



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT



PROFMAT

ADILSON TAVARES DE BRITO JÚNIOR

**Semelhança entre Cônicas e Curvas de Grau 3:
Resultados Curiosos e Novos em Linguagem para o Ensino
Médio**

ORIENTADOR: PROF. DR. ALAN DE ARAÚJO GUIMARÃES

Natal – RN
Agosto de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ADILSON TAVARES DE BRITO JÚNIOR

**Semelhança entre Cônicas e Curvas de Grau 3:
Resultados Curiosos e Novos em Linguagem para o Ensino
Médio**

Dissertação apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT/UFRN como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães.

Natal – RN
Agosto de 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Brito Júnior, Adilson Tavares de.

Semelhança entre cônicas e curvas de grau 3: resultados curiosos e novos em linguagem para o ensino médio / Adilson Tavares de Brito Júnior. - 2025.

74 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães.

1. Matemática - Dissertação. 2. Cônicas - Dissertação. 3. Semelhança - Dissertação. 4. Polinômios de grau 3 - Dissertação. 5. Afim-equivalência - Dissertação. 6. Sequência didática - Dissertação. I. Guimarães, Alan de Araújo. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Dissertação de Mestrado sob o título “Semelhança entre Cônicas e Curvas de Grau 3: Resultados Curiosos e Novos em Linguagem para o Ensino Médio”, apresentado por Adilson Tavares de Brito Júnior e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães

Orientador

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Davi Levi da Silva Macedo

Examinador externo

UFCG – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana

Examinador interno

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Sumário

1 Um breve passeio pela geometria analítica	9
1.1 Breve revisão sobre sistemas de coordenadas	9
1.1.1 Plano cartesiano	9
1.2 Cônicas	11
1.2.1 Circunferência	11
1.2.2 Parábola	12
1.2.3 Elipse	16
1.2.4 Hipérbole	19
2 Cônicas: aplicações e contextos	22
2.1 Aplicações à Física	22
2.2 Cônicas na Filosofia	28
2.3 Cônicas e dobraduras	32
3 Semelhança entre cônicas	36
3.1 Motivação	36
3.2 Definições e consequências	39
3.3 Critérios para semelhança entre cônicas	46
3.3.1 Circunferências	46
3.3.2 Parábolas	48
3.3.3 Elipses	50
3.3.4 Hipérboles	53
4 Semelhança entre cônicas no ensino médio: uma proposta didática	54
4.1 Fundamentação teórica	54
4.2 Resolução de problemas - Polya	56
4.2.1 BNCC	58
4.3 Sequência didática	61
4.3.1 Encontro 1: introdução e questionamentos iniciais	62
4.3.2 Encontro 2: cônicas na prática	63
4.3.3 Encontro 3: aprofundamento e justificativas	64

4.3.4	Encontro 4: consolidação	64
5	Semelhança entre cúbicas: uma generalização natural	66
5.1	Critérios para semelhança entre curvas de grau 3	66
5.2	Em busca de respostas: dois problemas em aberto	71
5.3	Conclusão	72

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que, mesmo nos momentos mais desafiadores, me deu força, clareza e serenidade para seguir em frente. Foi Ele quem me mostrou que sou muito mais forte do que imaginava e que nenhum obstáculo é maior do que a fé e a perseverança.

À minha família, meu porto seguro, que sempre esteve ao meu lado, acreditando em mim mesmo quando eu duvidava. Com muito amor, trabalho e dedicação, vocês me ensinaram, na prática, o que significa ser íntegro, responsável e comprometido.

À minha esposa, minha companheira de todas as horas, meu alicerce. Sua sabedoria, paciência e amor foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Em tantos momentos, você segurou o peso do mundo para que eu pudesse me dedicar a este trabalho. Nada disso teria sido possível sem você.

E, como se tudo isso já não fosse suficiente, ainda me deu o presente mais lindo que eu poderia receber: nossa filha, Heloisa Helena. Seu sorriso ilumina meus dias e me lembra constantemente por que vale a pena lutar e acreditar.

Por fim, e não menos importantes, meus professores que me guiaram até aqui. Em especial, meu orientador que sempre foi extremamente paciente e gentil me fazendo perceber a álgebra de outra maneira.

Este trabalho é nosso. Com todo o meu amor, minha eterna gratidão.

Resumo

Nesta dissertação, investigamos a noção de semelhança entre curvas, entendida como uma generalização natural da semelhança entre triângulos. A partir dessa definição, analisamos critérios para estabelecer quando parábolas, elipses e hipérbolas são semelhantes. Na sequência, propomos uma atividade didática com o intuito de oferecer aos docentes uma abordagem pedagógica que possibilite demonstrar a estudantes do ensino médio que quaisquer duas parábolas são semelhantes. Por fim, apresentamos um teorema que garante que o gráfico de qualquer polinômio cúbico pode ser obtido a partir do gráfico da função $y = x^3$ por meio de funções de semelhança e de uma transformação de cisalhamento. Como desdobramento desse resultado, estabelecemos um critério que permite verificar quando o gráfico de um polinômio de grau 3 é semelhante ao gráfico de $y = x^3$.

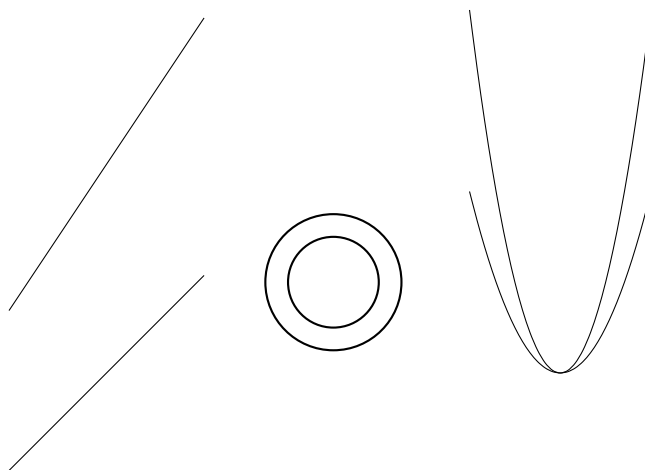
Abstract

In this dissertation, we investigate the notion of similarity between curves, understood as a natural generalization of the concept of similarity between triangles. Based on this definition, we analyze criteria for determining when parabolas, ellipses, and hyperbolas are similar. We then propose a didactic activity aimed at providing teachers with a pedagogical approach that allows high school students to understand that any two parabolas are similar. Finally, we present a theorem that guarantees that the graph of any cubic polynomial can be obtained from the graph of the function $y = x^3$ through similarity functions and a shear transformation. As a consequence of this result, we establish a criterion that makes it possible to verify when the graph of a degree-3 polynomial is similar to the graph of $y = x^3$.

Introdução

O estudo da semelhança entre triângulos remonta à Grécia Antiga, especialmente com Euclides (c. 300 a.C.), em sua obra “Os elementos”. Ele organizou conceitos geométricos, apresentando critérios de semelhança de triângulos baseados na igualdade de ângulos e proporções entre lados correspondentes, vide Livro VI de (BICUDO; OUTROS, 2009). Contudo, a ideia de proporções e relações entre triângulos já era conhecida antes dos gregos. Os egípcios e babilônios (c. 2000-1500 a.C.) usavam princípios geométricos em arquitetura e astronomia, o que sugere um entendimento empírico da semelhança de triângulos. O matemático Tales de Mileto (c. 624–546 a.C.) também é creditado por usar a semelhança de triângulos para medir a altura de pirâmides e a distância de navios no mar, o que mostra a aplicação prática desse conceito. Portanto, embora tenha sido formalizada por Euclides, a semelhança de triângulos foi observada e utilizada muito antes, em diversas civilizações antigas. Recomendamos a obra (BOYER; MERZBACH, 2019) para um aprofundamento mais detalhado nos aspectos históricos desse recorte da matemática.

Na sala de aula, o estudo da semelhança entre figuras está presente desde os anos iniciais. No Ensino Básico, a semelhança entre triângulos é introduzida e explorada, geralmente no 8º ano. No Ensino Superior, especialmente nos cursos de licenciatura em matemática, esse conceito é abordado com maior profundidade na disciplina de Geometria Euclidiana Plana, onde é apresentado com mais rigor e detalhes. Apesar disso, é pouco conhecido que há uma definição de semelhança entre curvas que generaliza, de forma natural, a semelhança entre triângulos. Observe atentamente as figuras a seguir.



É intuitivo supor que as retas à esquerda da figura sejam semelhantes, uma vez que uma pode ser transformada na outra por meio de translações e rotações. O mesmo raciocínio vale para as circunferências, já que uma pode ser obtida da outra por meio de uma ampliação ou redução. Mas, e quanto às parábolas à direita? À primeira vista, elas não parecem ser semelhantes, pois uma delas se apresenta visivelmente mais “aberta” que a outra. Neste ponto, torna-se fundamental esclarecer o que se entende por semelhança entre curvas, a fim de analisar adequadamente essa questão. Dizemos que a curva γ_1 é *semelhante* a curva γ_2 se existir um número $k > 0$ e uma função bijetiva $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ tais que, para quaisquer pontos $X, Y \in \gamma_1$, a relação

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = k \cdot \overline{XY}$$

seja satisfeita. Aqui, \overline{AB} denota a distância euclidiana entre os pontos A e B .

A função φ é chamada de *função de semelhança* e k é a constante de semelhança entre as curvas γ_1 e γ_2 . Se $0 < k < 1$, dizemos que γ_2 é uma redução de γ_1 . Se $k > 1$, γ_2 é uma ampliação de γ_1 . Quando $k = 1$, as curvas são chamadas de congruentes.

Ressaltamos que a definição de semelhança acima constitui uma generalização natural da noção clássica de semelhança entre triângulos. Essa definição, bem como algumas de suas implicações é discutida no Capítulo 3 desta dissertação. Com base nela, demonstra-se que *quaisquer duas parábolas são semelhantes*, conforme apresentado no Capítulo 1 da obra (MORAIS FILHO, 2015). Assim, em resposta à pergunta formulada anteriormente sobre as parábolas da figura, concluimos que, de fato, elas são semelhantes. A mesma referência também estabelece critérios para a semelhança entre elipses e hipérbolas, mostrando que duas elipses (ou duas hipérbolas) são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma excentricidade. Destacamos ainda que o tema da semelhança entre parábolas é abordado, sob uma perspectiva mais informal, na referência (DE VILLIERS, 1994).

Dentro desse contexto, o objetivo central que orientou a elaboração desta dissertação foi investigar, de forma mais aprofundada, a definição de semelhança entre curvas, bem como os critérios que determinam a semelhança entre cônicas e curvas definidas por polinômios de grau 3. Para alcançar esse propósito, organizamos o trabalho em cinco capítulos, conforme descrito a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos as definições de parábola, elipse e hipérbole, bem como a dedução das equações que as caracterizam. No Capítulo 2, discutimos diferentes contextos e aplicações das cônicas, que vão desde a Física até a Filosofia — incluindo interpretações filosóficas atribuídas a Hipátia. Ainda nesse capítulo, propusemos construções geométricas das cônicas por meio de dobraduras, proporcionando uma abordagem concreta e visual dos conceitos. O Capítulo 3, fundamentado na referência (MORAIS FILHO, 2015), introduz a definição formal de semelhança entre curvas, explora diversos exemplos e apresenta os critérios para a semelhança entre cônicas. O Capítulo 4 foi dedicado ao desenvolvimento de uma proposta de sequência didática voltada para o ensino médio, centrada na semelhança entre parábolas. Acreditamos que esse tema possui um grande potencial pedagógico, tanto por ser pouco conhecido quanto por conter aspectos contra-intuitivos que despertam a curiosidade dos estudantes. Por fim, no Capítulo 5, introduzimos a noção de curvas afim-equivalentes e demonstramos

que o gráfico de qualquer função polinomial de grau 3, da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, pode ser transformado no gráfico de $y = x^3$ mediante uma composição de funções de semelhança e uma transformação de cisalhamento. Também estabelecemos condições sobre os coeficientes do polinômio f para que seu gráfico seja semelhante ao de $y = x^3$. Os resultados desse último capítulo refletem uma abordagem original desenvolvida pelos autores, a qual foi convertida no artigo (GUIMARÃES; BRITO JÚNIOR; SILVA JÚNIOR, 2025), atualmente submetido à revista *Professor de matemática Online*, da Sociedade Brasileira de matemática. Concluimos o capítulo com a proposição de um problema aberto relacionado aos gráficos de polinômios de grau arbitrário.

Acreditamos que este trabalho possa ser uma leitura valiosa para professores de matemática do ensino médio, assim como para demais interessados na interseção entre geometria e álgebra, e suas potenciais aplicações em sala de aula.

Capítulo 1

Um breve passeio pela geometria analítica

O presente capítulo dará alicerce para o que será estudado a posteriori, o qual foi desenvolvido com base no Capítulo 6 da referência (WINTERLE, 2000).

1.1 Breve revisão sobre sistemas de coordenadas

1.1.1 Plano cartesiano

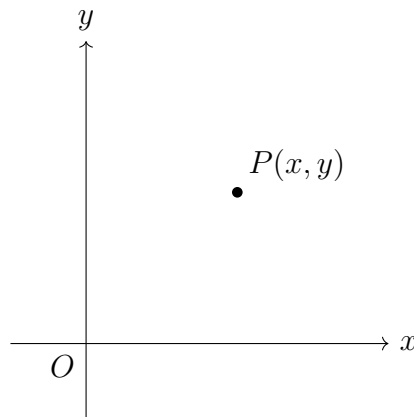
Este capítulo dedicará atenção à definição dos elementos e ferramentas do plano cartesiano que serão fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Ao estabelecer esses conceitos básicos, garantimos uma base sólida para a compreensão e aplicação dos tópicos mais avançados que virão a seguir.

Definição 1. Designamos por \mathbb{R}^2 o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , onde x e y são números reais, ou seja:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Todo ponto P do plano, representado na Figura 1.1, pode ser representado por um par ordenado (x, y) . Dizemos que x e y são as coordenadas de P e escrevemos $P(x, y)$; x é chamada abscissa de P ; y é a ordenada de P .

Figura 1.1: Plano cartesiano xOy



Fonte: autoria Própria.

Uma vez definido um sistema de coordenadas em um plano Π , consideramos a função $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $P \in \Pi$ seu par ordenado de coordenadas $f(P) = (x, y)$. Essa correspondência é biunívoca, ou seja, cada ponto do plano corresponde a um único par de coordenadas e vice-versa. De forma mais objetiva, (LIMA et al., 1997) destaca que essa função permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica, e reciprocamente.

Os eixos ortogonais x e y dividem o plano em quatro regiões, conhecidas como quadrantes. Dado um ponto $P(x, y)$, se P está no primeiro quadrante, então $x \geq 0$ e $y \geq 0$. De forma análoga, para os demais quadrantes, temos:

- Segundo quadrante: $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- Terceiro quadrante: $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- Quarto quadrante: $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

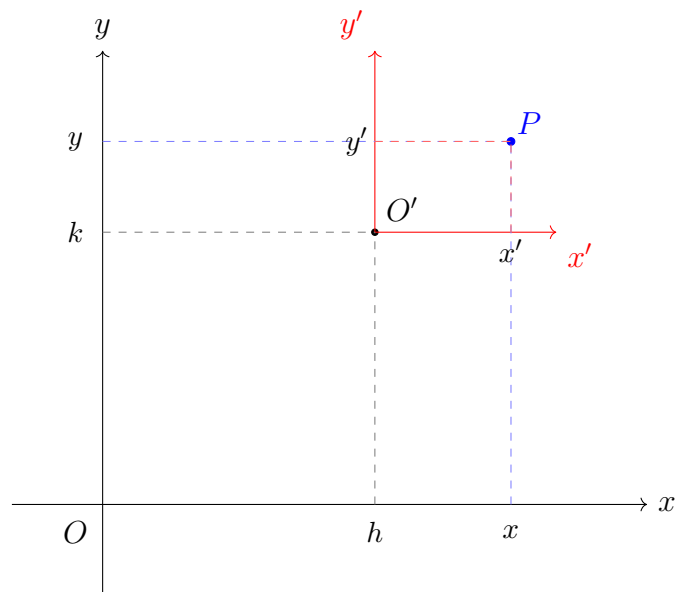
Sejam $X(x_1, y_1)$ e $Y(x_2, y_2)$ pontos situados no sistema de eixos xOy . Ao longo desse texto, a distância entre os pontos X e Y será denotada por $d(X, Y)$ ou por \overline{XY} . É um fato amplamente conhecido que

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Consideremos o sistema de eixos xOy e, nele, um ponto genérico $O'(h, k)$. A partir do ponto O' , vamos introduzir um novo sistema de eixos, digamos $x'O'y'$, conforme indicado abaixo.

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}.$$

Figura 1.2: Dois sistemas de eixos com ponto genérico P .



Fonte: autoria Própria.

Dessa forma, um ponto qualquer P poderá ser representado em ambos os sistemas de eixos. No primeiro deles, as coordenadas de P são (x, y) e, no segundo, as coordenadas são (x', y') . Tendo as coordenadas do ponto em relação a um dos sistemas, poderemos encontrá-las no outro sistema por meio das fórmulas de translação

1.2 Cônicas

As cônicas são originadas a partir da interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano. A depender da forma como se dê a interseção, a curva obtida poderá ser uma circunferência, parábola, elipse ou hipérbole. Ao longo dessa seção, iremos discorrer sobre cada uma delas, destacando suas principais características.

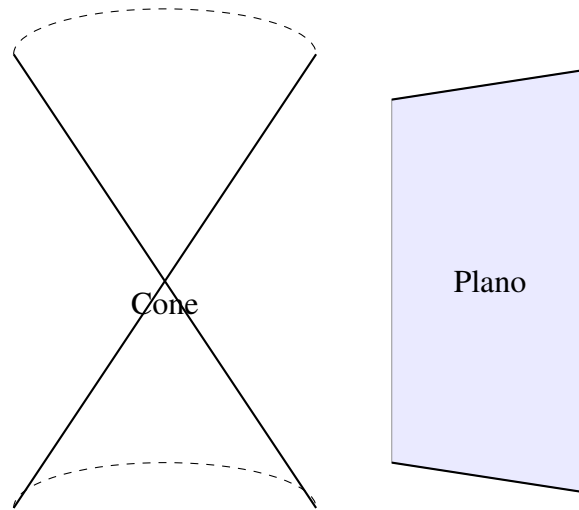
1.2.1 Circunferência

Antes de falar um pouco sobre a definição das cônicas vamos entender o lugar geométrico como um conjunto de pontos que possuem uma ou mais propriedades em comum e todos os possíveis pontos estão contidos nesse conjunto. São exemplos de lugares geométricos: retas, segmento de reta, circunferência e até mesmo o próprio ponto no plano cartesiano é um lugar geométrico.

A primeira cônica a ser abordada é a circunferência, definida abaixo.

Definição 2. *Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo é constante. O ponto fixo é chamado de centro e a constante é chamada de raio da circunferência.*

Figura 1.3: Cone duplo e plano lateral — origem das seções cônicas.



Fonte: autoria Própria.

Consideremos uma circunferência de centro num ponto $C(a, b)$ e raio $r > 0$. Dado um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência, por definição, devemos ter

$$d(P, C) = r.$$

Realizando uma pequena manipulação algébrica, obtemos

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

que é a equação reduzida da circunferência centrada em $C(a, b)$ e que tem raio r .

Exemplo 1. A equação da circunferência com centro $C(0, 0)$ e raio $r = 3$ é

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Por outro lado, a equação $(x + 1)^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = 3$ representa uma circunferência de centro $(-1, \frac{1}{3})$ e raio $\sqrt{3}$.

1.2.2 Parábola

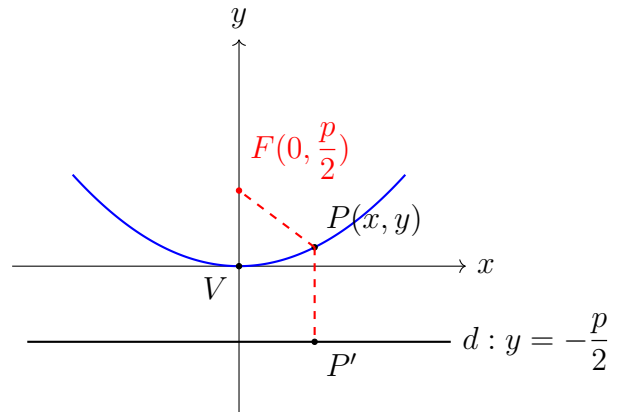
As parábolas costumam ser abordadas no ensino médio em dois contextos principais: no estudo das funções quadráticas e no das seções cônicas. Nesta subseção, nossa abordagem estará focada neste segundo contexto.

