



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



DAVID LUAN DE BARROS DANTAS

LUGARES GEOMÉTRICOS EM VESTIBULARES E CONCURSOS

ORIENTADOR:
PROF. DR. AILTON RODRIGUES DA SILVA

Natal - RN
Março de 2025

DAVID LUAN DE BARROS DANTAS

LUGARES GEOMÉTRICOS EM VESTIBULARES E CONCURSOS

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFRN como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ailton Rodrigues da
Silva.

Natal - RN
Março de 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Dantas, David Luan de Barros.

Lugares geométricos em vestibulares e concursos / David Luan de Barros Dantas. - 2025.
310 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva.

1. Geometria analítica - Dissertação. 2. Lugares geométricos - Dissertação. 3. Ensino médio - Dissertação. 4. Material didático - Dissertação. 5. Resolução de problemas - Dissertação. 6. Vestibulares - Dissertação. I. Silva, Ailton Rodrigues da. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 514.12(043.3)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DAVID LUAN DE BARROS DANTAS

LUGARES GEOMÉTRICOS EM VESTIBULARES E CONCURSOS

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva (UFRN - Orientador)

Prof. Dr. Ronaldo César Duarte (UFRN - Membro interno)

Prof. Dr. José Luando de Brito Santos (UEPB - Membro externo)

Natal - RN

Março de 2025

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria do Socorro e Sebastião Almeida; aos meus irmãos Diêgo e Daniel; à minha esposa Isabel Laize; e ao meu filho Ivan Henrique.

Agradecimentos

A Deus, pela minha vida e por me permitir superar todos os desafios encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais, Maria do Socorro e Sebastião Almeida, pelo apoio incondicional na minha formação educacional e humana.

Aos meus irmãos, Diêgo e Daniel, que sempre estiveram ao meu lado.

À minha esposa, Isabel Laize, pela paciência, compreensão e apoio constantes durante todo o curso.

À minha sogra, Vitória, a quem considero uma segunda mãe.

Ao meu filho, Ivan Henrique, por ser minha maior fonte de motivação em todas as minhas conquistas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva, pelos conselhos valiosos e pela parceria indispensável para a realização deste trabalho.

Aos membros da comissão examinadora, Dr. Ronaldo César Duarte e Dr. José Luando de Brito Santos, por aceitar participar em avaliar e sugerir correções para melhoria do trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT da UFRN, por todos os ensinamentos transmitidos dentro e fora da sala de aula.

À direção da Escola Municipal Dr. Roberto Bezerra Freire, nas pessoas de Danyella Dornelas e Emanuel Wilson, pelo apoio e compreensão.

Aos meus colegas do PROFMAT: Adilson, Adriano, Evaldo, Ewerton, Neto, Jafia, Jefferson, Joel, Josimário, Júlio, Mikaelly e tantos outros com quem compartilhei esta jornada. Um homem é a média daqueles com quem convive, e vocês foram essenciais neste percurso.

Aos meus amigos Hilton, Letícia e Marina, por seus conselhos e incentivo ao longo de toda esta caminhada.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo oferecimento deste curso em rede nacional.

A todos, minha eterna gratidão.

E no final
O amor que você recebe
É igual
Ao amor que você dá - The Beatles

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, destacando a relevância do conceito de Lugar Geométrico e sua aplicação na resolução de problemas geométricos e algébricos. O estudo inclui uma análise histórica do Exame Vestibular e enfatiza a importância de materiais didáticos bem estruturados, focados em estratégias de resolução de problemas, para a preparação de estudantes em vestibulares, concursos e olimpíadas matemáticas. São apresentados exemplos e exercícios contextualizados, com destaque para o estudo das cônicas e outros lugares geométricos. O produto educacional resultante é uma apostila didática, elaborada como um guia prático para professores e estudantes, visando fortalecer a compreensão e aplicação desses conceitos em diferentes contextos avaliativos.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Lugares Geométricos, Ensino Médio, Material Didático, Resolução de Problemas, Vestibulares.

Abstract

This dissertation aims to contribute to the teaching and learning of Analytical Geometry in High School, highlighting the relevance of the concept of Locus and its application in solving geometric and algebraic problems. The study includes a historical analysis of the University Entrance Exam and emphasizes the importance of well-structured teaching materials focused on problem-solving strategies for preparing students for university entrance exams, competitions, and mathematical olympiads. Contextualized examples and exercises are presented, with emphasis on the study of conic sections and other loci. The resulting educational product is a didactic booklet, designed as a practical guide for teachers and students, aiming to strengthen the understanding and application of these concepts in different assessment contexts.

Keywords: Analytical Geometry, Locus, High School, Teaching Material, Problem Solving, Entrance Exams.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 Vestibular x Material Didático	5
1.1 Uma Breve História do Vestibular	6
1.1.1 A Criação do Exame Vestibular	6
1.1.2 O aumento da demanda universitária	7
1.1.3 O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)	8
1.2 A Importância de um Bom Material Didático	10
1.2.1 Funções e Características dos Materiais Didáticos	10
1.2.2 Material Didático como Facilitador do Processo de Ensino-Aprendizagem	10
1.2.3 Autonomia Docente e Formação Continuada	11
1.2.4 A Aprendizagem Significativa de Ausubel	12
1.2.5 A Resolução de Problemas	12
2 Conceitos Preliminares	15
2.1 Medições no Plano Cartesiano	15
2.1.1 Comprimento de um Segmento	15
2.1.2 Coordenadas na Reta e Distância entre Pontos da Reta	18
2.1.3 Coordenadas no Plano	19
2.1.4 Distância entre Pontos em $\mathbb{R}^2$	21
2.2 Vetores e sua Importância na Geometria Analítica	28
2.2.1 Segmentos Orientados	29
2.2.2 Definição de Vetor	35
2.2.3 Produto Interno e Ângulo entre Vetores	41
2.3 Reta e suas Propriedades no Plano	49
2.3.1 Equações Paramétricas da Reta	49
2.3.2 Equação Cartesiana (ou Geral) da Reta	51
2.3.3 Distância de um Ponto a uma Reta	57
2.4 Transformações no Plano Cartesiano	61
2.4.1 Translação dos Eixos	61
2.4.2 Rotação dos Eixos	64

	10
3 Lugar Geométrico	69
3.1 Definição	69
3.2 Exemplos	70
3.3 Cônicas	80
3.3.1 Seções Cônicas	80
3.3.2 Circunferência	82
3.3.3 Círculo	86
3.3.4 Elipse	89
3.3.5 Hipérbole	96
3.3.6 Parábola	104
4 Cônicas Rotacionadas	108
4.1 Equação Geral do Segundo Grau	108
4.1.1 O Discriminante e sua relação com as Cônicas	108
4.1.2 Reconhecendo as Cônicas	112
4.1.3 Eliminando os termos do 1º Grau	113
4.1.4 Eliminando, por meio de uma rotação, o termo misto	114
CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
APÊNDICES	120
A Apostila	121
INTRODUÇÃO	1
MEMOREX	1
A.1 Distância entre Pontos no Plano	1
A.1.1 Ponto Médio de um Segmento	1
A.2 Vetores no Plano	1
A.2.1 Coordenadas de um vetor dados os pontos inicial e final	1
A.2.2 Operações com Vetores	1
A.2.3 Ângulo entre dois vetores	2
A.2.4 Vetor Perpendicular	2
A.3 Equações da Reta	2
A.3.1 Equação Cartesiana (Equação Geral)	2
A.3.2 Equação Paramétrica:	2
A.3.3 Distância de um ponto a uma reta	2
A.4 Equações das Cônicas	2
A.4.1 Equação da Circunferência	2
A.4.2 Equação da Elipse de centro $C = (x_C, y_C)$	3
A.4.3 Equação da Hipérbole de centro $C = (x_C, y_C)$	3

A.4.4	Equação da Parábola com vértice $V = (x_V, y_V)$	4
A.5	Transformações no Plano Cartesiano	4
A.5.1	Translação dos eixos	4
A.5.2	Rotação dos eixos	4
A.6	Equação geral do segundo grau	4
A.6.1	Discriminante Δ	4
B	Conceitos Básicos	6
B.1	Eixo	7
B.2	Distância entre Pontos em um Eixo	7
B.3	Localização de um Ponto no Plano	8
B.4	Quadrantes	9
B.5	Distância entre Pontos em $\mathbb{R}^2$	9
B.6	Exercícios	13
C	Vetores	15
C.1	Por que Vetores?	15
C.1.1	Segmentos Orientados	15
C.1.2	Definição de Vetor	18
C.1.3	Produto Interno e Ângulo entre Vetores	22
C.2	Exercícios	24
D	Equação da Reta	25
D.1	Equação Paramétrica	25
D.1.1	Equação Cartesiana (ou Geral)	26
D.2	Distância do Ponto à Reta	31
D.3	Exercícios	31
E	Lugar Geométrico	33
E.1	Definição	33
E.2	Casos Clássicos	34
E.3	Exercícios	39
F	Cônicas	40
F.1	Cônicas	40
F.1.1	Circunferência	41
F.1.2	Círculo	44
F.1.3	Elipse	47
F.1.4	Hipérbole	50
F.1.5	Parábola	53
F.2	Exercícios	55

G	Mudança de Eixos	58
G.1	Transformações no Plano Cartesiano	58
G.1.1	Translação dos Eixos	58
G.1.2	Rotação dos Eixos	61
G.2	Equação Geral do Segundo Grau	62
G.2.1	O Discriminante e sua relação com as cônicas	62
G.2.2	Reconhecendo as Cônicas	63
G.2.3	Descobrimdo o ângulo de rotação	65
G.3	Exercícios	67
H	Questões	69
H.1	2025	69
H.2	2024	70
H.3	2023	72
H.4	2022	76
H.5	2021	78
H.6	2020	80
H.7	2019	81
H.8	2018	82
H.9	2017	84
H.10	2016	85
H.11	2015	87
H.12	2014	88
H.13	2013	89
H.14	2012	90
H.15	2011	91
H.16	2010	93
H.17	2009	93
H.18	2003	94
I	Resoluções	95
I.1	2025	95
I.2	2024	98
I.3	2023	112
I.4	2022	120
I.5	2021	127
I.6	2020	134
I.7	2019	139
I.8	2018	142
I.9	2017	149
I.10	2016	153

I.11	2015		157
I.12	2014		162
I.13	2013		163
I.14	2012		165
I.15	2011		167
I.16	2010		170
I.17	2009		172
I.18	2003		172

INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica, também conhecida como Geometria de Coordenadas, consiste no estudo da Geometria por meio da introdução de coordenadas, integrando os fundamentos da Álgebra para proporcionar uma abordagem sistemática e concreta da Geometria e, por outra perspectiva, no tratamento de problemas de Álgebra sob a óptica da Geometria. Nesse sentido, um dos objetivos da Geometria Analítica é a descrição ou representação de pontos sobre uma reta por meio de números reais, pontos do plano através de pares ordenados de números reais e pontos do espaço como ternas ordenadas de números reais.

A associação de Geometria e Álgebra é importante por permitir o uso das ferramentas de uma área para a resolução dos problemas da outra. Nesse contexto, alguns problemas Algébricos podem ser interpretados, nas lentes da Geometria Analítica, como um problema Geométrico e, portanto, mais facilmente compreensível por um estudante. Da mesma forma, problemas Geométricos de difícil manipulação podem tornar-se mais simples ao considerar a representação algébrica das figuras envolvidas.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) corroboram esse pensamento ao afirmarem:

Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. (BRASIL, 2006, p.77)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) adiciona a importância do uso da Geometria Analítica ao se preocupar com a competência dos estudantes em conhecer e utilizar modelos para a resolução de problemas:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.535)

Dessa maneira, o referido trabalho, tem como objetivo geral contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio trazendo como proposta

de ensino uma visão da importância do conceito de *Lugar Geométrico* e a sua associação tanto com problemas Geométricos e Algébricos, em especial em Vestibulares e Concursos.

Os objetivos específicos desta dissertação são:

1. Investigar as transformações e reformas dos exames de ingresso ao Ensino Superior nos séculos XX e XXI, identificando seus impactos na preparação dos estudantes e na estrutura educacional;
2. Avaliar como materiais didáticos bem estruturados podem facilitar a compreensão dos conceitos, em particular de Geometria Analítica, e promover a autonomia dos alunos;
3. Apresentar e analisar os conceitos essenciais – como comprimento, distância, vetores, equações de retas e o conceito de Lugar Geométrico – evidenciando a inter-relação entre Álgebra e Geometria;
4. Elaborar, como produto educacional, uma apostila didática que integre teoria e prática, com exemplos e exercícios contextualizados, voltada ao estudo dos Lugares Geométricos e à aplicação desses conceitos em Vestibulares e Concursos.

A escolha dos Lugares Geométricos é embasada no conceito de organizador avançado de David Ausubel[1] (2003), o qual afirma que o estudo mais relacional e relevante de um conteúdo particular auxilia a melhor ancorar as ideias do conteúdo mais geral. Sendo assim, compreendendo os Lugares Geométricos, estaremos melhor ancorando nossos conhecimentos da própria Geometria Analítica.

A ênfase em provas de Vestibulares se dá por dois motivos: o interesse do autor, cuja atuação em cursinhos e preparatórios tem longa data, seja como professor, seja como elaborador de questões e de materiais; e a escassez de referencial teórico sobre exames Vestibulares, em especial sobre a história desses exames.

No primeiro capítulo, é abordada a criação do Exame Vestibular desde sua origem com a reforma Carlos Maximiliano de 1915. São apontadas as principais reformas educacionais dos séculos XX e XXI e as suas consequências.

A partir da década de 1920, graças ao aumento do número de candidatos, o número de vagas nas universidades passou a ser insuficiente para o contingente de alunos. Tornou-se necessário mudar as características da seleção, a qual deixou de ser classificatória para tornar-se eliminatória, o que favoreceu a criação dos cursinhos preparatórios.

Os estudantes que queriam ingressar no Ensino Superior eram forçados a fazer diversos exames vestibulares, um para cada instituição. Essa realidade mudou em 1965 com a criação da Cescem (Centro de Seleção de Candidatos às Escolas Médias), a qual deu início a unificação dos exames em um único vestibular (WHITAKER 2010).

O problema dos excedentes não cessou com a unificação dos vestibulares, sendo necessária a expansão das instituições de Ensino Superior abrindo espaço para a Reforma

Universitária de 1968, a qual reformaria as universidades públicas e promoveria a expansão a partir das instituições privadas.

O capítulo segue até os dias atuais com a introdução do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e as suas propostas de democratização do acesso ao Ensino Superior, utilizando o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) para facilitar o acesso do aluno a cursos de todo o Brasil ou vinculando-se ao Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies) para garantir vagas nas instituições particulares a partir da nota do ENEM. É feita uma linha do tempo apresentando as mudanças que ocorreram no formato do exame e do acesso desde sua criação em 1998 até a década de 2010, em que o ENEM tornou-se o exame vestibular padrão para quase todas as Universidades Federais do Brasil.

Também é apresentada a definição e a importância de materiais didáticos estruturados e contextualizados, apresentando exemplos e funções desses materiais, destacando-os como facilitadores do trabalho docente e potencializadores para o desenvolvimento de raciocínio lógico e da autonomia dos alunos. Por fim, é explicada a teoria de George Pólya de Resolução de Problemas, explicando passo a passo como um material focado em questões atua como uma ponte entre o conhecimento teórico e sua aplicação prática.

Em seguida, no segundo capítulo, são apresentados alguns dos conceitos fundamentais da Geometria Analítica, tais como: noções de comprimento, distância, vetores e operações com vetores. Esses conceitos servem de alicerce para o entendimento dos temas que serão aprofundados nos capítulos subsequentes.

No terceiro capítulo, explora-se o conceito de Lugar Geométrico, uma ferramenta poderosa para conectar diferentes áreas do conhecimento matemático. São apresentados exemplos clássicos e aplicações práticas, com ênfase nas cônicas – circunferência, parábola, elipse e hipérbole – além de outros lugares geométricos relevantes para exames e olimpíadas matemáticas.

Na sequência, no quarto capítulo, discute-se a equação geral do segundo grau e o papel do discriminante na identificação das cônicas. São abordadas as técnicas para reconhecer as diferentes formas geométricas e determinar o ângulo de rotação necessário para eliminar o termo misto, simplificando a análise dos casos.

A proposta final deste estudo materializa-se no Apêndice no formato de uma apostila didática, a qual busca atender às demandas dos professores e dos estudantes. Enquanto a dissertação abordará o tema de forma mais técnica e estruturada em teoremas e axiomas, sendo recomendada aos professores que queiram se aprofundar no tema, a apostila pretende ser um recurso prático e acessível, abordando de forma clara e objetiva os conceitos fundamentais de Lugares Geométricos, oferecendo exemplos e exercícios resolvidos de vestibulares, concursos e olimpíadas. Dessa forma, busca-se que a apostila possa ser utilizada de forma independente pelo aluno, buscando a sua autonomia.

Este trabalho visa não apenas contribuir para o aprimoramento do ensino de

Geometria Analítica, mas também inspirar novos estudos acerca do exame Vestibular. Além disso, melhor instruir aos professores e alunos quanto à preparação para esse exame.

1 Vestibular x Material Didático

Na pesquisa realizada para esta dissertação, realizada no Portal de Periódicos da CAPES e no Google Scholar através do descritor “Vestibular”, não encontramos muitos trabalhos acadêmicos sobre Exames Vestibulares. Dentre os poucos estudos, a maioria trata de aspectos como a ansiedade dos candidatos e a relevância dos cursinhos populares, sem, no entanto, explorar a história e a evolução do vestibular em si. Assim, percebe-se uma lacuna na literatura acadêmica quanto à compreensão do vestibular enquanto instituição, sendo este um dos focos de análise deste trabalho.

Diante da relevância do vestibular, é intrigante observar a escassez de estudos acadêmicos voltados a esse tema. Uma possível explicação para essa lacuna pode estar no objetivo oficial do Ensino Médio que, tradicionalmente, não se propõe a preparar os estudantes para exames externos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL 1997)

O texto oficial ainda corrobora o seu pensamento ao afirmar “O significado de educação geral no nível médio, segundo o espírito da LDB, nada tem a ver com o ensino enciclopedista e academicista dos currículos de Ensino Médio tradicionais, reféns do exame vestibular”.

Apesar desses objetivos formais, a realidade vivenciada pelos estudantes é distinta. Desde o ingresso no Ensino Médio, a preparação para exames seletivos se impõe como uma necessidade concreta. Somente em 2024, 3,15 milhões de estudantes brasileiros fizeram o Exame Nacional do Ensino Médio (INEP 2024).

A procura pelo Ensino Superior no Brasil vem da ideia de que aqueles que têm maior formação possuem melhores chances de obter bons salários. Esse pensamento é corroborado pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA) ao afirmar: “o diferencial médio de rendimentos por hora entre trabalhadores com ensino superior e

trabalhadores com ensino médio mostra um valor 2,6 vezes maior para o primeiro grupo” (IPEA, 2023).

Sendo assim, os professores se veem na necessidade de fazer uma preparação dos seus alunos para essas provas, contradizendo grande parte da teoria educacional que aprenderam na universidade. Se há benefícios ou não, a realidade é que os alunos precisam estar preparados e os professores precisam prepará-los.

A quantidade extensa de conteúdos e as variadas competências e habilidades dos alunos fazem com que a tarefa do professor de planejar as suas aulas seja mais complexa. Alunos com maior aptidão matemática acabam perdendo, pois se as aulas forem focadas nesses, então os alunos com maior dificuldade - o que em matemática é comum - ficarão para trás.

Nesse capítulo, buscaremos entender sobre como o Vestibular se tornou tão importante no Brasil.

1.1 Uma Breve História do Vestibular

1.1.1 A Criação do Exame Vestibular

O vestibular no Brasil possui uma trajetória marcada por transformações sociais, políticas e educacionais. Segundo Whitaker (2010) [31] a origem do Exame Vestibular remonta ao início do século XX com a invenção dos exames de admissão, os quais, pela reforma educacional Carlos Maximiliano de 1915, tornaram-se instrumento oficial para ingresso no Ensino Superior.

Na década de 1920, o número de candidatos superou a quantidade de vagas oferecidas, mudando a característica do Vestibular de “Exame de Saída” para “Exame de Entrada”. O Exame de Saída tinha por característica avaliar se o estudante havia aprendido os conteúdos do Ensino Médio enquanto o Exame de Entrada buscava verificar se os candidatos estavam realmente aptos a ingressarem no Ensino Superior. Os exames, no entanto, ainda eram eliminatórios, tendo em vista que mesmo com alto número de candidatos, a maioria não atingia a pontuação necessária para o ingresso nos cursos. Tornou-se necessário, segundo Guimarães (1984) [16], a criação de preparatórios para os exames, sendo este um evento embrionário para a criação dos cursinhos pré-vestibulares.

Sobre a estrutura inicial dos cursinhos, Whitaker (2010) afirma que “eram instalados em salas modestas, em bairros próximos ao centro da cidade, sem nenhum aparato que os destacasse na cena urbana”. Eram, portanto, feitos de forma artesanal por professores empreendedores, sendo específicos para cada grande área dos vestibulares da época: exatas, biológicas e humanísticas.

Segundo Baltar et al. (1980) [2] até a década de 1960, os estudantes que queriam ingressar em uma universidade eram forçados a fazer diversos exames vestibulares, um

para cada instituição. O crescimento da demanda pelo Ensino Superior exigiu das instituições de ensino a adoção de métodos adequados para a aplicação de concursos a elevado número de candidatos.

A partir de 1965 houve a unificação dos exames de várias universidades em um único exame. O exame que era oral e eliminatório passaria a utilizar questões objetivas e seria eliminatório e classificatório, aprovando os melhores classificados em número igual ao de vagas.

Segundo Nicoletti (2002) [22],

Naquele ano, foi feito o primeiro vestibular unificado, chamado Cessem (Centro de Seleção de Candidatos às Escolas Médicas), que chegou a fazer vestibular para mais de 20 instituições da área de biológicas. Depois surgiram o Cescea, para humanas, e o Mapofei, para exatas. Para os vestibulandos que reclamam hoje do número de questões da Fuvest (160), a prova do Cessem pode parecer uma tortura. No total, havia mais de 600 testes. (Nicoletti 2002)

Tais exames unificados durariam até a criação da Fuvest (Fundação Universitária para o Vestibular), em 1976, criando uma única banca para todas as áreas. A ideia era de racionalizar o acesso ao Ensino Superior com critérios únicos, reduzindo os custos das Universidades com exames próprios e facilitando a preparação dos estudantes. O efeito, no entanto, foi a confusão para os vestibulandos, tendo em vista que esta foi uma dentre várias mudanças que ocorreram nos últimos anos no modelo do exame de acesso.

Esta confusão foi exacerbada pela desunificação dos vestibulares, iniciada pela UNESP em 1981 com a criação de seu sistema de vestibulares, a VUNESP. Essa separação foi seguida pela UNICAMP (NICOLETTI 2002).

1.1.2 O aumento da demanda universitária

O aumento da demanda pelo acesso ao Ensino Superior no Brasil é um fenômeno que pode ser compreendido a partir de transformações sociais, econômicas e educacionais ocorridas ao longo do século XX. Esse movimento ganhou destaque, especialmente, a partir das décadas de 1950 e 1960, quando o crescimento do Ensino Médio ampliou significativamente o número de estudantes aptos a ingressar nas universidades. Segundo Martins,

Em 1962, (o Ensino Superior) atendia pouco mais de 100 mil alunos, desempenho que contrasta de maneira significativa com os 2,1 milhões que freqüentaram a graduação em 1998. Como se pode perceber existem flutuações nesse processo de expansão. O período de maior número de matrículas ocorreu durante os anos de 1962 e 1972, quando a taxa de crescimento foi de 540%. Na década seguinte, o ritmo começa a diminuir, registrando-se um crescimento de 86% no período entre 1973 e 1983. (Martins 2000)

A Reforma Universitária de 1968 representou um marco nesse processo, com o objetivo central de modernizar e estruturar as universidades públicas, em especial, as

instituições federais. A reforma trouxe inovações importantes, como a abolição das cátedras vitalícias, a implementação do regime departamental, a institucionalização da carreira acadêmica e a criação de programas de pós-graduação, que impulsionaram a integração entre ensino e pesquisa.

Entretanto, apesar dos avanços estruturais, a reforma não conseguiu atender à crescente demanda por vagas no Ensino Superior. O modelo universitário público manteve um caráter seletivo dos pontos de vista acadêmico e social, resultando em um grande número de estudantes aprovados nos vestibulares, mas sem acesso efetivo às universidades públicas. Esse fenômeno ficou conhecido como o “problema dos excedentes”, e tornou-se um reflexo claro das limitações do sistema público em absorver a demanda gerada pelo aumento do número de concluintes do Ensino Médio (Martins, 2009).

Segundo Whitaker (2010), o “Milagre Brasileiro” necessitava de profissionais com diversas formações, por exemplo, as administrativas e técnicas, para garantir o processo de industrialização. Nesse contexto, o setor privado emergiu como uma alternativa para suprir a lacuna deixada pelas universidades públicas. Whitaker reitera que as Instituições Particulares passaram a se multiplicar, muitas vezes adotando uma estrutura empresarial voltada mais para a absorção massiva de alunos do que para a qualidade acadêmica e a integração entre ensino e pesquisa.

Além disso, a política educacional das décadas de 60 e 70 adotou o princípio da “expansão com contenção”, buscando aumentar o número de vagas disponíveis com o menor custo possível para o Estado. Essa abordagem fortaleceu ainda mais a participação das instituições privadas no cenário educacional brasileiro, consolidando um modelo que, até hoje, apresenta desigualdades significativas no acesso e na qualidade do Ensino Superior (Martins, 2009).

1.1.3 O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

No início da década de 1980, o autor Vianna (1980) [29] já apontava que o vestibular precisava ser modificado:

O vestibular, nos dias de hoje, precisaria ser dinamizado, modificado e até mesmo suprimido, se for o caso, a fim de que surjam novos processos de seleção mais ajustados às condições do momento, e menos influenciados pelo contexto burocratizado das atuais instituições educacionais. (Vianna 1980)

O autor ainda pontua que diversas críticas eram feitas, à época, sobre os exames vestibulares, dentre elas: o desvio dos objetivos do Ensino Médio, tornando-o preparação para a universidade; rigidez de conteúdos, servindo para verificar pontos convencionais e supérfluos; discriminativo, por favorecer as classes socio-economicamente elevadas.

Em 1998 seria feita a primeira edição do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes de 184 municípios brasileiros. Segundo o INEP, as notas dessa edição do ENEM foram válidas somente para duas instituições de Ensino Superior. Já em 1999, com a admissão da credibilidade

do Exame, o número de instituições a aceitarem a nota do ENEM aumentou de 2 para 93.

Em 2009 nasce o “Novo ENEM”, modelo utilizado até os dias atuais, com 180 questões objetivas, 45 para cada área do conhecimento e uma redação. No mesmo ano foi criado o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), programa que permite que os estudantes que realizaram o ENEM tenham a oportunidade de disputar vagas em universidades públicas e institutos federais.

