



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E GEOMETRIA DAS PROVAS
DO ENEM COM O GEOGEBRA**

Adriano de Andrade Costa

ORIENTADORA:
Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Natal - RN 2025

**PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E GEOMETRIA DAS PROVAS DO
ENEM COM O GEOGEBRA**

Adriano de Andrade Costa

Natal - RN 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Costa, Adriano de Andrade.

Pontos notáveis de um triângulo e geometria das provas do ENEM com o geogebra / Adriano de Andrade Costa. - 2025.

73 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Natal, 2025.

Orientação: Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes.

1. Pontos notáveis - Dissertação. 2. Geometria nas provas do ENEM - Dissertação. 3. Tecnologia no ensino - Dissertação. I. Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 514

Elaborado por Jackeline dos Santos Pinheiro da Silva Maia
Cavalcanti - CRB-15/317

Adriano de Andrade Costa

**PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E GEOMETRIA DAS PROVAS DO
ENEM COM O GEOGEBRA**

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em 13 de junho de 2025.

Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes – UFRN
(Orientadora / Presidente)

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes – UFRN
(Examinador Interno)

Prof. Dra. Maria da Conceição Alves Bezerra – UFPB / POTIS
(Examinadora Externa)

AGRADECIMENTOS

A minha família pelo entendimento e apoio que deram nessa formação, entendendo a distância e a ausência em muitos momentos deste mestrado.

Aos meus pais Sandoval de Oliveira Costa e Maria de Fátima de Andrade Costa, que sempre me acompanharam, me incentivaram e vibraram com minhas vitórias em todas as etapas da minha vida.

À minha orientadora Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes pela orientação e ajuda nesta dissertação.

Aos meus professores do mestrado, pelas orientações, exemplos e incentivos que foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e pessoal.

A minha turma pela dedicação e ajuda durante o pagamento das disciplinas.

Resumo

O foco principal deste trabalho é investigar a construção e a análise dos pontos notáveis de um triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro), explorando-os com o auxílio do *GeoGebra Classic* para tornar o aprendizado mais intuitivo. Além disso, busca-se resolver questões do Exame Nacional do Ensino Médio (*Enem*) utilizando o *software*, com o objetivo de facilitar a compreensão dos problemas sem recorrer a cálculos complexos, por meio de uma abordagem visual. O estudo também discute a relevância do uso de tecnologias digitais na educação básica, conforme previsto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e ressalta o papel do professor na integração dessas ferramentas ao processo de ensino-aprendizagem. O *GeoGebra* apresenta-se como um recurso valioso para explorar conceitos matemáticos como congruência, semelhança e propriedades dos triângulos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e acessível aos alunos. O objetivo geral é investigar como a tecnologia pode contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, promovendo um aprendizado mais dinâmico, visual e atrativo no ensino da matemática.

Palavra chave: Pontos notáveis, Geometria nas provas do ENEM, Tecnologia no ensino, Ensino médio.

Abstract

This study focuses on the construction and analysis of the notable points of a triangle—centroid, incenter, circumcenter, and orthocenter—using GeoGebra Classic as a tool to enhance intuitive learning. Additionally, it explores the resolution of questions from the Brazilian National High School Exam (Enem) through the software, aiming to improve problem comprehension via visual approaches rather than complex calculations. The research also discusses the importance of integrating digital technologies into basic education, as outlined in the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC), and emphasizes the teacher's role in incorporating these tools into the teaching and learning process. GeoGebra is presented as a valuable resource for exploring mathematical concepts such as congruence, similarity, and triangle properties, promoting more meaningful and accessible learning. The overarching goal is to investigate how technology can enhance the understanding of mathematical concepts, fostering a more dynamic, visual, and engaging approach to mathematics education.

Keywords: Notable points; Geometry in the ENEM exam; Educational technology; High school.

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	09
2. O USO DAS TECNOLOGIAS NA ESCOLA.....	12
2.1 Uso do computador na educação básica.....	12
2.2 A apresentação do <i>Geogebra</i>	14
3. TRIÂNGULOS.....	20
3.1 Um pouco da História da geometria.....	20
3.2 Conteúdos sobre triângulos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)...	22
3.2.1 Definição.....	23
3.3 Congruência de triângulos.....	24
3.3.1 Definição.....	25
3.3.2 Casos de congruência.....	25
3.3.2.1 (LLL) (Lado, lado, Lado).....	25
3.3.2.2 (LAL) (Lado, Ângulo, Lado).....	26
3.3.2.3 (ALA) (Ângulo, Lado, ângulo).....	27
3.3.2.4 (LAAo) (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto).....	27
3.4 Semelhança de triângulos.....	28
3.4.1 (AA) (Ângulo, Ângulo).....	28
3.4.2 (LLL) (Lado, lado, Lado).....	29
3.4.3 (LAL) (Lado, Ângulo, Lado).....	29
3.5 Pontos notáveis de um triângulo.....	30
3.5.1 Mediana.....	30
3.5.2 Baricentro.....	31
3.5.3 Bissetriz.....	32
3.5.4 Altura.....	33
3.5.5 Ortocentro.....	34
3.5.6 Mediatriz.....	37
3.5.7 Circuncentro.....	38
3.5.8 Propriedades.....	38

3.6 Pontos notáveis no triângulo retângulo.....	38
4. CONSTRUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO UTILIZANDO O GEOGEBRA.....	41
4.1 Baricentro.....	41
4.2 Incentro.....	46
4.3 Ortocentro.....	48
4.4 Construção do Circuncentro.....	51
5. RESOLVENDO AS QUESTÕES DO ENEM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA.....	54
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA.....	73

1. INTRODUÇÃO

A ideia nasceu quando percebi, nas minhas turmas da 1ª série do ensino médio da Escola Hipócrates Zona Sul, onde trabalho há 16 anos, a necessidade de introduzir algo diferente durante as aulas de Geometria, que fosse inovador e facilitasse o aprendizado dos alunos, despertando seu interesse. Quando se utiliza a tecnologia para auxiliar nos assuntos abordados, a grande maioria dos alunos tem mostrado mais interesse, o que contribui para o processo de aprendizagem.

Inicialmente, é necessário compreender a dinâmica das escolas em relação ao uso das tecnologias, identificar as dificuldades que o professor poderá encontrar para implementar as ideias deste trabalho e, logo em seguida, discutir o uso de computadores na educação básica. Nesse contexto, é importante ressaltar a *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* (Brasil, 2018), que normatiza o uso de tais tecnologias. Atualmente, o uso de *Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação (TDIC)* tem se tornado uma ferramenta valiosa no processo de ensino-aprendizagem.

Dentre todos os softwares disponíveis, foi escolhido o *GeoGebra Classic*, por ser uma ferramenta de fácil acesso e funcionamento interativo, com figuras que facilitam a compreensão da Geometria. Essa versão do software de matemática dinâmica *GeoGebra* integra diversas ferramentas em uma única plataforma, permitindo explorar múltiplas áreas da matemática de maneira interativa e visual. Neste trabalho, iremos explorar algumas de suas funcionalidades e mostrar como utilizar suas ferramentas para construir figuras geométricas e descobrir suas características.

Com o *GeoGebra*, é possível demonstrar propriedades de figuras geométricas, como triângulos, círculos e polígonos, de forma clara e interativa. Por exemplo, os alunos podem observar como o teorema de Pitágoras se aplica ao modificar os lados de um triângulo retângulo ou como a soma dos ângulos internos de um polígono se mantém constante, independentemente do formato da figura. Essas explorações visíveis tornam os conceitos mais acessíveis.

Outro recurso interessante é a possibilidade de criar atividades dinâmicas e interativas. O professor pode pedir aos alunos que movam pontos para modificar uma figura geométrica enquanto investigam relações entre lados, ângulos ou áreas.

Por exemplo, em uma aula sobre características geométricas, os alunos podem explorar visualmente as definições de tangentes, cordas e arcos, reforçando a teoria.

Para colocar em prática o que foi discutido anteriormente em um conteúdo matemático específico, é necessário primeiro compreender as definições de cada conceito. Assim, neste trabalho, também apresentaremos as definições necessárias para chegar às conclusões propostas.

Este trabalho foca na construção dos pontos notáveis utilizando o *GeoGebra Classic*, adotando uma abordagem visual e interativa que facilita o aprendizado de conteúdos relativos aos triângulos. O foco de estudo foi nos pontos notáveis de um triângulo: o baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro, que são essenciais para compreender propriedades fundamentais dos triângulos. Cada um desses pontos possui características únicas e pode ser construído a partir de operações geométricas específicas, como as medianas, as mediatrizes, as bissetrizes e as alturas.

O uso do *GeoGebra* para essa construção torna possível a visualização dinâmica, permitindo que os alunos vejam como esses pontos se comportam ao alterar os vértices do triângulo. Com essa ferramenta, o processo de aprendizado torna-se mais intuitivo, proporcionando uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas envolvidas. A proposta deste trabalho foi utilizar o *GeoGebra Classic* para abordar as questões propostas pelo *Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)* sem a necessidade de equações e cálculos complexos, mostrando os resultados de maneira mais rápida e utilizando apenas as construções de figuras. Com isso, o aluno consegue visualizar claramente as questões e atribuir sentido aos cálculos exigidos.

O *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)* é uma avaliação aplicada anualmente pelo *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP)* com o objetivo de medir o desempenho acadêmico dos estudantes ao final da educação básica. Criado em 1998, o exame passou a ser utilizado como forma de acesso às universidades públicas e privadas do país. Esse foi o principal motivo da escolha das questões, pois sou professor do Ensino Médio e acredito que isso pode motivar os alunos a se interessarem mais pelo conteúdo.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo geral investigar a construção e a análise dos pontos notáveis de um triângulo (baricentro, incentro,

circuncentro e ortocentro), utilizando o GeoGebra Classic como ferramenta de apoio na resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), com o intuito de promover um ensino de Matemática mais dinâmico, visual e atrativo.

Para alcançar esse objetivo, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar um pouco da história sobre os triângulos, destacando casos de congruência, semelhança e seus pontos notáveis.
- Construir triângulos evidenciando os pontos notáveis: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro, utilizando o GeoGebra Classic.
- Resolver questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) relacionadas à temática, com o auxílio do GeoGebra Classic.

A dissertação aborda o uso do *GeoGebra* como ferramenta interativa no ensino da matemática, com foco na resolução de algumas questões do *ENEM*. Inicialmente, discute-se a inserção das tecnologias digitais na educação básica, destacando o impacto do uso de computadores no aprendizado e os desafios enfrentados pelos professores. Em seguida, é apresentado o *GeoGebra*, suas funcionalidades e aplicações no ensino, enfatizando seu potencial pedagógico. A fundamentação teórica explora um pouco da história da geometria e os conteúdos sobre triângulos previstos na *BNCC*, abordando conceitos como classificação dos triângulos, critérios de congruência e de semelhança. Além disso, são estudados os pontos notáveis de um triângulo, incluindo mediana, bissetriz interna, altura e mediatriz, bem como as características do ortocentro nos triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos. Posteriormente, é demonstrada a construção desses pontos notáveis utilizando o *GeoGebra*, explorando o baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro. Por fim, é apresentada a aplicação prática do software na resolução de questões do *ENEM*, mostrando como esse software pode auxiliar na visualização e compreensão dos problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível.

As questões do *ENEM* podem ser encontradas em diversas fontes oficiais e não oficiais. Em particular, o *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)* disponibiliza todas as provas e gabaritos do *ENEM* desde 1998, que podem ser acessados pelo link: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>

2. O USO DE TECNOLOGIAS NAS ESCOLAS

A inserção das *Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação (TDIC)* na educação básica tem transformado a forma como os conteúdos são ensinados e assimilados pelos alunos. A *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* e a *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* reconhecem a importância dessas ferramentas no processo de ensino-aprendizagem, tornando essencial sua integração ao ambiente escolar. O uso de *softwares* educativos, como o *GeoGebra*, possibilita a construção de um ensino mais dinâmico e interativo, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de maneira visual e prática.

Neste capítulo, será abordado o papel do computador na educação básica, destacando os desafios e os benefícios do uso da tecnologia no ensino, bem como, a relevância do *GeoGebra* como ferramenta para a compreensão e a resolução de problemas matemáticos.

2.1 Uso do computador na educação básica

Podemos aliar as tecnologias para auxiliar na aprendizagem de diversos conteúdos da matemática, ajudando o aluno a interpretar e visualizar soluções de forma clara e lúdica, tornando os assuntos mais interessantes. O *software Geogebra* pode ser utilizado como recurso tecnológico para interpretação gráfica de muitos problemas matemáticos, facilitando ao aluno compreender de forma mais fácil os desafios de Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade apresentados em sala de aula.

Atualmente, o uso das *Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação (TDIC)* está cada vez mais presente nas escolas. Não é apenas papel do professor conhecer e utilizar tais tecnologias; é fundamental que os alunos também tenham acesso a elas, a fim de tornar a aprendizagem mais rápida, ampliar sua visão de mundo e aumentar o interesse pelos conteúdos apresentados. “As tecnologias existentes em cada época, disponíveis para utilização por determinado grupo social, transformaram radicalmente as suas formas de organização social, a comunicação, a cultura e a própria aprendizagem” (Kenski, 2003, p. 48).

A utilização de computadores nas escolas não é recente, mas teve um grande crescimento com o avanço do acesso à *internet* nas últimas décadas, o que permitiu a ampliação dessa prática. Segundo Moran (2013), a presença das tecnologias digitais nas escolas “é essencial para uma educação que visa não apenas o conteúdo, mas também o desenvolvimento de habilidades e competências do século XXI, como a resolução de problemas, a colaboração e o pensamento crítico”.

Esses avanços tecnológicos melhoraram significativamente a forma como os conteúdos são abordados, cabendo ao professor integrar as tecnologias à sua metodologia de ensino.

grande parte das escolas já dispõem de algumas tecnologias como projetor multimídia, microcomputadores, internet, TVs, entre outros recursos. Entretanto, não basta que o professor tenha tais tecnologias disponíveis se não tem conhecimento ou se sente inseguro para o uso destas ferramentas. Ao professor cabe buscar e aprender formas de integrar as novas tecnologias a sua metodologia de ensino. “As tecnologias sozinha não mudam a escola, mas trazem mil possibilidades de apoio ao professor e de interação com e entre os alunos” (NOGUEIRA apud MORAN et al., 2004, p.14).

No final do século XX, os programas governamentais de inclusão digital tiveram grande contribuição para a implantação das tecnologias nas escolas. Um exemplo foi o *Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo)*, criado pelo Ministério da Educação, que oferecia computadores e capacitação para professores da rede pública (Brasil, 2007). Essas medidas não apenas ampliam o acesso dos alunos às novas tecnologias, como também promovem debates sobre suas possíveis utilizações, estimulando reflexões críticas a respeito do papel dos computadores no processo de ensino-aprendizagem.

O uso de tecnologias aplicadas em sala de aula traz diversos benefícios, especialmente no que diz respeito à personalização da aprendizagem, às possibilidades de pesquisa e ao desenvolvimento da autonomia dos alunos. Segundo Silva (2015), “os recursos tecnológicos permitem que os alunos aprendam em seu próprio ritmo, com conteúdos adaptados às suas necessidades e interesses”. Essa abordagem é especialmente relevante no contexto atual, em que as turmas são bastante heterogêneas, permitindo que os estudantes compreendam determinados conteúdos de acordo com seu próprio nível de desenvolvimento. O computador também pode ser utilizado como uma ferramenta importante para estimular o senso crítico diante da informação, pois, por meio dele, é possível

pesquisar, interpretar e selecionar conteúdos e habilidades essenciais nos dias de hoje.

Outro aspecto importante sobre o tema é que o uso de computadores nas escolas públicas pode contribuir para a redução das disparidades de recursos entre diferentes instituições, promovendo um aprendizado mais uniforme diante das desigualdades sociais. De acordo com estudos do *Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA, 2018)*, essa prática torna o ensino mais democrático e acessível a todos os estudantes, independentemente de sua origem socioeconômica.

Entretanto, a implementação das tecnologias na educação básica ainda enfrenta diversos desafios. Um deles é a escassez de profissionais capacitados para utilizar essas ferramentas, resultado, em grande parte, da falta de formação continuada dos docentes da área, o que limita o potencial transformador que tais recursos podem oferecer. Outro ponto relevante é que muitas escolas não dispõem de infraestrutura adequada para oferecer suporte técnico e manutenção aos computadores, o que compromete o uso contínuo e eficaz da tecnologia no ambiente escolar.

Para que o uso de computadores na educação básica seja realmente eficaz, é necessário adotar estratégias pedagógicas que integrem a tecnologia de forma significativa ao processo de ensino-aprendizagem, promovendo não apenas o acesso aos recursos, mas também sua utilização consciente e contextualizada.

2.2 Apresentação do *geogebra*

O *GeoGebra* é um software gratuito criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, como parte de sua tese de doutorado na Universidade de Salzburgo. Ele foi desenvolvido com a intenção de ser uma alternativa acessível que oferecesse ferramentas adequadas para o ensino e a aprendizagem da matemática.

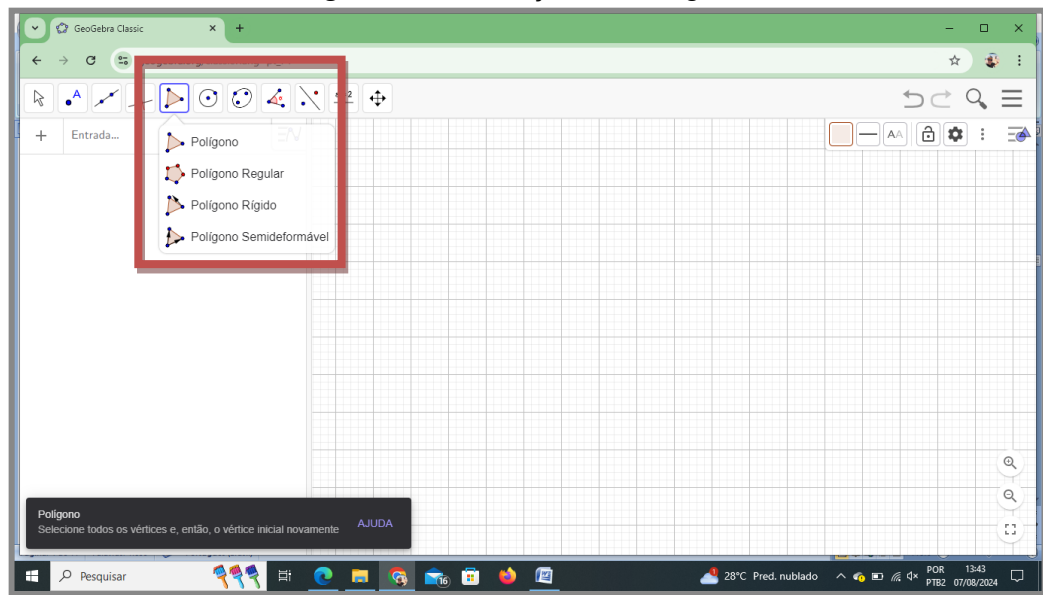
o *GeoGebra* é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Foi desenvolvido em 2002, pelo professor e pesquisador Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo, na Áustria, e foi objeto de sua tese de doutorado. Ele o criou com o objetivo de obter uma ferramenta adequada ao ensino de Matemática, combinando entes geométricos aos algébricos (daí vem o nome: *GeoGebra* = Geometria e Álgebra) (SEVERIANO, 2017).

Este *software* tem se mostrado uma ferramenta importante no estudo de geometria e álgebra, pois oferece recursos para a visualização de gráficos e figuras que facilitam a compreensão e interpretação dos desafios propostos pelas questões. A facilidade de uso do *GeoGebra* torna sua aplicação no Ensino Básico mais acessível, despertando o interesse dos alunos e contribuindo para a melhoria de seu rendimento. Desenvolvido com o objetivo de integrar a geometria e a álgebra, o *GeoGebra* oferece recursos para a representação gráfica, a manipulação e a análise de funções matemáticas. Uma das principais vantagens do *GeoGebra* é sua interface intuitiva e altamente interativa, que possibilita ao aluno explorar as propriedades e comportamentos das funções de maneira visual e dinâmica. Com essa ferramenta, os alunos podem não apenas criar gráficos de funções, mas também ajustar parâmetros em tempo real, traçar tangentes, calcular áreas sob curvas e muito mais (Barbosa, 2024).

Esses ajustes podem ser aplicados em diversas construções geométricas, permitindo que o aluno compreenda de forma mais eficaz as propriedades relativas aos pontos notáveis de um triângulo.

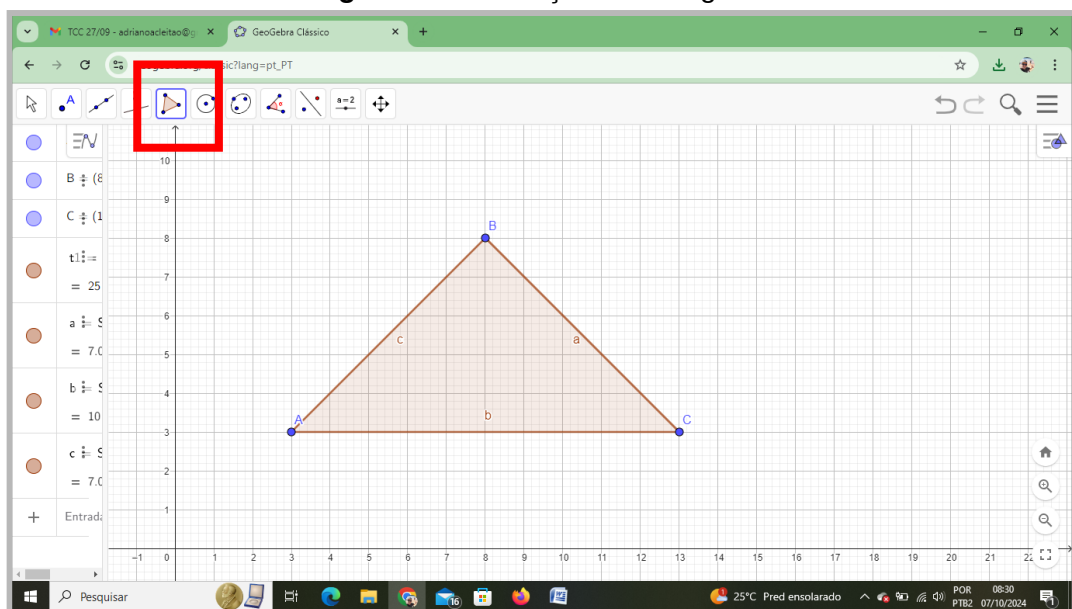
Ao acessar a versão online do *GeoGebra Classic*, a versão utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, deparamos com uma barra de ferramentas simplificada e de fácil manuseio. Nela, podemos explorar as partes mais importantes para a construção geométrica, proporcionando uma experiência funcional e eficiente na criação de figuras. A barra de ferramentas desempenha um papel fundamental no programa, facilitando o acesso rápido às principais funções e permitindo a criação e manipulação intuitiva de objetos geométricos e algébricos. Além de simplificar a inserção de equações e a realização de operações matemáticas, seu uso potencializa a eficiência e a produtividade do usuário, enriquecendo a experiência por meio de recursos personalizáveis e adaptáveis às necessidades específicas de cada pessoa (Barbosa, 2024).

