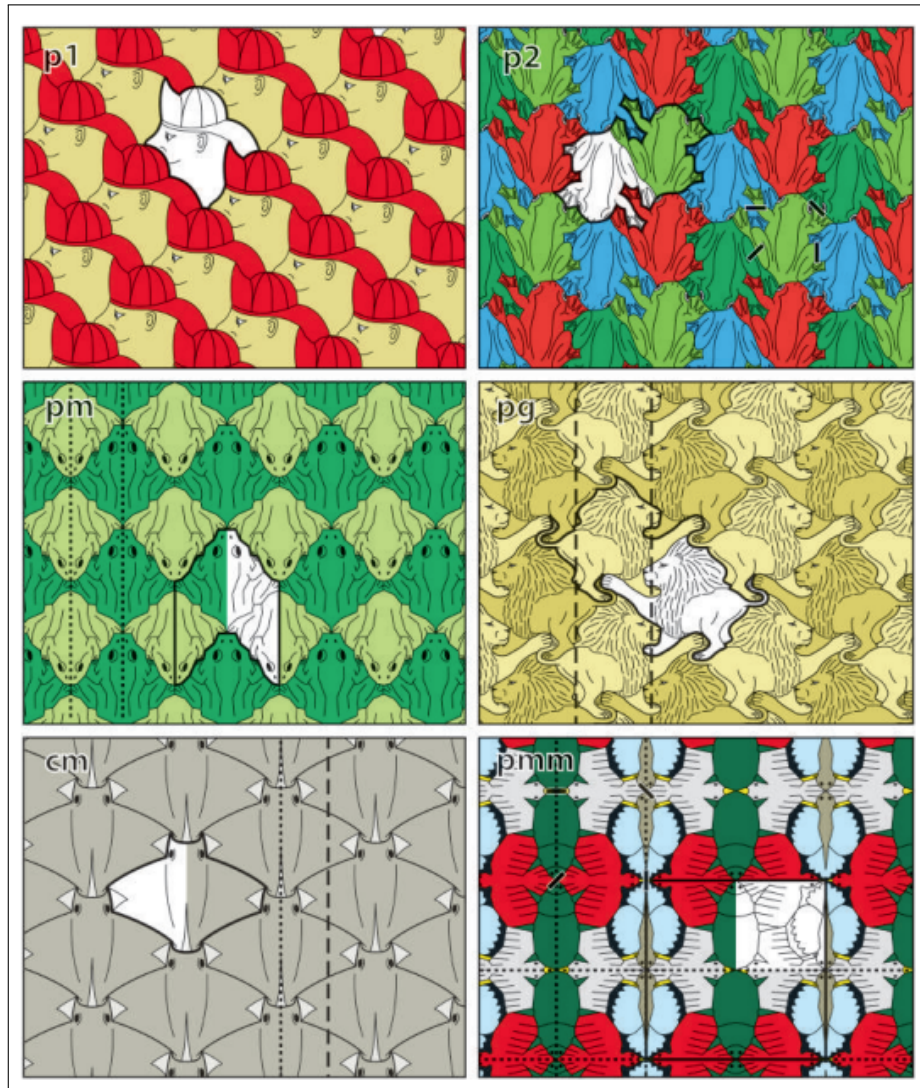
Dentre todos esses padrões, observamos a presença de isometrias, simetrias e transformações lineares. Para compreender a matemática por trás de um ladrilhamento, estudaremos esses conceitos nas seções seguintes.

É possível provar que existem 17 sistemas distintos de ladrilhamentos, algo que os matemáticos comprovaram teoricamente, após Escher ter chegado empiricamente ao mesmo resultado. Para classificá-los formalmente e provar os resultados com argumentos matemáticos, são utilizados conceitos da teoria de grupos e seria necessário ir além do que abordaremos no Capítulo 6, aprofundando-se no estudo dos “grupos de papel de parede” (*wallpaper groups*), o conjunto de isometrias que gera padrões repetidos em duas direções específicas.

Cada um desses grupos descreve um tipo de repetição e combinação de simetrias que podem ocorrer: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Na sequência apresentamos exemplos de pinturas de Escher que caracterizam esses grupos, destacando algumas transformações que podem ser observadas de forma intuitiva.

Na Figura 20 são apresentados seis exemplos dos 17 grupos de papel de parede. A notação abordada segue a seguinte convenção: inicia-se com  $p$  para indicar uma *célula primitiva*, que é a menor região repetitiva capaz de gerar todo o padrão por translações, ou  $c$  para uma *célula centrada*, que é uma região maior que contém repetições internas e também gera o padrão por translações. Em seguida, um dígito  $n$  indica a *simetria de rotação*, se houver; e os símbolos seguintes representam isometrias de translação e reflexão:  $m$  para reflexão,  $g$  para reflexão deslizante, ou 1 caso não haja nenhuma dessas simetrias.

Figura 20 – Grupos de Papel de Parede



Fonte: Fathauer (2021, p. 61)

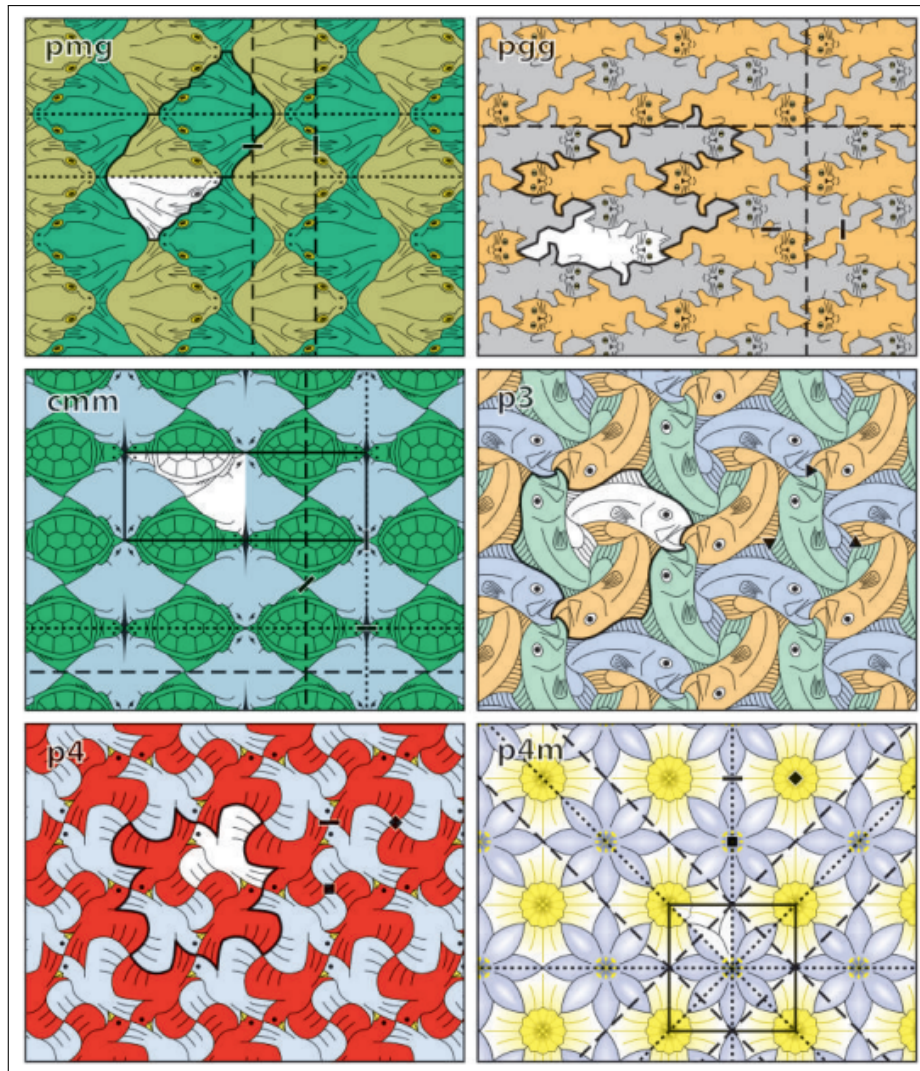
Observando a Figura 20, nos primeiros seis grupos de papel de parede temos:

- p1: uma célula primitiva com translação; o número 1 indica que não há rotação nem reflexão;
- p2: uma célula primitiva com translação e rotação em apenas um sentido, indicada pelo número 2;
- pm: uma célula primitiva com reflexão e translação da célula original combinada com a célula espelhada, com eixos de reflexão paralelos;
- pg: semelhante ao *pm*, mas a célula primitiva apresenta reflexão deslizante;
- cm: uma célula centrada, formada pela união de duas células primitivas, com reflexão em eixos paralelos;

pmm: uma célula primitiva com reflexões em duas direções perpendiculares, formando um padrão mais simétrico.

Na Figura 21, podemos ver outros seis exemplos diferentes de grupos de papel de parede.

Figura 21 – Grupos de Papel de Parede



Fonte: Fathauer (2021, p. 62)

A seguir descrevemos as simetrias que ocorrem nos exemplos da Figura 21.

pmg: a célula primitiva apresenta reflexões em eixos paralelos, além de uma reflexão deslizante cujo eixo é perpendicular aos eixos das reflexões;

pgg: a célula primitiva é submetida a duas reflexões deslizantes com eixos perpendiculares entre si;

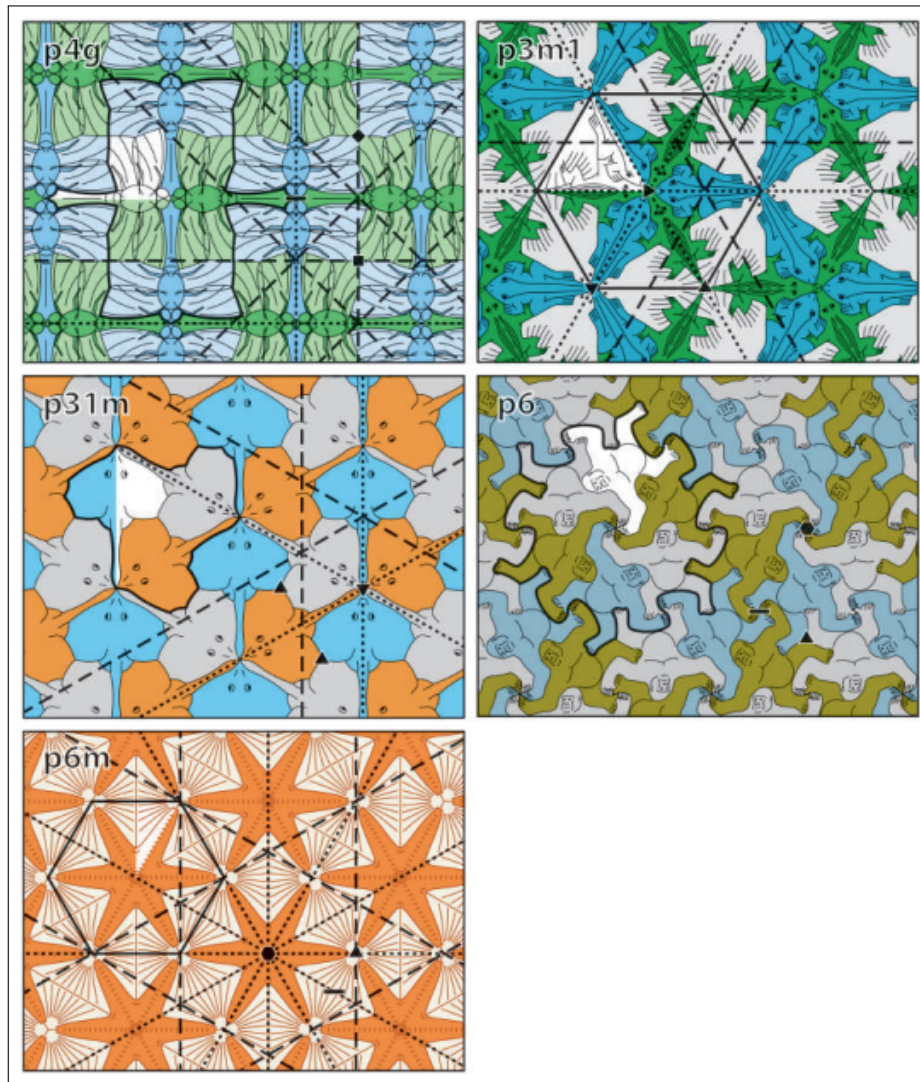
cmm: uma célula centrada com duas reflexões em direções distintas;

$p3$  e  $p4$ : introduzem simetrias rotacionais; no  $p3$ , cada nó possui três células associadas a rotações de  $120^\circ$ , enquanto no  $p4$ , cada nó apresenta quatro vértices com rotações de  $90^\circ$ ;

$p4m$ : além da rotação quadrada, a célula primitiva apresenta reflexões em quatro direções distintas, conferindo uma simetria mais complexa ao padrão.

Na Figura 22 são apresentados os últimos exemplos de grupos de papel de parede:

Figura 22 – Grupos de Papel de Parede



Fonte: Fathauer (2021, p. 63)

As simetrias que ocorrem nos exemplos da Figura 22 são:

$p4g$ : a célula quadrada apresenta rotações de  $90^\circ$  e reflexões deslizantes;

$p3m1$ : cada célula triangular possui rotação de  $120^\circ$ , acompanhada de reflexões nos três lados do triângulo equilátero; lembrando que o hexágono pode ser formado pela união de seis triângulos desse tipo;

$p31m$ : a célula primitiva realiza rotações de ordem três ( $120^\circ$ ) em três centros distintos, com reflexões em três direções diferentes;

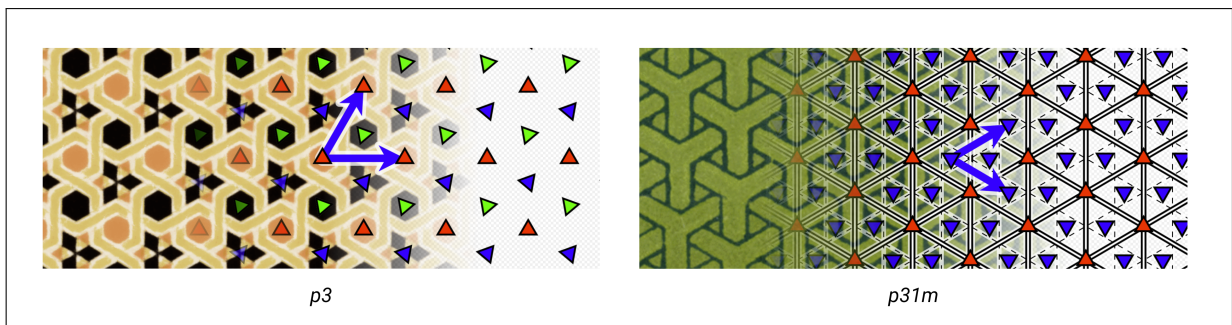
$p6$ : a célula triangular apresenta rotação de  $60^\circ$  ao redor de um ponto central, evidenciada pelo encontro de seis vértices em um mesmo nó;

$p6m$ : mantém a rotação do grupo  $p6$ , acrescentando reflexões, formando um padrão de simetria ainda mais complexo.

Essa sequência completa a apresentação dos 17 grupos de papel de parede, mostrando como combinações de translações, rotações e reflexões definem a variedade de padrões periódicos possíveis.

Para auxiliar na compreensão dos grupos de papel de parede que podem ser formados, a Figura 23 apresenta os diagramas correspondentes aos grupos  $p3$  e  $p31m$ .

Figura 23 – Diagramas de Grupos de Papel de Parede



Fonte: Gagern e Richter-Gebert (2009, p. 6)

No diagrama do grupo  $p3$ , observa-se uma rotação de  $120^\circ$  que contribui para a formação da imagem como um todo. Em cada triângulo colorido, é possível identificar essa rotação ocorrendo entre pares. Já no grupo  $p31m$ , além da rotação semelhante, nota-se também a presença de reflexões dos triângulos, o que confere maior simetria à composição.

Como o objetivo deste trabalho não é aprofundar os conceitos relacionados aos Grupos de Papel de Parede, recomenda-se a leitura do livro “Tessellations: Mathematics, Art, and Recreation” de Fathauer (2021), em que o autor apresenta uma abordagem detalhada sobre o tema e explora aspectos que não foram abordados neste material por não serem essenciais ao escopo proposto. Se a curiosidade e interesse matemático for maior, ao ponto de ver a estrutura desses grupos e as demonstrações a cerca da classificação, sugerimos o livro Finston e Morandi (2014).

## 5 GRUPOS

Durante a primeira metade do século XIX, matemáticos como Galois (1811–1832), no contexto do desenvolvimento da álgebra, trabalharam em novos conceitos enquanto adaptavam métodos já existentes para solucionar problemas até então não resolvidos (Boyer e Merzbach, 2011). Assim, uma das ferramentas criadas, inserida no que hoje chamamos de álgebra abstrata ou moderna, é a teoria dos grupos. Desde então, o conceito de grupo auxiliou muitos matemáticos a entender e trabalhar melhor com a aritmética, a álgebra e a geometria. Além disso, a partir dessa estrutura, foram formalizadas outras, como anéis, módulos, corpos e espaços vetoriais.

Neste capítulo, introduziremos conceitos fundamentais de teoria de grupos que servirão de base para o estudo, no capítulo seguinte, das isometrias e de sua caracterização.

### 5.1 CONCEITOS INICIAIS

Um grupo é uma estrutura algébrica na qual há um conjunto de elementos associados a uma operação que combina dois elementos quaisquer para formar um terceiro, que também deve pertencer a esse conjunto. Isso significa que essa operação deve ser fechada. Além disso, para se qualificar como grupo, o conjunto e a operação devem satisfazer algumas condições, chamadas axiomas de grupo: associatividade, existência de elemento neutro e existência de elementos inversos.

Os conhecimentos sobre os conceitos iniciais da teoria dos grupos, que serão estudados e explorados neste capítulo, têm como fundamento científico a bibliografia composta pelas obras (Martin, 2010), (Domingues e Iezzi, 2003), (Janesch, 2008) e (Garcia e Lequain, 2018).

**Definição 5.1.1.** Um conjunto não vazio  $G$  munido de uma operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) *A operação é associativa:*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ para quaisquer } a, b, c \in G;$$

(ii) *Existência de elemento neutro:*

$$\text{existe um elemento } e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \text{ para todo } a \in G;$$

(iii) *Todo elemento possui um elemento inverso:*

$$\text{para cada } a \in G, \text{ existe } a^{-1} \in G \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

Muitas vezes deixaremos de indicar a operação do grupo, escrevendo apenas  $G$  para denotar um grupo  $(G, \cdot)$ . Quando não existir ambiguidade, escreveremos  $ab$  no lugar de  $a \cdot b$ .

A seguir, veremos, por meio da Proposição 5.1.2, propriedades satisfeitas por elementos de um grupo, em especial que o elemento neutro e o inverso de cada elemento de um grupo  $(G, \cdot)$  são únicos.

**Proposição 5.1.2.** *Seja  $(G, \cdot)$  um grupo. Então,*

- (a) *o elemento neutro é único;*
- (b) *para cada  $a \in G$ , o elemento inverso de  $a$  é único;*
- (c)  *$(a^{-1})^{-1} = a$ , para todo  $a \in G$ .*
- (d)  *$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ , para quaisquer  $a, b \in G$ .*

*Demonstração.*

- (a) Suponhamos que  $e$  e  $e'$  sejam elementos neutros de  $G$ . Como  $e$  é elemento neutro, então  $e \cdot e' = e'$ . Por outro lado, como  $e'$  também é elemento neutro, então  $e \cdot e' = e$ . Logo,

$$e' = e \cdot e' = e,$$

ou seja, existe apenas um elemento neutro em  $G$ .

- (b) Suponhamos que  $b$  e  $c$  sejam elementos inversos de  $a$ . Assim,  $a \cdot b = e$  e  $c \cdot a = e$ . Então,

$$c = c \cdot e = c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = e \cdot b = b,$$

o que mostra a unicidade do inverso.

- (c) Pela definição de  $a^{-1}$ , temos que

$$a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1}.$$

Notamos que essa igualdade também mostra que  $a$  é inverso de  $a^{-1}$  e, pela unicidade do inverso,  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

- (d) Seja  $e$  o elemento neutro de  $G$ . Observamos que

$$e = a \cdot a^{-1} = a \cdot e \cdot a^{-1} = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}).$$

Portanto,

$$(a \cdot b)^{-1} = (a \cdot b)^{-1} \cdot e = (a \cdot b)^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = b^{-1} \cdot a^{-1}. \quad \square$$

Observamos que, mesmo não sendo mencionada explicitamente nas demonstrações acima, a associatividade foi utilizada (e é necessária) nos itens (b) e (c). Sem essa propriedade, torna-se muito difícil desenvolver uma teoria em álgebra.

As propriedades exigidas em um grupo são frequentemente utilizadas no ensino básico. Na Figura 24, observamos a propriedade da associatividade da adição dos números naturais, ensinada aos alunos no sexto ano do ensino fundamental.

Figura 24 – Associatividade no Ensino Básico

**Propriedade associativa**

Em uma adição de três ou mais números naturais, podemos associar as parcelas de modos diferentes; a soma será a mesma. Assim, considerando os números naturais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Essa é a propriedade **associativa da adição**. Aplicando-a, podemos adicionar três ou mais números da forma que for mais conveniente.

Por exemplo:  $(12 + 8) + 5 =$  e  $12 + (8 + 5) =$

$$= 20 + 5 =$$

$$= 25$$

$$= 12 + 13 =$$

$$= 25$$

Portanto:  $(12 + 8) + 5 = 12 + (8 + 5)$

**Fonte:** Gay (2022a, p. 39)

Para cada exemplo de grupo, é preciso analisar qual é a operação utilizada e se essa cumpre com os requisitos da definição de grupo. Por exemplo, o elemento neutro e o inverso de cada elemento variam de acordo com o conjunto e a operação em que estamos trabalhando. Como vemos no recorte de um livro didático do sexto ano, na Figura 25, o número 1 é o elemento neutro da multiplicação dos números naturais, mas não é o elemento neutro se considerarmos a operação da adição.

Figura 25 – Elemento Neutro da Multiplicação

**Propriedade do elemento neutro**

Se  $a$  é um número natural, então:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Essa é a propriedade da existência do **elemento neutro da multiplicação**. O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

**Fonte:** Gay (2022a, p. 56)

A seguir, veremos alguns exemplos para compreender melhor as noções iniciais de grupos.