Segundo Nogueira et al. (2017) [23] “Embora não existisse uma obrigatoriedade de adesão ao sistema, ele foi paulatinamente adotado pela grande maioria das universidades, institutos federais de educação tecnológica e por algumas instituições estaduais.” Os autores dizem ainda que, em teoria, o Sisu seria positivo para as universidades, ao baratear o processo de seleção de estudantes, melhorar a ocupação de vagas em cursos historicamente pouco procurados, aumentar a mobilidade geográfica dos estudantes brasileiros, permitindo que se inscrevam em universidades em todo o país e trazer maior inclusão graças as leis de cotas.

Ainda em 2009 foi modificada a Matriz de Referência¹ do ENEM para se adequar à Matriz do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA). Essa modificação ocorreu, pois nesse ano o ENEM substituiu o ENCCEJA como exame de certificação para conclusão do Ensino Médio. Somente em 2017 o ENCCEJA voltaria a ser aplicado com sua função original, retirando tal atribuição do ENEM.

Em 2010, o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) passa a adotar as notas do ENEM para a concessão de bolsas estudantis em instituições privadas.

Em 2013, o ENEM se tornou o Exame Vestibular padrão para quase todas as Universidades Federais do Brasil. No ano seguinte seria adotado, inclusive, pelas Universidades de Coimbra e Algarve, em Portugal.

Dos pontos levantados por Vianna (1980) [29], o ENEM preocupou-se com a rigidez de conteúdos, trazendo a preocupação para a teoria de Competências e Habilidades²; e com a discriminação de acesso, através do Sisu e da Lei de Cotas. Com relação ao desvio dos objetivos do Ensino Médio, o problema continua. Enquanto antes havia uma preparação específica para o exame de cada Universidade, agora a preparação é nacional para um único exame.

¹Documento que define as Competências e Habilidades que serão avaliadas no exame. Ela é elaborada pelo Ministério da Educação (MEC) e é usada para orientar a elaboração das provas.

²Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018).

1.2 A Importância de um Bom Material Didático

Agora que compreendemos que o Vestibular é uma realidade, uma pergunta natural que vem é a seguinte: O que o professor pode fazer a respeito desse cenário?

No contexto do Brasil, grande parte dos professores se veem obrigados a ter mais de um vínculo empregatício, precisando trabalhar antes, durante e depois do horário de trabalho para garantir um processo de ensino-aprendizagem coerente e eficiente.

Pensando nesse quadro, estudaremos o papel educacional do Material Didático no aumento da eficiência do trabalho pedagógico e no auxílio à independência do estudante. Além disso, analisaremos sobre a necessidade do trabalho de resolução de problemas na formação de um vestibulando, com ênfase à importância de apostilas. Por fim, indicaremos como essa dissertação e, principalmente, o seu apêndice serão úteis para o estudo de Geometria Analítica para alunos e professores.

1.2.1 Funções e Características dos Materiais Didáticos

Antes de dissertar sobre a importância de um bom material didático é necessário que compreendamos o que vem a ser um material didático.

O processo de ensino-aprendizagem se dá a partir do uso de diversos recursos e instrumentos que, segundo Ferro e Bergmann (2008) [11], “servem para planificar, desenvolver e avaliar um conteúdo”. Tais termos referem-se à organização e apresentação do conteúdo, à sugestão de atividades e observações metodológicas e a sugestões de avaliações para que o professor obtenha dados sobre o desenvolvimento de seus alunos.

Os autores reforçam ainda que tais instrumentos são usados não somente pelos alunos, mas também por professores, destacando que existem várias funções e tipos de ferramentas. Dentre os materiais impressos, são destacados Livros, Fascículos, Imprensa e Guias Didáticos. Já com relação aos materiais sem suporte do papel, dá-se ênfase aos aparatos digitais. Com relação às funções, são diversas as destacadas por Ferro e Bergmann, dentre as quais o material pode ter função inovadora, motivadora, estruturadora da realidade, dentre outras.

Definimos, portanto, que qualquer material pode tornar-se “didático”, desde que seja estabelecido como será usado e com que objetivo será apresentado em sala de aula.

1.2.2 Material Didático como Facilitador do Processo de Ensino-Aprendizagem

Dentro do planejamento do profissional da educação, estão os recursos a serem utilizados tanto dentro de sala de aula, quanto fora. Segundo Rosalin, Cruz e Mattos (2017) [27], esse recurso pedagógico atua como um guia estruturante, facilitando a organização dos conteúdos e garantindo que os objetivos pedagógicos sejam alcançados de forma clara e acessível.

Por sua vez, Bandeira (2009) [3] enfatiza que o material didático deve refletir não apenas os conteúdos curriculares, mas também a filosofia educacional subjacente ao processo de ensino. Ele deve ser constantemente revisado e atualizado para manter sua relevância e adequação às exigências dos documentos oficiais, como a BNCC e os parâmetros curriculares que norteiam o ensino no Brasil. Além disso, Bandeira destaca a necessidade de que os materiais dialoguem com as realidades e os desafios específicos dos estudantes, apresentando exemplos contextualizados e situações-problema que conectem a teoria com a prática.

No entanto, segundo o Manual de Elaboração de Material Didático Impresso elaborado pelo SENAI-SP (1994) [28], “Nem sempre o professor encontra, prontos, os meios didáticos que necessita. Cabe a ele a tarefa de elaborar esses recursos, tarefa para a qual poucos estão devidamente preparados”. No contexto educacional, essa realidade impõe um desafio adicional ao professor, que muitas vezes precisa lidar com uma carga horária extensa e diversas turmas, tornando inviável a criação de materiais próprios para cada aula. A disponibilidade de um material didático bem estruturado e previamente elaborado reduz significativamente o tempo necessário para planejamento, permitindo que o docente concentre seus esforços na adaptação do conteúdo às necessidades da turma, no aprofundamento das estratégias pedagógicas e no acompanhamento do aprendizado dos alunos. Além disso, um material didático pronto e de qualidade assegura uma maior padronização no ensino, garantindo que os estudantes tenham acesso a uma abordagem coerente e organizada dos conteúdos, algo essencial na preparação para vestibulares e concursos.

Com base nisso, essa dissertação apresenta, em seu apêndice, um material didático estruturado no formato de uma apostila para o estudo de Geometria Analítica com ênfase em vestibulares e concursos.

1.2.3 Autonomia Docente e Formação Continuada

A eficácia de um material didático não depende apenas de sua qualidade técnica ou de seu conteúdo bem estruturado, mas também da forma como ele é apropriado e ressignificado pelo professor em sala de aula. Nesse sentido, a autonomia docente emerge como um elemento fundamental para garantir que os instrumentos sejam utilizados de maneira flexível, adaptativa e alinhada às necessidades específicas dos alunos. Conforme destaca Fiscarelli (2007), o material didático, por si só, não transforma o processo de aprendizagem; é o professor que, por meio de sua experiência e reflexão crítica, confere sentido ao uso desses materiais, tornando-os ferramentas eficazes no processo de ensino.

Essa autonomia, entretanto, não surge de forma isolada. Ela está diretamente ligada à formação inicial e continuada dos professores. Segundo Rosalin, Cruz e Mattos (2017), muitos desafios no uso adequado dos materiais didáticos decorrem de lacunas nos programas de capacitação, que frequentemente falham ao abordar questões práticas e contextuais sobre a utilização desses recursos. Para os autores, a formação continuada

deve ser um espaço para a reflexão coletiva, onde os docentes possam compartilhar experiências, trocar estratégias e desenvolver maior segurança no uso dos materiais.

Sendo assim, essa dissertação busca auxiliar o professor de matemática na busca dessa formação continuada, revisando os conteúdos de Geometria Analítica e Vetorial no capítulo 2, aprendendo o conceito de Lugar Geométrico e o aplicando em questões de vestibulares no capítulo 3. Ademais, no capítulo 4 o trabalho busca a compreensão de como resolver questões que envolvem translação e rotação dos eixos coordenados.

1.2.4 A Aprendizagem Significativa de Ausubel

Segundo Ausubel (2003)[1], a aprendizagem significativa ocorre quando novos conhecimentos se conectam a ideias relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Nesse sentido, ideias novas surgem a partir dos conhecimentos prévios do estudante. E, a partir desses novos conhecimentos, é possível fazer uma análise mais aprofundada do conteúdo aprendido. A isso, Ausubel dá o nome de “organizador avançado”.

Um material didático pode atuar como um organizador avançado na visão de Ausubel tendo em vista que, segundo o autor:

O organizador avançado resolve esta dificuldade desempenhando um papel de mediador, i.e., sendo mais relacional e relevante para o conteúdo particular da tarefa de aprendizagem específica, por um lado, e para com o conteúdo mais geral das ideias potencialmente ancoradas, por outro. (Ausubel 2003)

A maioria dos alunos começa com um conhecimento superficial e desconectado, mas um ensino eficaz pode ajudá-los a organizar melhor as informações, tornando-as mais significativas e interligadas, como fazem os especialistas. Quanto mais conectados os conceitos e ideias, mais fácil será lembrar e usar o conhecimento.

Ausubel destaca que os organizadores avançados não apenas facilitam a integração dos novos conhecimentos, mas também permitem que o aprendiz desenvolva uma compreensão mais profunda e estável do conteúdo, minimizando a aprendizagem mecânica e arbitrária. No contexto da Geometria Analítica, um material didático que ajude o aluno a compreender os Lugares Geométricos e suas aplicações atua como um organizador avançado, favorecendo uma compreensão mais clara e integrada dos conceitos fundamentais da própria Geometria Analítica no processo.

1.2.5 A Resolução de Problemas

Como o objetivo do material proposto por este trabalho é o de fornecer suporte a professores e alunos na resolução de questões de vestibulares e concursos, é imprescindível citar a teoria do Matemático Húngaro George Pólya. Em seu livro clássico “How to Solve It”³, Pólya oferece um método estruturado para resolver problemas matemáticos. O

³ “Como Resolver Problemas”

matemático propôs quatro etapas fundamentais para resolver problemas: compreender o problema; fazer um plano; executar o plano e revisar a solução obtida.

Cada uma dessas etapas desempenha um papel essencial no processo de aprendizagem e resolução de problemas. A primeira etapa, compreender o problema, envolve a leitura atenta do enunciado, a identificação dos dados fornecidos e das incógnitas, bem como a análise das condições impostas. Um bom material didático deve fornecer exemplos claros de como interpretar enunciados complexos, utilizando diagramas, ilustrações e explicações detalhadas para guiar o estudante na compreensão inicial do problema.

Na segunda etapa, fazer um plano, o aluno precisa escolher as ferramentas matemáticas adequadas para abordar a questão. Isso pode envolver a seleção de teoremas, fórmulas ou representações gráficas que facilitem a resolução. O material deve apresentar não apenas soluções diretas, mas também múltiplas abordagens para um mesmo problema, incentivando o pensamento flexível e criativo. A inclusão de problemas resolvidos passo a passo pode ser fundamental para que os alunos desenvolvam confiança em suas estratégias.

A terceira etapa, executar o plano, é o momento de colocar em prática as estratégias planejadas. Aqui, a precisão nos cálculos, o cuidado com a organização das ideias e a clareza na apresentação dos passos são essenciais. Um bom material deve incluir exemplos de resoluções completas e comentadas, evidenciando os pontos críticos onde erros costumam ocorrer. Além disso, deve oferecer exercícios variados, desde questões básicas até problemas mais desafiadores, para garantir uma prática ampla e consistente.

Finalmente, a etapa de revisar a solução obtida exige que o aluno analise se a resposta final faz sentido e se atende às condições impostas pelo problema. Ferramentas como listas de checagem, perguntas reflexivas e análises comparativas com soluções modelo podem ser extremamente úteis nessa fase. O material pode incluir seções específicas para revisão, incentivando o aluno a refletir sobre sua abordagem e a identificar possíveis melhorias.

Além das quatro etapas propostas por Pólya, é importante destacar que um material didático eficaz deve ser mais do que um compilado de exercícios. Ele deve atuar como um guia pedagógico, estimulando não apenas a resolução mecânica de problemas, mas também o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico. A utilização de recursos visuais, como gráficos e representações geométricas, aliada a explicações didáticas e linguagem acessível, pode tornar o processo de aprendizagem mais intuitivo e eficaz.

Sendo assim, um material focado em questões atua como uma ponte entre o conhecimento teórico e sua aplicação prática, capacitando os estudantes para enfrentar com confiança problemas complexos em vestibulares, concursos e olimpíadas matemáticas. Deve oferecer ferramentas para resolver problemas específicos e promover habilidades transferíveis para outras áreas do conhecimento, contribuindo para a

formação de alunos mais autônomos e preparados para desafios futuros.

2 Conceitos Preliminares

Antes de explorar o conceito de Lugares Geométricos, é essencial compreender alguns fundamentos da Geometria Analítica. Iniciaremos com a definição de comprimento e distância, essenciais para mensurar e localizar pontos no espaço. Em seguida, exploraremos os vetores, que possibilitam a manipulação algébrica de deslocamentos no plano cartesiano. Daremos continuidade com o estudo da equação da reta e a distância de um ponto a uma reta, conceitos que servirão de base para a definição formal dos Lugares Geométricos no próximo capítulo. Por fim, revisaremos os efeitos que a translação ou a rotação dos eixos coordenados tem em equações cartesianas.

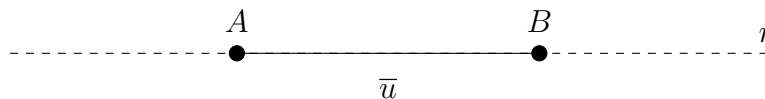
2.1 Medições no Plano Cartesiano

2.1.1 Comprimento de um Segmento

Dada uma reta r e os pontos $A, B \in r$, o segmento cujas extremidades são os pontos A e B é denotado por AB e o comprimento desse segmento será denotado por $\overline{AB}$.

Considere o segmento de reta $AB = u$, o qual definiremos como *Segmento Unitário*. Por definição, o comprimento de u será igual a 1, ou seja, $\overline{u} = 1$.

Figura 2.1: Segmento Unitário



Fonte: Autor

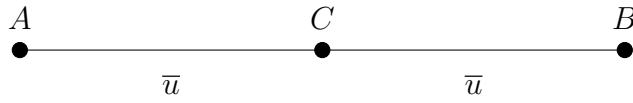
Definição 2.1.1. *Dois segmentos são ditos **congruentes** se tiverem o mesmo comprimento.*

Comprimentos Inteiros

Seja AB um segmento de reta tal que seu ponto médio C divida AB em dois segmentos congruentes a u . Nesse caso, afirmamos que o comprimento de AB será 2.

De fato, note que podemos escrever que $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$.

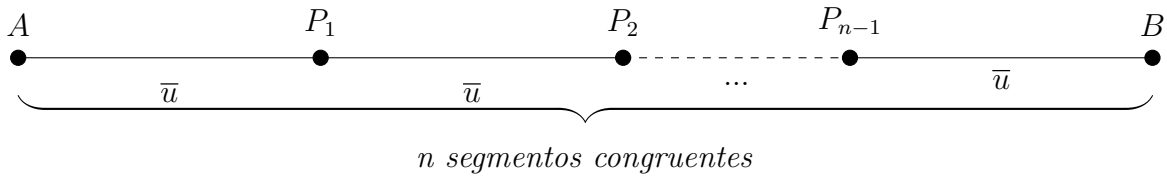
Figura 2.2



Fonte: Autor

De forma geral, seja n um número inteiro positivo. Se um segmento de reta AB possa ser dividido por $n - 1$ pontos em n segmentos congruentes a u , então o comprimento de AB será igual a n .

Figura 2.3



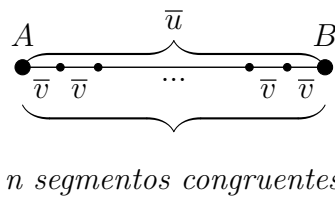
Fonte: Autor

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \underbrace{\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}B}}_{n\text{-parcelas}} \Rightarrow \overline{AB} = \underbrace{\bar{u} + \bar{u} + \dots + \bar{u}}_{n\text{-parcelas}} \\ &\Rightarrow \overline{AB} = n \cdot \bar{u} \\ &\Rightarrow \overline{AB} = n. \end{aligned}$$

Comprimentos Racionais

Seja AB um segmento congruente a u . Suponha que seja possível dividir o segmento AB em n segmentos congruentes entre si, sendo n um inteiro positivo. Como todos os segmentos são congruentes, logo os seus comprimentos são iguais entre si e os denotaremos por $\bar{v}$.

Figura 2.4



Fonte: Autor

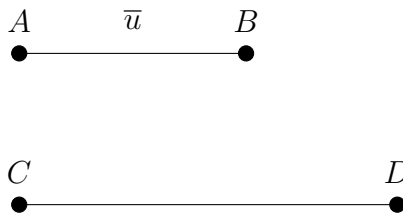
Além disso, a soma dos comprimentos de todos os segmentos é igual ao comprimento de

u , o qual, por definição, é igual a 1. Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{u} = 1 &\Rightarrow \underbrace{\bar{v} + \bar{v} + \dots + \bar{v}}_{n\text{-parcelas}} = 1 \\ &\Rightarrow n \cdot \bar{v} = 1 \\ &\Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Seja CD um segmento de reta tal que CD não pode ser subdividido em segmentos congruentes a u .

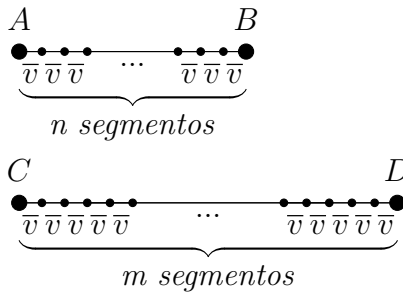
Figura 2.5



Fonte: Autor

Suponha que é possível determinar um segmento v tal que AB possa ser dividido em n segmentos congruentes a v e CD possa ser dividido por m segmentos congruentes a v .

Figura 2.6



Fonte: Autor

Como cada segmento v tem comprimento $\frac{1}{n}$, logo o comprimento de CD será

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \underbrace{\bar{v} + \bar{v} + \dots + \bar{v}}_{m\text{-parcelas}} \Rightarrow \overline{CD} = m \cdot \bar{v} \\ &\Rightarrow \overline{CD} = m \cdot \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \overline{CD} = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

Nem sempre é possível encontrar tal segmento v com a propriedade de subdividir o segmento CD em segmentos congruentes. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.1.2. *Dados os segmentos $AB = u$ e CD , dizemos que os segmentos CD e u são **comensuráveis entre si** se a razão entre seus comprimentos é um número racional. Caso contrário, dizemos que os segmentos são **incomensuráveis entre si**.*

Para o caso em que temos segmentos incomensuráveis entre si, para encontrarmos o valor preciso da medida de CD seriam necessárias técnicas de Cálculo Diferencial e Análise na Reta, como o limite e a aproximação de sequências de racionais. No entanto, para que tenhamos repertório suficiente para que possamos explicitar a relação entre esses tópicos, deveríamos fazer um desvio grande do nosso objetivo inicial, que é o estudo dos Lugares Geométricos.

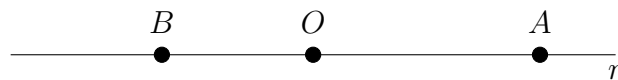
Sendo assim, daremos a seguinte noção intuitiva de como lidaremos com comprimentos reais: Ao medir o comprimento de um segmento, não importa qual instrumento de medição utilizemos, sempre teremos um erro em relação ao valor real, tendo em vista a precisão finita do instrumento de medição e do observador. Caso esse erro seja pequeno o suficiente, podemos considerar a medição satisfatória. Além disso, como o segmento v é tão pequeno quanto desejarmos, logo é possível fazer com que o erro de medição para qualquer comprimento seja também tão pequeno quanto desejarmos.

Portanto, ao trabalharmos com números irracionais, procuraremos por um número racional próximo o suficiente do número desejado para que o erro inerente da medição seja irrisório.

2.1.2 Coordenadas na Reta e Distância entre Pontos da Reta

Seja r uma reta qualquer e O um ponto dessa reta, ao qual daremos o nome de Origem. Além disso, sejam A e B dois pontos dessa reta distintos da Origem, tais que $O \in AB$.

Figura 2.7: Eixo



Fonte: Autor

Ficam definidas as semiretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Usaremos como notação $\overrightarrow{OA}$ como o sentido positivo dessa reta e $\overrightarrow{OB}$ como o sentido negativo. Estabelecemos, dessa forma, um **Eixo**.

Podemos estabelecer uma relação entre os pontos P do Eixo e o conjunto dos números reais da seguinte forma:

- Ao ponto O associa-se o número 0.
- Caso $P \in \overrightarrow{OA}$, então associa-se a P o comprimento do segmento OP .

- Caso $P \in \overrightarrow{OB}$, então associa-se a P o oposto do comprimento do segmento OP .

Definição 2.1.3. *O número associado ao ponto P é chamado de coordenada de P .*

Note que a relação que formamos entre os pontos do Eixo e os Números Reais é uma bijeção, pois:

1. Cada ponto está associado a um único número real e dois pontos distintos quaisquer, estão associados a números reais distintos (injetividade);
2. Para cada número real x existe um único ponto P tal que $d(P, O) = |x|$ e cujo sentido coincide com o sinal do número¹ (sobrejetividade).

Definição 2.1.4. *Dados X e Y , pontos de r , de coordenadas x e y , respectivamente, a distância entre X e Y é dada por*

$$d(X, Y) = |x - y|, \quad (2.1)$$

isto é, tem-se $d(X, Y) = x - y$ se $x \geq y$ e $d(X, Y) = y - x$ se $x < y$.

Pelas propriedades do módulo é possível verificar que:

- $d(X, Y) \geq 0$;
- $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$;
- $d(X, Y) = d(Y, X)$;
- $d(O, X) = |x|$ e $d(O, Y) = |y|$;
- $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$.

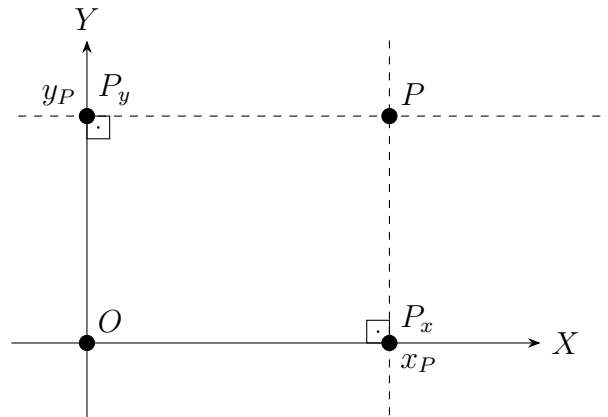
2.1.3 Coordenadas no Plano

Um sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de eixos, OX e OY , que intersectam-se perpendicularmente em um ponto, denominado **Origem**. Diremos, por convenção, que o eixo OX é o Eixo Horizontal e o eixo OY é o Eixo Vertical. Além disso, chamaremos o sistema de eixos de sistema OXY .

Dado um ponto P no plano π , é possível encontrar as coordenadas de P nos eixos OX e OY da seguinte maneira: Existe uma única reta que passa por P paralela ao eixo OY . Essa reta intersecta o eixo OX em um ponto P_x cuja coordenada é denotada por x_P . De maneira similar, existe uma única reta que passa por P paralela ao eixo OX intersectando o eixo OY em um ponto P_y cuja coordenada é denotada por y_P , conforme a figura a seguir:

¹ $\overrightarrow{OA}$ para números positivos e $\overrightarrow{OB}$ para números negativos

Figura 2.8



Fonte: Autor

Definição 2.1.5. Dado um ponto P no plano, os números x_P e y_P são as coordenadas de P e escrevemos $P = (x_P, y_P)$. Denominamos x_P e y_P , respectivamente, *abscissa* e *ordenada* de P .

Ao escolhermos um sistema de eixos ortogonais, podemos estabelecer uma bijeção entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada ponto P do plano, os pontos P_x e P_y são encontrados de forma única, tendo em vista que existe uma única reta paralela a OX que passa por P e uma única reta paralela a OY que passa por P . Assim, as coordenadas (x, y) de P são determinadas de forma única.

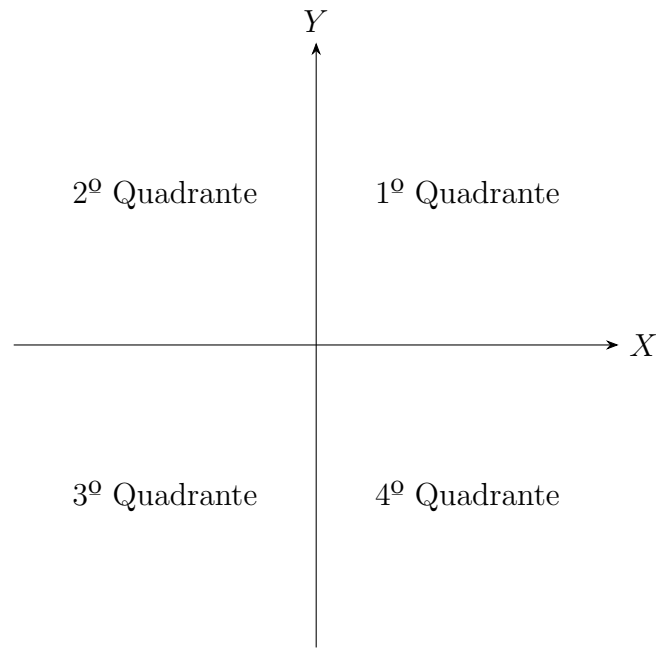
Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar um único ponto P do plano π . Tal ponto é dado pela interseção das perpendiculares aos eixos OX e OY que passam pelos pontos de coordenadas x e y , respectivamente.

Sendo assim existe uma bijeção entre os pontos do plano e os pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, a qual é extremamente útil, pois agora podemos utilizar propriedades **algébricas** de $\mathbb{R}^2$ num ente **geométrico**.

Quadrantes

Os eixos ortogonais OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. Todo ponto do plano pertence aos eixos ou a algum dos quadrantes.

Figura 2.9: Divisão do Plano em Quadrantes



Fonte: Autor

Sendo $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano, é possível verificar em qual quadrante P se encontra pelo seguinte critério:

- P pertence ao 1º Quadrante $\iff x_P > 0$ e $y_P > 0$;
- P pertence ao 2º Quadrante $\iff x_P < 0$ e $y_P > 0$;
- P pertence ao 3º Quadrante $\iff x_P < 0$ e $y_P < 0$;
- P pertence ao 4º Quadrante $\iff x_P > 0$ e $y_P < 0$.

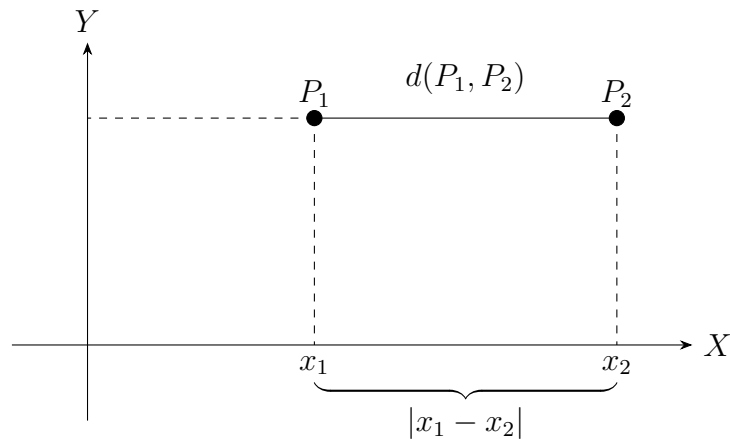
Observação: Note que os pontos do eixo OX são da forma $(x, 0)$ e os pontos do eixo OY são da forma $(0, y)$, sendo a origem o ponto $O = (0, 0)$.