Nosso trabalho explorou conceitos matemáticos como classificação, semelhança, congruência e pontos notáveis dos triângulos. Para a construção dos triângulos, utilizamos as seguintes ferramentas em destaque, conforme indicado na Figura 1.

Figura 1: Construção de triângulos

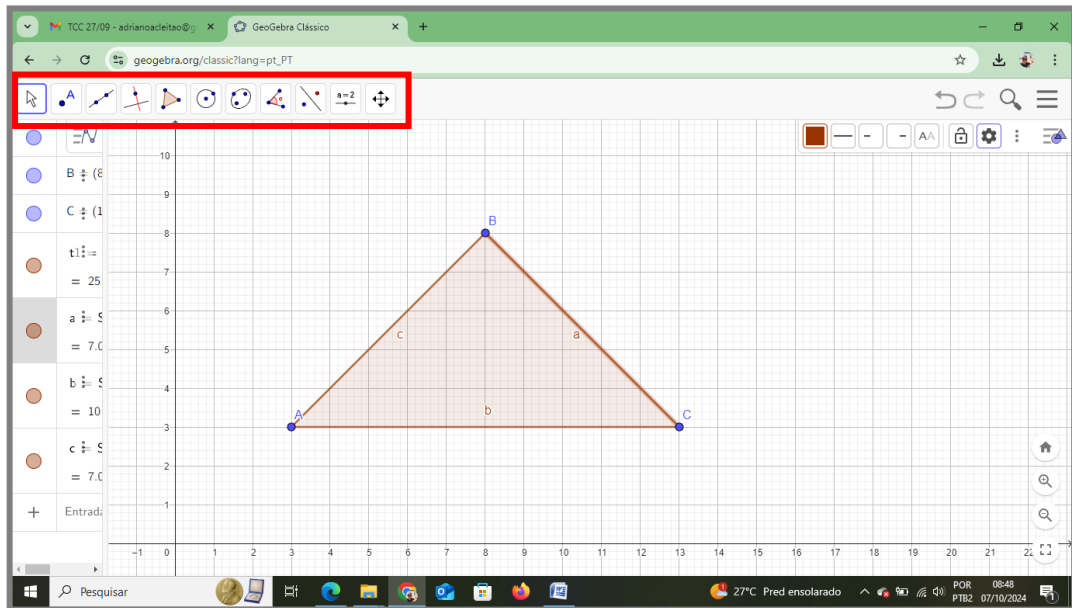
Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

O primeiro passo é clicar na aba que exibe a imagem de um triângulo. Ao clicar nessa aba, selecione a opção "Polígonos", conforme indicado pelo destaque em vermelho na Figura 2.

Figura 2: Construção de triângulos

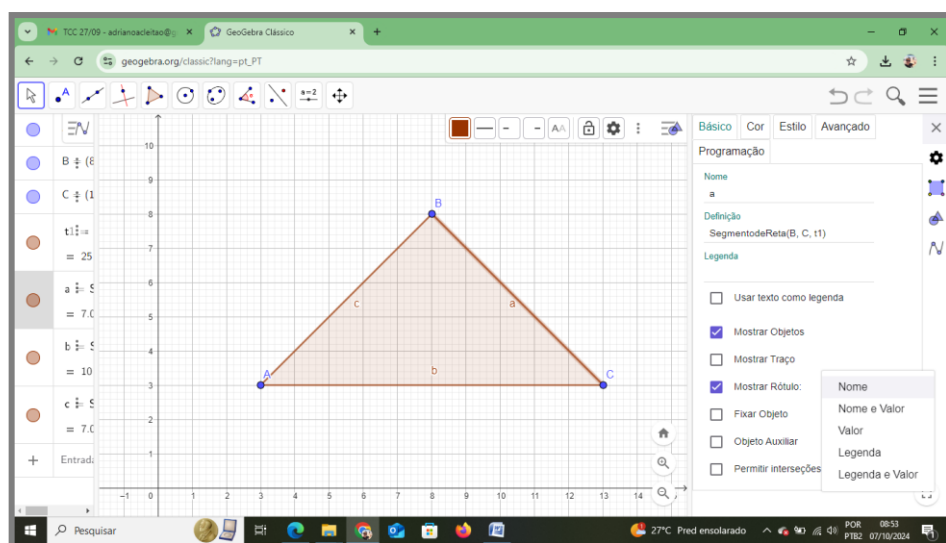
Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

O segundo passo é selecionar os vértices necessários. Além disso, é possível definir as características dos lados do triângulo, como numerá-los, atribuir nomes representativos e até escolher suas cores.

Figura 3: Construção de triângulos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

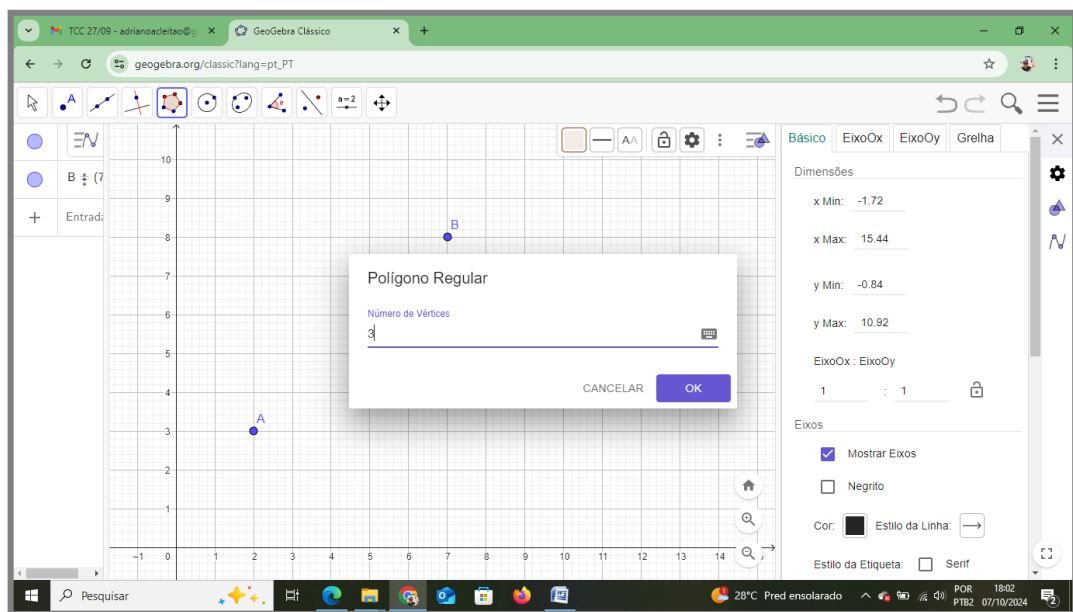
Com a seta selecionada na parte superior esquerda, clique sobre o lado que deseja modificar. Em seguida, na parte superior direita, selecione o ícone de "Configuração". Assim, aparecerão as opções que o software oferece. Algumas dessas funções estão destacadas em vermelho na Figura 3.

Figura 4: Construção de triângulos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

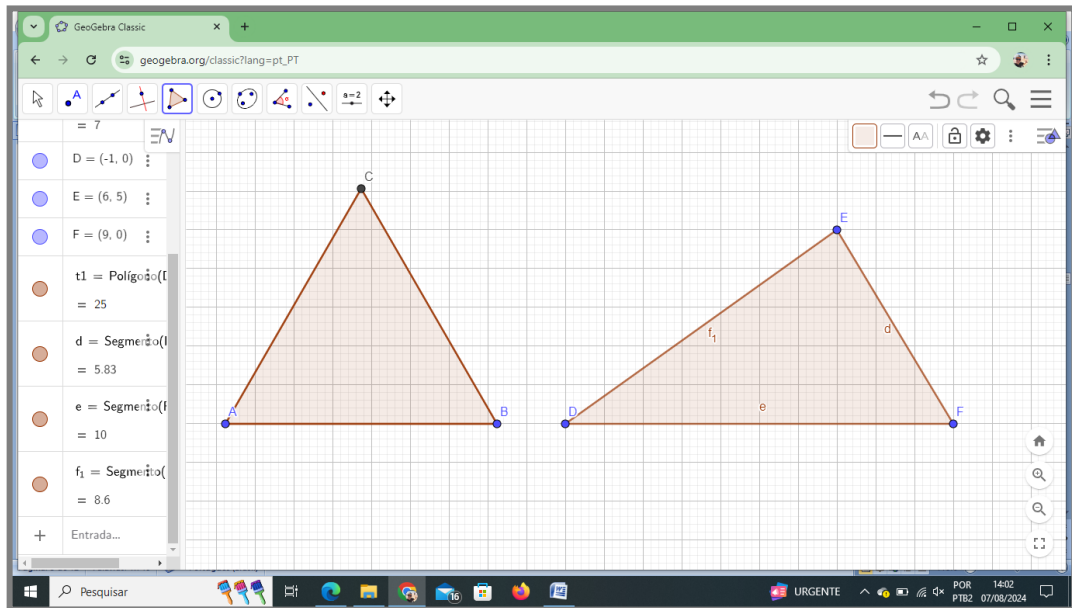
Nessa opção, podemos escolher o nome específico para o lado. Também é possível, em "Mostrar Rótulo", selecionar a opção "Valor" para exibir o comprimento do lado. Como o *GeoGebra* é altamente interativo, é fácil explorar as opções que o software oferece e descobrir novas funções. Uma delas é a construção de polígonos regulares, como, por exemplo, o triângulo equilátero. Para utilizar essa função, clique no ícone do triângulo, selecione "Polígonos Regulares" e escolha a quantidade de vértices da figura desejada, como mostrado na Figura 5.

Figura 5: Construção de triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Após selecionar dois vértices ira aparecer a opção de quantos vértices terá a figura procurada.

Figura 6: Construção de triângulos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Com o triângulo construído, é possível gerar seus principais elementos, como bissetrizes, medianas, alturas e mediatrizes. No capítulo 4, estudaremos como construir cada um desses elementos. Além disso, destacamos a importância dos casos de congruência e semelhança de triângulos, pois são conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Para iniciar essas construções utilizando o *GeoGebra*, é necessário compreender alguns conceitos iniciais sobre triângulos, pois, para este trabalho, é essencial saber aplicá-los, a fim de obter uma experiência visual mais detalhada. Faremos isso no próximo capítulo.

3. TRIÂNGULOS

Neste capítulo, faremos um breve relato sobre a história dos triângulos, que poderá servir como ponto de partida para a introdução dessa figura geométrica, com o objetivo de fornecer informações e despertar a motivação dos alunos. Além disso, abordaremos alguns conceitos relevantes sobre os triângulos, explicitando suas principais propriedades.

3.1. Pequeno relato de momentos históricos sobre triângulos

O triângulo é uma das formas geométricas mais antigas e fundamentais observadas e estudadas pela humanidade. De simplicidade estrutural, entretanto, com profundidade de suas propriedades e aplicações, vêm sendo exploradas desde as civilizações antigas até os dias atuais.

No Egito Antigo os triângulos desempenhavam um papel crucial na agrimensura e na construção. Os egípcios utilizavam cordas com nós para formar triângulos de lados 3, 4 e 5, garantindo ângulos retos em suas edificações. Essa técnica, embora prática, demonstra um conhecimento empírico das propriedades dos triângulos retângulos.

O teorema de Pitágoras, que estabelece a relação entre os lados de um triângulo retângulo, é atribuído ao matemático grego Pitágoras (c. 570–495 a.C.), embora evidências sugiram que babilônios e indianos já conhecessem essa relação anteriormente. Foi na Grécia Antiga que o teorema recebeu uma demonstração formal e se integrou ao corpo da matemática dedutiva.

Durante a Idade Média, a obra "De triangulis" (Sobre os Triângulos), escrita pelo matemático alemão Johann Müller, conhecido como Regiomontanus (1436–1476), destacou-se como o primeiro tratado sistemático de trigonometria na Europa Ocidental. Essa obra consolidou conhecimentos sobre as propriedades dos triângulos e suas aplicações em astronomia e navegação. Além disso, a obra abordava proporções dos lados e ângulos dos triângulos, além de métodos para calcular áreas e resolver problemas geométricos complexos. Sua abordagem rigorosa influenciou matemáticos posteriores e contribuiu para o avanço da geometria na Europa medieval.

No século XVI, Georg Joachim Rheticus (1514–1574), discípulo de Copérnico, publicou o "Canon doctrinae triangulorum" (1551), uma obra que consolidou as bases da trigonometria moderna. Rheticus introduziu funções trigonométricas e tabelas precisas, facilitando cálculos relacionados a triângulos e contribuindo para avanços na astronomia e navegação.

Hoje, o estudo dos triângulos é fundamental em diversas áreas, desde a engenharia civil até a computação gráfica. A compreensão de suas propriedades permite o desenvolvimento de tecnologias e soluções inovadoras, evidenciando a relevância contínua dessa figura geométrica ao longo da história.

Em suma, os triângulos têm sido objeto de estudo e fascínio desde as primeiras civilizações, desempenhando um papel central no desenvolvimento da matemática e das ciências aplicadas. Sua história reflete a evolução do pensamento humano e a busca incessante por compreender e aplicar as leis que regem o universo.

O estudo dos pontos notáveis de um triângulo revela a riqueza e a profundidade da geometria clássica. Desde as primeiras civilizações até os avanços matemáticos dos séculos XVIII e XIX, esses pontos têm sido centrais na compreensão das propriedades e relações intrínsecas dos triângulos, refletindo a beleza e a coerência da matemática ao longo da história.

Leonhard Euler, um dos matemáticos mais prolíficos da história, descobriu que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo estão alinhados em uma mesma reta, conhecida como Reta de Euler. Essa descoberta destaca uma relação profunda entre esses pontos notáveis e é uma das propriedades mais elegantes da geometria do triângulo (Silva, 2023). Os pontos notáveis de um triângulo têm diversas aplicações práticas e teóricas que marcaram a história da humanidade. Vilar (2025) destaca algumas aplicações:

1. Navegação e Cartografia:

- O **circuncentro** foi crucial para a navegação marítima, pois permite a determinação de posições e rotas por meio da triangulação, técnica amplamente usada desde a Era das Grandes Navegações.
- O método de triangulação, que utiliza propriedades dos triângulos e seus pontos notáveis, também foi essencial para a elaboração de mapas e a medição de grandes distâncias.

2. Astronomia:

- Na antiguidade, o **baricentro** foi utilizado para estudar o movimento de corpos celestes em sistemas gravitacionais, ajudando a modelar a interação entre planetas e estrelas.
- O estudo dos triângulos e seus pontos notáveis contribuiu para cálculos de posições estelares e medições de ângulos no céu.

3. Arquitetura e Engenharia:

- O **ortocentro** e o **baricentro** ajudaram engenheiros e arquitetos a projetar estruturas estáveis, distribuindo forças e pesos de maneira equilibrada.
- Na construção de pontes e cúpulas, os triângulos oferecem suporte estrutural, e a compreensão de seus pontos notáveis permitiu um cálculo mais preciso da distribuição de cargas.

4. Arte e Estética:

- O **incentro** tem sido usado em composições artísticas e no design, criando proporções harmônicas e balanceadas.
- Em artes visuais, os triângulos são usados para guiar o olhar do observador e criar composições simétricas e agradáveis.

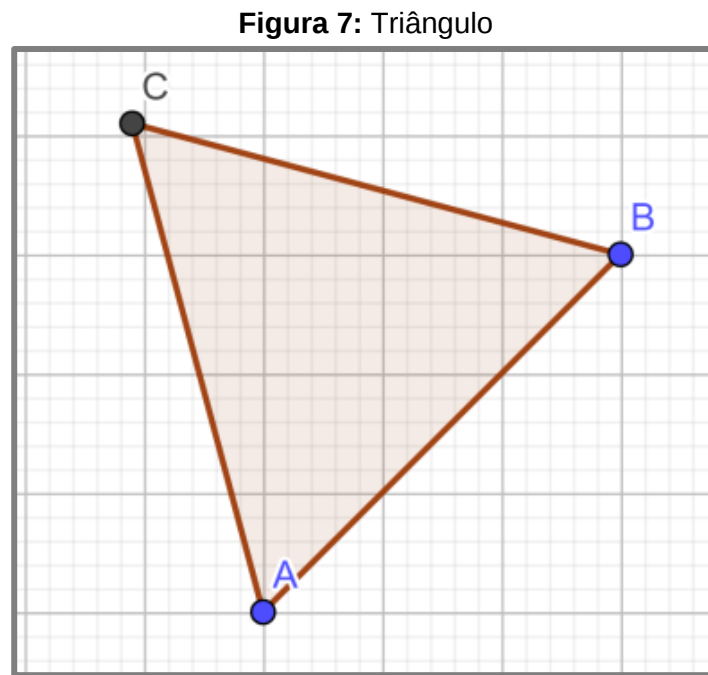
5. Tecnologia Moderna:

- Em computação gráfica e modelagem 3D, a análise dos triângulos e seus pontos notáveis otimiza a renderização de superfícies e a simulação de luz e sombras.
- Na robótica e em sistemas de visão computacional, a triangulação com base nesses pontos permite a determinação de distâncias e a reconstrução de ambientes em três dimensões.

3.2. Conceitos

Nesta seção, vamos abordar algumas definições básicas que serão de grande utilidade para a conclusão do nosso trabalho. Tais definições foram retiradas do livro didático, *Matemática: Ciência e Aplicações*, de Bonjorno (FTD, 2021). Todas as figuras deste capítulo foram construídas pelo autor utilizando o *GeoGebra Classic*. A seguir, apresentamos algumas definições sobre triângulos.

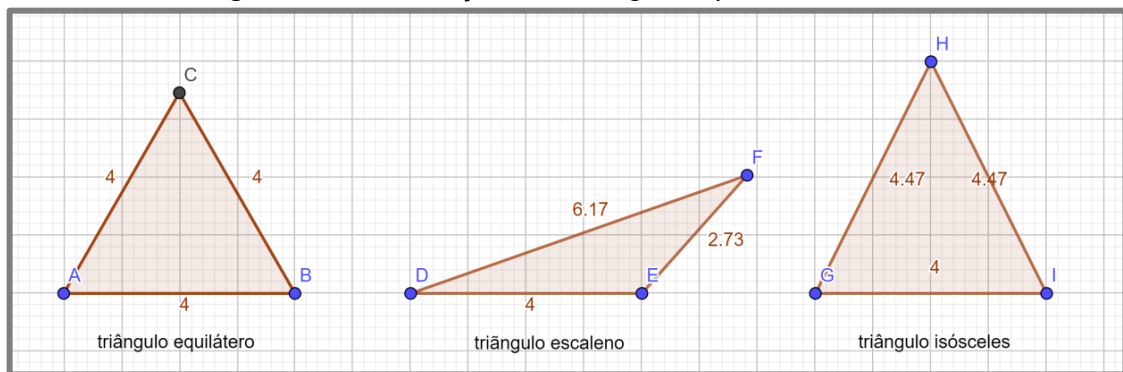
3.2.1 Definição: Dado três pontos não colineares A, B e C, unindo-se os segmentos AB, BC e CA, formamos um polígono de três lados que recebe o nome de triângulo (Figura 7). Os pontos A, B e C que formam o triângulo são chamados de vértices, e seus lados são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

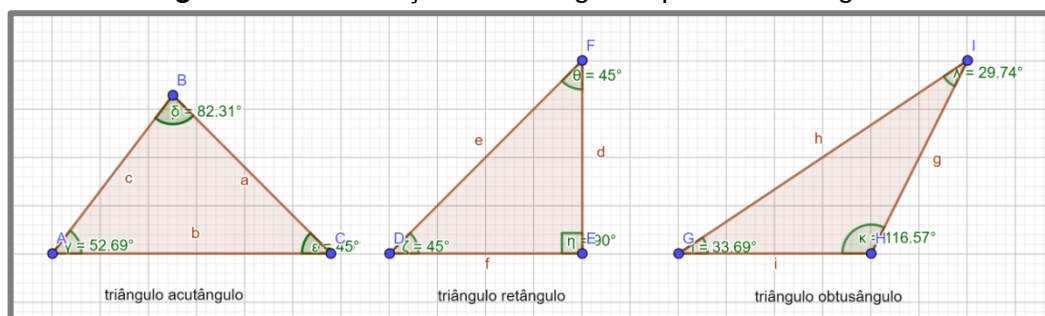
Os triângulos podem ser classificados tanto quanto aos lados quanto aos ângulos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado como equilátero, isósceles ou escaleno. O triângulo é equilátero quando apresenta todos os lados iguais; escaleno, quando todos os lados têm medidas diferentes; e isósceles, quando possui apenas dois lados iguais, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8: Classificação dos triângulos quanto aos lados

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Quanto aos ângulos, o triângulo pode ser classificado como acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Ele é retângulo quando possui um dos ângulos internos retos; obtusângulo, quando apresenta um ângulo obtuso; e acutângulo, quando todos os seus ângulos internos são agudos, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Com o intuito de simplificar e validar diversos raciocínios matemáticos, estudaremos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos.

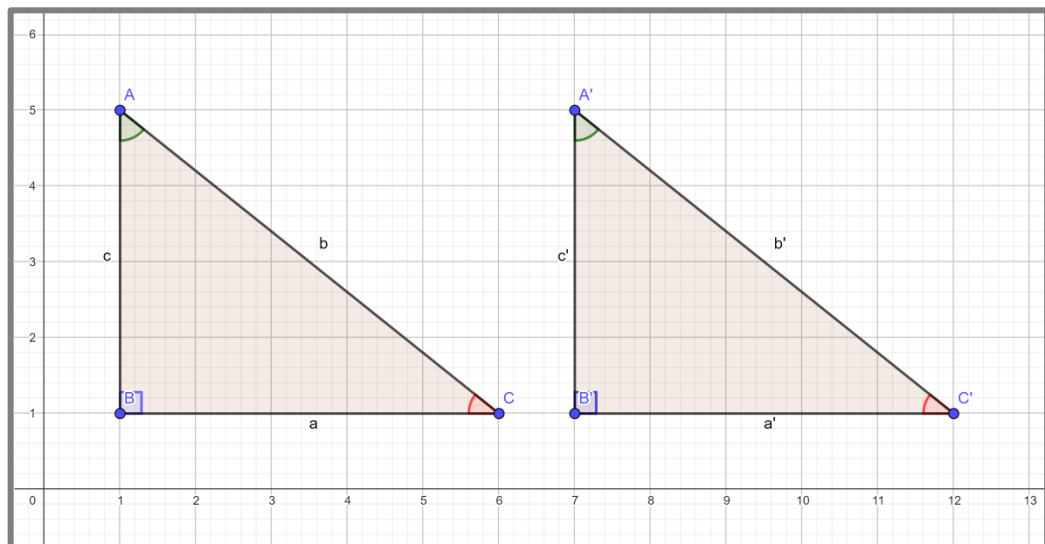
3.3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS:

Vejamos a definição de congruência e para uma melhor absorção do assunto proposto dividiremos em casos.