**Exemplo 5.1.3.** Os primeiros exemplos de grupos são os conjuntos numéricos com relação a operação de adição:  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{C}, +)$ . Em todos esses casos, o elemento neutro é 0 e o inverso de cada número  $x$  é o oposto aditivo de  $x$ , ou seja,  $-x$ .

Observamos que o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , não tem estrutura de grupo com relação à operação de adição, pois não contém o elemento neutro. Mesmo se considerarmos que  $0 \in \mathbb{N}$ , ainda assim  $(\mathbb{N}, +)$  não é um grupo, uma vez que qualquer natural não nulo não possui inverso (oposto) em  $\mathbb{N}$ .

**Observação 5.1.4.** Lembramos que uma operação binária em um conjunto  $G$ , denotada por  $\cdot$ , é uma função de  $G \times G$  em  $G$ . Assim, dada uma igualdade de elementos ou expressões, podemos operar em ambos os lados por um mesmo elemento. Por exemplo, se  $a, b \in G$  e  $a = b$ , então  $(a, c) = (b, c) \in G \times G$  e, portanto,

$$a \cdot c = b \cdot c,$$

uma vez que função  $\cdot$  associa a cada par do domínio um único elemento do contradomínio.

Um grupo é uma das estruturas algébricas mais “simples”, e sua definição, como vimos acima, pode estar relacionada à resolução de uma equação linear elementar. No Exemplo 5.1.5, de maneira diferenciada, analisamos a resolução de uma equação utilizando a estrutura do grupo aditivo dos números inteiros.

**Exemplo 5.1.5.** Considere a equação de números inteiros:

$$x + 2 = 5. \tag{1}$$

Para resolvê-la, devemos de alguma forma isolar a incógnita  $x$ . Para isso, a ideia é adicionar o inverso (oposto) do elemento 2 em ambos os lados da igualdade. Para que essa operação seja possível, é necessário um axioma que contemple a existência de elementos inversos (opostos) no conjunto. Além disso, notamos que tal operação deve ser fechada dentro do seu próprio conjunto, caso contrário, nem todas as equações nesse conjunto teriam solução. Assim, a equação (1) é equivalente a:

$$(x + 2) + (-2) = 5 + (-2). \tag{2}$$

Ao somarmos o inverso (oposto) de 2 em ambos os lados, torna-se necessário a propriedade associativa, outro dos axiomas de grupo:

$$x + (2 + (-2)) = 3. \tag{3}$$

Por fim, é necessário a existência de elemento neutro, pois a soma de um número com seu inverso (oposto) resulta em 0:

$$x + 0 = 3. \tag{4}$$

Portanto,

$$x = 3. \tag{5}$$

Ao resolver a equação proposta, vimos a necessidade de todos os axiomas que definem um grupo, o que reforça a importância de considerar essas propriedades. Afinal, não queremos

estruturas tão básicas que não possam ser utilizadas em tópicos mais gerais da matemática, mas também não podemos tornar os axiomas tão específicos a ponto de só poderem ser aplicados a conceitos particulares de certos conteúdos.

**Exemplo 5.1.6.** Ainda utilizando os conjuntos numéricos, temos que  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  e  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  são grupos. Nesses casos, a operação é a multiplicação e, como todo elemento deve ter inverso, é necessário excluir o número 0. Em todos esses casos, o elemento neutro é 1 e o inverso de cada número  $x$  é dado por  $\frac{1}{x}$ .

Dentre os diversos exemplos de Grupos, existem os grupos finitos, ou seja, formados por conjuntos finitos. Nesses casos, dizemos que a quantidade de elementos do grupo é a *ordem do grupo*. Por exemplo, podemos ter um grupo de ordem um, em que o único elemento do grupo é o elemento neutro  $e$ , conseqüentemente, o inverso é o próprio elemento, e a associatividade é satisfeita trivialmente.

**Exemplo 5.1.7.** Seja  $G = \{-1, 1\}$ . Temos que  $(G, \cdot)$  é um grupo finito de ordem 2 cuja tabela de operações é dada por:

Tabela 1 – Tabela de operação do grupo  $G$ .

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Segue da tabela que a operação  $\cdot$  é fechada em  $G$ . Além disso, com essas escolhas os axiomas são satisfeitos:

- (i) observamos que a operação  $\cdot$  coincide com a multiplicação dos números reais, na qual a associatividade é válida;
- (ii) nesse exemplo, o elemento neutro é o número 1, uma vez que  $1 \cdot 1 = 1$  e  $(-1) \cdot 1 = -1$ ;
- (iii) notamos que o inverso de 1 é 1 o inverso de  $-1$  é  $-1$ .

Portanto, podemos concluir que  $(G, \cdot)$  é de fato um grupo.

Uma classe importante de exemplos de grupos é a dos chamados *grupos de permutações*, formados pela funções bijetoras de um conjunto não vazio  $X$  em si mesmo, com a operação de composição de funções.

**Observação 5.1.8.** Ao longo do texto, consideramos que o leitor tenha conhecimento e domínio sobre noções de funções bijetoras, bem como sobre as definições e propriedades de funções injetoras e sobrejetoras. Entre essas propriedades, destacamos que a composição de funções bijetoras resulta numa função bijetora e que uma função é bijetora se, e somente se, for inversível.

**Exemplo 5.1.9.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $S(X)$  o conjunto formado pelas bijeções de  $X$  em  $X$ , isto é,

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ é bijetora}\}.$$

O grupo é formado pelo conjunto  $S(X)$  e a operação é composição de funções, denotada por  $\circ$ .

(i) Dados  $f, g, h \in S(X)$ , para todo  $x \in X$ , temos:

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = [(f \circ g) \circ h](x).$$

Logo,  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ , e a associatividade é válida.

(ii) O elemento neutro desse conjunto é a função identidade, denotada por  $id_X : X \rightarrow X$  e definida por  $id_X(x) = x$ . De fato,  $id_X$  é bijetora, ou seja,  $id_X \in S(X)$  e, para qualquer  $f \in S(X)$  e para todo  $x \in X$ , temos:

$$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x) \quad \text{e} \quad (f \circ id)(x) = f(id_X(x)) = f(x).$$

Portanto,  $id \circ f = f \circ id_X = f$ , o que mostra que a identidade é o elemento neutro.

(iii) Por fim, toda função bijetora é inversível. Assim, para cada  $f \in S(X)$ , existe  $f^{-1} \in S(X)$  tal que

$$f \circ f^{-1} = id_X = f^{-1} \circ f.$$

Com isso, provamos que  $(S(X), \circ)$  é um grupo.

Ao definir uma operação em um conjunto de modo que ele forme um grupo, essa operação não precisa, necessariamente, ser comutativa.

**Definição 5.1.10.** Um grupo  $(G, \cdot)$  é chamado *abeliano* (ou comutativo) se

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ para quaisquer } a, b \in G.$$

Os grupos dos Exemplos 5.1.3 e 5.1.6 são grupos abelianos. No entanto, em grupos de permutações, a composição de funções não é, em geral, comutativa. Mais precisamente, se  $X$  contém três ou mais elementos,  $(S(X), \circ)$  não é um grupo abeliano. Vejamos os contraexemplos a seguir:

Consideramos  $X = \{1, 2, 3\}$  e as funções  $f, g : X \rightarrow X$  definidas por:

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1 \quad \text{e} \quad g(1) = 2, g(2) = 1, g(3) = 3.$$

É fácil ver que  $f$  e  $g$  são bijeções de  $X$  em  $X$ . Calculando as composições, obtemos:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 3, \quad \text{enquanto} \quad (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1.$$

Portanto,  $f \circ g \neq g \circ f$ , o que mostra que a operação não é comutativa.

Outro contraexemplo pode ser obtido tomando  $X = \mathbb{R}$  e as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = 2x$ . Ambas funções são bijetoras, logo  $f, g \in S(\mathbb{R})$ . Ao calcularmos  $f \circ g$ , obtemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x + 1.$$

Por outro lado, ao calcularmos  $g \circ f$ , obtemos:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

Como as funções resultantes são diferentes, concluímos, novamente, que a composição não é comutativa em  $S(\mathbb{R})$ .

No Exemplo 5.1.6, vimos que  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  são grupos. Como  $\mathbb{Q}^*$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^*$ , podemos considerar  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  como um grupo “contido” no grupo  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ . Essa observação nos leva ao conceito de subgrupo, isto é, um grupo cujos elementos pertencem a outro grupo e cuja operação é a operação original.

**Definição 5.1.11.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo. Um subconjunto não vazio  $H$  de  $G$  é um subgrupo de  $G$  quando, com a operação de  $G$ , o conjunto  $H$  é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

- (i) para todo  $a, b \in H$ , tem-se  $a \cdot b \in H$ .
- (ii) para todo  $a, b, c \in H$ , tem-se  $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$ .
- (iii) existe  $e \in H$ , para todo  $a \in H$ , tal que  $a \cdot e = e \cdot a = a$ .
- (iv) para cada  $a \in H$ , existe  $a^{-1} \in H$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

Para não precisarmos verificar todos os axiomas de grupo ao analisarmos se um subconjunto de um grupo é um subgrupo, podemos utilizar a seguinte proposição:

**Proposição 5.1.12.** Sejam  $(G, \cdot)$  um grupo e  $H$  um subconjunto não vazio do grupo  $G$ . São equivalentes:

1.  $H$  é subgrupo de  $G$ ;
2.  $a \cdot b^{-1} \in H$ , para quaisquer  $a, b \in H$ .

*Demonstração.*

(1)  $\Rightarrow$  (2): Por hipótese,  $H$  é grupo. Então, se  $a, b \in H$ , segue que  $b^{-1} \in H$  e, portanto,

$$a \cdot b^{-1} \in H.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Como  $H$  não é vazio, existe  $c \in H$  e, portanto,  $c \in G$ . Pela hipótese de (2), temos que

$$e = c \cdot c^{-1} \in H.$$

Agora, se  $b \in H$ , então  $b, e \in H$  e, por (2), obtemos

$$b^{-1} = e \cdot b^{-1} \in H.$$

Provamos que o elemento neutro  $e$  pertence a  $H$ , assim como o inverso de cada elemento.

Por fim, sejam  $a, b \in H$ . Como  $b^{-1} \in H$ , então  $a, b^{-1} \in H$  e, pela hipótese (2),

$$a \cdot b = a \cdot (b^{-1})^{-1} \in H.$$

Logo, a operação é fechada em  $H$ . Como a associatividade é herdada do grupo  $G$ , concluímos que  $H$  é subgrupo de  $G$ .  $\square$

Observamos que o elemento neutro de  $H$  coincide com o elemento de  $G$ . Além disso, se  $a^{-1}$  é o inverso de  $a$  no grupo  $H$ , então  $a^{-1}$  é também o inverso de  $a$  em  $G$ .

**Exemplo 5.1.13.** Temos que  $(\mathbb{Z}, +)$  é subgrupo de  $(\mathbb{Q}, +)$ , que por sua vez é subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ . Um grupo infinito pode ter um subgrupo finito, por exemplo,  $(\{1, -1\}, \cdot)$  é um subgrupo de  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .

### 5.1.1 Grupos de Matrizes

Nesta seção, estudaremos os grupos de matrizes, que serão importantes para o estudo de isometrias e transformações lineares que veremos mais adiante. Esses grupos permitem representar as transformações de forma algébrica e precisa. Por meio das matrizes, é possível descrever rotações, reflexões, translações e outras transformações que preservam distâncias e ângulos, características das isometrias.

Apresentaremos recortes de livros didáticos sobre matrizes, aproximando elementos da teoria de grupos ao ensino básico. Na Figura 26 temos a definição de uma matriz e exemplos de matrizes.

Figura 26 – Definição e exemplo de matrizes.

Uma **matriz** de ordem (ou do tipo)  $m \times n$  é toda tabela numérica com  $m \cdot n$  elementos dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas, sendo  $m$  e  $n$  números naturais e diferentes de zero.

**Exemplos**

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; -1 \\ 7 &amp; 21 \end{pmatrix}</math>; matriz de ordem <math>2 \times 2</math> (lê-se: dois por dois)</li> <li>• <math>\begin{bmatrix} 9 &amp; -3 &amp; 4 \\ 5 &amp; 7 &amp; 6 \end{bmatrix}</math>; matriz de ordem <math>2 \times 3</math> (lê-se: dois por três)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix}</math>; matriz de ordem <math>3 \times 1</math> (lê-se: três por um)</li> <li>• <math>(1 \ -6 \ 3 \ 48)</math>; matriz de ordem <math>1 \times 4</math> (lê-se: um por quatro)</li> </ul>
---	---

**Fonte:** Andrade (2020, p. 13)

Para as considerações que faremos a seguir, utilizaremos a notação  $K$  para representar, indistintamente, um dos conjuntos  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , e denotaremos por  $M_{m \times n}(K)$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , o conjunto das matrizes com entradas em  $K$  e com  $m$  linhas e  $n$  colunas. Dessa forma consideramos,

$$M_{m \times n}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in K \right\}.$$

De maneira abreviada, podemos denotar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por  $A = [x_{ij}]$ , onde fica subentendido que  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

**Definição 5.1.14.** Duas matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  em  $M_{m \times n}(K)$  são *iguais* se possuem entradas correspondentes iguais, ou seja,  $a_{ij} = b_{ij}$  para quaisquer  $i, j$ .

Mostraremos que  $M_{m \times n}(K)$  é um grupo aditivo. Para isso, lembremos como a adição de matrizes é definida.

**Definição 5.1.15.** Dadas  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  em  $M_{m \times n}(K)$ , definimos a *soma* de  $A$  e  $B$  do seguinte modo:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Escrevendo de modo não compacto, temos que se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

então a soma dessas matrizes é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Como cada entrada da matriz resultante da soma é da forma  $a_{ij} + b_{ij}$ , e a adição é uma operação em  $K$ , temos que  $A + B \in M_{m \times n}(K)$ . Ou seja, a adição é, de fato, uma operação em  $M_{m \times n}(K)$ .

Na Figura 27, ilustramos um exemplo de soma de duas matrizes  $A, B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Z})$ .

Figura 27 – Soma de duas matrizes.

**Exemplo**

Sejam as matrizes  $A$  e  $B$ , tal que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

Para obter a matriz  $C = A + B$ , basta adicionar os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes  $A, B$  e  $C$  são do mesmo tipo.

Fonte: Leonardo (2020b, p. 22)

**Proposição 5.1.16.**  $(M_{m \times n}(K), +)$  é um grupo abeliano.

*Demonstração.* Sejam  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ .

(i) *Associatividade:*

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \stackrel{(1)}{=} [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$

Na igualdade (1), utilizamos a associatividade da adição de  $K$ .

(ii) *Existência de elemento neutro:* o elemento neutro é a matriz de ordem  $m \times n$  cuja entradas são iguais a 0, conhecida como matriz nula de ordem  $m \times n$ :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [0].$$

De fato,

$$A + O = [a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A.$$

Analogamente,  $O + A = A$ .

(iii) *Todo elemento possui um elemento inverso:* Para cada matriz  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$  temos que a matriz  $-A = [-a_{ij}]$  é a inversa aditiva de  $A$ . De fato,

$$A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [0] = O.$$

Similarmente,  $(-A) + A = O$ .

(iv) *Comutatividade:*

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \stackrel{(2)}{=} [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A.$$

Em (2), utilizamos a propriedade comutativa da adição de  $K$ .

Portanto,  $M_{m \times n}(K)$  é um grupo aditivo abeliano quando  $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Essas propriedades podem ser úteis quando estamos resolvendo equações com as matrizes, como mostra o exemplo da Figura 28.

Figura 28 – Exemplo de uso das propriedades.

**R4.** Considere as matrizes  $A, B$  e  $C$ . Sabendo que  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  e  $B + (-C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , calcule  $[A + (-C)] + B$ .

**Resolução**

Pelas propriedades associativa e comutativa, temos:

$$[A + (-C)] + B = A + [(-C) + B] = A + [B + (-C)]$$

Segue que:

$$A + [B + (-C)] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Fonte:** Andrade (2020, p. 23)

Observamos que

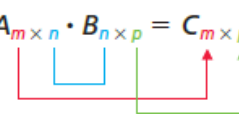
$$M_{m \times n}(\mathbb{Z}) \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{Q}) \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{R}) \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{C}).$$

Pela Definição 5.1.11, temos que  $(M_{m \times n}(\mathbb{Z}), +)$  é subgrupo de  $(M_{m \times n}(\mathbb{Q}), +)$ , que  $(M_{m \times n}(\mathbb{Q}), +)$  é subgrupo de  $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$  e, assim por diante.

Agora, vamos analisar a estrutura de grupo das matrizes utilizando a multiplicação de matrizes. Primeiro, precisamos lembrar que o produto de duas matrizes  $A$  e  $B$  só está definido se o número de colunas de  $A$  coincide com o número de linhas de  $B$ . Veja os exemplos da Figura 29.

Figura 29 – Multiplicação de duas matrizes.

$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$



**Exemplos**

a)  $[-2 \ 6] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \end{pmatrix}$

**Fonte:** Leonardo (2020b, p. 26)

Observamos que, ao considerarmos a multiplicação em vez da adição para obter uma estrutura de grupo, precisamos tomar conjuntos de matrizes quadradas, de modo que a multiplicação seja, de fato, uma operação fechada nesse conjunto. Quando  $m = n$  denotamos  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$  apenas por  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Definição 5.1.17.** Dadas  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  em  $M_n(K)$ , definimos o *produto* de  $A$  e  $B$  do seguinte modo:

$$AB = [c_{ij}], \quad \text{em que } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

**Exemplo 5.1.18.** Consideramos as matrizes  $A$  e  $B$  quadradas de ordem 2 em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

O produto  $C = A \cdot B$  é dado por:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 5) + (2 \cdot 7) & (1 \cdot 6) + (2 \cdot 8) \\ (3 \cdot 5) + (4 \cdot 7) & (3 \cdot 6) + (4 \cdot 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Observamos que a matriz  $C = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$  foi obtida tomando  $c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot a_{kj}$ :

$$c_{11} = (1 \cdot 5) + (2 \cdot 7) = 5 + 14 = 19,$$

$$c_{12} = (1 \cdot 6) + (2 \cdot 8) = 6 + 16 = 22,$$

$$c_{21} = (3 \cdot 5) + (4 \cdot 7) = 15 + 28 = 43,$$

$$c_{22} = (3 \cdot 6) + (4 \cdot 8) = 18 + 32 = 50.$$

Para formar um grupo de matrizes com a operação de multiplicação, precisaremos impor mais restrições do que apenas matrizes quadradas, uma vez que nem toda matriz possui inverso multiplicativo. Para isso, restringimo-nos aos corpos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ .

Lembramos que uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{Q})$  é invertível, se existe uma matriz  $B \in M_n(\mathbb{Q})$  tal que  $AB = I_n = BA$ , em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Como podemos perceber no exemplo que consta na Figura 30.

Figura 30 – Exemplo de matriz inversa.

**Exemplos**

1. A matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  é invertível, e sua inversa é  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , pois:

- $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

**Fonte:** Andrade (2020, p. 33)

Além disso, uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{Q})$  é inversível se, e somente se,  $\det A \neq 0$ . (BOLDRINI et al., 1984, p. 76). Logo, essa condição deve ser satisfeita.

Denotamos o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$ , com entradas racionais e inversíveis por  $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ , isto é,

$$\text{GL}_n(\mathbb{Q}) = \{A \in M_n(\mathbb{Q}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Antes de verificar os axiomas de grupos, precisamos garantir que o produto  $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$  é fechado. De fato, para quaisquer matrizes  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ , temos que o produto  $AB \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ , pois

$$\det A \neq 0 \text{ e } \det B \neq 0 \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0.$$

Isso mostra a multiplicação é uma operação bem definida em  $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ .

**Proposição 5.1.19.**  $(\text{GL}_n(\mathbb{Q}), \cdot)$  é um grupo.

*Demonstração.* Sejam  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}] \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ .

(i) *Associatividade:* Devemos provar que  $[a_{ij}]([b_{ij}][c_{ij}]) = ([a_{ij}][b_{ij}])[c_{ij}]$ .

Escrevendo,

$$[b_{ij}][c_{ij}] = [d_{ij}], \text{ em que } d_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it}c_{tj},$$

$$[a_{ij}][d_{ij}] = [e_{ij}], \text{ em que } e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}d_{kj},$$

$$[a_{ij}][b_{ij}] = [u_{ij}], \text{ em que } u_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \text{ e}$$

$$[u_{ij}][c_{ij}] = [v_{ij}], \text{ em que } v_{ij} = \sum_{t=1}^n u_{it}c_{tj},$$

devemos provar que  $e_{ij} = v_{ij}$ . De fato,

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{t=1}^n b_{kt}c_{tj} = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ik}(b_{kt}c_{tj}) = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n (a_{ik}b_{kt})c_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kt})c_{tj} = \sum_{t=1}^n u_{it}c_{tj} = v_{ij}, \end{aligned}$$

como desejado.

(ii) *Existência do elemento neutro:* o elemento neutro é a matriz identidade de ordem  $n$ :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $\det(I_n) = 1 \neq 0$  e é fácil verificar que  $AI_n = I_nA = A$ , para toda matriz  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ .

(iii) *Todo elemento possui um elemento inverso:* de fato, para qualquer  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$  temos  $\det A \neq 0$ , o que garante que  $A$  é inversível. Além disso,  $A^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ , pois

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \neq 0. \quad \square$$

O grupo  $(\text{GL}_n(\mathbb{Q}), \cdot)$  é chamado de *grupo linear*. Observamos que, da mesma forma,  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$  e  $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$  também são grupos lineares.

Para todo  $n \geq 2$ , esses grupos não são abelianos. Por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA.$$

A fim de restringir os grupos de matrizes, com o objetivo de trabalhar as isometrias representadas em equações matriciais mais a frente, lembremos a definição de matriz transposta, definida a seguir.

**Definição 5.1.20.** Dada a matriz

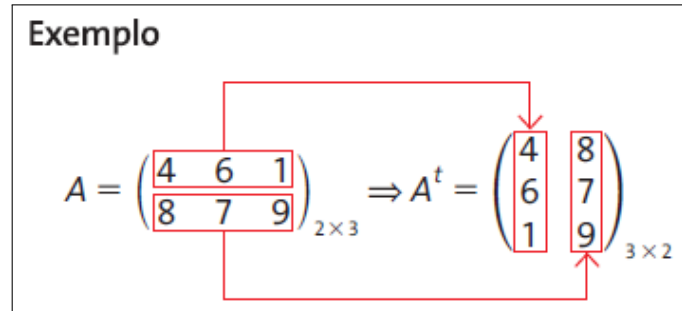
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a *transposta* de  $A$ , denotada por  $A^T$ , é a matriz  $n \times m$  obtida trocando-se as linhas de  $A$  por suas colunas:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n1} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 31, apresentamos um exemplo de um livro didático da transposta de uma matriz:

Figura 31 – Exemplo de matriz transposta.