Definição 3. Parábola é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano. O ponto fixo é chamado de foco da parábola e, em geral, é

denotado por F . A reta fixa é chamada de diretriz da parábola e costuma ser denotada por d .

Na figura ao lado, destacamos os seguintes elementos da parábola:

- Parâmetro: é o número p .
- Foco: é o ponto F .
- Diretriz: é a reta d .
- Vértice: é o ponto V .



Outro elemento de extrema importância é o eixo de simetria da parábola. Esse eixo é perpendicular à diretriz e contém o vértice dela. Na figura anterior ele está representado pelo eixo y .

Uma vez definida a parábola e seus elementos, vamos seguir para a dedução de sua equação.

Proposição 1. Consideremos uma parábola com vértice $V(0, 0)$ e $P(x, y)$ um ponto genérico dela.

(a) Se o eixo é o eixo y e seu foco é $F(0, \frac{p}{2})$, tem-se

$$x^2 = 2py.$$

Além disso, se $p > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima e se $p < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

(b) Se o eixo é o eixo x e seu foco é $F(\frac{p}{2}, 0)$, tem-se

$$y^2 = 2px.$$

Além disso, se $p > 0$, a concavidade da parábola está voltada para a direita e se $p < 0$, a concavidade está voltada para a esquerda.

Demonstração. (a) Sejam $P(x, y)$ um ponto genérico da parábola e $P'(x, \frac{p}{2})$ a sua projeção ortogonal sobre a diretriz $d : y = -\frac{p}{2}$. Por definição, $\overline{PF} = \overline{PP'}$ e, dessa forma, temos

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(y + \frac{p}{2})^2}.$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$x^2 + y^2 - yp + (\frac{p}{2})^2 = y^2 + yp + (\frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2 = 2py.$$

□

O item (b) segue com demonstração análoga.

Exemplo 2. *Abaixo, temos os gráficos das parábolas $x^2 = 2y$, $x^2 = -6y$, $y^2 = 4x$ e $y^2 = -10x$.*

Figura 1.4: Esboços das parábolas em diferentes orientações.

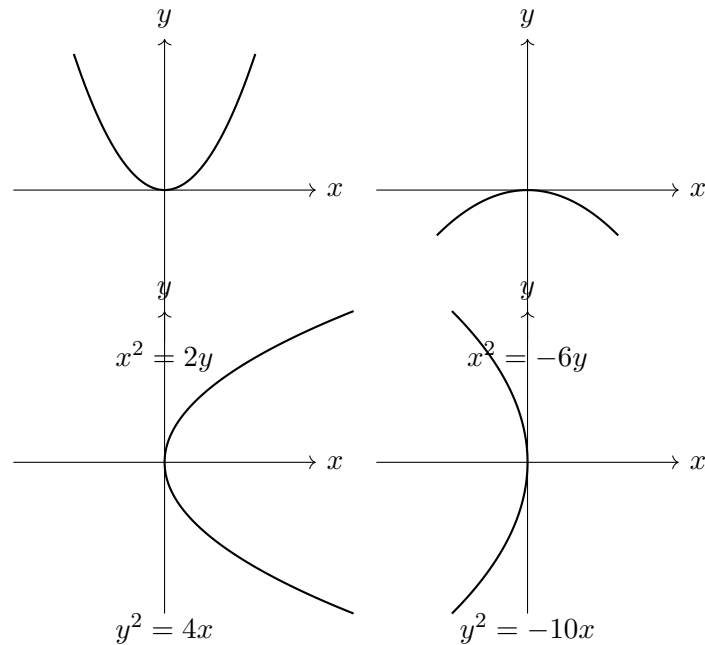
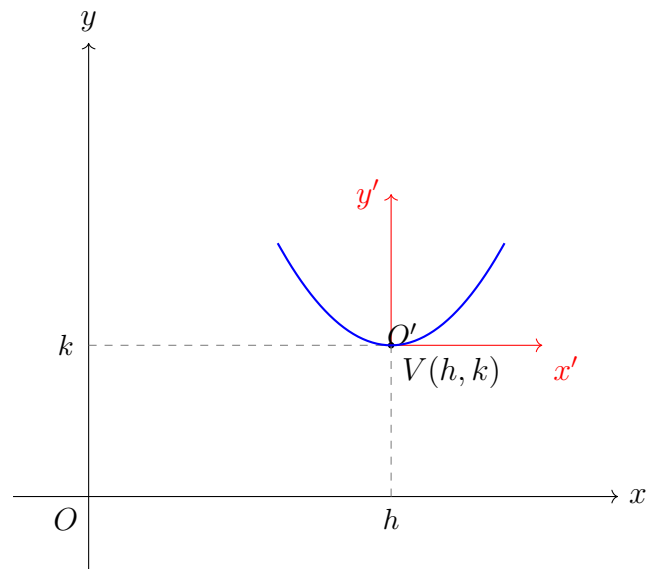


Figura 1.5: Fonte: autoria própria.

Agora, consideremos uma parábola com vértice em um ponto qualquer, digamos $V(h, k)$ e suponhamos que seu eixo é paralelo ao eixo y . Com origem em V , tracemos um novo sistema $x'O'y'$, onde $O' = V$.

Figura 1.6: Sistema de eixos xOy ortogonal e sistema transladado $x'O'y'$ com vértice $V(h, k)$



Fonte: Autoria Própria.

Em relação ao sistema de eixos $x'O'y'$, a parábola tem vértice na origem e, dessa forma, sua equação reduzida é

$$(x')^2 = 2py'.$$

Aplicando as fórmulas de translação vistas na Seção 1.1, vem

$$(x - h)^2 = 2p(y - k),$$

que é a *forma padrão* para este caso e referida ao sistema xOy . Nesse contexto, os elementos da parábola são dados por:

- Vértice: $V(h, k)$;
- Foco: $F(h, k + \frac{p}{2})$;
- Diretriz: $d : y = k - \frac{p}{2}$.

Novamente, o sinal de p indicará a concavidade da parábola.

Suponhamos agora uma parábola com vértice $V(h, k)$ e com eixo paralelo ao eixo x . Trabalhando de forma inteiramente análoga, concluímos que a equação dela será

$$(y - k)^2 = 2p(x - h).$$

Seus elementos serão os seguintes:

- Vértice: $V(h, k)$;
- Foco: $F(h + \frac{p}{2}, k)$;
- Diretriz: $d : x = h - \frac{p}{2}$.

Expandindo as equações $(x - h)^2 = 2py(y - k)$ e $(y - k)^2 = 2p(x - h)$ e isolando a variável de grau um, obtemos, respectivamente, equações do tipo

$$y = ax^2 + bx + c,$$

e

$$x = ay^2 + by + c,$$

com $a \neq 0$. Uma equação em um desses tipos é chamada de *equação explícita* da parábola.

1.2.3 Elipse

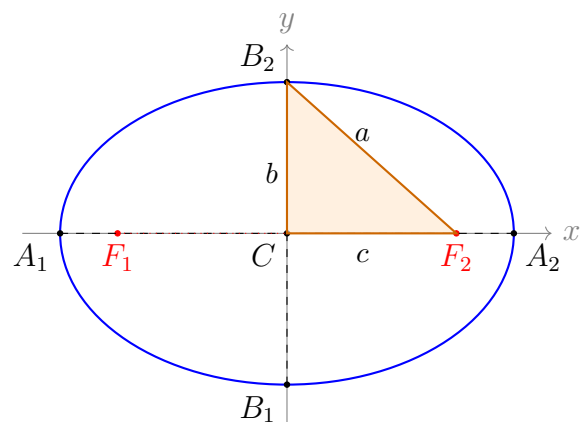
Definição 4. *Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados desse plano é igual a uma constante pré-definida maior que a distância entre os dois pontos fixos.*

Consideremos no plano dois pontos distintos, denotados por F_1 e F_2 de sorte que $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real a satisfazendo $2a > 2c$. Sendo $2a$ a constante da definição e $P(x, y)$ um ponto genérico da elipse, devemos ter

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Destacamos os seguintes elementos da elipse:

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 .
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio do segmento F_1F_2 .
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 .



Pela definição de elipse, devemos ter $\overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$. Consequentemente, $\overline{B_2F_2} = \overline{B_2F_1} = a$. Do triângulo retângulo B_2CF_2 , decorre que

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

o que implica em $b < a$ e $c < a$.

Definimos a *excentricidade* da elipse como sendo o número

$$e = \frac{c}{a}.$$

Observe que $0 < e < 1$. Além disso, e é responsável pela forma da elipse; quanto mais próxima de 1 a excentricidade for, mais achatada será a elipse e quanto mais próximo de zero significa que irá perdendo a excentricidade, ou seja, seu achatamento, se aproximando de uma circunferência.

Daqui por diante, nosso objetivo é encontrar a equação da elipse.

Proposição 2. *Consideremos uma elipse com centro $C(0, 0)$ e $P(x, y)$ um ponto genérico dela.*

(a) *Se o eixo maior está sobre o eixo x , tem-se*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$.

(b) *Se o eixo maior está sobre o eixo y , tem-se*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

com $a > b$.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração do item (a). Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Por definição, devemos ter

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ &\quad \Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\ &\quad \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

É importante destacar que, na terceira linha dessa demonstração, os radicando dos dois termos da equação são positivos uma vez que, na primeira linha, os resultados dos radicais são positivos, pois representam distâncias, logo os resultados são positivos.

Por outro lado, na 5ª linha da demonstração, temos uma expressão do tipo:

$$\begin{aligned} a\sqrt{B} &= a^2 - cx, \\ \text{com } B &= x^2 + y^2 - 2cx + c^2. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{B} \geq 0$ e $a > 0$, então $a\sqrt{B} \geq 0$. Logo, o lado direito também deve ser não negativo:

$$a^2 - cx \geq 0.$$

Para pontos da elipse, temos $|x| \leq a$ e $0 \leq c \leq a$. Assim,

$$a^2 - cx \geq a^2 - |c||x| \geq a^2 - ac \geq 0.$$

Assim, é lícito elevar ao quadrado novamente a igualdade $a\sqrt{B} = a^2 - cx$ sem introduzir módulos, pois ambos os lados são não negativos.

Em virtude de $a^2 - c^2 = b^2$, temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo a última igualdade por a^2b^2 , obtemos

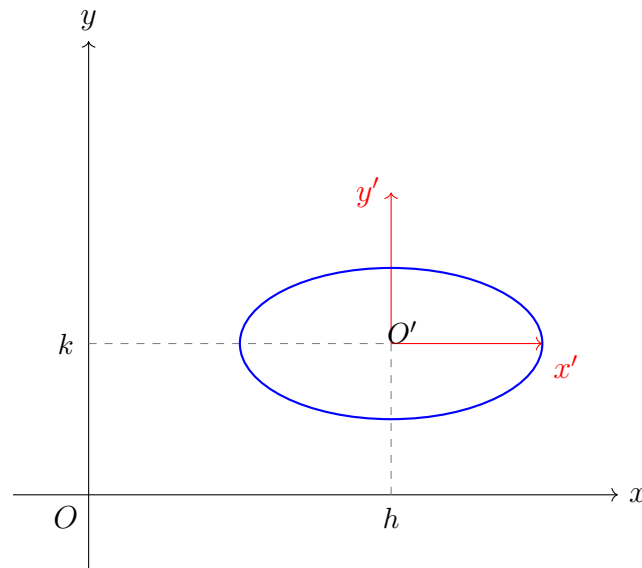
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O item (b) pode ser demonstrado de forma análoga. □

Uma equação em algum dos formatos apresentados na Proposição 2 é chamada de *equação reduzida* da elipse.

Agora, consideremos uma elipse com centro em um ponto qualquer, digamos $C(h, k)$ e com eixo maior paralelo ao eixo x , conforme ilustrado abaixo. Com origem em C , tracemos um novo sistema $x'O'y'$, onde $O' = C$.

Figura 1.7: Sistema de eixos xOy ortogonal e sistema transladado $x'O'y'$ com centro $V(h, k)$



Fonte: A autoria própria.

No sistema $x'O'y'$, a equação da elipse é

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Aplicando as fórmulas de translação, concluímos que a equação da elipse quando referida ao sistema xOy é

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$. No caso em que o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo y , procedendo de forma similar, inferimos que a equação da elipse toma a forma

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1,$$

com $a > b$.

1.2.4 Hipérbole

Definição 5. *Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixados desse plano é igual a uma constante pré-definida menor que a distância entre os dois pontos fixados.*

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tais que $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real positivo a satisfazendo $2a < 2c$. Sendo $2a$ a constante da definição, um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

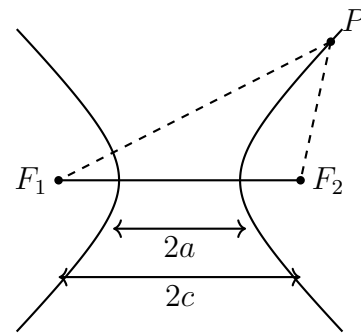
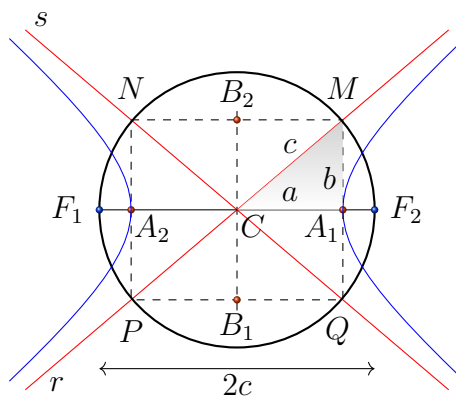


Figura 1.8: Hipérbole - definição

Pela igualdade anterior, é imediato que a hipérbole é uma curva que possui dois ramos. Para viabilizar o traçado da hipérbole, teceremos um passo a passo. Observemos a figura seguinte.

Figura 1.9: Elementos da hipérbole.



Fonte: Autoria própria.

Inicialmente, consideremos num plano dois pontos quaisquer F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$. Denotando por C o ponto médio do segmento F_1F_2 , tracemos uma circunferência de centro C e raio c .

Escolhendo um valor arbitrário a , com $0 < a < c$, marquemos sobre F_1F_2 , a partir de C , os pontos A_1 e A_2 de modo que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$. Por esses pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2 . As quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo $MNPQ$ inscrito nesta circunferência. Tracemos as retas r e s que contêm as diagonais do referido retângulo e, por fim, a hipérbole conforme a figura.

Os elementos da hipérbole são:

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 .
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .

- Vértices: são os pontos A_1 e A_2 .
- Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.
- Eixo imaginário ou não-transverso: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, com $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C .
- Assíntotas: são as retas r e s .

Observando o triângulo CA_2M , inferimos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Definimos a *excentricidade* da hipérbole como sendo o número

$$e = \frac{c}{a}.$$

Claramente, temos $e > 1$. Nota-se que a excentricidade está fortemente ligada com a abertura da hipérbole. Sendo assim, uma vez que a excentricidade está próxima de 1 significa que a concavidade dela é maior, ou seja, mais fechada. Quando a excentricidade está mais próxima de zero a hipérbole vai perdendo-a.

Da mesma forma que determinamos as equações da parábola e da elipse, podemos encontrar a equação da hipérbole. A fim de não tornar a abordagem repetitiva, aqui iremos simplesmente indicar as duas possíveis formas de equação da hipérbole, a depender da posição do eixo real, sem trazer as demonstrações. Para o leitor interessado em ver tais deduções, recomendamos o Capítulo 8 da referência (WINTERLE, 2000).

Consideremos uma hipérbole com centro no ponto $C(h, k)$. No caso em que o eixo real é paralelo ao eixo x , a equação da hipérbole é

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

No caso em que o eixo da hipérbole é paralelo ao eixo y , a sua equação passa a ser

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1.$$

Uma equação apresentada dessa forma chama-se *equação reduzida* da hipérbole. Em ambos os casos, é válida a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

Capítulo 2

Cônicas: aplicações e contextos

A leitura deste capítulo não é indispensável para o entendimento dos capítulos seguintes e pode ser realizada de forma independente, caso seja do interesse do leitor.

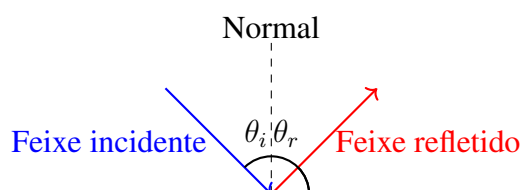
Aqui, nosso objetivo é apresentar algumas das diversas aplicações das cônicas e alguns contextos inusitados nos quais elas ocorrem. Diante do atual cenário educacional, observa-se uma crescente necessidade de contextualizar os conteúdos matemáticos, a fim de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo. Essa abordagem visa não apenas facilitar o trabalho do professor em sala de aula, mas também estimular o interesse dos alunos, promovendo o desenvolvimento de sua curiosidade diante das diferentes situações-problema propostas. Espera-se, com isso, que os estudantes se sintam motivados a compreender mais profundamente as propriedades das cônicas — conteúdos estes que, muitas vezes, acabam sendo negligenciados em razão das mudanças trazidas pela reformulação do currículo do ensino médio.

Dentre a ampla gama de aplicações que envolvem áreas como a física, a engenharia e até mesmo a filosofia, algumas foram selecionadas para serem exploradas com maior profundidade, com vistas a subsidiar o trabalho docente em sala de aula.

2.1 Aplicações à Física

Considere a reflexão de um raio de luz em uma superfície plana. Seja θ_i o ângulo de incidência e θ_r o ângulo de reflexão como apresentado na figura abaixo.

Figura 2.1: Representação da reflexão de um feixe de luz em uma superfície plana



Fonte: Autoria própria.

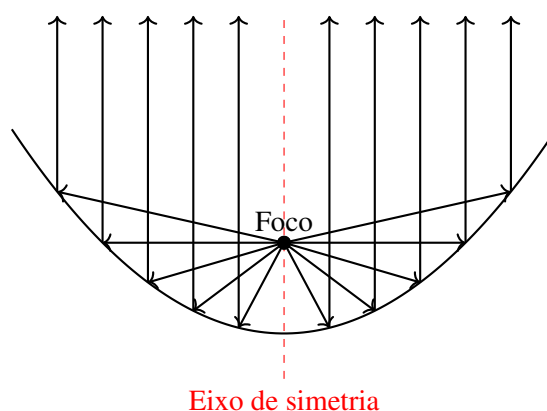
A reflexão da luz, segundo (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2000), obedece as seguintes leis:

- O raio incidente, o raio refletido e a normal estão no mesmo plano;
- O ângulo de incidência (θ_i) é igual ao ângulo de reflexão (θ_r).

É de grande importância que o leitor saiba que essas leis se aplicam à reflexão regular, como espelhos planos, mas são a base para entender outros tipos de reflexão como a difusa onde a superfície é irregular e os raios são refletidos em diversas direções.

Proposição 3. *Se uma fonte de luz estiver posicionada no foco de um espelho parabólico, todos os seus raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Inversamente, se raios de luz incidirem paralelamente ao eixo de simetria sobre a superfície do espelho, eles serão refletidos e convergirão para o foco.*

Figura 2.2: Reflexão em espelho parabólico

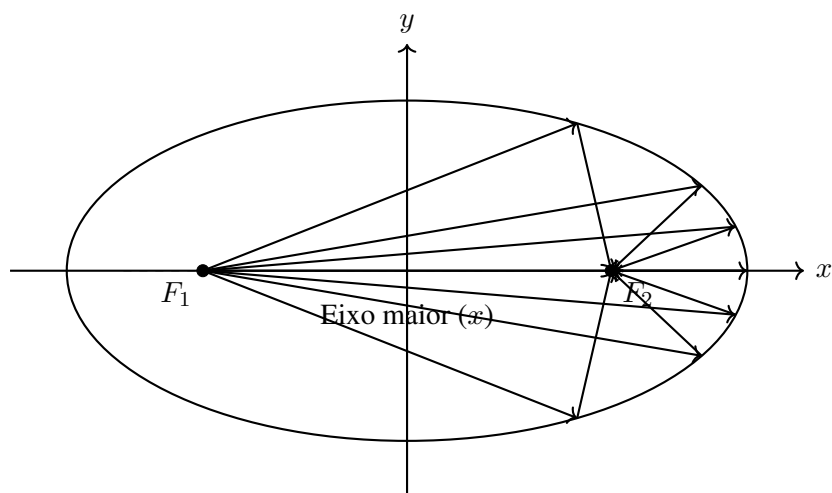


Fonte: Autoria própria

Mas por que isso acontece? Levamos em conta a lei da reflexão no que diz respeito ao ângulo de incidência e ao ângulo de reflexão. Iremos utilizar as leis da óptica geométrica, mas também teremos que construir tangentes auxiliares em cada ponto para ter uma percepção clara de tal propriedade refletora. Por outro lado, o formato da parábola foi definido geometricamente para garantir que, a partir das tangentes em cada ponto da curva, a normal à superfície direcione os raios de forma que todos saiam paralelos. Em virtude da parábola ser o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma reta, quando aplicamos a lei da reflexão, a curva “concentra” os raios paralelos ou convergentes. E se a superfície não é parabólica, mas elíptica, o que podemos concluir?