3.3.1 Definição Dois triângulos são congruentes quando tem os lados e os ângulos internos correspondentes congruentes.

Na figura 10, temos que os lados $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, quanto aos ângulos $A = A'$, $B = B'$ e $C = C'$, isso faz com que os triângulos abaixo sejam congruentes.

Figura 10: triângulos congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

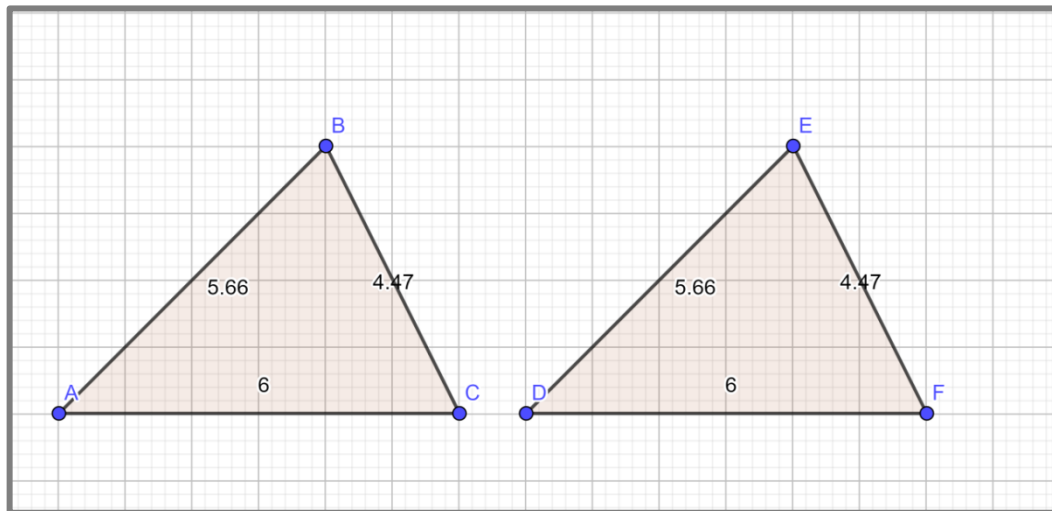
Existem alguns critérios mínimos que garantem que dois triângulos sejam congruentes e iremos dividi-los em casos:

3.3.2 CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.

3.3.2.1. (LLL) lado, lado, lado:

Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.

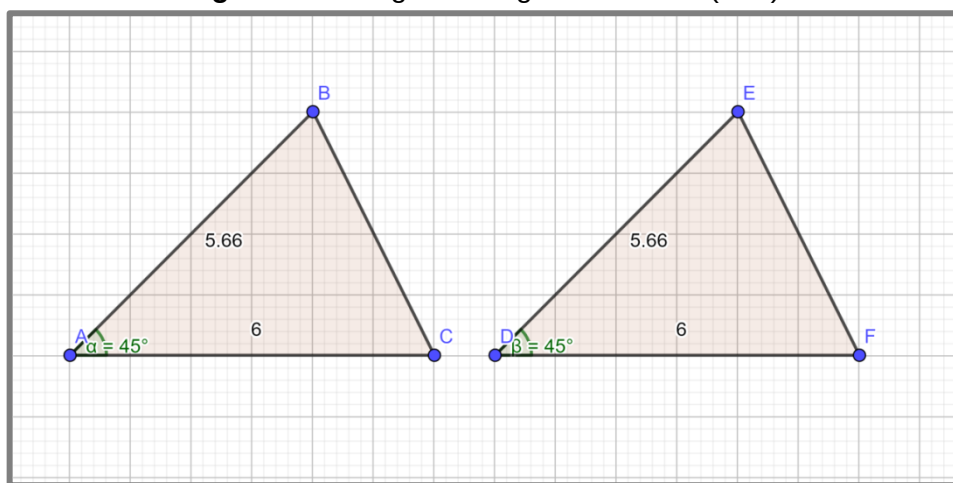
Perceba que os triângulos ABC e DEF da Figura 11 são congruentes, pois os lados $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$. Condição necessária para garantir congruência pelo caso LLL.

Figura 11: triângulos congruentes caso (LLL)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.3.2.2 (LAL) lado, ângulo, lado:

Dois triângulos são congruentes quando possui dois respectivos lados, e os ângulos entre eles congruentes. Notem, na Figura 12, que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, assim como os lados $\overline{AC} = \overline{DF}$ são congruentes, e que os ângulos entre essas retas também são congruentes. Pelo caso LLL, podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes.

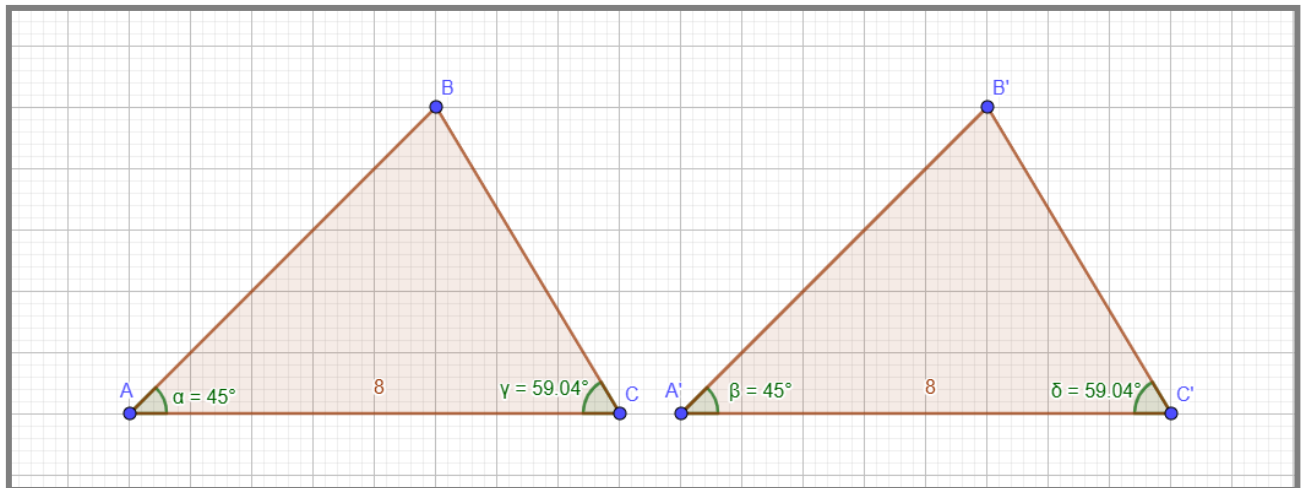
Figura 12: triângulos congruentes caso (LAL)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.3.2.3 (ALA): ângulo, lado, ângulo:

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos correspondente congruentes. Ora, observando a Figura 13, vemos que eles são congruentes pelo caso ALA, pois tem dois ângulos congruentes e o lado entre esses ângulos iguais.

Figura 13: Triângulos congruentes caso (ALA)

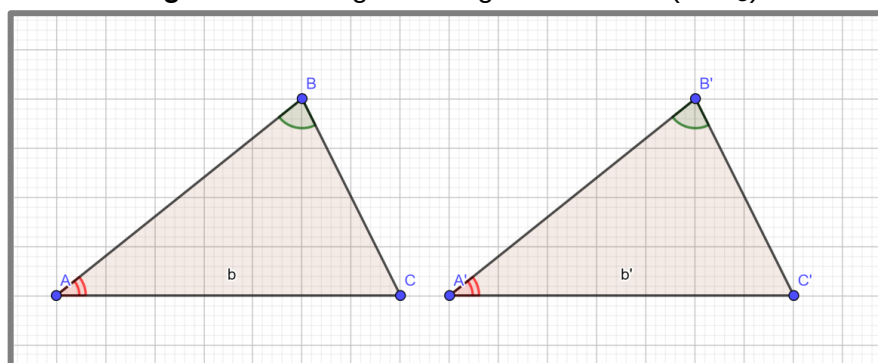


Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.3.2.4 (LAA₀): lado, ângulo, ângulo oposto:

Dois triângulos são congruentes quando possui um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado correspondente congruentes. Na figura 14, sendo $\hat{A} = \hat{A}'$, $b = b'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, temos um exemplo de congruência definido pelo caso LAA₀.

Figura 14: Triângulos congruentes caso (LAA₀)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.4. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO:

Estabelecida uma correspondência entre seus vértices, dois polígonos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados homólogos são proporcionais. No caso dos triângulos, podemos estabelecer alguns critérios que garanta que sejam semelhantes, dividindo-a em casos.

Se dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, então existe $k > 0$ tal que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

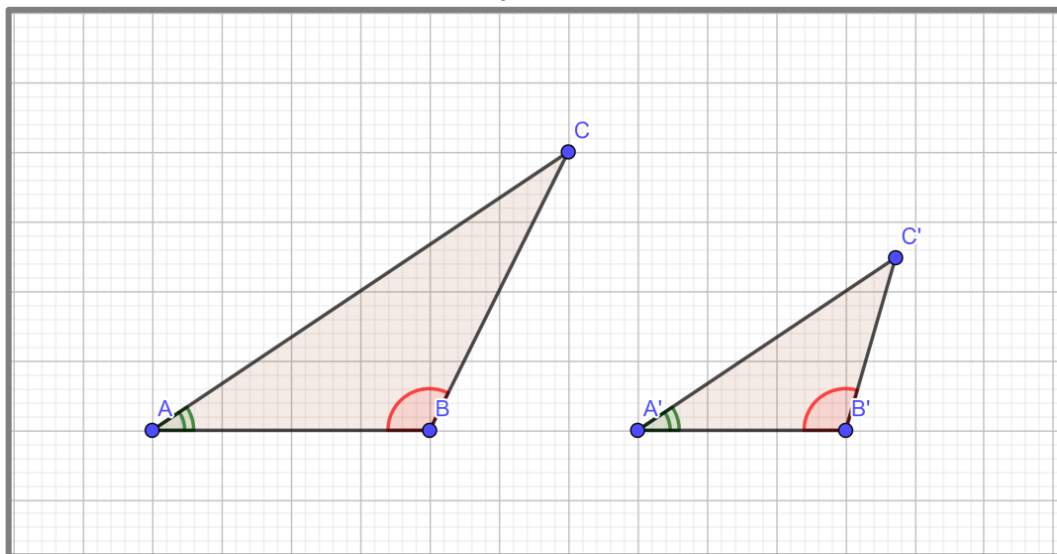
onde esse k é chamado de razão de semelhança.

No caso dos triângulos, podemos estabelecer alguns critérios que garanta que sejam semelhantes, dividindo-a em casos.

3.4.1. Caso (AA) ângulo, ângulo:

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes. Na Figura 15, temos que os ABC e A'B'C' são semelhantes pelo caso AA, pois temos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são iguais assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$.

Figura 15: semelhança de triângulos, caso (AA)

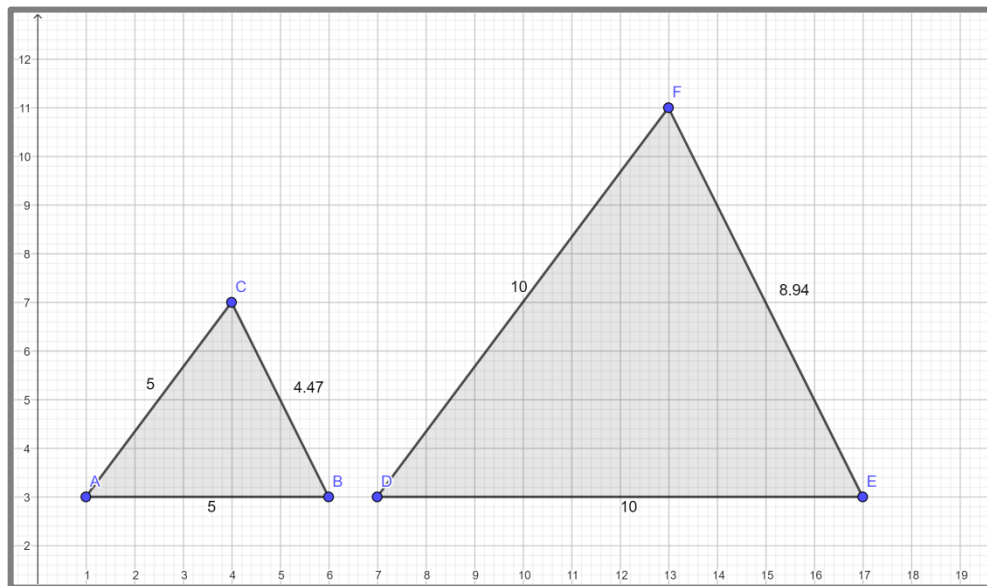


Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.4.2. Caso (LLL) lado, lado, lado:

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Figura 16: semelhança de triângulos, caso (LLL)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Perceba na Figura 16, que, $\overline{DF} = 2 \cdot \overline{AC}$, $DE = 2 \cdot \overline{AB}$ e $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{BC}$, logo os triângulos ABC e DEF são semelhantes e a razão de semelhança k é 2, pois

$$\frac{10}{5} = \frac{10}{5} = \frac{8,94}{4,47} = 2$$

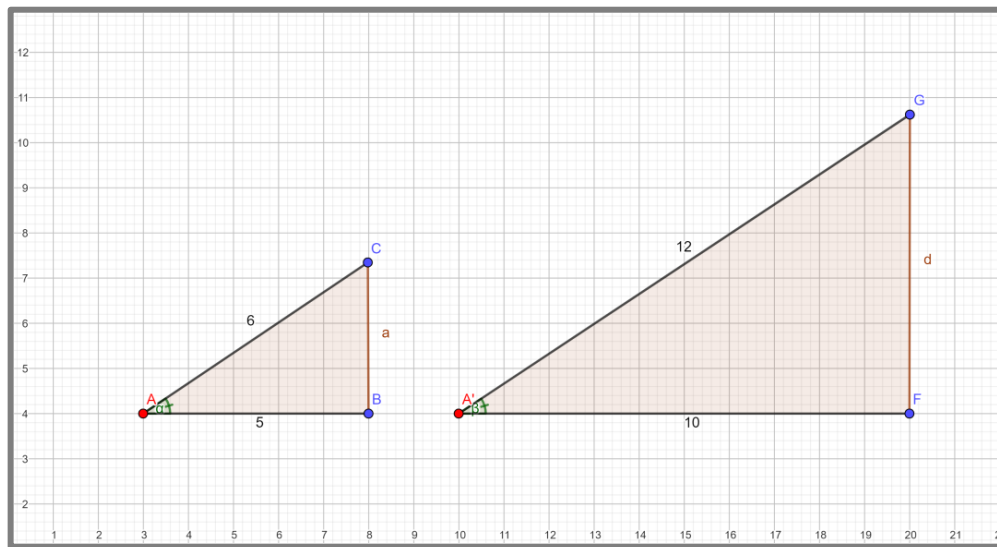
3.4.3 (LAL) lado, ângulo, lado:

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esse lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Observe nos triângulos da Figura 17, que

$$\frac{12}{6} = \frac{10}{5} = 2 \text{ e } A = A'$$

Figura 17: semelhança de triângulos, caso (LAL)

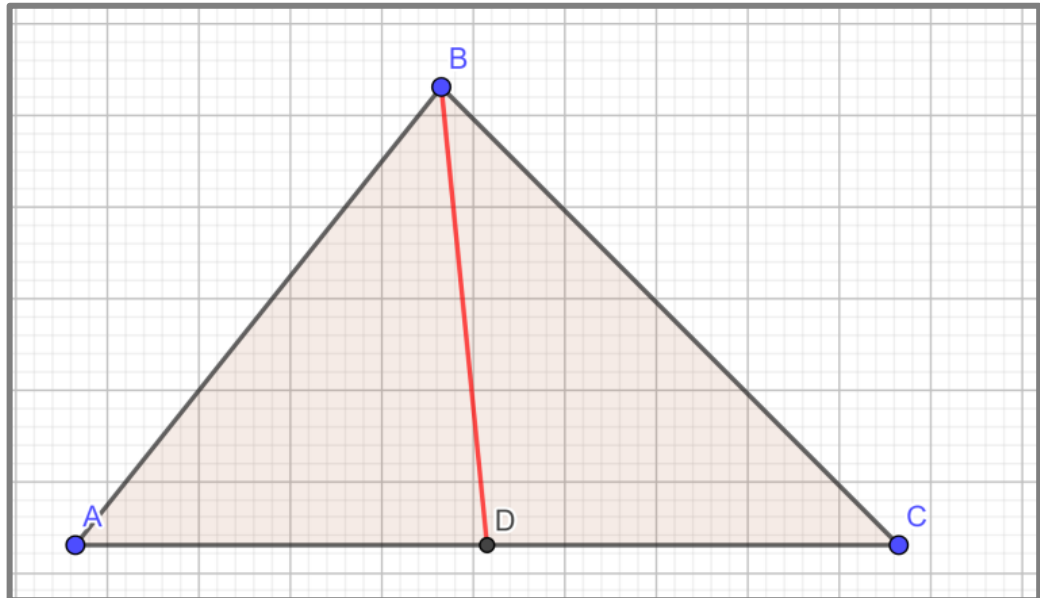


Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Agora, introduziremos os conceitos centrais do nosso trabalho, abordando a construção dos *pontos notáveis* de um triângulo e sua importância no estudo da geometria. Os *pontos notáveis*, (*baricentro*, *incentro*, *ortocentro* e *circuncentro*), possuem propriedades específicas que possibilitam uma análise mais profunda das relações entre os elementos de um triângulo. A compreensão desses pontos é essencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e para a resolução de problemas matemáticos.

3.5. PONTOS NOTÁVEIS EM UM TRIÂNGULO:

3.5.1. Definição O segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto é chamado de mediana.

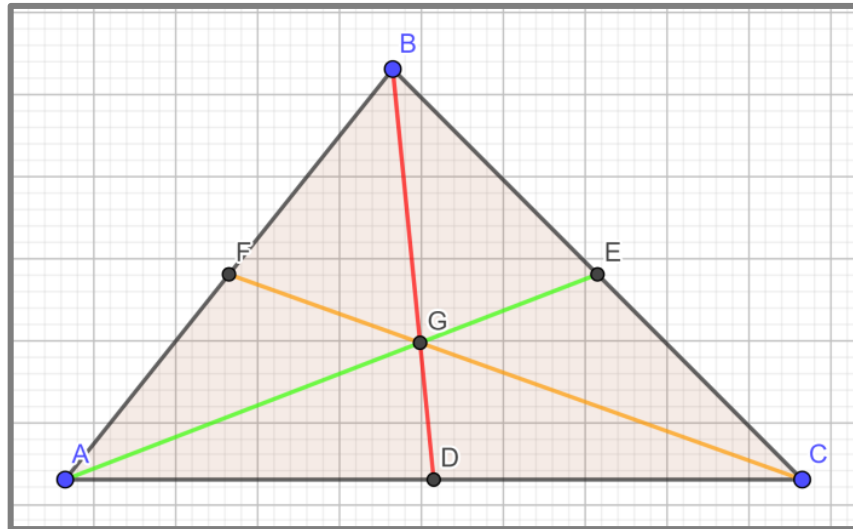
Figura 18: mediana

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Na figura 18, temos que D é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AC}$, logo o segmento $\overline{BD}$ é a mediana.

3.5.2 Definição O baricentro é o encontro das medianas do triângulo.

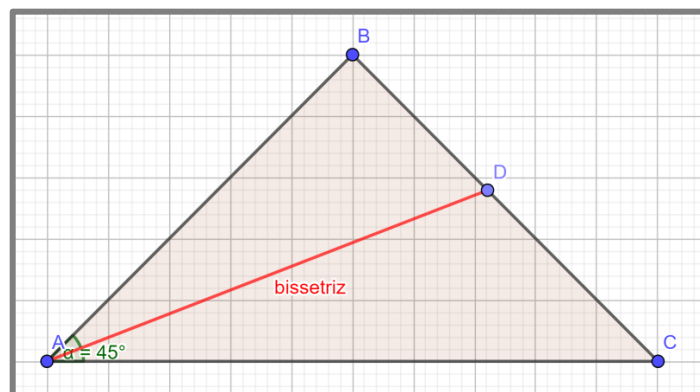
Também conhecido como centro de gravidade (ponto de equilíbrio do triângulo) do triângulo e é representado pela letra G. Sendo $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CF}$ as três medianas do triângulo acima, G é o baricentro do triângulo, como mostra a Figura 19.

Figura 19: baricentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Sobre o baricentro, é importante saber de algumas características muito utilizadas em algumas situações que apareceram nas questões. Na mediana BD , temos que $\overline{BM} = 2 \cdot \overline{DG}$, em $\overline{AE}$, temos que $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GE}$ e na mediana $\overline{CF}$, $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$. É importante saber que o baricentro é o centro de gravidade do triângulo, ponto de equilíbrio e divide o triângulo ABC em 6 triângulos de mesma área.

3.5.3 Definição Bissetriz interna de um triângulo relativa a um vértice como a semirreta que tem origem no dado vértice e divide o ângulo interno em dois ângulos de mesma medida.