**Fonte:** Andrade (2020, p. 19)

**Definição 5.1.21.** Uma matriz quadrada  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é chamada *ortogonal* quando

$$AA^T = I_n = A^T A,$$

em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Segue imediatamente da Definição 5.1.21 que uma matriz ortogonal é inversível, e seu inverso coincide com a transposta:

$$A^{-1} = A^T.$$

Além disso, toda matriz ortogonal satisfaz

$$\det A = \pm 1.$$

De fato, aplicando o determinante em ambos os lados de  $AA^T = I_n$ , obtemos

$$\det(AA^T) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A) \det(A^T) = 1.$$

Como  $\det(A^T) = \det(A)$ , segue que  $(\det A)^2 = 1$ , o que implica  $\det A = \pm 1$ .

Por fim, vamos mostrar que o conjunto formado pelas matrizes ortogonais é um grupo. Denotamos,

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ é ortogonal}\}.$$

**Proposição 5.1.22.**  $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$  é um subgrupo de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ .

*Demonstração.* Para todo  $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ , temos que

$$\begin{aligned} (AB^{-1})(AB^{-1})^T &= AB^{-1}(B^{-1})^T A^T \\ &= AB^{-1}(B^T)^T A^T, \text{ pois } B^{-1} = B^T \\ &= AB^{-1} B A^T, \text{ pois } (B^T)^T = B \\ &= A I_n A^T, \text{ pois } B^{-1} B = I_n \\ &= A A^T \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Analogamente,  $(AB^{-1})^T(AB^{-1})$ . Isso mostra que  $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ . Pela Proposição 5.1.12,  $O_n(\mathbb{R})$  é um subgrupo de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .  $\square$

Denominamos o grupo  $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$  por *grupo ortogonal*. Similarmente, temos que  $(O_n(\mathbb{Q}), \cdot)$  e  $(O_n(\mathbb{C}), \cdot)$  são grupos ortogonais.

Destacamos aqui o grupo  $(O_2(\mathbb{R}), \cdot)$ , que é composto pelas matrizes ortogonais de ordem 2 com entradas reais, tal grupo será utilizado quando aprofundarmos os conceitos de isometria.

### 5.1.2 Homomorfismos de Grupos

Vamos finalizar este capítulo estudando homomorfismos de grupos, o qual se caracteriza como uma função entre grupos da seguinte maneira:

**Definição 5.1.23.** Sejam  $(G, *)$  e  $(J, \cdot)$  grupos. Um homomorfismo de  $G$  em  $J$  é uma função  $f : G \rightarrow J$  tal que, quaisquer que sejam  $x, y \in G$  temos que

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y).$$

Com essa definição, observamos as seguintes funções dadas como exemplos de homomorfismos.

**Exemplo 5.1.24.** A função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$  definida por  $f(n) = i^n$  é um homomorfismo do grupo de  $(\mathbb{Z}, +)$  em  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . De fato,

$$f(m + n) = i^{m+n} = i^m i^n = f(m) f(n),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 5.1.25.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $e \in G$  o elemento neutro. A função  $f : G \rightarrow G$  definida por  $f(x) = e$ , para todo  $x \in G$ , é um homomorfismo, chamado de *homomorfismo nulo*.

**Observação 5.1.26.** Um homomorfismo bijetor é chamado de *isomorfismo*.

**Exemplo 5.1.27.** A função  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$  dada por

$$x \mapsto e^x$$

define um homomorfismo de  $(\mathbb{R}, +)$  em  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ . De fato,

$$f(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b),$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Como  $f$  é uma função bijetora (a função  $g : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  definida por  $x \mapsto \ln(x)$  é sua inversa), temos que  $f$  é isomorfismo de grupos.

**Definição 5.1.28.** Seja  $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, *)$  um homomorfismo de grupos. O *núcleo* de  $f$ , denotado por  $\text{Ker}(f)$ , é subconjunto de  $G$  dado por

$$\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_J\}.$$

**Proposição 5.1.29.** *Seja  $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, *)$  um homomorfismo de grupos. Então,*

(a)  $f(e_G) = e_J$ , em que  $e_G, e_J$  são os elementos neutros de  $G$  e  $J$ , respectivamente.

(b)  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ .

(c)  $(\text{Ker}(f), \cdot)$  é um subgrupo de  $(G, \cdot)$

*Demonstração.* (a) Temos que

$$f(e_G) * f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) = e_J * f(e_G) \Rightarrow f(e_G) = e_J.$$

(b) Pelo item anterior, segue que

$$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e_G) = e_J = f(x) * (f(x))^{-1} \Rightarrow f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

(c) Pelo item (a),  $e \in \text{Ker}(f)$  e, assim,  $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$ . Para quaisquer  $x, y \in G$ , temos que:

$$f(xy^{-1}) = f(x) * f(y^{-1}) = f(x) * (f(y))^{-1} = e_J * e_J^{-1} = e_J,$$

o que mostra que  $xy^{-1} \in \text{Ker}(f)$ . Pela Proposição 5.1.12,  $(\text{Ker}(f), \cdot)$  é um subgrupo de  $(G, \cdot)$ .  $\square$

**Definição 5.1.30.** *Seja  $(G, \cdot)$  um grupo. Dizemos que  $f : G \rightarrow G$  é um automorfismo de grupos, se  $f$  é um isomorfismo de grupos.*

Observamos que um automorfismo de um grupo  $(G, \cdot)$  é um homomorfismo bijetor de domínio e contradomínio  $G$ . Claramente, a função identidade de  $G$ ,  $id_G$ , é um automorfismo de  $G$ .

Denotamos por  $\text{Aut}(G)$  o conjunto de todos os automorfismos de  $G$ . Sejam  $f, g \in \text{Aut}(G)$  e  $x, y \in G$ . Temos que:

$$(f \circ g)(x \cdot y) = f(g(x \cdot y)) = f(g(x) \cdot g(y)) = f(g(x)) \cdot f(g(y)) = (f \circ g(x)) \circ (f \circ g(y)),$$

pois  $f$  e  $g$  são homomorfismos. Isso mostra que  $f \circ g$  também é um homomorfismo de  $G$  em  $G$ . Como a composição de funções bijetoras resulta numa função bijetora, podemos concluir que se  $f, g \in \text{Aut}(G)$ , então  $f \circ g \in \text{Aut}(G)$ . Portanto, a composição de funções,

$$\begin{aligned} \circ : \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(G) &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

é uma operação binária de  $\text{Aut}(G)$ .

**Proposição 5.1.31.**  *$(\text{Aut}(G), \circ)$  é um grupo.*

*Demonstração.*

- (i) Já mostramos que a composição de funções é associativa.
- (ii) O elemento neutro de  $(\text{Aut}(G), \circ)$  é a função identidade de  $G$ .
- (iii) Se  $f \in \text{Aut}(G)$ , então  $f : G \rightarrow G$  é bijetora. Logo,  $f$  é inversível. A inversa  $f^{-1} : G \rightarrow G$  também é inversível (cuja inversa é a função  $f$ ). Precisamos, apenas mostrar que  $f^{-1}$  é um homomorfismo. Sejam  $y_1, y_2 \in G$ . Pela bijetividade de  $f$ , existem  $x_1, x_2 \in G$  tais que  $y_1 = f(x_1)$  e  $f^{-1}(y_1) = x_1$ ,  $f^{-1}(y_2) = x_2$  e  $y_2 = f(x_2)$ . Com isso,

$$f^{-1}(y_1 y_2) = f^{-1}(f(x_1) f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 x_2)) = x_1 x_2 = f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2).$$

Portanto,  $(\text{Aut}(G), \circ)$  é um grupo.

□

## 6 ISOMETRIAS NO PLANO

Neste capítulo, exploraremos uma conexão entre álgebra e geometria: o estudo das isometrias no plano. De forma geral, dizemos que duas figuras geométricas são congruentes quando uma pode ser movida de modo a coincidir exatamente com a outra. A análise dessa noção nos leva a considerar transformações que preservam distâncias e formas, as chamadas isometrias, cujo nome vem do grego e significa “igualdade de medida”. O estudo dessas transformações nos fornecerá, além disso, novos exemplos de grupos.

Na matemática, usamos o termo “métrica” para designar uma função que mede a distância entre dois pontos de um plano (ou espaço). Assim, uma isometria é uma transformação que mantém essas distâncias, conservando o tamanho e a forma dos objetos, ainda que altere sua posição e/ou orientação.

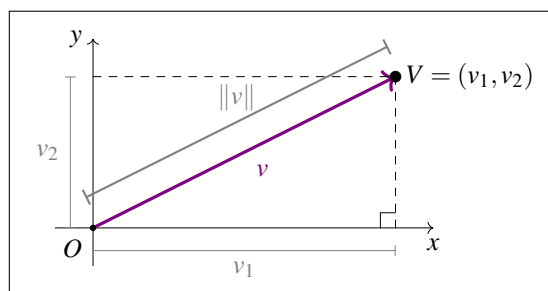
### 6.1 ISOMETRIAS

Estudaremos, ao longo do capítulo, as principais isometrias do plano cartesiano (consideremos um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  cuja origem é representada por  $O$ ): translações, rotações e reflexões. Para isso, começamos definindo a métrica que utilizaremos, conhecida como norma euclidiana. Essa norma, também chamada de comprimento de um vetor, representa a distância entre a origem e o ponto final de um vetor no plano.

**Definição 6.1.1.** Seja  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  um vetor. A *norma euclidiana* de  $v$ , denotada por  $\|v\|$ , é dada por

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

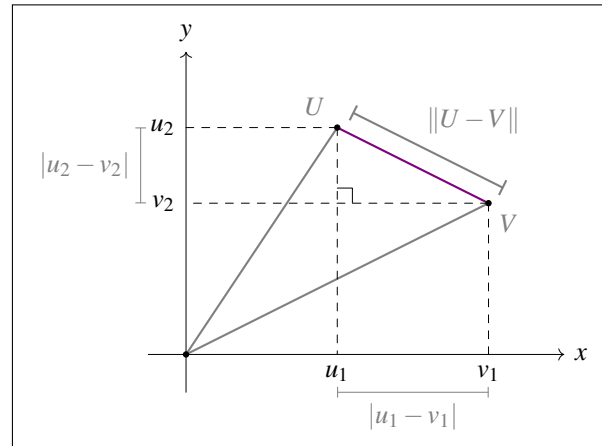
Figura 32 – Norma de um vetor



**Fonte:** Produção pela autora (2025)

Na Figura 33, observamos que  $\|v\|$  também representa a distância do ponto  $V$ , de coordenadas  $(v_1, v_2)$ , à origem  $O = (0, 0)$ . Desse modo, podemos fornecer a fórmula algébrica para a distância entre vetores (ou pontos) do plano.

Figura 33 – Distância entre vetores



Fonte: Produção pela autora (2025)

A *distância* entre dois pontos  $V = (v_1, v_2)$  e  $U = (u_1, u_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , obtida por meio do Teorema de Pitágoras, é dada pela fórmula:

$$\|U - V\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Na Figura 34, podemos ver que a fórmula da distância é utilizada para determinar se um triângulo formado por três pontos dados é retângulo.

Figura 34 – Exemplo do uso da fórmula da distância

**R2.** Verifique se os pontos  $A(-2, -2)$ ,  $B(12, 6)$  e  $C(4, -6)$  são vértices de um triângulo retângulo.

**Resolução**

Inicialmente, calculamos o comprimento de cada um dos lados do triângulo.

$$d(A, B) = \sqrt{[12 - (-2)]^2 + [6 - (-2)]^2} = \sqrt{14^2 + 8^2} \Rightarrow AB = \sqrt{260}$$

$$d(A, C) = \sqrt{[4 - (-2)]^2 + [-6 - (-2)]^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4 - 12)^2 + (-6 - 6)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{208}$$

Para que o triângulo seja retângulo, o quadrado do comprimento do lado maior deve ser igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, isto é, deve satisfazer o teorema de Pitágoras.

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (\sqrt{260})^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{208})^2 \Rightarrow 260 = 52 + 208 \Rightarrow 260 = 260$$

Portanto, o triângulo  $ABC$  é retângulo.

Fonte: Andrade (2020, p. 107)

Para fixar a notação utilizada neste capítulo, a cada ponto  $V \in \mathbb{R}^2$  associamos o vetor  $v = \overrightarrow{OV}$ , cuja origem é  $O$  e extremidade é  $V$ . Em coordenadas, se  $V = (a, b)$ , identificamos este ponto com o vetor  $v = \overrightarrow{OV} = (a, b)$ , e reciprocamente, todo vetor com origem em  $O$  e extremidade em  $V$  corresponde ao ponto  $V$ .

A partir das noções de funções bijetoras, norma e distância de pontos (ou vetores), apresentamos a definição formal de uma isometria no plano.

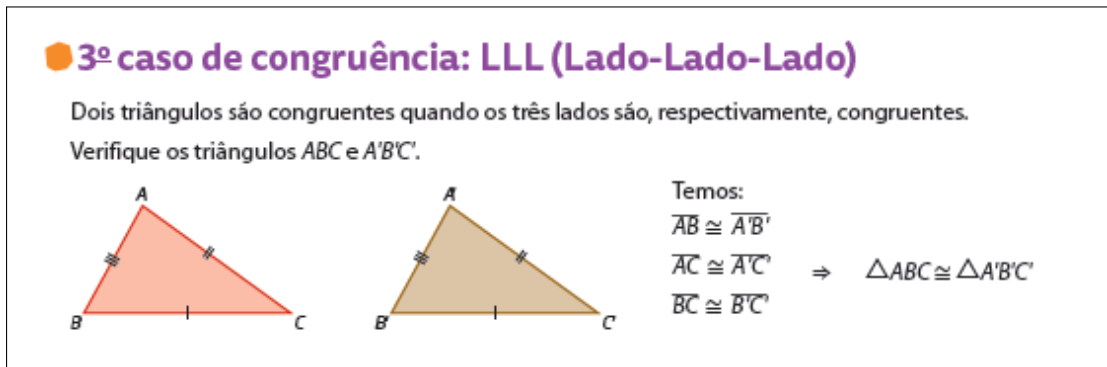
**Definição 6.1.2.** Uma *isometria* de  $\mathbb{R}^2$  é uma bijeção  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distância, ou seja,

$$\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|,$$

para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^2$ .

Como já mencionamos, o conceito de isometria aparece em diversos contextos da geometria. Por exemplo, dois triângulos são congruentes quando a distância entre os vértices de um é sempre igual à distância entre os vértices correspondentes do outro (veja a Figura 35). Em outras palavras, dois triângulos são congruentes se existe uma isometria que leva um deles exatamente sobre o outro.

Figura 35 – Congruência de triângulos



Fonte: Silveira (2022, p. 144)

A fim de obter a estrutura algébrica de grupo associada às isometrias, observamos que a composição de duas isometrias do plano é novamente uma isometria. De fato, sejam  $f, g$  duas isometrias do  $\mathbb{R}^2$  e  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Temos que:

$$\|(f \circ g)(u) - (f \circ g)(v)\| = \|f(g(u)) - f(g(v))\| = \|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|,$$

pois tanto  $f$  quanto  $g$  são isometrias. Como a composição de duas bijeções é uma bijeção e  $f \circ g$  preserva distância, concluímos que  $f \circ g$  também é uma isometria.

Dessa maneira, considerando o conjunto  $E(2)$ , formado por todas as isometrias de  $\mathbb{R}^2$ , e a operação de composição entre funções  $(\circ)$ , provaremos, na Proposição 6.1.3, que  $(E(2), \circ)$  é um grupo.

**Proposição 6.1.3.**  $(E(2), \circ)$  é um grupo.

*Demonstração.* Já discutimos acima que a composição de duas isometrias continua sendo uma isometria, logo, a operação de composição é fechada no conjunto  $E(2)$ . Além disso, a composição de funções é associativa.

Observamos que o elemento neutro do grupo é a função identidade de  $\mathbb{R}^2$ , denotada por  $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , que é uma isometria, pois

$$\|\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}(v)\| = \|u - v\|.$$

Por fim, para cada  $f \in E(2)$ , existe uma função inversa  $f^{-1}$  tal que

$$(f \circ f^{-1})(u) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) = (f^{-1} \circ f)(u),$$

uma vez que  $f$  é uma função bijetora de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso,  $f^{-1}$  também pertence a  $E(2)$ , pois, sendo  $f$  uma isometria, temos:

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| &= \|f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(v))\| \\ &= \|f \circ f^{-1}(u) - f \circ f^{-1}(v)\| \\ &= \|\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}(v)\| \\ &= \|u - v\|, \end{aligned}$$

para todo  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Podemos, então, concluir que, para cada  $f \in E(2)$ , sua inversa  $f^{-1} \in E(2)$ .

Portanto,  $(E(2), \circ)$  é um grupo, como desejado.  $\square$

**Observação 6.1.4.** Como  $E(2)$  é um subconjunto do grupo de permutação de  $\mathbb{R}^2$ ,  $S(\mathbb{R}^2)$ , temos que  $E(2)$  é um subgrupo de  $S(\mathbb{R}^2)$  em relação à operação de composição.

Observamos que se os pontos  $U, V, W \in \mathbb{R}^2$  não são colineares, então eles formam os vértices de um triângulo. Como a soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado, nesse caso, temos a desigualdade

$$\|W - V\| + \|V - U\| \geq \|W - U\|.$$

Concluimos que, se

$$\|W - V\| + \|V - U\| = \|W - U\|,$$

então os pontos  $U, V, W \in \mathbb{R}^2$  são colineares.

**Proposição 6.1.5.** *Seja  $f$  uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  e  $U, V$  e  $W$  pontos colineares. Então,  $f(U)$ ,  $f(V)$  e  $f(W)$  são colineares.*

*Demonstração.* Sejam  $U, V, W \in \mathbb{R}^2$  pontos colineares, dispostos nessa ordem, de modo que

$$\|W - V\| + \|V - U\| = \|W - U\|.$$

Como  $f$  é uma isometria, temos:

$$\|f(W) - f(V)\| + \|f(V) - f(U)\| = \|f(W) - f(U)\|.$$

A igualdade acima mostra que  $f(U)$ ,  $f(V)$  e  $f(W)$  são pontos colineares, preservando-se a ordem.  $\square$

Nas próximas seções, passaremos a representar isometrias por meio de operações com matrizes. Isso se justifica porque – como será mostrado na Seção 6.2 – as isometrias que fixam a origem correspondem a transformações lineares do plano. Essa observação abre caminho para utilizarmos ferramentas da álgebra linear na análise dos grupos de isometrias. Os grupos de matrizes, vistos no Capítulo 5, terão um papel importante nas nossas discussões.

A seguir, estudaremos os tipos de isometrias. Iniciaremos com as translações.

### 6.1.1 Translação

**Definição 6.1.6.** Dado um vetor qualquer  $b \in \mathbb{R}^2$ , a translação pelo vetor  $b$ , denotada por  $t_b$ , é a função  $t_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$t_b(u) = u + b, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^2.$$

É fácil ver que a translação  $t_{-b}(u) = u - b$  para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ , é a inversa da translação  $t_b$  e, com isso,  $t_b$  é uma bijeção. Além do mais, tomando  $u, v \in \mathbb{R}^2$  temos

$$\|t_b(u) - t_b(v)\| = \|u + b - (v + b)\| = \|u - v\|.$$

Portanto,  $t_b$  é uma isometria do plano.

Podemos também expressar as translações utilizando vetores coluna (matrizes). Tomando  $u = (x, y)$  e  $b = (b_1, b_2)$ , a função  $t_b$  pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + b_1 \\ y + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

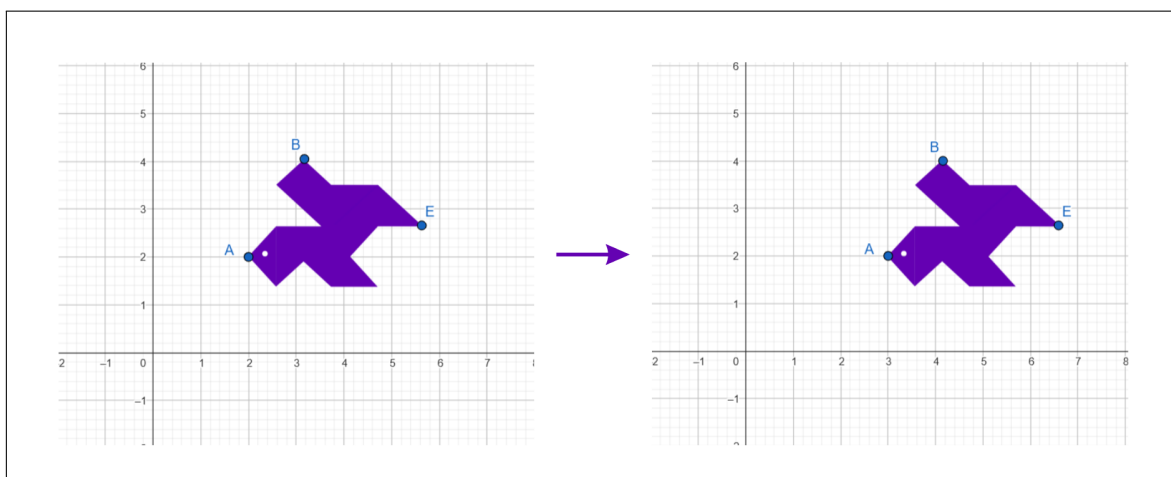
**Observação 6.1.7.** O conjunto formado por todas as translações no plano é um subgrupo de  $E(2)$ . De fato, para todo  $a, b \in \mathbb{R}^2$  e para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$(t_a \circ t_{-b})(u) = t_a(u + (-b)) = (u + (-b)) + a = u + (a - b) = t_{a-b}(u).$$

Pela Proposição 5.1.12, o conjunto das translações no plano é um subgrupo de  $E(2)$ .

Para representar as isometrias geometricamente, utilizaremos a imagem criada a partir da técnica da dentada, mostrada na Figura 5, a qual nomeamos de Camelo Maurício. A operação será realizada ponto a ponto, transladando a figura como um todo, como pode ser observado na Figura 36.