Proposição 4. *Se a fonte de luz estiver localizada em um dos focos de uma superfície elíptica todos os raios refletidos pelo espelho irão convergir para o outro foco.*

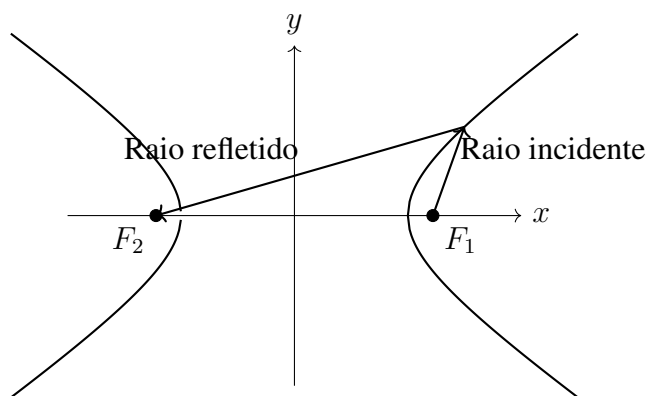
Figura 2.3: Reflexão em superfície elíptica: os focos F_1 e F_2 estão sobre o eixo x



Fonte: autoria própria.

Proposição 5. *Em uma hipérbole, qualquer raio de luz que parte de um de seus focos e incide sobre a curva refletora será refletido de acordo com a lei da reflexão, de modo que seu prolongamento passa pelo segundo foco. Essa propriedade é recíproca: um raio proveniente do segundo foco será refletido como se tivesse partido do primeiro.*

Figura 2.4: Raio de luz partindo do foco F_1 refletindo na hipérbole e indo para o foco F_2 .



Fonte: autoria própria.

As reflexões observadas em todos os casos respeitam rigorosamente as leis fundamentais da reflexão óptica, além de explorarem as propriedades geométricas intrínsecas a cada superfície refletora. Em particular, as propriedades descritas na Figura 2.2 fundamentam o projeto e a construção de dispositivos parabólicos, como placas parabólicas, que desempenham um papel crucial na concentração e captação de energia solar.

Essas placas parabólicas possuem a capacidade de refletir os raios solares incidentes de forma que eles convergem precisamente no foco da parábola, garantindo máxima eficiência na concentração

energética. Tal princípio é amplamente aplicado em tecnologias de concentração solar, incluindo fornos solares e sistemas de aquecimento de alta temperatura. Em fornos solares parabólicos, a focalização dos raios solares pode atingir temperaturas superiores a $3.500^{\circ}C$, possibilitando reações químicas avançadas, fusão de materiais e processos térmicos industriais com elevado desempenho energético e baixo impacto ambiental.

Adicionalmente, o emprego dessas superfícies refletoras é fundamental para a otimização de sistemas fototérmicos e fotovoltaicos, viabilizando um aproveitamento mais eficaz da radiação solar. O controle preciso da geometria da parábola e a correta aplicação das leis de reflexão garantem a minimização das perdas energéticas por dispersão, promovendo maior concentração de fluxo térmico no foco, elemento crítico para o aumento da eficiência dos dispositivos solares.

Figura 2.5: Forno Solar



Fonte: <https://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/06/forno-solar.html>

Além disso, espelhos parabólicos são amplamente empregados na fabricação de telescópios de alta precisão, devido à sua capacidade de refletir e concentrar raios luminosos em um ponto focal único e bem definido. Essa característica geométrica permite minimizar significativamente as aberrações ópticas, como a aberração esférica, que são comuns em espelhos de formato esférico. Como resultado, os espelhos parabólicos proporcionam imagens com maior nitidez e fidelidade, essenciais para aplicações astronômicas e instrumentação óptica avançada.

Outra aplicação importante das superfícies parabólicas ocorre no campo das telecomunicações, por meio do uso de antenas parabólicas. A geometria parabólica permite que as ondas eletromagnéticas incidentes, provenientes de satélites ou outras fontes distantes, sejam refletidas de forma que converjam para um único ponto: o foco da parábola. Nesse ponto é posicionado o receptor (ou alimentador), que capta o sinal com alta eficiência.

Essa configuração geométrica maximiza o ganho direcional da antena, melhora a relação sinal-ruído e minimiza perdas por dispersão, fatores essenciais para a transmissão e recepção de dados

em sistemas de comunicação via satélite, radiodifusão, internet e telefonia. A alta diretividade das antenas parabólicas permite o uso de feixes estreitos, otimizando a recepção de sinais mesmo a grandes distâncias ou em presença de múltiplas fontes emissores.

Figura 2.6: Antena parabólica residencial.



Fonte: <<https://shre.ink/twht>>

Na odontologia, superfícies elípticas são utilizadas para concentrar a luz no campo de trabalho do dentista, maximizando a iluminação da área de interesse e evitando que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente.

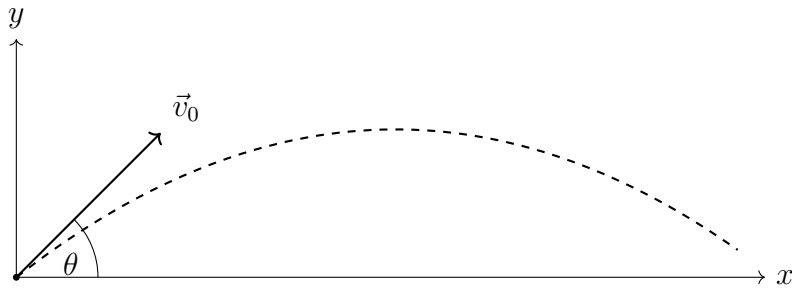
Uma das aplicações clássicas da física é o estudo do lançamento de projéteis sob a ação da gravidade. Nesse contexto, é possível relacionar a coordenada vertical y com a coordenada horizontal x , que representa o deslocamento do projétil. De acordo com Halliday et al. (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008), essa relação é descrita pela equação:

$$y(x) = tg\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot x^2, \quad (2.1)$$

onde g é a aceleração gravitacional, v_0 é a velocidade de lançamento do projétil e θ é o ângulo de lançamento do projétil em relação ao eixo x .

É fácil ver que o coeficiente do termo quadrático é negativo e, portanto, a parábola descreve convenientemente o lançamento de um projétil, pois a concavidade desta parábola é voltada para baixo. Veja ainda que na Equação 2.1 o termo independente é nulo, nos permitindo investigar o lançamento a partir da origem do sistema cartesiano.

Figura 2.7: Lançamento oblíquo de um projétil com velocidade inicial \vec{v}_0 e ângulo de lançamento θ .



Fonte: autoria própria.

Podemos fazer uma análise bem mais aprofundada do caso acima, mais especificamente da Equação 2.1. Perceba que a equação obtém seu máximo em:

$$x_v = \frac{-tg\theta}{2 \cdot \frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta}} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \cdot \frac{2v_0^2 \cdot \text{cos}^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}2\theta}{2g}. \quad (2.2)$$

Para que a Equação 2.2 tenha seu máximo temos que garantir que $\text{sen}2\theta = 1$, uma vez que g e v_0 são constantes. Nesse caso, segue que $2\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dessa forma, garantimos o maior alcance possível com 45° .

Ainda no contexto de lançamentos, a referência (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008) mostra que as coordenadas de um corpo atirado a partir do solo com velocidade inicial v_0 e ângulo de lançamento θ são dadas pelas equações

$$x(t) = v_0 \cdot \text{cos}(\theta) \cdot t \quad (2.3)$$

$$y(t) = v_0 \cdot \text{sin}(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.4)$$

onde t é o tempo decorrido desde o momento do lançamento. Com essas equações fica fácil determinar as coordenadas do ponto de maior altura e também o tempo necessário para que isso ocorra. Usando técnicas do Cálculo Diferencial, mostra-se que o instante no qual o projétil atingirá altura máxima é

$$t_m = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.3) e (2.4), vem $x(t_m) = \frac{v_0^2 \text{sen}2\theta}{2g}$ e $y(t_m) = \frac{v_0^2(1 - \text{cos}2\theta)}{4g}$.

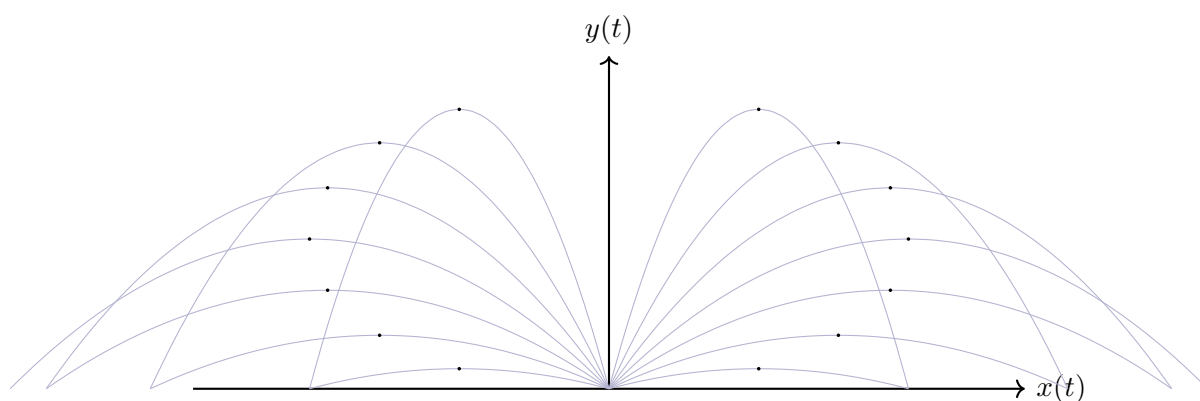
As coordenadas acima satisfazem a equação de uma elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Com efeito, basta tomar

$b = \frac{v_0^2}{4g}$, obtendo

$$\frac{x_v^2}{4b^2} + \frac{(y_v - b)^2}{b^2} = 1,$$

onde $x_v = x(t_m)$ e $y_v = y(t_m)$. A figura abaixo ilustra esse fenômeno.

Figura 2.8: Elipse formada pelos pontos de altura máxima das trajetórias de lançamento com mesma velocidade inicial.



Fonte: autoria própria.

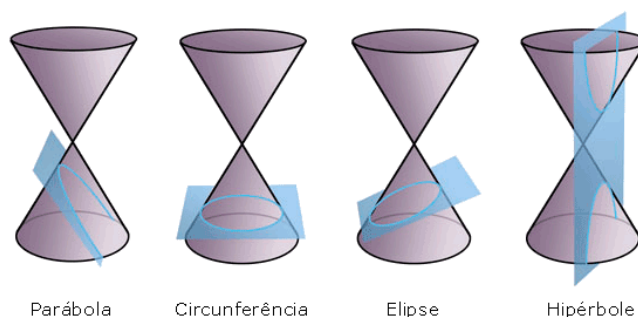
2.2 Cônicas na Filosofia

Esta seção, fundamentada em (TERUEL, 2024), aprofunda a discussão sobre o ensino das cônicas a partir da perspectiva filosófica de grandes matemáticos da Antiguidade, com ênfase especial na visão de Hipátia. Embora nem sempre seja evidente, a filosofia também oferece diversas contribuições para a matemática ao longo da história — desde o pensamento grego até as abordagens construtivistas contemporâneas — que influenciam a forma como compreendemos e ensinamos conceitos matemáticos. Nesse ponto vale ressaltar ainda mais a figura da filósofa e matemática Hipátia, que nasceu em Alexandria, Egito, por volta de 37 d.C. e teve seus conhecimentos fundamentados na escola neoplatônica. Ela foi a primeira mulher a ter trabalhos científicos na área de ciências exatas, filosofia e medicina e seus trabalhos tiveram extrema relevância, apresentados, por exemplo, na obra “*Comentários sobre aritmética de Diofanto*”¹ Hipátia também escreveu um tratado sobre a obra “*As cônicas*” de Apolônio². Tais trabalhos tornaram mais simples a interpretação com uma linguagem mais palpável.

¹Diofanto de Alexandria foi um matemático por muitos considerado o pai da álgebra.

²Apolônio de Pérgamo, nascido no séc. III a. C.

Figura 2.9: Interpretação das cônicas de Hipátia



Fonte: (<https://shre.ink/twhl>).

Em determinado momento, Hipátia convida os leitores a realizarem cortes no cone, inclinando-os gradualmente, a fim de facilitar a visualização das diferentes formas que podem ser obtidas.

Os cortes eram feitos de modo que:

- O primeiro corte era paralelo à base do cone e era obtido um círculo;
- O segundo corte era dado a partir de uma inclinação do plano que antes era paralelo a base, formando assim uma elipse;
- Mais uma vez eram feitas inclinações cada vez maiores, dando assim origem a uma parábola no momento em que o plano está secante ao círculo da base desse cone;
- Por fim, com um plano perpendicular a base do cone há a formação da hipérbole.

Segundo a própria Hipátia, as cônicas regiam os fenômenos naturais que ocorriam no universo. Para descrever melhor tais curvas, ela deixou as seguintes orientações:

“Lançai uma bola de um para o outro, aqui mesmo, no jardim. Independente de quanto impulso coloqueis no movimento, a trajetória da bola será sempre uma parábola. Mesmo que se faça um lançamento vertical, trata-se apenas de um caso extremo dessa curva.”

Logo após essa fala, Hipátia prova, algebricamente, que a trajetória da bola fica sempre à mesma distância de uma reta e de um ponto fixo (o foco). Para ela, a reta simbolizava a dualidade, o espelho, a matéria, a pura existência; já o ponto representava a unidade. Dessa forma, a parábola surgia como o símbolo do equilíbrio: tudo aquilo que se situa entre a unicidade e a dualidade — ou seja, tudo o que está vivo, todo o cosmos.

A parábola, segundo Hipátia, seria a representação mais pura da vida: partimos de um lugar determinado, somos lançados no fluxo da existência sem sofrermos provações, ganhando força, experiência e potência até alcançarmos o ponto máximo. A partir daí, tudo começa a decair de tal modo que retornamos ao nosso estado original.

Em meio a esse discurso, Hipátia discorre ainda sobre nossas faculdades mentais e as experiências que a vida nos oferece — e que eventualmente nos retira —, conduzindo-nos sempre de volta ao ponto

inicial da nossa trajetória. Ela explica também, de maneira mais aprofundada, o que fora discutido na seção anterior, a fim de apresentar cada vez mais aplicações práticas dessas ideias.

- Pensemos agora na próxima curva. Se tendes a visualização de um círculo sob perspectiva aparece uma elipse, mais ou menos aberta.

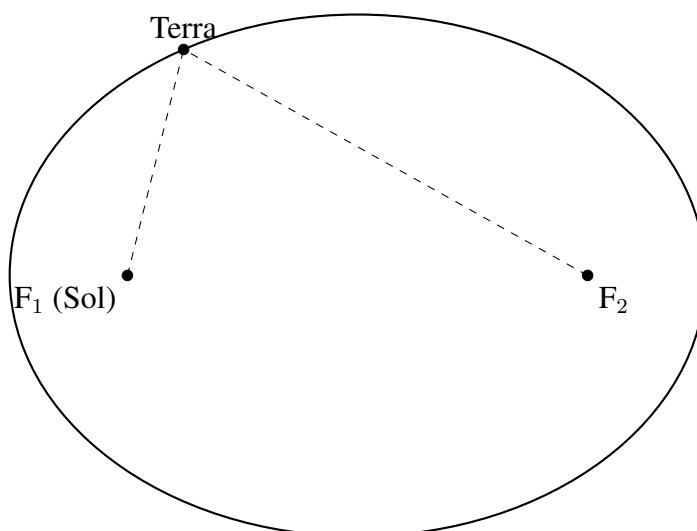
É curioso observar o cuidado que Hipátia tinha na escolha das palavras, especialmente ao apresentar o conceito de excentricidade como uma espécie de “abertura”, cuja visualização variava conforme a perspectiva adotada.

E continuou - Nessa curva os pontos estão dispostos de modo que a soma das distâncias aos focos é sempre a mesma. Quando os dois focos se fundem num só se transforma numa circunferência.

De fato, nos templos egípcios, preservam-se ensinamentos em absoluto sigilo — e, segundo se diz, os gimnosofistas, ao interpretar seus Vedas, já os tornaram públicos — de que a mesma força que faz este objeto ceder à gravidade terrestre é idêntica àquela que impele os astros a girarem em torno do Sol e, aparentemente, também ao redor da Terra. Esse movimento não se dá numa circunferência, mas sim — com precisão matemática — numa trajetória elíptica. Contudo, recordo-vos — advertia Hipátia em tom grave — de que tendes feito um juramento de silêncio quanto a esses conhecimentos, os quais não devem ser profanados pelo senso comum nem instrumentalizados por interesses mundanos. Em toda órbita que possui um centro de atração, a forma resultante é sempre uma elipse.

Outrossim, os ensinamentos místéricos ³ afirmam que há cometas que retornam após ciclos de tempo que variam de sete décadas a vários milênios. Segundo essas tradições, alguns desses corpos celestes, em suas órbitas elípticas, conectariam diferentes estrelas — ou seja, distintos sóis —, transportando entre eles uma espécie de mensagem vibratória e energética, cumprindo assim o papel de um verdadeiro Hermes sideral.

Figura 2.10: Órbita elíptica da Terra ao redor do Sol.



Fonte: autoria própria.

³se refere aos mistérios iniciáticos das escolas filosófico-religiosas antigas

— A vida de uma criança, que gira incessantemente ao redor dos pais como se presa a um cordão umbilical invisível, tem, em seu estágio inicial, a forma de uma circunferência — observou Hipátia —. No entanto, quando a escola introduz um segundo polo de ação, o familiar e o educacional passam a coexistir; assim, esse movimento aproxima-se de uma elipse até que, em determinado momento, o laço se rompe e converte-se em parábola, projetando o jovem rumo à aventura e ao seu próprio destino. Nesse instante, ele não está mais vinculado aos pais, pois responde ao chamado do desconhecido e ao imperativo de sua própria natureza.

Elipses simbolizam, portanto, a dinâmica da existência humana: pessoas orbitando simultaneamente em torno da família e do trabalho, transitando entre o âmbito público e o privado, alternando entre o eu íntimo e as máscaras que assumimos, delineando a tensão permanente entre nosso aspecto superior e o inferior.

As interpretações de Hipátia continuam, até hoje, a apresentar as cônicas de maneira didática, objetiva e prática. Muito tempo depois, outros matemáticos também exploraram as cônicas sob um viés mais genérico e filosófico, ampliando o entendimento dessas curvas em diferentes contextos. Hilbert ⁴, por exemplo, dizia que as cônicas não “existem” de fato, mas são construções dentro de um sistema formal. Elas só têm sentido dentro de regras bem definidas.

Em resumo, do ponto de vista histórico-filosófico, o estudo das cônicas percorre uma trajetória que vai da descrição intuitiva, presente nas interpretações pedagógicas de Hipátia — que lançava mão de metáforas concretas para relacionar círculos, elipses, parábolas e hipérbolas a fenômenos cotidianos —, até a concepção estritamente formal proposta por David Hilbert no início do século XX, segundo a qual essas curvas não “existem” como entidades independentes da mente, mas se definem exclusivamente pelas regras internas de um sistema axiomático coerente. Assim, enquanto a tradição antiga atribuía às cônicas um papel explicativo direto na mecânica celeste e em analogias antropológicas (por exemplo, a parábola como metáfora da vida humana que se projeta, ascende ao ápice e depois retorna ao seu estado natural), o formalismo hilbertiano estabelece que pontos, retas e distâncias são meros símbolos manipulados de acordo com axiomas bem definidos, e que a legitimidade de uma cônica deriva unicamente da ausência de contradições lógicas ao se deduzirem suas propriedades — focos, excentricidade, equações canônicas — no interior desse “jogo de linguagem”. É justamente essa mudança de perspectiva que permite, por um lado, transferir o mesmo conjunto de axiomas para novos contextos (como espaços de Hilbert ou modelos computacionais) e, por outro, conferir rigor à modelagem de sistemas físicos, pois quando descrevemos a órbita de um planeta como elipse realizamos apenas uma correspondência entre o fenômeno observado e a construção formal, sem atribuir realidade ontológica à curva em si, mas validando-a na medida em que seus resultados se ajustam aos dados empíricos.