2.1.4 Distância entre Pontos em $\mathbb{R}^2$

Vejamos agora como encontrar a distância entre dois pontos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente.

- Caso P_1 e P_2 possuam a mesma *ordenada*, perceba que o segmento P_1P_2 é congruente ao segmento $P_{x_1}P_{x_2}$ formado pelos pontos de OX cujas coordenadas coincidem com as abscissas dos pontos P_1 e P_2 . Visto que, em um eixo $d(P_{x_1}, P_{x_2}) = |x_1 - x_2|$, logo $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$.

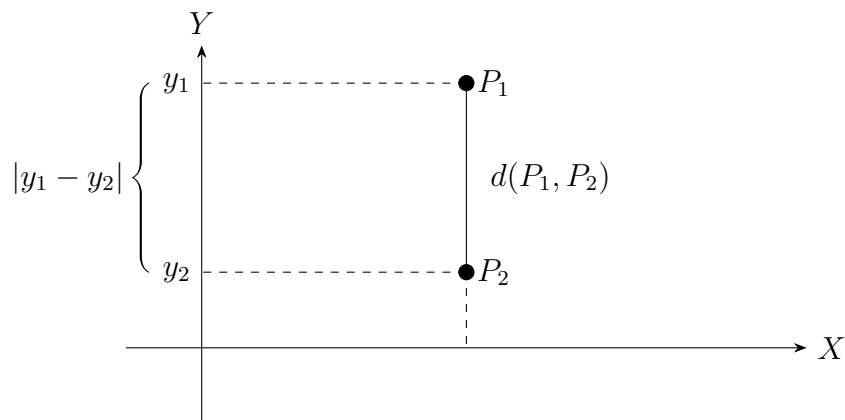
Figura 2.10: Distância entre Pontos de mesma Ordenada



Fonte: Autor

- Caso P_1 e P_2 possuam a mesma *abscissa*, observe que o segmento P_1P_2 é congruente ao segmento $P_{y_1}P_{y_2}$ formado pelos pontos cujas coordenadas em OY coincidem com as ordenadas dos Pontos P_1 e P_2 . Como, em um eixo $d(P_{y_1}, P_{y_2}) = |y_1 - y_2|$, segue que $d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$.

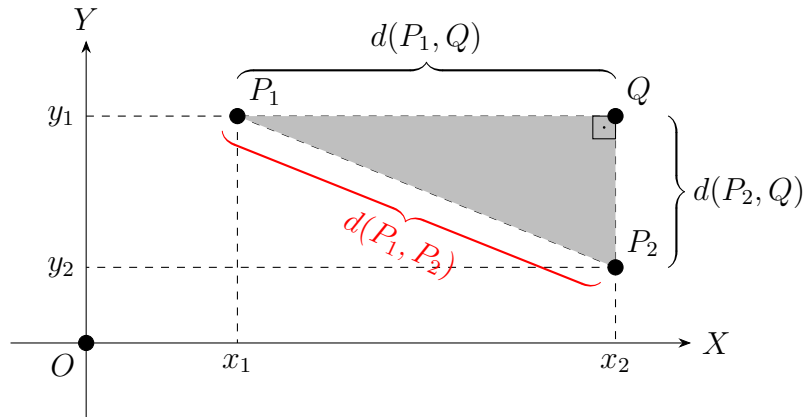
Figura 2.11: Distância entre Pontos de mesma Abscissa



Fonte: Autor

- Caso P_1 e P_2 possuam *abscissas* e *ordenadas* distintas, então basta introduzirmos um novo ponto $Q = (x_2, y_1)$ e será possível construir um triângulo $\triangle P_1QP_2$. O triângulo será retângulo em Q , tendo em vista que, por construção, P_1Q é paralelo ao eixo OX e P_2Q é paralelo ao eixo OY . Como os eixos são perpendiculares entre si, logo os segmentos também o serão, como é visto na figura a seguir:

Figura 2.12: Distância entre Pontos com Abscissas e Ordenadas distintas



Fonte: Autor

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, é válido que

$$\begin{aligned} (d(P_1, P_2))^2 &= (d(P_1, Q))^2 + (d(P_2, Q))^2 \\ &= (|x_1 - x_2|)^2 + (|y_1 - y_2|)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Concluimos que a distância entre os pontos P_1 e P_2 em $\mathbb{R}^2$ é dada pela equação

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (2.2)$$

Perceba que se $y_1 = y_2$, então

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

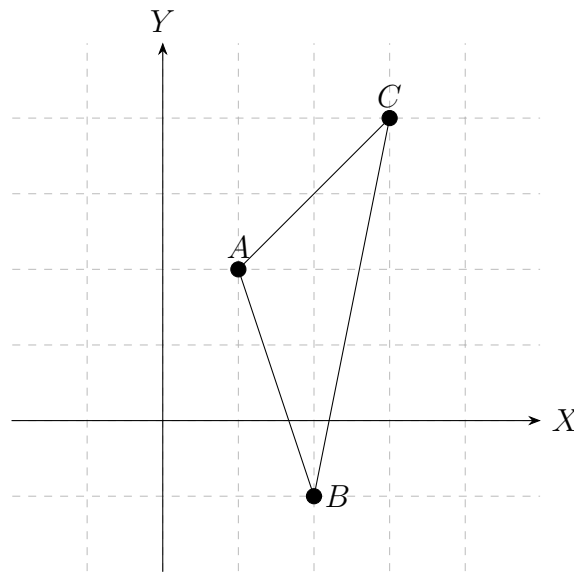
e, de forma análoga, se $x_1 = x_2$, então

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|.$$

Concluimos que a equação 2.2 é válida para quaisquer pontos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.1.1. *Seja o triângulo ABC de vértices $A = (1, 2)$, $B = (2, -1)$ e $C = (3, 4)$, encontre as medidas dos três lados desse triângulo.*

Figura 2.13



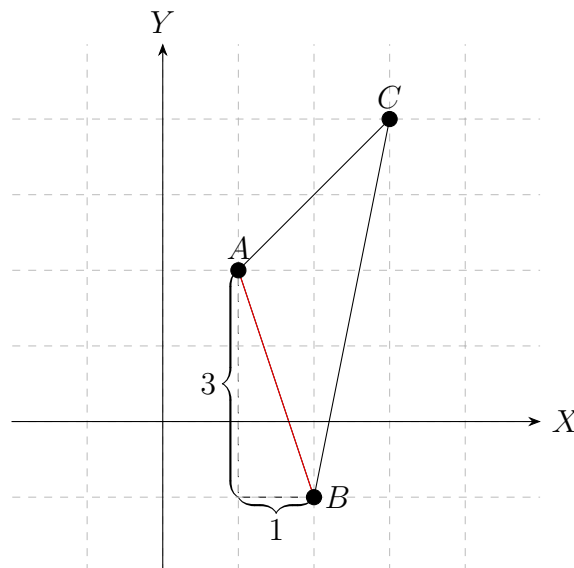
Fonte: Autor

Resolução: A medida dos lados do triângulo ABC serão dados pelas distâncias entre os pontos. Dessa forma, calculemos $d(A, B)$, $d(A, C)$ e $d(B, C)$. Por (2.2), temos

- $d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.

A seguir, temos a representação geométrica da medida do lado AB .

Figura 2.14

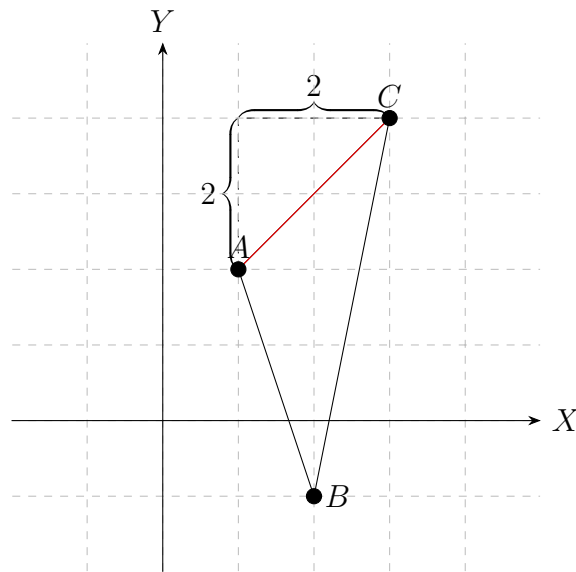


Fonte: Autor

- $d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Por fim, temos a representação geométrica da medida do lado AC .

Figura 2.15

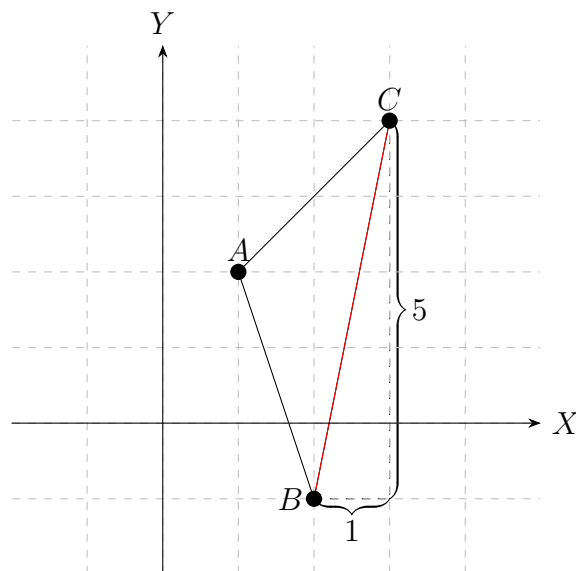


Fonte: Autor

- $d(B, C) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$

A seguir, temos a representação geométrica da medida do lado BC .

Figura 2.16



Fonte: Autor

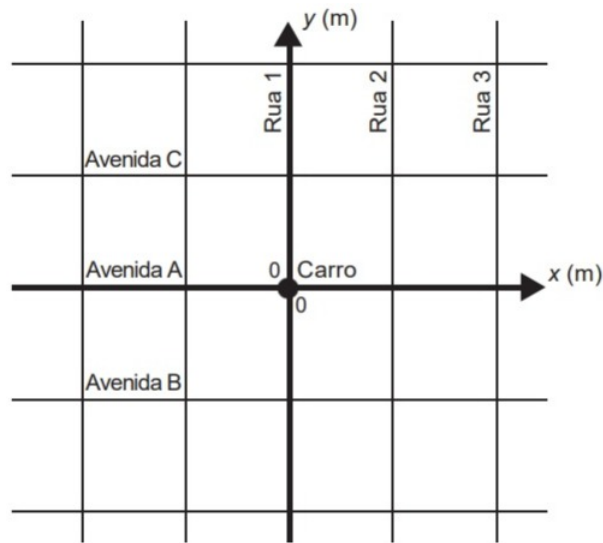
Logo, os lados do triângulo ABC tem medidas $\sqrt{10}$, $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{26}$.

A seguir apresentamos duas questões do ENEM que envolvem os conceitos apresentados.

Problema 2.1.1. (ENEM 2022 PPL) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem $(0, 0)$ o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.

Figura 2.17



Fonte: INEP

A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é

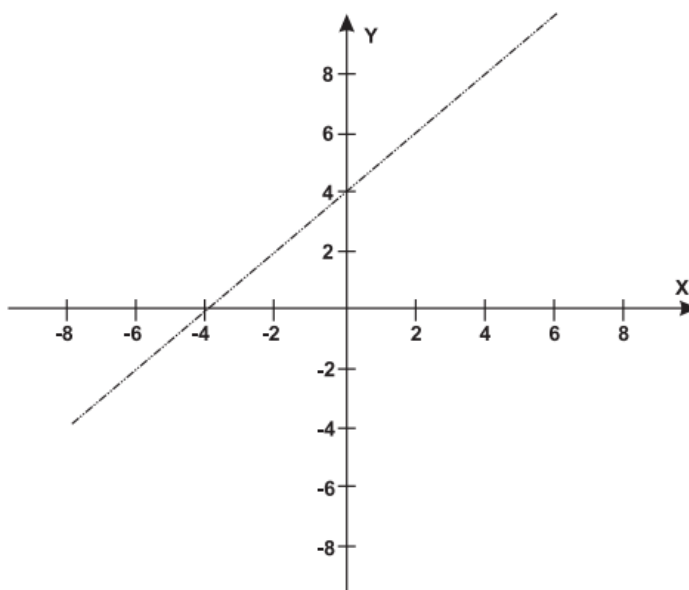
- A) - 60.
- B) - 40.
- C) 0.
- D) 40.
- E) 60.

Resolução: Como o hotel fica posicionado a 40 metros na direção da Avenida A para a Avenida B, logo ele está no sentido negativo do eixo OY , tendo portanto **ordenada** igual a -40m.

Gabarito: Letra B.

Problema 2.1.2. (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

Figura 2.18



Fonte: INEP

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

- A) $(-5, 0)$.
- B) $(-3, 1)$.
- C) $(-2, 1)$.
- D) $(0, 4)$.
- E) $(2, 6)$.

Resolução: Como a questão nos forneceu alternativas, é possível resolvê-la² analisando cada alternativa e verificando se elas atendem ao critério estabelecido. Consideremos $A = (-5, 0)$, $B = (-3, 1)$, $C = (-2, 1)$, $D = (0, 4)$ e $E = (2, 6)$.

Primeiramente, como a estação do metrô deve estar na reta $y = x + 4$, logo podemos representá-la como um ponto $(x, x + 4)$.

As alternativas A) e C) não respeitam essa representação, visto que $0 \neq -5 + 4$ e $1 \neq -2 + 4$. Além disso, como a distância entre a estação e o hospital público não deve ser superior a 5km, podemos calcular a distância das alternativas restantes ao ponto P .

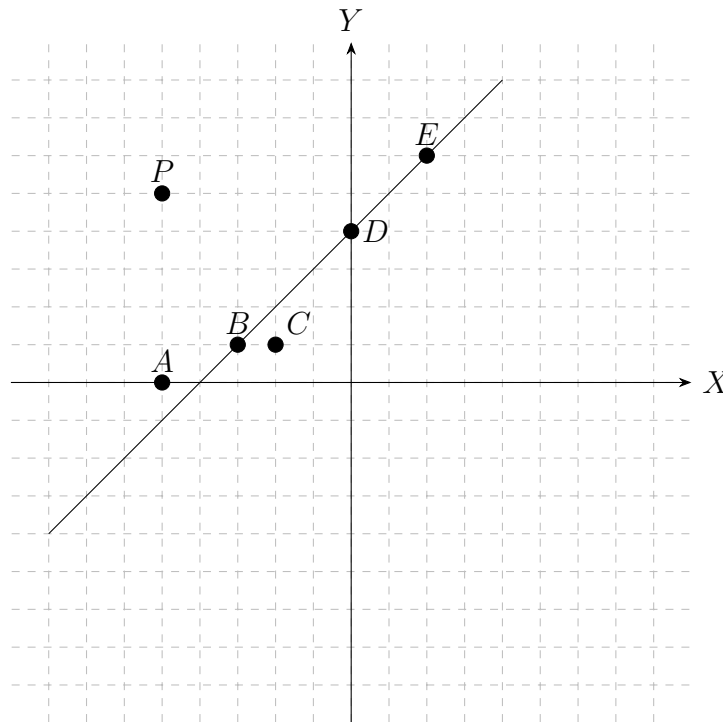
²Estamos fazendo uma Solução por Alternativas, muito comum em Vestibulares e Concursos. Uma solução direta para o problema necessita da distância entre ponto e reta e da ideia de circunferência, as quais só serão vistas em seções futuras.

- $d(B, P) = \sqrt{(-3 - (-5))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \leq 5$;
- $d(D, P) = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} > 5$;
- $d(E, P) = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} > 5$.

Concluimos que, dos pontos, o único que está na reta $y = x + 4$ e está a menos de 5km do ponto $P = (-5, 5)$ é o ponto B.

Gabarito: Letra B.

Figura 2.19



Fonte: Autor

2.2 Vetores e sua Importância na Geometria Analítica

A distância entre dois pontos no plano é fundamental para diversos cálculos na Geometria Analítica. No entanto, além de simplesmente medir a distância entre dois pontos, podemos representar deslocamentos no plano por meio de vetores. Nesta seção, introduziremos o conceito de vetores, que permitem deslocar pontos no espaço, ou seja, efetuar translações.

Segundo Camargo (2005) [10]

Se a ferramenta básica para o estudo da Geometria Axiomática é a Lógica, a Geometria Descritiva, por sua vez, utiliza fundamentalmente o Desenho,

enquanto a Geometria Analítica encontra na Álgebra seu aliado mais importante. Não apenas a Álgebra Elementar, como também - e talvez esta seja a grande novidade para você - a Álgebra Vetorial. (Camargo 2005)

É de suma importância, portanto, ter uma noção básica de vetores para compreender alguns dos próximos conceitos.

2.2.1 Segmentos Orientados

Dados dois pontos A e B , o segmento orientado AB é um segmento de origem em A e extremidade B . Ele pode ser representado da seguinte maneira:

Figura 2.20: Segmento Orientado



Fonte: Autor

Dois segmentos orientados são iguais se, e somente se, têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Todos os segmentos orientados possuem **comprimento**³, **direção** e **sentido**.

Definição 2.2.1. *Dois segmentos orientados, AB e CD , serão equipolentes se possuírem o mesmo comprimento, forem paralelos ou colineares e possuírem mesmo sentido. Indicaremos que AB é equipolente a CD escrevendo $AB \equiv CD$.*

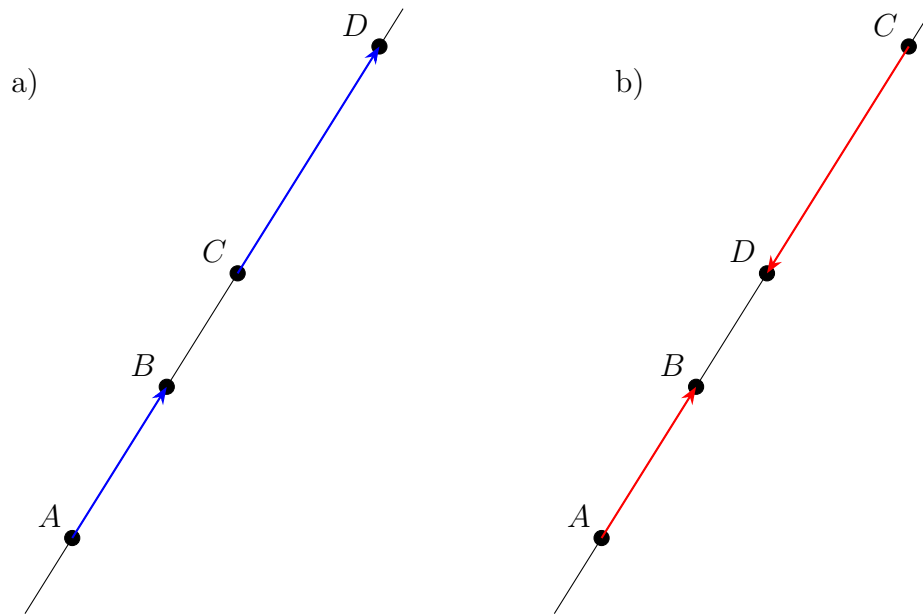
Dada essa definição, é importante verificar quando essas condições são atendidas. Como já fizemos um estudo da distância entre dois pontos num eixo e no plano, já sabemos verificar se dois segmentos são congruentes⁴ entre si.

Para que dois segmentos colineares AB e CD tenham o mesmo sentido, é necessário e suficiente que as semiretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ induzam o mesmo sentido de percurso na reta que as contém.

³Em alguns casos, o comprimento pode ser chamado de Módulo ou Tamanho.

⁴Possuem o mesmo comprimento.

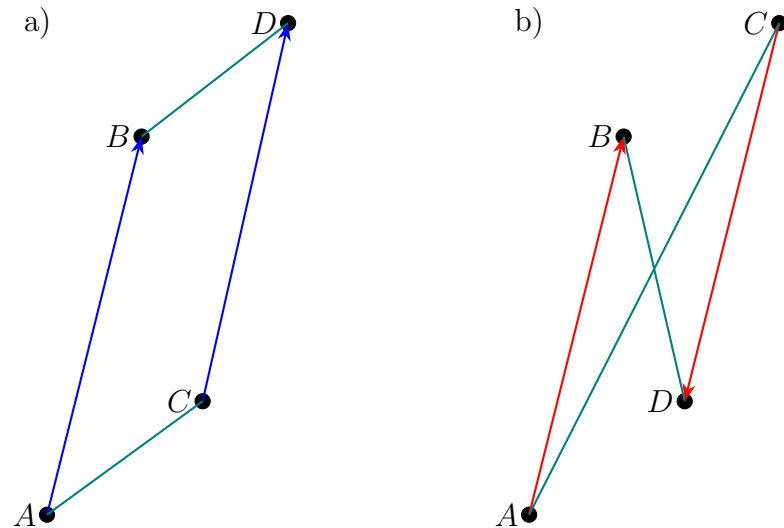
Figura 2.21: Segmentos colineares com o mesmo sentido (a) e com sentidos opostos (b)



Fonte: Autor

Se AB e CD são segmentos paralelos e possuem o mesmo comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido quando o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo, conforme imagem a seguir:

Figura 2.22: Segmentos paralelos com o mesmo sentido (a) e com sentidos opostos (b)



Fonte: Autor

Proposição 2.2.1. *Os segmentos orientados AB e CD serão equipolentes se, e somente se, o ponto médio de AD coincidir com o ponto médio de BC .*

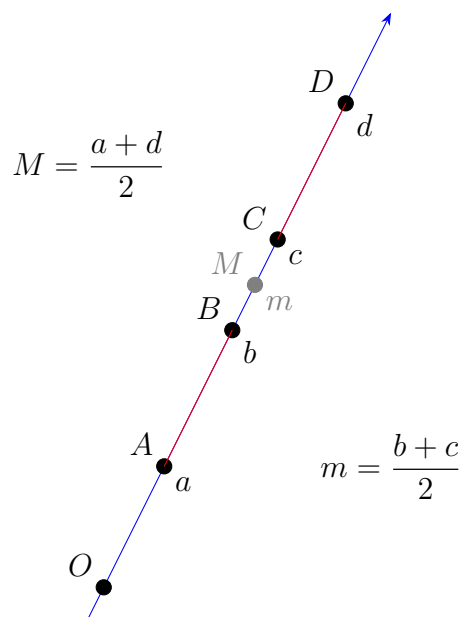
Demonstração: Suponhamos que os segmentos AB e CD são equipolentes e provemos que o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC .

Se $AB \parallel CD$, então $ABDC$ é um paralelograma e, portanto, suas diagonais cortam-se ao meio. Disso concluímos que o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC .

Se AB e CD são colineares, então os pontos A , B , C e D pertencem a uma mesma reta r . Na reta r é possível assumir as coordenadas de cada um dos pontos, as quais utilizaremos como a , b , c e d para os pontos A , B , C e D , respectivamente.

Se $AB \equiv CD$, temos que $|b - a| = |d - c|$, pois os comprimentos de AB e CD são iguais. Além disso, temos que $b - a = d - c$, tendo em vista que os segmentos possuem o mesmo sentido.

Figura 2.23



Fonte: Autor

Portanto,

$$b - a = d - c \Rightarrow a + d = b + c \Rightarrow \frac{a + d}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

Concluímos que o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC .

Reciprocamente, suponhamos que o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC e provemos que os segmentos são equipolentes.

Consideremos o caso em que os pontos A , B , C e D são colineares. Ora, como já assumimos as coordenadas desses pontos, podemos calcular seus pontos médios e igualá-los da seguinte forma:

$$\frac{a + d}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

Portanto,

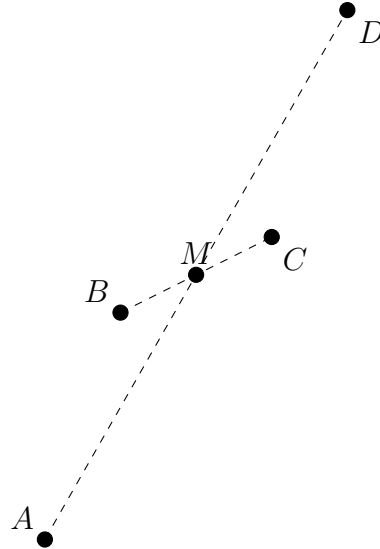
$$a + d = b + c \Rightarrow d - c = b - a.$$

Uma vez que $b - a$ e $d - c$ possuem o mesmo sinal e módulo, segue que os segmentos

orientados AB e CD possuem o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Concluimos que $AB \equiv CD$.

Vejamos agora o caso em que os pontos não são colineares. Por hipótese, o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC . Queremos provar que $AB \equiv CD$.

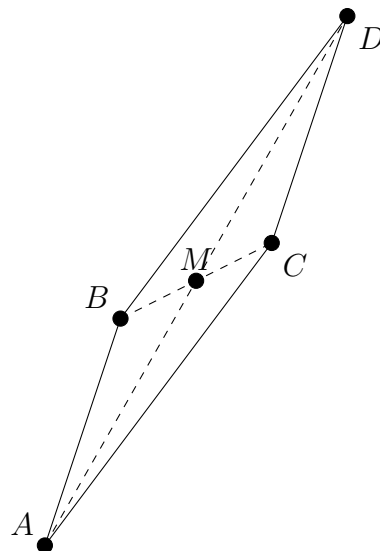
Figura 2.24



Fonte: Autor

Podemos traçar os segmentos AB , BD , DC e CA de forma que formemos quatro triângulos. Como M é o ponto médio dos segmentos AD e BC , logo $\overline{AM} = \overline{MD}$ e $\overline{BM} = \overline{MC}$. Além disso, visto que os ângulos $\widehat{AMB}$ e $\widehat{CMD}$ são opostos pelo vértice, logo eles são congruentes.

Figura 2.25



Fonte: Autor

Dessa forma, os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMD$ são congruentes entre si, visto que possuem dois lados e um ângulo correspondente congruentes. Concluimos assim que os segmentos AB e CD possuem o mesmo comprimento. De forma análoga, é possível provar que os triângulos $\triangle BMD$ e $\triangle CMA$ são congruentes e, portanto, os lados AC e BD são congruentes entre si.