Figura 36 – Translação no plano

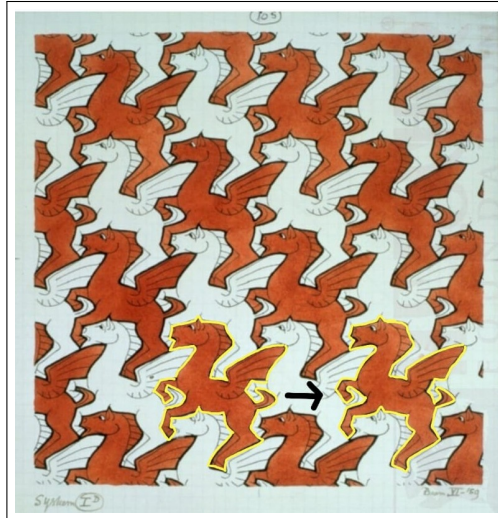


Fonte: Produção da autora (2025)

Na Figura 36, observarmos que no primeiro plano cartesiano o vértice  $A$  do Camelo Maurício está em  $(2,2)$ . Após a translação, o vértice  $A$  passa a ficar no ponto  $(3,2)$ , ou seja, foi transladado uma unidade para a direita ao longo do eixo  $x$ .

Destacamos essa mesma transformação na obra criada por Escher em 1959, denominada "Pegasus". O ladrilhamento é criado a partir de sucessivas translações do animal, como podemos notar na Figura 37.

Figura 37 – Translações na imagem criada por Escher (1959)



Fonte: Adaptado de ESCHER, M. C. (2025)

Na Figura 38, exemplo retirado de um livro didático do ensino médio, a translação ocorre ao longo do eixo  $y$ .

Figura 38 – Exemplo de translação

**Exemplo**

Na imagem ao lado, o polígono  $K'L'M'N'$  é imagem do polígono  $KLMN$  obtido por meio da transformação de translação, deslocando-o 3 unidades para baixo, na direção vertical.

Nesse caso, as figuras são congruentes e a distância entre cada ponto da figura original e seu correspondente é sempre a mesma.

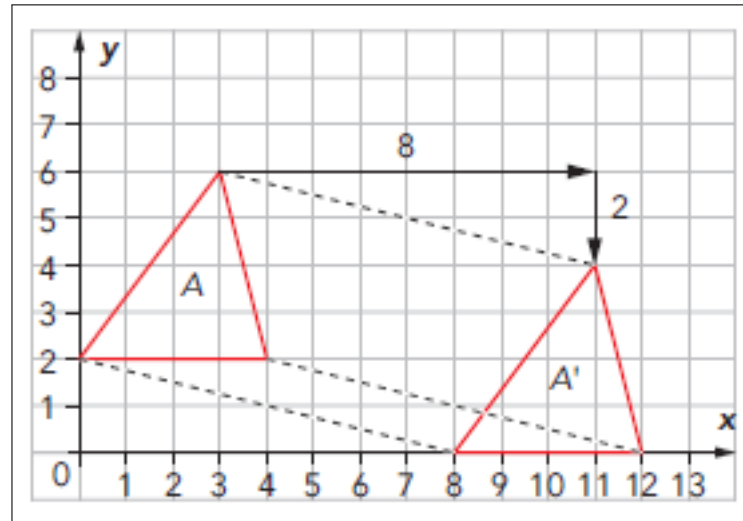
**Observação**  
 Note que apenas as ordenadas dos pontos do polígono  $KLMN$  foram alteradas, mas não as abscissas.

Fonte: Andrade (2020, p. 87)

Por fim, destacamos o seguinte exemplo, utilizado também no produto educacional, em que podemos denotar a translação por meio de uma equação matricial.

**Exemplo 6.1.8.** Na Figura 39 temos a representação no plano da translação de um triângulo.

Figura 39 – Translação do triângulo no plano



**Fonte:** Dante e Viana (2020b, p. 97)

Podemos destacar que os pontos que representam os vértices do triângulos, tinham os valores  $(0,2)$ ,  $(3,6)$  e  $(4,2)$ , com a translação as coordenadas passam a ser  $(8,0)$ ,  $(11,4)$  e  $(12,0)$ , respectivamente. Portanto, há uma translação de 8 unidades ao eixo  $x$  e 2 unidades ao longo do eixo  $y$ , com isso denotamos a equação como:

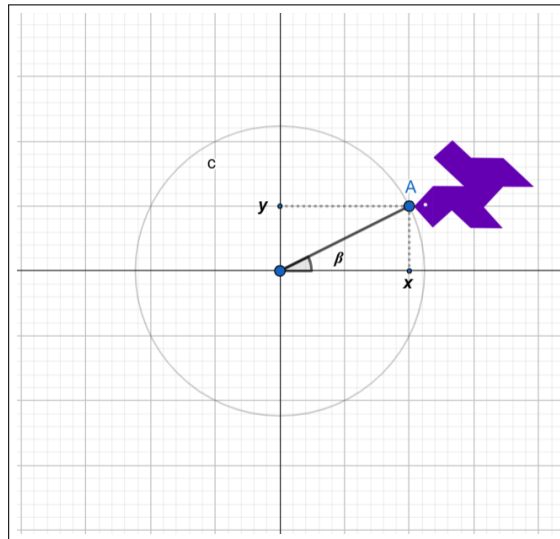
$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### 6.1.2 Rotação

Seja  $\theta$  um ângulo fixo. Consideramos  $r_\theta$  como a rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário, centrado na origem do plano.

Para facilitar a compreensão, observamos as figuras a seguir. Na Figura 40, o vetor com origem em  $O$  e extremidade no ponto  $A$ , um dos vértice do Camelo Maurício, forma um ângulo  $\beta$  em relação ao eixo  $x$ . Denotamos também um círculo de centro na origem que passa pelo ponto auxiliar  $A$ , de coordenadas  $(x,y)$ .

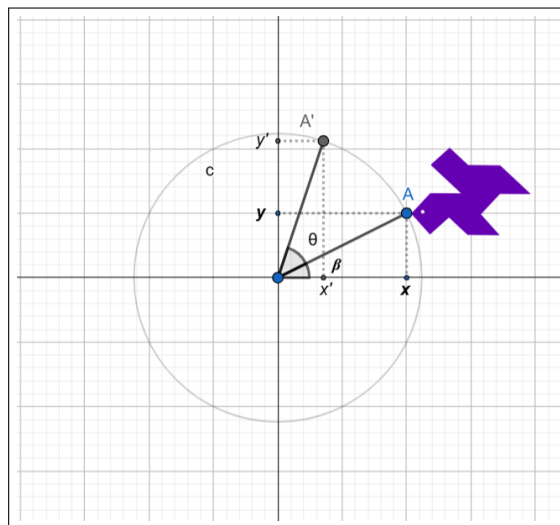
Figura 40 – Rotação



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Para ilustrar a rotação, escolhemos o ângulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  radianos.

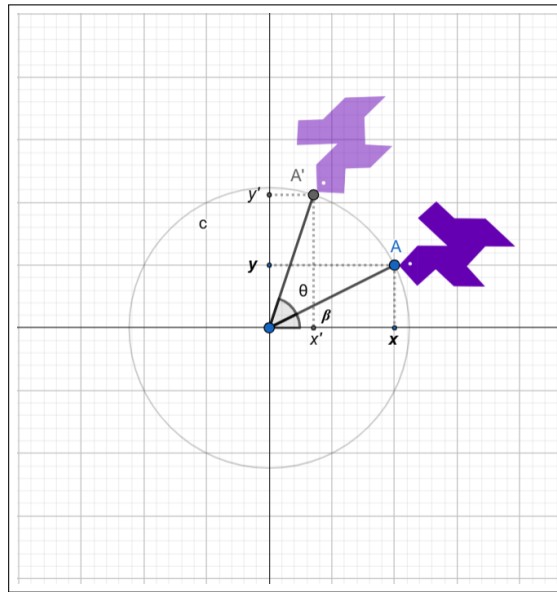
Figura 41 – Rotação 2



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Na Figura 42, completamos a rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$  radianos, na qual a imagem é rotacionada ponto a ponto. Destacamos o ponto de referência A do Camelo Maurício, que após a rotação, passa a ocupar a posição do ponto A'.

Figura 42 – Rotação 3



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Após compreendermos a rotação do ponto de vista geométrico, podemos agora defini-la de forma algébrica, utilizando as funções seno e cosseno. Denotemos o ponto  $A = (x, y)$  e sua imagem pela rotação de  $\theta$  por  $A' = (x', y')$ . Temos:

$$x = r \cos(\beta) \quad \text{e} \quad y = r \sin(\beta), \quad (6)$$

em que  $r$  é o raio do círculo considerado. Além disso, observamos que

$$x' = r \cos(\theta + \beta) \quad \text{e} \quad y' = r \sin(\theta + \beta).$$

Utilizando as identidades trigonométricas da soma de ângulos e as equações de (6), obtemos

$$x' = r \cos(\theta + \beta) = r \cos \beta \cos \theta - r \sin \beta \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

e, da mesma forma, para a coordenada  $y'$ :

$$y' = r \sin(\theta + \beta) = r \sin \beta \cos \theta + r \cos \beta \sin \theta = y \cos \theta + x \sin \theta.$$

Concluimos, portanto, que a rotação ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário é dada por

$$r_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta).$$

**Definição 6.1.9.** Seja  $\theta \in \mathbb{R}$  um ângulo. A *rotação* no sentido anti-horário por  $\theta$  em torno da origem do plano, denotada por  $r_{\theta}$ , é a função  $r_{\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$r_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta),$$

para todo  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Podemos reescrever a rotação  $r_\theta$  na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos provar que, de fato, a rotação  $r_\theta$  é uma isometria. Primeiro, mostramos que, para qualquer rotação  $r_\theta$ , existe uma inversa, que é a rotação  $r_{-\theta}$ . Para todo  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} (r_\theta \circ r_{-\theta})(u) &= r_\theta(x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta), y \cos(-\theta) + x \sin(-\theta)) \\ &= r_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta) \\ &= \left( (x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta - (y \cos \theta - x \sin \theta) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. (y \cos \theta - x \sin \theta) \cos \theta + (x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta \right) \\ &= \left( x \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta - y \cos \theta \sin \theta + x \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. y \cos^2 \theta - x \sin \theta \cos \theta + x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta \right) \\ &= \left( x(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), y(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right) \\ &= (x, y) = u. \end{aligned}$$

Portanto,  $r_\theta \circ r_{-\theta} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ . Analogamente,  $r_{-\theta} \circ r_\theta = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ . Isso mostra que  $r_\theta$  é inversível (bijetora), e sua inversa é  $r_{-\theta}(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$ .

Para concluir que  $r_\theta$  é uma isometria, falta provar que a rotação preserva distâncias. Dados  $u = (x, y)$  e  $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \|r_\theta(u) - r_\theta(v)\|^2 &= \|r_\theta(x, y) - r_\theta(x', y')\|^2 \\ &= \|(x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta) - (x' \cos \theta - y' \sin \theta, y' \cos \theta + x' \sin \theta)\|^2 \\ &= \|(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta, -(x - x') \sin \theta + (y - y') \cos \theta\|^2 \\ &= ((x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta)^2 + (-(x - x') \sin \theta + (y - y') \cos \theta)^2 \\ &= (x - x')^2 (\cos \theta)^2 + 2(x - x')(y - y') \cos \theta \sin \theta + (y - y')^2 (\sin \theta)^2 \\ &\quad + (x - x')^2 (\sin \theta)^2 - 2(x - x')(y - y') \cos \theta \sin \theta + (y - y')^2 \cos^2 \theta \\ &= (x - x')^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (y - y')^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ &= \|(x, y) - (x', y')\|^2 \\ &= \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

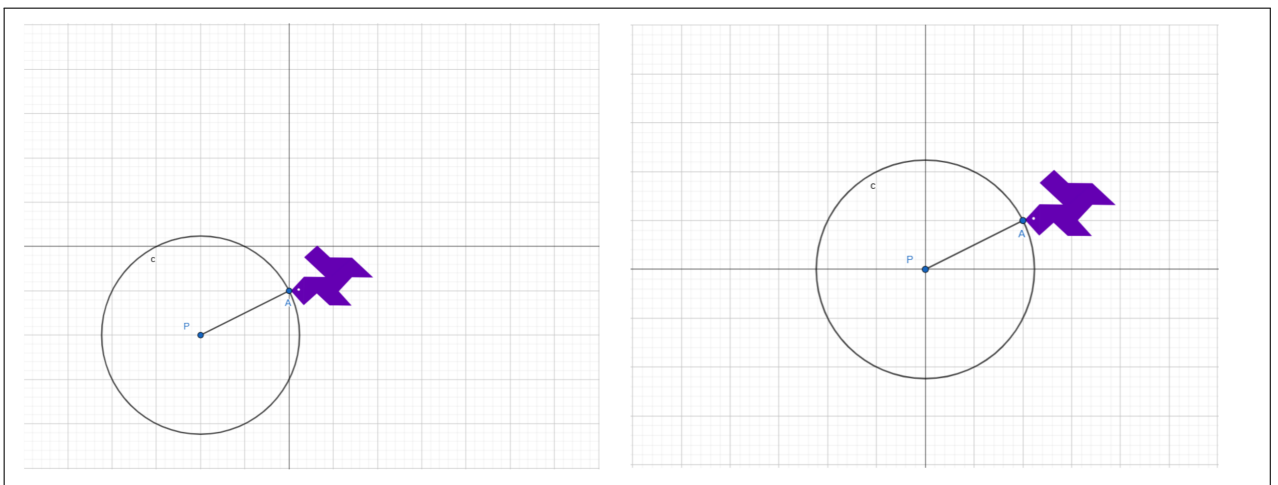
Portanto,

$$\|r_\theta(u) - r_\theta(v)\| = \|u - v\|.$$

Até o momento, tratamos da rotação em torno da origem. No entanto, também podemos considerar rotações em torno de pontos fora da origem. Para isso, ao realizar uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno de um ponto qualquer  $P$ , utilizamos a composição de duas isometrias: uma translação que leva o ponto  $P$  para a origem, seguida da rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem, e, por fim, a translação inversa que devolve o ponto  $P$  à sua posição original.

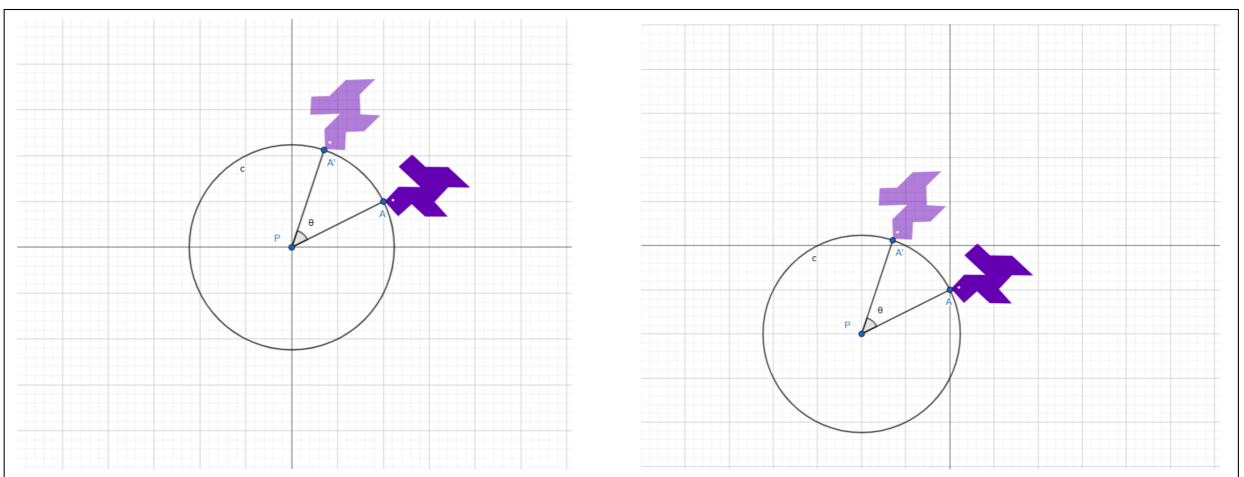
Visualizamos essas etapas nas Figuras 43 e 44. Primeiro, consideramos o ponto  $P$  qualquer, identificamos o ponto auxiliar  $A$  do Camelo Maurício e transladamos o plano de forma que  $P$  passe a coincidir com a origem. Em seguida, aplicamos a rotação de ângulo  $\theta$  e, por fim, realizamos a translação inversa para retornarmos a posição original de  $P$ .

Figura 43 – Rotação fora da origem 1



Fonte: Produção da autora (2025)

Figura 44 – Rotação fora da origem 2



Fonte: Produção da autora (2025)

Para esse estudo, consideramos a rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem, representada pela função  $f$ . Definimos também a função  $h$  como a translação pelo ponto  $P$ . Assim, a operação

ilustrada nas figuras corresponde, algebricamente, à composição de funções  $h \circ f \circ h^{-1}$ . Como já demonstramos que a composição de isometrias é, ela própria, uma isometria, concluímos que essa operação é de fato válida.

A isometria de rotação foi utilizada em algumas obras de Escher, como por exemplo na obra “Peixe Voador”. Na Figura 45, podemos observar que um peixe branco coincide com a rotação  $60^\circ$  no sentido horário de um peixe vermelho acoplado nele, e cada nó do ladrilhamento é formado por 6 figuras.

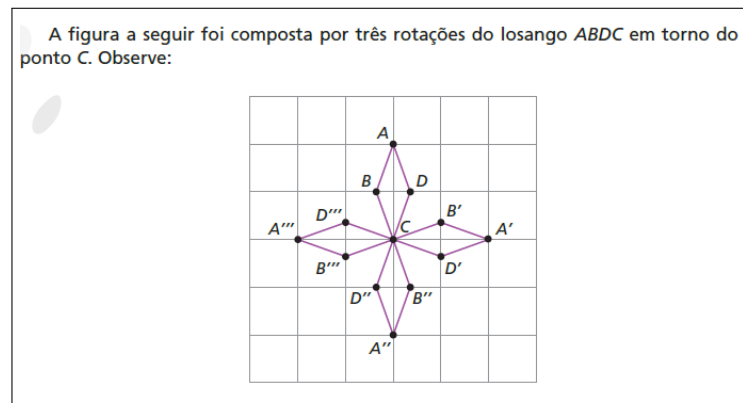
Figura 45 – Rotações na criação de Escher (1954)



Fonte: Adaptado de ESCHER, M. C. (2025)

Essa composição de isometrias é muito usada para criar padrões, como podemos também perceber na Figura 46, em que temos um exemplo retirado do livro Conexões: Matemática e suas Tecnologias - Matrizes e Geometria Analítica. A figura é composta a partir de três rotações em sequência de  $90^\circ$  cada.

Figura 46 – Exemplo de rotações

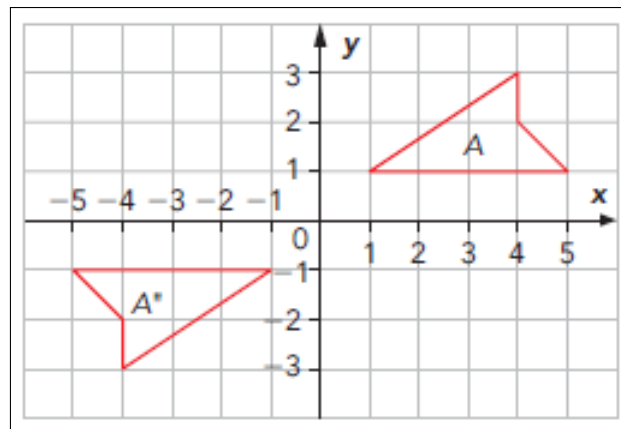


Fonte: Leonardo (2020b, p. 128)

Por fim, destacamos na Figura 47, um exemplo retirado do livro de Dante e Viana (2020b),

em que podemos destacar a rotação e denotar tal isometria por meio de sua equação matricial.

Figura 47 – Rotação de um polígono no plano



Fonte: Dante e Viana (2020b, p. 100)

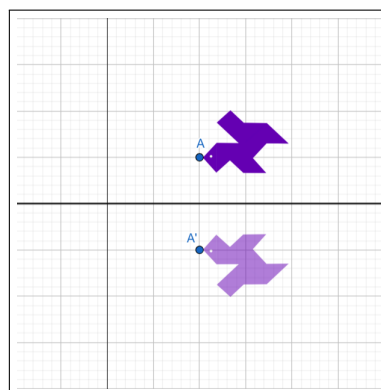
Os pontos iniciais, vértices do polígono, eram (1, 1), (5, 1), (4, 2) e (4, 3), com a rotação obtivemos, respectivamente, as seguintes coordenadas (1, -1), (-5, -1), (-4, -2) e (-4, -3). Portanto, há uma rotação de 180°, a qual pode ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\text{sen}180^\circ \\ \text{sen}180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

### 6.1.3 Reflexão

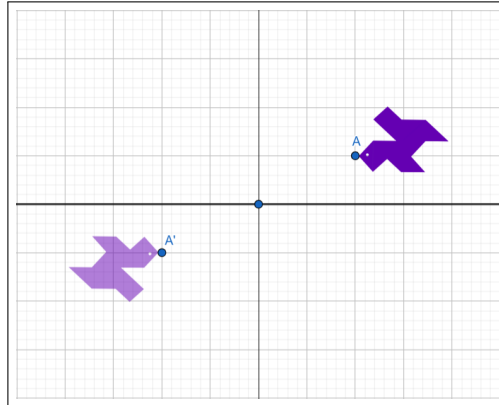
Inicialmente, analisaremos alguns casos mais simples, como a reflexão em relação ao eixo x e a reflexão em relação à origem. Esses casos estão ilustrados nas Figuras 48 e 49.