É interessante perceber que a temporalidade tratou cada pensamento como algo mais abstrato ou algo mais concreto, desde Platão até as ideias construtivistas entre os séc. XIX e XX.

⁴Um dos matemáticos mais influentes do séc. XX cujas contribuições transformaram várias áreas da matemática e da lógica.

2.3 Cônicas e dobraduras

As atividades com dobraduras constituem um recurso didático de grande valor para a aprendizagem: mesmo sem exigir elevado rigor matemático, elas convertem conceitos abstratos em experiências concretas e tangíveis, facilitando a compreensão e o engajamento dos estudantes e, segundo (DIAS, 2014), se consolidam cada vez mais como um instrumento pedagógico para aguçar a percepção do discente. Abaixo iremos discorrer o passo a passo para a criação de cada cônica de acordo com (DIAS, 2014).

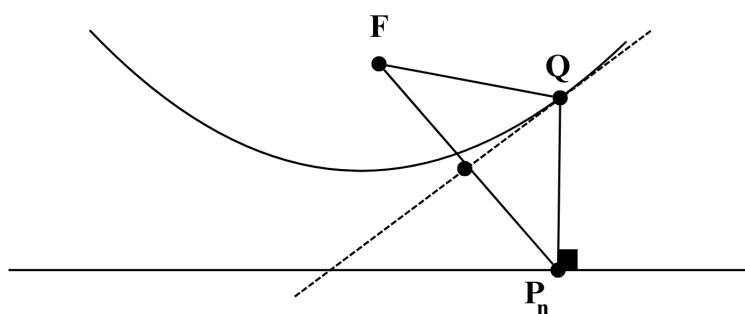
PARÁBOLA

- **PASSO 1:** Criar uma reta d e marcar um ponto F que não pertence a ela;
- **PASSO 2:** Marque n pontos em d , digamos P_1, \dots, P_n ;
- **PASSO 3:** Fazer a primeira dobra de modo que F coincida com P_1 . Desdobre a folha. o vinco formado entre os pontos F e P_1 é a mediatriz de FP_1 . Chamaremos essa reta de M_1 ;
- **PASSO 4:** Repetir o processo para os demais pontos.

Por construção, seja M_n a mediatriz do segmento P_nF . Considere Q um ponto sobre M_n de tal forma que $\overline{QP_n}$ seja perpendicular a d . Veja que

$$\overline{QP_n} = \overline{QF}.$$

Figura 2.11: Parábola formada por mediatrizes.



Fonte: autoria própria.

Como P_n pertence à reta d , a distância de um ponto Q qualquer sobre o vinco até P_n é igual à distância de Q até a reta d . Assim,

$$\overline{QP_n} = \text{dist}(Q, d),$$

onde $\text{dist}(Q, d)$ denota a distância do ponto Q à reta d . Portanto, cada vinco é tangente à parábola, e o envelope desses vincos forma a curva desejada.

ELIPSE

- **PASSO 1:** Desenhar uma circunferência de raio r e centro F_1 ;
- **PASSO 2:** Sobre a circunferência, criar n pontos, digamos P_1, \dots, P_n , e também um ponto F_2 interno à circunferência;
- **PASSO 3:** Fazer a primeira dobra de tal maneira que F_2 coincida com P_1 ;
- **PASSO 4:** Desdobrar e marcar a reta M_1 formada pelo vinco. M_1 é a mediatriz do segmento F_2P_1 ;
- **PASSO 5:** Repetir os passos 3 e 4 para os demais pontos.

Estaremos, a cada repetição, encontrando as mediatrizes M_n dos segmentos F_2P_n e, como consequência, a elipse de focos F_1 e F_2 .

Queremos mostrar que a figura formada por todas as mediatrizes M_n do passo a passo acima é uma elipse e, para isso, vamos mostrar que $\overline{AF_1} + \overline{AF_2}$ é constante para qualquer A pertencente as mediatrizes M_n que formam a elipse. A reta que passa por M é mediatriz M_n do segmento F_2P_n , ou seja, $\overline{MP_n} = \overline{MF_2}$ e o ângulo $P_n\hat{M}A$ é igual ao ângulo $A\hat{M}F_2$. Pelo caso de congruência LAL os dois triângulos são congruentes. Perceba ainda que:

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AP_n} = r.$$

Nesse caso $r = 2a$, satisfazendo assim a definição de elipse.

Figura 2.12: Elipse formada por mediatrizes.

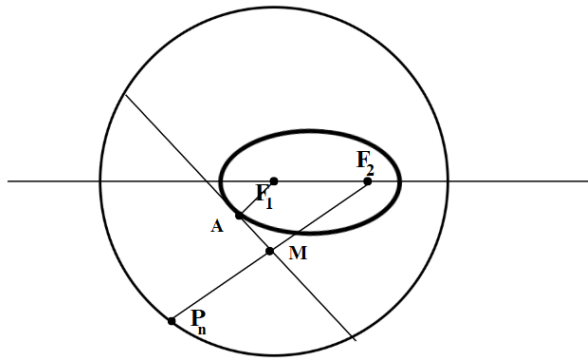


Figura 2.13: Fonte: autoria própria.

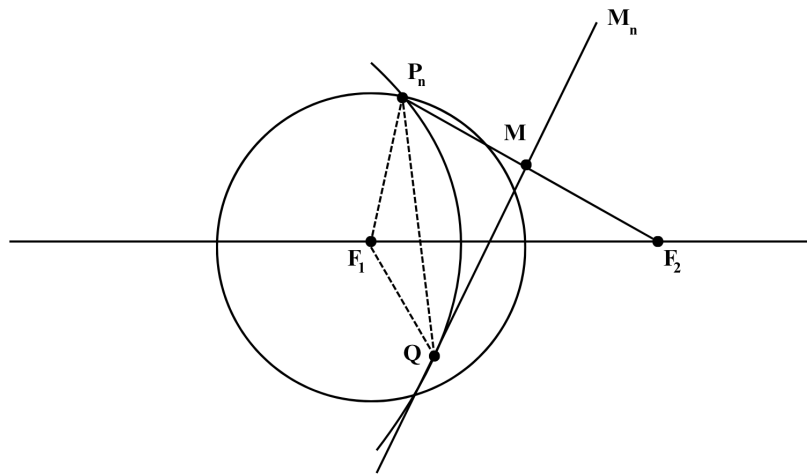
HIPÉRBOLE

- **PASSO 1:** Desenhar uma circunferência de raio r e centro F_1 . Marque também n pontos P_n pertencentes à circunferência;
- **PASSO 2:** Marque um ponto externo a circunferência. Chamaremos esse ponto de F_2 ;
- **PASSO 3:** Fazer a primeira dobra de modo de F_2 coincida com P_1 . Ao desdobrar a folha teremos um vinco que será a representação da primeira reta M_1 mediatriz de F_2P_1 .

Ao repetir o passo 3 para os n pontos sobre a circunferência nós teremos as mediatrizes dos segmentos F_2P_n e, por consequência, a hipérbole.

Queremos mostrar que a união de todas as mediatrizes M_n dos segmentos P_nF_2 formam uma hipérbole.

Figura 2.14: Hipérbole por dobraduras



Fonte: autoria própria.

Por construção sabemos que $\overline{P_n F_1} = r$ e qualquer ponto $Q \in M_n$ é equidistante de P_n e F_2 . Temos então que $\overline{QP_n} = \overline{QF_2}$. Pela desigualdade triangular:

$$|\overline{QP_n} - \overline{P_n F_1}| \leq \overline{QF_1} \leq \overline{QP_n} + \overline{P_n F_1} \Rightarrow |\overline{QF_2} - r| \leq \overline{QF_1} \leq \overline{QF_2} + r.$$

Subtraindo $\overline{QF_1}$ de ambas as partes da desigualdade, temos:

$$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} = r.$$

Portanto, a diferença entre as distâncias é constante, mostrando que temos uma hipérbole.

Capítulo 3

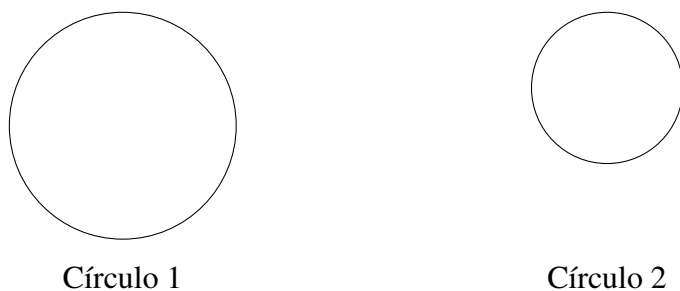
Semelhança entre cônicas

O presente capítulo foi desenvolvido com base no Capítulo 1 do livro (MORAIS FILHO, 2015) e no artigo (DE VILLIERS, 1994). Nas seções que seguem, formalizamos o conceito de semelhança entre curvas e apresentamos resultados que estabelecem critérios para determinar quando duas cônicas — entre aquelas estudadas no Capítulo 1 — são semelhantes entre si.

3.1 Motivação

Para iniciarmos nossas discussões acerca da semelhança entre figuras, propomos o seguinte questionamento para você leitor: *intuitivamente, é razoável esperar que os círculos abaixo sejam semelhantes?*

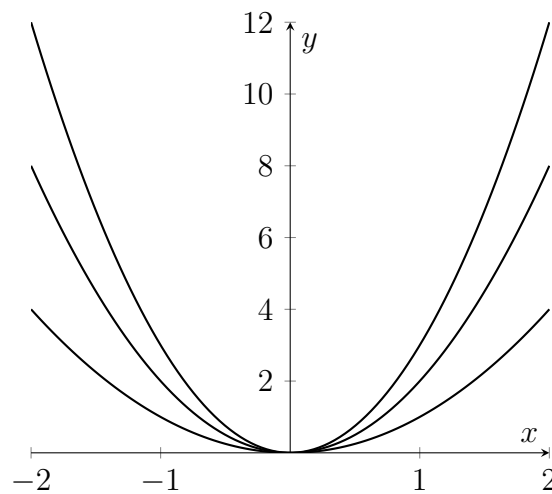
Figura 3.1: Comparação entre círculos



Fonte: autoria própria.

Antes de prosseguirmos, é importante esclarecer o que entendemos por semelhança entre figuras. Muitas vezes, não conseguimos perceber semelhanças entre objetos ao nosso redor, especialmente quando essas figuras são fechadas e limitadas. Neste trabalho, não entraremos em discussões mais amplas sobre figuras abertas ou ilimitadas, pois isso foge ao nosso escopo. No entanto, podemos sintetizar a ideia de semelhança de maneira intuitiva. Por outro lado, a situação é mais sutil quando lidamos com parábolas. Diferentemente dos círculos, as parábolas se estendem indefinidamente e

Figura 3.2: Comparação entre parábolas



Fonte: Autoria própria.

não podem ser contidas em um quadrado da mesma forma. Isso torna mais difícil, à primeira vista, determinar se são semelhantes ou não. Na Figura 3.2, temos representadas sobre o plano cartesiano três parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = 3x^2$. A observação direta dessas curvas nos leva a questionar: seriam essas parábolas semelhantes entre si? A maneira como estão posicionadas nos eixos ajuda ou atrapalha essa percepção?

Questionamentos como os anteriormente apresentados nos convidam a refletir mais profundamente sobre o conceito de semelhança entre figuras geométricas. Essa reflexão é essencial para compreendermos de que maneira esse conceito se manifesta em diferentes contextos e, assim, possamos aplicá-lo com maior precisão e segurança ao longo deste trabalho.

No que diz respeito ao primeiro questionamento apresentado nessa seção, referente às circunferências, é bastante provável que a resposta tenha apontado para o fato de que ambas compartilham características semelhantes — ou, mais precisamente, que são figuras semelhantes.

Mas como justificar rigorosamente essa conclusão? Podemos recorrer à noção de ampliação proporcional: ao aumentar adequadamente o raio da circunferência menor, conseguimos ajustá-la perfeitamente à maior. Em outras palavras, uma simples operação de “zoom” — ou seja, uma ampliação uniforme — torna a menor indistinguível da maior, preservando todas as proporções e características geométricas. Assim, observamos que a relação entre essas duas circunferências constitui uma manifestação direta do conceito de semelhança.

Entretanto, ao nos voltarmos ao segundo questionamento, relacionado às parábolas apresentadas na Figura 3.2, a análise se torna menos imediata. Diferentemente das circunferências — figuras fechadas, limitadas e simétricas —, as parábolas são curvas abertas e ilimitadas, o que dificulta a identificação direta de semelhança entre elas.

Além disso, o fato de estarem representadas sobre os eixos coordenados e apresentarem diferentes coeficientes no termo quadrático pode sugerir, à primeira vista, que são fundamentalmente distintas.

Nesse contexto, torna-se essencial refletir sobre quais propriedades geométricas permanecem invariantes sob transformações e quais se alteram, a fim de verificar se, apesar das aparências, tais parábolas mantêm entre si uma relação de semelhança.

Essa dificuldade em reconhecer a semelhança entre figuras que se estendem indefinidamente, como as parábolas, evidencia a importância de uma abordagem mais cuidadosa e conceitualmente fundamentada para determinar quando duas figuras podem, de fato, ser consideradas semelhantes.

No caso das parábolas, o movimento de ampliação ou redução — os chamados zoom in e zoom out — que pode ser facilmente aplicado no caso das circunferências, torna-se mais sutil. A percepção visual de que uma parábola pode ser transformada em outra por meio de uma simples dilatação nem sempre é evidente. Vale destacar que, até este ponto, ainda não foi apresentada uma definição formal de semelhança; estamos nos baseando apenas em uma noção intuitiva, centrada na ideia de ampliação ou redução proporcional com eventual sobreposição das figuras.

A partir dessa intuição, podemos retomar a pergunta anterior: haveria uma relação de semelhança entre as parábolas x^2 , $2x^2$ e $3x^2$? Seria possível perceber tal semelhança apenas com base nessa ideia inicial de “zoom”? A Figura 3.2 foi elaborada justamente para auxiliar essa reflexão, permitindo ao leitor observar que, embora essas parábolas apresentem diferentes níveis de abertura — ou seja, concavidades distintas —, todas compartilham uma estrutura comum. Essa característica, visível na variação da abertura, constitui o ponto de partida para discutir se essas curvas, apesar das diferenças aparentes, podem ser consideradas geometricamente semelhantes à luz de uma análise mais formal.

Dada uma parábola do tipo $f(x) = ax^2$, onde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o coeficiente a determina a concavidade dessa parábola, bem como a “velocidade” de seu crescimento/decrescimento, tal como visto nas tabelas abaixo.

Tabela 3.1: Tabela de valores de $y = x^2$ e $y = 3x^2$

Domínio (x)	Imagem (x^2)	Imagem ($3x^2$)
-3	9	27
-2	4	12
-1	1	3
0	0	0
1	1	3
2	4	12
3	9	27

Como o nosso principal objetivo não é detalhar as características das parábolas, mas sim acerca da semelhança entre elas, basta que você observe mais uma vez as parábolas da Figura 1.1 e você irá perceber que as parábolas estão “fechando” a sua concavidade, ou seja, de fora para dentro, temos as parábolas x^2 , $2x^2$ e $3x^2$.

A tabela anterior foi feita para que o leitor conseguisse perceber a possibilidade de sobreposição dessas parábolas mesmo com diferentes velocidades de crescimento - ou, formalmente falando, com diferentes concavidades. Logo, independente da localização de seu foco, eixo de simetria ou diretriz,

elas podem ser rotacionadas, deslocadas, ampliadas ou reduzidas de tal forma que uma ficará sobreposta a outra, e esse fato não é tão conhecido assim e tão pouco difundido no ensino básico. É claro que para efetuar tais rotações e deslocamentos é necessário um tempo para ensino e maturação dos conteúdos vistos no ensino básico, bem como alguns conteúdos vistos apenas no ensino superior. Vale ressaltar que essa sobreposição supracitada não diz respeito a todo o seu domínio, ou seja, teremos, por assim dizer, parte de uma parábola sobrepondo a outra.

Se você, mesmo com todas essas justificativas, ainda não tenha se convencido da possibilidade de semelhança entre as parábolas, nas próximas seções, serão apresentadas as justificativas e demonstrações que provam este fato.

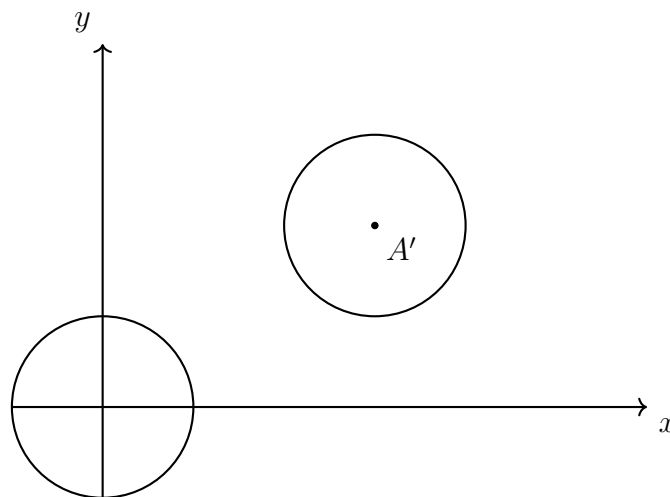
3.2 Definições e consequências

Ao longo dessa seção, iremos apresentar as definições e conceitos que serão essenciais para a obtenção de critérios para a semelhança entre cônicas.

Definição 6. *Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto não vazio do plano. Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a translação de S induzida por (a, b) é o conjunto $\{(x - a, y - b) \mid (x, y) \in S\}$.*

A figura abaixo representa a translação de uma circunferência induzida pelo ponto A' .

Figura 3.3: Representação da translação de uma circunferência.

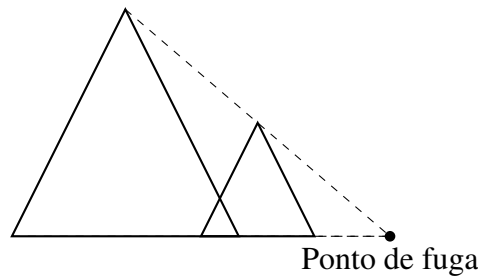


Fonte: autoria própria.

É importante destacar que essa transformação consiste em um deslocamento rígido, no qual todos os pontos da figura original foram movidos na mesma direção, com o mesmo sentido e com igual intensidade. Portanto, a forma e o tamanho da circunferência permanecem inalterados.

Agora, observemos a figura abaixo:

Figura 3.4: Redução/ampliação de figuras em escala



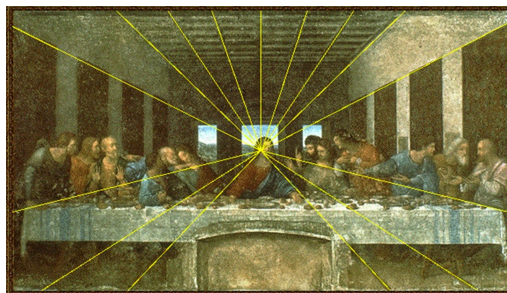
Fonte: autoria própria.

A Figura 3.4 ilustra o processo de ampliação e/ou redução de figuras no plano, destacando um elemento fundamental para essa construção: o *ponto de fuga*. Esse ponto exerce um papel central na compreensão visual da proporcionalidade entre figuras e na percepção de profundidade.

A importância do ponto de fuga vai muito além de um recurso técnico; ele foi essencial para o desenvolvimento da perspectiva na arte. Durante o Renascimento (séculos XIV a XVII), artistas passaram a explorar com mais rigor as leis da geometria para representar a tridimensionalidade em superfícies bidimensionais. Esse avanço proporcionou um salto expressivo na verossimilhança das obras, permitindo que figuras fossem dispostas em diferentes escalas dentro de uma mesma composição visual — um reflexo direto da aplicação prática da ampliação e da redução por meio do ponto de fuga.

A figura 3.5 serve como ponte entre a matemática e a arte, revelando como conceitos geométricos como semelhança, projeção e escala foram, e ainda são, instrumentos fundamentais na representação do espaço.