Dessa forma, o quadrilátero $ABDC$ possui dois pares de lados opostos congruentes. Sendo assim, esse quadrilátero é um paralelogramo e, portanto $AB \equiv CD$. $\square$

Proposição 2.2.2. *Dados os pontos A , B e C , existe um único ponto D tal que*

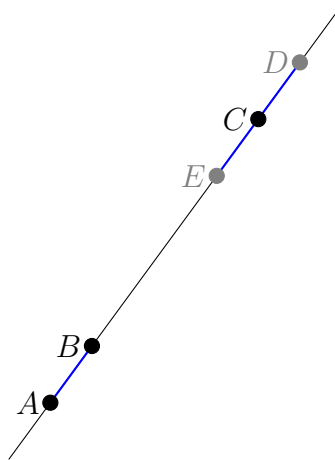
$$AB \equiv CD.$$

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que os pontos são colineares. Nesse caso, dada a distância $\overline{AB}$, podemos encontrar dois pontos D e E na reta tais que

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{CE},$$

conforme pode ser observado na figura a seguir:

Figura 2.26: Pontos D e E cuja distância a C equivalem a $\overline{AB}$

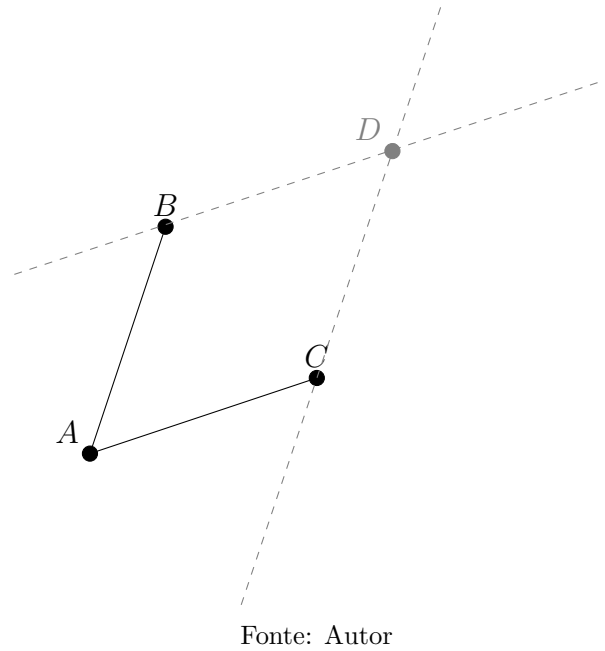


Fonte: Autor

Assim, os comprimentos $\overline{CE}$ e $\overline{CD}$ equivalem ao comprimento $\overline{AB}$ e todos esses segmentos são colineares. Para que eles sejam equipolentes resta induzirem o mesmo sentido de percurso na reta. Perceba que somente a semirreta $\overrightarrow{CD}$ tem o mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$ e, portanto, somente o segmento CD é equipolente a AB . Concluimos que, dados A , B e C pontos colineares, existe um único ponto D tal que $AB \equiv CD$.

Suponhamos, agora, que os pontos não são colineares. Nesse caso, sabemos que, se $AB \equiv CD$, então $ABDC$ é um paralelogramo. É possível construir, sabendo os pontos A , B e C , um único paralelogramo de lados AB e AC . Basta traçar uma paralela a AC que passe por B , uma paralela a AB que passe por C e encontrar a interseção dessas paralelas conforme a figura a seguir:

Figura 2.27: Paralelogramo formado a partir dos Pontos A, B e C dados



Como é possível construir esse paralelogramo, logo existe um ponto D tal que $AB \equiv CD$. Suponha que existe um ponto E , tal que $AB \equiv CE$.

Pela proposição 2.2.1, sabemos que $AB \equiv CD$ implica que o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC . Se $AB \equiv CE$, então o ponto médio de AE também coincide com o ponto médio de BC e, portanto coincide com o ponto médio de AD . Ora, se o ponto médio de AE coincide com o ponto médio de AD , logo $E = D$. Logo o ponto D é único.

Provamos, portanto, que dados os pontos A , B e C , existe um único ponto D tal que $AB \equiv CD$. $\square$

Proposição 2.2.3. *Dados os pontos do plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, tem-se*

$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.2.1, sabemos que

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC \\ &\iff \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2} \right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2} \right) \\ &\iff (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &\iff a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \text{ e } a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\ &\iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.2.1. Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (5, 1)$, determine as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ de modo que $AB \equiv CD$.

Resolução: Pela Proposição 2.2.3, sabemos que

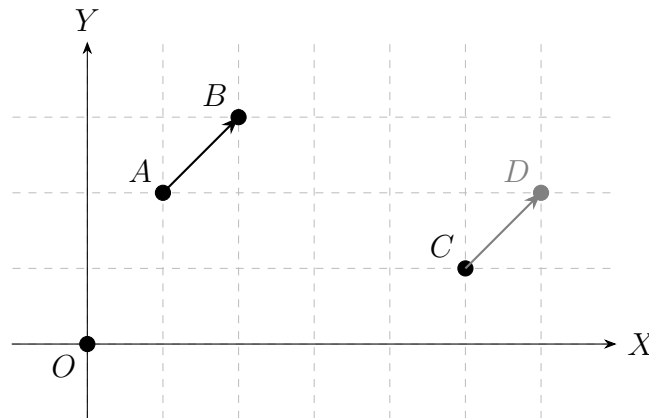
$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Portanto,

$$2 - 1 = x - 5 \text{ e } 3 - 2 = y - 1 \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 2.$$

Concluimos que $D = (6, 2)$.

Figura 2.28



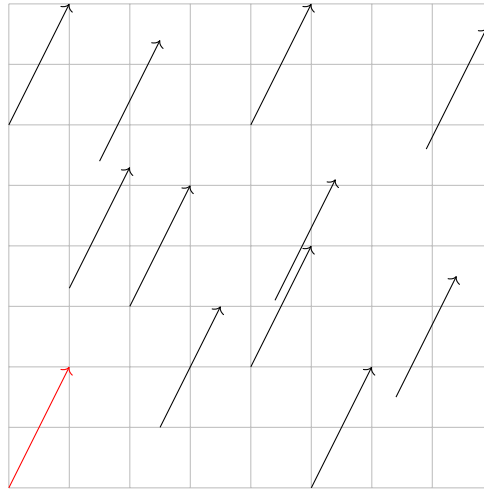
Fonte: Autor

2.2.2 Definição de Vetor

Definição 2.2.2. Dado um segmento orientado AB , um **Vetor** é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB .

Tal definição pode ser estranha para o estudante do Ensino Médio que estudou em física que uma Grandeza Vetorial é uma Grandeza dotada de módulo, sentido e direção, no entanto, essa é exatamente a caracterização da equipolência entre segmentos. De modo preciso, de todos os segmentos orientados possíveis, escolhemos um para ser um representante de todos os outros, conforme observado na figura a seguir:

Figura 2.29: Segmentos Equipolentes e Seu Representante



Fonte: Autor

Dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do plano, o segmento orientado de origem A e extremidade B é denotado por $\overrightarrow{AB}$ e o vetor que representa esse segmento é o vetor $\overrightarrow{AB}$. Pela Proposição 2.2.3, existe um único ponto P tal que $OP \equiv AB$, isto é

$$x_P - 0 = x_B - x_A \quad \text{e} \quad y_P - 0 = y_B - y_A.$$

Definição 2.2.3. *Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos do plano. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ serão as coordenadas do ponto $P = (x_P, y_P)$ do plano tal que $OP \equiv AB$ e escrevemos*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Dois vetores serão iguais se forem equipolentes, ou seja, tiverem mesmo módulo sentido e direção (a localização no espaço não é importante). De forma algébrica, dois vetores serão iguais se tiverem as mesmas coordenadas. Ao vetor com ambas as coordenadas iguais a zero denominamos **Vetor Nulo** e o simbolizamos por $\vec{0}$.

Exemplo 2.2.2. *Dados os pontos $A = (2, 3)$, $B = (4, 1)$ e $C = (3, 6)$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e encontre o ponto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.*

Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Portanto,

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 - 3) = (2, -2).$$

Como queremos que $\overrightarrow{CD}$ seja igual a $\overrightarrow{AB}$, logo $(x_D - x_C, y_D - y_C) = (2, -2)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} (x_D - 3, y_D - 6) &= (2, -2) \Rightarrow x_D - 3 = 2 \quad \text{e} \quad y_D - 6 = -2 \\ &\Rightarrow x_D = 5 \quad \text{e} \quad y_D = 4. \end{aligned}$$

Concluimos que $D = (5, 4)$.

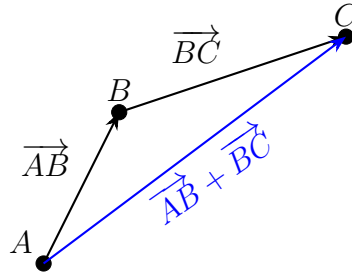
Sabemos que é possível estabelecer uma bijeção do Conjunto de Pontos do Plano π com o Conjunto dos Pares Ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. E, pela Definição 2.2.3, estabelecemos uma bijeção do Conjunto dos Pares Ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com o Conjunto dos Vetores do Plano π . Dessa forma, podemos trabalhar com Vetores do plano através de Pares Ordenados do $\mathbb{R}^2$.

Operações com Vetores

1. Adição de Vetores

Definição 2.2.4. Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, a soma dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$.

Figura 2.30: Adição de Vetores



Fonte: Autor

No plano, algebricamente, a soma dos vetores é um vetor cujas coordenadas são as somas das coordenadas de cada vetor. Dessa forma, sendo

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B),$$

temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= (x_B - x_A + x_C - x_B, y_B - y_A + y_C - y_B) \\ &= (x_C - x_A, y_C - y_A) \\ &= \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

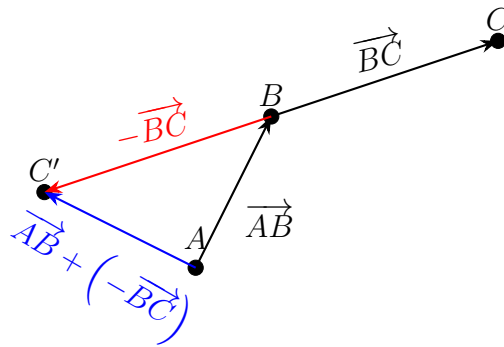
2. Subtração de Vetores. Para definir a subtração de vetores, primeiramente, vamos apresentar a definição de oposto de um vetor.

Definição 2.2.5. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, seu oposto (ou simétrico), é o vetor $\overrightarrow{BA}$ denotado por $-\overrightarrow{AB}$.

Definição 2.2.6. Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, a diferença entre vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ é o vetor obtido pela soma dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $(-\overrightarrow{BC})$, isto é,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}).$$

Figura 2.31: Subtração de Vetores



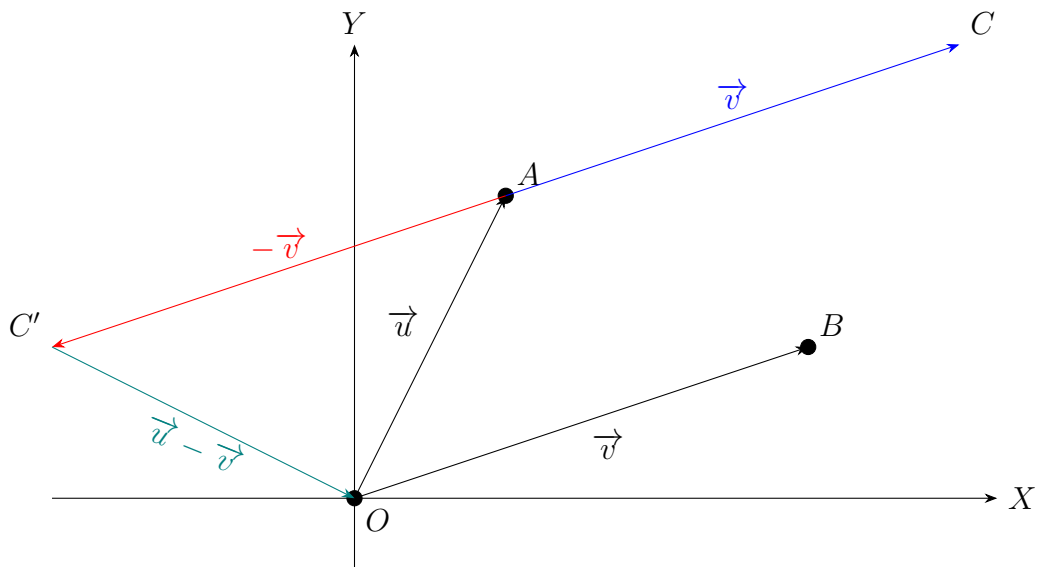
Fonte: Autor

Teorema 2.2.1. Dados os vetores do plano $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.2.2 sabemos que existe um único Ponto C no plano tal que $OB \equiv AC$. Além disso, sabemos que a subtração $\vec{u} - \vec{v}$ é equivalente à adição $\vec{u} + (-\vec{v})$, conforme a figura a seguir.

Figura 2.32: Diferença entre Vetores



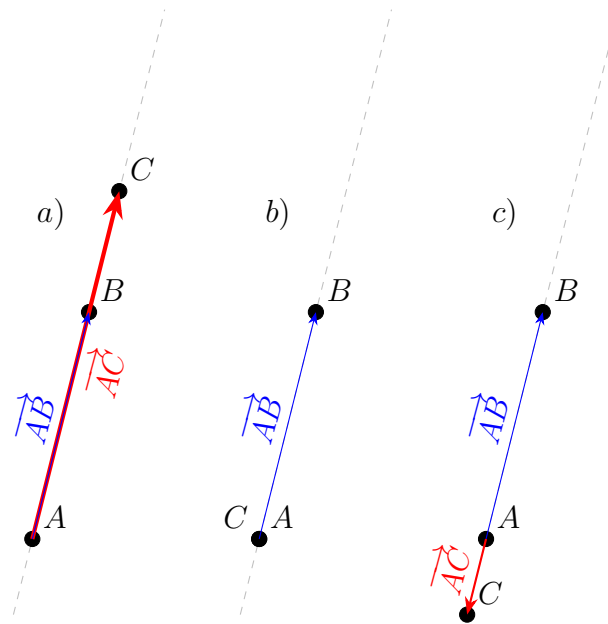
Fonte: Autor

Sendo os segmentos OB e AC equipolentes, seja C' a extremidade do vetor $-\vec{v}$, tomado com origem em A . Temos que os segmentos OB e AC' são paralelos e congruentes. Consequentemente, o polígono $OBAC'$ é um paralelogramo. Concluimos que os segmentos $C'O$ e AB são equipolentes e, portanto, o vetor $\vec{AB}$ é igual ao vetor $\vec{u} - \vec{v}$. $\square$

3. Multiplicação de um vetor por um escalar: Dados um número real λ e um vetor qualquer $\vec{v} = \vec{AB}$, definimos o produto de λ por $\vec{v}$, denotado por $\lambda \vec{v}$, como sendo o vetor $\vec{AC}$, tal que:

- (a) A , B e C são colineares;
- (b) $d(A, C) = |\lambda|d(A, B)$;
- (c) $C = A$ se $\lambda = 0$;
- (d) os segmentos AC e AB tem igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Figura 2.33: Multiplicação de um Vetor por um Escalar λ , a) $\lambda > 0$, b) $\lambda = 0$ e c) $\lambda < 0$



Fonte: Autor

Quando $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{AB}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que $\vec{AC}$ é múltiplo de $\vec{AB}$.

Segue da Definição 2.2.5 que se $\vec{u} = (x_u, y_u)$, então o oposto $-\vec{u} = (-x_u, -y_u)$. Em particular, o vetor obtido multiplicando um vetor $\vec{u}$ pelo escalar -1 é o vetor oposto de $\vec{u}$, isto é,

$$(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}.$$

Teorema 2.2.2 (Propriedades da Adição de Vetores). *Para quaisquer vetores do plano $\vec{u} = (x_u, y_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e $\vec{w} = (x_w, y_w)$ são válidas as seguintes*

propriedades⁵:

- i) *Associatividade*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- ii) *Comutatividade*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- iii) *Existência de Elemento Neutro*: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, em que $\vec{0} = (0, 0)$.
- iv) *Existência de Elemento Oposto*: Para todo $\vec{u} = (x_u, y_u)$, o vetor $-\vec{u} = (-x_u, -y_u)$ satisfaz

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

Demonstração:

- PROVA DA ASSOCIATIVIDADE:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= ((x_u, y_u) + (x_v, y_v)) + (x_w, y_w) \\ &= (x_u + x_v, y_u + y_v) + (x_w, y_w) \\ &= (x_u + x_v + x_w, y_u + y_v + y_w) \\ &= (x_u, y_u) + (x_v + x_w, y_v + y_w) \\ &= (x_u, y_u) + ((x_v, y_v) + (x_w, y_w)) \\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \end{aligned}$$

- PROVA DA COMUTATIVIDADE:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (x_u, y_u) + (x_v, y_v) \\ &= (x_u + x_v, y_u + y_v) \\ &= (x_v + x_u, y_v + y_u) \\ &= (x_v, y_v) + (x_u, y_u) \\ &= \vec{v} + \vec{u}. \end{aligned}$$

- PROVA DA EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO:

$$\vec{u} + \vec{0} = (x_u, y_u) + (0, 0) = (x_u + 0, y_u + 0) = (x_u, y_u) = \vec{u}.$$

Analogamente, verificamos que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

- PROVA DA EXISTÊNCIA DE ELEMENTO OPOSTO:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_u, y_u) + (-x_u, -y_u) = (x_u - x_u, y_u - y_u) = (0, 0) = \vec{0}.$$

Analogamente, verificamos que $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$. □

⁵Todas as propriedades decorrem das coordenadas dos vetores pertencerem aos números reais.

2.2.3 Produto Interno e Ângulo entre Vetores

4. **Produto Interno:** Um Produto Interno em $\mathbb{R}^2$ sobre o Conjunto dos Números Reais, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é uma função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

(a) Positiva definida: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;

(b) Simétrica: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;

(c) Bilinear:

- $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
- $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.

Produto Escalar: O Produto Escalar em $\mathbb{R}^2$ é a função definida por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v. \end{aligned}$$

Proposição 2.2.4. *O Produto Escalar é um Produto Interno.*

Demonstração: Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e $\vec{w} = (x_w, y_w)$ vetores do plano e λ um número real.

i) $\cdot$ é POSITIVA DEFINIDA:

De fato, note que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x_u \cdot x_u + y_u \cdot y_u = x_u^2 + y_u^2 \geq 0.$$

Além disso,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff x_u^2 + y_u^2 = 0 \iff x_u = 0 \text{ e } y_u = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}.$$

ii) $\cdot$ é SIMÉTRICA:

De fato, observe que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = x_v \cdot x_u + y_v \cdot y_u = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

iii) $\cdot$ é BILINEAR:

Primeiramente, vamos mostrar que

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Por definição,

$$\lambda \vec{u} = (\lambda x_u, \lambda y_u),$$

o que implica

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= (\lambda x_u) \cdot x_v + (\lambda y_u) \cdot y_v \\ &= \lambda(x_u \cdot x_v) + \lambda(y_u \cdot y_v) \\ &= \lambda(x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v) \\ &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

Agora, vamos provar que

$$(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

Por definição,

$$\vec{u} + \vec{w} = (x_u + x_w, y_u + y_w).$$

Então,

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} &= (x_u + x_w) \cdot x_v + (y_u + y_w) \cdot y_v \\ &= (x_u \cdot x_v + x_w \cdot x_v) + (y_u \cdot y_v + y_w \cdot y_v) \\ &= (x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v) + (x_w \cdot x_v + y_w \cdot y_v) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Por *i*), *ii*) e *iii*), concluímos que o Produto Escalar é um Produto Interno em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Observação: Daqui em diante, utilizaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para indicar o Produto Escalar de dois vetores.

Exemplo 2.2.3. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (3, 4)$, calcule o Produto Escalar $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Resolução: Sabemos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$, logo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 2.$$

Exemplo 2.2.4. Sendo $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (5, -4)$, calcule $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

Resolução: Sabemos que $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_u^2 + y_u^2$ e $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = x_v^2 + y_v^2$. Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = (1^2 + 2^2) \cdot (5^2 + (-4)^2) \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 5 \cdot 41 = 205.$$

Exemplo 2.2.5. Sendo $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (5, -4)$, calcule $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

Resolução: Sabemos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$. Consequentemente

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1.5 + 2 \cdot (-4) = -3 \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = 9.$$

Teorema 2.2.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dados quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano, temos*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Ademais, a igualdade acima ocorre se, e somente se, $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$.

Demonstração: Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ dois vetores do plano. Se $\vec{u} = \vec{0}$, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \cdot x_v + 0 \cdot y_v = 0 \quad \Rightarrow \quad |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 0.$$

Por outro lado,

$$\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \geq 0 \text{ e } \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \geq 0.$$

Assim,

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 0 \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \Rightarrow \quad |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

De forma análoga é possível provar que se $\vec{v} = \vec{0}$, então $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Vejam agora o caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos. Nesse caso, seja t um número real não-nulo. Sabemos, pela positividade do produto interno, que

$$\langle \vec{u} - t\vec{v}, \vec{u} - t\vec{v} \rangle \geq 0.$$

No entanto, escrevendo $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$, temos

$$\vec{u} - t\vec{v} = (x_u - tx_v, y_u - ty_v).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - t\vec{v}, \vec{u} - t\vec{v} \rangle &= (x_u - tx_v)^2 + (y_u - ty_v)^2 \\ &= x_u^2 - 2x_u x_v t + x_v^2 t^2 + y_u^2 - 2y_u y_v t + y_v^2 t^2 \\ &= (x_v^2 + y_v^2)t^2 + (-2x_u x_v - 2y_u y_v)t + (x_u^2 + y_u^2). \end{aligned}$$

Essa é uma equação do segundo grau na variável t . Como o produto interno é não-negativo, segue que $\Delta \leq 0$, tendo em vista que existe no máximo uma raiz para a equação

$$(x_v^2 + y_v^2)t^2 + (-2x_u x_v - 2y_u y_v)t + (x_u^2 + y_u^2) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \Delta \leq 0 &\Rightarrow (-2x_u x_v - 2y_u y_v)^2 - 4 \cdot (x_v^2 + y_v^2) \cdot (x_u^2 + y_u^2) \leq 0 \\
 &\Rightarrow 4 \cdot (x_u x_v + y_u y_v)^2 \leq 4 \cdot (x_v^2 + y_v^2) \cdot (x_u^2 + y_u^2) \\
 &\Rightarrow (x_u x_v + y_u y_v)^2 \leq (x_u^2 + y_u^2) \cdot (x_v^2 + y_v^2) \\
 &\Rightarrow \sqrt{(x_u x_v + y_u y_v)^2} \leq \sqrt{(x_u^2 + y_u^2) \cdot (x_v^2 + y_v^2)}
 \end{aligned}$$

o que implica

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Se ocorre a igualdade, logo $\Delta = 0$ e, portanto, existe algum t_0 tal que

$$\langle \vec{u} - t\vec{v}, \vec{u} - t\vec{v} \rangle = 0$$

o que implica que $\vec{u} = t_0 \vec{v}$, ou seja, $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$. □

5. Norma de um Vetor: Uma norma em $\mathbb{R}^2$ é uma função

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 \vec{u} &\longmapsto \|\vec{u}\|
 \end{aligned}$$

que para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}$ vetores do plano e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

- (a) $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;
- (b) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$;
- (c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. (Desigualdade Triangular).

Proposição 2.2.5. A função

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 \vec{u} &\longmapsto f(\vec{u}) = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}.
 \end{aligned}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração: Para que f seja uma norma é necessário e suficiente que ela cumpra todas as propriedades acima listadas.

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ dois vetores do plano e λ um número real. Então

$$\bullet \quad f(\vec{u}) \geq 0 \quad \text{e} \quad f(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}.$$

De fato,

$$\sqrt{x_u^2 + y_u^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{u}) \geq 0.$$

Além disso,

$$f(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_u^2 + y_u^2} = 0 \Leftrightarrow x_u = 0 \text{ e } y_u = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

- $f(\lambda \vec{u}) = |\lambda|f(\vec{u}).$

De fato,

$$f(\lambda \vec{u}) = \sqrt{(\lambda x_u)^2 + (\lambda y_u)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_u^2 + \lambda^2 y_u^2} = |\lambda| \sqrt{x_u^2 + y_u^2} = |\lambda|f(\vec{u}).$$

- $f(\vec{u} + \vec{v}) \leq f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$

De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Multiplicando ambos os termos da desigualdade por 2, obtemos

$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 2\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Agora, somando o termo $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

Uma vez que

- * $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle;$

- * $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \left(\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \right)^2;$

- * $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \left(\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right)^2,$

segue que

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \leq \left(\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \right)^2 + 2\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + \left(\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right)^2,$$

ou ainda,

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \leq \left(\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right)^2.$$

Portanto,

$$\sqrt{\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle} \leq \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle},$$

mostrando que $f(\vec{u} + \vec{v}) \leq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Dessa forma, a função f atende a todas as propriedades da norma. $\square$

A partir daqui, utilizaremos a função f sempre que nos referirmos à norma de um vetor e faremos uso da notação $\| \cdot \|$.

Definição 2.2.7. Um vetor $\vec{u}$ é dito Unitário quando $\|\vec{u}\| = 1$.

Teorema 2.2.4. Seja $\vec{u}$ um vetor não-nulo. O vetor $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ é unitário.

Demonstração: Seja $\vec{u} = (x_u, y_u)$. Pela definição de norma, temos $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$. Consequentemente,

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}}, \frac{y_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \right).$$

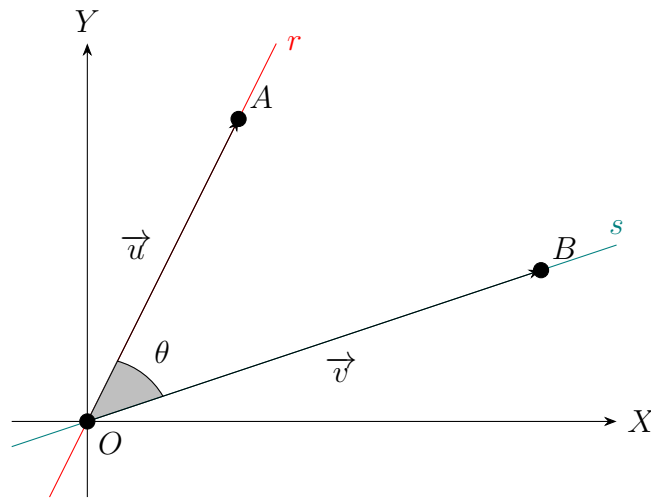
Novamente, pela definição de norma, temos

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\left(\frac{x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \right)^2 + \left(\frac{y_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_u^2}{x_u^2 + y_u^2} \right) + \left(\frac{y_u^2}{x_u^2 + y_u^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{x_u^2 + y_u^2}{x_u^2 + y_u^2}} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Ângulo entre Vetores

Definição 2.2.8. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ vetores não nulos do plano. O ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será o menor ângulo entre as retas r e s tais que $OA \in r$ e $OB \in s$.

Figura 2.34: Ângulo entre os Vetores



Fonte: Autor

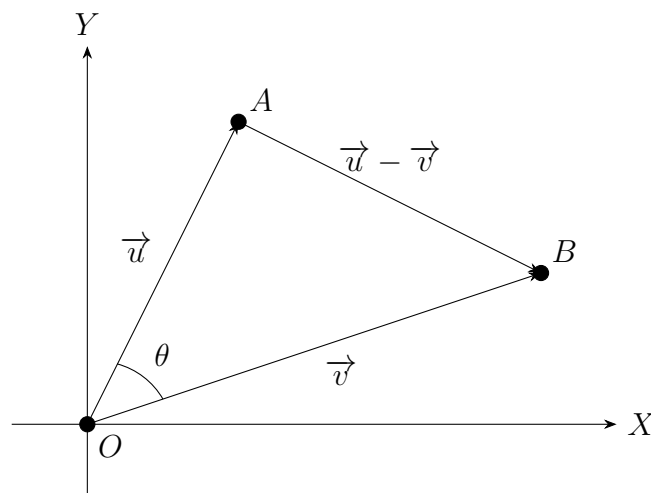
O próximo resultado caracteriza a noção de produto interno através do ângulo entre vetores.