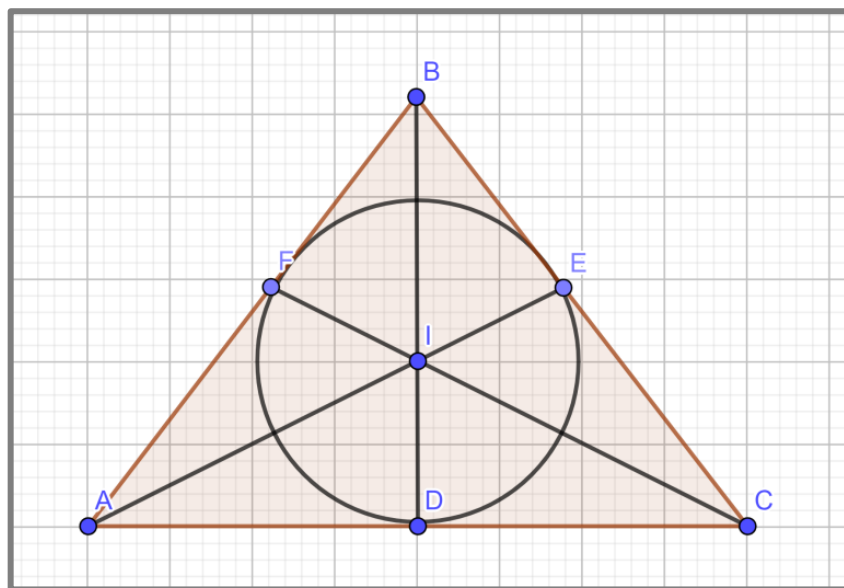
Figura 20: bissetriz

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Na Figura 20, como AD é bissetriz interna do triângulo, temos que os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ são congruentes. As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam no mesmo ponto, chamado incentro do triângulo.

Observe na Figura 21, que as bissetrizes AE, BD e CF se encontram no ponto I chamado de incentro do triângulo ABC, este ponto "I" é o centro do círculo inscrito a este triângulo.

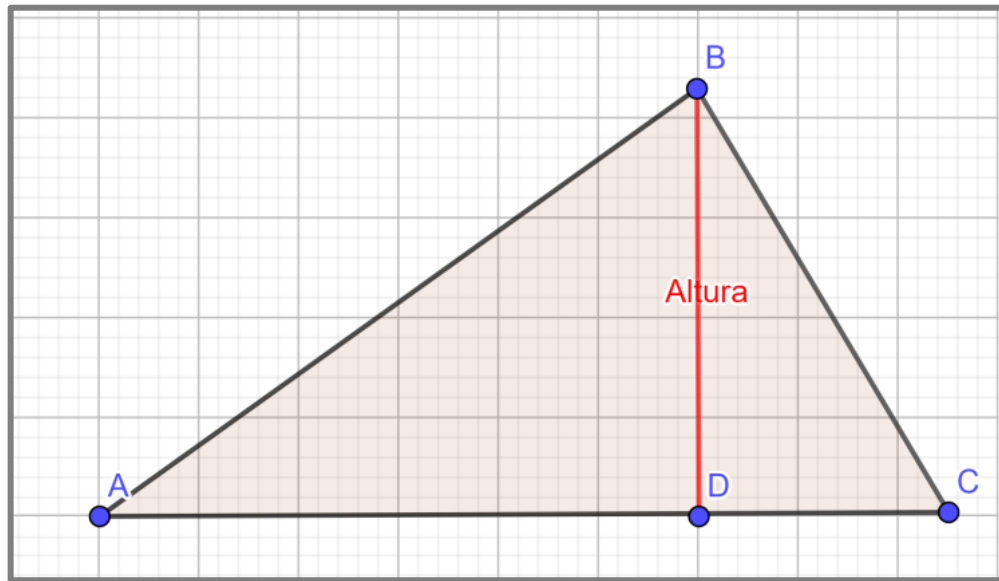
Figura 21: incentro



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.5.4. Definição Altura de um triângulo é o segmento de reta que tem início no vértice do triângulo e encontra o lado oposto sob um ângulo de 90° . O lado em que a altura encontra é chamado de base.

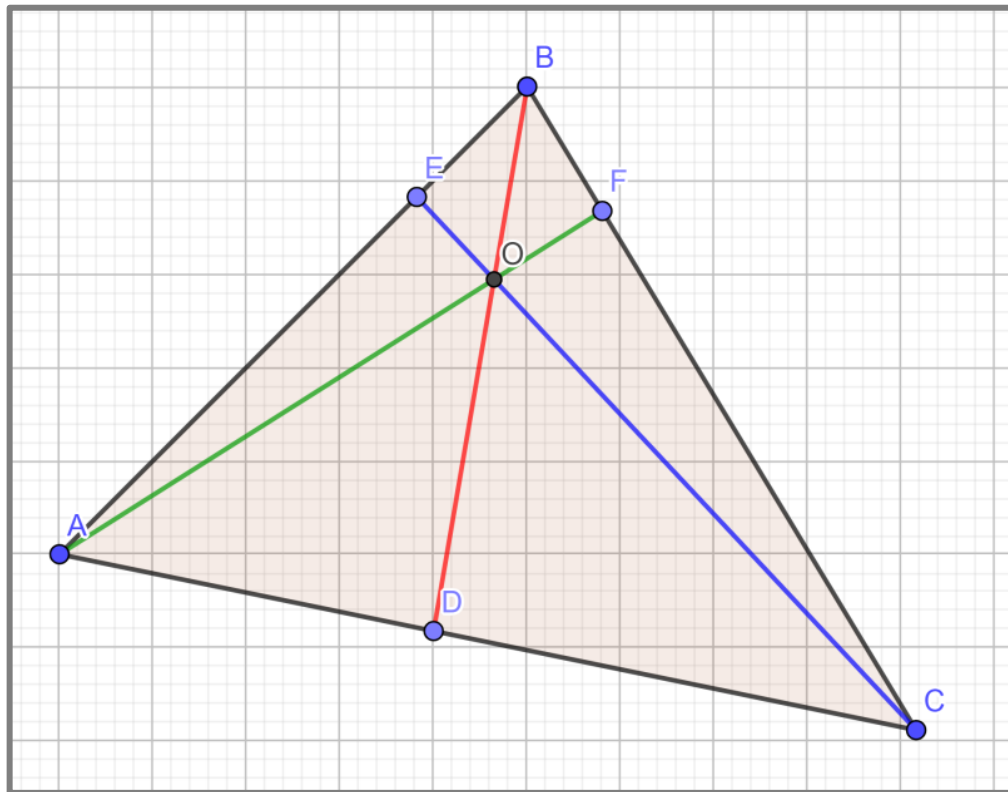
Veja a Figura 22, que construímos a altura em relação ao vértice B, assim o lado AC é chamado de base em relação ao vértice B.

Figura 22: altura

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

É importante lembrar um dos teoremas mais conhecidos da matemática. O teorema de Pitágoras é muito utilizado para encontrar a altura de triângulos. Esse teorema fala que a quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, onde a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90° e os outros dois lados são chamados de catetos.

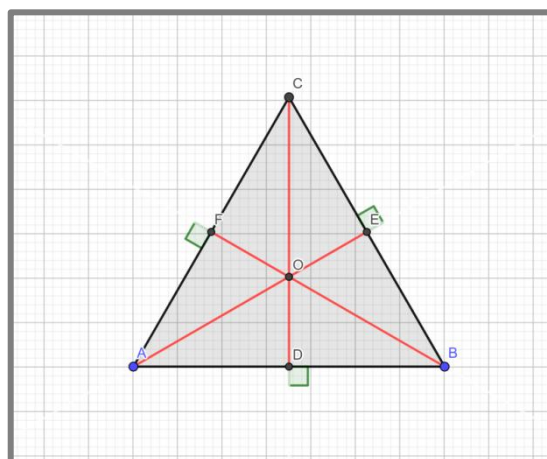
3.5.5 Definição O encontro das três alturas do triângulo é chamado de ortocentro. Observe na Figura 23 que, traçada as alturas AF, BD e CE, elas se encontram no ponto O que é o ortocentro do triângulo.

Figura 23:ortocentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

O ortocentro, pode se localizar no interior, sobre alguns dos lados, sobre algum dos vértices ou esta no exterior do triângulo. Essas mudanças acontece de acordo com suas classificações, vejamos alguns exemplos.

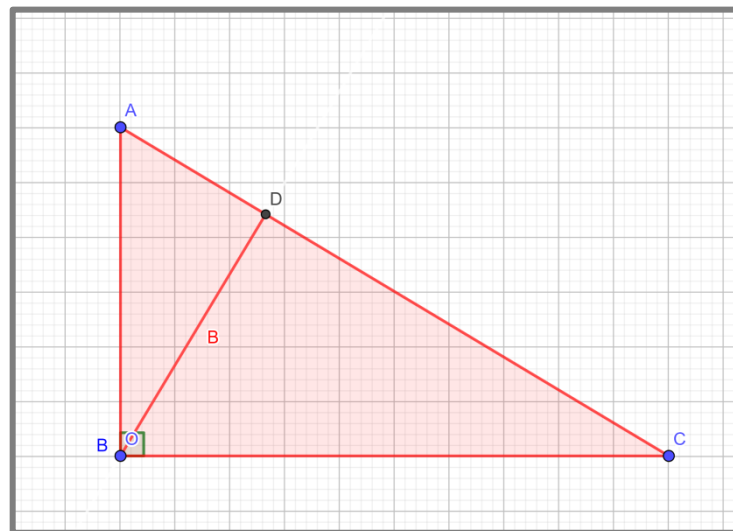
- No triângulo acutângulo, o ortocentro se encontra no interior do triângulo como mostrado na Figura 24

Figura 24: ortocentro no triângulo acutângulo

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

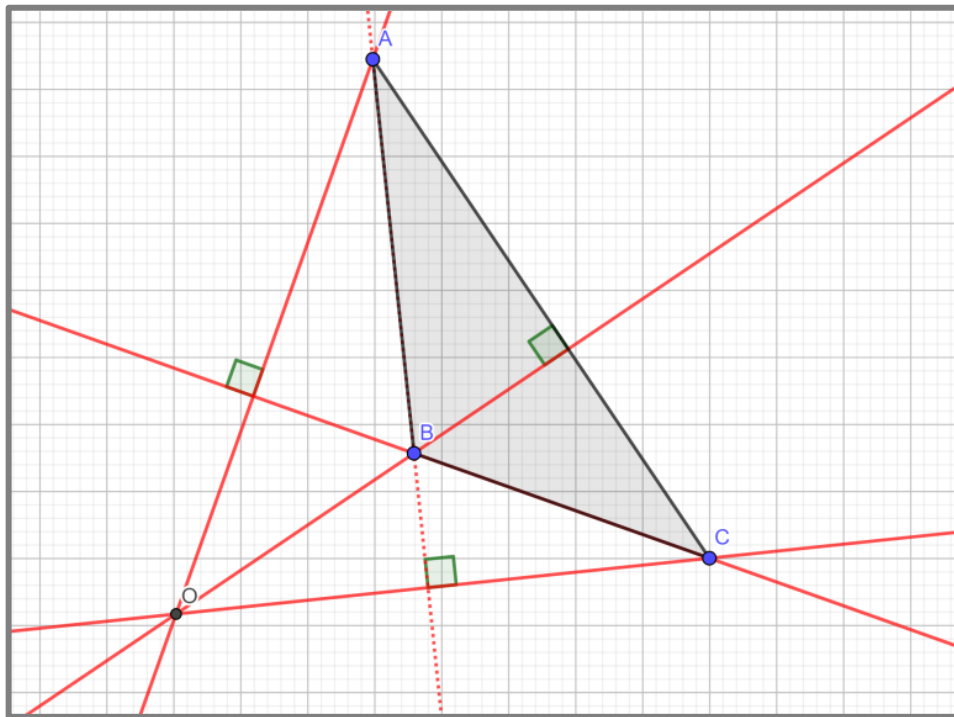
- No triângulo retângulo da Figura 25, o ortocentro do triângulo ABC retângulo em B, se encontra sobre o vértice, pois o lado AB é perpendicular ao lado BC, assim a projeção ortogonal do vértice A sobre a reta BC se dá no ponto B, da mesma forma, a projeção ortogonal do vértice C sobre a reta AB se dá no ponto B. Perceba também que a projeção do lado B sobre a reta AC parti de B, assim o ponto B é o ortocentro.

Figura 25: ortocentro no triângulo retângulo



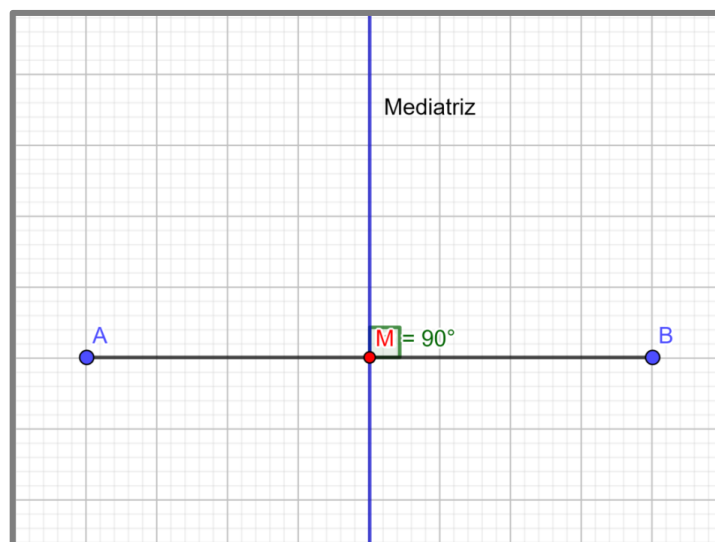
Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

- No triângulo obtusângulo, o ortocentro se encontra na parte fora do triângulo, conforme a Figura 26.

Figura 26: ortocentro no triângulo obtusângulo

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.5.6. Definição Dado dois pontos A e B no plano, definimos mediatriz do segmento AB como sendo a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio. Como mostra a Figura 27.

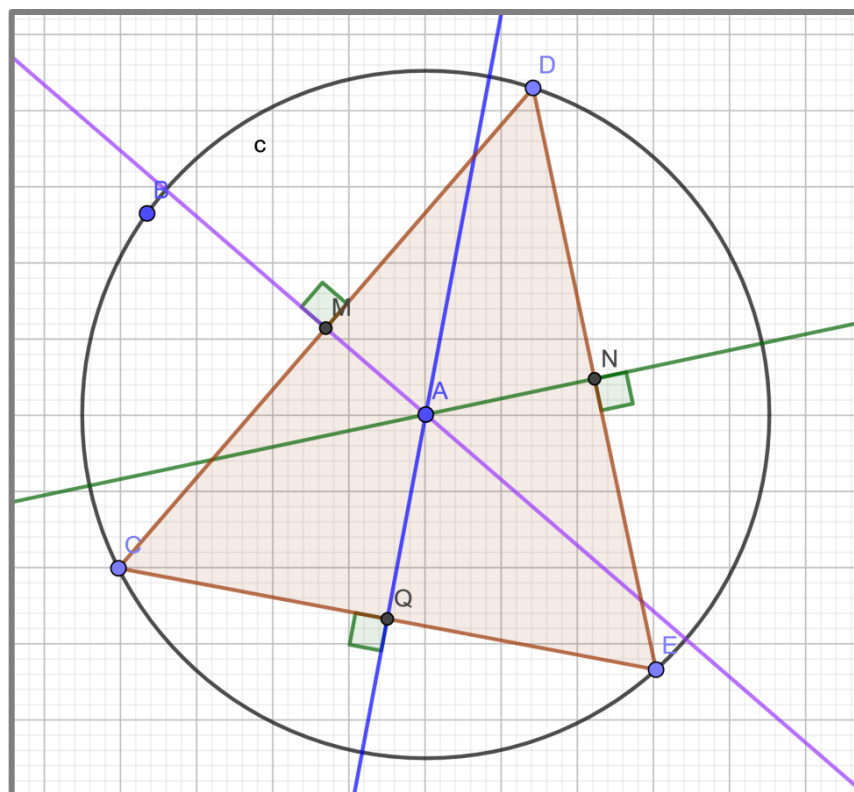
Figura 27: mediatriz

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.5.7. Definição Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o circuncentro do mesmo.

3.5.8. Propriedade O circuncentro é o centro do círculo circunscrito ao triângulo. Observe o exemplo mostrado pela Figura 28.

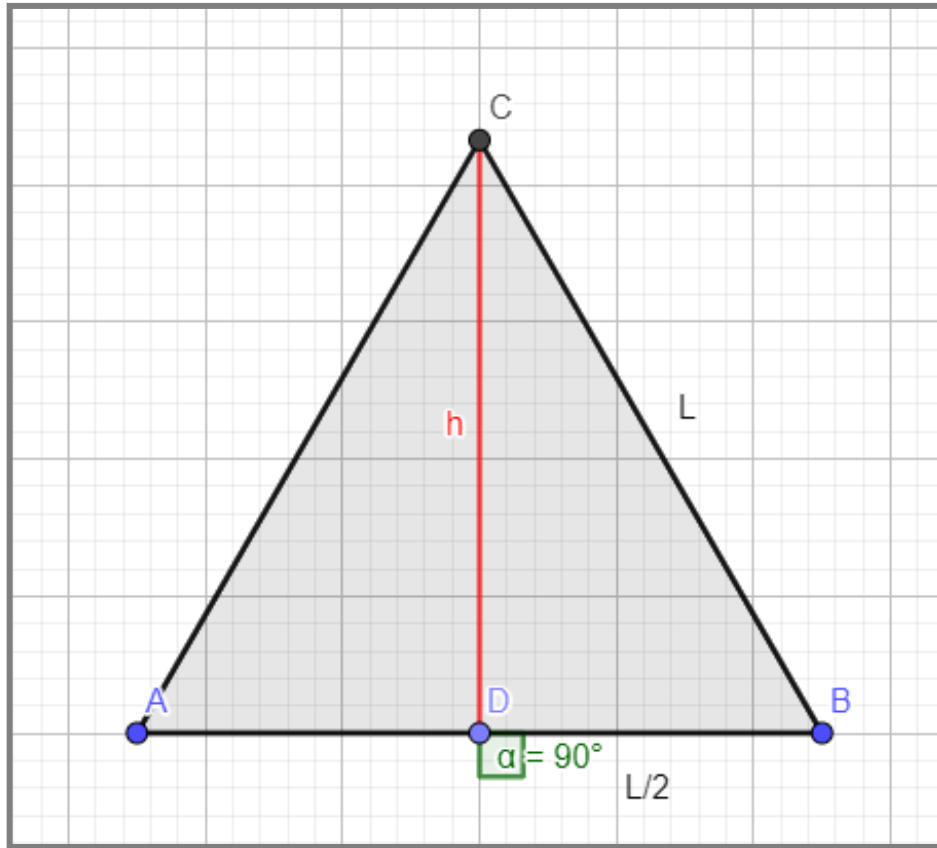
Figura 28: círculo circunscrito ao triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

3.6 PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO:

O triângulo equilátero é altamente simétrico, o que significa que suas alturas, medianas, mediatrizes e bissetrizes coincidem, e todos os pontos notáveis se encontram em um único ponto. Essa simetria resulta na igualdade das distâncias de qualquer ponto notável aos vértices do triângulo. Como a altura do triângulo equilátero parte de um vértice e incide no ponto médio do lado oposto, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para demonstrar sua altura h .

Figura 29: Altura do triângulo

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Dado um triângulo equilátero de lado L e altura h , como mostra a Figura 29, pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4}$$

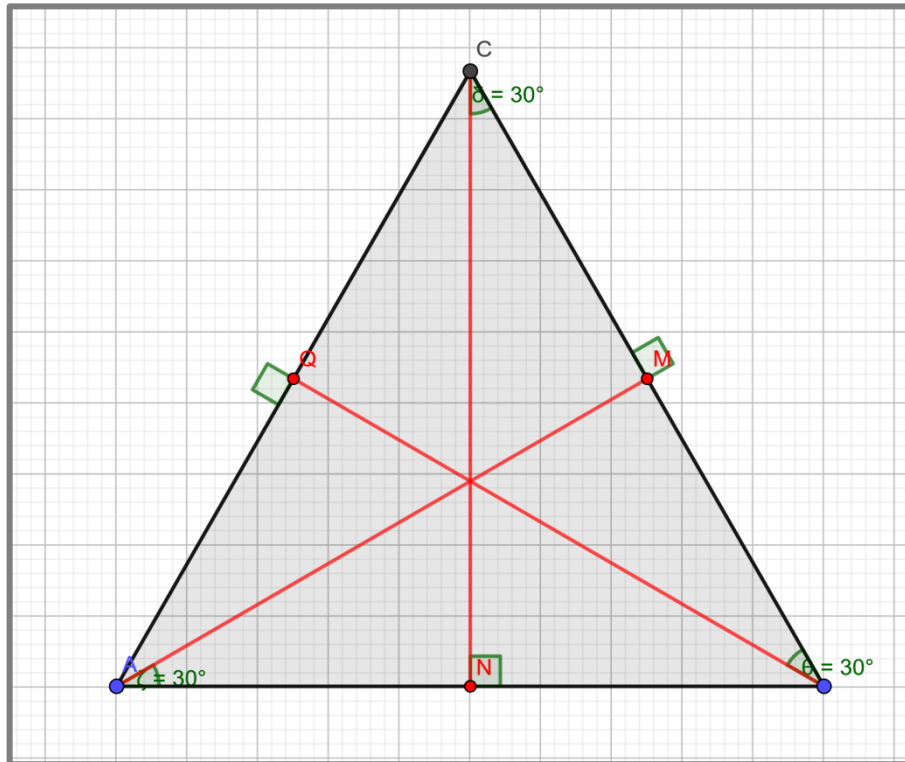
$$h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

As alturas, as medianas, as mediatrizes e as bissetrizes de um triângulo equilátero são segmentos coincidentes, convergindo para um único ponto central. Esse ponto é equidista de todos os vértices e também de todos os lados do triângulo,

representando um equilíbrio geométrico único. Por isso, no triângulo equilátero, o conceito de centro é unificado, tornando-o uma figura geométrica notável e perfeitamente simétrica. Veja a Figura 30.

Figura 30: pontos notáveis do triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

4. CONSTRUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO NO GEOGEBRA

Estudar os pontos Notáveis utilizando o *GeoGebra* é importante, pois permite que os alunos visualizem conceitos geométrico de forma interativa. A utilização desse *software* facilita a construção desses pontos e ajuda a entender as características particulares de cada um.

4.1 CONSTRUÇÃO DO BARICENTRO:

Como vimos anteriormente, o baricentro é o ponto de encontro das três medianas do triângulo, e que as medianas são segmentos de reta que ligam os vértices ao ponto médio do lado oposto, iremos mostrar essa construção dividindo em etapas.