Figura 3.5: A última ceia, Leonardo Da Vinci (DA VINCI, 1498)



Fonte: <<https://shre.ink/twuX>>

Note que as retas amarelas convergem para o rosto de Jesus, figura principal da obra, transmitindo a noção de perspectiva e profundidade por meio dessa convergência. Isso faz com que os desenhos das figuras localizadas atrás dos personagens em primeiro plano precisem ser realizados a partir de uma redução em escala dos elementos que estão mais próximos ao observador.

É importante destacar que as retas amarelas são elementos adicionados para facilitar a compreensão visual da perspectiva; no entanto, os artistas do período executavam essas construções de forma tão discreta e habilidosa que essas obras permanecem até hoje como exemplos notáveis da aplicação prática da geometria no campo artístico.

Além disso, essa técnica evidencia a íntima relação entre arte e matemática, demonstrando como conceitos geométricos, como pontos de fuga e redução proporcional, foram fundamentais para a criação de imagens que transmitem profundidade realista em superfícies bidimensionais.

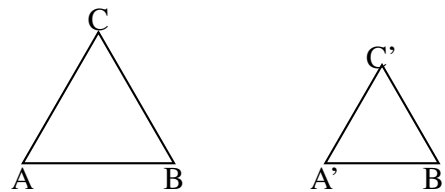
Agora que compreendemos algumas das principais transformações isométricas ¹ e homotéticas ², passaremos a trabalhar a definição formal de semelhança. Caso seja necessário, revisitaremos e detalharemos essas transformações para garantir total clareza.

Definição 7. *Dois triângulos $T = \triangle ABC$ e $T' = \triangle A'B'C'$ são semelhantes quando*

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = k$$

onde $k > 0$ é uma constante, chamada de razão de semelhança.

Figura 3.6: Representação da semelhança de triângulos.



Fonte: autoria própria.

Para um maior aprofundamento acerca da definição de semelhança de triângulos e suas consequências, recomendamos o livro (BARBOSA, 2012).

No contexto do ensino médio, é fundamental destacar a importância dessa constante, que também é conhecida como escala de uma figura. A escala representa a razão pela qual uma figura é ampliada ou reduzida, funcionando como um fator multiplicativo que determina o tamanho final em relação ao original.

Entender a escala é essencial, pois ela permite interpretar e construir modelos proporcionais de objetos reais, facilitando o estudo de mapas, plantas arquitetônicas, desenhos técnicos e muitas outras aplicações práticas. Além disso, compreender a escala ajuda a relacionar figuras geometricamente semelhantes, evidenciando como a mudança de tamanho preserva a forma e as proporções.

¹Transformações que preservam distâncias; incluem translações, rotações e reflexões.

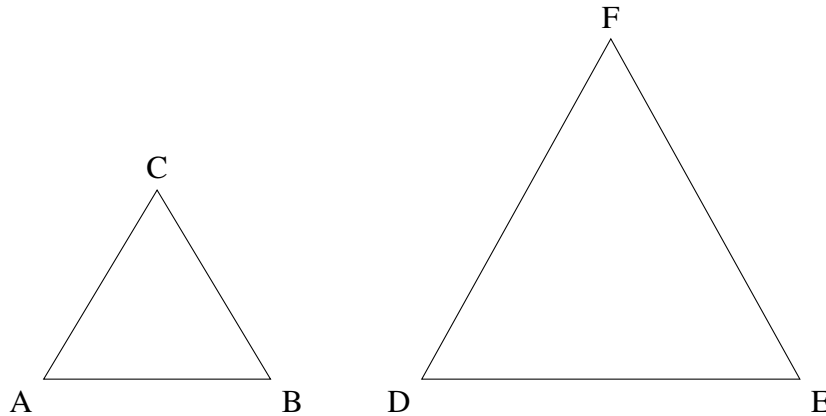
²Ampliações/contrações com centro e razão k ; preservam ângulos e proporções.

Em resumo, os triângulos T e T' são semelhantes quando existir uma constante $k > 0$ tal que os comprimentos dos lados dos triângulos se relacionem segundo as igualdades $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC}$ e $\overline{C'A'} = k \cdot \overline{CA}$. Podemos formalizar dividindo em 3 casos possíveis:

- i) Para $k = 1$ temos uma congruência entre T e T' ;
- ii) Para $0 < k < 1$ teremos uma redução de T para ser sobreposto em T' e esse será nosso *zoom out*;
- iii) Para $k > 1$ teremos uma ampliação de T para ser sobreposto em T' e esse será nosso *zoom in*;

Na figura abaixo, consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF .

Figura 3.7: Triângulos semelhantes.



Fonte: autoria própria.

Considere dois pontos quaisquer no triângulo ΔABC , por exemplo, um ponto X no lado AB e um ponto Y no lado BC . A esses dois pontos, podemos associar, respectivamente, únicos pontos $X' \in DE$ e $Y' \in EF$ no triângulo ΔDEF , de modo que $\overline{X'Y'} = k \cdot \overline{XY}$. Basta marcar no lado DE um ponto X' de modo que $\overline{AX} = \frac{1}{k} \cdot \overline{DX'}$, ou melhor, $\overline{DX'} = k \cdot \overline{AX}$, e marcar no lado EF um ponto Y' de modo que $\overline{EY'} = \frac{1}{k} \cdot \overline{EY}$, ou melhor, $\overline{EY'} = k \cdot \overline{EY}$.

Como os triângulos ΔXBY e $\Delta X'EY'$ são semelhantes (pelo caso L.A.L), resulta a igualdade

$$\overline{X'Y'} = k \cdot \overline{XY}.$$

Note a recíproca do que foi dito anteriormente, ou seja, podemos obter dois pontos do triângulo ΔABC a partir de dois pontos no triângulo ΔDEF e isso nos lembra o conceito de função, melhor dizendo, uma função bijetiva.

Observe, então, que obtivemos uma função $\varphi : T \rightarrow T'$ satisfazendo $\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = \overline{X'Y'} = k \cdot \overline{XY}, \forall X, Y \in T$.

Inspirados nisso, iremos apresentar uma definição mais geral para subconjuntos do plano. Antes disso, apresentamos a seguinte definição.

Definição 8. *Uma curva plana é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\gamma(x) = (z(x), y(x))$ é uma função.*

Ao longo deste trabalho, referimo-nos às curvas planas simplesmente como *curvas*.

Definição 9. *Dizemos que a curva γ_1 é semelhante a curva γ_2 se existir um número $k > 0$ e uma função bijetiva $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ tais que, para quaisquer pontos $X, Y \in \gamma_1$, a relação*

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = k \cdot \overline{XY}$$

seja satisfeita.

A função φ é chamada de função de semelhança e k é a constante de semelhança entre as curvas γ_1 e γ_2 . Se $0 < k < 1$, dizemos que γ_2 é uma redução de γ_1 . Se $k > 1$, γ_2 é uma ampliação de γ_1 . Quando $k = 1$, as curvas são chamadas de congruentes.

As isometrias, analisadas em profundidade na referência (LIMA, 2007), representam casos particulares de funções de semelhança.

Os fatos apresentados na proposição abaixo parecem intuitivos, mas carecem de uma demonstração à luz da nossa definição de semelhança. Passemos, então, a tal formalização.

Proposição 6. *Sejam γ_1, γ_2 e γ_3 curvas. Valem os seguintes fatos:*

- (a) γ_1 é semelhante a γ_1 .
- (b) Se γ_1 é semelhante a γ_2 , então γ_2 é semelhante a γ_1 .
- (c) Se γ_1 é semelhante a γ_2 e γ_2 é semelhante a γ_3 , então γ_1 é semelhante a γ_3 .
- (d) Se γ_2 for obtida de γ_1 por uma translação ou rotação, então γ_1 e γ_2 são semelhantes.
- (e) Se γ_2 for obtida de γ_1 por uma reflexão em torno de uma reta, então γ_1 e γ_2 são semelhantes.

Demonstração. Vamos iniciar provando o item (a). Definamos a função $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_1$ por $\varphi(X) = X$, para todo ponto X de γ_1 . Segue imediatamente que φ é uma função de semelhança, sendo a constante de semelhança $k = 1$.

Para provar o item (b) considere $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ uma função de semelhança, com constante de semelhança k . Para quaisquer Z e W pontos de γ_2 , temos

$$\overline{ZW} = \overline{\varphi(\varphi^{-1}(Z))\varphi(\varphi^{-1}(W))} = k \cdot \overline{\varphi^{-1}(Z)\varphi^{-1}(W)}.$$

Segue que φ^{-1} é uma função de semelhança entre γ_2 e γ_1 , com constante de semelhança $1/k$, provando o item (b).

Sejam $\varphi_1 : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ e $\varphi_2 : \gamma_2 \rightarrow \gamma_3$ funções de semelhança, com constantes de semelhança k_1 e k_2 , respectivamente. Sendo $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ e X, Y pontos de γ_1 , vem

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = \overline{\varphi_2 \circ \varphi_1(X)\varphi_2 \circ \varphi_1(Y)} = \overline{\varphi_2(\varphi_1(X))\varphi_2(\varphi_1(Y))} = \overline{k_2\varphi_1(X)\varphi_1(Y)} = k_1k_2\overline{XY}.$$

Provando o item (c).

Para provar o item (d) suponha que γ_2 tenha sido obtida de γ_1 por translação. Assim, existem números reais u e v de modo que γ_2 é formada por

$$\{(a - u, b - v) \mid (a, b) \text{ é ponto de } \gamma_1\}.$$

É fácil ver que $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, definida por $\varphi(a, b) = (a - u, b - v)$ é uma função de semelhança com constante de semelhança $k = 1$. Para o caso em que γ_2 é uma rotação de γ_1 , a função de semelhança será a própria função de rotação e, nesse caso, também teremos $k = 1$.

□

A demonstração do item (e) leva em considerações matrizes de rotação³. Para facilitar o entendimento do leitor vamos considerar que a rotação é um movimento rígido, ou seja, não altera a característica da figura. Também iremos, sem perda de generalidade, considerar a reflexão um movimento rígido⁴.

A proposição abaixo assegura que pontos médios são preservados por funções de semelhança.

Proposição 7. *Sejam $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ uma função de semelhança, X e Y pontos de γ_1 e suponha que o ponto médio de X e Y , denotado por M , pertence a γ_1 . Então o ponto médio de $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ pertence a γ_2 e é $\varphi(M)$.*

Demonstração. Sendo k a constante de semelhança de φ , temos que $\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = k\overline{XY}$. Por outro lado, como M é ponto médio, vale $\overline{XY} = \overline{XM} + \overline{MY}$. Assim,

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = k\overline{XY} = k\overline{XM} + k\overline{MY} = \overline{\varphi(X)\varphi(M)} + \overline{\varphi(M)\varphi(Y)}.$$

Segue que $\varphi(M)$ é o ponto médio de $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$.

□

A fim de reforçar a compreensão da Definição 9, apresentamos os seguintes exemplos.

Exemplo 3. *Quaisquer duas retas são sempre semelhantes. De fato, considere as retas de equações $r_1 : y = ax + b$ e $r_2 : y = a'x + b'$. Pelo item (d) da Proposição 6, podemos supor $b = b' = 0$. Seja r a bissetriz do menor ângulo formado por r_1 e r_2 . Para cada ponto X em r_1 , denote por $\varphi(X) = X'$ o ponto de r_2 que é a reflexão de X em relação a r . Claramente, φ é uma função bijetiva. Dados*

³Para mais informações vide (BOLDRINI et al., 1984)

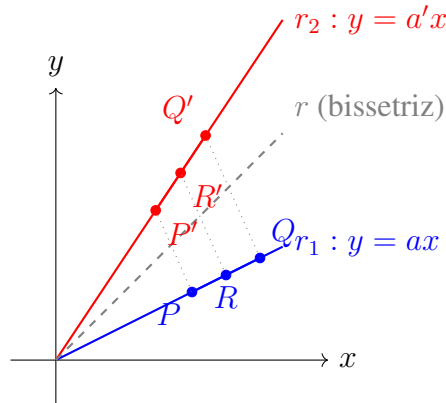
⁴Vide (WINTERLE, 2000)

quaisquer pontos P e Q de r_1 , seja R um ponto interior do segmento de extremos P e Q . Pelo Teorema de Tales, existe $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{P'R'}} = \frac{1}{k}.$$

Assim, $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)} = \overline{P'Q'} = k\overline{PQ}$ e, por consequência, segue que φ é uma função de semelhança.

Figura 3.8: Reflexão dos pontos de r_1 em relação à bissetriz r , definindo a função de semelhança φ entre r_1 e r_2 .



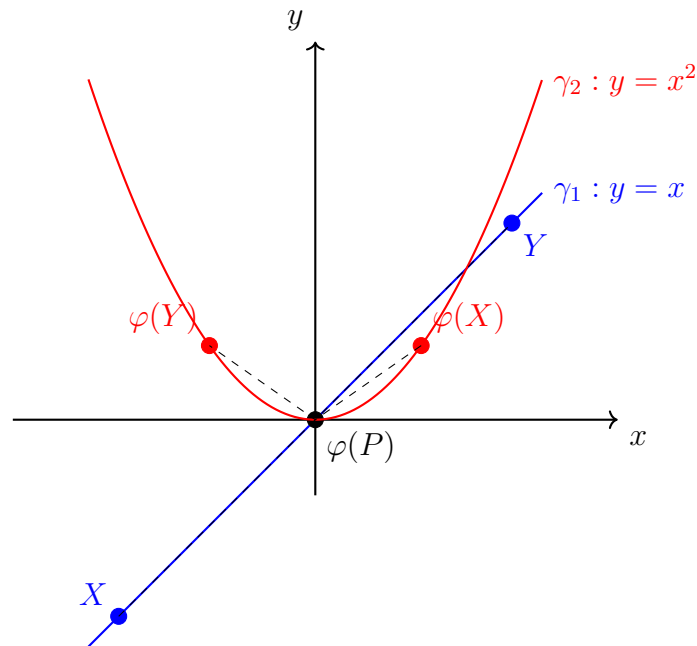
Fonte: autoria própria.

Exemplo 4. Vamos justificar que a reta $\gamma_1 : y = x$ e a parábola $\gamma_2 : y = x^2$ não são semelhantes. Por contradição, suponha $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ seja uma função de semelhança, com constante de semelhança k . Seja P o ponto de γ_1 tal que $\varphi(P) = (0, 0)$. Tomando pontos distintos X e Y de γ_1 tais que P seja o ponto médio de X e Y , concluímos que

$$\overline{\varphi(X)\varphi(P)} = k\overline{XP} = k\overline{PY} = \overline{\varphi(P)\varphi(Y)}.$$

Como $\varphi(P) = (0, 0)$ é o vértice da parábola, sendo $\varphi(X) = (a, b)$, a última igualdade implica em $\varphi(Y) = (-a, b)$. Pela Proposição 7, o ponto $(0, b)$ está em γ_2 , implicando $b = 0^2 = 0$. Assim, como $\varphi(X) = (a, b)$ está na parábola, vem $a = 0$. Por consequência, $\varphi(X) = \varphi(Y) = (0, 0)$. Pela injetividade de φ , decorre $X = Y$, o que contradiz a injetividade de φ_1 , já que $X \neq Y$.

Figura 3.9: Ilustração da não semelhança entre a reta $\gamma_1 : y = x$ e a parábola $\gamma_2 : y = x^2$.



Fonte: autoria própria.

Exemplo 5. Sendo γ_1 uma curva e k uma constante não nula, considere $\gamma_2 = \{(kx, ky) \mid (x, y) \in \gamma_1\}$. Afirmamos que γ_1 e γ_2 são curvas semelhantes. De fato, definimos a função $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, dada por $\varphi(x, y) = (kx, ky)$ que é, claramente, bijetiva. Dados $X(x, y)$ e $Y(a, b)$ pontos em γ_1 , segue que

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = \sqrt{(ka - kx)^2 + (kb - ky)^2} = \sqrt{k^2(a - x)^2 + k^2(b - y)^2} = |k|\overline{XY},$$

provando que φ é uma função de semelhança com constante de semelhança $|k|$.

3.3 Critérios para semelhança entre cônicas

3.3.1 Circunferências

Agora, à luz da Definição 9, estamos em condições de apresentar uma demonstração formal que confirma a suspeita que levantamos no início da Seção 3.1: quaisquer duas circunferências são sempre semelhantes.

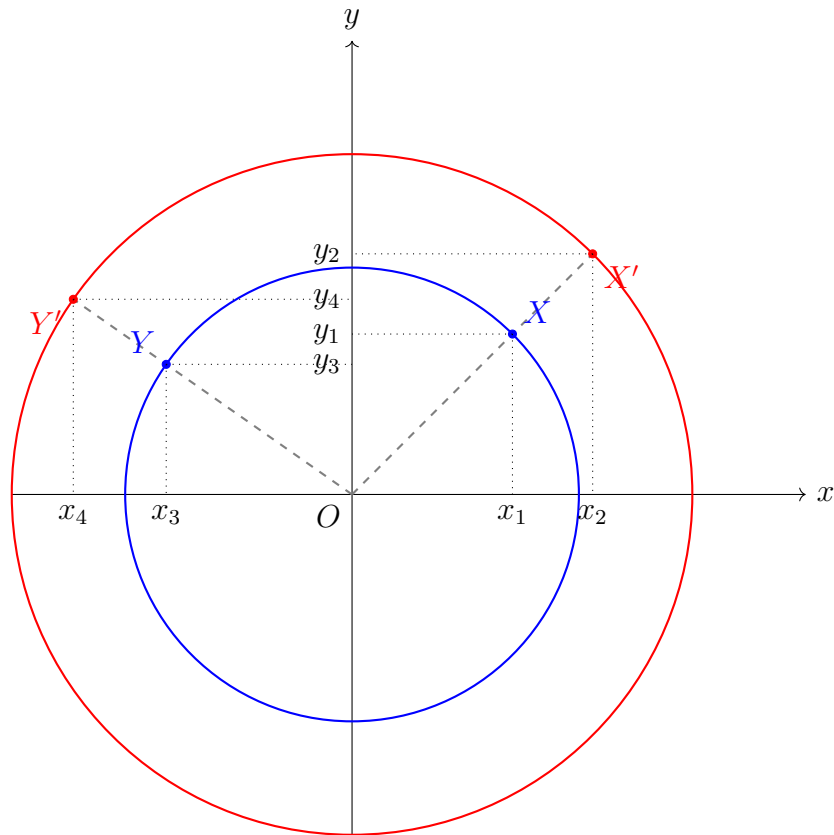
Teorema 1. *Quaisquer duas circunferências são sempre semelhantes.*

Demonstração. Considerando a Proposição 6 iremos desconsiderar quaisquer movimentos de translação da figura. Tomemos, então, duas circunferências, C e C' , com seus respectivos centros na origem do sistema cartesiano. Dessa forma, temos equações do tipo

$$C' : x^2 + y^2 = R'^2 \text{ e } C : x^2 + y^2 = R^2,$$

onde R' e R denotam os raios de C' e C , respectivamente.

Figura 3.10: De azul, a circunferência C e, de vermelho, a circunferência C' .



Fonte: autoria própria.

Sem perda de generalidade, suponhamos $R \leq R'$. Sejam $X(x_1, y_1)$ e $Y(x_3, y_3)$ dois pontos quaisquer na circunferência C . Prolongue os segmentos OX e OY de modo que intersectem a circunferência C' nos pontos $X'(x_2, y_2)$ e $Y(x_4, y_4)$, respectivamente. Note que os triângulos Ox_1X e Ox_2X' são semelhantes, conforme podemos ver na Figura 3.10.

Dessa forma, inferimos que

$$\frac{\overline{Ox_1}}{\overline{Ox_2}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OX'}} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{R}{R'} \Rightarrow x_2 = \frac{R'}{R} \cdot x_1.$$

Da mesma maneira, mostrar-se que

$$y_2 = \frac{R'}{R} \cdot y_1.$$

Por outro lado, considerando os triângulos Ox_3Y e Ox_4Y' , obtemos

$$x_4 = \frac{R'}{R} \cdot x_3 \text{ e } y_4 = \frac{R'}{R} \cdot y_3.$$

Usando as relações obtidas entre as coordenadas, é fácil ver que

$$\overline{X'Y'} = \frac{R'}{R} \cdot \overline{XY},$$

mostrando assim que as circunferências são semelhantes a partir da função $\varphi : C \rightarrow C'$ definida por $\varphi(x, y) = \left(\frac{R'}{R} \cdot x, \frac{R'}{R} \cdot y\right)$, para $(x, y) \in C$. \square

O corolário seguinte aponta que, do ponto de vista da definição de semelhança (vide Definição 9), há essencialmente uma única circunferência.