Teorema 2.2.5. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do plano e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Então,*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta.$$

Demonstração: Segundo a definição 2.2.8, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ está definido apenas quando $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sejam OA e OB segmentos tais que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Sendo assim, podemos montar o seguinte triângulo:

Figura 2.35: Ângulo entre os Vetores



Fonte: Autor

Pela lei dos cossenos, temos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta. \quad (2.3)$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle,$$

o que implica

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

Substituindo o valor de $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ em (2.3), obtemos

$$\|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta.$$

Logo,

$$-2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta.$$

Multiplicando a igualdade acima por $-\frac{1}{2}$ podemos inferir que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta,$$

como queríamos demonstrar.

Segue do Teorema 2.2.5 que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}\right).$$

Definição 2.2.9. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão perpendiculares se o ângulo formado entre eles for reto. No caso afirmativo, fazemos uso da notação $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Teorema 2.2.6 (Condição de Ortogonalidade entre Vetores). *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Então, $\vec{u}$ será perpendicular a $\vec{v}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

Demonstração: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, pelo Teorema 2.2.5

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Desde que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, segue que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Reciprocamente, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então, novamente pelo Teorema 2.2.5

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta \Rightarrow 0 = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta.$$

Uma vez que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, temos que $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$. Consequentemente, $\cos \theta = 0$. Como o ângulo $\theta \in (0, \pi)$, concluímos que $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, os vetores são perpendiculares. $\square$

Observação: Seja $\vec{u} = (x_u, y_u)$ um vetor não nulo do plano. Uma forma rápida e eficiente de encontrar um vetor perpendicular a $\vec{u}$ é considerar os seguintes vetores:

$$\vec{v} = (-y_u, x_u) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (y_u, -x_u),$$

obtidos pela troca das coordenadas e a inversão do sinal de uma delas. De fato,

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot (-y_u) + y_u \cdot x_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}.$
- $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = x_u \cdot y_u + y_u \cdot (-x_u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{w}.$

2.3 Reta e suas Propriedades no Plano

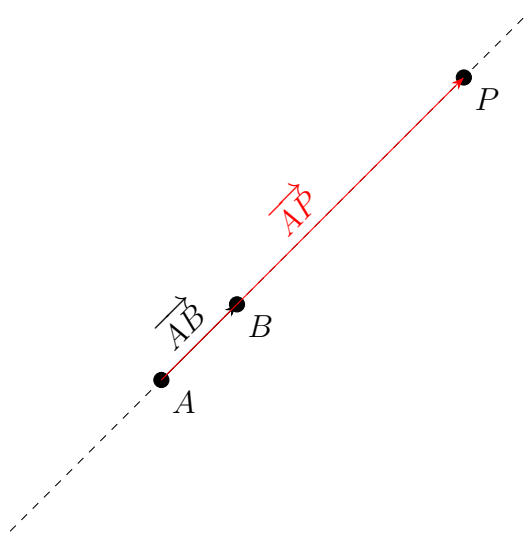
Os vetores desempenham um papel fundamental na definição de retas no plano cartesiano. De fato, a equação da reta pode ser expressa utilizando vetores e pontos dados. A seguir, exploraremos como a equação da reta é construída e como podemos determinar a posição relativa de pontos e retas no plano.

2.3.1 Equações Paramétricas da Reta

Dados dois pontos A e B do plano, sabemos que existe uma única reta r que contém esses dois pontos. Podemos determinar r de forma vetorial da seguinte forma: Seja $\vec{AB}$ um vetor que contido na reta r e P um ponto do plano, então

$$P \in r \iff \vec{AP} = t \cdot \vec{AB}, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Figura 2.36



Fonte: Autor

Sabemos que os pontos do Eixo que contém os pontos A e B com sentido de A para B possuem uma bijeção com os números reais. Logo, para cada $P \in r$ o número real t associado é determinado de forma única. O número t é denominado **parâmetro** de P em r .

Substituindo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $P = (x, y)$ na equação vetorial (2.4), temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow (x - x_A, y - y_A) = t \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ &\Leftrightarrow x - x_A = t(x_B - x_A) \quad \text{e} \quad y - y_A = t(y_B - y_A).\end{aligned}$$

o que implica

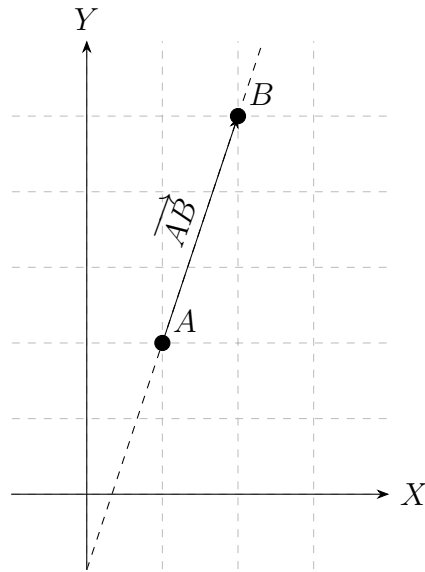
$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad (2.5)$$

As equações acima são denominadas **Equações Paramétricas** da reta r .

Exemplo 2.3.1. *Determine as Equações Paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 5)$.*

Resolução: Geometricamente, temos

Figura 2.37



Fonte: Autor

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff (x, y) = (1, 2) + t \cdot (1, 3), t \in \mathbb{R} \\ &\iff (x, y) = (1 + t, 2 + 3t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas de r são: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$

2.3.2 Equação Cartesiana (ou Geral) da Reta

Definição 2.3.1. Um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta r se $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r; A \neq B$.

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$ um vetor normal à r . Então, para $P \neq A$,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \\ &\iff \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x - x_A, y - y_A), (a, b) \rangle = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff ax - ax_A + by - by_A = 0. \end{aligned}$$

Escrevendo $c = -ax_A - by_A$, obtemos a **equação cartesiana**⁶ da reta r :

$$r : ax + by + c = 0. \quad (2.6)$$

Os números a, b e c são chamados coeficientes da equação cartesina da reta r . Note que os coeficientes a e b são, respectivamente, as coordenadas do vetor normal $\vec{u}$.

Exemplo 2.3.2. *Determine a Equação Cartesiana da reta que passa pelos pontos*

$$A = (1, 2) \quad e \quad B = (2, 5).$$

Resolução: Como $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 5 - 2) = (1, 3)$, pela observação do Teorema 2.2.6, sabemos que $\vec{u} = (3, -1)$ é um vetor perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Logo, por (2.6), temos

$$3x - y + c = 0.$$

Desde que $A = (1, 2) \in r$, segue que podemos substituir as suas coordenadas na equação para encontrar o coeficiente c , isto é,

$$3 \cdot 1 - 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

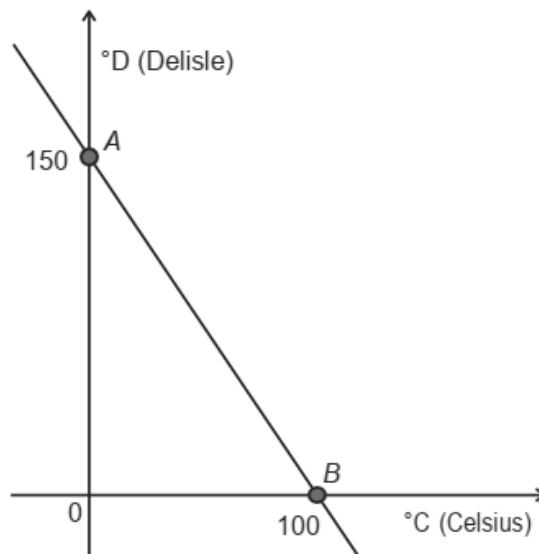
Concluimos que a Equação Cartesiana de r é

$$3x - y - 1 = 0.$$

Problema 2.3.1. *(ENEM 2022 PPL) A escala de temperatura Delisle ($^{\circ}D$), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius ($^{\circ}C$) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B .*

⁶A equação cartesiana também é conhecida como equação geral da reta.

Figura 2.38

Disponível em: www.proftbus.com.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Fonte: INEP

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

- A) $2D + C = 100$
- B) $2D + 3C = 150$
- C) $3D + 2C = 300$
- D) $2D + 3C = 300$
- E) $3D + 2C = 450$

Resolução: Seja r a reta que passa por $A = (0, 150)$ e $B(100, 0)$. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (100, -150)$ é um vetor contido na reta r . Além disso, pela observação do Teorema 2.2.6, sabemos que $\vec{u} = (150, 100)$ é vetor perpendicular à r .

Pela Equação 2.6, sabemos que $r : ax + by + c = 0$, em que os coeficientes a e b são as coordenadas do vetor perpendicular à reta r . Como $\vec{u} \perp r$, a reta r é dada por

$$150x + 100y + c = 0.$$

Agora, uma vez que $A = (0, 150) \in r$, temos

$$150 \cdot 0 + 100 \cdot 150 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 15000 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -15.000.$$

Portanto, a equação cartesiana de r é

$$150x + 100y - 15000 = 0.$$

Dividindo ambos os termos por 50, obtemos:

$$3x + 2y - 300 = 0.$$

Somando 300 em ambos os membros, encontramos:

$$2y + 3x = 300.$$

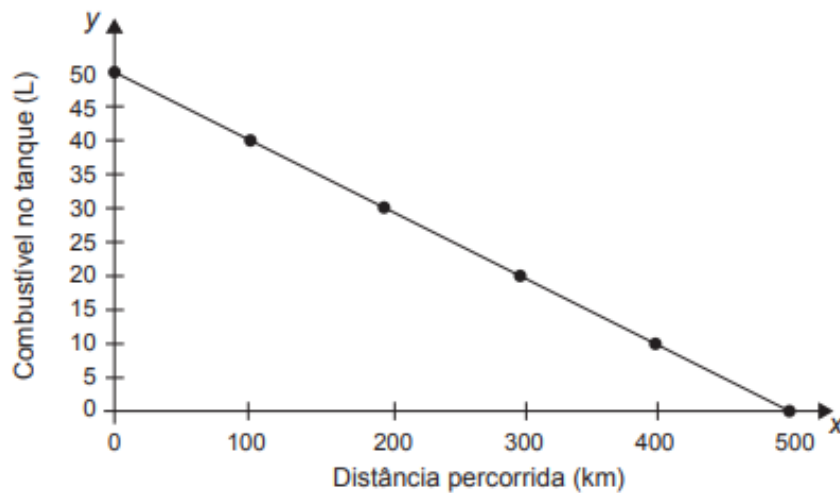
No entanto, como o eixo OX foi representado pela temperatura em Celcius (C) e o eixo OY foi representado pela temperatura em Delisle (D), a representação desejada pela questão é:

$$2D + 3C = 300.$$

Gabarito: Letra D.

Problema 2.3.2. (ENEM 2018 PPL) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura 2.39



Fonte: INEP

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

A) $y = -10x + 500$

B) $y = \frac{-x}{10} + 50$

C) $y = \frac{-x}{10} + 500$

D) $y = \frac{x}{10} + 50$

E) $y = \frac{x}{10} + 500$

Resolução: De acordo com o esboço gráfico apresentado, se r é a reta que passa pelos pontos $A = (0, 50)$ e $B = (500, 0)$, então $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (500 - 0, 0 - 50) = (500, -50)$ é um vetor contido em r . Pela Observação do Teorema 2.2.6, o vetor $\vec{v} = (50, 500)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

Por outro lado, pela Equação 2.6, sabemos que $r : ax + by + c = 0$, em que os coeficientes a e b são as coordenadas do vetor perpendicular à reta r . Como $\overrightarrow{AB} \perp r$, a equação de r é

$$50x + 500y + c = 0.$$

Na sequência, substituindo as coordenadas de $B = (500, 0) \in r$ na equação de r , encontramos o coeficiente c . De fato,

$$50 \cdot 500 + 500 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 25.000 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -25.000.$$

Consequentemente,

$$50x + 500y - 25.000 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{10} + y - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x}{10} + 50.$$

Gabarito: Letra B.

Problema 2.3.3. (ENEM 2011 PPL) Um programador visual deseja modificar uma imagem, aumentando seu comprimento e mantendo sua largura. As figuras 1 e 2 representam, respectivamente, a imagem original e a transformada pela duplicação do comprimento.

Figura 2.40

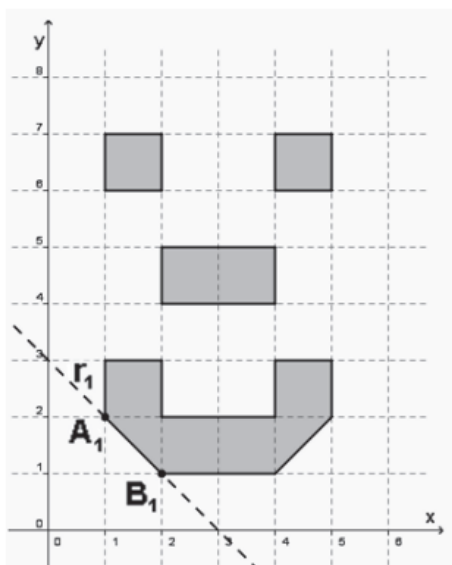


Figura 1

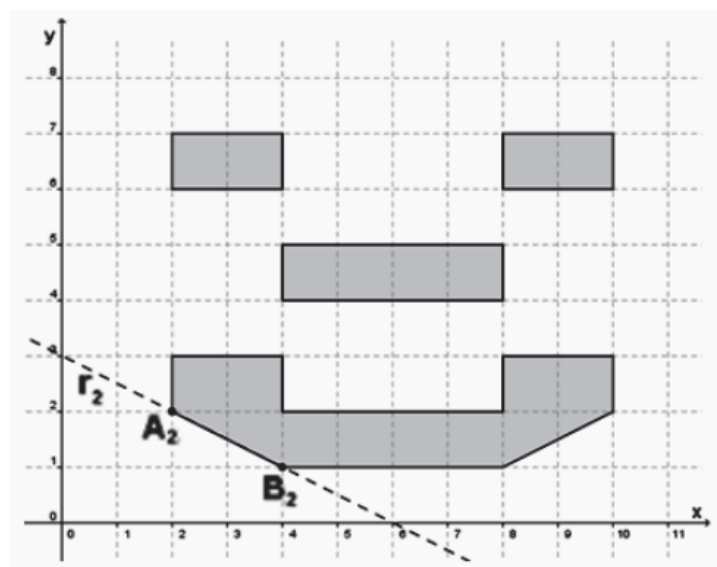


Figura 2

Fonte: INEP

Para modelar todas as possibilidades de transformação no comprimento dessa imagem, o programador precisa descobrir os padrões de todas as retas que contêm os segmentos que contornam os olhos, o nariz e a boca e, em seguida, elaborar o programa.

No exemplo anterior, o segmento A_1B_1 da figura 1, contido na reta r_1 , transformou-se no segmento A_2B_2 da figura 2, contido na reta r_2 .

Suponha que, mantendo constante a largura da imagem, seu comprimento seja multiplicado por n , sendo n um número inteiro e positivo, e que, dessa forma, a reta r_1 sofra as mesmas transformações. Nessas condições, o segmento A_nB_n estará contido na reta r_n .

A equação algébrica que descreve r_n , no plano cartesiano, é

A) $x + ny = 3n$.

B) $x - ny = -n$.

C) $x - ny = 3n$.

D) $nx + ny = 3n$.

E) $nx + 2ny = 6n$.

Resolução: Como a largura permanece constante, sabemos que as ordenadas de A_n e B_n são, respectivamente, iguais a 2 e 1. Além disso, como as abscissas são multiplicadas por n , logo $A_n = (n, 2)$ e $B_n = (2n, 1)$. Dessa forma,

$$\overrightarrow{A_nB_n} = (2n - n, 1 - 2) = (n, -1).$$

Pela Observação do Teorema 2.2.6, um vetor perpendicular a $\overrightarrow{A_nB_n}$ é

$$\vec{u} = (1, n).$$

Agora, pela Equação 2.6, a reta r_n é dada por

$$r_n : 1x + ny + k = 0.$$

Desde que $A_n \in r_n$, segue que

$$1 \cdot n + n \cdot 2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad n + 2n + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -3n.$$

Portanto, a equação da reta é

$$r_n : x + ny - 3n = 0 \quad \text{ou} \quad r_n : x + ny = 3n.$$

Gabarito: Letra A.

2.3.3 Distância de um Ponto a uma Reta

Conhecer a equação de uma reta é um passo essencial para analisar relações geométricas no plano. No entanto, muitas vezes, é necessário determinar a posição relativa de um ponto em relação a uma reta, especialmente para verificar alinhamento ou minimizar distâncias. Nesta seção, determinaremos a distância entre um ponto e uma reta, um conceito fundamental para diversas aplicações em Geometria Analítica e problemas de otimização.

Definição 2.3.2. *Sejam P um ponto e r uma reta r do plano. A distância de P à r , denotada por $d(P, r)$, é definida por*

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\}.$$

Teorema 2.3.1. *Sejam r uma reta e P um ponto no plano. Se $P \in r$, então $d(P, r) = 0$.*

Demonstração: Pela Definição 2.3.2, sabemos que

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\}.$$

Sabemos que a distância entre dois pontos é um número não-negativo. Assim, $d(P, Q) \geq 0$, para todo ponto Q do plano. Então,

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\} \geq 0.$$

Por outro lado, é verdade também que, para qualquer ponto $A \in r$, temos

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\} \leq d(P, A),$$

em particular,

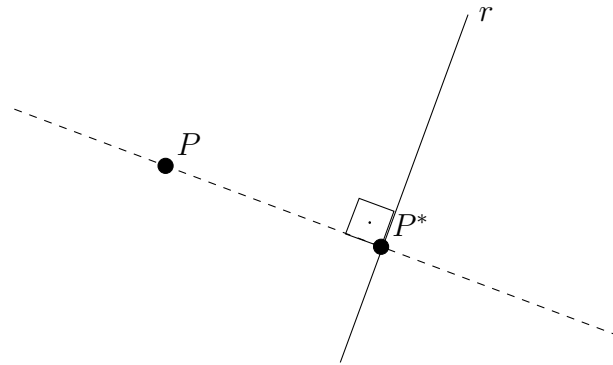
$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\} \leq d(P, P) = 0,$$

pois $P \in r$. Portanto,

$$0 \leq d(P, r) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad d(P, r) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 2.3.3. *Seja r uma reta e P do plano tal que $P \notin r$. A interseção de r com a reta perpendicular a r que passa por P é chamada de **Pé da Perpendicular** relativa a P e é representada por P^* .*

Figura 2.41: Pé da Perpendicular relativa a P 

Fonte: Autor

Teorema 2.3.2. *Seja r uma reta e P do plano tal que $P \notin r$. Então,*

$$d(P, r) = d(P, P^*).$$

Demonstração: Pela Definição 2.3.2, sabemos que

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\}.$$

Uma vez que $P^* \in r$, temos

$$d(P, r) \leq d(P, P^*). \quad (2.7)$$

Agora, vamos mostrar que

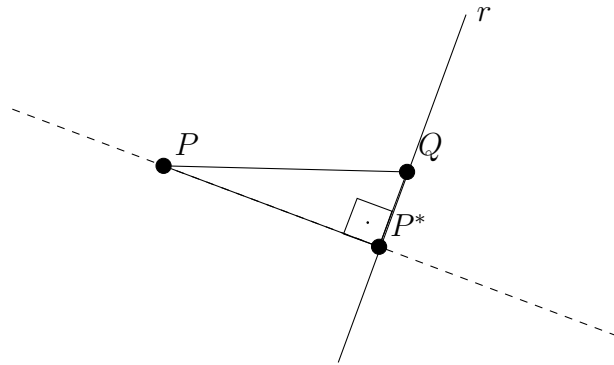
$$d(P, P^*) \leq d(P, r). \quad (2.8)$$

Para tanto, é suficiente provar que para todo $Q \in r$, tem-se

$$d(P, P^*) \leq d(P, Q).$$

Seja Q um ponto arbitrário de r . Se $Q = P^*$, então $d(P, P^*) = d(P, Q)$. Agora, se $Q \neq P^*$, como P^* é o Pé da Perpendicular, o triângulo $\triangle PP^*Q$ é retângulo em P^* , conforme podemos observar na figura a seguir:

Figura 2.42



Fonte: Autor

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, P^*))^2 + (d(P^*, Q))^2.$$

Por outro lado, uma vez que $P^* \neq Q$, temos

$$d(P^*, Q) > 0 \Rightarrow (d(P^*, Q))^2 > 0 \Rightarrow (d(P, P^*))^2 < (d(P, P^*))^2 + (d(P^*, Q))^2$$

o que implica

$$(d(P, P^*))^2 < (d(P, Q))^2 \Rightarrow d(P, P^*) < d(P, Q).$$

Portanto, para todo $Q \in r$, tem-se

$$d(P, P^*) \leq d(P, Q),$$

de onde segue que

$$d(P, P^*) \leq \min\{d(P, Q) \mid Q \in r\} \Rightarrow d(P, P^*) \leq d(P, r),$$

mostrando a desigualdade em (2.8). Por (2.7) e (2.8), concluímos que

$$d(P, r) = d(P, P^*).$$

□

Teorema 2.3.3. *Sejam $r : ax + by + c = 0$ a equação de uma reta e $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano, então a distância de P a r é dada por*

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração: Se $P \in r$, então $d(P, r) = 0$, visto que $d(P, P) = 0 \leq d(P, Q), \forall Q \in r$. No entanto, $P \in r$ implica que $ax_P + by_P + c = 0$ e, portanto $\frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 = d(P, r)$.

Suponha agora que $P \notin r$. Seja s a reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P . Como a equação da reta r é dada por $ax + by + c = 0$, r é perpendicular ao vetor de coordenadas a e b . No entanto, r é perpendicular a s , sendo assim, o vetor (a, b) é múltiplo de qualquer vetor contido em s , em particular, se $(x, y) \in s$,

$$s : \begin{cases} x = x_P + at \\ y = y_P + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas da reta s .

Visto que s é perpendicular a r que passa por P , a interseção das duas é o Pé da Perpendicular relativa a P , ou seja, $P^* \in r \cap s$. Por $P^* \in s$, existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $P^* = (x_P + at^*, y_P + bt^*)$. Ademais, uma vez que $P^* \in r$ podemos substituir as suas coordenadas na equação de r :

$$a(x_P + at^*) + b(y_P + bt^*) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad (a^2 + b^2)t^* + ax_P + by_P + c = 0$$

o que implica

$$t^* = \frac{-ax_P - by_P - c}{a^2 + b^2}. \quad (2.9)$$

Pelo Teorema 2.3.2 $d(P, r) = d(P, P^*)$. Além disso, $d(P, P^*) = \|\overrightarrow{PP^*}\|$. Então,

$$\begin{aligned} d(P, r) = \|\overrightarrow{PP^*}\| &\Rightarrow d(P, r) = \|((x_P + at^*) - x_P, (y_P + bt^*) - y_P)\| \\ &\Rightarrow d(P, r) = \|(at^*, bt^*)\| \\ &\Rightarrow d(P, r) = |t^*| \cdot \|(a, b)\|. \end{aligned}$$

Substituindo t^* pela expressão encontrada na Equação (2.9) temos

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a distância de P a r é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.10)$$

□

Exemplo 2.3.3. Determine a distância do ponto $P = (3, 4)$ à reta de equação

$$r : 2x - 3y + 7 = 0.$$

Resolução: Aplicando a igualdade dada em (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
 d(P, r) &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 &= \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\
 &= \frac{|6 - 12 + 7|}{\sqrt{4 + 9}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{13}} \\
 &= \frac{\sqrt{13}}{13}.
 \end{aligned}$$

2.4 Transformações no Plano Cartesiano

Até agora, apresentamos a distância entre pontos, as equações de retas e a distância entre ponto e reta no plano cartesiano. No entanto, muitas vezes, essas equações podem ser complexas devido à posição ou orientação dos objetos no plano.

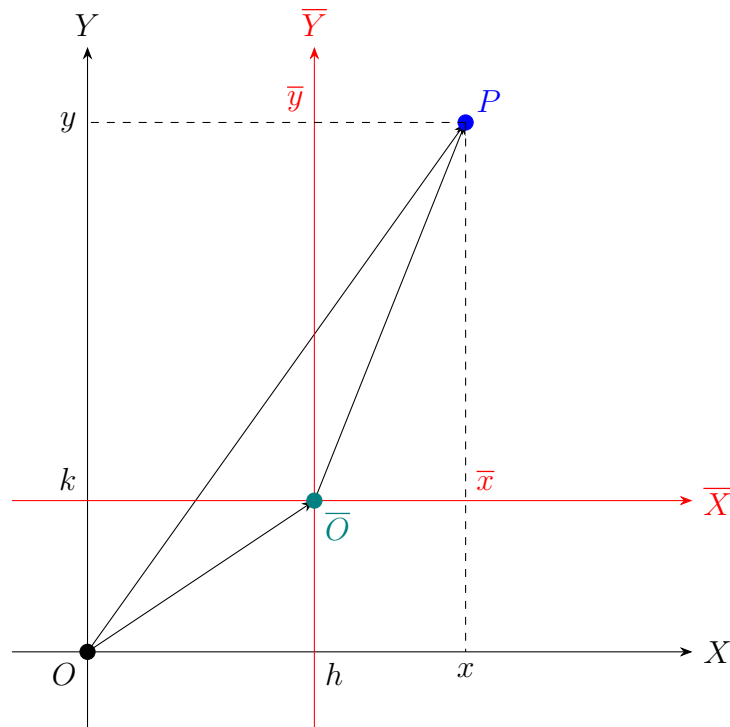
Para facilitar os cálculos e obter representações mais simples, podemos transformar o sistema de coordenadas sem alterar as propriedades geométricas das figuras. Essas transformações incluem translação, que desloca a origem do sistema, e rotação, que altera a orientação dos eixos. A seguir, veremos como essas técnicas podem ser aplicadas para reescrever equações de retas e curvas de forma mais conveniente.

2.4.1 Translação dos Eixos

A translação dos eixos cartesianos é uma transformação que desloca o sistema de coordenadas sem alterar as distâncias e os ângulos entre os pontos. Essa transformação é frequentemente utilizada para simplificar equações de curvas e retas, deslocando sua representação para um sistema de coordenadas mais conveniente.

Sejam OXY um sistema de eixos com Origem em O , $\bar{O}$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido desses eixos, respectivamente. Designamos por $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY . Veja a representação a seguir:

Figura 2.43



Fonte: Autor

Pela definição das coordenadas de um vetor, sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = (x, y), \quad \overrightarrow{OO'} = (h, k) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{O'P} = (\bar{x}, \bar{y}).$$

E, pela Adição de Vetores, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \Rightarrow (x, y) = (h, k) + (\bar{x}, \bar{y}) \\ &\Rightarrow (x, y) = (\bar{x} + h, \bar{y} + k). \end{aligned}$$

Assim, a relação entre as coordenadas nos dois sistemas é dada por:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + h \\ y = \bar{y} + k \end{cases}. \quad (2.11)$$

Ou ainda,

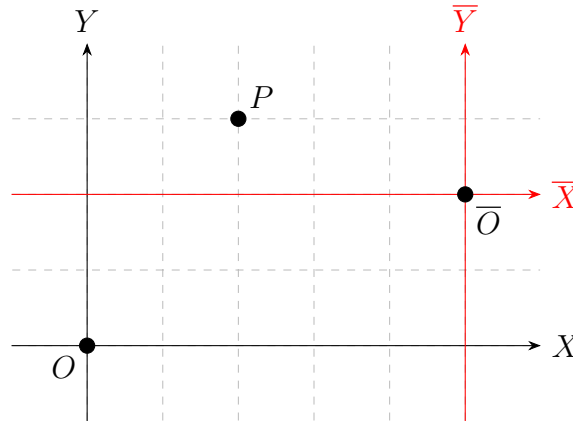
$$\begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde (h, k) são as coordenadas da nova origem no sistema OXY e $(\bar{x}, \bar{y})$ são as coordenadas de P no sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$.