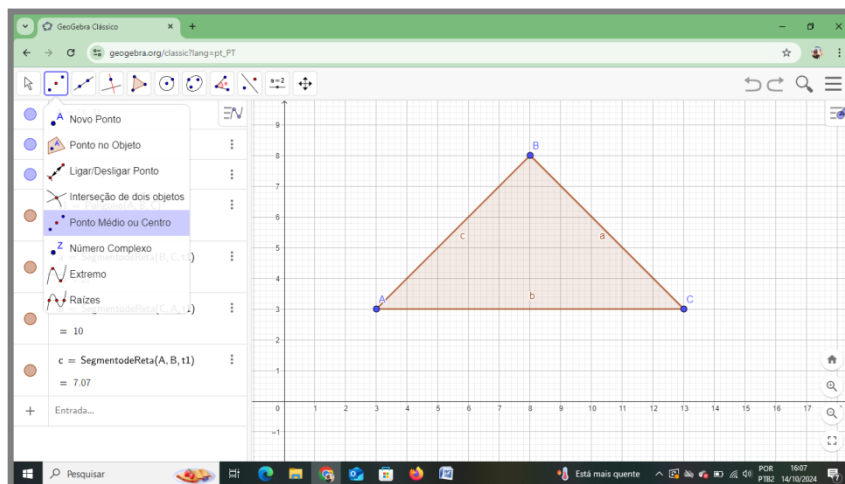
Etapa 1: Criar o Triângulo

- Abra o GeoGebra e selecione a ferramenta Polígono.
- Clique em três pontos no plano para criar os vértices do triângulo. Denominaremos os vértices como sendo A, B, e C.

Etapa 2: Determinar os Pontos Médios dos Lados

- Selecione a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" no *GeoGebra* como destacado em azul na Figura 31.

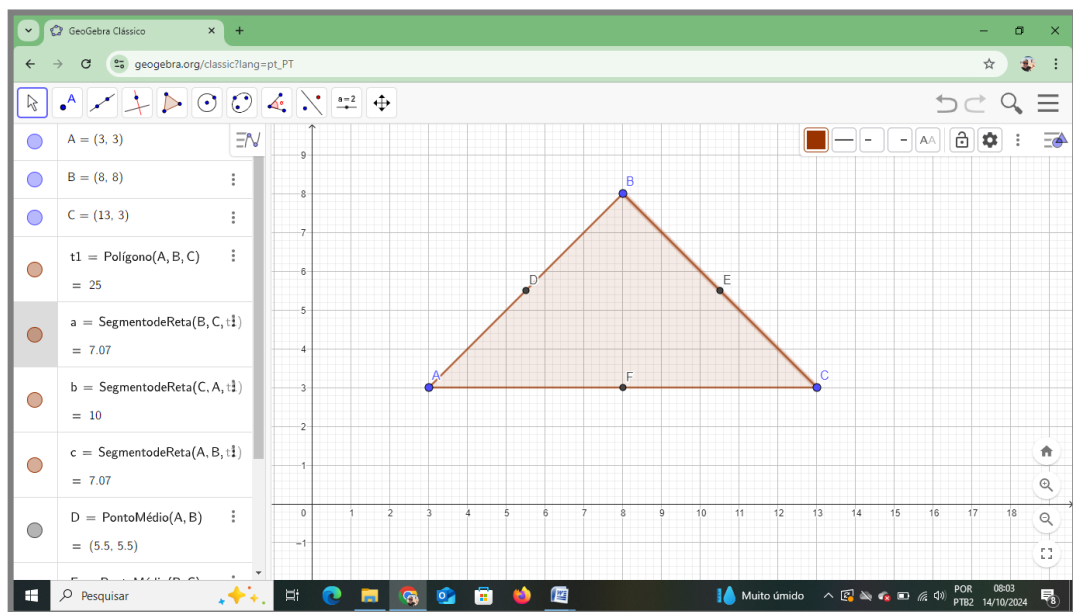
Figura 31: construção do triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

- Selecione dois vértices desse triângulo para que o ponto médio apareça, fazendo esse procedimento nos três lados do triângulo, você encontrará os pontos D, E e F que são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente, conforme Figura 32.

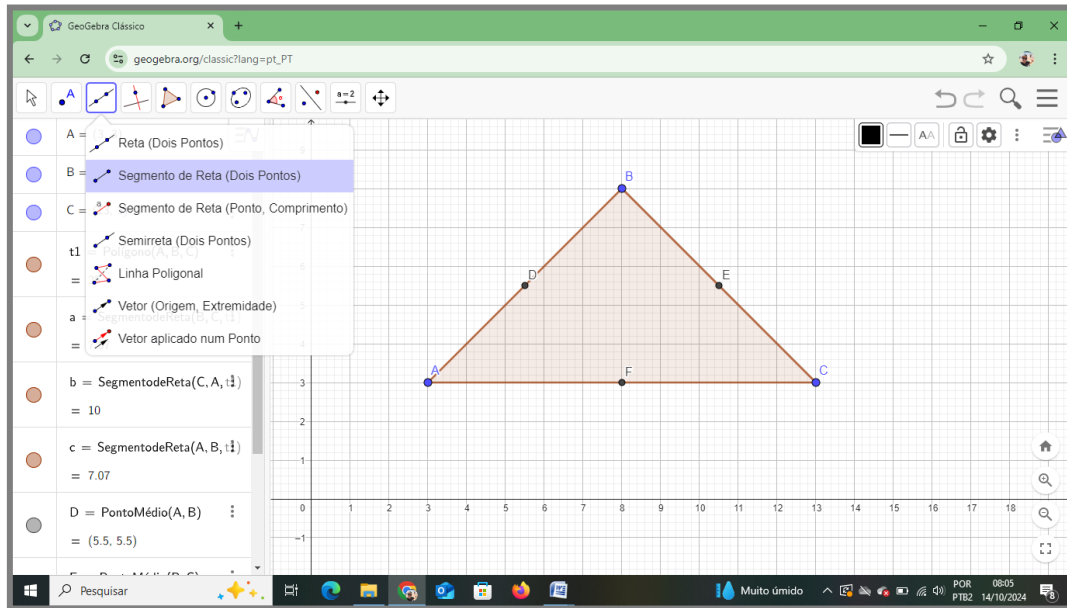
Figura 32: Identificação dos pontos médios



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapa 3: Traçar as Medianas

- Escolha a ferramenta "Segmento de reta" no *GeoGebra*, ilustrado de azul na Figura 33.

Figura 33: construção das medianas

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

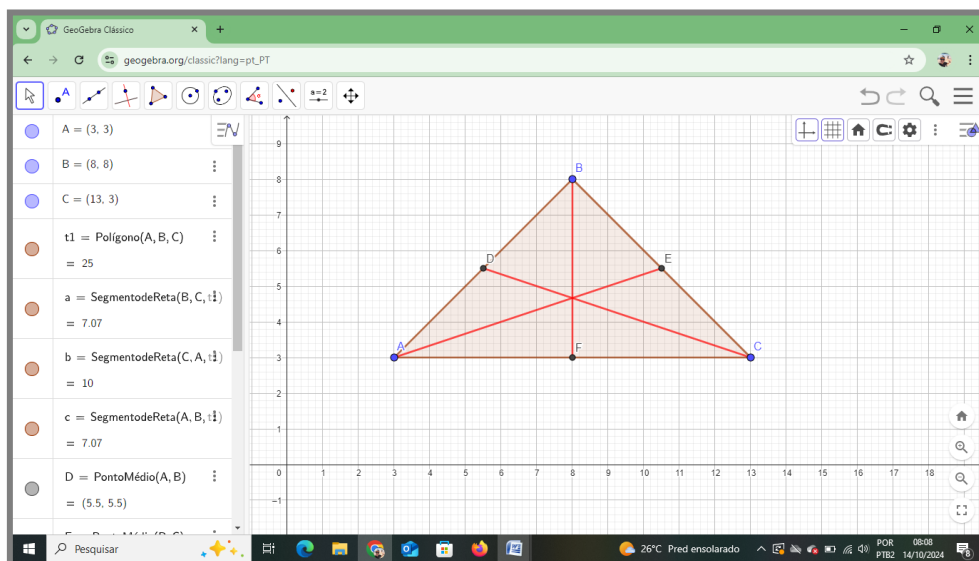
- Para traçar as medianas, clique em cada vértice do triângulo e no ponto médio do lado oposto a ele. Isso cria as medianas:

Mediana 1: segmento de A a E,

Mediana 2: segmento de B a F,

Mediana 3: segmento de C a D.

Veja essas três medianas na Figura 34.

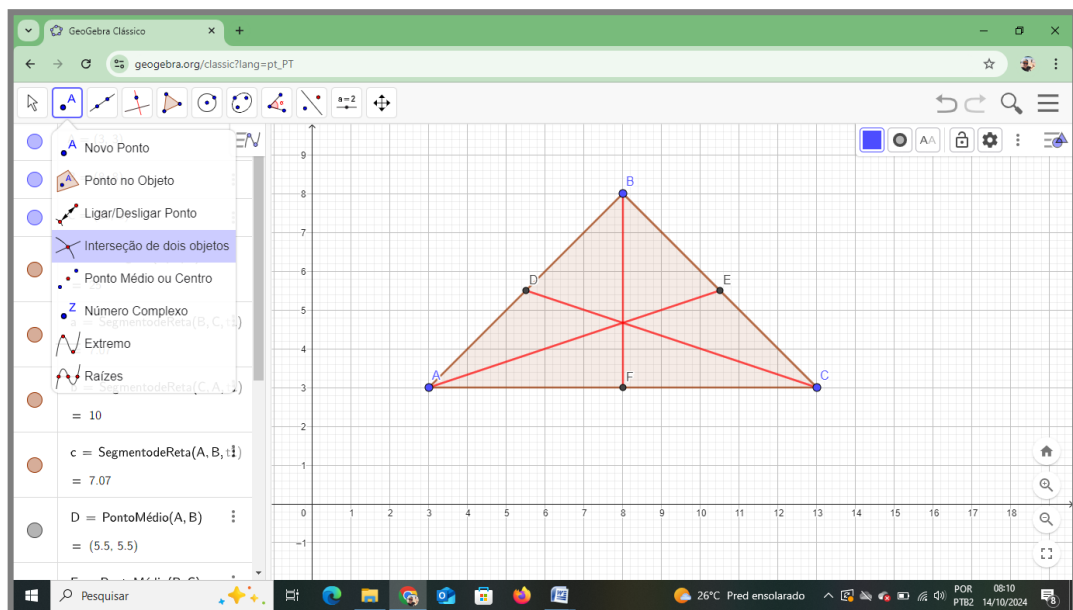
Figura 34: Medianas

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapa 4: Identificar o Baricentro

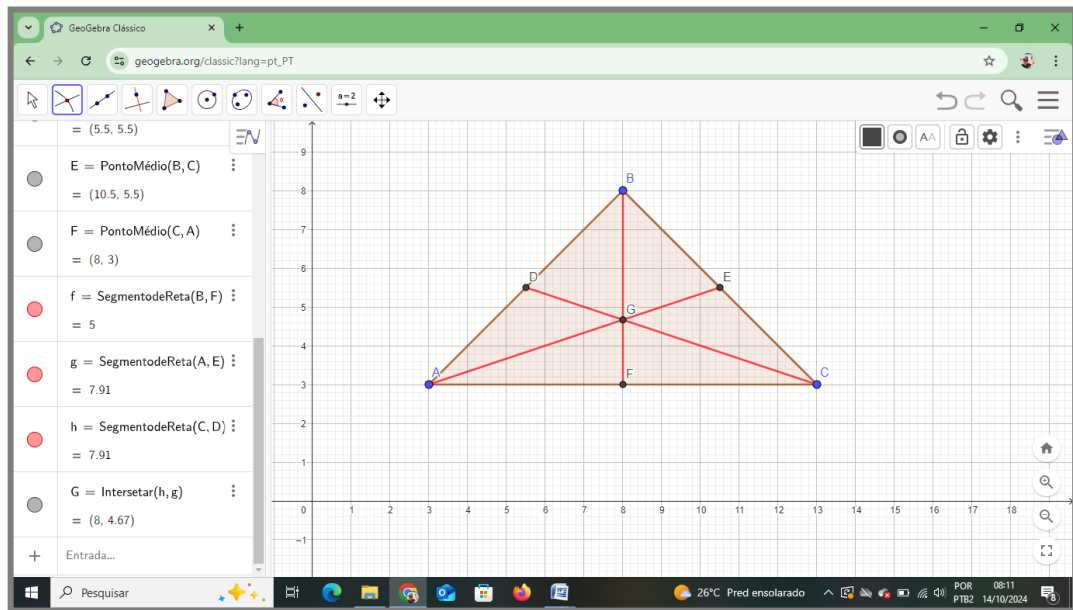
- As três medianas irão se encontrar em um único ponto. Para determinar esse ponto de interseção, selecione a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", destacada na cor azul da figura 35

Figura 35: Identificar o baricentro



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

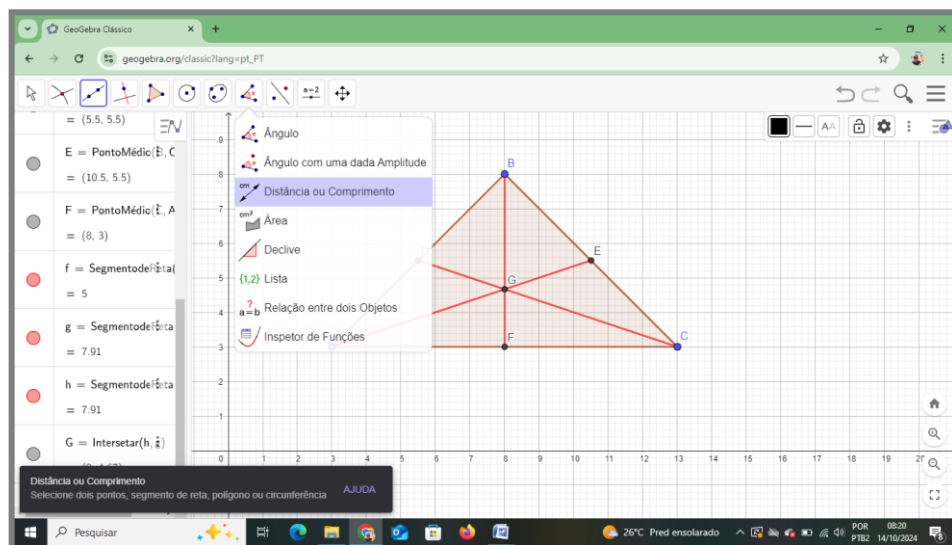
- Clique em duas das medianas, e o ponto de interseção será identificado automaticamente pelo *GeoGebra*. Este ponto é o baricentro (ou centroide) do triângulo. Você pode rotulá-lo como G.

Figura 36: construção do baricentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapas 5: Verificar a Propriedade do Baricentro

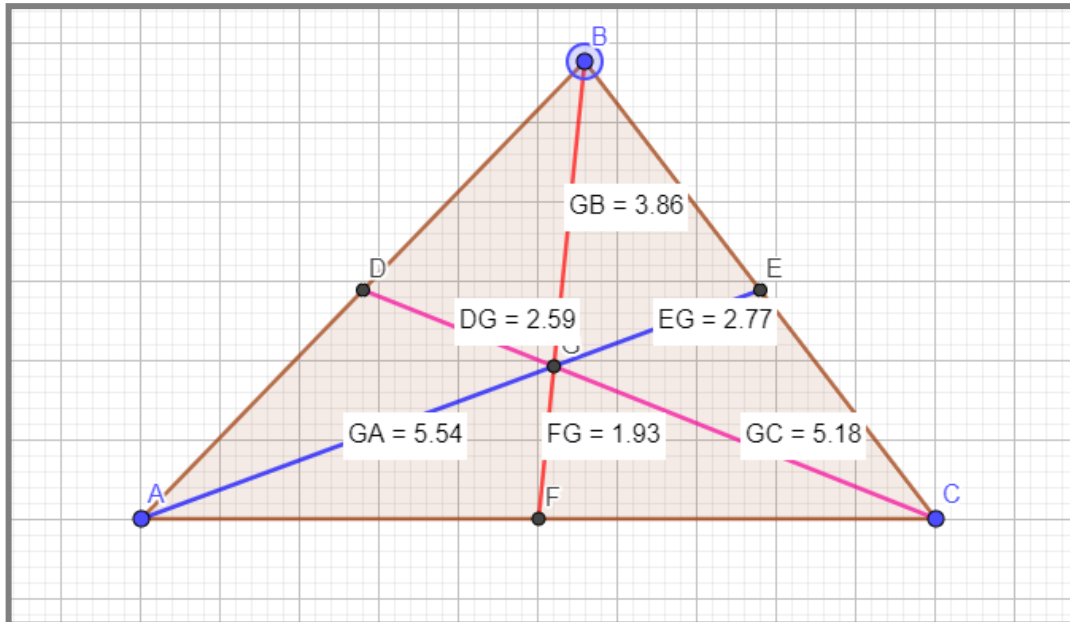
O baricentro G divide cada mediana em uma razão de 2:1, onde a parte mais longa está entre o vértice e o baricentro, e a parte mais curta está entre o baricentro e o ponto médio do lado. Se quiser verificar essa propriedade, você pode medir os comprimentos dos segmentos das medianas usando a ferramenta "Distância ou Comprimento", observado em destaque de azul na Figura 37.

Figura 37: Verificando as propriedades do baricentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Clicando em dois dos seus pontos, o valor das distâncias aparece, dessa forma podemos verificar as propriedades citadas no Capítulo 3.

Figura 38: propriedades do baricentro



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

4.2 CONSTRUÇÃO DO INCENTRO:

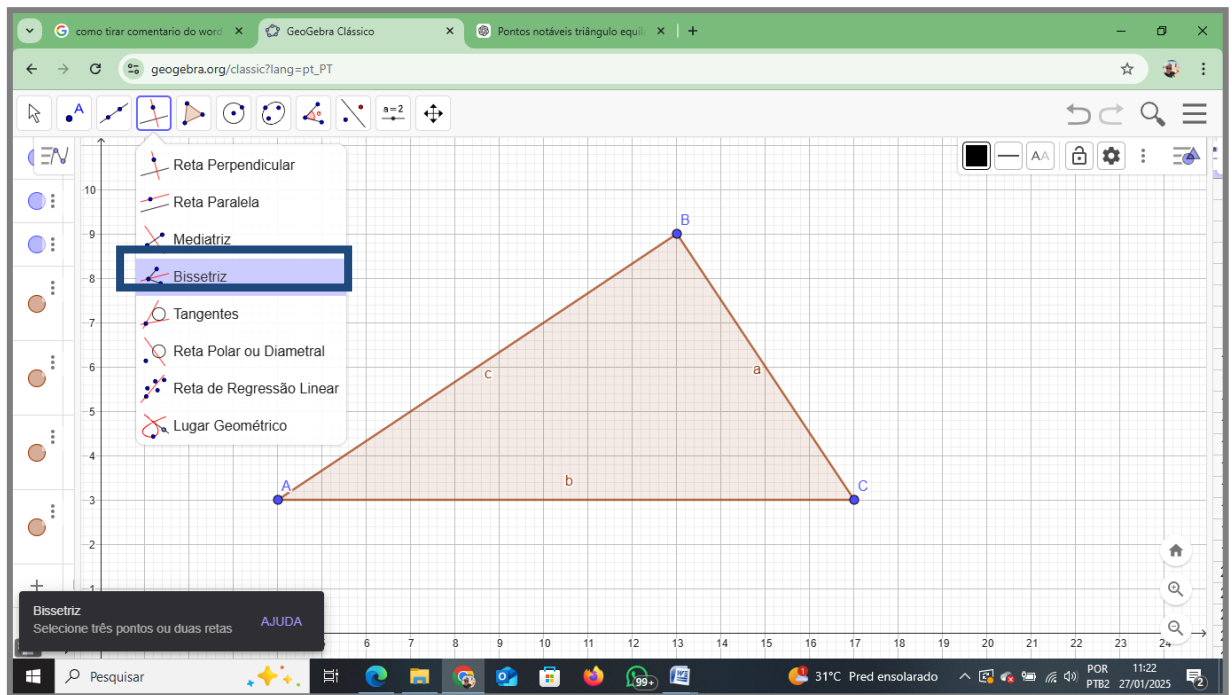
Etapa 1: Criar o Triângulo.

- Abra o *GeoGebra* e selecione a ferramenta Polígono.
- Clique em três pontos no plano para criar os vértices do triângulo. Denominaremos os vértices como sendo A, B, e C. Essa etapa já foi vista anteriormente na Figura 2

Etapa 2: Construir as bissetrizes dos ângulos.

- Selecione a ferramenta "Bissetriz", mostrado em destaque azul na Figura 39

Figura 39: Construção das bissetrizes de um triângulo.

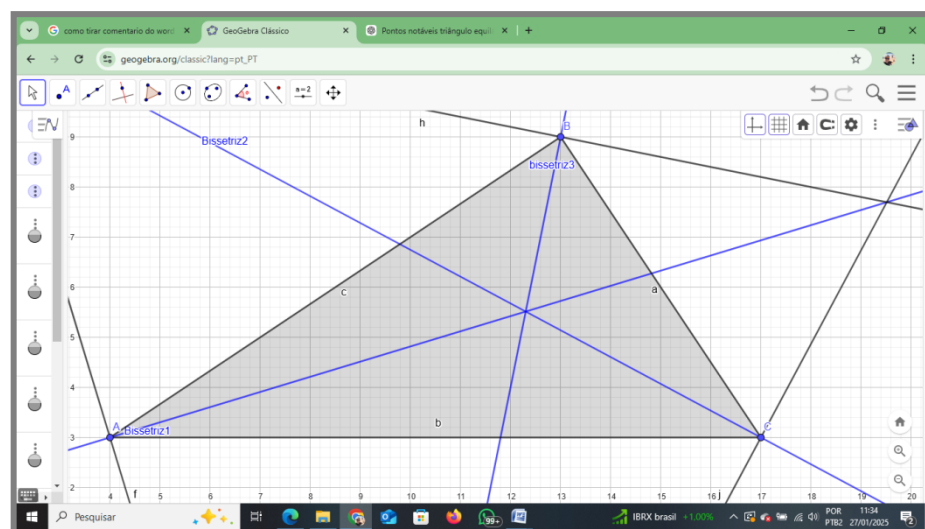


Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

- Clique nos dois lados do triângulo em torno de um ângulo.
- Repita o processo para os outros dois ângulos do triângulo

Veja na figura 40 a imagem formada com as três bissetrizes do triângulo ABC.

Figura 40: Mediatrizes.