Figura 48 – Reflexão pelo eixo x



Fonte: Produção da autora (2025)

Figura 49 – Reflexão pela origem



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Observamos que a reflexão em relação ao eixo  $x$  transforma um ponto  $A = (x, y)$  do Camelo Maurício em  $A' = (x, -y)$ . Essa transformação vale para qualquer ponto do plano e pode ser representada utilizando matrizes coluna. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

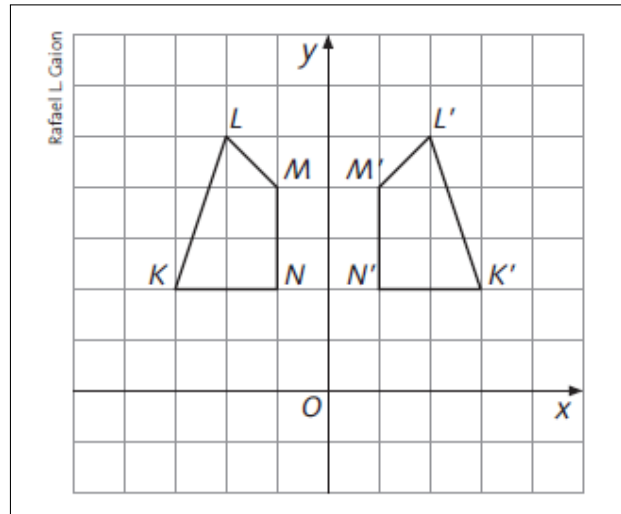
No caso da reflexão pela origem, o ponto  $A = (x, y)$  é levado ao ponto  $A' = (-x, -y)$ , isto é, ambas as coordenadas são invertidas. Essa transformação também pode ser representada por matrizes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Na Figura 50, podemos observar o exemplo do livro didático Matemática Interligada que apresenta uma reflexão em relação ao eixo  $y$ . Nesse caso, os pontos que tinham coordenadas  $(x, y)$  passam a ter coordenadas  $(-x, y)$  e podemos denotar da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

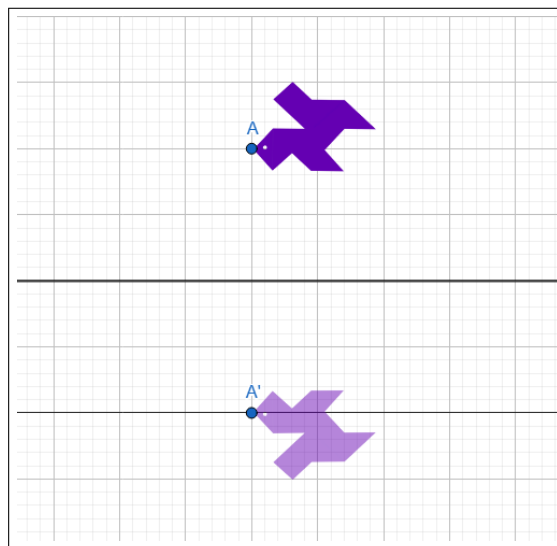
Figura 50 – Reflexão pelo eixo y



**Fonte:** Andrade (2020, p. 85)

Entretanto, nem sempre as reflexões ocorrem apenas nesses casos específicos. Para generalizar as reflexões, consideremos uma reta arbitrária  $t$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Nosso objetivo é definir a reflexão em relação a essa reta  $t$ , de modo que o Camelo Maurício seja refletido conforme ilustrado na Figura 51.

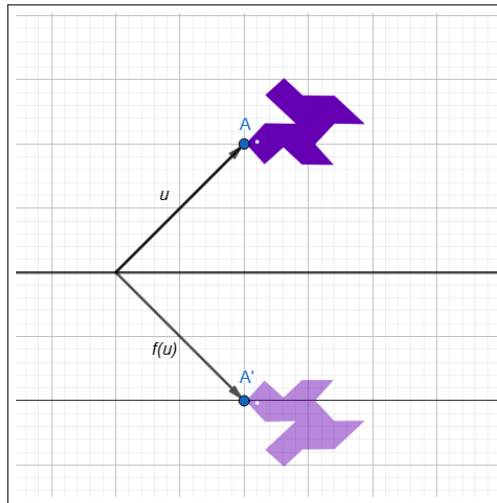
Figura 51 – Reflexão em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Para isso, introduzimos alguns elementos que nos ajudarão a generalizar essa isometria. Observe a Figura 52.

Figura 52 – Reflexão em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

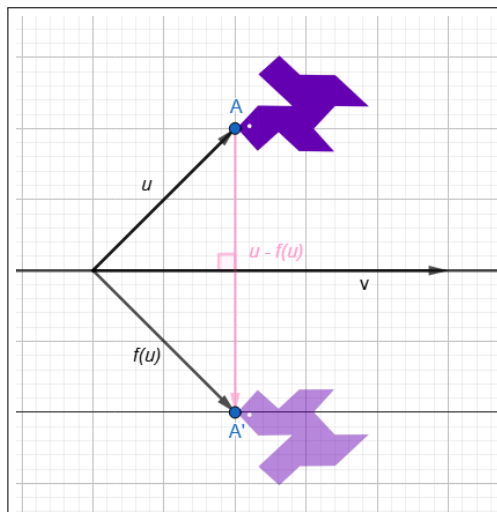
Dado o ponto  $A = (x, y)$ , consideramos o vetor  $u$  com origem na origem  $0$  e extremidade em  $A$ , ou seja,  $u$  tem as mesmas coordenadas de  $A$ . De forma análoga, identificamos a reflexão de  $A$ , que é o ponto  $A' = (x', y')$ , com o vetor  $f(u)$ , que é a reflexão de  $u$  em relação à reta  $t$ .

Definimos a reflexão  $f$  sobre a reta  $t$  como uma aplicação que satisfaz as seguintes propriedades: para todo vetor  $u \in \mathbb{R}^2$ , o vetor  $f(u)$  é tal que

1.  $u - f(u)$  é perpendicular a  $t$ ;
2. a distância de  $f(u)$  a  $t$  é igual a distância de  $u$  a  $t$ .

De fato, observamos que  $u - f(u)$  é perpendicular a  $t$ . Para facilitar a análise, consideramos um vetor auxiliar  $v$  que define a direção da reta  $t$ , ou seja,  $t$  é a reta que passa pela origem na direção de  $v$ . Veja a Figura 53.

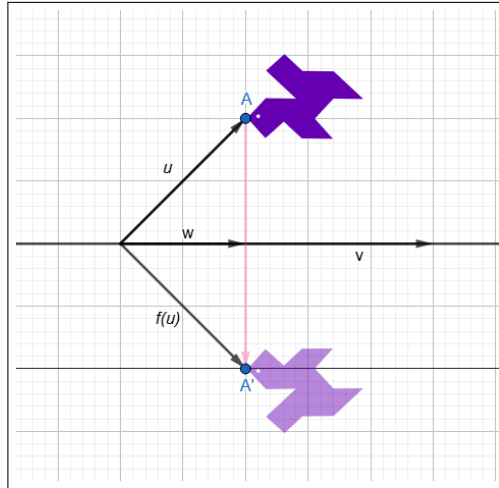
Figura 53 – Reflexão em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Na Figura 54, o vetor  $w$  representa a projeção ortogonal de  $u$  sobre  $v$ . Como  $w$  tem a mesma direção de  $v$ , podemos escrever  $w = \alpha v$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

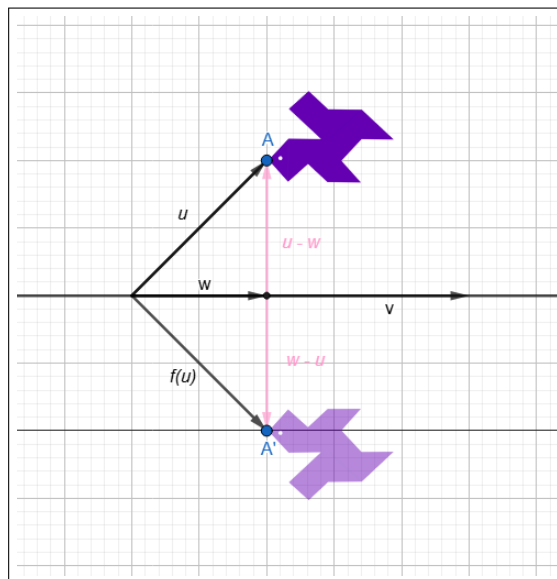
Figura 54 – Reflexão em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Assim, podemos considerar as diferenças  $u - w$  e  $w - u$ , que aparecem ilustradas na Figura 55.

Figura 55 – Reflexão em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Como as norma dos vetores  $u - w$  e  $w - u$  são iguais, concluímos que a distância do vetor  $u$  até a reta  $t$  é igual à distância entre o vetor  $f(u)$  até a reta  $t$ , confirmando a propriedade (2) da reflexão  $f$ .

A fim de encontrar a relação que generaliza a reflexão, consideramos  $w = \alpha v$  e a condição  $(u - w) \cdot v = 0$ , que é verdadeira pois esses vetores são perpendiculares. A partir disso, temos:

$$(u - w) \cdot v = 0 \Rightarrow u \cdot v - w \cdot v = 0 \Rightarrow u \cdot v = \alpha v \cdot v \Rightarrow \alpha = \frac{u \cdot v}{v \cdot v}.$$

Assim, obtemos a expressão para  $w$ :

$$w = \left( \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) v,$$

que corresponde à projeção ortogonal do vetor  $u$  sobre  $v$ .

Por fim, definimos a reflexão como a soma dos vetores

$$f(u) = w + (w - u)$$

que pode ser reescrita como

$$f(u) = 2w - u.$$

Substituindo  $w$ , obtemos a fórmula geral da reflexão em relação à reta com direção  $v$ :

$$f(u) = 2 \left( \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) v - u.$$

Agora, vamos provar que  $f$  é uma isometria. Como nos casos anteriores, iniciaremos mostrando que a reflexão é bijetora. Pela visualização geométrica é fácil perceber que a inversa de  $f$  é ela mesma. De fato, para qualquer vetor  $u \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = 2 \frac{f(u) \cdot v}{v \cdot v} v - f(u).$$

Calculando, obtemos

$$f(u) \cdot v = \left( 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v - u \right) \cdot v = 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} (v \cdot v) - u \cdot v = 2(u \cdot v) - u \cdot v = u \cdot v.$$

Com isso,

$$f(f(u)) = 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v - \left( 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v - u \right) = u$$

e, portanto,  $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$  e  $f^{-1} = f$ .

Para finalizar, provaremos que  $f$  preserva distâncias. Primeiro, mostraremos que

$$f(u + w) = f(u) + f(w),$$

para todo  $u, w \in \mathbb{R}^2$ . De fato,

$$\begin{aligned} f(u + w) &= 2 \frac{(u + w) \cdot v}{v \cdot v} v - (u + w) \\ &= 2 \frac{u \cdot v + w \cdot v}{v \cdot v} v - u - w, \\ &= \left( 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v - u \right) + \left( 2 \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v - w \right) \\ &= f(u) + f(w). \end{aligned}$$

Agora, calculando a norma de  $f(u)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \|f(u)\| &= \left\| 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \cdot v - u \right\| \\
 &= \left( \left( 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \cdot v - u \right) \cdot \left( 2 \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \cdot v - u \right) \right)^{1/2} \\
 &= \left( 4 \left( \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right)^2 (v \cdot v) + u \cdot u - 4 \left( \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) (u \cdot v) \right)^{1/2} \\
 &= (u \cdot u)^{1/2} \\
 &= \|u\|.
 \end{aligned}$$

Portanto, a reflexão preserva norma e, conseqüentemente, distâncias, pois para quaisquer  $u, w \in \mathbb{R}^2$  temos

$$\|f(u) - f(w)\| = \|f(u) + (-f(w))\| = \|f(u + (-w))\| = \|u + (-w)\| = \|u - w\|.$$

Assim, concluímos a generalização da reflexão em relação a uma reta arbitrária, garantindo que essa transformação é de fato uma isometria.

Tomando o vetor  $v$  com  $\|v\| = 1$ , a reflexão de  $u$  em relação à reta com direção  $v$  é simplificada para

$$f(u) = 2(u \cdot v)v - u.$$

**Definição 6.1.10.** Seja  $u \in \mathbb{R}^2$  e seja  $v \in \mathbb{R}^2$  com  $\|v\| = 1$ . A reflexão de  $u$  em relação à reta que passa pela origem na direção de  $v$  é

$$f(u) = 2(u \cdot v)v - u.$$

Vamos deduzir a forma matricial de uma reflexão. Consideramos  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  com  $\|v\| = 1$ . Temos que  $f(u) = 2(u \cdot v)v - u$  é a reflexão de  $u$  em relação à reta que passa pela origem na direção de  $v$ .

Substituindo  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  na função  $f(u) = 2(u \cdot v)v - u$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 f(u) &= 2(ax + by)(a, b) - (x, y). \\
 &= (2a(ax + by) - x, 2b(ax + by) - y) \\
 &= ((2a^2 - 1)x + 2aby, 2abx + (2b^2 - 1)y).
 \end{aligned}$$

Então a reflexão em relação à reta na direção de  $v$  é representada por

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab \\ 2ab & 2b^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Considerando  $v = (a, b) = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}))$  e usando as identidades trigonométricas

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \cos \theta, \quad 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \sin \theta, \quad 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 = -\cos \theta,$$

obtemos imediatamente

$$2a^2 - 1 = \cos \theta, \quad 2ab = \sin \theta, \quad 2b^2 - 1 = -\cos \theta.$$

Portanto a matriz da reflexão assume a forma familiar

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix},$$

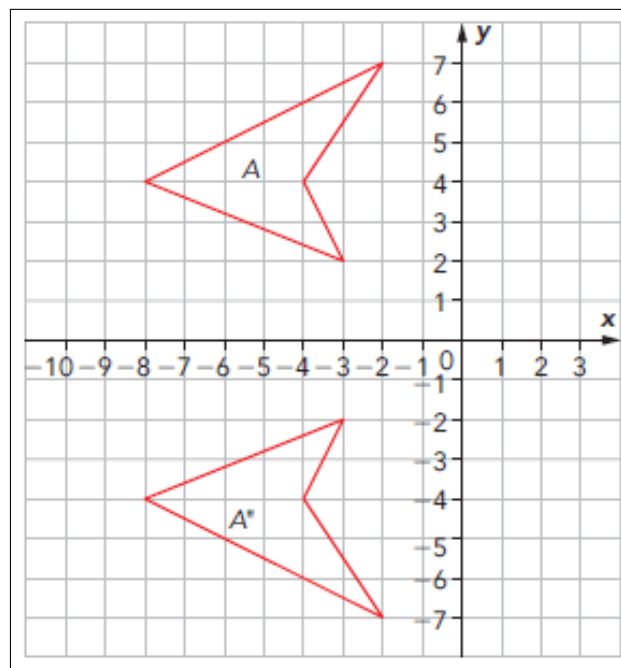
ou seja, para todo  $u = (x, y)$ ,

$$f(u) = R(\theta)u.$$

Ainda, para finalizar esse tópico, trazemos o seguinte exemplo.

**Exemplo 6.1.11.** Na Figura 56, temos uma reflexão de um polígono em relação ao eixo  $x$ .

Figura 56 – Reflexão de um polígono no plano



**Fonte:** Dante e Viana (2020b, p. 99)

Notamos os vértices do polígono  $A$  são:  $(-3, 2)$ ,  $(-4, 4)$ ,  $(-2, 7)$  e  $(-8, 4)$ . Enquanto, os vértices do polígono  $A'$  são:  $(-3, -2)$ ,  $(-4, -4)$ ,  $(-2, -7)$  e  $(-8, -4)$ . Observamos que a ordenada de cada vértice de  $A'$  é o oposto dos de  $A$  das respectivas coordenadas. Dessa forma, podemos representar matricialmente essa reflexão por:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

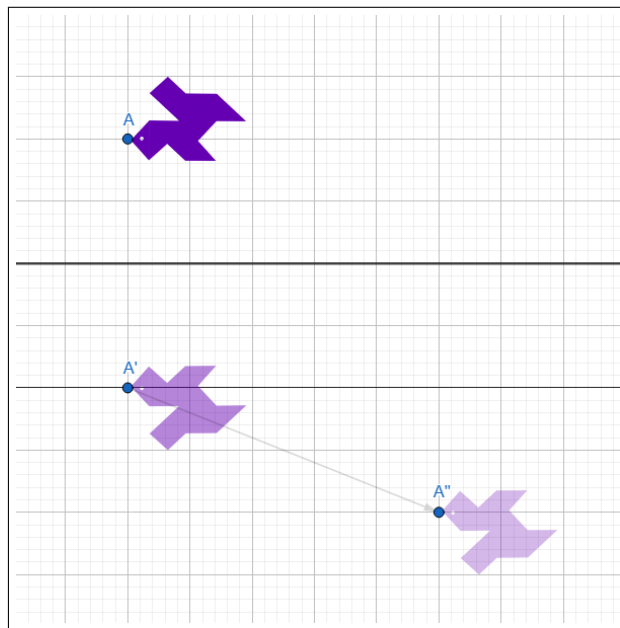
Ainda, se utilizarmos como referência o ângulo da reta de reflexão, conforme o que definimos anteriormente, temos o ângulo nulo e a seguinte representação matricial:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

#### 6.1.4 Reflexão Deslizante

Ainda, de forma semelhante ao que fizemos ao tratar da rotação em um ponto fora da origem, podemos compor isometrias de reflexão e translação para obter a isometria conhecida como reflexão deslizante (do inglês, *glide reflection*). Essa composição consiste em refletir uma figura em relação a uma reta e, em seguida, aplicar uma translação ao longo dessa mesma reta. O resultado é uma transformação que combina simetria e deslocamento, como ilustrado na figura a seguir.

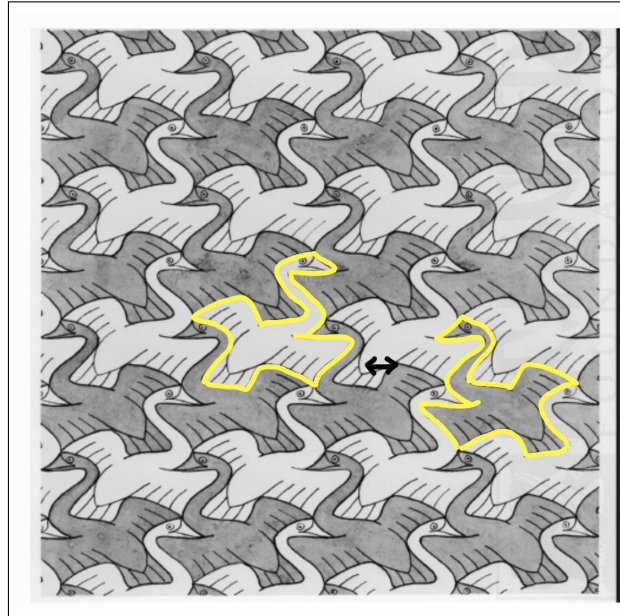
Figura 57 – Reflexão deslizante em uma reta qualquer



**Fonte:** Produção da autora (2025)

Podemos observar esse mesmo padrão na composição de Escher na Figura 58, em que temos uma reflexão verticalmente e depois a translação de cada imagem formando o ladrilhamento.

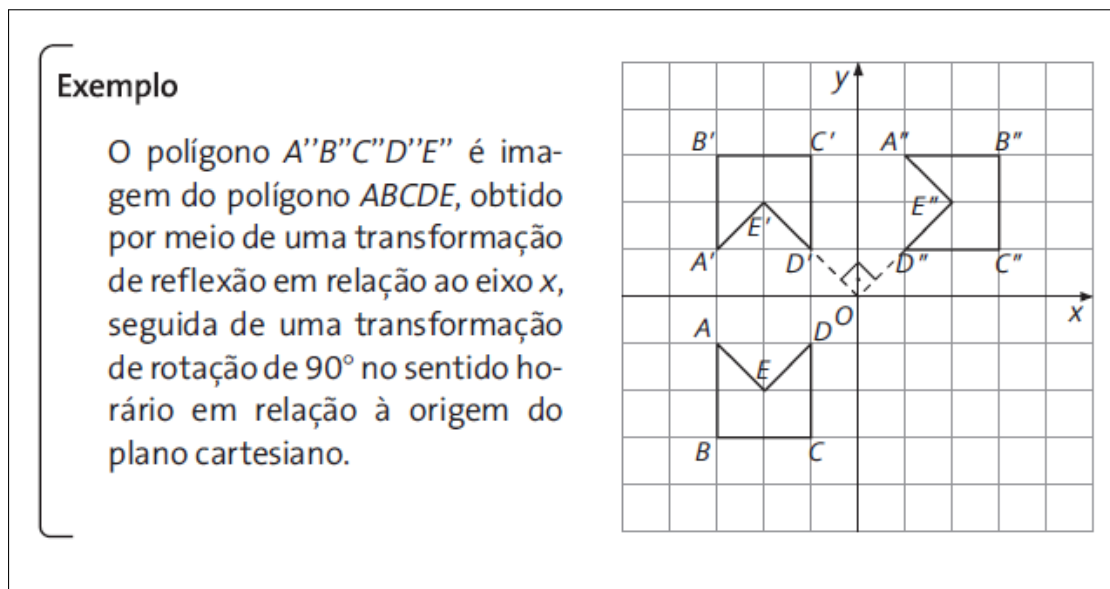
Figura 58 – Reflexão deslizante por Escher (1955)



**Fonte:** Adaptado de ESCHER, M. C. (2025)

A composição de isometrias, como esta, é comum e nos permite criar ladrilhamentos mais elaborados em relação à aqueles que somente uma isometria é utilizada. Vejamos na seguinte Figura 59 outro exemplo de composições de isometrias em um recorte do livro Matemática Interligada.

Figura 59 – Exemplo de composição de isometrias



**Fonte:** Andrade (2020, p. 87)

Assim como essas, podemos compor translações com rotações e/ou reflexões para chegarmos nas combinações desejadas ao formar uma tesselação.

## 6.2 RELAÇÕES ENTRE ISOMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES

No ensino superior, estudamos transformações lineares entre espaços vetoriais. As transformações entre espaços de dimensão finita podem ser descritas por matrizes ou visualizadas geometricamente (quando lidamos com dimensões 2 ou 3). Elas nos permitem compreender como vetores e figuras mudam de posição, tamanho ou orientação de forma controlada. Entre as muitas transformações possíveis, destacam-se as isometrias. Contudo, nem toda isometria é uma transformação linear.

Embora apresentem pontos em comum, transformações lineares e isometrias possuem características próprias. Nesta seção, analisaremos as condições sob as quais uma isometria pode ser considerada também uma transformação linear. Além disso, veremos como caracterizar uma isometria por meio de matrizes. Para isso, retomaremos algumas definições e resultados sobre vetores no plano e transformações lineares. Apesar de relembrarmos alguns conceitos de álgebra linear ao longo da seção, para compreensão do conteúdo é necessário já dominar noções básicas dessa área.

Para a elaboração deste capítulo, as principais referências bibliográficas utilizadas para desenvolver a teoria matemática das isometrias foram Finston e Morandi (2014) e Morandi, P. J. (s.d.). Para os conceitos de álgebra linear, consultamos Boldrini et al. (1984) e Lima (2020), que também recomendamos para aprofundamento ou revisão desses tópicos.