Exemplo 2.4.1. Seja $P = (2, 3)$ um ponto do sistema cartesiano OXY . Seja $\overline{O} = (5, 2)$ a Origem do sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$. Determine as coordenadas do ponto P no sistema de

coordenadas $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$.

Figura 2.44



Fonte: Autor

Resolução: Pela adição de vetores, sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP}.$$

Além disso, é verdade que $\overrightarrow{OP} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OO} = (5, 2)$ e $\overrightarrow{OP} = (\overline{x}, \overline{y})$. Segue que

$$\begin{aligned} (2, 3) &= (5, 2) + (\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow (2, 3) = (5 + \overline{x}, 2 + \overline{y}) \\ &\Rightarrow 2 = 5 + \overline{x} \quad \text{e} \quad 3 = 2 + \overline{y} \\ &\Rightarrow \overline{x} = -3 \quad \text{e} \quad \overline{y} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $P = (2, 3)$ no novo sistema de coordenadas é o ponto $\overline{P} = (-3, 1)$.

Exemplo 2.4.2. Seja $r : 2x + 3y - 5 = 0$ a equação de uma reta no sistema cartesiano OXY . Seja $\overline{O} = (3, 2)$ a Origem do sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$. Determine a equação dessa reta no novo sistema de coordenadas.

Resolução: Seja $P = (x, y) \in r$ e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas desse ponto no novo sistema de coordenadas. Por (2.11), temos

$$x = \overline{x} + 3 \quad \text{e} \quad y = \overline{y} + 2.$$

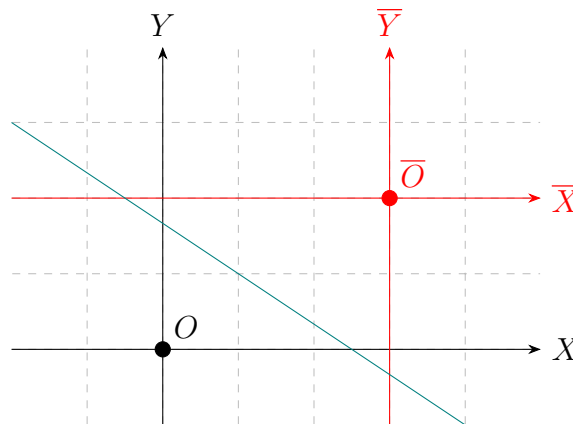
Substituindo os valores de x e y na equação da reta, obtemos

$$2(\overline{x} + 3) + 3(\overline{y} + 2) - 5 = 0 \Rightarrow 2\overline{x} + 6 + 3\overline{y} + 6 - 5 = 0 \Rightarrow 2\overline{x} + 3\overline{y} + 7 = 0.$$

Assim, a equação da reta r no novo sistema de coordenadas é:

$$\overline{r} : 2\overline{x} + 3\overline{y} + 7 = 0.$$

Figura 2.45



Fonte: Autor

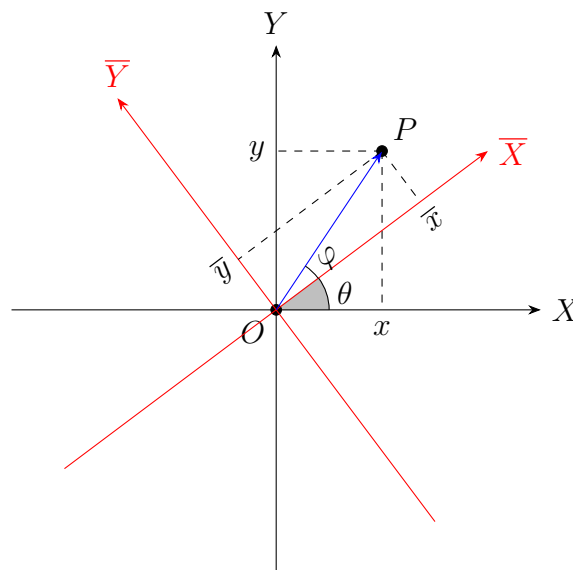
Observe que a reta continua perpendicular ao vetor $(2, 3)$, tendo em vista que a translação dos eixos não altera os ângulos entre segmentos considerados.

2.4.2 Rotação dos Eixos

A rotação dos eixos cartesianos é uma transformação que altera a orientação dos eixos de coordenadas em torno da origem sem modificar as distâncias ou os ângulos entre os segmentos. Essa transformação é útil para simplificar equações de retas e curvas, eliminando termos mistos ou facilitando sua interpretação algébrica.

Seja $P = (x, y)$ um ponto no sistema de coordenadas OXY . Suponha que queremos rotacionar os eixos cartesianos em torno da origem de um ângulo θ no sentido anti-horário, mantendo as distâncias inalteradas, conforme a figura a seguir:

Figura 2.46: Rotação dos eixos cartesianos, onde o sistema OXY é girado em um ângulo θ



Fonte: Autor

Considerando $r = d(O, P)$, podemos utilizar as razões trigonométricas para encontrar as coordenadas de P nos sistemas OXY e $\overline{OX}\overline{Y}$. Assim:

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\overline{x}}{r} \\ \text{sen}(\varphi) = \frac{\overline{y}}{r} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos(\varphi + \theta) = \frac{x}{r} \\ \text{sen}(\varphi + \theta) = \frac{y}{r} \end{cases},$$

equivalentemente,

$$\begin{cases} \overline{x} = r\cos(\varphi) \\ \overline{y} = r\text{sen}(\varphi) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = r\cos(\varphi + \theta) \\ y = r\text{sen}(\varphi + \theta) \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} \overline{x} = r\cos(\varphi) = r\cos((\varphi + \theta) - \theta) \\ \overline{y} = r\text{sen}(\varphi) = r\text{sen}((\varphi + \theta) - \theta) \end{cases}.$$

Pelas relações de soma de arcos, temos

$$\begin{cases} \overline{x} = r\cos(\varphi + \theta)\cos(\theta) + r\text{sen}(\varphi + \theta)\text{sen}(\theta) \\ \overline{y} = r\text{sen}(\varphi + \theta)\cos(\theta) - r\cos(\varphi + \theta)\text{sen}(\theta) \end{cases}.$$

Visto que $x = r\cos(\varphi + \theta)$ e $y = r\text{sen}(\varphi + \theta)$, segue que

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos(\theta) + y\text{sen}(\theta) \\ \overline{y} = y\cos(\theta) - x\text{sen}(\theta) \end{cases}.$$

Assim, o ponto $P = (x, y)$ em $\overline{OX}\overline{Y}$, ao ser rotacionado pelo ângulo θ em torno da origem, assume as coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos(\theta) + y\text{sen}(\theta) \\ \overline{y} = -x\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}. \quad (2.13)$$

As quais podem ser obtidas pelo produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De forma semelhante,

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi + \theta) = r\cos(\varphi)\cos(\theta) - r\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta) \\ y = r\text{sen}(\varphi + \theta) = r\cos(\varphi)\text{sen}(\theta) + r\text{sen}(\varphi)\cos(\theta) \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = \overline{x}\cos(\theta) - \overline{y}\text{sen}(\theta) \\ y = \overline{x}\text{sen}(\theta) + \overline{y}\cos(\theta) \end{cases}. \quad (2.14)$$

Consequentemente, um ponto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ resultante de uma rotação de θ ao redor da

Origem, nas coordenadas OX pode ser encontrado pelo produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

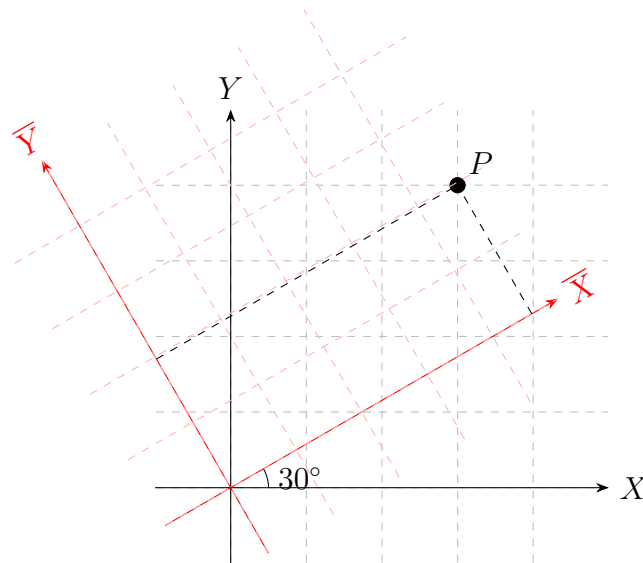
Exemplo 2.4.3. Seja $P = (3, 4)$ um ponto do sistema OXY . Determine o ponto P no sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$ resultante da rotação de 30° no sentido anti-horário do sistema OXY ao redor da Origem.

Resolução: Sendo $\theta = 30^\circ$ o ângulo de rotação dos eixos, sabemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Então, as novas coordenadas de P serão $\overline{P} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2, 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) \approx (4.598, 1.964)$.

Figura 2.47



Fonte: Autor

Exemplo 2.4.4. Seja $Q = (-2, 5)$ um ponto do plano OXY . Determine as coordenadas do ponto Q quando o plano sofrer uma rotação de 45° no sentido horário em relação à Origem.

Resolução: Poderíamos resolver esse exemplo através de uma rotação de 315° no sentido anti-horário, como no exemplo anterior. No entanto, sendo a rotação feita no sentido horário, queremos determinar qual é o ponto P , que quando sofre uma rotação no sentido

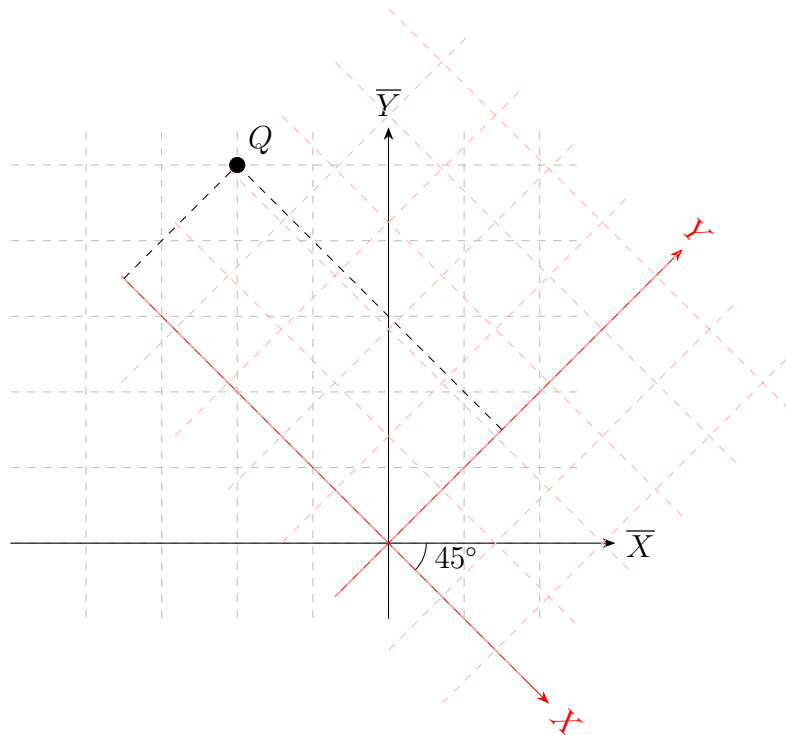
anti-horário é transformado no ponto $Q = (-2, 5) = (\bar{x}, \bar{y})$. Sendo a rotação de um ângulo de 45° , por (2.14)

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos(45^\circ) - \bar{y}\sin(45^\circ) \\ y = \bar{x}\sin(45^\circ) + \bar{y}\cos(45^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = (-2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Consequentemente, as coordenadas de Q , quando o plano sofre uma rotação de 45° no sentido horário são:

$$Q' = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \approx (-4.949, 2.121).$$

Figura 2.48



Fonte: Autor

Exemplo 2.4.5. Seja $r : -2x + y - 3 = 0$ uma reta no sistema de eixos OXY . Determine a equação da reta após uma rotação do eixo de 45° no sentido anti-horário ao redor da Origem?

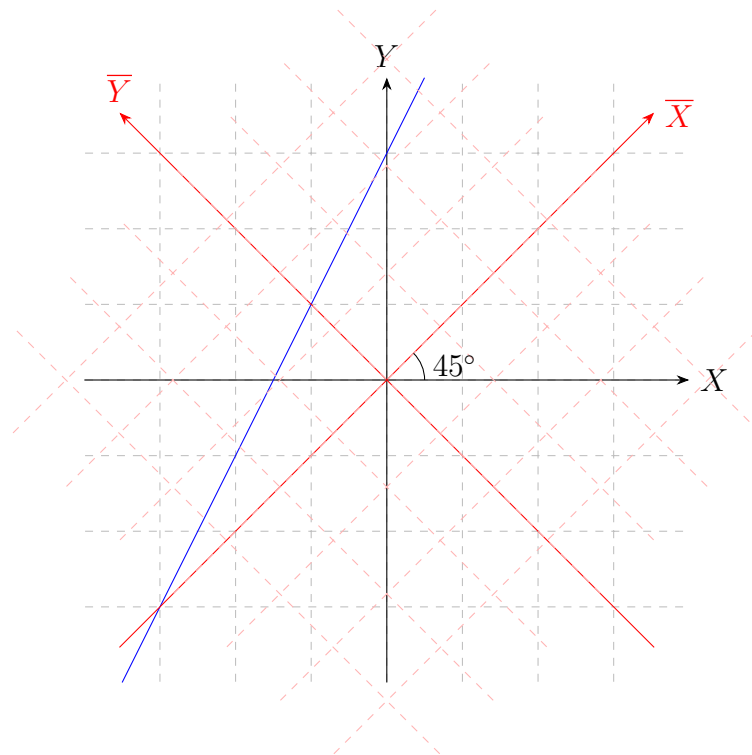
Resolução: Sendo $\theta = 45^\circ$ o ângulo de rotação, sabemos, por (2.14)

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos(45^\circ) - \bar{y}\sin(45^\circ) \\ y = \bar{x}\sin(45^\circ) + \bar{y}\cos(45^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases}.$$

Substituindo esses valores na equação da reta, obtemos

$$\begin{aligned}
 & -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right) - 3 = 0 \\
 \Rightarrow & -\sqrt{2}(\bar{x} - \bar{y}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) - 3 = 0 \\
 \Rightarrow & -2(\bar{x} - \bar{y}) + (\bar{x} + \bar{y}) - 3\sqrt{2} = 0 \\
 \Rightarrow & -\bar{x} + 3\bar{y} - 3\sqrt{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Figura 2.49



Fonte: Autor

3 Lugar Geométrico

Neste capítulo, estamos interessados em apresentar a noção de Lugar Geométrico e observar como tal conceito está relacionado a subconjuntos especiais do Espaço Euclidiano Bidimensional, quais sejam, as Cônicas.

3.1 Definição

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o Espaço Euclidiano n -dimensional, denotado por $\mathbb{R}^n$, como sendo o seguinte conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{P}$ uma Propriedade arbitrária referente a elementos de $\mathbb{R}^n$. O conjunto*

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ possui a propriedade } \mathcal{P}\}$$

é chamado de Lugar Geométrico associado a propriedade $\mathcal{P}$.

Por definição, para determinar se um determinado conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ é o Lugar Geométrico associado a uma propriedade $\mathcal{P}$ devemos provar que

- Todos os Pontos de $\mathcal{A}$ possuem a propriedade $\mathcal{P}$ e
- Nenhum outro ponto de $\mathbb{R}^n$ satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$.

Mais precisamente, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ é o Lugar Geométrico associado a uma propriedade $\mathcal{P}$ quando

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} \subset \mathcal{A}.$$

Nesse trabalho, focaremos nos Lugares Geométricos que são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, ou seja, no plano cartesiano bidimensional. No entanto, como os Lugares Geométricos podem possuir os mais diversos representações geométricas possíveis, restringiremos nosso estudo aos casos particulares em que os mesmos são curvas no plano, seguindo a ideia de Wexler [30]

Um ponto se move de acordo com uma regra, assim traçando uma curva. Encontrar a equação da curva e suas propriedades é um *problema de Lugar*

Geométrico. Nós procuramos por uma afirmação matemática, normalmente na forma de uma equação, a qual seja verdadeira para todos os pontos da curva e para *nenhum* outro ponto, e da qual nós possamos deduzir propriedades da curva. Esse é um problema básico da Geometria Analítica (Wexler, 1967, tradução nossa).

Se todos os pontos de $\mathcal{L}$ satisfazem uma determinada equação, dizemos que este é o **Lugar Geométrico da Equação**. Similarmente, damos à equação o nome de **Equação do Lugar Geométrico**.

Nesse sentido, vamos resolver dois tipos de problemas:

1. Determinar o Lugar Geométrico de uma Equação, ou seja, quais pontos do plano satisfazem aquela equação e quais as propriedades da curva formada;
2. Determinar a equação de um Lugar Geométrico a partir de suas propriedades.

3.2 Exemplos

Exemplo 3.2.1. *Dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ em $\mathbb{R}^2$ qual o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a esses dois pontos simultaneamente?*

Resolução: Seja $\mathcal{P}$ a propriedade referente aos pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão a mesma distância de A e B , isto é,

$$\mathcal{L} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P \text{ possui a propriedade } \mathcal{P}\}.$$

Seja $\mathcal{A}$ a Mediatriz do segmento AB . Vamos provar que

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}.$$

Primeiramente, observe que a Mediatriz do segmento AB é a reta que passa pelo ponto $P_0 = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ e possui vetor normal

$$\overrightarrow{AP_0} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A, \frac{y_A + y_B}{2} - y_A\right) = \left(\frac{x_B - x_A}{2}, \frac{y_B - y_A}{2}\right).$$

Se $P = (x, y) \in \mathcal{A}$, então

$$\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)x + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right)y + c = 0.$$

Como $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \in \mathcal{A}$, temos

$$\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right) \cdot \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{4}.$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_B - x_A}{2} \right) x + \left(\frac{y_B - y_A}{2} \right) y + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{4} = 0 \right\},$$

ou ainda,

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_B - x_A) x + (y_B - y_A) y + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2} = 0 \right\}.$$

Agora, observe que

$$P \in \mathcal{L} \iff d(P, A) = d(P, B).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(P, A) &= d(P, B) \\ \iff \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} &= \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ \iff \left(\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \right)^2 &= \left(\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \right)^2 \\ \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\ \iff x^2 - 2x_Ax + x_A^2 + y^2 - 2y_Ay + y_A^2 &= x^2 - 2x_Bx + x_B^2 + y^2 - 2y_By + y_B^2. \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned} -2x_Ax + x_A^2 - 2y_Ay + y_A^2 &= -2x_Bx + x_B^2 - 2y_By + y_B^2 \\ \iff 2x_Bx - 2x_Ax + x_A^2 - x_B^2 + 2y_By - 2y_Ay + y_A^2 - y_B^2 &= 0 \\ \iff 2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) + (x_A - x_B)(x_A + x_B) + (y_A - y_B)(y_A + y_B) &= 0 \\ \iff (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2} &= 0, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2} = 0 \right\},$$

mostrando que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$.

Outra maneira de analisar o problema seria considerar apenas a equação do Lugar Geométrico $\mathcal{L}$ considerando três possibilidades, à saber:

1. $x_A = x_B$;
2. $y_A = y_B$ e
3. $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$.

Caso $x_A = x_B$, então a equação de $\mathcal{L}$ é

$$2y(y_B - y_A) + (y_A - y_B)(y_A + y_B) = 0 \iff 2y - (y_A + y_B) = 0,$$

o que implica

$$y = \frac{(y_A + y_B)}{2}. \quad (3.1)$$

Portanto, se $x_A = x_B$, então a equação do Lugar Geométrico é $y = \frac{(y_A + y_B)}{2}$, que representa uma reta horizontal cuja ordenada é a média das ordenadas dos pontos A e B . Logo,

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{(y_A + y_B)}{2} \right\}.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{(y_A + y_B)}{2} \right\},$$

visto que a Mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular AB que passa pelo ponto médio de AB .

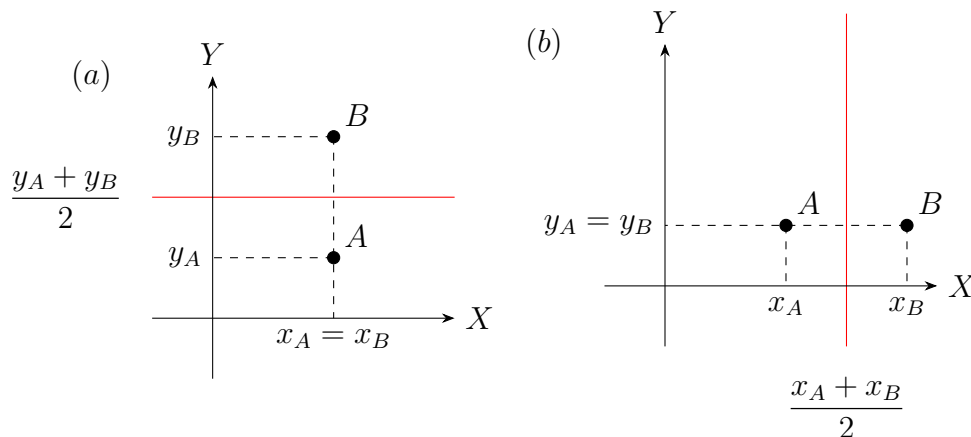
De forma análoga, se $y_A = y_B$, então teremos uma reta vertical, cuja abscissa é a média das abscissas dos pontos e, dessa forma, também será a **Mediatriz** do segmento AB e sua equação será:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}. \quad (3.2)$$

Consequentemente, $\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{(x_A + x_B)}{2} \right\} = \mathcal{A}$.

A análise dos casos apresentados podem ser observadas nas figuras a seguir:

Figura 3.1: Mediatriz do Segmento de Pontos: (a) com a mesma abscissa; (b) com a mesma ordenada.



Fonte: Autor

Se $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, então a equação de $\mathcal{L}$ é

$$2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) + (x_A - x_B)(x_A + x_B) + (y_A - y_B)(y_A + y_B) = 0.$$

Considerando $a = 2(x_B - x_A)$ e $b = 2(y_B - y_A)$ temos:

$$ax + by - \frac{a(x_A + x_B)}{2} - \frac{b(y_A + y_B)}{2} = 0.$$

Sendo assim, essa é uma reta perpendicular ao vetor

$$(a, b) = (2(x_B - x_A), 2(y_B - y_A)) = 2(x_B - x_A, y_B - y_A) = 2\overrightarrow{AB}.$$

Portanto a reta é perpendicular ao segmento orientado AB .

Para que essa reta seja uma mediatriz do segmento AB , basta que ela passe pelo ponto médio $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. Substituindo as coordenadas de M na equação da reta, temos:

$$a \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + b \cdot \frac{(y_A + y_B)}{2} - \frac{a(x_A + x_B)}{2} - \frac{b(y_A + y_B)}{2} = 0.$$

Como a igualdade é verdadeira, o ponto M pertence à reta. Dessa forma, concluímos que a reta de equação

$$2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) + (x_A - x_B)(x_A + x_B) + (y_A - y_B)(y_A + y_B) = 0. \quad (3.3)$$

é a mediatriz do segmento AB .

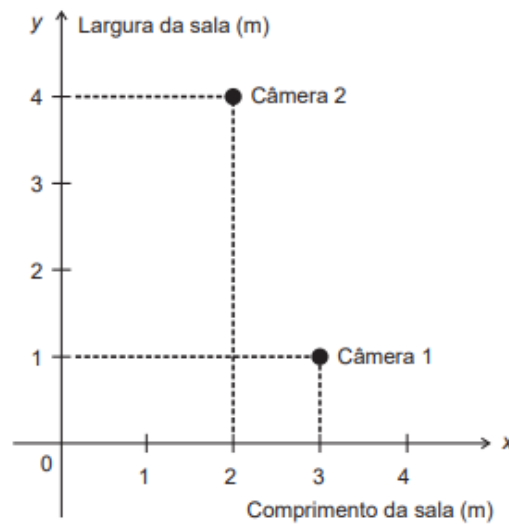
Consequentemente, o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos dados é a **Mediatriz** do segmento cujas extremidades são esses pontos.

Afim de otimizar os argumentos, nos exemplos seguintes, vamos trabalhar apenas com as equações dos Lugares Geométricos.

Problema 3.2.1. (ENEM 2019 PPL) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.

Figura 3.2



Fonte: INEP

(ii) cinco relações entre as coordenadas $(x; y)$ da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$$R1 : y = x$$

$$R2 : y = -3x + 5$$

$$R3 : y = -3x + 10$$

$$R4 : y = 1/3x + 5/3$$

$$R5 : y = 1/3x + 1/10$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera.

A relação escolhida pelo instalador foi a

A) R1.

B) R2.

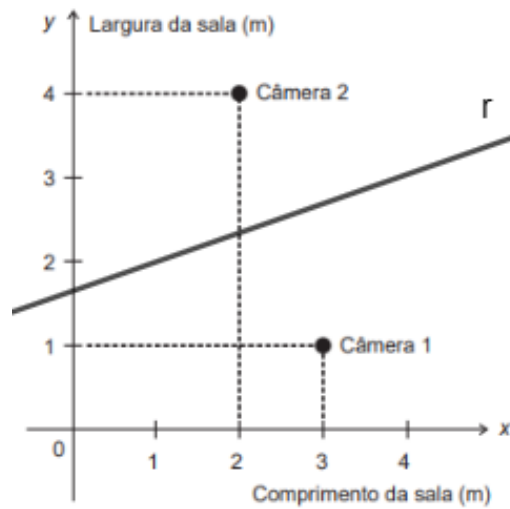
C) R3.

D) R4.

E) R5.

Resolução: O instalador pretende buscar pelos pontos que são equidistantes a $C_1 = (3, 1)$ e $C_2 = (2, 4)$. Sendo assim, ele busca pela mediatriz do segmento C_1C_2 .

Figura 3.3



Fonte: Autor

Sabemos que o vetor $\overrightarrow{C_1C_2} = (2 - 3, 4 - 1) = (-1, 3)$ é perpendicular à mediatriz. Assim, pela equação 2.6, a reta mediatriz é representada por

$$r : -1x + 3y + c = 0.$$

Sendo r a mediatriz, a mesma passa pelo ponto médio $M = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Visto que M pertence a r , podemos substituir suas coordenadas na equação da reta a fim de encontrar o coeficiente c :

$$-1 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -5.$$

Portanto,

$$r : -x + 3y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r : 3y = x + 5.$$

Que pode ser reescrito da forma

$$r : y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Gabarito: Letra D.