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

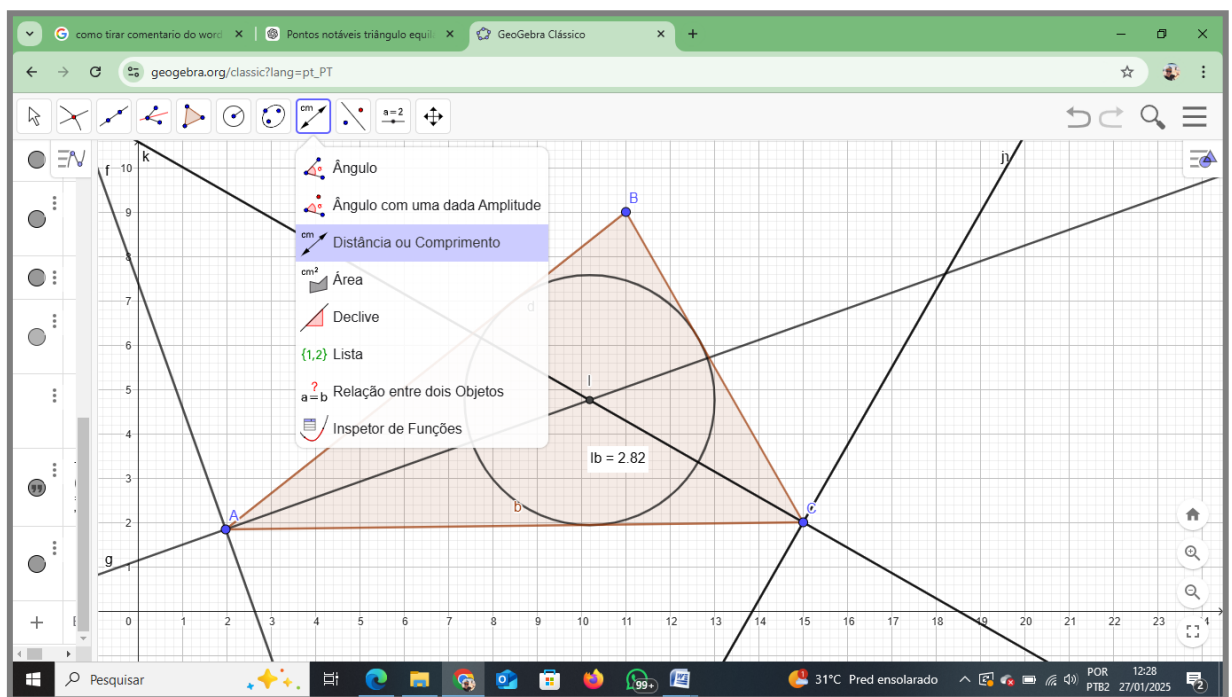
Etapa 4: Identificar o incentro.

- As três bissetrizes irão se encontrar em um único ponto. Para determinar esse ponto de interseção, selecione a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", destacada na cor azul da Figura 35
- Identifique ele como sendo o ponto I

Etapa 5: Círculo Inscrito ao triângulo.

- Para desenhar a particularidade escrita, selecione a ferramenta "Circunferência com centro e raio".
- Clique no incentro
- Para definir o raio, use a distância entre o centro e um dos lados do triângulo, selecione a ferramenta "Distância ou Comprimento" para medir o raio, no ícone selecionado de azul da Figura 41

Figura 41: Construção do círculo inscrito a circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

4.3 CONSTRUÇÃO DO ORTOCENTRO:

O Ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das três alturas do triângulo. A altura de um triângulo é o segmento que vai de um vértice até o lado

oposto de forma perpendicular. Iremos fazer essa construção dividindo em quatro etapas:

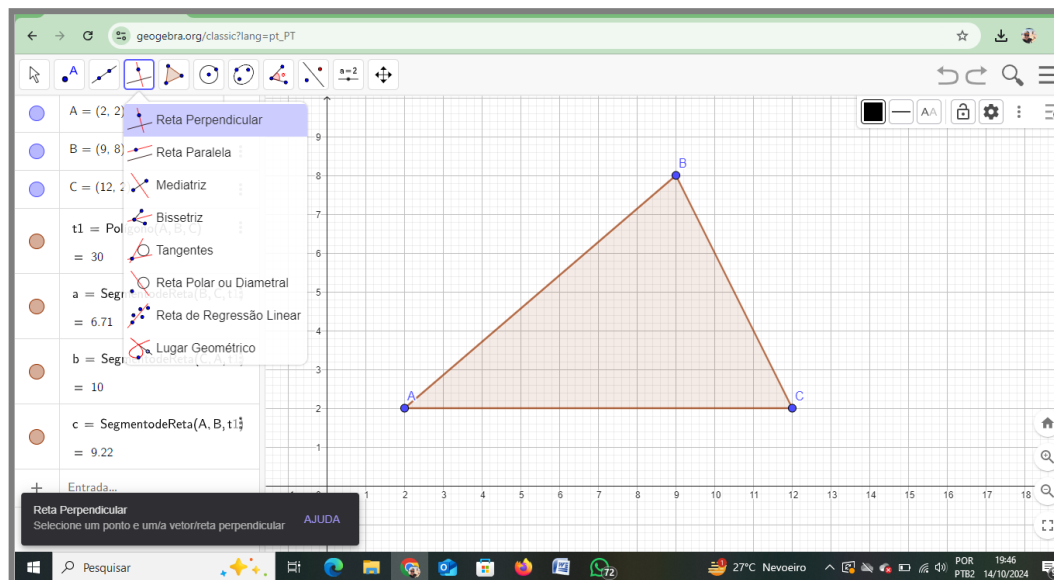
Etapa 1: Desenhar o Triângulo

- Abra o *GeoGebra* e selecione a ferramenta Polígono.
- Clique em três pontos no plano para criar os vértices do triângulo. Denominaremos os vértices como sendo A, B, e C.

Etapa 2: Traçar as Alturas

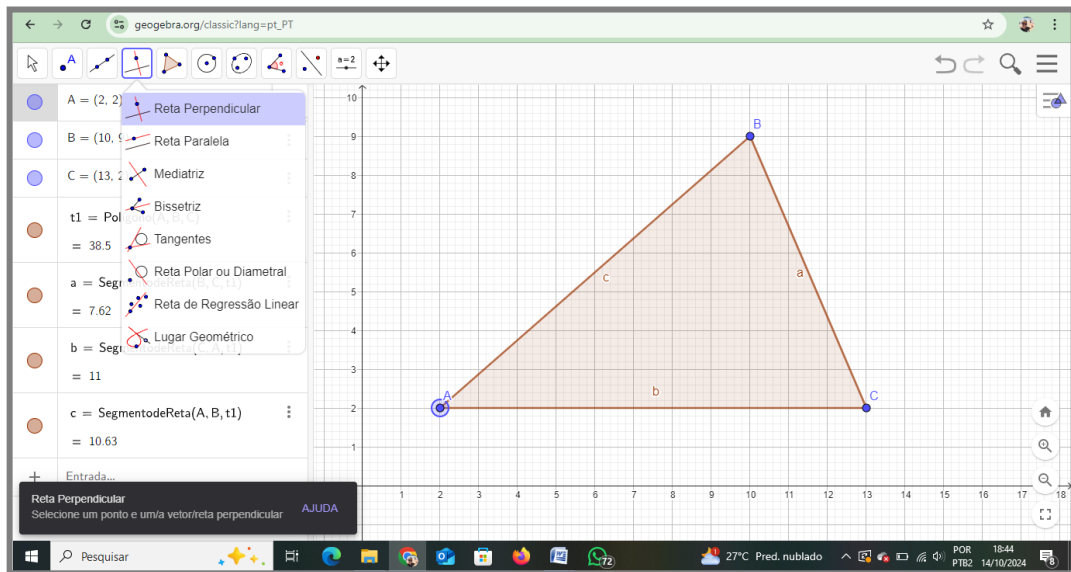
- Selecione a ferramenta Reta Perpendicular no item em destacado de azul na Figura 42

Figura 42: Construção do ortocentro



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

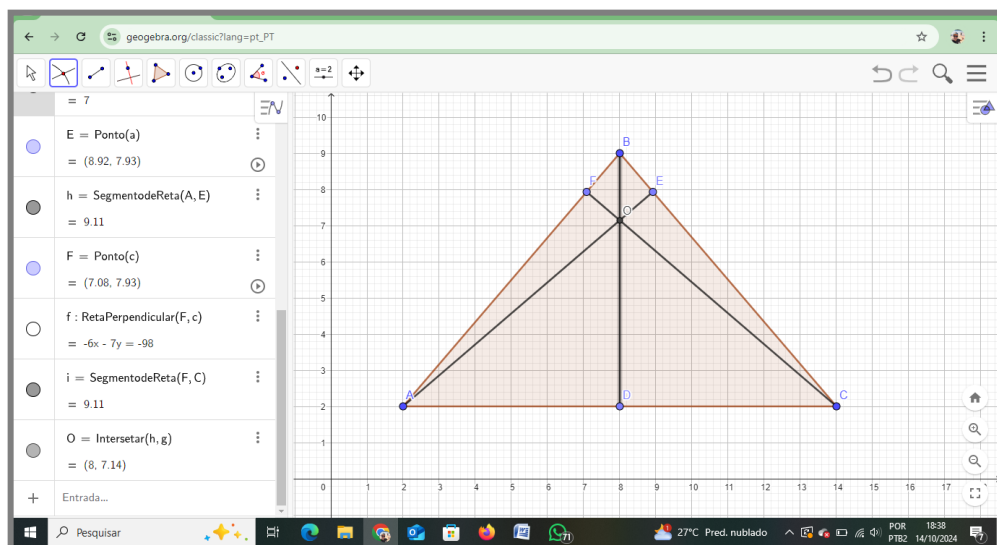
- Clicando nos vértices e nos seus respectivos lados opostos, aparecem as retas perpendiculares ao lado que passa pelos seus respectivos vértices. Para traçar a altura, clique em segmentos de reta dados dois pontos e marque o vértice e o ponto de encontro da perpendicular com o lado oposto. Para melhor visualização pode-se apagar a reta perpendicular. Veja na Figura 43.

Figura 43: construção do ortocentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapa 3: Identificando o Ortocentro

- O ponto de interseção das três alturas será o Ortocentro do triângulo. Para marcar esse ponto, use a ferramenta Interseção de Objetos:
- Clique em duas das alturas para encontrar o ponto de interseção. O ponto será marcado como O, o Ortocentro do triângulo, identificado como ponto O na Figura 44.

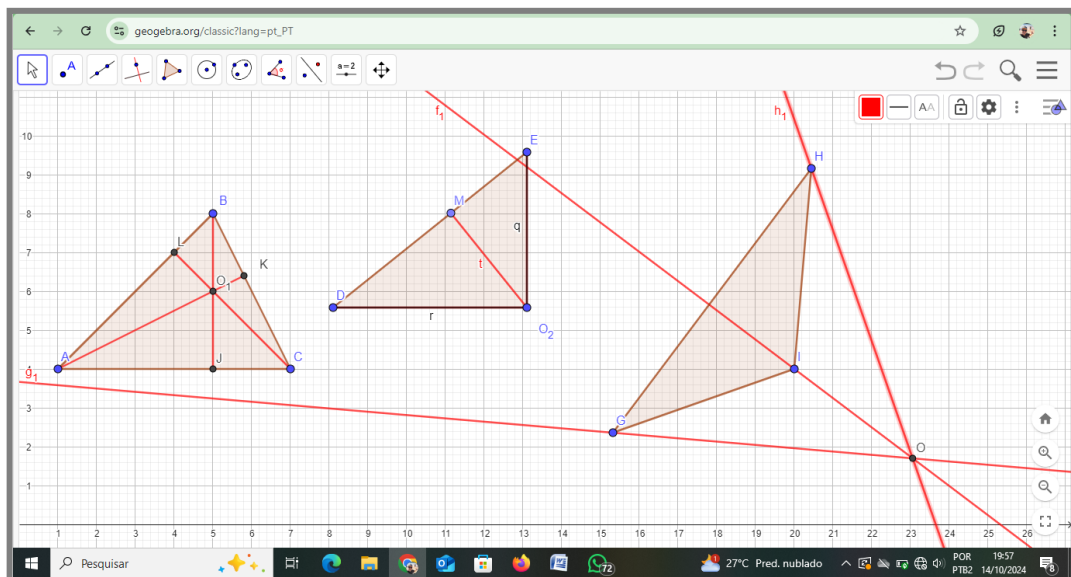
Figura 44: construção do ortocentro

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapa 4: Verificar a Construção

1. Confira a construção para garantir que as três alturas realmente se encontram no ponto O. Perceba na Figura 45, no caso do triângulo acutângulo, o Ortocentro estará dentro do triângulo, no triângulo obtusângulo, ele estará fora, e no triângulo retângulo, ele estará no vértice do ângulo reto.

Figura 45: construção do ortocentro



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

4.4 CONSTRUÇÃO DO CIRCUNCENTRO:

Definimos anteriormente como mediatriz do segmento $\overline{AB}$, como sendo a reta perpendicular a $\overline{AB}$ e que passa por seu ponto médio e que o ponto de encontro entre as três mediatrizes de um triângulo é chamado de circuncentro. Vamos fazer essa construção dividindo em etapas.

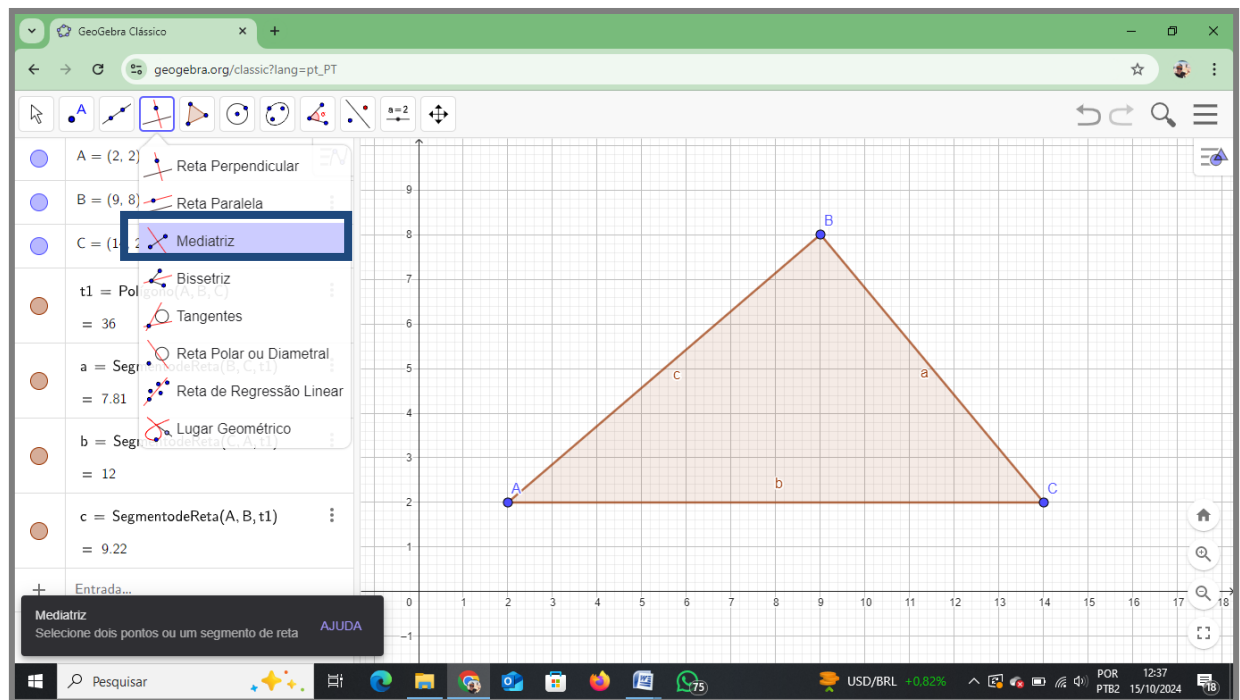
Etapa 1: Desenhar o Triângulo

- Abrir o *GeoGebra* e selecionar a aba "Geometria".
- Usar a ferramenta Polígono ou Segmento para desenhar o triângulo: Clique em três pontos distintos no plano para definir os vértices A, B e C. Conecte os pontos com segmentos de reta para formar o triângulo ABC.

Etapa 2: Traçar as Mediatrizes

- Selecione a ferramenta Mediatriz, conforme destacado de azul na Figura 46, e clique em dois pontos de um lado do triângulo para desenhar a mediatriz desse lado.

Figura 46: construção da mediatriz



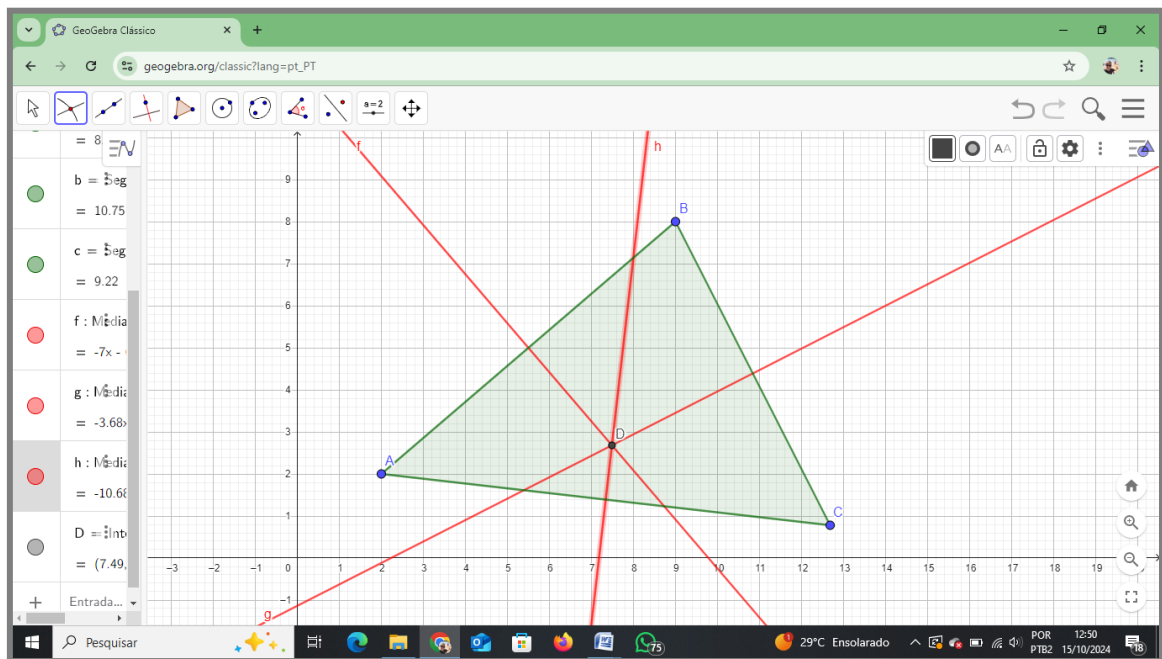
Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Repita o processo para os outros dois lados do triângulo, traçando as mediatrizes.

Etapa 3: Encontrar o Circuncentro

O ponto de interseção das três mediatrizes será o Circuncentro do triângulo. Para marcar esse ponto, utilize a ferramenta Interseção de Objetos e clique nas mediatrizes. O ponto será marcado como D, conforme Figura 47.

Figura 47: Circuncentro do triângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

Etapla 4: Desenhar a Circunferência Circunscrita:

Para desenhar a circunferência circunscrita, faça o seguinte:

- Selecione a ferramenta Círculo: Centro e Ponto.
- Selecione o ortocentro e qualquer uns dos vértices do triângulo.

Perceba que, durante essas construções, é necessário lembrar-se de todas as características dos pontos notáveis do triângulo, fazendo com que o aluno revise os conceitos estudados e possa aplicá-los sempre que necessário.

No próximo capítulo, veremos a aplicação dos assuntos estudados para a realização de questões do Enem.

5. RESOLVENDO AS QUESTÕES DO ENEM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Nesse capítulo, utilizamos os recursos estudados nos capítulos anteriores para resolver as questões do Exame Nacional Do Ensino Médio (ENEM), mostrando uma visão diferente do que geralmente é explicado nas escolas. Neste formato o aluno pode ver de maneira mais lúdica e visualizar experimento fazendo com que a aprendizagem se torne mais interessante.

5.5.1 (ENEM 2018) QUESTÃO 169 PROVA AMARELA

Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura

Figura 48: (ENEM 2018) QUESTÃO 169 PROVA AMARELA



Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

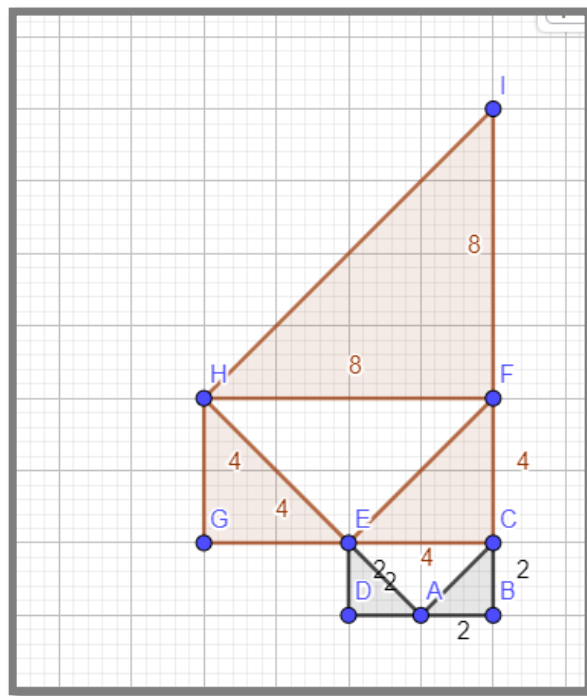
Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja a medida do lado, em centímetro, é

- a) 14
- b) 12
- c) $7\sqrt{2}$
- d) $6 + 4\sqrt{2}$
- e) $6 + 2\sqrt{2}$

Solução:

Podemos iniciar a construindo no software um triângulo retângulo isósceles ABC cujo cateto mede 2 cm, espelhando ele para a esquerda, encontramos o triângulo ADE congruente a ABC. Note que o outro triângulo retângulo da imagem tem vértices nos pontos E e C. Traçando o triângulo ECF, também isósceles de cateto EC, o *software* mostra que seu lado EC tem quatro centímetros, fazendo espelhamento do mesmo, temos o triângulo EGH com $\overline{HF}$ tendo 8 cm, calculado pelo *GeoGebra*. Traçando o triângulo HFI, de forma que seja retângulo e isósceles, verificamos que a distância $\overline{IB}$ é 14 cm. Como IB é o lado do quadrado pedido encontramos a resposta.