Corolário 1. *Qualquer circunferência é semelhante à curva $C : x^2 + y^2 = 1$.*

Demonstração. Segue trivialmente do Teorema 1. \square

3.3.2 Parábolas

No ensino médio, costuma-se considerar parábolas cujo eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados, uma vez que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) não contempla o estudo de rotações de figuras no plano. No entanto, mesmo que restrinjamos inicialmente essa análise, é importante destacar que considerar rotações ou translações — em contextos mais avançados — não alteram a forma da curva, conforme visto no item (d) da Proposição 6.

O teorema a seguir garante que quaisquer parábolas são semelhantes entre si. Esse resultado é especialmente curioso, pois, à primeira vista, poderíamos supor que o formato de uma parábola varia de acordo com o coeficiente do termo x^2 .

Teorema 2. *Quaisquer duas parábolas são sempre semelhantes.*

Demonstração. Devido ao item (d) da Proposição 6, podemos supor que ambas as parábolas possuem vértice na origem e têm concavidade para cima. Assim, suponhamos que suas equações sejam

$$P : y = ax^2$$

$$P' : y = a'x^2.$$

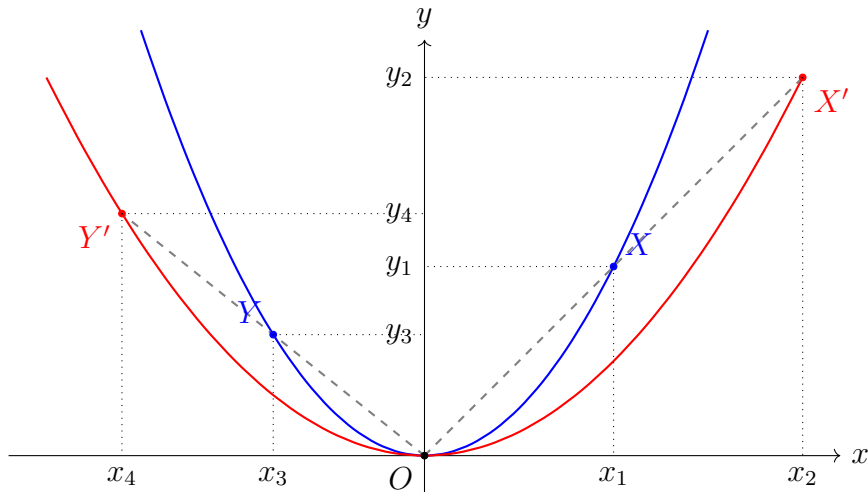
Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a' \leq a$.

Considere o ponto $X(x_1, y_1) = X(x_1, ax_1^2)$ com $x_1 > 0$ pertencente à parábola P . Considere, ainda, a reta r que passa pela origem $O(0, 0)$ e pelo ponto X . Já que r passa pela origem, sua equação será da forma $y = mx$, onde

$$m = \frac{ax_1^2 - 0}{x_1 - 0} = ax_1.$$

Observemos a figura seguinte para melhor entender a construção.

Figura 3.11: De azul, a parábola $C : y = x^2$ e, de vermelho, a parábola $C' : y = \frac{1}{2}x^2$.



Fonte: autoria própria.

Perceba que r também intersecta a parábola P' . Denotaremos esse ponto como X' . Para encontrar as coordenadas desse ponto, precisamos encontrar um ponto que satisfaça as equações $r : y = (ax_1)x$ e $P' : y = a'x^2$. Procedendo dessa forma, vem

$$(ax_1)x = a'x^2 \Rightarrow x = \frac{ax_1}{a'}.$$

Podemos então concluir que $X'(\frac{ax_1}{a'}, \frac{a^2x_1^2}{a'})$. De forma análoga, considerando o ponto $Y(x_3, y_3) = Y(x_3, ax_3^2)$ de P , conseguimos encontrar a interseção da reta que passa pela origem e por Y com a parábola P' , que é o ponto $Y'(\frac{ax_3}{a'}, \frac{a^2x_3^2}{a'})$. Desse modo,

$$\overline{X'Y'}^2 = \left(\frac{a^2}{a'}\right)((x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3^2 - x_1^2)) \Rightarrow \overline{X'Y'} = \left(\frac{a}{a'}\right)\overline{XY}.$$

Portanto, a função $\varphi : P \rightarrow P'$, definida por $\varphi(x, y) = (\frac{a}{a'}x, \frac{a}{a'}y)$, é uma função de semelhança entre as parábolas P e P' , e a constante de semelhança é $\frac{a}{a'}$. \square

Como consequência, obtemos o seguinte corolário.

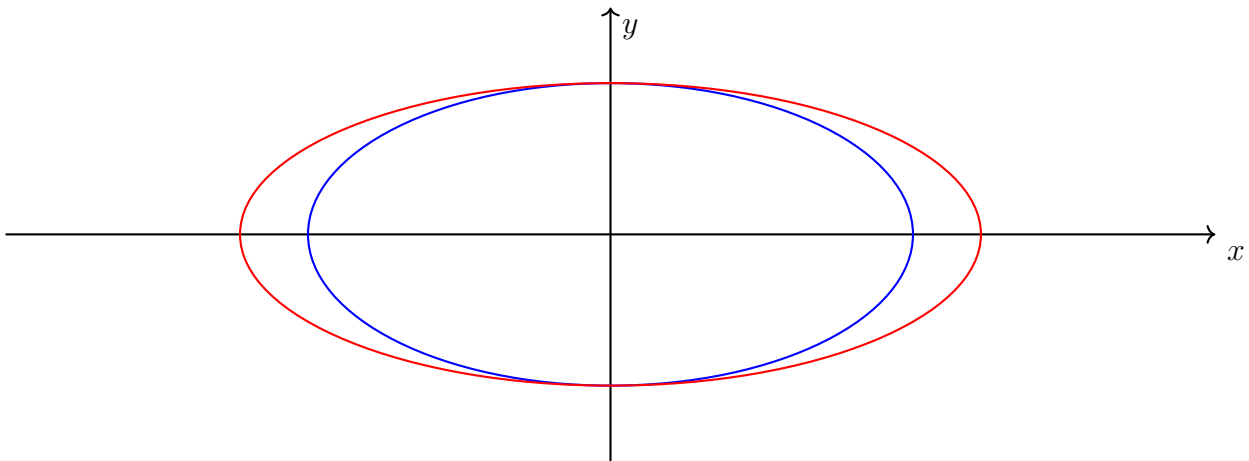
Corolário 2. *Qualquer parábola é semelhante à curva $\gamma : y = x^2$.*

Demonstração. É aplicação direta do Teorema 2. \square

3.3.3 Elipses

Observemos atentamente a figura seguinte:

Figura 3.12: Ilustração de duas elipses num mesmo sistema de eixos.



Fonte: autoria própria.

Observe que a elipse vermelha é mais “achatada” que a azul. Isso sugere que essas curvas não são semelhantes, pois suas formas parecem depender da excentricidade. Mais adiante, confirmaremos essa hipótese.

Para tanto, iniciamos com o seguinte lema.

Lema 1. *Sejam $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $E' : \frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ elipses, com $a > b$ e $a' > b'$. Se φ for uma função de semelhança entre E e E' , então $\varphi(-a, 0) = (\pm a', 0)$, $\varphi(a, 0) = (\pm a', 0)$, $\varphi(0, -b) = (0, \pm b')$ e $\varphi(0, b) = (0, \pm b')$.*

Demonstração. Sejam $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$, $V_3(0, b)$ e $V_4(0, -b)$ os vértices da elipse E , conforme a figura seguinte.

Para quaisquer pontos X e Y de E , sabemos que $\overline{XY} \leq \overline{V_1V_2}$. Assim, $k\overline{XY} \leq k\overline{V_1V_2}$, onde k denota a constante de semelhança da função φ . Segue que

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = k\overline{XY} \leq k\overline{V_1V_2} = \overline{\varphi(V_1)\varphi(V_2)}.$$

A última igualdade implica que $\varphi(V_1)\varphi(V_2)$ é o semi-eixo maior de E' . Dessa forma, concluímos que $\varphi(-a, 0) = (\pm a', 0)$ e $\varphi(a, 0) = (\pm a', 0)$, conforme a ilustração seguinte.

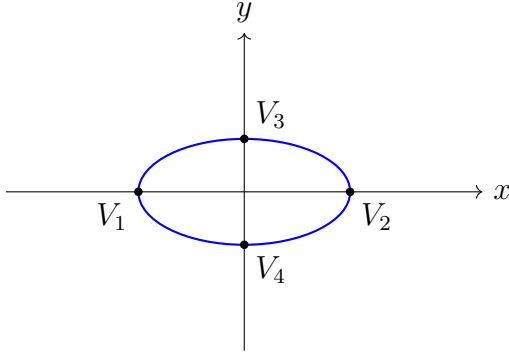


Ilustração da elipse E

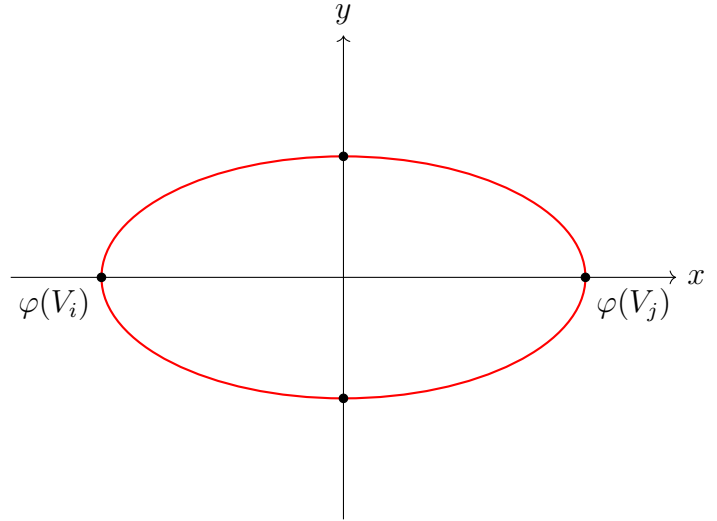


Ilustração da elipse E' . Estamos considerando $\{i, j\} = \{1, 2\}$

Por outro lado, observemos que os triângulos $V_1V_3V_2$ e $\varphi(V_1)\varphi(V_3)\varphi(V_2)$ são semelhantes, pois

$$\frac{\overline{\varphi(V_1)\varphi(V_2)}}{\overline{V_1V_2}} = \frac{\overline{\varphi(V_1)\varphi(V_3)}}{\overline{V_1V_3}} = \frac{\overline{\varphi(V_2)\varphi(V_3)}}{\overline{V_2V_3}} = k.$$

Em virtude disso, como $\overline{V_1V_3} = \overline{V_2V_3}$, concluímos que $\overline{\varphi(V_1)\varphi(V_3)} = \overline{\varphi(V_2)\varphi(V_3)}$. Como $\varphi(V_1)$ e $\varphi(V_2)$ são os vértices do semi-eixo maior de E' , inferimos que $\varphi(V_3)$ é vértice sobre o semi-eixo menor. Portanto, $\varphi(0, b) = \varphi(V_3) = (0, \pm b')$ e, analogamente, $\varphi(0, -b) = \varphi(V_4) = (0, \pm b')$. \square

Neste ponto, temos condições de apresentar um critério para semelhança entre elipses.

Teorema 3. *Duas elipses são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma excentricidade.*

Demonstração. Sejam E e E' elipses e $\varphi : E \rightarrow E'$ uma função de semelhança, com constante de semelhança k . Em virtude da Proposição 6, podemos supor que as equações dessas elipses sejam

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } E' : \frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1,$$

com $a > b$ e $a' > b'$.

Do Lema 1, vem $\varphi(a, 0) = (\pm a', 0)$, $\varphi(-a, 0) = (\pm a', 0)$, $\varphi(0, b) = (0, \pm b')$ e $\varphi(0, -b) = (0, \pm b')$. Devemos considerar as seguintes possibilidades:

- (a) $\varphi(a, 0) = (a', 0)$ e $\varphi(0, b) = (0, b')$.
- (b) $\varphi(a, 0) = (a', 0)$ e $\varphi(0, b) = (0, -b')$.

(c) $\varphi(a, 0) = (-a', 0)$ e $\varphi(0, b) = (0, b')$.

(d) $\varphi(a, 0) = (-a', 0)$ e $\varphi(0, b) = (0, -b')$.

Em todos eles, sendo $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$, $V_3(0, b)$ e $V_4(0, -b)$, devemos ter

$$\overline{\varphi(V_1)\varphi(V_2)} = k\overline{V_1V_2} \text{ e } \overline{\varphi(V_3)\varphi(V_4)} = k\overline{V_3V_4}.$$

Assim, obtemos

$$2a' = 2ka \text{ e } 2b' = 2kb,$$

donde $a' = ka$ e $b' = kb$.

Sendo c a semidistância focal da elipse E , sua excentricidade é $e = \frac{c}{a}$. Por outro lado, denotando por c' a semidistância focal de E' , segue que

$$c' = \sqrt{(a')^2 - (b')^2} = \sqrt{(ka)^2 - (kb)^2} = kc.$$

Decorre que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{kc}{ka} = \frac{c'}{a'} = e'.$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = e'. \tag{3.1}$$

Aplicando as igualdades (3.1) em $a^2 = b^2 + c^2$ e $(a')^2 = (b')^2 + (c')^2$, vem

$$b' = a'\sqrt{1 - e^2} \text{ e } b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Assim, podemos escrever

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1.$$

Daí, sendo $k = \frac{a}{a'}$, é imediato verificar que

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (kx, ky) \in E'.$$

Diante disso, segue que $\varphi : E \rightarrow E'$, definida por $\varphi(x, y) = (kx, ky)$, é uma função de semelhança entre E e E' .

□

3.3.4 Hipérboles

De forma similar ao que acontece no caso das elipses, existe um critério para semelhança entre hipérboles em termos da excentricidade.

Teorema 4. *Duas hipérboles são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma excentricidade.*

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos do Teorema 3 e, por isso, deixamos ao leitor o exercício de realizá-la. □

Capítulo 4

Semelhança entre cônicas no ensino médio: uma proposta didática

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma proposta de sequência didática sobre o tema “semelhança de cônicas”, fundamentada na abordagem de (ZABALA, 2015). Para tanto, discute-se inicialmente o conceito de sequência didática de forma mais aprofundada, destacando suas principais características e finalidades no contexto educacional. Em seguida, analisam-se as práticas propostas neste trabalho, evidenciando como elas se articulam com essa perspectiva pedagógica. Ao final, é apresentada uma atividade voltada ao ensino médio, centrada no estudo das cônicas e da semelhança entre figuras, com o intuito de suprir a carência de abordagens mais atrativas e eficazes para o desenvolvimento desses conteúdos em sala de aula.

4.1 Fundamentação teórica

O ensino das cônicas no ensino médio, de modo geral, restringe-se quase exclusivamente ao estudo das parábolas. Em algumas instituições — a depender da iniciativa do docente — podem ocorrer menções pontuais ou esboços gráficos da hipérbole, geralmente inseridos em contextos mais algébricos do que geométricos. Esse panorama é reforçado pela ênfase dada ao estudo das funções quadrática, exponencial e logarítmica, que privilegia abordagens analíticas e deixa em segundo plano a exploração geométrica das demais cônicas.

Apesar de contribuições relevantes de diversos pesquisadores do ensino de matemática, ainda se observam certa resistência e limitações quanto ao uso de softwares no ensino de matemática. Vale ressaltar que várias pesquisas apenas reafirmam a importância e eficácia do uso de softwares em sala de aula, como afirmam de Sousa e da Costa (SOUSA; COSTA, 2017, p. 17):

”[...] conseguimos identificar que é importante destacar que entender as novas formas de fazer Geometria pode reforçar o uso de softwares, em especial os de matemática dinâmica, pois eles podem trazer um novo olhar, não só no que se refere à concepção epistemológica da Geometria, mas também à sua construção”.

Por outro lado, quando se trata de atividades mais lúdicas — como as que envolvem dobraduras — percebe-se uma adesão significativamente maior por parte dos alunos e, ainda mais, por parte dos docentes. Com recursos simples, à semelhança dos matemáticos da Antiguidade¹, esses professores conseguem desenvolver propostas pedagógicas que levam a conclusões notáveis.

Segundo: (D'AMBROSIO, 2016, p. 1):

“[...] lamentavelmente, a Educação matemática, tanto na teoria quanto na prática, tem focalizado o aprimoramento da mesmice.”

De fato, muitas salas de aula contam com professores tecnicamente qualificados, mas que ainda adotam práticas centradas na memorização e desprovidas de contextualização, o que contribui para o desinteresse tanto de alunos quanto de professores em diversas partes do mundo. As limitações no uso de recursos didáticos diversificados também restringem as possibilidades de promover uma aprendizagem mais significativa. Ainda assim, segundo (SOUSA; COSTA, 2017), tanto em nível nacional quanto internacional, observa-se uma articulação entre o ensino da História da matemática e as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) como estratégia para potencializar o aprendizado dos estudantes.

Nesse contexto, uma sequência didática bem estruturada pode facilitar a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos, além de permitir ao professor uma abordagem mais coerente e linear². A proposta desenvolvida neste trabalho, apresentada a partir do que foi discutido até aqui, combina aspectos lúdicos e conceituais, valorizando tanto as definições formais quanto abordagens mais intuitivas. Essa mescla entre visões formais e informais da matemática encontra respaldo em Vygotsky, que, conforme citado por (ROLIM; GUERRA; TASSIGNY, 2008), destaca o brincar como parte essencial do desenvolvimento intelectual.

Mas, afinal, o que se entende por sequência didática? Para Zabala (1998), trata-se de um conjunto ordenado, estruturado e articulado de atividades de aprendizagem, planejadas com progressão, com o objetivo de possibilitar a construção de conhecimentos específicos pelos alunos. Segundo (ZABALA, 2015), os pilares que sustentam uma sequência didática são:

- **Articulação entre atividades:** as tarefas devem estar interligadas, formando uma sequência lógica em que cada atividade prepara e dá sentido à seguinte;
- **Progressão didática:** as atividades devem evoluir gradualmente, partindo dos conhecimentos prévios até a construção de saberes mais complexos;
- **Flexibilidade e adaptação:** a sequência deve considerar o contexto dos alunos, podendo ser ajustada conforme suas necessidades e respostas;

¹Vale lembrar que o ensino da Geometria no passado era realizado sem instrumentos de medição precisos, utilizando-se apenas de régua não graduada e compasso.

²É importante destacar que, do ponto de vista da prática docente, não é possível prever com exatidão o que ocorrerá em sala de aula. Os alunos podem, eventualmente, levantar questões que antecipem conteúdos ainda não abordados.

- **Intencionalidade pedagógica:** cada etapa precisa ter objetivos claros, direcionados à construção de conhecimentos específicos.

De forma prática, isso significa que, em vez de planejar aulas isoladas, o docente estrutura um conjunto de aulas interdependentes, com início, desenvolvimento e conclusão, favorecendo a construção progressiva do conhecimento.

Conforme os princípios que orientam uma sequência didática, é essencial propor atividades com caráter prático, lúdico e desafiador, organizadas com complexidade crescente. Essa abordagem permite ao professor identificar com mais precisão os conhecimentos prévios dos alunos, o que viabiliza o ajuste do planejamento, a reformulação das atividades e a gestão adequada do ritmo das aulas. No caso da proposta que está na Seção 4.3, adota-se uma perspectiva investigativa, incentivando a experimentação, seguida da generalização e abstração, promovendo, assim, a formação de significados.

Segundo (AUSUBEL, 2012), a aprendizagem significativa ocorre quando novos conhecimentos são integrados à estrutura cognitiva do aluno de forma não arbitrária e substancial. Isso requer a apresentação de materiais que tenham sentido para o aprendiz, gerando o que ele chama de aprendizagem proposicional. Mais especificamente, conforme (AUSUBEL, 2012), a chamada aprendizagem por subsunção acontece quando um novo conceito — mesmo que ainda não validado logicamente ou empiricamente — estabelece uma relação significativa com ideias mais amplas já existentes na estrutura cognitiva do estudante. Desse modo, o novo conteúdo é assimilado de maneira estável e funcional, promovendo um aprendizado duradouro.

Vale destacar que, diferentemente da simples memorização, a aprendizagem significativa promove conexões complexas e integradoras. A memorização, por outro lado, tende a formar ligações frágeis e pouco duradouras. A proposta da Seção 4.3 visa justamente superar essa limitação, ao tornar conteúdos tradicionalmente considerados difíceis em experiências acessíveis, relevantes e, sobretudo, significativas para os alunos.