Problema 3.2.2. (EsPCEX 2020) Os pontos $A(3, -2)$ e $C(-1, 3)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$. A equação da reta que contém a diagonal BD é

[A] $5x + 4y - 7 = 0$.

[B] $8x - 10y - 3 = 0$.

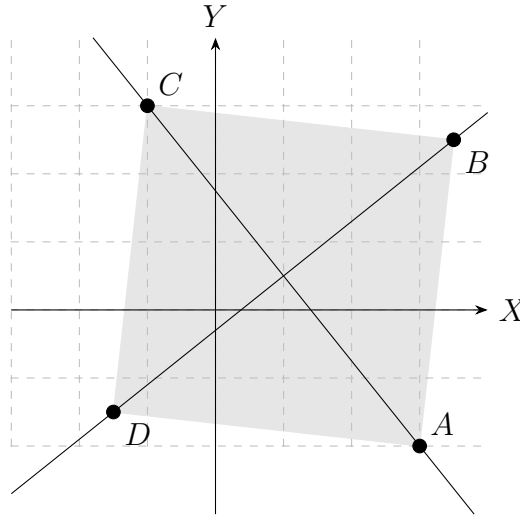
[C] $8x + 10y - 13 = 0$.

[D] $4x - 5y + 3 = 0$.

[E] $4x + 5y - 7 = 0$.

Resolução 1: Como a diagonal BD é perpendicular à diagonal AC e elas se intersectam nos seus pontos médios, logo BD pertence à mediatriz do segmento AC .

Figura 3.4



Fonte: Autor

Utilizando a equação 3.3 para os pontos $A = (3, -2)$ e $C = (-1, 3)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 & 2x(x_C - x_A) + 2y(y_C - y_A) + (x_A - x_C)(x_A + x_C) + (y_A - y_C)(y_A + y_C) = 0 \\
 \Rightarrow & 2x(-1 - 3) + 2y(3 + 2) + (3 + 1)(3 - 1) + (-2 - 3)(-2 + 3) = 0 \\
 \Rightarrow & -8x + 10y + 8 - 5 = 0 \\
 \Rightarrow & -8x + 10y + 3 = 0 \\
 \Rightarrow & 8x - 10y - 3 = 0.
 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

Resolução 2: Sabemos que o vetor $\overrightarrow{AC} = (-1 - 3, 3 - (-2)) = (-4, 5)$ é perpendicular à Mediatriz. Pela Equação 2.6, a Mediatriz é representada por:

$$r : -4x + 5y + c = 0.$$

Como a reta passa pelo ponto médio de AC , qual seja $(1, 0.5)$, logo

$$-4 \cdot 1 + 5 \cdot 0.5 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 2.5 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1.5.$$

Portanto, a reta que passa pela diagonal BD tem equação

$$r : -4x + 5y + 1.5 = 0.$$

Multiplicando por -2, pode ser reescrita como

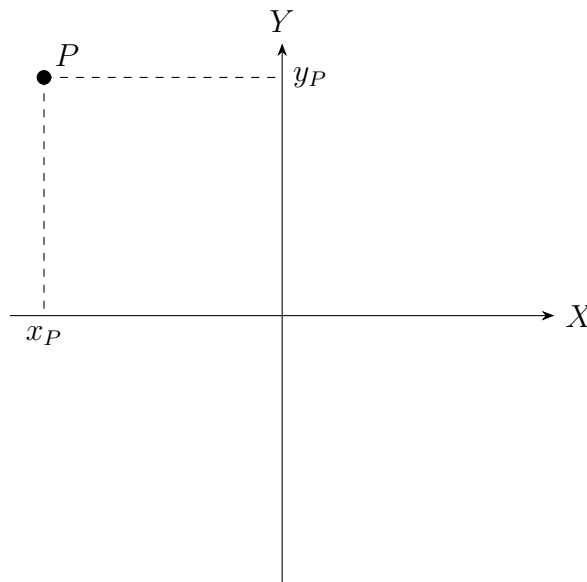
$$r : 8x - 10y - 3 = 0.$$

Gabarito: Letra B.

Exemplo 3.2.2. Qual o Lugar Geométrico dos Pontos equidistantes aos eixos ordenados em $\mathbb{R}^2$?

Resolução: Seja $P = (x, y)$ um ponto equidistante às retas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$. Sabemos que $d(P, OX) = |y|$ e $d(P, OY) = |x|$.

Figura 3.5



Fonte: Autor

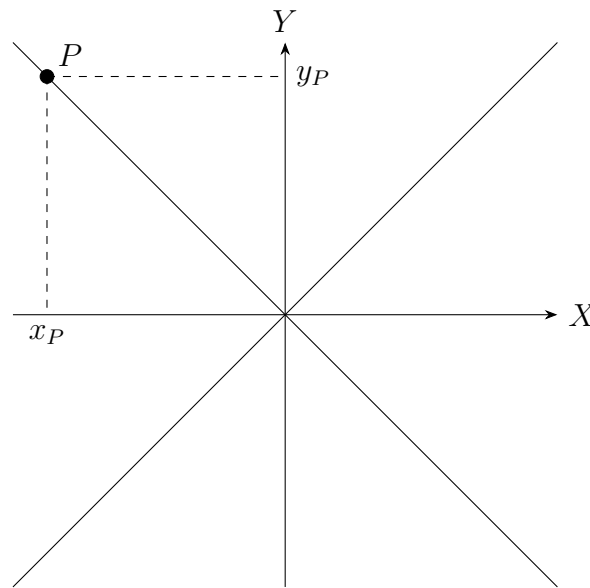
Por hipótese, $d(P, OX) = d(P, OY)$, segue que

$$|y| = |x|,$$

isto é $y = x$ ou $y = -x$.

Concluimos que P é equidistante a $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ se e somente se ele pertence à reta $r_1 : y = x$ ou à reta $r_2 : y = -x$.

Figura 3.6: Reta Identidade e sua Perpendicular que passa pela Origem



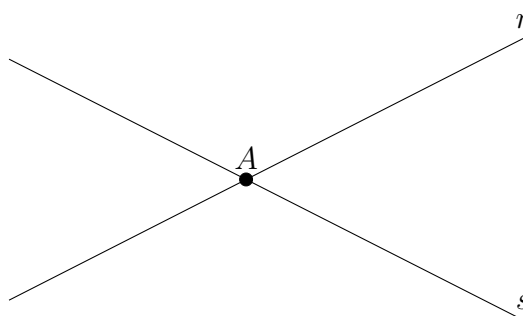
Fonte: Autor

Consequentemente, o Lugar Geométrico dos Pontos equidistantes aos eixos ordenados são a reta Identidade e a sua perpendicular que passa pela Origem.

Exemplo 3.2.3. *Qual o Lugar Geométrico dos Pontos equidistantes a duas retas concorrentes?*

Resolução: Sejam r e s duas retas concorrentes no plano $\mathbb{R}^2$ e A o ponto de interseção entre as duas.

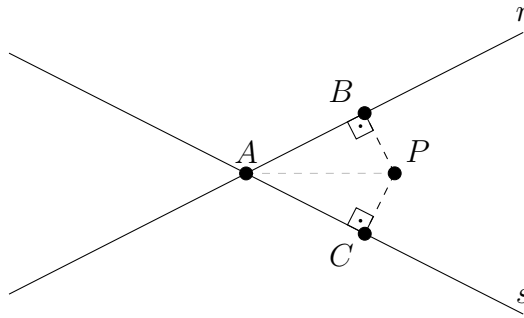
Figura 3.7



Fonte: Autor

Seja P um ponto do plano que pertence ao Lugar Geométrico. Pelo Teorema 2.3.2, $d(P, r) = d(P, P^*)$, em que P^* é o Pé da Perpendicular relativa a P . Sejam B e C , respectivamente, os Pés das Perpendiculares de r e s relativas a P , conforme a figura abaixo.

Figura 3.8

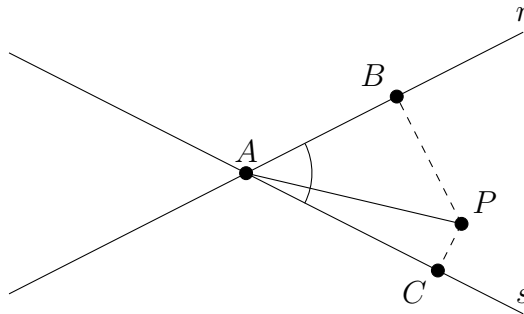


Fonte: Autor

Podemos traçar o segmento AP , formando dois triângulos, $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$. Por hipótese $d(P, r) = d(P, s)$. Por construção os ângulos $\hat{ABP}$ e $\hat{ACP}$ são retos. O segmento AP coincide aos dois triângulos. Consequentemente os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$ são congruentes. Sendo assim, $\hat{PAB} = \hat{PAC}$. Por consequência $P \in \mathcal{L}$ é um ponto de uma das bissetrizes das retas r e s .

Reciprocamente, suponhamos que P não pertence a nenhuma das bissetrizes e provemos que as distâncias $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ serão diferentes. Novamente, encontraremos os Pés das Perpendiculares de r e s relativas ao ponto P e as nomearemos, respectivamente, B e C .

Figura 3.9



Fonte: Autor

Ora, sabemos que os triângulos $\triangle APB$ e $\triangle APC$ são retângulos em B e C , respectivamente. Portanto, são válidas as razões trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente. No entanto, como o ângulo interno de um triângulo retângulo é sempre menor ou igual a 90° , logo

$$\begin{aligned}
 \hat{PAB} \neq \hat{PAC} &\Rightarrow \text{sen}(\hat{PAB}) \neq \text{sen}(\hat{PAC}) \\
 &\Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \neq \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \\
 &\Rightarrow \overline{PB} \neq \overline{PC}.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, todos os pontos equidistantes a r e s pertencem a uma das Bissetrizes dessas retas e qualquer outro ponto externo às bissetrizes não será equidistante a r e s .

Provamos assim que o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a r e s são as suas **Bissetrizes**.

3.3 Cônicas

3.3.1 Seções Cônicas

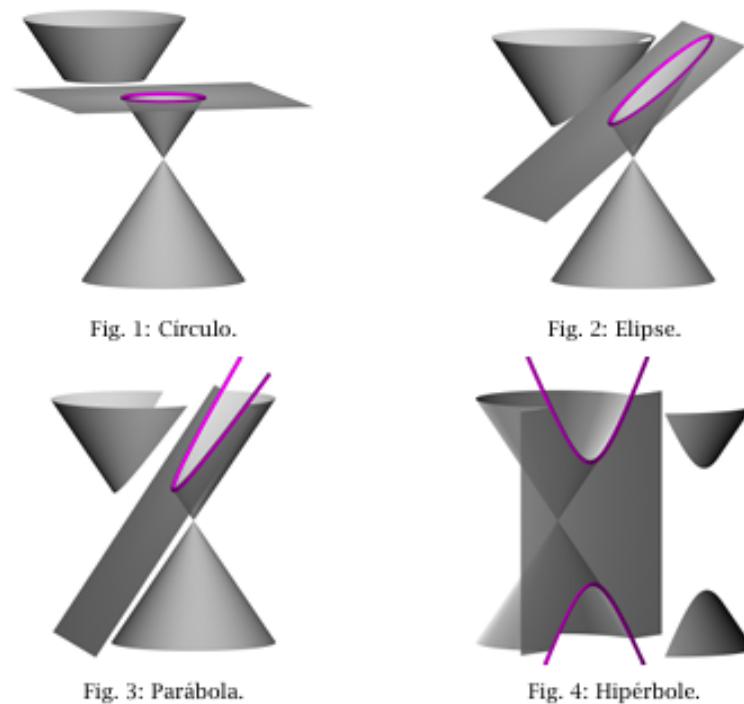
As curvas cônicas têm uma trajetória histórica rica, desde suas primeiras descobertas na Grécia Antiga até as aplicações contemporâneas na Astronomia, na Física e na Engenharia. Seu estudo evoluiu significativamente ao longo dos séculos, passando por diferentes abordagens matemáticas, desde a Geometria Sintética até a formulação algébrica da Geometria Analítica.

Segundo Wexler (1967) [30], os matemáticos gregos já tinham noção de que quando um cone ou um cilindro eram cortados por um plano perpendicular ao eixo, a curva da interseção era uma Circunferência. No entanto, havia curiosidade com relação a quais curvas seriam formadas caso esse corte não fosse perpendicular.

Sejam dois cones simétricos seccionados por um plano α . Caso esse plano seja paralelo às bases dos cones ao eixo, a curva formada será uma **Circunferência**¹. No entanto, se esse plano for rotacionado de forma que ele ainda corte todas as geratrizes dos cones, então obtemos uma **Elipse**. Caso o plano seja rotacionado ainda mais e obtenha inclinação igual a uma das geratrizes, logo a curva obtida é uma **Parábola**. Caso o corte seja realizado de forma paralela ao eixo, nesse caso, obtemos uma **Hipérbole**.

¹Alguns autores utilizam os termos Circunferência e Círculo de forma indistinta, a exemplo de Frensel e Delgado (2017). Atualmente é mais comum utilizar o termo Circunferência para a curva e Círculo para a União da Circunferência com a sua região interna. A essa definição de Círculo, esses autores davam o nome de Disco.

Figura 3.10: Seções Cônicas



Fonte: FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge. [14]

Se o corte intersecta o vértice dos cones, então teremos Cônicas Degeneradas. Assim como nas Cônicas supracitadas, o tipo de Cônica Degenerada depende do ângulo com que o plano α cortou os cones.

- A forma degenerada de uma Circunferência ou de uma Elipse é um único ponto;
- A forma degenerada de uma Parábola é uma reta ou duas retas paralelas;
- A forma degenerada de uma Hipérbole são duas retas concorrentes.

Tal caracterização das curvas cônicas, segundo Quaranta Neto [26], deve-se a Apolônio, o famoso “Grande Geômetra”, matemático que, segundo o autor, mais contribuiu para a expansão do conhecimento das cônicas, sendo ele inclusive pioneiro ao usar pela primeira vez os termos “Elipse”, “Parábola” e “Hipérbole” ao se referir às curvas cônicas.

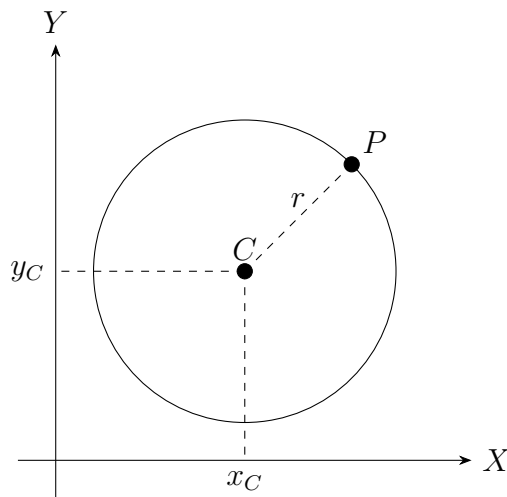
Também a Apolônio são atribuídos o estudo dos Focos das Cônicas, de suas propriedades óticas e, mais importante para essa dissertação, caracterizações que as tornam possíveis serem visualizadas como Lugares Geométricos. Utilizaremos cada uma dessas caracterizações para encontrar uma equação correspondente associada a cada uma das cônicas e então utilizaremos os conceitos de Translação e Rotação dos Eixos cartesianos para encontrar outras formas em que as equações podem aparecer.

3.3.2 Circunferência

Dado um ponto C e um número real positivo r , a **Circunferência** $\mathcal{C}$ de Centro C e raio r é o Lugar Geométrico dos Pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) = r.$$

Figura 3.11: Circunferência



Fonte: Autor

Sendo $C = (x_C, y_C)$ e $P = (x, y)$, então

$$\begin{aligned} d(P, C) = r &\iff \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r \\ &\iff (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \tag{3.4}$$

é a **Equação da Circunferência** de Centro $C = (x_C, y_C)$ e raio r .

Exemplo 3.3.1. *Encontre o conjunto dos pontos do plano cuja distância à Origem dos Eixos Cartesianos é de 5 unidades.*

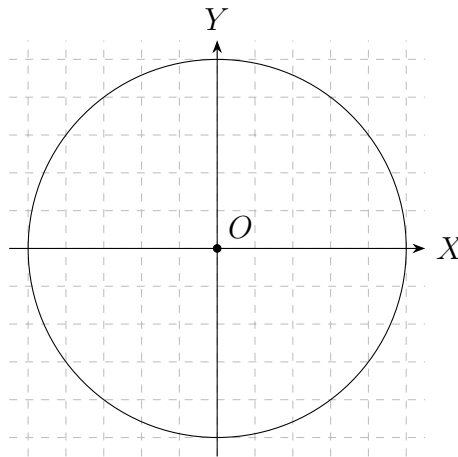
Resolução: O Conjunto $\mathcal{C}$ é uma circunferência tal que $O = (0, 0)$ é o nosso centro e 5 é o nosso raio, sabemos que $P \in \mathcal{C}$ implica que

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \iff x^2 + y^2 = 25.$$

Assim, o conjunto de pontos que desejamos encontrar é

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}.$$

Figura 3.12



Fonte: Autor

Exemplo 3.3.2. Qual o conjunto de pontos do plano que distam 3 unidades do ponto $(4, 5)$?

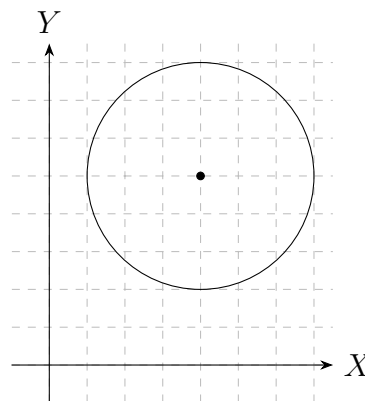
Resolução: Sendo $C = (4, 5)$ o centro e 3 o raio Circunferência $\mathcal{C}$, sabemos que $P \in \mathcal{C}$ implica que

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9.$$

Logo, o conjunto de pontos que desejamos encontrar é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9\}.$$

Figura 3.13

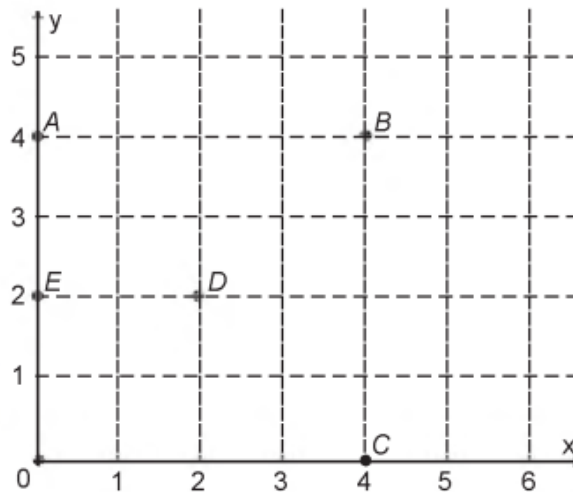


Fonte: Autor

Problema 3.3.1. (ENEM 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta

ou de uma Circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da Circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: $A(0 ; 4)$, $B(4 ; 4)$, $C(4 ; 0)$, $D(2 ; 2)$ e $E(0 ; 2)$.

Figura 3.14



Fonte: INEP

Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

- A) $x = 0$
- B) $y = 0$
- C) $x^2 + y^2 = 16$
- D) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
- E) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Resolução: Como o Lugar Geométrico descrito é uma reta ou uma Circunferência que passam pelos pontos A e pela Origem dos eixos cartesianos, analisemos cada caso separadamente:

- Caso o $\mathcal{L}$ seja uma reta, logo ela será a reta $r : x = 0$, tendo em vista que esta é a reta que contém os pontos A e O. Essa reta, segundo as regras do jogo, vale 2 pontos por atingir os pontos A e E.
- Caso o $\mathcal{L}$ seja uma Circunferência, como A e O, pertencem ao $\mathcal{L}$, logo o Centro C da Circunferência é um ponto equidistante a A e O e, portanto, pertence à mediatriz do segmento $\overline{AO}$.

Como $\overrightarrow{AO}$ é um vetor vertical, logo a mediatriz de $\overline{AO}$ é a reta horizontal que passa pelo ponto médio $M = (0, 2)$ que coincide com o ponto E. Tal reta tem equação

$r : y = 2$. Note que é impossível o ponto E pertencer à Circunferência, visto que ele é colinear a dois pontos que já pertencem à Circunferência.

Note que o ponto B é simétrico à Origem em relação ao ponto D , assim como o ponto C é simétrico ao ponto A em relação ao ponto D . Consequentemente, é possível que os pontos B e C façam parte da Circunferência, desde que o Centro seja o ponto D . Essa Circunferência seria dada pela equação:

$$\begin{aligned}(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 &= d^2(B, D) \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 2)^2 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8.\end{aligned}$$

Nesse caso, pelas regras do jogo, a equação vale 6 pontos, visto que passa pelos pontos A, B e C. É possível ainda que o ponto D pertença à Circunferência, desde que o centro seja no ponto E . Essa Circunferência seria dada pela equação:

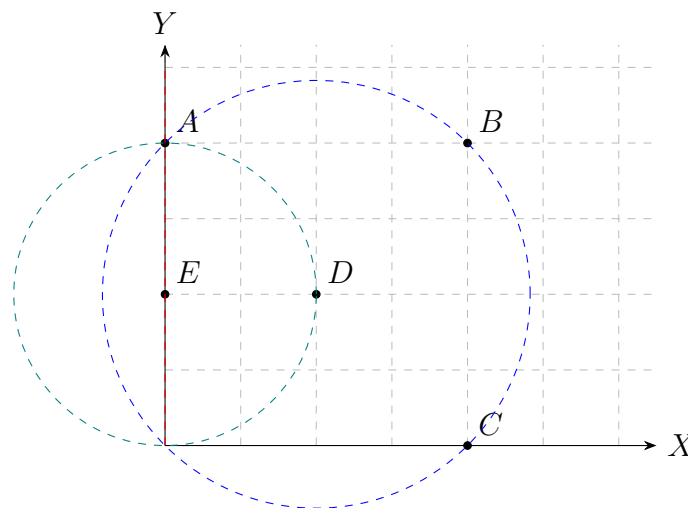
$$\begin{aligned}(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 &= d^2(D, E) \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \\ &\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4.\end{aligned}$$

No entanto, essa equação só valeria 4 pontos, visto que passa somente pelos pontos A e D.

Dessa forma, a equação que vale mais pontos é a representada pela circunferência

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

Figura 3.15



Fonte: Autor

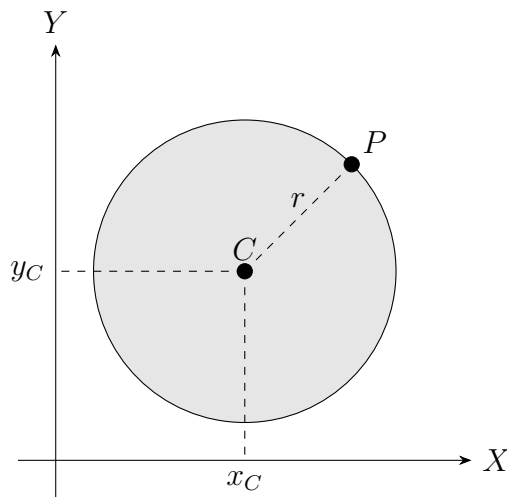
Gabarito: Letra E.

3.3.3 Círculo

Dado um ponto C e um número real positivo r , o **Círculo** (ou Disco) de Centro C e raio r é o Lugar Geométrico de Pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) \leq r.$$

Figura 3.16: Círculo



Fonte: Autor

Sendo $C = (x_C, y_C)$ e $P = (x, y)$, então

$$\begin{aligned} d(P, C) \leq r &\iff \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \leq r \\ &\iff (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \leq r^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, a inequação $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \leq r^2$ descreve algebricamente os pontos de um Círculo.

Completando Quadrados

É muito comum, em questões envolvendo as equações das Cônicas, que tais equações não se encontrem na sua forma mais reduzida. Nesse caso, é importante saber transformar essas equações nas suas versões reduzidas.

Por exemplo, é possível que a equação de uma Circunferência apareça da forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com $D, E, F \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, o primeiro passo que tomaremos será agrupar os termos com as mesmas

variáveis. Ou seja, transformaremos a equação no formato:

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0.$$

Em seguida, lembraremos que $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Se considerarmos $D = 2a$, para termos um quadrado perfeito, então basta adicionarmos $a^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$. Podemos fazer o mesmo com E . Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F. \end{aligned}$$

Na possibilidade em que $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} = 0$, teremos uma Circunferência Degenerada, ou seja, um ponto. Já na possibilidade em que $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} < 0$, teremos o Conjunto Vazio.

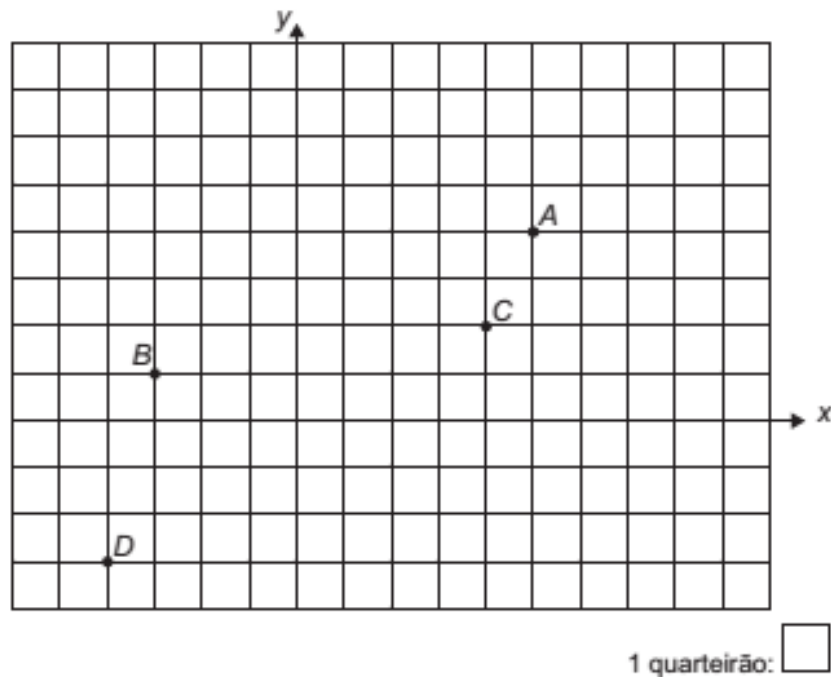
Dessa forma, se $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} > 0$, obtemos a equação de uma Circunferência na forma reduzida com centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$.

A análise completa da identificação das cônicas será feita no Capítulo 4, incluindo quando teremos os casos padrões e quando teremos os casos degenerados. Completar quadrados é um mecanismo útil para todas as cônicas e o utilizaremos em exercícios daqui em diante.

Problema 3.3.2. (ENEM 2015 PPL) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A , B , C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.

Figura 3.17



Fonte: INEP

Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

- A) A e C.
- B) B e C.
- C) B e D.
- D) A, B e C.
- E) B, C e D.