**Definição 6.2.1.** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $T : U \rightarrow V$  é denominada *transformação linear* de  $U$  em  $V$  se, e somente se, satisfaz:

- (i)  $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ , para todo  $u_1, u_2 \in U$ ;
- (ii)  $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ , para todo  $u \in U$ .

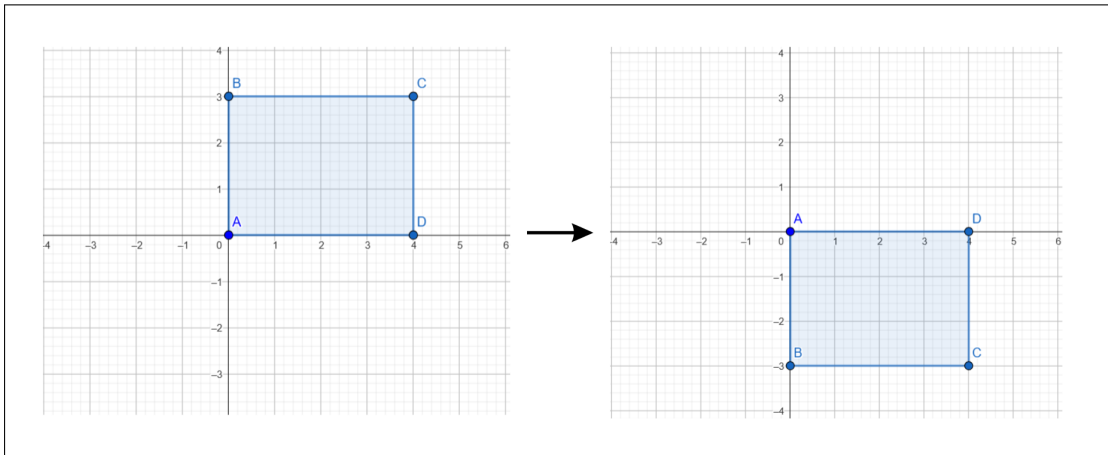
Alguns exemplos de transformações incluem a expansão ou contração uniforme, a reflexão, a rotação e o cisalhamento. Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 6.2.2.** Ao refletirmos uma figura em torno do eixo  $x$ , estamos considerando a seguinte transformação linear.

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

Podemos representar essa reflexão geometricamente conforme a Figura 60.

Figura 60 – Reflexão em torno do eixo  $x$ 

**Fonte:** Produção da autora (2025)

Ao identificarmos os pares ordenados da figura como matrizes coluna, podemos generalizar a operação realizada para a transformação linear de reflexão em relação ao eixo  $x$  da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De maneira geral, sejam  $A$  uma matriz com entrada reais e  $T$  uma transformação linear, aplicamos essa transformação em  $x \in \mathbb{R}^2$  e obtemos a relação  $T(x) = Ax$ . Para as próximas etapas, também precisaremos relembrar produto escalar de vetores no plano e alguns resultados relacionados.

**Definição 6.2.3.** O *produto escalar* (ou *produto interno*) de dois vetores  $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , é definido por:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Ou seja, somamos o produto das componentes correspondentes dos vetores.

Lembre que, se  $u$  e  $v$  são vetores plano, então existe um único ângulo  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ , tal que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \theta. \quad (7)$$

Uma consequência da Lei dos Cossenos é que o produto escalar pode ser dado por

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos \theta,$$

em que  $\cos \theta$  é o cosseno do ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

A seguir, vamos apresentar algumas propriedades das isometrias.

**Observação 6.2.4.** Seja  $g$  uma isometria do plano que fixa a origem, isto é,  $g(0) = 0$ . Observamos que

$$\|g(u)\| = \|g(u) - 0\| = \|g(u) - g(0)\| = \|u - 0\| = \|u\|.$$

Podemos concluir que, se  $g$  fixa a origem, então  $g$  também preserva o comprimento do vetor.

**Lema 6.2.5.** *Se  $g$  é uma isometria do plano que fixa a origem, então  $g$  preserva o ângulo. Ou seja, o ângulo entre  $g(u)$  e  $g(v)$  é o mesmo ângulo entre  $u$  e  $v$ , para todo  $u, v \in \mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Seja  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Pela Lei dos Cossenos,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta. \quad (8)$$

Seja  $\theta'$  o ângulo entre os vetores  $g(u)$  e  $g(v)$ . Então,

$$\|g(u) - g(v)\|^2 = \|g(u)\|^2 + \|g(v)\|^2 - 2\|g(u)\|\|g(v)\|\cos\theta'.$$

Como  $g$  é uma isometria e  $g(0) = 0$ , segue que  $\|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$ ,  $\|g(u)\| = \|u\|$  e  $\|g(v)\| = \|v\|$ . Assim,

$$\|u - v\|^2 = \|g(u) - g(v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta. \quad (9)$$

Comparando as equações (8) e (9), obtemos  $\cos\theta' = \cos\theta$ . Como  $0 \leq \theta' \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ , concluímos que  $\theta' = \theta$ .  $\square$

**Lema 6.2.6.** *Seja  $g$  uma isometria do plano que fixa a origem. Então,  $g$  preserva o produto escalar, ou seja,  $g(u) \cdot g(v) = u \cdot v$ , para todo  $u, v$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Seja  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Pela Proposição 6.2.5,  $\theta$  é também o ângulo entre  $g(u)$  e  $g(v)$ . Além disso, por consequência da hipótese, temos  $\|g(u)\| = \|u\|$  e  $\|g(v)\| = \|v\|$ . Assim,

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta = \|g(u)\|\|g(v)\|\cos\theta = g(u) \cdot g(v).$$

Portanto,  $u \cdot v = g(u) \cdot g(v)$ .  $\square$

Já definimos o que é uma Transformação Linear e o que é uma Isometria, e percebemos que nem sempre as duas funcionam juntas. Porém, muitas vezes elas coincidem, como podemos ver na Proposição 6.2.7.

**Proposição 6.2.7.** *Seja  $g$  uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  que fixa a origem. Então,  $g$  é também uma transformação linear.*

*Demonstração.* Seja  $\{v_1, v_2\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , isto é,  $\{v_1, v_2\}$  é um conjunto linearmente independente, com  $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$  e  $v_1$  e  $v_2$  ortogonais (o ângulo entre os vetores é  $\pi/2$  e, consequentemente,  $v_i \cdot v_j = 0$  se  $i \neq j$ ).

Para cada  $i = 1, 2$ , definimos  $w_i = g(v_i)$ . Assim,  $\|w_i\| = \|g(v_i)\| = \|v_i\| = 1$ , pois  $g$  preserva o comprimento. Ainda, como  $g$  preserva também o ângulo, o ângulo entre  $w_1$  e  $w_2$  é o mesmo do que o ângulo entre  $v_1$  e  $v_2$ . Isso prova que o conjunto  $\{w_1, w_2\}$  é também uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .

Por definição de base, para cada  $u \in \mathbb{R}^2$ , existem  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ . Pela ortonormalidade da base, temos que

$$u \cdot v_1 = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \cdot v_1 = \alpha_1 (v_1 \cdot v_1) + \alpha_2 (v_2 \cdot v_1) = \alpha_1 \|v_1\|^2 = \alpha_1.$$

Logo,  $\alpha_1 = u \cdot v_1$  e, analogamente,  $\alpha_2 = u \cdot v_2$ . Como  $g$  preserva o produto escalar, temos

$$\alpha_1 = u \cdot v_1 = g(u) \cdot g(v_1) = g(u) \cdot w_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = u \cdot v_2 = g(u) \cdot g(v_2) = g(u) \cdot w_2.$$

Utilizando a base  $\{w_1, w_2\}$ , existem  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $g(u) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ . Então, pelo fato de  $\{w_1, w_2\}$  ser base ortonormal, obtemos

$$\alpha_1 = g(u) \cdot w_1 = \beta_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = g(u) \cdot w_2 = \beta_2.$$

Logo,  $g(u) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ , ou seja,  $g(u) = (g(u) \cdot w_1)w_1 + (g(u) \cdot w_2)w_2$ .

Agora, provaremos que  $g$  é uma transformação linear. Para quaisquer  $u, t \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\begin{aligned} g(u+t) &= ((u+t) \cdot w_1)w_1 + ((u+t) \cdot w_2)w_2 \\ &= (u \cdot w_1)w_1 + (t \cdot w_1)w_1 + (u \cdot w_2)w_2 + (t \cdot w_2)w_2 \\ &= g(u) + g(t). \end{aligned}$$

Assim,  $g(u+t) = g(u) + g(t)$ , para quaisquer  $u, t \in \mathbb{R}^2$ .

Por fim, para quaisquer  $u, t \in \mathbb{R}^2$  e para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} g(ku) &= ((ku) \cdot w_1)w_1 + ((ku) \cdot w_2)w_2 \\ &= (k(u \cdot w_1))w_1 + (k(u \cdot w_2))w_2 \\ &= k((u \cdot w_1)w_1) + k((u \cdot w_2)w_2) \\ &= k((u \cdot w_1)w_1 + (u \cdot w_2)w_2) \\ &= kg(u). \end{aligned}$$

Logo,  $g(ku) = kg(u)$ , para quaisquer  $u \in \mathbb{R}^2$  e qualquer  $k \in \mathbb{R}$ .

Portanto, mostramos que  $g$  é também uma transformação linear. □

**Observação 6.2.8.** Pela Proposição 6.2.7, se  $g$  é uma isometria que fixa a origem, então existe uma matriz  $A$  quadrada  $2 \times 2$  com entradas reais tal que, para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g(u) = Au.$$

**Proposição 6.2.9.** Toda isometria de  $\mathbb{R}^2$  é determinada pelas imagens de quaisquer três pontos não colineares.

*Demonstração.* Sejam  $P, Q$  e  $R$  três pontos não colineares em  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  uma isometria. Sem perda de generalidade, escolha um sistema de coordenadas tal que a origem coincida com  $P$ , ou seja,  $O = P$ . Defina  $V = f(O)$  e o vetor  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ .

Considere a transformação  $g = t_{-v} \circ f$ , onde  $t_{-v}$  é a translação que leva  $V$  para a origem. Assim,  $g$  é uma isometria que fixa a origem  $O$ .

Como  $g$  é uma isometria que fixa a origem,  $g$  é uma transformação linear. Além disso, os vetores  $\vec{OQ}$  e  $\vec{OR}$  são linearmente independentes, pois  $P, Q, R$  não são colineares. Portanto, a transformação linear  $g$  é determinada unicamente pelas imagens desses dois vetores, ou seja, por  $g(Q)$  e  $g(R)$ .

Como  $f = t_v \circ t_{-v} \circ f = t_v \circ g$ , a isometria  $f$  é determinada pelas imagens dos três pontos  $P, Q$  e  $R$ , isto é, por  $f(P), f(Q)$  e  $f(R)$ .  $\square$

Observamos que a matriz  $A$ , relacionada a uma isometria que fixa a origem, não é arbitrária e deve seguir certas características, a saber, a matriz  $A$  deve ser ortogonal.

**Lema 6.2.10.** *Seja  $g$  uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  então,  $g(u) = Au$  para alguma matriz  $A_{2 \times 2}$  ortogonal, isto é,  $A^T A = I_2$  em que  $I_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .*

*Demonstração.* Para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$g(u) \cdot g(v) = (Au) \cdot (Av) = (Au)^T (Av) = u^T A^T Av.$$

Como  $g$  é uma isometria, vale  $g(u) \cdot g(v) = u \cdot v$ . Assim,

$$u^T A^T Av = u^T v = u^T I_2 v,$$

para todos  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , o que equivale a

$$u^T (A^T A - I_2) v = 0,$$

para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Dessa igualdade, concluímos que

$$A^T A = I_2. \quad \square$$

Vimos que o conjunto de todas as matrizes  $A$  que satisfazem  $A^T A = I_2$  é chamado *grupo ortogonal* e é denotado por  $O_2(\mathbb{R})$ .

**Proposição 6.2.11.** *Seja  $G$  o conjunto formado por todas as isometrias de  $\mathbb{R}^2$  que preserva a origem. Então,  $(G, \circ)$  é um grupo e  $G$  é isomorfo ao grupo  $O_2(\mathbb{R})$  das matrizes ortogonais.*

*Demonstração.* Inciaremos mostrando que  $G$  é um subgrupo de  $E(2)$ . Para quaisquer  $f, h \in G$  temos:

$$(f \circ h)(0) = f(h(0)) = f(0) = 0 \quad \text{e} \quad (h \circ f)(0) = h(f(0)) = h(0) = 0.$$

Logo, a operação de composição é fechada em  $G$ . Além disso, para qualquer  $f \in G$  temos que  $f^{-1}$  também pertence à  $G$ , pois

$$0 = Id_{E_2}(0) = (f^{-1} \circ f)(0) = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0).$$

Para provarmos o isomorfismo entre  $G$  e  $O_2(\mathbb{R})$  definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned}\sigma &: O_2(\mathbb{R}) \rightarrow G \\ A &\mapsto \sigma_A,\end{aligned}$$

tal que  $\sigma_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $u \mapsto Au$ .

Iniciaremos mostrando que  $\sigma$  está bem definida, ou seja, que para cada  $A \in O_2(\mathbb{R})$ ,  $\sigma_A$  é uma isometria.

Observamos que  $\sigma_A$  é uma bijeção, pois  $\det A = \pm 1$  e, portanto,  $A$  é inversível, o que implica que  $\sigma_A$  também é inversível.

Para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned}\|\sigma_A(u) - \sigma_A(v)\|^2 &= \|A(u-v)\|^2 \\ &= A(u-v) \cdot A(u-v) \\ &= (A(u-v))^T (A(u-v)) \\ &= (u-v)^T A^T A (u-v) \\ &= (u-v)^T I (u-v) \\ &= (u-v)^T (u-v) \\ &= (u-v) \cdot (u-v) \\ &= \|u-v\|^2.\end{aligned}$$

Portanto,  $\|\sigma_A(u) - \sigma_A(v)\| = \|u-v\|$ , ou seja,  $\sigma_A$  preserva distâncias e, conseqüentemente, é uma isometria.

Agora, provaremos que  $\sigma$  é um isomorfismo. Para todo  $A, B \in O_2(\mathbb{R})$  e para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ , temos que:

$$\sigma(AB)(u) = \sigma_{AB}(u) = (AB)(u) = A(Bu) = \sigma_A(Bu) = \sigma_A(\sigma_B(u)) = (\sigma_A \circ \sigma_B)(u) = \sigma(A) \circ \sigma_B(u).$$

Ou seja,

$$\sigma(AB) = \sigma(A) \circ \sigma(B)$$

e, portanto,  $\sigma$  é um homomorfismo de grupos.

Verificaremos que  $\sigma$  é injetora. Dados  $A, B$  temos que se  $\sigma(A)(u) = \sigma(B)(u)$ , então  $Au = Bu$  para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ . Segue que  $(A-B)u = 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  e, portanto,  $A-B = 0$ , ou seja,  $A = B$ .

Para finalizar, falta mostrar que  $\sigma$  é sobrejetora. Seja  $g$  um isometria que fixa a origem. Pelo Lema 6.2.10, existe uma matriz ortogonal  $A_{2 \times 2}$  tal que  $g(u) = Au$ . Segue que  $g = \sigma_A$  e  $\sigma$  é sobrejetora.

Portanto, como  $\sigma$  é um isomorfismo de grupos e, assim,  $G \cong O_2(\mathbb{R})$ . □

Ao considerarmos uma isometria  $f$  que não preserva a origem, por exemplo uma translação, temos que essa isometria não é uma transformação linear, pois toda transformação linear preserva origem. Mesmo assim, podemos também utilizar as matrizes para representar uma isometria.

**Proposição 6.2.12.** *Seja  $f$  uma isometria em  $\mathbb{R}^2$ , então  $f(x) = Ax + b$ , para algum  $b \in \mathbb{R}^2$  e alguma matriz  $A_{2 \times 2}$  com  $A^T A = I_2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $b = f(0)$  e  $g(u) = f(u) - b$ . Observamos que  $g$  é a composição de  $f$  com a translação  $t_{-b}$ , em que  $t_{-b}(u) = u - b$ . Logo,  $g$  é isometria. Como

$$g(0) = f(0) - b = b - b = 0,$$

segue que  $g$  fixa a origem e, pela Proposição 6.2.7,  $g$  é uma transformação linear. Pelo Lema 6.2.10, existe uma matriz  $A$  quadrada  $2 \times 2$  ortogonal tal que  $g(u) = Au$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  e, consequentemente,

$$f(u) = g(u) + b = Au + b,$$

como desejado. □

A partir disso, podemos notar que qualquer isometria é resultado da composição entre a translação com um elemento do grupo ortogonal  $O_2(\mathbb{R})$ .

Para finalizar este capítulo, observamos que toda matriz ortogonal é uma matriz de rotação ou de reflexão.

**Lema 6.2.13.** *Se  $A \in O_2(\mathbb{R})$ , então*

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{rotação}) \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{reflexão})$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que se  $\det A = 1$ , então  $A$  é uma matriz de rotação. Para provar que se  $\det A = -1$ , então  $A$  é uma matriz de reflexão é análogo.

Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  uma matriz ortogonal. Então,

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = AA^T$$

Realizando os produtos e comparando com a matriz identidade, obtemos:

$$a^2 + c^2 = 1, \tag{10}$$

$$b^2 + d^2 = 1, \quad \text{e} \tag{11}$$

$$ab + cd = 0. \tag{12}$$

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{13}$$

$$c^2 + d^2 = 1, \tag{14}$$

$$ac + bd = 0, \tag{15}$$

Pela equação (10), o ponto  $(a, c)$  está no círculo trigonométrico, logo, existe um ângulo  $\theta$  tal que  $(a, c) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ .

Das equações (10) e (13), obtemos

$$a^2 + c^2 = 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2.$$

Similarmente,  $a^2 = d^2$ .

Vamos considerar o caso em que  $\det(A) = 1$ . Então,

$$ad - cb = 1. \tag{16}$$

Das equações (12) e (16), obtemos 
$$\begin{cases} a^2b + acd = 0 \\ adc - bc^2 = c \end{cases}.$$

Segue que  $(a^2 + c^2)b = -c$ . Utilizando a equação (10), obtemos  $b = -c$  e, portanto,  $b = -\text{sen}(\theta)$ .

Similarmente, 
$$\begin{cases} abc + b^2d = 0 \\ a^2d - abc = a, \end{cases}$$
 e, assim,  $d = a = \text{cos}(\theta)$ .

Concluimos que se  $\det(A) = 1$ , então  $A = \begin{bmatrix} \text{cos } \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \text{cos } \theta \end{bmatrix}$ .

Analogamente, prova-se que se  $\det(A) = -1$ , então  $A = \begin{bmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\text{cos } \theta \end{bmatrix}$ .  $\square$

Portanto, toda isometria de  $\mathbb{R}^2$  é uma translação, reflexão, rotação ou resulta da composição de uma translação e uma reflexões ou de uma translação e uma rotação.

## 7 PRODUTO EDUCACIONAL

### 7.1 MOTIVAÇÕES À CRIAÇÃO DO PRODUTO

Atualmente percebemos que o ensino da matemática vem trazendo algumas dificuldades. Grande parte desses obstáculos estão atrelados a falta de interesse dos alunos pela disciplina, ainda, notamos que a abstração necessária para a aprendizagem de definições matemáticas pode ser um empecilho.

Outro fator que afeta diretamente no processo de ensino e aprendizagem é em relação à compreensão de conteúdos que exigem uma base sólida de conhecimentos prévios. Muitas vezes, os alunos chegam ao ensino médio com lacunas significativas na aprendizagem, resultado de deficiências acumuladas ao longo dos anos, desde os anos iniciais da educação básica. Esse cenário tem tornado cada vez mais difícil a compreensão de disciplinas que, como a matemática, dependem de uma sequência de aprendizado estruturada. Com isso, a tradicional abordagem de ensino, que se foca na transmissão de conteúdos de forma linear e descontextualizada, tem se mostrado insuficiente para motivar e engajar os alunos, além de dificultar o desenvolvimento de suas competências matemáticas.

A fim de enfrentar esses obstáculos e tornar o aprendizado mais efetivo, é necessário repensar as metodologias de ensino, adotando práticas que estimulem o interesse dos alunos e façam a conexão entre a matemática e seu cotidiano. Tendo em vista esses problemas e com o objetivo de tornar a aula de matemática mais atrativa, os professores buscam novas metodologias para diversificar e desenvolver sua prática de ensino.

Para Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 5), a educação matemática

caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.

Ou seja, é importante o professor estar atento não somente no conteúdo em que ensina, mas a maneira como o processo de ensino é feito em sala. Nesse mesmo sentido, o professor busca a internalização do conteúdo pelo aluno e o desenvolvimento do pensamento matemático. Como afirma Tiesen e Araujo (2020, p. 3), “A construção do pensamento matemático se inicia quando o estudante é capaz de identificar um significado para o que é proposto pelo professor”.

Para isso, um dos métodos encontrados é a contextualização da disciplina, ou seja, trazer o conceito até então abstrato para o concreto. Assim, fazendo a conexão da teoria com a prática. De fato, a contextualização é importante pois traz significado ao conteúdo e possibilita que o aluno estabeleça relações da matemática com seu cotidiano. Notamos que

é possível destacar que contextualização como movimento desencadeado em uma proposta de ensino tem por objetivo fundamentar o processo de aprendizagem, pois possibilita estabelecer sentidos do aluno para os significados dos conceitos matemáticos. No processo de aprendizagem, a significação consiste na internalização do conceito, precisando ser mediada pela produção de signos e sentidos, essenciais para o desenvolvimento de funções mentais superiores. (Reis e Nehring, 2017, p. 34)

Logo, dentro dessas problemáticas e a fim de efetivar essa internalização do conteúdo pelo aluno, um dos objetivos desse trabalho é apresentar ao professor de matemática do ensino médio uma maneira de mobilizar o conteúdo de matrizes e outros conceitos da álgebra linear utilizando a contextualização pela arte, ou seja, por meio da interdisciplinaridade, e embasando esse assunto com definições da álgebra moderna.