4.2 Resolução de problemas - Polya

A capacidade de resolver problemas é uma habilidade essencial e inerente ao ser humano. Segundo (SANTOS-WAGNER, 2008), todo cidadão deve ser capaz de identificar, formular e solucionar problemas tanto em contextos escolares quanto não escolares.

Mas, afinal, o que caracteriza um problema? Para (SANTOS-WAGNER, 2008), trata-se de uma situação que exige resolução e que, em um primeiro momento, impõe uma dificuldade ou obstáculo ao sujeito. A base da definição de problema é não saber como resolver a situação. Uma vez que o indivíduo já sabe como resolver, ou seja, tem uma estratégia, não há mais um problema.

Segundo (POLYA, 1995)³, a resolução de problemas exige 4 fases de trabalho:

³George Polya foi um grande matemático húngaro que viveu entre 1887 e 1985. Suas contribuições para a matemática foram as mais diversas, contudo seus trabalhos sobre resolução de problemas ganharam destaque com o passo a passo para resolver um problema.

1. Compreender o problema;
2. Perceber relação entre os itens propostos no problema para elaborar um plano;
3. Execução do plano para resolução do problema;
4. Fazer um retrospecto e conferir os resultados obtidos.

No item 1, é fundamental compreender o que está sendo solicitado pelo problema e quais são os conhecimentos necessários para chegar à sua resolução⁴. No contexto atual, em que o hábito da leitura tem diminuído significativamente, pessoas com menor maturidade ou repertório acabam enfrentando uma barreira já nesse primeiro passo, uma vez que ele exige tanto interpretação quanto conhecimento prévio. Isso me fez lembrar a fala do meu ex-professor de Graduação, Manuel Claudemir da Silva Caldas, que, no período em questão, estava ministrando a disciplina Álgebra I e uma certa fala dele marcou minha carreira discente e docente. Ele dizia: “Um bom aluno e um bom professor possuem um bom repertório. Saber matemática é muito importante, mas isso é metade do que você precisa. A outra metade é sentar e resolver o máximo de questões que você conseguir para adquirir uma visão ampla e diferentes estratégias para resolver os problemas”. No período em questão, por mais imaturo que eu fosse, consegui ter dimensão dessa fala e assim o fiz.⁵

Sobre o item 2, enfrentamos diversas tentativas infrutíferas e frustrações que, por vezes, nos impedem de enxergar o problema de forma clara e objetiva. Ainda assim, é possível contornar essas dificuldades, especialmente quando percebemos que certos problemas compartilham características em comum. Por exemplo: em um triângulo retângulo com catetos medindo 3 e 4, como determinar sua hipotenusa? Agora, imagine um segundo problema em que os lados do triângulo também medem 3 e 4, mas não é informado se o triângulo é retângulo. Como encontrar o terceiro lado? Ambos os enunciados apresentam, em grande parte, as mesmas informações, mas o segundo impõe uma dificuldade adicional. Nesse caso, reconhecer que não é possível aplicar diretamente o Teorema de Pitágoras já elimina uma estratégia inicial⁶, restringindo o conjunto de possibilidades de resolução dentro do tema “triângulos”.

O próximo item também nos apresenta uma batalha a ser enfrentada, pois estudantes de diferentes níveis de ensino costumam hesitar já no primeiro passo. Isso ocorre devido a uma infinidade de fatores que variam conforme a realidade de cada aluno. Em minha prática docente, já presenciei desde estudantes que, após receberem tratamentos ríspidos por parte de professores, passaram a hesitar diante das perguntas mais simples, até aqueles que foram julgados por colegas a cada erro cometido. É importante reforçar mais uma vez: o erro faz parte do processo. Como bons profissionais, precisamos aprender a aprender com os erros de nossos alunos também. Afinal, como destaca Astolfi, “o erro não é um obstáculo, mas um ponto de apoio para a construção do conhecimento”.⁷

⁴(POLYA, 1995). afirma que não se trata apenas de entender o problema, mas também de ter o desejo de resolvê-lo.

⁵Até hoje me considero um bom resolutor de problemas e muitas das minhas aulas são trabalhadas em cima das investigações.

⁶Saber o que não se deve fazer também é essencial. Isso permite identificar, com mais clareza, as ferramentas adequadas diante da ampla variedade de teoremas, proposições e corolários disponíveis em um determinado conteúdo matemático.

⁷ASTOLFI, Jean-Pierre. O erro, um meio para ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1997.

Assim como todos os itens analisados anteriormente, o último também apresenta um fator dificultador diretamente relacionado ao contexto atual. Treinados para realizar exames com tempo cada vez mais reduzido por questão, muitos estudantes acabam desenvolvendo o hábito de não revisar o que foi feito.⁸ Em alguns casos, inclusive, há profissionais que orientam os alunos a apenas marcar a alternativa correta e seguir adiante, sem refletir sobre o caminho percorrido na resolução. Apesar disso, ainda há profissionais que lutam, mesmo com esse forte contexto de realização do curso dos sonhos em uma universidade, contra esse péssimo hábito de não conferir aquilo que foi proposto.

Todas as fases do passo a passo de Polya são importantes. No entanto, a imprevisibilidade da sala de aula pode nos surpreender, revelando estudantes que, mesmo sem seguir todos os passos anteriores, conseguem chegar a uma solução de forma lógica⁹.

4.2.1 BNCC

A BNCC (BRASIL, 2018a) - Base Nacional Comum Curricular - é um documento que define um conjunto de conhecimentos essenciais para serem desenvolvidos ao longo da educação básica. Um dos grandes objetivos é vencer as diferenças nas políticas educacionais sendo esse um documento norteador para o aprimoramento da qualidade da educação.

O documento traz, em síntese, uma visão de uma matemática mais estratégica, baseada na investigação e na experimentação, delineando um percurso claro do ensino fundamental ao ensino médio. Segundo (BRASIL, 2018a), o Ensino Fundamental deve promover o desenvolvimento do raciocínio estratégico e da argumentação, de forma a favorecer a resolução de problemas. A BNCC afirma que “a matemática deve contribuir para a formação do cidadão que argumenta, que formula e resolve problemas, que utiliza estratégias e conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018a, p. 269). Espera-se, assim, que o aluno ingresse no nível seguinte de ensino já munido desse conjunto de habilidades.

Um segundo documento norteador, no que diz respeito à sequência que será proposta, é o (BRASIL, 2018b). Ele traz as principais competências e habilidades que o aluno precisa desenvolver até o final do ciclo do ensino médio. Mas o que são essas competências e habilidades, afinal? Segundo a BNCC do ensino médio, competências dizem respeito à mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, enquanto habilidades são ações observáveis que expressam essas competências em situações concretas (BRASIL, 2018b, p. 9).

E qual o problema desses dois documentos? Os conteúdos que serão ministrados não estão especificados de forma detalhada. Por exemplo, em (BRASIL, 2018b, p. 526), temos como uma das habilidades previstas “planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou provenientes de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não o apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de

⁸O ENEM – Exame Nacional do ensino médio –, por exemplo, possui um tempo médio de 3 a 3,5 minutos por questão.

⁹A expressão “de forma lógica” é frequentemente escutada por professores de matemática em sala de aula, geralmente para se referir a alunos que encontram a solução de um problema de maneira mais rápida e precisa.

tendência central e de dispersão”. Fica claro quais são os conteúdos que precisam ser ministrados? Em minha opinião, não! Algumas palavras-chave nos trazem à tona conteúdos de extrema importância. Podemos citar a Estatística como capítulo chave para o desenvolvimento dessa habilidade dentro de uma das competências. Diante disso, apresento as competências propostas no documento sem suas respectivas habilidades.

Competências Gerais da BNCC para o ensino médio:

Competência	Descrição
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática.
3	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Tabela 4.1: Competências Gerais da BNCC para o ensino médio

Fonte: (BRASIL, 2018b)

Foi organizada acima uma tabela com todas as competências propostas pela BNCC para o ensino médio. Contudo, cabe questionar: onde começam e terminam os conteúdos matemáticos a serem ministrados pelo docente? Qual seria o problema disso, afinal? Com total liberdade para escolher os conteúdos, experimentar metodologias e propor abordagens diversas, onde está a dificuldade?

A principal questão reside na necessidade de um direcionamento mais claro e objetivo, que evite múltiplas interpretações sobre o que deve ser ensinado. Muitos professores adotam como referência os conteúdos do ENEM que, por sua vez, não apresenta seu edital de forma suficientemente

clara, abrangendo praticamente toda a grade do ensino médio. Essa situação gera insegurança e descontinuidade no planejamento pedagógico.

Esse cenário contribui para uma das maiores barreiras à promoção da equidade educacional no país. A rede privada, em geral, segue um modelo onde as duas primeiras séries do ensino médio abordam integralmente os conteúdos, com forte ênfase nas demandas do ENEM, enquanto a terceira série é reservada para revisão e preparação para o exame. Por outro lado, a rede pública, com uma carga horária reduzida, muitas vezes precisa dedicar parte do tempo para sanar dificuldades acumuladas nas séries anteriores, concluindo apenas na terceira série o ensino completo dos conteúdos previstos para o ensino médio.

Esse descompasso entre as redes evidencia a necessidade de um planejamento curricular mais detalhado e contextualizado, que assegure uma progressão consistente e que minimize as desigualdades no acesso ao conhecimento. Como apontam Libâneo (2013) e Moran (2015), a clareza e a sistematização curricular são fundamentais para garantir a qualidade do ensino e a justiça educacional (LIBÂNEO, 2013) e (MORAN, 2015).

A liberdade para ministrar os conteúdos, embora importante, acaba gerando disparidades significativas entre as instituições de ensino. Muitos conteúdos abordados em algumas escolas simplesmente não são trabalhados em outras, e diversos tópicos são frequentemente suprimidos. Dentre esses, pode-se destacar temas relevantes como geometria analítica, polinômios e números complexos — estes dois últimos, em muitos casos, sequer chegam a ser apresentados ao longo do ensino médio.

Essa omissão compromete, por exemplo, o desenvolvimento de uma compreensão mais ampla na resolução de problemas envolvendo funções polinomiais, uma vez que o domínio de polinômios e números complexos favorece o amadurecimento matemático dos estudantes.

Adicionalmente, a ausência da geometria analítica impede que se ofereça um tratamento geométrico adequado a diversas formas e relações espaciais vistas nos capítulos anteriores, o que compromete inclusive a aprendizagem em áreas correlatas, como a Física. Como dizia um professor que tive (durante minha graduação) na disciplina de geometria analítica da UFRN: “A geometria analítica é o casamento perfeito entre a álgebra e a geometria” e, ao não compreender os fenômenos físicos por falta de uma base geométrica sólida, os estudantes tendem a enfrentar maiores dificuldades na interpretação e resolução de problemas.

Ainda assim, a sequência proposta a seguir busca apresentar aos estudantes diferentes formas geométricas que, normalmente, não são abordadas em sala de aula, sobretudo no contexto de instituições que enfrentam limitações curriculares. Essa abordagem se desenvolve a partir de um conteúdo essencial e obrigatório, independentemente do contexto: a semelhança entre figuras.

A não abordagem adequada desse conteúdo pode acarretar sérias consequências pedagógicas, como a dificuldade de compreensão em temas fundamentais, tais como trigonometria, escalas, geometria espacial, entre outros.

Dessa forma, seguimos com a proposta de sequência didática com o objetivo de mitigar as disparidades e dificuldades presentes em nosso sistema educacional, ao mesmo tempo em que buscamos promover uma aprendizagem significativa, conforme a fundamentação teórica anteriormente apresen-

tada.

4.3 Sequência didática

Introdução: Iremos apresentar brevemente o conteúdo da semelhança entre figuras, sua importância para a compreensão da geometria bem como para a aprendizagem significativa. Tal proposta supõe que os discentes possuam os seguintes conhecimentos prévios:

- Funções;
- Elementos primitivos da geometria plana;
- Semelhança de triângulos;
- Círculo e circunferência;
- Elementos da geometria plana no espaço;
- Geometria espacial: cones.

Tendo em vista os conhecimentos elencados anteriormente, sugerimos que a proposta didática seja aplicada em turmas da 2ª série do ensino médio.

Tempo total¹⁰: 7 aulas.

Objetivos:

- Contribuir para o conhecimento do estudante integrando-o na sociedade em que vive;
- Propor uma abordagem heurística para uma melhor compreensão dos estudantes a partir da investigação;
- Fixação dos conteúdos ministrados a partir da estruturação de conceitos de forma linear e consciente.

Objetivos específicos:

- Compreender as definições de cada um dos elementos geométricos apresentados;
- Compreender as principais propriedades de cada um dos elementos geométricos apresentados;
- Desenvolver a capacidade de identificar, a partir dos elementos dados, as figuras apresentadas;
- Desenvolver raciocínio lógico e melhorar a capacidade de resolução de problemas;
- Promover a socialização e o trabalho em equipe;

¹⁰Cada aula é, em média, de 50 minutos no ensino médio regular.

- Conseguir demonstrar, mesmo que com argumentos menos formais, a formação de cada figura;
- Compreender a definição de semelhança entre dois objetos;
- Conseguir executar as atividades lúdicas;
- Conseguir compreender, a partir de tais atividades, a construção dos objetos geométricos em questão e seus semelhantes.

Materiais necessários:

- Quadro branco para eventuais cálculos ou explicações;
- Projetor para apresentação das figuras;
- Computador com ou sem acesso à internet;
- Folhas de papel A4 para trabalho com dobraduras;
- Lista de exercícios para responder as questões em grupo;
- Lápis, caneta e demais itens de escrita;
- Uma superfície esférica para apresentação do conteúdo segundo Hipátia;
- Régua, compasso e barbante.

Avaliação: A avaliação será realizada de forma contínua, considerando-se a participação individual e em grupo, a entrega da atividade escrita e as intervenções feitas em aula por meio de comentários ou questionamentos.

4.3.1 Encontro 1: introdução e questionamentos iniciais

Serão necessárias duas aulas para o desenvolvimento desta etapa. O ideal é que esses encontros ocorram de forma consecutiva, sem intervalos entre eles, a fim de garantir a continuidade do raciocínio e o engajamento dos estudantes.

Exposição teórica: Em um primeiro momento, o professor utilizará o projetor para apresentar algumas situações geométricas, como o lançamento de uma bola, a estrutura do forno solar (Figura 2.5), entre outras, que remetam às seções cônicas. A partir dessas representações, será possível abordar tanto o contexto histórico quanto a importância dessas figuras no cotidiano.

Essa etapa é marcada por momentos de discussão e envolvimento lúdico, pois os alunos devem se sentir parte da construção do conhecimento, percebendo sentido nas aplicações apresentadas e nos contextos que estão inseridos. Um exemplo é o lançamento de uma bola ao se apresentar a parábola, ou

ainda o uso de jogos digitais como o *Angry Birds*¹¹, que simula lançamentos oblíquos em um ambiente interativo, permitindo a visualização prática da trajetória parabólica. Se não houver acesso à internet, o docente deve, previamente, preparar em seus slides imagens que exemplifiquem os lançamentos.

Para a apresentação da elipse, por exemplo, o professor pode se apropriar de sua definição matemática e indicar, com o auxílio de uma corda presa em dois pontos fixos (os focos), como realizar seu desenho. Após essa ilustração, o docente propõe aos discentes o desafio de reproduzir o traçado por conta própria, utilizando os materiais sugeridos.

Antes de iniciar a atividade, organize os alunos em grupos de até quatro integrantes.

Atividade 1: Em sua folha de resposta, e a partir das definições discutidas em sala, desenhe — utilizando apenas régua, compasso e um pequeno pedaço de barbante — as cônicas de Hipátia. Seu grupo conseguiu representar todos os elementos? Quais foram as principais dificuldades encontradas¹²?

4.3.2 Encontro 2: cônicas na prática

Aqui, o professor irá propor o trabalho com dobraduras e também serão necessárias duas aulas. Nesse sentido, se faz necessário que cada aluno tenha pelo menos 4 folhas A4 em mãos, lápis, borracha, régua e um pedaço de barbante. O professor irá apresentar as figuras propostas na Seção 2.3 do presente trabalho.

Atividade 2: Construa, a partir do passo a passo dado na Seção 2.3, a circunferência, a parábola, a elipse e a hipérbole.

Ao final da aula, é importante que o docente incentive os alunos a elaborarem uma justificativa, mesmo que de maneira intuitiva ou informal, para a construção de cada uma das figuras desenvolvidas. Esse momento contribui para a consolidação do conhecimento e a valorização do raciocínio geométrico. Por fim, para esse momento, deve-se deixar o questionamento: “E se quiséssemos construir figuras semelhantes a essas, conseguiríamos a partir das figuras iniciais?”

Vale ressaltar que, na Seção 2.3, as figuras são descritas por meio de um passo a passo que evidencia suas características a partir das definições. Por exemplo, a parábola é definida com base em uma diretriz e em um ponto fixo (o foco). O questionamento proposto convida à reflexão sobre a necessidade — ou não — de se manter esses elementos iniciais para construir figuras semelhantes entre si.

Na última parte da aula, o docente irá colocar no quadro as possíveis equações de uma parábola e fazer exemplos e esboços de gráficos a partir das equações.

¹¹Jogo eletrônico popular que simula lançamentos de projéteis com trajetórias parabólicas, possibilitando uma abordagem lúdica de conceitos físicos e geométricos. Disponível gratuitamente para computadores via navegador no site oficial do *Angry Birds* (<https://www.angrybirds.com/play/>).

¹²As perguntas dessa atividade têm como referência o trabalho de (NASCIMENTO; CAVALCANTI, 2020) que conclui a possibilidade de construção das cônicas com régua, compasso e barbante.

4.3.3 Encontro 3: aprofundamento e justificativas

Nesse momento, o professor deve retomar conceitos importantes, como o de parábola — à luz da Definição 3 e do Capítulo 2.3 — e o de semelhança, iniciando pela revisão teórica da semelhança entre triângulos e explicando os critérios de semelhança. Em seguida, pode-se avançar para a abordagem da semelhança entre curvas.

Ao final da aula, é interessante provocar reflexões com questionamentos como: “Duas circunferências são sempre semelhantes? E quanto às parábolas, será que também são sempre semelhantes? E se tomarmos duas figuras, como uma reta e uma parábola, elas seriam semelhantes?” Esses questionamentos ajudam a consolidar o conteúdo e incentivam o pensamento crítico dos estudantes.

Para finalizar, antes de propor a Atividade 3, o professor deve retomar os questionamentos e apresentar o Exemplo 3 e o Exemplo 4 contidos no Capítulo 3 desta dissertação.

A atividade proposta para os alunos, neste momento, deve ser realizada ao final da aula, de modo que as respostas permaneçam em aberto, despertando a curiosidade gerada pela resolução de problemas, conforme proposto em (POLYA, 1995), e sejam retomadas e discutidas na aula seguinte.

Atividade 3: O que é necessário mudar em cada uma das figuras formatas na Atividade 2 para gerar uma figura semelhante? Explique, em cada um dos casos abaixo, justificando sua formação.

1. Circunferência
2. Parábola
3. Hipérbole
4. Elipse

Como evidenciado ao longo desta seção, o trabalho investigativo é um dos principais focos deste estudo, não se tendo, portanto, expectativas rígidas quanto às respostas dos alunos. Contudo, é fundamental que o professor destaque os elementos característicos de cada figura; por exemplo, na circunferência, o raio, que está diretamente relacionado à razão de semelhança. Logo após, poderão surgir questionamentos como: “E na parábola, o que pode ser destacado?”

4.3.4 Encontro 4: consolidação

Esta aula tem como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos até o momento, conduzindo os alunos à compreensão de que duas parábolas são, de fato, figuras semelhantes. Para isso, o professor pode iniciar a atividade retomando o conceito de semelhança entre triângulos. Com três palitos de churrasco, constrói-se um triângulo colando-os nas extremidades, dois a dois. Em seguida, com outros três palitos de metade do tamanho — obtidos a partir do corte dos palitos maiores —, constrói-se um segundo triângulo da mesma forma. Propõe-se, então, a reflexão: “Esses dois triângulos são semelhantes?”