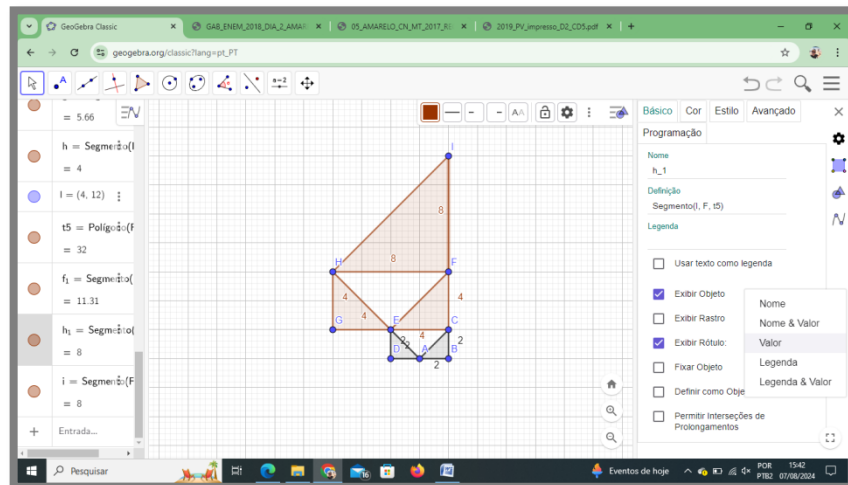
Figura 49: Resolução da questão 5.5.1



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

É importante saber como colocar o Software para colocar as medidas dos lados, clicando sobre o lado do triângulo, aparecerá uma caixa de ferramentas a direita, vá em exibir rótulo, nome e clique em valor, assim o software irá lhe informar o comprimento correto.

Figura 50: Resolução da questão 5.5.1



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

5.5.2 (ENEM 2017) QUESTÃO 169 PROVA AMARELA

A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas. Caminhão entala em viaduto no Centro Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

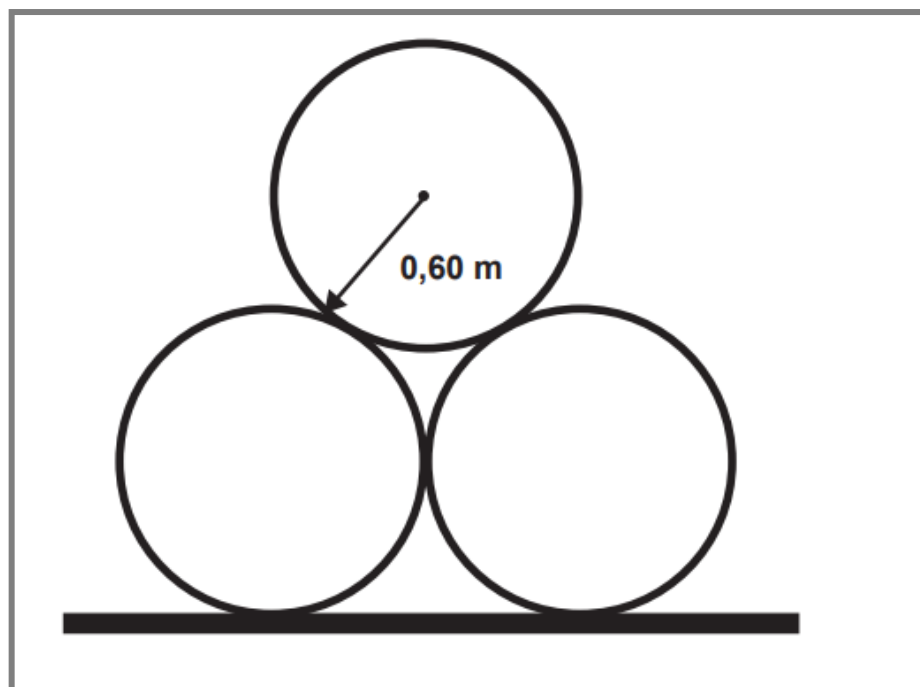
Figura 51: (ENEM 2017) QUESTÃO 169 PROVA AMARELA



Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

Figura 52: (ENEM 2017) QUESTÃO 169 PROVA AMARELA



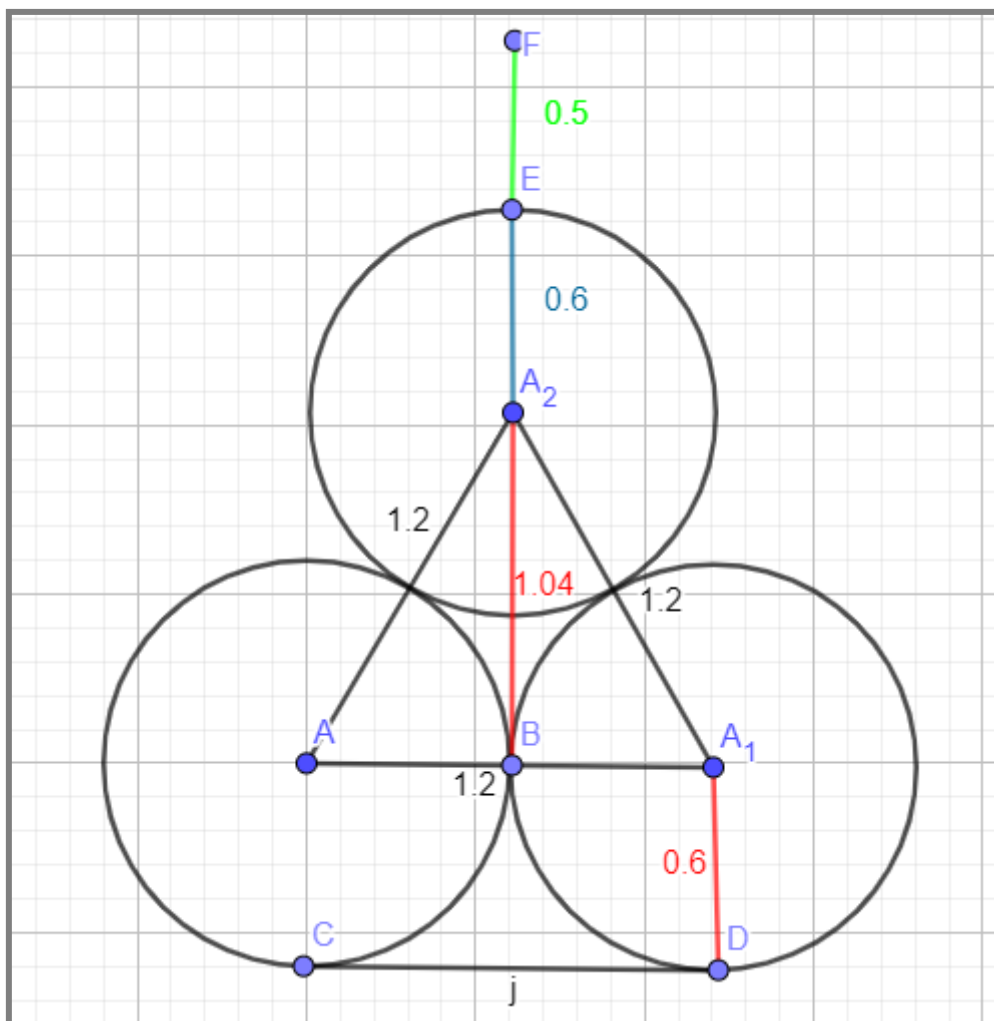
Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- A 2,82
- B 3,52
- C 3,70
- D 4,02
- E 4,20

Solução:

Figura 53: resolução da questão 5.5.2



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

O primeiro desafio será construir os três círculos tangentes de raio 0,6m.

1. Escolha a ferramenta “ Círculo com Centro e Raio”
2. Clique em um ponto do plano e digite o raio como sendo 0,6m.
3. Clique em “MOVER” na barra de ferramenta e depois clique no círculo, depois de selecionado copie e cole duas vezes.
4. Será necessário “MOVER” o círculo. Organize os círculos de modo que os três círculos fiquem tangentes, uma dica seria ajustar o zoom para melhor visualização.
5. Sendo os três círculos com centros A, A_1 e A_2 , podemos ir em “SEGMENTO DE RETA”, e construa o triângulo de vértices A, A_1 e A_2 . Depois de traçado o triângulo, percebemos que ele é equilátero e que seu lado será 1,2 m. Traçando a altura em relação ao vértice A_2 , concluímos que sua altura será 1,04 m.
6. Como o raio é 0,6m logo a distancia de A_2 a E de acordo com a imagem abaixo é 0,6 m. Da mesma forma a distância de A_1 a D é 0,6 m.
7. Acrescentando 0,5 m em cima e 1,3 m na parte de baixo, chegamos que a altura mínima do viaduto terá que ser 4,02 m.

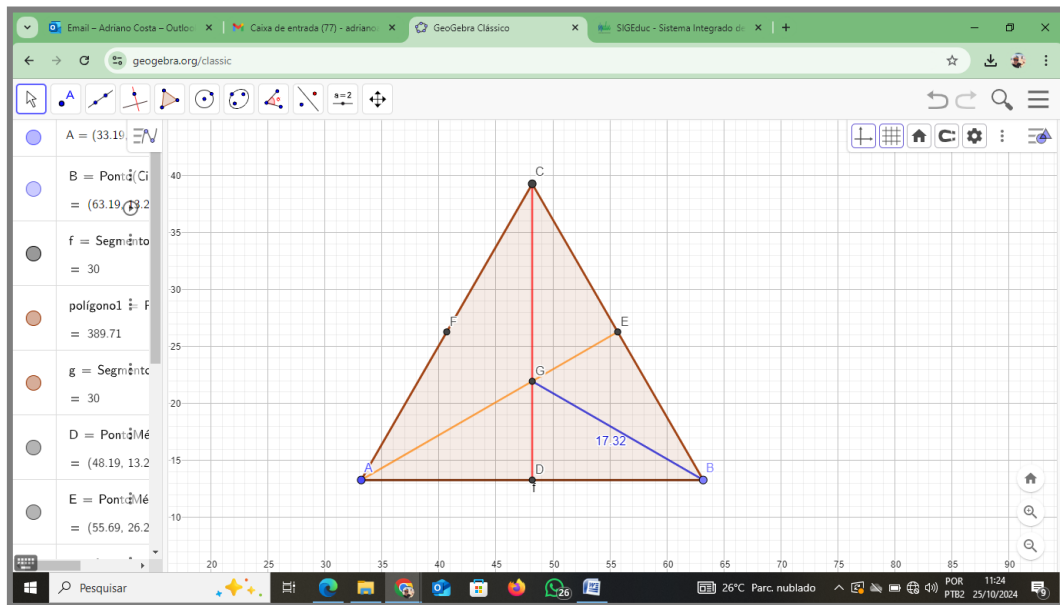
5.5.3 (ENEM 2015) QUESTÃO 140 PROVA AMARELA

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

- A 18.
- B 26.
- C 30.
- D 35.
- E 60.

Solução

Figura 54: Resolução da questão 5.5.3



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

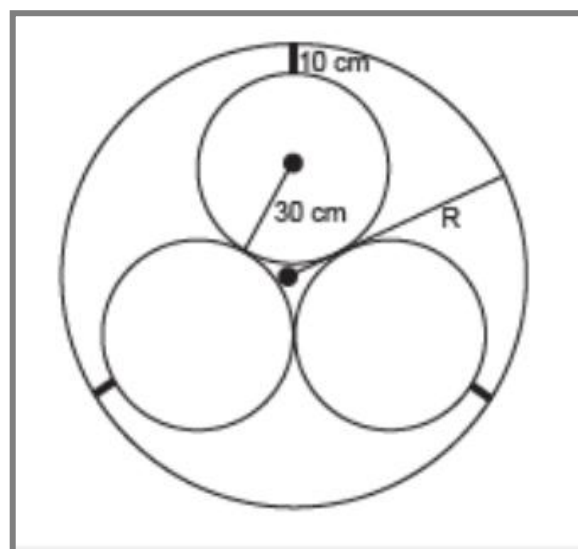
De acordo como vimos anteriormente, no triângulo equilátero, o baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro se encontra no mesmo ponto. Na questão proposta, queremos encontrar um ponto em que a distancia desse ponto aos vértices são sempre iguais, esta distancia será o nosso raio. Assim podemos encontrar o baricentro para determinar esse raio mínimo.

1. Primeiro vamos construir um triângulo equilátero de lado 30 cm. Para isso vá em “Segmento De Reta” (Ponto e Comprimento).
2. O Próximo passo é a construção do triângulo equilátero tendo com lado medindo 30 cm. Para isso teremos que clicar em “Polígono Regular”, clique nos pontos A e B e selecione 3 vértices.
3. Em “Ponto Médio ou Centro”, determine seus pontos médios selecionando seu seus vértices dois a dois.
4. Clicando em “Segmento de Reta” (Dois Pontos), podemos traçar as medianas selecionando seus vértices e seus respectivos pontos médios.
5. Para encontrar o baricentro, clique em “Interseção de Dois Objetos” e selecione as duas medianas, logo aparecerá o baricentro G.
6. Construindo o segmento $\overline{GB}$, podemos observar que ela tem comprimento igual a 17,32 cm. Dessa forma podemos concluir que o diâmetro mínimo terá que ser de 34,64 cm. Logo terá que optar por 35 cm.

5.5.4 (ENEM 2013) QUESTÃO 178 PROVA AMARELA

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R . Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:

Figura 55: (ENEM 2013) QUESTÃO 178 PROVA AMARELA



Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R , em centímetros, é igual a

A 64,0.

B 65,5.

C 74,0.

D 81,0.

E 91,0.

Vamos dividir a solução em duas etapas:

Etapas 1:

1.1 Primeiro vamos construir um triângulo equilátero de lado 60 cm. Para isso vá em “Segmento De Reta” (Ponto e Comprimento).

1.2 O Próximo passo é a construção do triângulo equilátero tendo com lado medindo 30 cm. Para isso teremos que clicar em “Polígono Regular”, clique nos pontos A e B e selecione 3 vértices.

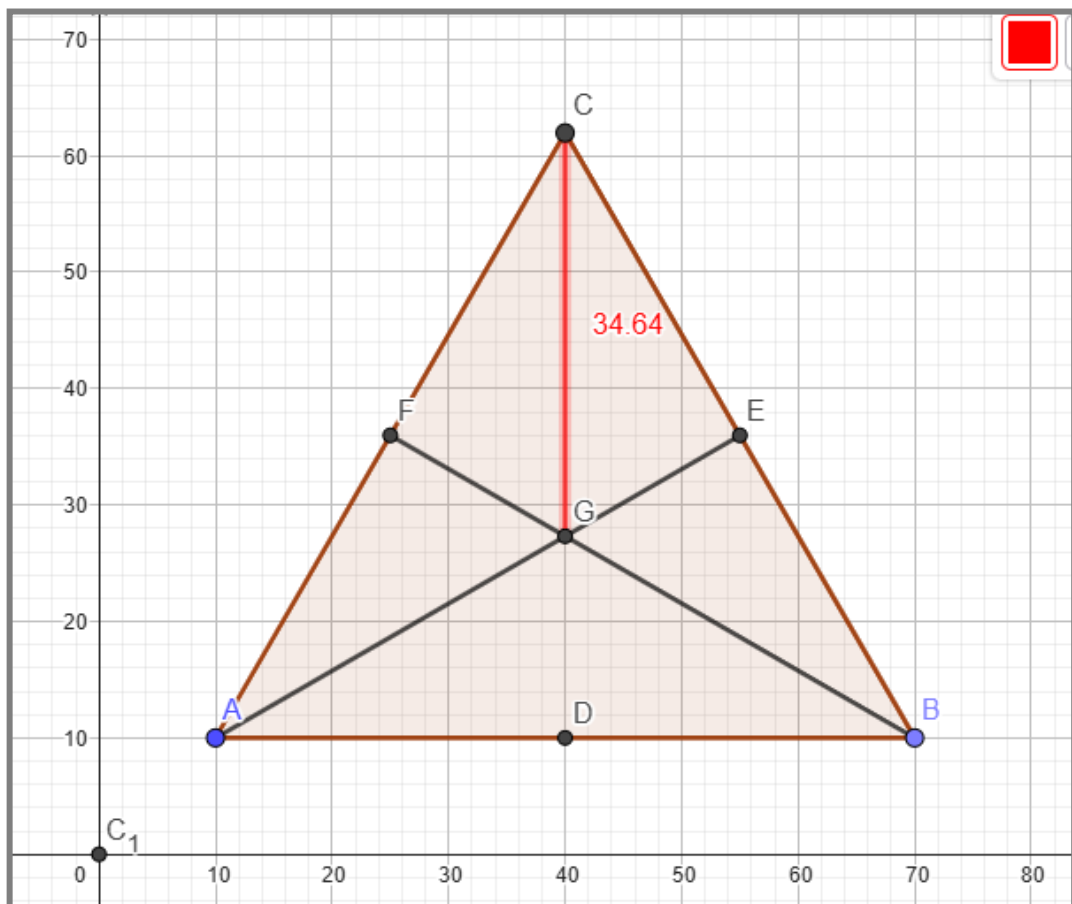
1.3 Em “Ponto Médio ou Centro”, determine seus pontos médios selecionando seu seus vértices dois a dois.

1.4 Clicando em “Segmento de Reta” (Dois Pontos), podemos traçar as medianas selecionando seus vértices e seus respectivos pontos médios.

1.5 Para encontrar o baricentro, clique em “Interseção de Dois Objetos” e selecione as duas medianas, logo aparecerá o baricentro G.

1.6 Construindo o segmento $\overline{GC}$ e var em mostrar valor, logo vc ira verificar que a distância $\overline{GC}$ é 34,64 cm.

Figura 56: Resolução da questão 5.5.4



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

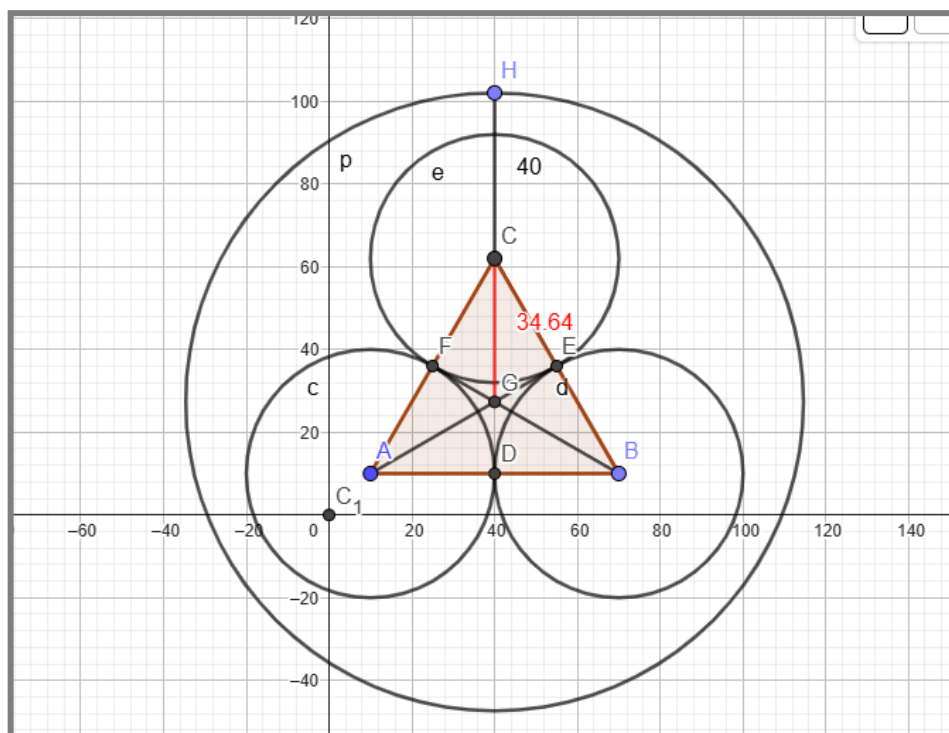
Etapa 2:

2.1 Clique em “Círculo (Centro e Raio)” selecione os vértice A e digite 30, repita o procedimento para os outros dois vértices.

2.2 No ícone “Segmento de reta (Ponto e Comprimento)”, selecione o ponto C e digite 40, que seria o raio de 30 cm somado com os 10 cm que é a distância entre as circunferências pedida pela questão.

2.3 O Raio do círculo que a questão pede é exatamente a distância entre os segmentos $\overline{GH}$ que é de 74,64 cm, que a questão dá de forma aproximada por 74 cm.

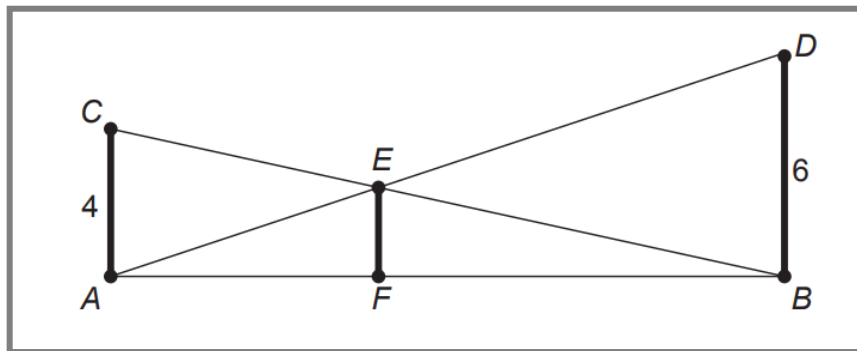
Figura 57: Resolução da questão 5.5.4



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

5.5.5. (ENEM 2013) QUESTÃO 172 PROVA AMARELA

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados. Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF ?

Figura 58: (ENEM 2013) QUESTÃO 172 PROVA AMARELA

Fonte: El <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

A 1 m

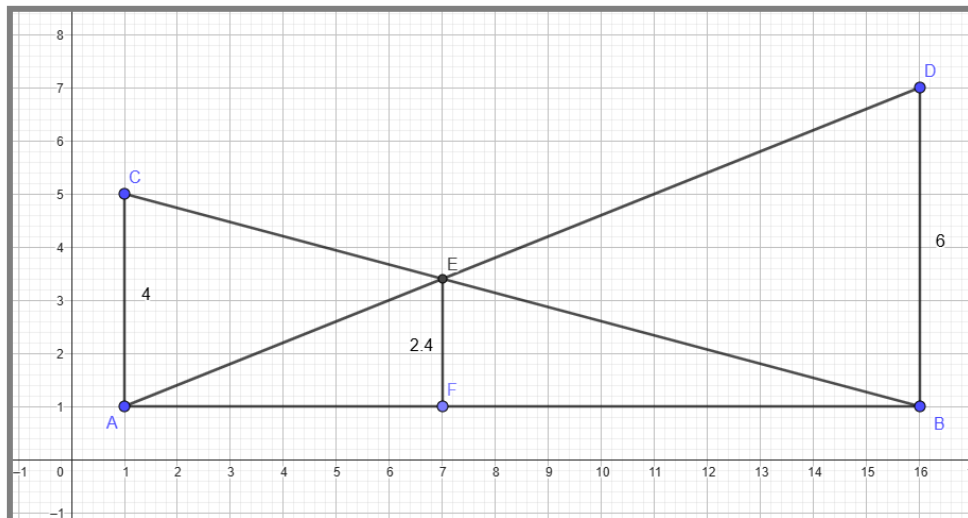
B 2 m

C 2,4 m

D 3 m

E 2 6 m

Solução:

Figura 59: Resolução da questão 5.5.5

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

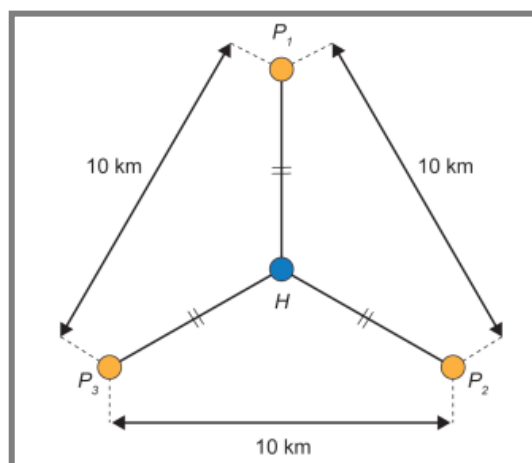
1. Construa o segmento $\overline{AB}$ de comprimento qualquer; para isso vá em “Segmento de reta” (Dois Pontos) e escolha dois pontos quaisquer. Para facilitar a visualização, é bom construir de forma que ele seja paralelo ao eixo x, pois assim, fica mais fácil se construir segmentos de retas perpendiculares.