Observamos que a matemática por si só traz dificuldades de contextualização, assim outras disciplinas podem auxiliar e contribuir com o ensino de conteúdos mais abstratos. O trabalho interdisciplinar apresenta benefícios para o aluno e também aos professores que o utilizam, pois contribui no planejamento e o andamento das aulas contextualizadas, como reafirmam os seguintes autores:

Nota-se que os professores acreditam no potencial da interdisciplinaridade para tornar o ensino mais relevante e significativo para os alunos, de modo que os conteúdos trabalhados em sala de aula possam ter relação e ser aplicados em diferentes situações do cotidiano. (Ocampo, Santos e Folmer, 2016, p. 1022)

Por fim, buscamos também o uso de tecnologias como ferramenta para o ensino de matemática. Com o mundo tão globalizado e o acesso facilitado a recursos tecnológicos, manter a internet fora de sala é desafiador, logo incluí-la de forma inteligente e em momentos que ela realmente contribua é fundamental.

Notamos que os benefícios dessa metodologia são muitos, como afirmam Lima e Rocha (2022, p. 731):

Utilizar novas tecnologias e metodologias, tais como jogos digitais educacionais no ensino de matemática, pode trazer benefícios tanto para o educador quanto o educando, ao apresentar aulas mais atraentes, instigantes e, dessa maneira, ter a atenção do aluno pelo aprendizado. Para o educador, pode auxiliar no processo de construção de conceitos matemáticos, tais como a construção de um gráfico em aplicativos de geometria dinâmica, bem como poder comparar resultados e suas mudanças por meio de trocas de variáveis.

Portanto, destacamos a relevância da utilização tanto da contextualização por meio da interdisciplinaridade quanto do uso de tecnologias em sala de aula. Justificando as escolhas que

fizemos para a produção da sequência de aula do produto educacional. Porém, houve também a preocupação seguir o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica como habilidades e conteúdos a serem desenvolvidos com os alunos.

A BNCC é o documento diretor da educação brasileira, tem caráter normativo e norteia os currículos dos sistemas de ensino tanto de escolas públicas, quanto privadas. Assim a base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todo estudante deve alcançar ao longo dos anos de ensino. Dessa maneira, a BNCC foi uma ferramenta importante para a definição do produto e como utilizar tal proposta para trabalhar as competências necessárias com o tema de isometrias e matrizes.

Em todos os níveis de ensino, do Ensino Fundamental Anos Iniciais ao Ensino Médio, a geometria se faz presente nos assuntos de conhecimento básico da disciplina de matemática. Notamos que o que altera em cada nível é o aprofundamento e a maneira como são apresentados os tópicos de cada conteúdo. No Ensino Fundamental II, ou Anos Finais, os objetivos de ensino são os seguintes:

O ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, Ministério da Educação, 2017, p. 272)

Dessa forma, nos objetos de conhecimento do oitavo ano o que se destaca dentro do que desejamos são as “Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação” (BRASIL, Ministério da Educação, 2017, p. 314). Ainda, uma das habilidades que compõe esse objeto é a EF08MA18:

Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, Ministério da Educação, 2017, p. 315)

Podemos, assim, perceber a importância de atividades dinâmicas e interativas, para que os alunos consigam entender os conceitos de geometria, não apenas decorando fórmulas e fazendo classificações de figuras geométricas.

Na BNCC do Ensino Médio, o pensamento geométrico que deve ser desenvolvido fica similar ao que temos no Ensino Fundamental. Entretanto, além dos objetivos anteriores, nessa fase mais avançada do ensino se deseja “interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras”. (BRASIL, Ministério da Educação, 2018, p. 517).

Assim, a habilidade que se destaca para esse objetivo é a EM13MAT105:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, Ministério da Educação, 2018, p. 533)

Ainda, um dos métodos utilizados e recomendados pela BNCC para o ensino da geometria é a utilização de aplicativos e softwares, como por exemplo o Geogebra. Como notamos na habilidade EM13MAT505:

Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados. (BRASIL, Ministério da Educação, 2018, p. 533)

Com isso, destacamos que o ensino de Geometria pode ser bem trabalhado a partir de isometrias e tesselações ou ladrilhamentos no plano, com ou sem uso das tecnologias digitais.

No estado de Santa Catarina, além da BNCC, é utilizado o Currículo Base do Território Catarinense como suporte para as aulas de matemática e demais disciplinas. Um tópico que não consta, explicitamente, na BNCC, mas que aparece no Currículo Base de Santa Catarina é o conteúdo de Matrizes, no qual temos a habilidade de “Resolver e elaborar problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares” (Secretaria de Estado de Educação de Santa Catarina, 2020, p. 26). Dessa maneira, como essa dissertação e o produto estão inseridos no contexto de ensino de Santa Catarina, um dos enfoques é também no ensino de matrizes.

Tendo em vista essas necessidades e habilidades que precisam ser trabalhadas com os alunos do ensino básico, o produto educacional atrelado a essa dissertação foi criado para contextualizar o ensino de matrizes a partir dos ladrilhamentos de Escher, convidando os alunos por meio do Geogebra a utilizarem a criatividade e os conteúdos matemáticos para fazer as transformações no plano.

O Produto Educacional (um caderno pedagógico) anexado a este trabalho, em sua integralidade tem mesmo tema que esta dissertação e pode ser utilizado para aplicação em sala de aula, com pequenas adaptações, se necessário, porém nele já se encontram diversos cenários de aplicação, a fim de contemplar as diferentes realidades escolares.

Pode-se observar que, neste trabalho, não foram comentados nem analisados os resultados da aplicação do produto, uma vez que ele ainda não foi implementado. Devido à alta demanda exigida pelas disciplinas do PROFMAT, à limitação de tempo no calendário do mestrado para o preparo tanto do produto quanto da dissertação e ao fato de eu não estar mais atuando como professora, a aplicação não pôde ser realizada. No entanto, por meio das dissertações e dos livros didáticos analisados e apresentados a seguir, foi possível realizar uma investigação dos conceitos já propostos para serem trabalhados, bem como identificar o que poderia complementar uma aula sobre o tema de matrizes. Além disso, nas dissertações foram examinados os resultados das aplicações do produto feitas por cada autor.

## 7.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 7.2.1 Análise das dissertações do PROFMAT

Faremos uma breve análise de algumas dissertações disponíveis no banco do PROFMAT. Para encontrar esses trabalhos, foram feitas três pesquisas diferentes. Na primeira, utilizando o termo “ladrilhamento”, encontramos sete dissertações, são essas:

- Silva (2013): Simetrias planas e alguns problemas de ladrilhamento;
- Ribeiro (2013): As frações que o ladrilhamento revela;
- Santos (2014): Ladrilhamento no plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio;
- Ferreira (2019): O desafio geométrico e seus ladrilhamentos: uma ferramenta de ensino de Geometria Plana na 1ª série do Ensino Médio em São Gonçalo do Gurguéia / PI;
- Campos (2020): Ladrilhamentos no plano e pentaminós: uma proposta para o ensino da Geometria no Ensino Médio;
- Santos (2020): Mosaicos e Ladrilhamentos com o uso do GeoGebra;
- Farias (2024): O Ladrilhamento do plano euclidiano no Ensino Médio: criando padrões por meio da resolução de problemas.

Na segunda, utilizamos o termo “tesselações”, filtramos e encontrando apenas três trabalhos, os quais são:

- Torres (2017): Tesselações planas: apresentar as tesselações do plano e algumas aplicações nas obras de Maurits Cornelis Escher;
- Leitao (2015): Tesselações no ensino de geometria euclidiana;
- Modesto (2015): Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Escher.

Observamos que todos os trabalhos que tratam de tesselações também abordam o contexto de Escher e utilizam de suas obras para o ensino de matemática.

Por fim, ao utilizarmos o termo “Escher”, encontramos treze dissertações, sendo que duas delas já foram contabilizadas anteriormente na busca pelo termo “tesselações”. Além disso, três trabalhos foram descartados por não tratarem diretamente do tema de ladrilhamentos no contexto das obras de Escher e, nesse momento, não agregam aos objetivos desta análise.

As oito dissertações resultantes da procura com o termo “Escher” são as seguintes:

- Alves (2014): O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher;

- Andrade (2015): Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher;
- Mendes (2015): O uso da arte de Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria;
- Esquerdo (2018): Transformações Geométricas no plano: uma abordagem inspirada em Escher;
- Carinha (2018): A obra de M.C. Escher como subsídio ao ensino das isometrias;
- Silva (2020): Papéis de parede e as obras de Escher;
- Tacoronte (2021): Escher e a divisão regular do plano;
- Silva (2024): Geometria, arte & Escher: uma experiência na educação básica.

Dentre todas as dissertações encontradas, vamos apresentar a análise de apenas três, para não estender esse capítulo. Serão analisadas as dissertações de Alves (2014), Modesto (2015) e Silva (2024).

Na dissertação de Alves (2014), intitulada “O Estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher” nota-se o enfoque da autora no conteúdo de geometria com o produto educacional baseado na construção de obras similares a de Escher no plano e na planificação de poliedros. O trabalho apresenta seu produto educacional voltado aos alunos do 1º e 2º ano do ensino médio, público que também é nosso foco, destacando o conceito de simetrias: translações, rotações e reflexões.

O objetivo do trabalho é definido no resumo em que a autora propõe “O objetivo desta dissertação é facilitar o processo de ensino e aprendizado de simetria tendo como inspiração as obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher” (2014, p. 7). Ainda, na introdução, ela também destaca novamente que o foco do trabalho é apresentar atividades que abordem os conceitos de geometria de forma prazerosa com o auxílio das obras de Escher.

Assim, para cumprir seus objetivos, na dissertação a autora inicia com a apresentação do contexto histórico de Escher, a sua vida e suas referências. Em seguida, no próximo capítulo, ela desenvolve os conceitos das tesselações, classificando as regular, semiregular e as demiregular. Destaca-se a presença de cores e das simetrias. Por fim, antes da apresentação do produto educacional, mostra a construção das tesselações e das figuras a partir da Técnica da Dentada.

Na proposta de aula sugerida pela autora é apresentada a sequência de cinco aulas desde pesquisa sobre o artista Maurits Cornelis Escher até a construção do material pelos alunos. Nota-se que a aplicação do plano de aula foi feita não apenas pela autora, mas também com colegas de outras áreas, desenvolvendo também a interdisciplinaridade.

As duas primeiras aulas foram separadas para os alunos pesquisarem no laboratório de informática a vida e as obras de Escher e posteriormente trocarem informações com os colegas de classe, com a professora destacando algumas características importantes.

Na terceira aula a professora expôs os conceitos de simetria com o auxílio de um material de apresentação projetado. Já nas duas próximas aulas os alunos, separados em grupos, criaram suas figuras e tesselações, utilizando apenas uma simetria por grupo, a qual foi sorteada. Por fim, apenas os alunos do segundo ano montaram as planificações que construíram obtendo poliedros.

Ao fim da dissertação, notamos que os objetivos propostos foram alcançados, de fato, a autora destaca a proatividade dos alunos e o grande interesse destes pela atividade. Ainda, poucos trabalhos foram entregues com alguns erros, esses apenas por erros técnicos e manuais, mas não por conta do não entendimento da matemática.

De maneira similar, a dissertação de Modesto (2015), intitulada “MATEMÁTICA E ARTE: Explorando a Geometria dos Fractais e as Tesselações de Escher” tem como objetivo de pesquisa “proporcionar aos estudantes maior significado à sua aprendizagem, buscando apresentar aos estudantes aplicabilidade da matemática a outras áreas do conhecimento” (2015, p. 69).

A autora propôs em sua dissertação, um produto educacional que consiste em uma sequência didática utilizando os softwares GeoGebra e SketchUp<sup>1</sup> para a criação de fractais e tesselações semelhantes às de Escher. A abordagem oferece aos alunos um passo a passo, permitindo que eles utilizem sua criatividade e conceitos matemáticos vistos em sala para elaboração de suas próprias composições. Após essa atividade, os alunos responderam uma série de questões relacionadas ao tema, promovendo uma reflexão mais profunda sobre o conteúdo trabalhado.

Modesto (2015) discorre sobre o padrão fractal e suas classes, nas quais criamos padrões repetindo figuras em certo modelo. Um exemplo utilizado pela autora são as obras de Pollock, que embora não são tão conhecidas, mas que já apresentavam padrões de fractais mesmo antes da definição matemática. Por fim, Escher e suas criações são utilizados para exemplificar as possibilidades de incluir o contexto de artes nas aulas de matemática.

Para a aplicação da sequência didática proposta, a autora levou os alunos a um laboratório de informática em que cada aluno tinha seu computador. No primeiro momento, utilizaram a internet para uma pesquisa sobre fractais e tesselações, a fim de contextualizar o assunto.

Na aula seguinte, os alunos receberam uma breve explicação, a partir de um exemplo, sobre os softwares e como fazer a construção dos objetos desejados. Com isso, na primeira aula de construção, os alunos criaram os fractais no aplicativo GeoGebra ou as tesselações no aplicativo SketchUp. Para cada turma foi sugerido uma construção diferente.

Além da construção dos objetos nos softwares, Modesto (2015) propôs questionários a fim de avaliar quais conteúdos foram melhor desenvolvidos pelos alunos. Dessa maneira, foi possível a análise quantitativa dos resultados.

De acordo com a autora, a aplicação da sequência trouxe resultados positivos quanto ao

---

<sup>1</sup> SketchUp é um software de modelagem usado para criar modelos tridimensionais de objetos, edifícios, interiores e paisagens. É uma ferramenta popular em áreas como arquitetura, design de interiores, paisagismo e construção civil.

interesse dos alunos no assunto. Além disso, a análise das respostas dos estudantes às questões propostas revelou que 43,75% deles alcançaram um índice de acertos superior a 83,33%. Destaca-se que atividades como essas, às quais os alunos conseguem visualizar os conceitos matemáticos de forma concreta, facilita os processos de ensino e aprendizagem. Essa abordagem contribui para uma melhor assimilação dos conteúdos e fortalece a conexão entre teoria e prática. Por fim, concluímos que atividades semelhantes podem ser desenvolvidas a fim de explorar ainda mais objetos matemáticos.

Finalmente, discorreremos sobre a dissertação de Silva (2024) intitulada “Geometria, arte & Escher: uma experiência na Educação Básica” com o objetivo de “analisar a interdisciplinaridade entre matemática e arte através da aplicação de uma sequência didática” (2024, p. 8).

O autor desenvolve em seu trabalho sobre as definições de mosaicos, pavimentações, polígonos e tesselações. Destacando as propriedades necessárias para a construção de um ladrilhamento e demonstrando uma maneira de construí-lo com o software GeoGebra. Ainda, os conceitos de simetria são apresentados, porém sem visualizações algébricas, pois o foco do autor é a aplicação para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com o foco em geometria.

Em seguida, apresenta-se o contexto histórico de Escher e suas contribuições à matemática e à arte. Assim, a interdisciplinaridade surge como cenário para uma aula de matemática contextualizada. Silva (2024, p. 41) define “A interdisciplinaridade é uma abordagem que se caracteriza pela integração de diferentes disciplinas ou áreas do conhecimento visando promover uma compreensão mais ampla e profunda de fenômenos ou problemas complexos” e argumenta sobre a importância de metodologias que utilizam dessa abordagem.

Por fim, o autor apresenta uma sequência didática desenvolvida para aplicação em uma turma do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública de rede municipal de Recife, cujo objetivo geral é “Usar a pavimentação do plano através da construção de mosaicos utilizando polígonos regulares confeccionados com material emborrachado, ladrilhar utilizando o software GeoGebra com a pretensão de melhorar os resultados na aprendizagem de geometria plana” (2024, p. 48).

Ao longo de 12 atividades, o autor abordou o ensino de polígonos, ângulos, retas, pontos, mosaicos e ladrilhamentos, oportunizando aos alunos momentos para desenvolver a criatividade e o pensamento crítico. No primeiro encontro, já na primeira atividade foram entregues aos alunos polígonos recortados em um EVA e solicitado que montassem mosaicos. Posteriormente, calculou-se os ângulos desses polígonos sem o uso de fórmulas e, então, inseriram-se outros tipos de polígonos no mosaico. Ao final, algumas questões foram respondidas a fim de avaliar e gerar reflexões sobre o que foi feito em sala.

No segundo encontro, com auxílio de Chromebooks<sup>2</sup> o GeoGebra foi apresentado como recurso para a construção de mosaicos.

<sup>2</sup> Chromebook é um notebook com sistema ChromeOS desenvolvido pelo Google muito utilizado por escolas pelo baixo custo e fácil gerenciamento

No terceiro encontro, a história de Escher e suas contribuições foram desenvolvidas com pesquisas na internet, chegando nas isometrias de rotação, translação e reflexão. Uma atividade criada pelo Clube de Matemática da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) foi utilizada para finalizar a aula. Por fim, nos últimos dois encontros os alunos tiveram oportunidade de construir seus mosaicos e utilizar da criatividade para montar uma exposição com as obras de pavimentação.

Ao concluir os comentários sobre a aplicação do produto educacional, Silva (2024) destaca que a sequência ocorreu sem muitas intervenções e que os alunos gostaram da experiência, tornando seu trabalho também gratificante.

### 7.2.2 Análise de Livros Didáticos

Os livros analisados foram disponibilizados aos professores de matemática da rede pública de ensino de Santa Catarina para auxiliar na escolha do material didático no ano de 2020. Essas obras foram fornecidas pelas editoras na versão Manual do Professor e distribuídas às escolas como material de divulgação. Os livros do ensino médio foram organizados por temas, e não mais por ano escolar. Dessa forma, selecionaram-se os títulos que abordam matrizes, trigonometria, geometria e transformações, provenientes das editoras FTD, Moderna e Ática.

A coleção Conexões e a coleção Diálogo são distribuídas pela Editora Moderna, enquanto a coleção Contextos é publicada pela Editora Ática. Já a Editora FTD é responsável pela coleção de livros Prisma.

Muitos livros didáticos já introduzem o tema do ladrilhamento para contextualizar o ensino de geometria. Logo após o trabalho com polígonos planos, o ladrilhamento surge como uma abordagem visual e prática que facilita a compreensão do conteúdo, superando o ensino puramente teórico. No livro *Conexões: Matemática e suas tecnologias com o conteúdo de geometria* de Leonardo (2020a), a seção 1.4 é inteiramente dedicada ao ladrilhamento, explicando o conceito básico por meio do exemplo do piso de uma casa a ser revestida com cerâmica.

Já no livro *Matemática em Contextos com o tema de Geometria Plana e Geometria espacial*, de Dante e Viana (2020a), o ladrilhamento é tratado em um capítulo próprio, subsequente ao conteúdo de geometria plana, reforçando a contextualização do tema. Os autores apresentam diversos tipos de ladrilhamentos, incluindo os artísticos de Escher, como forma de exemplificação. Inicialmente, apresentam o ladrilhamento do revestimento cerâmico para paredes, seguindo para exemplos artísticos, como a obra Peixes (1955) de Escher, e por fim, mostram os hexágonos das colmeias das abelhas, também caracterizados como ladrilhamentos.

Além disso, os autores fazem uso de tecnologias digitais, como o Geogebra, propondo uma sequência de atividades em que o aluno pode compor ladrilhamentos com polígonos básicos no software. Ao final, apresentam a noção de ladrilhamentos regulares e justificam a exclusão de polígonos além dos triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. Contudo, o tema não é abordado em conexão com matrizes e transformações, limitando-se às propriedades das figuras planas.

No livro *Matemática em Contextos com o tema Trigonometria e Sistemas Lineares* podemos notar novamente o conteúdo de ladrilhamento sendo abordado, porém agora no contexto de transformações lineares, mais próximo do produto educacional que construímos.

No mesmo livro, em temas relacionados a trigonometria e sistemas lineares, o ladrilhamento volta a ser abordado, desta vez no contexto das transformações lineares, aproximando-se do enfoque do produto educacional desenvolvido. No Capítulo 2, sobre Matrizes e Sistemas Lineares, os autores Dante e Viana (2020b) finalizam a discussão sobre matrizes introduzindo transformações lineares como aplicação prática, além do uso em bancos de dados. Exemplificam o tema com a composição de pixels em telas digitais, recurso que atrai a atenção dos alunos.

São apresentados conceitos de isometrias: translações; reflexões e rotações, e transformações homotéticas, que alteram distâncias entre pontos, diferentemente das isometrias, que as preservam. O Geogebra é novamente sugerido para facilitar a visualização. No entanto, os autores não aprofundam o tema a ponto de integrar as equações das transformações com as matrizes.

No livro *Conexões: Matemática e suas Tecnologias, no tema Matrizes e Geometria Analítica*, o autor Leonardo (2020b) dedica um capítulo às transformações geométricas, abrangendo isometrias e homotetias. Após a exposição das definições básicas, há uma contextualização histórica com o artista Escher, focando mais em sua obra e interpretação do que nos aspectos matemáticos. Ladrilhamentos surgem como exemplos práticos, embora não sejam explicitamente nomeados como tal.

No livro *Diálogo: Matemática e suas Tecnologias, no tema Geometria Plana*, há um capítulo de sete páginas que apresenta o conceito de ladrilhamento, diferencia ladrilhamentos regulares dos irregulares, e aborda os polígonos que garantem o preenchimento sem espaços ou sobreposições. Um exemplo utilizado é a Escadaria de Selarón, no Rio de Janeiro.

Ainda na mesma coleção, no livro *Diálogo com foco em Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas*, são abordadas matrizes e transformações lineares, com menção superficial às isometrias, porém sem tratar explicitamente dos ladrilhamentos. Um exercício relacionado à obra de Escher aparece na Figura 61, propondo ao aluno a criação de uma imagem usando transformações geométricas em software, mas com pouca orientação. Cabe ao professor complementar o conteúdo com informações adicionais.

Figura 61 – Exercício de ladrilhamento proposto pelo livro Diálogo

**20** Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Em algumas de suas obras, é possível identificar transformações geométricas.



ESCHER, Maurits Cornelis. Desenho simétrico (E59). 1942. Aquarela. Coleção particular. 237 mm x 224 mm.

a) Escreva que transformações (reflexão, rotação ou translação) ou composições dessas transformações podem ser identificadas na obra de arte de Escher acima.

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, construa uma imagem utilizando transformações geométricas. *Resposta pessoal.*

20. a) Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

**Fonte:** Moderna (2020a, p. 146)

Podemos notar uma tentativa de contextualizar o assunto com as obras de Escher, porém como o livro não traz nenhuma informação sobre o artista além do que enuncia o exercício, não é efetivo. Ainda, deseja que o aluno utilize um software de Geometria para criar uma imagem utilizando as transformações geométricas, porém não apresenta muitas instruções. O professor, caso deseje, precisaria investigar e trazer mais informações aos alunos.