Capítulo 5

Semelhança entre cúbicas: uma generalização natural

No Capítulo 3, apresentamos a definição de curvas semelhantes e, entre outros resultados, demonstramos que quaisquer duas parábolas são sempre semelhantes. Neste capítulo, exploramos essa noção de semelhança para estudar os gráficos de polinômios de grau 3. Mostramos que tais gráficos podem ser transformados no gráfico da curva $\gamma : y = x^3$ por meio de funções de semelhança e de uma transformação de cisalhamento. Além disso, estabelecemos um critério que permite determinar quando o gráfico de um polinômio cúbico é semelhante à curva γ . Para a construção deste capítulo, tomamos como principais referências o artigo (DE VILLIERS, 2003) e o Capítulo 1 do livro (MORAIS FILHO, 2015). A partir da combinação das ideias presentes nessas fontes, desenvolvemos uma abordagem própria sobre o tema, a qual resultou no artigo (GUIMARÃES; BRITO JÚNIOR; SILVA JÚNIOR, 2025), atualmente submetido à revista Professor de matemática Online (PMO), da Sociedade Brasileira de matemática.

5.1 Critérios para semelhança entre curvas de grau 3

Ao longo desse capítulo, nosso foco está em curvas dadas por funções polinomiais de grau 3 na variável x , ou seja,

$$z(x) = x, \quad y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

onde $a \neq 0$ e $I = \mathbb{R}$.

Nesse caso, escrevemos a curva na forma

$$\gamma : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e utilizamos o termo *curva* tanto para a função $y = y(x)$ quanto para o seu gráfico no plano cartesiano.

Iremos dar uma classificação para os gráficos de polinômios de grau três em termos do conceito de

curvas afim-equivalentes (que será visto *a posteriori*).

Iniciamos com o resultado a seguir.

Lema 2. *O gráfico de uma função polinomial de grau 3 é sempre semelhante ao gráfico de uma curva do tipo $y = ax^3 + bx$.*

Demonstração. Seja $\gamma_1 : Y = AX^3 + BX^2 + CX + D$ uma curva descrita por uma função polinomial de grau 3, com $A \neq 0$. Em γ_1 , aplicando a translação

$$\begin{cases} X = x - \frac{B}{3A} \\ Y = y + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right) \end{cases},$$

obtemos a curva

$$\gamma_2 : y + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right) = A\left(x - \frac{B}{3A}\right)^3 + B\left(x - \frac{B}{3A}\right)^2 + C\left(x - \frac{B}{3A}\right) + D.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$\gamma_2 : y + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right) = \left(Ax^3 - Bx^2 + \frac{B^2}{3A}x - \frac{B^3}{27A^2}\right) + \left(Bx^2 - \frac{2B^2}{3A}x + \frac{B^3}{9A^2}\right) + \left(Cx - \frac{BC}{3A}\right) + D.$$

Agrupando as parcelas de forma conveniente, segue que

$$\gamma_2 : y + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right) = Ax^3 + \left(-\frac{B^2}{3A} + C\right)x + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right).$$

Dessa foram, obtemos

$$\gamma_2 : y = ax^3 + bx,$$

onde $a = A$ e $b = -\frac{B^2}{3A} + C$. Como γ_2 foi obtida de γ_1 por uma translação, o item (d) da Proposição 6 assegura que γ_1 é semelhante a γ_2 , como queríamos provar. \square

A fim de ilustrar a proposição anterior, consideremos o seguinte exemplo.

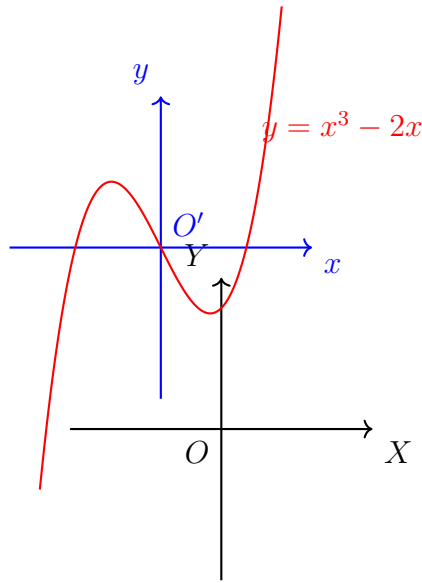
Exemplo 6. *Seja $\gamma_1 : Y = X^3 + 3X^2 + X + 2$. Considerando a translação de eixos dada por*

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 3 \end{cases},$$

e $O'(-1, 3)$, no sistema de eixos $xO'y$, a curva γ_1 passa a ter equação $y = x^3 - 2x$.

A figura abaixo representa o gráfico de γ_1 em relação aos dois sistemas de eixos.

Figura 5.1: Curva γ_1 representada nos sistemas XOY e $xO'y$



Fonte: autoria própria

A proposição seguinte é uma generalização do Teorema 2 trazido na Subseção 3.3.2.

Proposição 8. *Sejam a e a' números reais não nulos e $n \geq 0$ um inteiro. As curvas $y = ax^n$ e $y = a'x^n$ são semelhantes.*

Demonstração. Vamos usar as notações γ_1 e γ_2 para denotar as curvas $y = ax^n$ e $y = a'x^n$, respectivamente. Se $n = 0$ ou $n = 1$, ambas as curvas serão retas e o resultado segue da Proposição 6. Para $n = 2$, a prova está feita no Teorema 2 trazido na Subseção 3.3.2. Assim, suponhamos que $n \geq 3$.

Primeiramente, suponha que $a > 0$ e $a' < 0$. Pelo item (e) da Proposição 6, segue que as curvas $y = a'x^n$ e $y = -a'x^n$ são semelhantes. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $a > 0$ e $a' > 0$.

Sejam $P(\alpha, a\alpha^n) \neq (0, 0)$ um ponto da curva γ_1 e r a reta que passa pela origem e por P , ou seja, $r : y = a\alpha^{n-1}x$. Um ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ na interseção de r e γ_2 deve satisfazer

$$a\alpha^{n-1}x = a'x^n.$$

Daí, $x^{n-1} = \frac{a\alpha^{n-1}}{a'}$. A solução que nos convém é $x = \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}}\alpha$.

Diante disso, definamos a função $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ por

$$\varphi(\alpha, a\alpha^n) = \left(\sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}}\alpha, \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}}a\alpha^n \right).$$

Pela própria construção, segue que φ é bijetiva. Resta provar que a condição de semelhança também é satisfeita. Para tanto, dados α e β reais, sejam $P(\alpha, a\alpha^n)$ e $Q(\beta, a\beta^n)$. Um cálculo direto mostra que

$$\overline{PQ}^2 = (\beta^2 - \alpha^2) + a^2(\beta^n - \alpha^n)^2,$$

$$\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}^2 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}} (\beta^2 - \alpha^2) + \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}} a^2 (\beta^n - \alpha^n)^2 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}} \overline{PQ}^2.$$

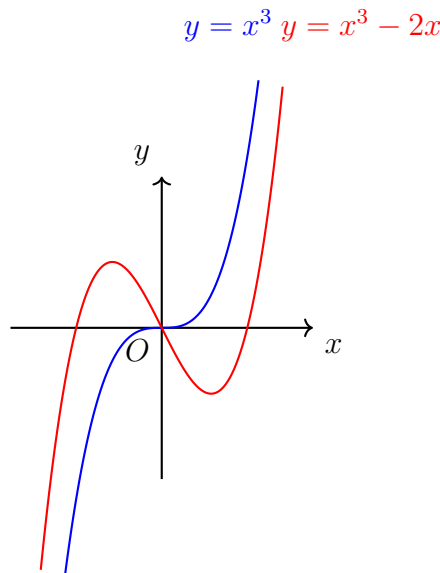
Assim, sendo $k = \sqrt[n-1]{\frac{a}{a'}}$, temos $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)} = k\overline{PQ}$, o que encerra a demonstração. \square

Antes de passarmos ao próximo resultado, apresentamos a seguinte definição.

Definição 10. Dizemos que uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um cisalhamento vertical quando existir uma constante λ tal que $T(x, y) = (x, \lambda x + y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sendo γ uma curva contida em \mathbb{R}^2 , a restrição de T a γ é chamada cisalhamento vertical de γ .

Daqui por diante, iremos chamar um cisalhamento vertical simplesmente de cisalhamento. Abaixo, a curva azul, de equação $y = x^3$, é transformada na curva vermelha, de equação $y = x^3 - 2x$, através do cisalhamento $T(x, y) = (x, -2x + y)$.

Figura 5.2: Cisalhamento aplicado a $y = x^3$



Fonte: autoria própria

Definição 11. Dizemos que a curva γ_1 é afim-equivalente à curva γ_2 se existem funções de semelhança φ_1 e φ_2 e um cisalhamento T tais que

$$\varphi_1 \circ T \circ \varphi_2(\gamma_1) = \gamma_2.$$

Claramente, curvas semelhantes são sempre afim-equivalentes. O teorema a seguir estabelece que os gráficos de funções polinomiais de grau 3 são sempre afim-equivalentes entre si.

Teorema 5. O gráfico de qualquer função polinomial de grau 3 é afim-equivalente à curva $y = x^3$.

Demonstração. Seja $\gamma : Y = AX^3 + BX^2 + CX + D$ uma curva, com $A \neq 0$. Sendo φ_2 a translação construída na demonstração do Lema 2, inferimos que γ é semelhante, via φ_2 , à curva

$$\gamma_1 : y = ax^3 + bx,$$

onde $a = A$ e $b = -\frac{B^2}{3A} + C$.

Aplicando o cisalhamento $T(x, y) = (x, -bx + y)$ a γ_1 , obtemos a curva

$$\gamma_2 : y = ax^3.$$

A Proposição 8 implica que γ_2 é semelhante a $\gamma_3 : y = x^3$. Denotando por φ_1 a função de semelhança entre γ_2 e γ_3 , decorre que

$$\varphi_1 \circ T \circ \varphi_2(\gamma) = \gamma_3,$$

provando que γ é afim-equivalente a $y = x^3$. □

O resultado anterior nos mostra que o gráfico de qualquer função polinomial de grau 3 pode ser transformado no gráfico de $y = x^3$ utilizando apenas funções de semelhança e um cisalhamento. Em alguns casos específicos, essa transformação pode ser realizada sem a necessidade do cisalhamento. O corolário a seguir trata exatamente dessa situação.

Corolário 3. *Seja $\gamma : Y = AX^3 + BX^2 + CX + D$, com $A \neq 0$. Se $B^2 = 3AC$, então γ é semelhante a $y = x^3$.*

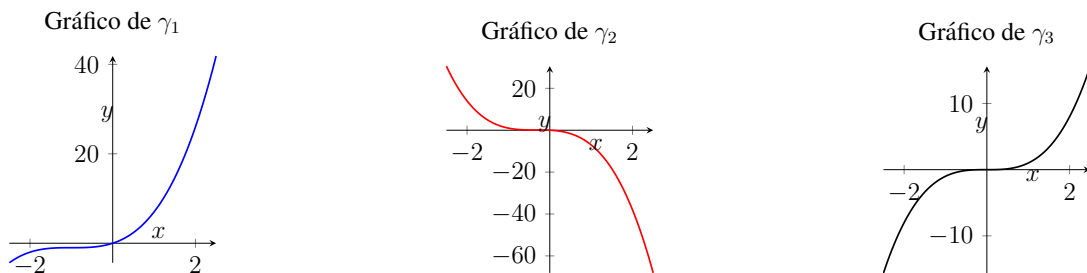
Demonstração. Pelo Lema 2, a curva γ é semelhante a

$$\gamma_1 : y = ax^3 + bx,$$

onde $a = A$ e $b = -\frac{B^2}{3A} + C$. Pela hipótese, segue que $b = 0$ e, pela Proposição 8, concluímos que γ_1 é semelhante à curva $y = x^3$. □

Exemplo 7. *Segue diretamente do Corolário 3 que as curvas $\gamma_1 : y = x^3 - 3x^2 + 3x$ e $\gamma_2 : y = -3x^3 - 3x^2 - x$ são semelhantes a $\gamma_3 : y = x^3$. A figura a seguir ilustra esse fato.*

Figura 5.3: Semelhança entre as curvas γ_1, γ_2 e γ_3



Fonte: autoria própria

5.2 Em busca de respostas: dois problemas em aberto

Ao longo deste capítulo, exploramos a noção de *semelhança entre curvas*, com ênfase especial nas curvas descritas por funções polinomiais de grau 3. O Teorema 5 estabelece que o gráfico de qualquer função descrita por uma cúbica pode ser transformado no gráfico da curva $y = x^3$ por meio de uma composição de semelhanças e um cisalhamento. Além disso, o Corolário 3 fornece um critério para que o gráfico de uma função polinomial de grau 3 seja semelhante ao gráfico de $y = x^3$.

Acreditamos que a leitura deste trabalho possa interessar a professores de matemática e demais leitores curiosos, ao mesmo tempo em que oferece um ponto de partida para novas investigações sobre o tema. Neste espírito, encerramos o capítulo propondo as seguintes questões:

Problema 1

O gráfico de qualquer função polinomial de grau 3 é sempre semelhante a $\gamma_1 : y = x^3 - x$, $\gamma_2 : y = x^3$ ou $\gamma_3 : y = x^3 + x$? Além disso, γ_i e γ_j não são semelhantes, se $i \neq j$?

Problema 2

Seja $n \geq 4$ um número natural. O gráfico de uma função polinomial de grau n é sempre afim-equivalente à curva $y = x^n$?

Ainda que parcialmente, o Problema 2 anterior admite uma solução positiva, apresentada na proposição seguinte.

Proposição 9. *Sejam $n \geq 4$ um número natural e $\gamma : y = ax^n + bx + d$, com $a \neq 0$. A curva γ é afim-equivalente a $\gamma_0 : y = x^n$.*

Demonstração. Pelo item (d) da Proposição 6, podemos supor que $d = 0$ e trabalhar com a curva $\gamma_1 : y = ax^n + bx$ (pois γ pode ser obtida de γ_1 por uma translação). Nesse caso, sendo $\gamma_2 : y = ax^n$, a função $T : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, definida por $T(x, y) = (x, -bx + y)$ é um cisalhamento e, aplicando a Proposição 8, inferimos que γ_2 é semelhante a γ_0 . Dessa forma, γ é afim-equivalente a γ_0 . \square

A Proposição 9 reforça nossa suspeita quanto à possibilidade de uma resposta afirmativa para o problema proposto.

Até onde pôde ser verificado, esse problema não se encontra explicitamente formulado na literatura matemática disponível. Embora a noção de equivalência afim entre curvas seja estudada em contextos como geometria algébrica e teoria das formas normais, a questão específica de saber se *todo gráfico de função polinomial de grau n* pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^n$ por meio de uma transformação afim não parece ter sido abordada como problema isolado. Assim, consideramos esta formulação como uma possível contribuição original desta dissertação e acreditamos que ela pode motivar investigações futuras tanto no âmbito da matemática pura quanto no ensino de matemática.

5.3 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo central investigar abordagens didáticas para o ensino da semelhança entre cônicas e curvas polinomiais de grau 3. Observou-se que esses conteúdos, embora relevantes do ponto de vista matemático e formativo, são raramente discutidos em sala de aula. Diante disso, optou-se por enfatizar o estudo das cônicas — com especial destaque para a parábola — como ponto de partida para ampliar o repertório geométrico dos estudantes e promover uma aprendizagem mais significativa. O processo de aprendizagem não é simples, especialmente quando se trata da introdução de conteúdos pouco explorados no currículo tradicional. No entanto, este trabalho propôs etapas bem definidas para alcançar seu objetivo principal: o ensino da semelhança, das cônicas e das curvas polinomiais no contexto do Ensino Médio. Ressalta-se que esse contexto é marcado por múltiplas realidades educacionais, que variam de acordo com os aspectos socioculturais em que os alunos estão inseridos. Ainda assim, este trabalho buscou contemplar essas diferentes realidades ao propor uma abordagem de ensino pautada em uma aprendizagem dinâmica, investigativa e significativa.

A semelhança é, em geral, abordada no Ensino Médio de forma restrita ao campo da Geometria, sem conexão explícita com a noção de função. Essa limitação reduz significativamente o potencial de compreensão e aplicação do conceito, pois impede que os estudantes percebam a semelhança como uma estrutura matemática mais ampla, presente em diferentes contextos. Limitar o pensamento matemático a compartimentos estanques — como o algébrico de um lado e o geométrico de outro — enfraquece a construção de sentidos. Nesse sentido, uma proposta investigativa que integre múltiplas abordagens pode favorecer uma aprendizagem mais completa, ampliando a percepção dos estudantes sobre os conteúdos e suas aplicações. Ao promover reflexões com alto grau de discussão em sala de aula, este trabalho reforça a capacidade crítica dos estudantes e estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico. Entretanto, a educação não pode ser pensada de forma única, pois sua complexidade se revela na diversidade e nas particularidades dos contextos socioculturais nos quais os discentes estão inseridos, evidenciando desafios e demandas específicas. Essas variáveis reforçam a importância de propostas pedagógicas flexíveis e sensíveis às diferentes realidades, como a apresentada neste estudo.

Nesse sentido, os resultados apresentados, por meio das aplicações das cônicas no cotidiano, bem como a demonstração da semelhança entre cônicas e também duas curvas de grau 3, evidenciam a importância de discutir esses conceitos em sala de aula. Essa abordagem contribui para que o processo de descoberta ultrapasse os limites da sala de aula, alcançando qualquer campo de interesse do discente. Além disso, promove o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico e da capacidade investigativa dos estudantes. No âmbito da matemática, o questionamento “*Dois curvas polinomiais de grau n são sempre semelhantes?*”, instiga a curiosidade mas, também, abre espaço para novas pesquisas e práticas pedagógicas. Dessa forma, este estudo oferece subsídios para que docentes ampliem suas estratégias de ensino, integrando conteúdos teóricos e aplicações práticas de maneira dinâmica e contextualizada.

Referências

- AUSUBEL, David Paul. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. [S.l.]: SBM, 2012.
- BICUDO, Irineu; OUTROS. **Os elementos**. [S.l.]: Unesp, 2009.
- BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. **Harbra-Harper & Row do Brasil**, São Paulo, 1984.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. [S.l.]: Blucher, 2019. ISBN 9788521216117. Disponível em: [; <https://books.google.com.br/books?id=sK-tDwAAQBAJ>](https://books.google.com.br/books?id=sK-tDwAAQBAJ);
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.: s.n.], 2018. Acesso em: 1 jul. 2025. Disponível em: [; <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/);
- _____. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. [S.l.: s.n.], 2018. Acesso em: 1 jul. 2025. Disponível em: [; <https://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>](https://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file);
- D'AMBROSIO, Ubiratan. A educação matemática hoje: por que e como. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 12, p. 1–5, 2016.
- DA VINCI, Leonardo. **A última ceia**. [S.l.: s.n.], 1498.
- DE VILLIERS, Michael. All parabolas similar? Never! **Pythagoras**, 1994.
- _____. The affine equivalence of cubic polynomials. **AMESA KZM Math Journal**, 2003.
- DIAS, Eder Regioli. Cônicas: atividades aplicáveis no ensino médio com auxílio de geometria dinâmica e dobraduras. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, 2014.
- GUIMARÃES, Alan de Araújo; BRITO JÚNIOR, Adilson Tavares de;
SILVA JÚNIOR, Vandecir Freire da. Sobre semelhança entre gráficos de funções polinomiais de grau 3. **Submetido**, 2025.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de Física, volume 1: Mecânica. **Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi**, v. 10, 2008.
- _____. **Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. v. 4.
- LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão da escola: teoria e prática**. Petrolina, PE: Vozes, 2013.

- LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. [S.l.]: SBM, 2007.
- LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 1.
- MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Dez ou onze temas interessantes de matemática elementar**. [S.l.]: EDUFPG - Editora da Universidade Federal de Campina Grande, 2015.
- MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. São Paulo: Papirus, 2015.
- NASCIMENTO, Kaliny Ferreira do; CAVALCANTI, Anete Soares. Luz, cônicas, reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas. **PROFMAT**, 2020.
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. [S.l.]: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995.
- ROLIM, Amanda Alencar Machado; GUERRA, Siena Sales Freitas; TASSIGNY, Mônica Mota. Uma leitura de Vygotsky sobre o brincar na aprendizagem e no desenvolvimento infantil. **Revista Humanidades**, v. 23, n. 2, p. 176–180, 2008.
- SANTOS-WAGNER, Vânia Maria. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim Gepem**, n. 53, 2008.
- SOUSA, Giselle Costa de; COSTA, Allyson Emanuel Januário da. Investigando a conjunção entre história da matemática e tecnologias de informação e comunicação. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 4, n. 11, p. 6–21, 2017.
- TERUEL, Pedro Jesús. **Hipatia: poder, ciencia y filosofía en el crepúsculo del mundo clásico**. [S.l.]: RBA Libros y Publicaciones, 2024.
- WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2000.
- ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. [S.l.]: Penso Editora, 2015.