2. Construa o seguimento $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ com comprimento 4 cm. Isso é feito selecionando “Segmento de Reta” (Ponto e Comprimento), clicando sobre o ponto A e movimentando o segmento de forma que ele fique perpendicular a $\overline{AB}$.
3. Utilize o mesmo processo para construir o segmento $\overline{BD}$ de comprimento 6 cm.
4. Clique em “Interseção de Dois Objetos” e selecione os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, dessa forma, aparecerá o ponto E.
5. Construindo o segmento $\overline{EF}$, perpendicular a $\overline{AB}$, iremos verificar que ela tem comprimento 2,4 o que mostra o resultado pedido pela questão.

5.5.6. (ENEM 2024) QUESTÃO 145 PROVA AMARELA

A prefeitura de uma cidade planeja construir três postos de saúde. Esses postos devem ser construídos em locais equidistantes entre si e de forma que as distâncias desses três postos ao hospital dessa cidade sejam iguais. Foram conseguidos três locais para a construção dos postos de saúde que apresentam as características desejadas, e que distam 10 km entre si, conforme o esquema, no qual o ponto H representa o local onde está construído o hospital; os pontos P_1 , P_2 e P_3 , os postos de saúde; e esses quatro pontos estão em um mesmo plano.

Figura 60: (ENEM 2024) QUESTÃO 145 PROVA AMARELA



Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

A distância, em quilômetro, entre o hospital e cada um dos postos de saúde, é um valor entre

A 2 e 3.

B 4 e 5.

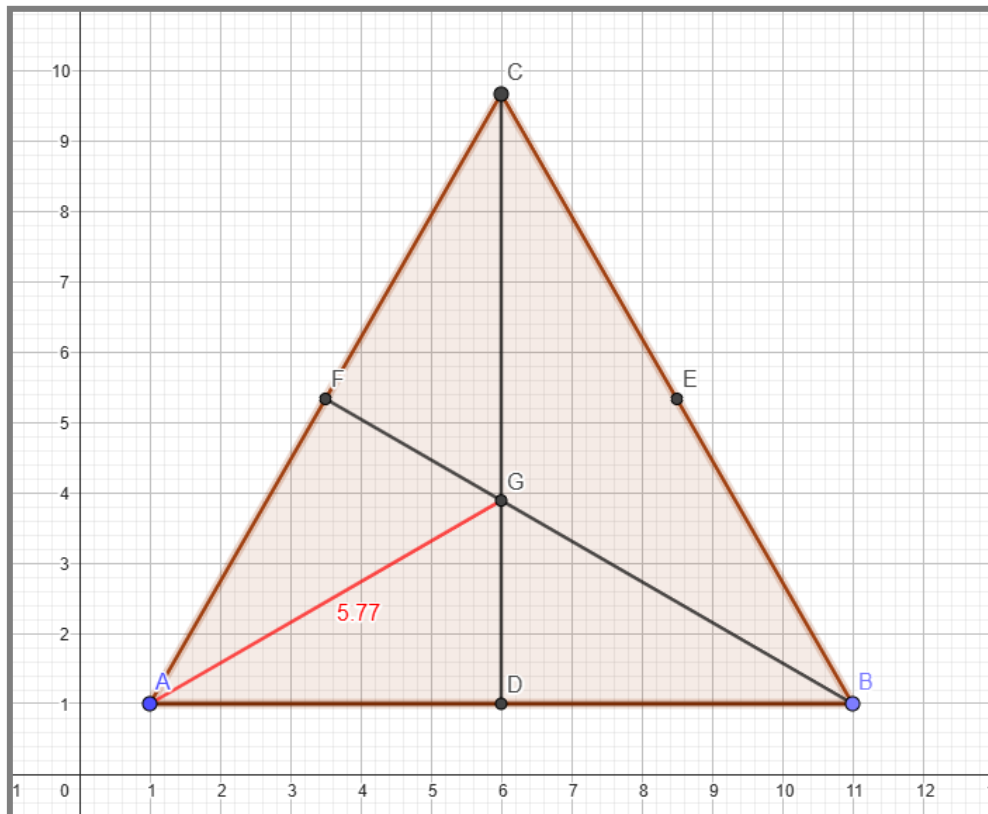
C 5 e 6.

D 7 e 8.

E 8 e 9.

Solução:

Figura 61: Resolução da questão 5.5.6



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

1.1 Primeiro vamos construir um segmento de reta de lado 10 . Para isso vá em “Segmento De Reta” (Ponto e Comprimento), selecionando o ponto, digite o número 10.

1.2 O Próximo passo é a construção do triângulo equilátero tendo com lado medindo 10. Para isso teremos que clicar em “Polígono Regular”, clicar nos pontos A e B e selecionar 3 vértices.

1.3 Em “Ponto Médio ou Centro”, determine seus pontos médios selecionando seus vértices dois a dois.

1.4 Clicando em “Segmento de Reta” (Dois Pontos), trace as medianas selecionando seus vértices e respectivos pontos médios.

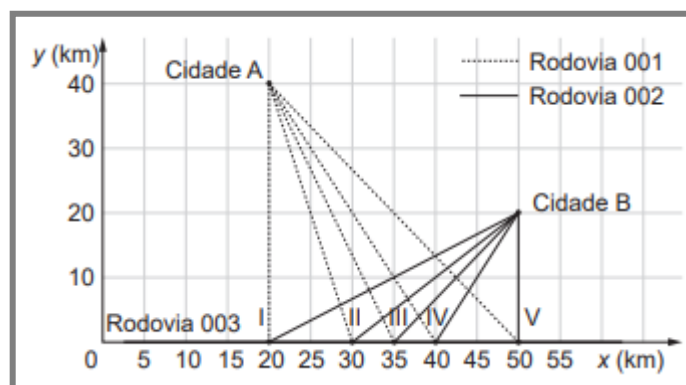
1.5 Para encontrar o baricentro, clique em “Interseção de Dois Objetos” e selecione as duas medianas, logo aparecerá o baricentro G.

1.6 Construindo o segmento $\overline{GA}$, vá em mostrar valor. você verifica que a distância $\overline{GA}$ é 5,77.

5.5.7 (ENEM 2022) QUESTÃO 145 PROVA AMARELA

O governo de um estado pretende realizar uma obra de infraestrutura para auxiliar na integração e no processo de escoamento da produção agrícola de duas cidades. O projeto consiste na interligação direta das cidades A e B com a Rodovia 003, pela construção das Rodovias 001 e 002. As duas rodovias serão construídas em linha reta e deverão se conectar à Rodovia 003 em um mesmo ponto, conforme esboço apresentado na figura, na qual estão também indicadas as posições das cidades A e B, considerando o eixo x posicionado sobre a Rodovia 003, e cinco localizações sugeridas para o ponto de conexão entre as três rodovias.

Figura 62: (ENEM 2022) QUESTÃO 145 PROVA AMARELA



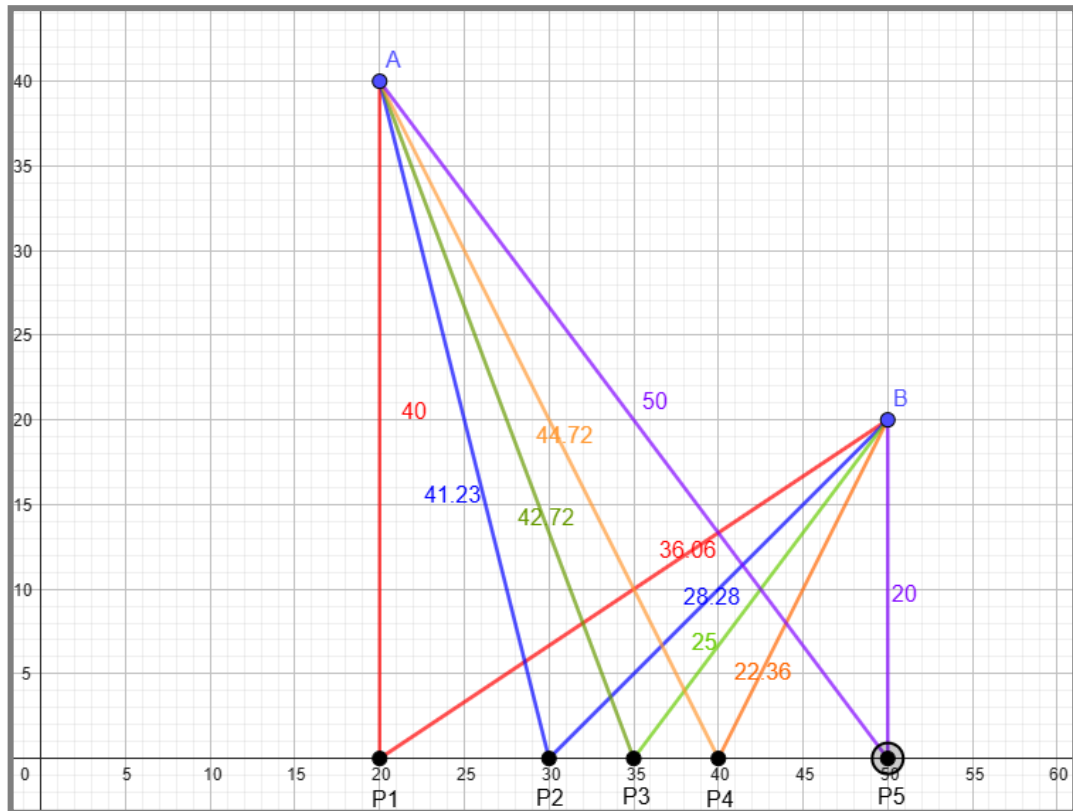
Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Pretende-se que a distância percorrida entre as duas cidades, pelas Rodovias 001 e 002, passando pelo ponto de conexão, seja a menor possível. Dadas as exigências do projeto, qual das localizações sugeridas deve ser a escolhida para o ponto de conexão?

- A I
- B II
- C III

D IV

E V

Solução:**Figura 63:** Resolução da questão 5.5.7

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

1. Ajuste o zoom da tela do seu GeoGebra Classic para que os quadrados do plano cartesiano tenham lados com comprimento de 5 unidades, o que facilita a resolução da questão.

2. Coloque no plano cartesiano os pontos que representam as cidades A(20,40) e B(50,20). E vamos ver a distância de cada um dos seu trajetos

- **Trajeto I:** sai de B(50,20) até P₁(20,0), e de P₁(20,0) a A(20,40), traçando os segmentos BP₁ e P₁A, verificamos que eles tem comprimentos respectivos iguais a 36,06 e 40, totalizando assim uma distância de 76,06 km
- **Trajeto II:** sai de B(50,20) até P₂(30,0), e de P₂(30,0) a A(20,40), traçando os segmentos BP₂ e P₂A, verificamos que eles têm comprimentos respectivos iguais a 28,28 e 41,23, totalizando assim uma distância de 69,51 km

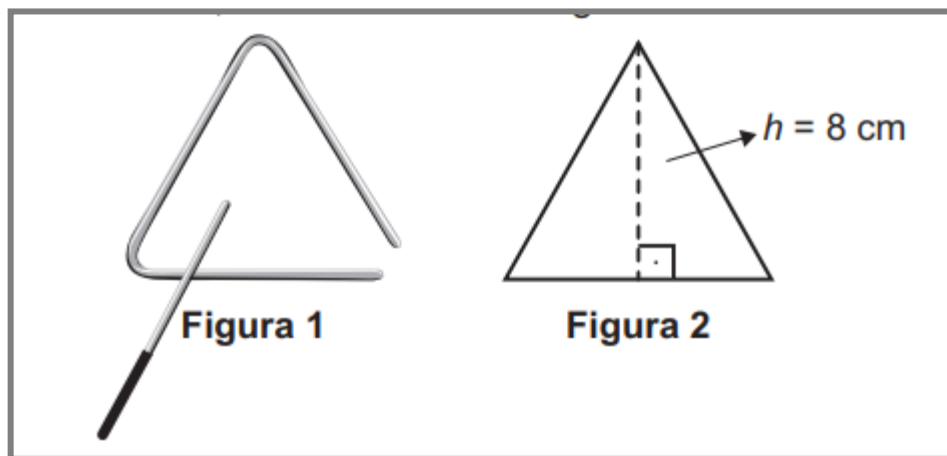
- **Trajeto III:** sai de B(50,20) até $P_3(35,0)$, e de $P_3(35,0)$ a A(20,40), traçando os segmentos BP_3 e P_3A , verificamos que eles têm comprimentos respectivos iguais a 25 e 42,72, totalizando assim uma distância de 67,72 km
- **Trajeto IV:** sai de B(50,20) até $P_4(40,0)$, e de $P_4(40,0)$ a A(20,40), traçando os segmentos BP_4 e P_4A , verificamos que eles têm comprimentos respectivos iguais a 22,36 e 44,72, totalizando assim uma distância de 67,08 km
- **Trajeto V:** sai de B(50,20) até $P_5(50,0)$, e de $P_5(50,0)$ a A(20,40), traçando os segmentos BP_5 e P_5A , verificamos que eles têm comprimentos respectivos iguais a 20 e 50, totalizando assim uma distância de 70 km

Assim o projeto IV é o de menor distância.

5.5.8. (ENEM 2021) QUESTÃO 146 PROVA AMARELA

O instrumento da percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 64: (ENEM 2021) QUESTÃO 146 PROVA AMARELA



Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de um triângulo equilátero de altura h , conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura. Assuma que não ocorram perdas de material no

processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo eqüilátero representado na Figura 2.

Considere 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é

A 9,07.

B 13,60.

C 20,40.

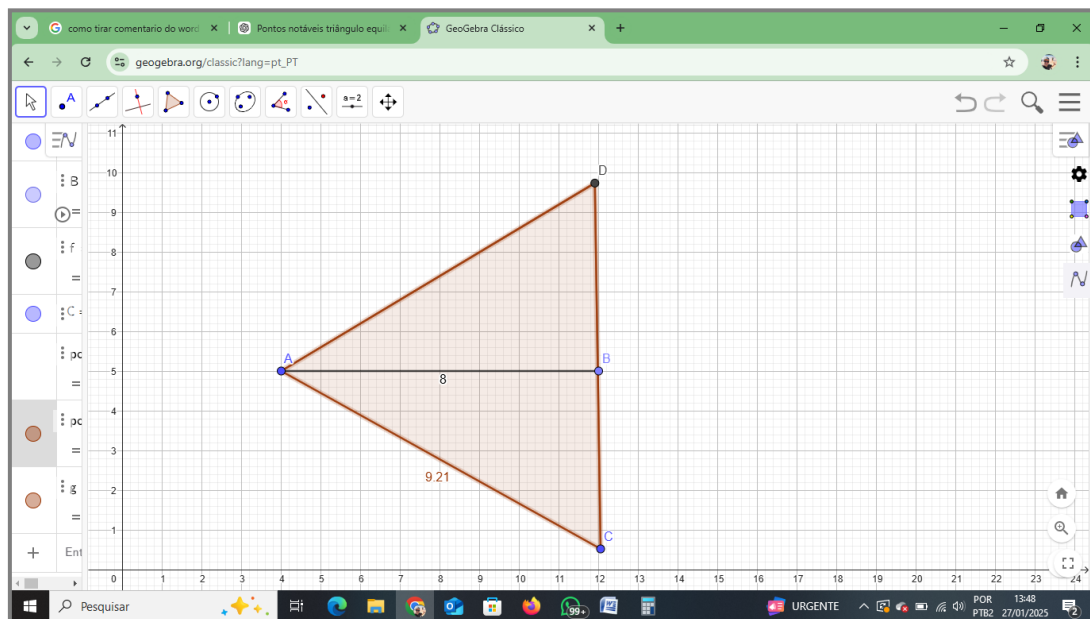
D 27,18.

E 36,24.

Solução:

1. Construa um segmento de reta AB de comprimento 8 cm.
2. Construa um triângulo eqüilátero de vértices A, C e D. ajuste o vértice C de modo que a reta $\overline{CD}$ passe por B.
3. Dessa forma, aparece que o lado do triângulo tem comprimento 9,1 cm. Como a questão quer saber o comprimento total, é preciso multiplicar por 3. Dessa forma a resposta correta é a letra D. É importante saber que a questão pede uma aproximação para $\sqrt{3}$, por esse motivo o valor é aproximado.

Figura 65: resolução da questão 5.5.8



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do GeoGebra Classic (2025)

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo central investigar a construção e análise dos pontos notáveis de um triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro) utilizando o *GeoGebra Classic* como ferramenta de apoio à resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). A partir da identificação das dificuldades enfrentadas pelos alunos do Ensino Médio no aprendizado de conceitos geométricos, especialmente os mais abstratos, este trabalho buscou apresentar uma proposta inovadora e acessível para tornar o ensino da Geometria mais visual, dinâmico e significativo.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, ficou evidente que o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no contexto escolar, quando bem orientado, pode contribuir significativamente para o processo de ensino aprendizagem. A proposta de integrar o *GeoGebra Classic* às aulas de Matemática, especialmente nas atividades voltadas aos triângulos e seus pontos notáveis, demonstrou-se eficiente para tornar os conteúdos mais tangíveis e compreensíveis. A interatividade proporcionada pelo software permite que os alunos visualizem diretamente as propriedades geométricas em tempo real, promovendo uma aprendizagem baseada na experimentação e na construção ativa do conhecimento.

A abordagem adotada também dialoga diretamente com os princípios estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que valoriza o uso pedagógico das tecnologias e a resolução de problemas como eixos fundamentais do ensino da Matemática. Nesse sentido, o trabalho reforça a tese de que o uso do *GeoGebra* pode ser um diferencial no ensino da Geometria, especialmente por permitir que conceitos teóricos ganhem sentido por meio da manipulação de construções dinâmicas, o que facilita a internalização de conteúdos como mediatriz, bissetriz, altura e mediana, fundamentais para o entendimento dos pontos notáveis de um triângulo.

Ao resolver questões do ENEM com o apoio do *GeoGebra Classic*, foi possível mostrar aos alunos como a visualização e a interação com as figuras geométricas podem fornecer pistas importantes para a resolução de problemas, mesmo sem recorrer inicialmente a cálculos complexos. Essa prática não substitui o rigor matemático, mas atua como uma ponte entre a abstração e a realidade visual,

contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e do raciocínio lógico dos estudantes.

Além disso, o trabalho evidenciou alguns desafios enfrentados na implementação de ferramentas digitais no cotidiano escolar, como a necessidade de formação continuada dos professores, a disponibilidade de equipamentos nas escolas e a resistência inicial de alguns profissionais frente ao uso de tecnologias. Tais obstáculos, no entanto, podem ser superados com políticas públicas voltadas à capacitação docente e à valorização do uso pedagógico das TDIC, além de um planejamento didático que incorpore gradualmente esses recursos de forma crítica e intencional.

Este estudo não apenas oferece uma alternativa prática para o ensino da Geometria, mas também serve como referência para professores e estudantes que desejam explorar novas formas de aprendizagem, mais conectadas com as realidades digitais da atualidade. O material aqui apresentado pode ser adaptado para diferentes níveis de ensino e estilos de aprendizagem, permitindo que o professor amplie sua atuação em sala de aula e que os alunos desenvolvam maior autonomia e protagonismo em seus estudos.

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se expandir a aplicação do *GeoGebra* para outras áreas da Matemática, como funções, estatística, análise combinatória e geometria espacial. Além disso, seria interessante investigar o impacto do uso dessa ferramenta em avaliações externas, como o próprio ENEM, em comparação com turmas que seguem abordagens tradicionais. Outra possibilidade seria o desenvolvimento de sequências didáticas interativas, alinhadas à BNCC, com o uso sistemático do *GeoGebra*, integrando-o a outros recursos tecnológicos como plataformas de ensino online, jogos educativos e ambientes virtuais de aprendizagem.

Por fim, ressalta-se que a Matemática, quando trabalhada de forma visual, interativa e contextualizada, pode se tornar mais atrativa, despertando o interesse dos alunos e promovendo uma aprendizagem mais sólida e duradoura. A proposta desenvolvida nesta pesquisa representa uma pequena, mas significativa contribuição para a transformação das práticas pedagógicas na educação matemática, reafirmando o papel do professor como mediador e do aluno como agente ativo na construção do conhecimento.

Referências

BONJORNO, José Ruy. *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. São Paulo: FTD, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei n. 9.394/96. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 18 jun. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Programa Nacional de Tecnologia Educacional ProInfo*. 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12242&Itemid=506. Acesso em: 10 out. 2024.

INFOESCOLA. *Geometria plana: conceitos históricos e cálculo de áreas*. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/geometria-plana-conceitos-historicos-e-calculo-de-areas/#passeio-pela-historia>. Acesso em: 18 jun. 2024.

KENSKI, Vani. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 5. ed. Campinas: Papirus, 2012.

LÉVY, Pierre. *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34, 1999.

MORAN, José Manuel. *Mudando a educação com metodologias ativas*. São Paulo: Papirus, 2015.

SILVA, João. A reta de Euler e os pontos notáveis do triângulo. *Revista de Matemática Aplicada*, v. 10, n. 2, p. 45-60, 2023. Disponível em: <Acesso em: 19 mar. 2025>. (obs: falta o link aqui, se tiver posso inserir)

VILAR, Iriedson Souto Maior de Moraes. *Alguns pontos notáveis do triângulo e aplicações*. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2020. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br>. Acesso em: 19 mar. 2025.