De forma similar, o livro da *coleção Prisma com o tema de Geometria* mostra o ladrilhamento posteriormente às definições de polígonos planos. Sem dar muitos detalhes e explicando o conceito básico de não deixar espaços em branco e sobrepor. Além disso, os autores Bonjorno, Giovanni e Câmara (2020b) destacam a utilização de apenas triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, por conta dos ângulos que formam o nó.

Por fim, no livro da *coleção Prisma com o tema de Geometria e Trigonometria*, podemos notar que os autores Bonjorno, Giovanni e Câmara (2020a) apresentam um breve contexto histórico de Escher para introduzir os conceitos de transformações isométricas, disponibilizando aos alunos a obra *Limite Quadrado* produzida em 1954, porém sem muitos aprofundamentos quanto ao artista e a matemática dos ladrilhamentos. Nesse mesmo livro os autores utilizam a obra *Repteis* (1937) para introduzir os conceitos de Proporcionalidade e Semelhança.

Conclui-se que nenhum dos livros analisados apresenta a narrativa integrada que desejamos para o produto educacional, embora Escher e o ladrilhamento sejam temas recorrentes, a conexão com matrizes e transformações não é explorada. Dessa forma, nosso produto visa complementar as sequências didáticas existentes, oferecendo uma abordagem diferenciada, porém fundamentada em práticas que já demonstraram eficácia.

### 7.3 CONSTRUÇÃO DO PRODUTO E A SUGESTÃO DE APLICAÇÃO

Após a análise dos livros didáticos e a breve pesquisa entre as dissertações já produzidas dentro do programa do PROFMAT, notamos a falta de contextualização no ensino de matrizes. Observamos também que, embora o ladrilhamento seja amplamente utilizado no ensino de geometria, raramente é explorado como contexto para matrizes.

Diante disso, elaboramos uma sequência didática voltada aos alunos do ensino médio para trabalhar o tema “matrizes” nas aulas de Matemática. O material foi concebido para que o professor encontre, em um único documento, todos os recursos necessários, sem precisar buscar informações adicionais.

A sequência “Aprendendo matrizes com Escher” tem por objetivo motivar o estudo de matrizes, suas operações, isometrias e transformações lineares. A proposta concretiza-se em uma atividade contextualizada e interdisciplinar envolvendo ladrilhamentos, polígonos, plano cartesiano e funções.

Como conhecemos a realidade no ensino brasileiro, as escolas de ensino médio apresentam estruturas diferentes umas das outras. Sabemos que escolas privadas, normalmente, apresentam condições mais favoráveis ao ensino, enquanto escolas públicas dependem de recursos mais ultrapassados. Os autores Garcia, Rios-Neto e Miranda-Ribeiro (2021, p. 25) em sua pesquisa, identificaram que, de fato, “evidenciou-se que, no geral, as escolas de ensino médio regular da rede pública sofrem efeitos de seus indicadores de infraestrutura”. Ou seja, uma atividade proposta em um ambiente de escola pública necessita de intervenções diferentes do que uma escola particular.

Os professores, em geral, são os agentes que tentam diminuir essa discrepância entre escolas públicas e privadas, pois como Garcia, Rios-Neto e Miranda-Ribeiro (2021, p. 2) afirmam “Os perfis extremos de escolas mostram a forte associação entre infraestrutura e eficiência escolar: escolas com melhor infraestrutura apresentam menores taxas de distorção idade-série, de reprovação e de abandono, bem como maiores taxas de aprovação, e vice-versa”. Logo, enquanto os extremos estão mais distantes, e a infraestrutura não é a ideal, adaptamos as atividades.

Desse modo, a fim de minimizar esse problema, o produto educacional apresenta dois cenários de aplicação. O primeiro, denotado de Cenário Ideal, disponibiliza um link de um livro dentro do software GeoGebra para que o aluno abra-o e encontre ali todas as atividades necessárias para a aprendizagem, com apenas poucas interferências necessárias pelo professor. Assim, para a aplicação será necessário um laboratório com computadores ou uma quantidade suficiente de notebooks para que os alunos utilizem individualmente ou em pares.

Já o segundo cenário, dito Cenário Realista, disponibiliza ao professor todo material que está também no livro do GeoGebra em arquivos adaptados para projeção no quadro na própria sala de aula ou para impressão em papel. Ambos os cenários trabalham com as mesmas atividades, porém de maneiras diferentes.

Iniciamos com uma apresentação de quem foi Maurits Cornelis Escher e como suas

obras podem ser interessantes no estudo de matemática. Para despertar a atenção e estimular a curiosidade dos alunos, são apresentadas algumas obras do artista, entre elas: Torre de Babel (1928), Répteis (1943), Cada Vez Menor (1958), Libertação (1955), Vínculo de União (1956) e Fita de Möbius II (1963). Além das obras, também são abordadas as técnicas utilizadas pelo artista, como a Técnica da Dentada, empregada na criação das figuras que compõem os ladrilhamentos, e os processos de impressão em xilogravura e litografia.

Após essa introdução, desenvolvem-se alguns conceitos relacionados aos ladrilhamentos e às isometrias. São retomadas definições e noções já presentes nos livros do ensino básico, complementadas por exemplos de ladrilhamentos regulares, representações com nós e as isometrias de translação, rotação e reflexão. Nesse momento, inicia-se também a introdução das matrizes, demonstrando aos alunos como é possível representar essas isometrias matricialmente.

Em seguida, é proposta uma atividade mais prática, na qual os alunos devem construir uma figura com a Técnica da Dentada, já apresentada anteriormente. Podendo ser utilizado os aplicativos Paint ou Canva, no Cenário Ideal, ou realizando a atividade com papel, tesoura, caneta e fita adesiva, no Cenário Realista. Com a figura pronta, os alunos são orientados a realizar o ladrilhamento. Nesse momento, devem observar que não há espaços em branco, nem sobreposições, e que apenas determinados polígonos permitem um encaixe perfeito, evidenciando as propriedades geométricas envolvidas.

Nesta ocasião, o professor deve incentivar os alunos a investigar, por meio de testes e experimentações, quais polígonos regulares permitem o encaixe perfeito no ladrilhamento. A atividade deve conduzi-los à descoberta de que apenas triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares possibilitam esse preenchimento sem sobreposição ou espaços em branco. Além disso, espera-se que os alunos identifiquem, ao repetir a figura e realizar os encaixes, a presença das isometrias, como translações, rotações e reflexões envolvidas nos movimentos necessários para compor o ladrilhamento.

Embora o produto educacional tenha como foco principal o ensino de matrizes no ensino médio, as atividades iniciais apresentadas até aqui podem ser adaptadas para o ensino de polígonos no ensino fundamental. Nessa etapa, é possível realizar a construção de polígonos, aplicar a Técnica da Dentada e criar ladrilhamentos, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico. Observa-se que as isometrias, quando trabalhadas apenas por meio dos movimentos, sem o uso da linguagem algébrica, são de fácil compreensão.

Dando continuidade ao desenvolvimento do produto, é apresentada uma revisão de conteúdos sobre matrizes, acompanhada de exercícios que retomam tópicos essenciais para a aplicação das atividades seguintes. Essa etapa tem o objetivo de reforçar conceitos que serão fundamentais para a compreensão do uso de matrizes na representação de isometrias. Caso o professor considere que os alunos já dominam esses conteúdos, é possível pular essa etapa da sequência didática.

Para tornar os exercícios mais atrativos, foi elaborado um quiz em formato de jogo, utilizando o aplicativo Kahoot. O professor pode projetar a atividade em sala, enquanto os alunos

respondem individualmente pelo computador ou Chromebook. Ao final, o próprio site apresenta um pódio com os estudantes que obtiveram melhor desempenho. O professor pode, se desejar, oferecer uma recompensa simbólica ao aluno que alcançar a melhor colocação, incentivando o engajamento e a participação ativa da turma.

Na última parte da sequência didática, temos as isometrias como foco em três atividades. A primeira tem como objetivo fazer o aluno identificar em exemplos no plano qual isometria está ocorrendo. Na segunda atividade, são disponibilizados exemplos de isometrias no plano e é solicitado que a equação algébrica seja desenvolvida, lembrando as matrizes e observando os valores dos pontos iniciais e os valores depois da transformação.

Já na terceira e última atividade, os alunos tem a figura e a equação algébrica matricial e precisam encontrar no plano a figura correspondente depois da isometria ou composições de isometrias. O ideal é a que a atividade ocorra no GeoGebra, porém é possível fazer com os exemplos projetados no quadro ou em impressões.

Para finalizar a sequência didática, como todo professor gosta, é disponibilizado uma tarefa para os alunos criarem o próprio exemplo de isometria no plano com a representação matricial. Essa tarefa pode ser realizada em sala ou em sua casa.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, concluímos esta dissertação relembrando do nosso objetivo, que definimos no início do trabalho: "Como integrar isometrias e matrizes ao ensino de matemática no ensino médio, a partir da arte, de modo a promover a contextualização e a motivação dos alunos?". Notamos que por meio do aprofundamento teórico da álgebra e pelo desenvolvimento do produto educacional foi possível alcançar tal meta.

Por meio do desenvolvimento dessa dissertação conseguimos destacar conceitos importantes tanto na álgebra, com as definições e exemplos de grupos, quanto no contexto histórico que utilizamos com a vida e a obras de Escher. Já o produto educacional criado trouxe uma proposta de sequência didática que apresentou o ensino de matrizes com contextualização e interdisciplinaridade, utilizando o GeoGebra e incentivando a criatividade.

Com a revisão bibliográfica apresentada neste trabalho, foi possível estabelecer relações entre as sequências já produzidas e aquelas que se pretendia desenvolver, evitando possíveis falhas e orientando o estudo por caminhos já validados. Além disso, os dois cenários de aplicação apresentados no produto ampliam seu alcance e oferecem maior facilidade ao professor que desejar utilizá-lo.

Ainda, por meio do estudo que embasou este trabalho podemos notar que há matemática em muitos momentos no nosso cotidiano e muitos dos temas que ensinamos na escola são possíveis de contextualização. Com isso, essa prática deve ocorrer com frequência, pois é importante o aluno entender o por quê ele deve aprender. Deixar de lado um pouco a motivação de estudar para passar em provas e vestibular, e mais para entender que se estuda algo porque é útil para a humanidade de alguma forma.

O produto atrelado a esta dissertação foi construído de tal forma que o professor utilize o material pronto, sem precisar de muitos ajustes e adaptações, e de fato auxiliar seu planejamento, pois sabemos que o professor já possui muitos percalços que lhe atrapalham e tomam tempo.

Enfim, deixamos como sugestão o avanço no estudo dos conteúdos presentes neste trabalho, há muito mais a ser visto sobre as isometrias, atreladas a simetrias, grupos de matrizes, de permutações e os grupos de papel de parede (*wallpaper groups*). Nota-se que os trabalhos produzidos no Brasil sobre os grupos de papel de parede ainda são escassos. E mesmo que o conteúdo não seja trivial, pode ser muito bem trabalhado em níveis de ensino mais básicos, com alunos de diferentes idades, contemplando o ensino de geometria, álgebra e geometria analítica.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, C. M. F. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 18, 85 e 86.
- ANDRADE, E. T. d. **Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Orientador: Prof. Rui Seimetz. Citado na página 86.
- ANDRADE, T. M. de (Ed.). **Matemática interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020. Manual do Professor. Suplementado pelo manual do professor. PNLD 2021. ISBN 978-65-5763-031-0. Citado 8 vezes nas páginas 40, 43, 44, 47, 52, 56, 65 e 72.
- BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra – Harper & Row do Brasil, 1984. 411 p. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 73.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; CÂMARA, P. R. d. S. **Prisma Matemática: Geometria e Trigonometria — Ensino Médio: Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. Manual do Professor. ISBN 978-65-5742-021-8. Citado na página 91.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; CÂMARA, P. R. d. S. **Prisma Matemática: Geometria — Ensino Médio: Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. Manual do Professor. ISBN 978-65-5742-025-6. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 91.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Citado na página 33.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Básica**. Brasília, DF: [s.n.], 2017. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 11 ago. 2025. Citado na página 83.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: [s.n.], 2018. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ensinomedio>>. Acesso em: 11 ago. 2025. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 84.
- CAMPOS, P. R. P. **Ladrilhamentos no plano e pentaminós: uma proposta para o ensino da Geometria no Ensino Médio**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia, São José dos Campos, SP, 2020. Orientadora: Profa. Dra. Grasielle Cristiane Jorge. Citado na página 85.
- CARDOSO, M. B. **Sequências didáticas: orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática**. 1. ed. Iguatu, CE: Quipá Editora, 2024. ISBN 978-65-5376-287-9. Citado na página 13.

CARINHA, M. d. S. **A obra de M.C. Escher como subsídio ao ensino das isometrias**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal do ABC, Santo Andre, 2018. Orientadora: Prof. Dr. Armando Caputi. Citado na página 86.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014. E-book. p. 313. ISBN 9788565848893. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788565848893/>>. Acesso em: 29 nov. 2024. Citado na página 13.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Geometria plana e espacial: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020. Material do PNLD 2021, Ensino Médio. Citado na página 89.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Trigonometria e Sistemas Lineares: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020. Material do PNLD 2021, Ensino Médio. Citado 5 vezes nas páginas 57, 62, 63, 70 e 90.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. [S.l.]: São Paulo: Atual Editora, 2003. 368 p. (4. ed.). ISBN 978-85-357-0401-3. Citado na página 33.

DREAMSTIME. **Mosaico das telhas, azulejos, palácio de Alhambra em Granada, Espanha**. 2025. Disponível em: <<https://pt.dreamstime.com/mosaico-das-telhas-azulejos-palacio-de-alhambra-em-granada-espanha-arte-%C3%A1rabe-vitrificou-as-feitas-com-uma-t%C3%A9cnica-cer%C3%A2mica-image121396572>>. Acesso em: 15 ago. 2025. Citado na página 17.

ESCHER, M. C. . **Galeria de obras de M. C. Escher**. 2020. Acesso em: 28 jul. 2025. Disponível em: <<https://mcescher.com/gallery/>>. Citado 8 vezes nas páginas 16, 19, 20, 21, 22, 56, 62 e 72.

ESQUERDO, C. A. d. S. **Transformações Geométricas no plano: uma abordagem inspirada em Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018. Orientador: Prof. Dra. Neuza Teramon. Citado na página 86.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com a matemática**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015. E-book. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788584290338/>>. Acesso em: 06 jun. 2025. ISBN 9788584290338. p.[Inserir número da página]. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.

FARIAS, S. V. d. **O Ladrilhamento do plano euclidiano no Ensino Médio: criando padrões por meio da resolução de problemas**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade de Brasília, Brasília, 2024. Orientadora: Simone Vasconcelos da Silva. Citado na página 85.

FATHAUER, R. **Tessellations: Mathematics, Art, and Recreation**. 1st. ed. Boca Raton: CRC Press, 2021. AK Peters/CRC Press, Taylor & Francis Group. ISBN 9780367185961. Citado 9 vezes nas páginas 16, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31 e 32.

FERREIRA, R. E. L. et al. Um panorama das questões de física do enem: desafios no âmbito da interdisciplinaridade e contextualização. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 1–28, 2020. ISSN 1982-873X. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/10530>>. Acesso em: 31 jul. 2025. Citado na página 9.

FERREIRA, V. J. d. A. **O desafio geométrico e seus ladrilhamentos: uma ferramenta de ensino de Geometria Plana na 1ª série do Ensino Médio em São Gonçalo do Gurguéia / PI**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano, Floriano, PI, 2019. Orientador: Prof. Dr. Egnílson Miranda de Moura. Coorientador: Prof. Ms. Fábio Pinheiro Luz. Citado na página 85.

FINSTON, D. R.; MORANDI, P. J. **Abstract Algebra: Structure and Application**. Cham: Springer, 2014. (Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology). ISBN 978-3-319-04497-2. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 73.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. Citado na página 81.

GAGERN, M. v.; RICHTER-GEBERT, J. Hyperbolization of euclidean ornaments. **The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 16, n. 12, p. 1–29, 2009. Disponível em: <<https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v16i2r12/pdf>>. Acesso em: 31 jul. 2025. Citado na página 32.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018. 363 p. (6. ed.). ISBN 978-85-244-0450-4. Citado na página 33.

GARCIA, R. A.; RIOS-NETO, E. L. G.; MIRANDA-RIBEIRO, A. d. Efeitos rendimento escolar, infraestrutura e prática docente na qualidade do ensino médio no Brasil. **Revista Brasileira de Estudos de População**, v. 38, p. 1–32, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.20947/S0102-3098a0152>>. Acesso em: 01 ago. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.20947/S0102-3098a0152>>. Citado na página 92.

GAY, M. R. G. e. a. **Araribá Conecta: Matemática - 6º ano**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editora responsável: Mara Regina Garcia Gay. Citado na página 35.

GAY, M. R. G. e. a. **Araribá Conecta: Matemática - 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editora responsável: Mara Regina Garcia Gay. Citado na página 24.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 7. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2022. E-book. p. 58. ISBN 9786559771653. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9786559771653/>>. Acesso em: 28 nov. 2024. Citado na página 12.

JANESCH, O. R. **Álgebra II**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina; Consórcio ReDiSul, 2008. Material elaborado para o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância da UFSC. ISBN 978-85-99379-56-1. Citado na página 33.

LEITAO, M. R. **Tesselações no ensino de geometria euclidiana**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Orientadora: Clarice Dias de Albuquerque. Citado na página 85.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 10. ed. [S.l.]: IMPA, 2020. (Coleção Matemática Universitária). Citado na página 73.

LIMA, M. G.; ROCHA, A. A. S. d. As tecnologias digitais no ensino de matemática. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, São Paulo, v. 8, n. 5, p. 729–739, maio 2022. ISSN 2675-3375. Disponível em: <https://revistas.rease.pro/index.php/rease/article/view/5513>. Acesso em: 26 jul. 2025. Disponível em: <<https://revistas.rease.pro/index.php/rease/article/view/5513>>. Citado na página 82.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017. ISBN 978-85-970-1076-3. Citado na página 13.

MARTIN, P. A. **Grupos, corpos e teoria de Galois**. [S.l.]: IME-USP, 2010. Citado na página 33.

MATIAS-PEREIRA, J. **Manual de Metodologia da Pesquisa Científica**. 4. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2016. E-book. p.41. ISBN 9788597008821. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788597008821/>>. Acesso em: 23 jul. 2025. Citado na página 12.

MENDES, C. R. A. **O uso da arte de Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA / Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2015. Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho. Citado na página 86.

MODERNA, E. (Ed.). **Diálogo: Matemática e suas Tecnologias — Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020. Organizadora: Editora Moderna; Editora responsável: Lilian Aparecida Teixeira; Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Citado na página 91.

MODERNA, E. (Ed.). **Diálogo: Matemática e suas Tecnologias — Geometria Plana: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020. Organizadora: Editora Moderna; Editora responsável: Lilian Aparecida Teixeira. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Citado na página 23.

MODESTO, C. d. F. **Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015. Orientadora: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho. Citado 3 vezes nas páginas 85, 86 e 87.

Morandi, P. J. **Isometries of  $R^n$** . s.d. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1Jy9FglmtWcbteWzmTRoHl8gm5ojTC3G8/view>>. Notas Matemáticas. Último acesso em: 15 ago. 2025. Citado na página 73.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). **Conexões: Matemática e suas Tecnologias – Geometria plana e espacial: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020. Organizadora: Editora Moderna. Citado na página 89.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). **Conexões: Matemática e suas Tecnologias – Matrizes e Geometria Analítica: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020. Organizadora: Editora Moderna. Citado 4 vezes nas páginas 42, 43, 62 e 90.

OCAMPO, D. M.; SANTOS, M. E. T. d.; FOLMER, V. A interdisciplinaridade no ensino É possível? prós e contras na perspectiva de professores de matemática. **Bolema**, v. 30, n. 36, p. 1014– 1030, 2016. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/8pzX3Pm5yPVrLsCvX8V3vTj/?lang=pt>>. Acesso em: 11 ago. 2025. Citado na página 82.

REIS, A. Q. M.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 339–364, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p339-364>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 82.

RIBEIRO, A. B. M. **As Frações que o ladrilhamento revela**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio. Citado na página 85.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. D. P. B. **Metodologia de pesquisa**. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013. 34 p. E-book. ISBN 9788565848367. Disponível em: <<https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788565848367/>>. Acesso em: 25 jul. 2025. Citado na página 12.

SANTOS, J. L. **Mosaicos e Ladrilhamentos com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2020. Orientador: Andre Nagamine. Citado na página 85.

SANTOS, L. S. **Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, BA, 2014. Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar dos Reis. Citado na página 85.

Secretaria de Estado de Educação de Santa Catarina. **Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 2 – Formação Geral Básica**. Florianópolis: Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2020. Documento elaborado no âmbito da implementação da BNCC em Santa Catarina. Citado na página 84.

SILVA, A. M. **Simetrias planas e alguns problemas de ladrilhamento**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013. Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi. Citado na página 85.

SILVA, A. O. d. S. **Papéis de parede e as obras de Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2020. Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado. Citado na página 86.

SILVA, F. F. d. **Geometria, arte & Escher: uma experiência na educação básica**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024. Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Anete Soares Cavalcanti. Citado 3 vezes nas páginas 86, 88 e 89.

SILVEIRA, **Desafios da Matemática: Matemática – 8º ano. Manual do Professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022. Citado na página 53.

TACORONTE, F. **Escher e a divisão regular do plano**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2021. Orientador: Leandro Albino Mosca Rodrigues. Citado na página 86.

TIESEN, S. M. d. C.; ARAUJO, R. R. d. O ensino de matemática por meio da contextualização e da pesquisa. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros (MG), Brasil, v. 4, n. 10, p. 1–16, 2020. Citado na página 81.

TJABBES, P. O mundo mágico de escher. **Art Unlimited**, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 20 e 21.

TORRES, J. B. d. A. **Tesselações planas: apresentar as tesselações do plano e algumas aplicações nas obras de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, CE, 2017. Orientador: Claudemir Silvino Leandro. Citado na página 85.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado na página 13.



JOINVILLE  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA  
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

### **ATESTADO DE VERSÃO FINAL**

Eu, Viviane Maria Beuter, professora do curso de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação/tese intitulada: **“ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS: A ARTE COMO CONTEXTO PARA O ENSINO DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO”** de autoria da acadêmica Susana Willemann Stimamiglio.

Joinville, 22 de outubro de 2025.

---

Viviane Maria Beuter