Resolução: Seja $\mathcal{L}$ o Lugar Geométrico descrito pela inequação

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0.$$

Podemos completar quadrados para obter:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 31 &\leq +1 + 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 36 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 6^2. \end{aligned}$$

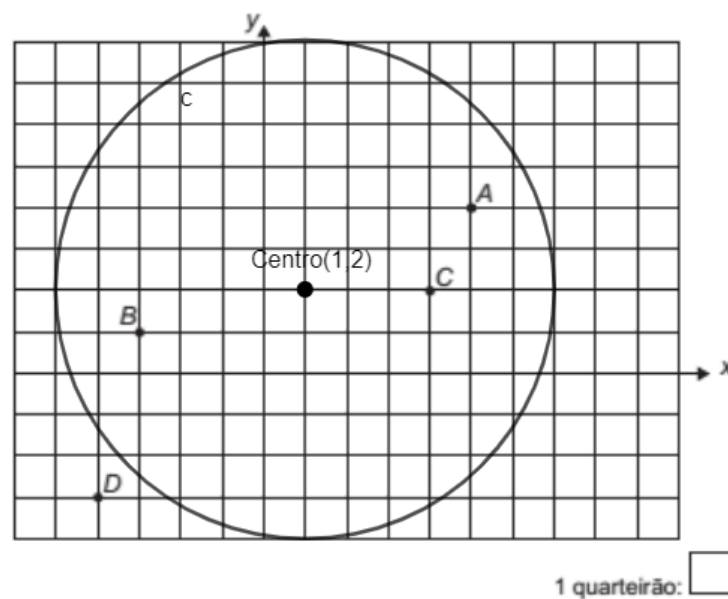
Desta forma, o Lugar Geométrico descrito por essa inequação é o Círculo de Centro no ponto $(1, 2)$ e raio 6.

Para saber se um ponto está nesse Círculo, basta substituir suas coordenadas na inequação e verificar se ela é verdadeira. Observando a figura, verificamos que os pontos dados são: $A = (5, 4)$, $B = (-3, 1)$, $C = (4, 2)$ e $D = (-4, -3)$. Testemos cada um dos pontos utilizando a inequação:

- $(5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \leq 36 \Rightarrow A \in \mathcal{L};$
- $(-3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \leq 36 \Rightarrow B \in \mathcal{L};$
- $(4 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 3^2 + 0^2 = 9 \leq 36 \Rightarrow C \in \mathcal{L};$
- $(-4 - 1)^2 + (-3 - 2)^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 50 > 36 \Rightarrow D \notin \mathcal{L}.$

Geometricamente, temos:

Figura 3.18



Fonte: Autor

Assim, os pontos A, B e C pertencem ao Lugar Geométrico, mas o ponto D não pertence.

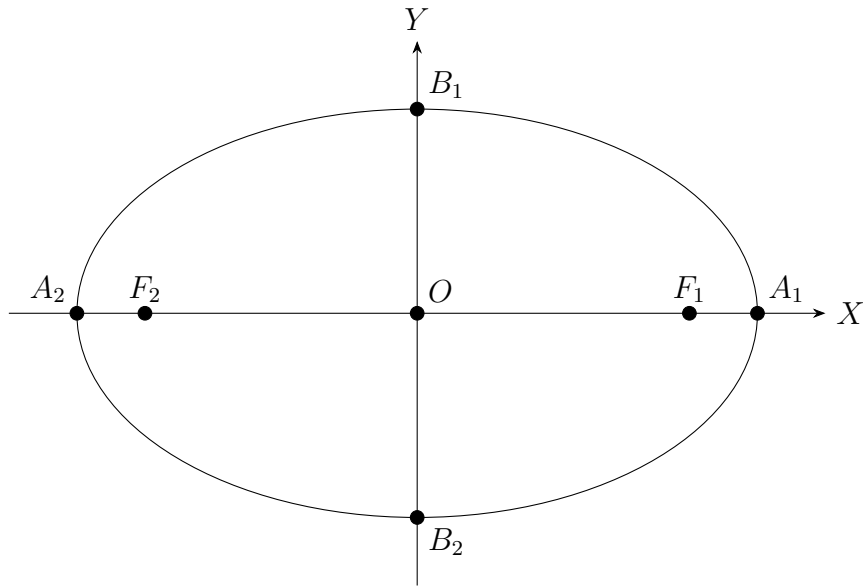
Gabarito: Letra D.

3.3.4 Elipse

Sejam pontos F_1 e F_2 pontos do plano, denominados *Focos*, e $a, c \in \mathbb{R}^+$, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$ e $a > c$. A **Elipse** $\mathcal{E}$ de Focos F_1 e F_2 é o Lugar Geométrico definido pelos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Figura 3.19: Elipse de Focos F_1 e F_2 e Centro na Origem.



Fonte: Autor

O eixo que passa pelos pontos F_1 e F_2 é denominado **Eixo Focal**, sendo a Elipse simétrica em relação a esse eixo. A interseção do Eixo Focal com a Elipse são os pontos A_1 e A_2 , denominados Vértices do Eixo Focal.

A mediatriz do segmento F_1F_2 é denominada **Eixo não Focal**, sendo a Elipse simétrica também em relação a esse eixo. A interseção do Eixo não Focal com a Elipse são os pontos B_1 e B_2 , denominados Vértices do Eixo não Focal.

O ponto de interseção entre o Eixo Focal e o Eixo não Focal é o Centro da Elipse. Tomamos o Sistema OXY com a Origem no Centro da Elipse e Eixos OX e OY coincidindo com o Eixo Focal e o Eixo não Focal, respectivamente. Esse Sistema de Eixos foi escolhido, pois com ele verificamos mais facilmente as coordenadas dos pontos da Elipse.

Coordenadas dos Focos e dos Vértices da Elipse com Centro na Origem

Pela definição da Elipse, $d(F_1, F_2) = 2c$. No entanto, como a Elipse é simétrica em relação ao Eixo não Focal, logo $d(F_1, O) = d(F_2, O)$. Visto que a Origem está entre os pontos F_1 e F_2 segue que $d(F_1, F_2) = d(F_2, O) + d(O, F_1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2c &= d(F_2, O) + d(O, F_1) \Rightarrow 2c = 2d(F_2, O) \\ &\Rightarrow c = d(F_2, O) = d(F_1, O). \end{aligned}$$

Concluimos que as coordenadas de F_1 e F_2 são, respectivamente $(c, 0)$ e $(-c, 0)$.

A partir desse resultado, podemos encontrar as coordenadas dos Vértices A_1 e A_2 . Sendo A_1 um ponto da Elipse, logo $d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2a$. Porém,

$$d(A_1, F_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2).$$

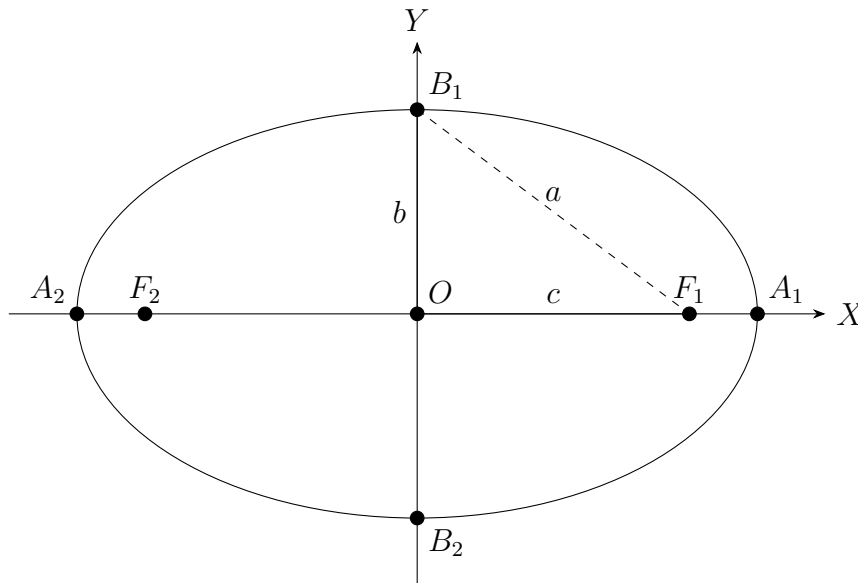
Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2a &\Rightarrow d(A_1, F_1) + d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) = 2a \\
 &\Rightarrow 2 \cdot d(A, F_1) + 2c = 2a \\
 &\Rightarrow 2 \cdot d(A, F_1) = 2a - 2c \\
 &\Rightarrow d(A, F_1) = a - c.
 \end{aligned}$$

Tendo em vista que $d(O, A_1) = d(O, F_1) + d(F_1, A_1)$, $d(O, F_1) = c$ e $d(F_1, A_1) = a - c$, concluímos que $d(O, A_1) = a$. De forma simétrica, encontramos que $d(O, A_2) = a$. Portanto, as coordenadas de A_1 e A_2 são, respectivamente $(a, 0)$ e $(-a, 0)$.

Como B_1 é um ponto da Elipse, logo $d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a$. No entanto, como a Elipse é simétrica em relação ao Eixo não Focal, logo $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = a$. Sendo b a ordenada do ponto B_1 , podemos formar um triângulo retângulo conforme a seguinte figura:

Figura 3.20



Fonte: Autor

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (3.6)$$

Consequentemente, as coordenadas do ponto B_1 são $(0, b) = (0, \sqrt{a^2 - c^2})$. Sendo B_2 o seu simétrico em relação ao Eixo Focal, logo as coordenadas de B_2 são $(0, -b) = (0, -\sqrt{a^2 - c^2})$.

Definição 3.3.1. A *Excentricidade da Elipse* é a razão

$$e = \frac{c}{a}. \quad (3.7)$$

Equação da Elipse de Centro em $(0, 0)$ e Eixo Focal em OX

Sendo $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, pela definição de Elipse de Centro $(0, 0)$ temos que:

$$P = (x, y) \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Pela definição da distância entre pontos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\ \iff & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \iff & \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ \iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Subtraindo x^2 , c^2 e y^2 em ambos os termos:

$$\begin{aligned} -2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + 2cx \\ \iff 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ \iff a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} &= a^2 + cx. \end{aligned}$$

Elevando ambos os termos ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ \iff a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ \iff a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ \iff a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$, logo

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os termos por a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.10)$$

Que é a **Equação da Elipse** com Centro $(0, 0)$ e Eixo Focal em OX .

A rigor, para verificar que os passos (3.8) e (3.9) podem ser realizados na ordem inversa, precisamos mostrar que se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então

$$a^2 + cx \geq 0 \quad \text{e} \quad 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0.$$

De fato, sendo $0 \leq c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos que

1. Provemos que $a^2 + cx \geq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies x^2 \leq a^2 \\ &\implies |x| \leq a \\ &\implies -a \leq x \leq a \\ &\implies -ca \leq cx \leq ca \\ &\implies a^2 - ca \leq a^2 + cx \leq a^2 + ca \\ &\implies 0 \leq a \cdot (a - c) \leq a^2 + cx \leq a^2 + ca. \end{aligned}$$

Concluimos que $a^2 + cx \geq 0$.

2. Provemos que $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0$.

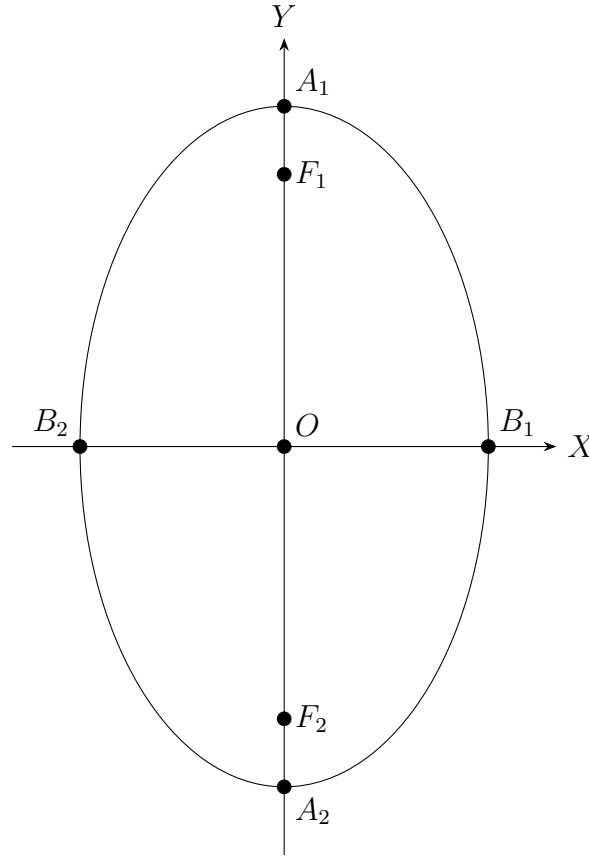
$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\iff y^2 \leq b^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 \leq (x-c)^2 + b^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 \leq x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 \leq x^2 - 2cx + a^2. \end{aligned}$$

Pelo item anterior, sabemos que $x^2 < a^2$ e $-cx \leq ca < a^2$, portanto

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 \leq x^2 - 2cx + a^2 &\iff (x-c)^2 + y^2 \leq a^2 + 2a^2 + a^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 \leq 4a^2 \\ &\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a \\ &\iff 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Equação da Elipse de Centro em $(0,0)$ e Eixo Focal em OY

Figura 3.21: Elipse de Centro em $(0,0)$ e Eixo Focal em OY



Fonte: Autor

Sendo $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, pela definição de Elipse de Centro $(0,0)$ temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Pela definição da distância entre pontos:

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a.$$

Perceba que esse resultado é similar ao encontrado no caso anterior, em que o Eixo Focal coincidia com o eixo OX , trocando somente a variável x pela variável y . Ao realizar um processo de dedução similar ao feito no caso anterior, chegaremos a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (3.11)$$

Que é a **Equação da Elipse** de Centro $(0,0)$ e Eixo Focal em OY .

Problema 3.3.3. (EFFOM 2024) Considere a equação abaixo:

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Podemos afirmar que essa equação expressa o Lugar Geométrico de uma

- (A) Elipse, com focos em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
- (B) Hipérbole, com vértices em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
- (C) Elipse, com focos em $(0, -3)$ e $(0, 3)$.
- (D) Hipérbole, com vértices em $(0, -3)$ e $(0, 3)$.
- (E) Circunferência de raio 1.

Resolução: Pela equação 3.11 podemos ver que o Lugar Geométrico é uma Elipse cujo Eixo Focal está no eixo OY . Por conseguinte seus focos serão da forma $(0, c)$ e $(0, -c)$.

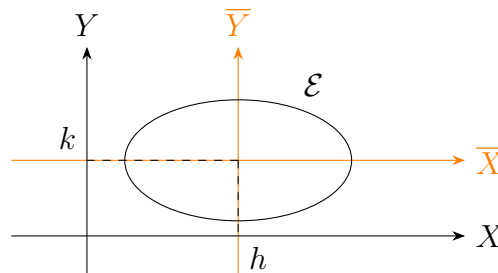
Pela equação 3.5 sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$. Como $b^2 = 27$ e $a^2 = 36$, logo $c^2 = 9$ e, portanto, $c = 3$. Sendo o Centro o ponto $(0, 0)$, logo os Focos da Elipse são os Pontos $(0, -3)$ e $(0, 3)$.

Gabarito: Letra C.

Equação da Elipse de Centro (h, k)

Seja $\mathcal{E}$ uma Elipse de Centro no ponto (h, k) e Eixo Focal paralelo a OX .

Figura 3.22: Elipse de Centro em (h, k) e Eixo Focal paralelo a OX



Fonte: Autor

Podemos transladar os eixos ordenados para o ponto (h, k) . Dessa forma,

$$\mathcal{E} : \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

No entanto, por (2.12) sabemos que $\bar{x} = x - h$ e $\bar{y} = y - k$. Consequentemente

$$\mathcal{E} : \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

é a Equação da Elipse de Centro (h, k) e Eixo Focal paralelo a OX .

De forma análoga

$$\mathcal{E} : \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

é a Equação da Elipse de Centro (h, k) e Eixo Focal paralelo a OY .

Problema 3.3.4. (*EsFCEx 2021*) A equação $16x^2 + 25y^2 + 96x - 200y = 1056$ representa uma Elipse cujo eixo menor tem extremidades nos pontos de coordenadas

(A) $(3, -4)$ e $(3, 12)$.

(B) $(-3, 4)$ e $(-3, 12)$.

(C) $(-3, -4)$ e $(-3, 12)$.

(D) $(3, 4)$ e $(3, 12)$.

(E) $(-3, -12)$ e $(-3, 4)$.

Resolução: Começamos reorganizando a equação e, em seguida, completando os quadrados:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 96x + 25y^2 - 200y &= 1056 \\ \Rightarrow 16x^2 + 96x + 144 + 25y^2 - 200y + 400 &= 1056 + 144 + 400 \\ \Rightarrow (4x + 12)^2 + (5y - 20)^2 &= 1600. \end{aligned}$$

Retirando dos quadrados os fatores comuns, obtemos:

$$4^2(x + 3)^2 + 5^2(y - 4)^2 = 1600 \Rightarrow 16(x + 3)^2 + 25(y - 4)^2 = 1600.$$

Dividindo ambas as parcelas por 1600 temos

$$\frac{(x + 3)^2}{100} + \frac{(y - 4)^2}{64} = 1.$$

Neste caso, $a = 10$ e $b = 8$. Portanto, o seu eixo menor é o eixo vertical e a distância dos vértices ao centro é igual a 8 unidades.

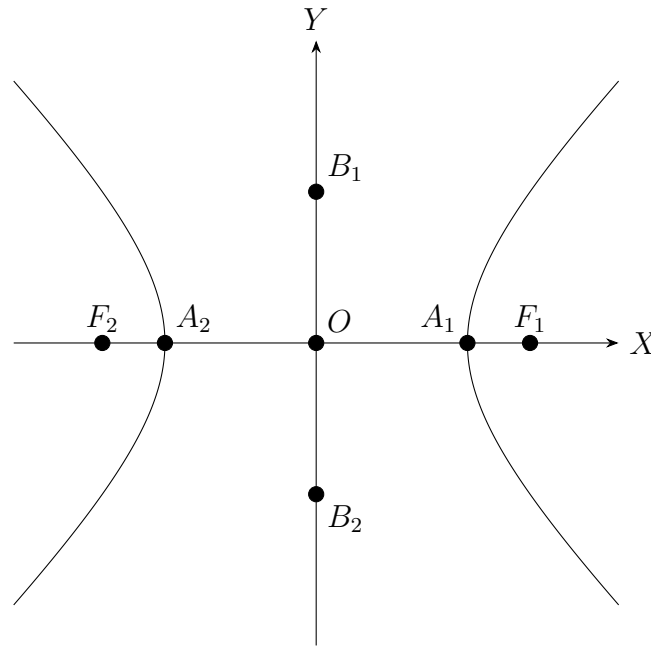
Como a Elipse está centrada no ponto $(-3, 4)$, logo os vértices do seu eixo menor são os pontos $(-3, -4)$ e $(-3, 12)$.

Gabarito: Letra C.

3.3.5 Hipérbole

Dados dois pontos F_1 e F_2 , denominados *Focos*, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a < c$, a **Hipérbole** $\mathcal{H}$ de Focos F_1 e F_2 é o Lugar Geométrico definido pelos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Figura 3.23: Hipérbole de Centro na Origem e Eixo Focal em OX 

Fonte: Autor

O eixo que passa pelos pontos F_1 e F_2 é denominado **Eixo Focal**, sendo a Hipérbole simétrica em relação a esse eixo. A interseção do Eixo Focal com a Hipérbole são os pontos A_1 e A_2 , denominados Vértices da Hipérbole.

A mediatriz do segmento F_1F_2 é denominada **Eixo não Focal**² da Hipérbole, sendo a Hipérbole simétrica também em relação a esse eixo. Os pontos B_1 e B_2 do Eixo não Focal são os Vértices Imaginários da Hipérbole e tem coordenadas $(0, b)$ e $(0, -b)$, respectivamente, em que $b^2 = c^2 - a^2$.

O ponto de interseção entre o Eixo Focal e o Eixo não Focal é o Centro da Hipérbole. Tomamos o Sistema OXY com a Origem no Centro da Hipérbole e Eixos OX e OY coincidindo com o Eixo Focal e o Eixo não Focal, respectivamente.

Coordenadas dos Focos e dos Vértices da Hipérbole de Centro na Origem

Pela definição de Hipérbole, temos que

$$P \in \mathcal{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Se $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, temos um **ramo da Hipérbole** e se $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$, temos o outro ramo da Hipérbole.

Dado que $d(F_1, F_2) = 2c$ e que esses pontos são simétricos em relação ao Eixo não Focal, logo $d(F_1, O) = d(F_2, O) = c$. Concluimos que as coordenadas dos Focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $(c, 0)$ e $(-c, 0)$.

²Também conhecido como Eixo Conjugado.

Sabendo que $A_1 \in \mathcal{H}$, logo

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a &\Rightarrow d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = 2a \\ &\Rightarrow d(A_1, A_2) + d(A_2, F_2) - d(A_1, F_1) = 2a. \end{aligned}$$

Tendo em vista que A_2 e F_2 são simétricos a A_1 e F_1 , respectivamente, em relação do Eixo não Focal, logo $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$. Segue que

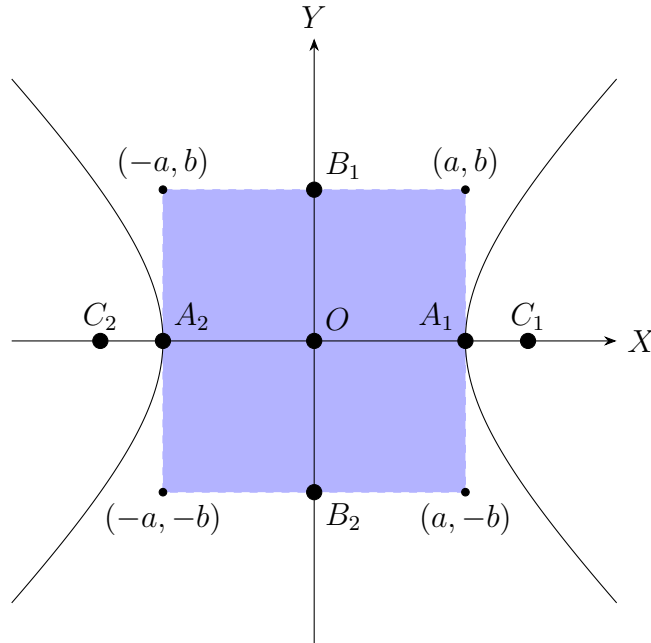
$$\begin{aligned} d(A_1, A_2) + d(A_2, F_2) - d(A_1, F_1) &= 2a \\ \Rightarrow d(A_1, A_2) + d(A_1, F_1) - d(A_1, F_1) &= 2a \\ \Rightarrow d(A_1, A_2) &= 2a \\ \Rightarrow d(A_2, O) + d(O, A_1) &= 2a. \end{aligned}$$

Sendo $d(A_2, O) = d(O, A_1)$, pois A_1 e A_2 são simétricos, logo as coordenadas dos Vértices A_1 e A_2 são, respectivamente, $(a, 0)$ e $(-a, 0)$.

Assíntotas da Hipérbole

Definição 3.3.2. *O retângulo de base da Hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo cujos lados têm A_1 , A_2 , B_1 e B_2 como pontos médios.*

Figura 3.24: Retângulo de Base

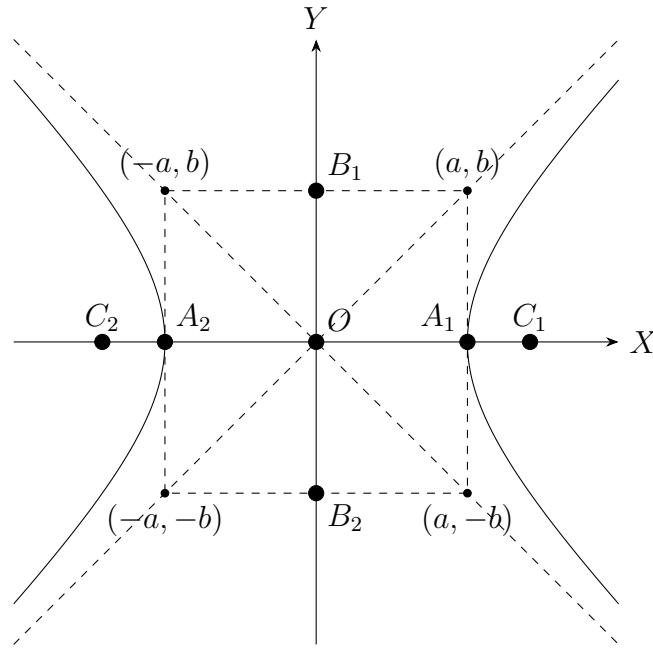


Fonte: Autor

Seja r a reta que passa pelos pontos (a, b) e $(-a, -b)$ e s a reta que passa pelos pontos $(-a, b)$ e $(a, -b)$, denominadas **assíntotas** da Hipérbole. Os ramos da Hipérbole

$\mathcal{H}$ são tangentes ao retângulo base e se aproximam indefinidamente das assíntotas.

Figura 3.25: Assíntotas da Hipérbole de Centro na Origem



Fonte: Autor

Encontraremos agora as equações de cada uma das assíntotas. Sabendo que (a, b) e $(-a, -b)$ pertencem a r , logo o vetor $(a - (-a), b - (-b)) = (2a, 2b)$ é paralelo ou colinear a r . Como $O = (0, 0)$ pertence à reta, pelas equações paramétricas da reta temos:

$$\begin{cases} x = 2at + 0 \\ y = 2bt + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2at \\ y = 2bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2a} \\ t = \frac{y}{2b} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2a} = \frac{y}{2b} \Rightarrow 2bx = 2ay$$

o que implica

$$bx - ay = 0.$$

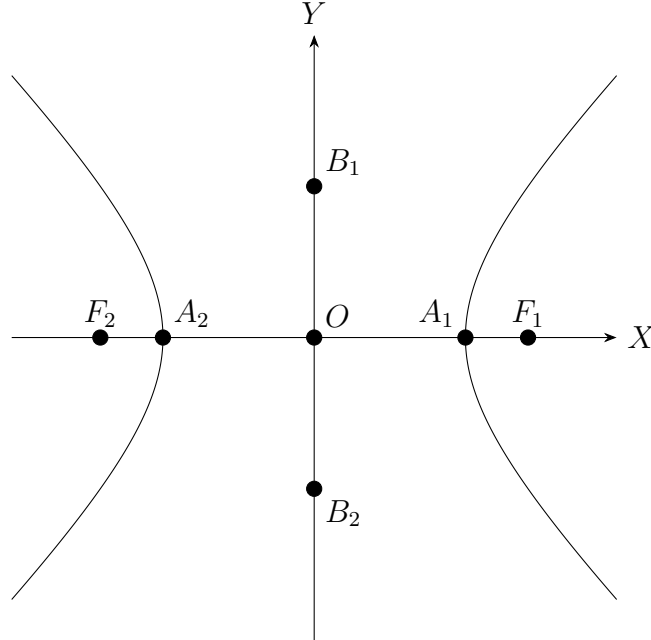
Consequentemente, a assíntota r é descrita pela equação $bx - ay = 0$. Analogamente, a assíntota s é descrita pela equação $bx + ay = 0$.

Definição 3.3.3. A **Excentricidade** da Hipérbole pela razão:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (3.12)$$

Equação da Hipérbole de Centro $(0,0)$ e Eixo Focal em OX

Figura 3.26: Hipérbole de Centro na Origem e Eixo Focal em OX



Fonte: Autor

Considere dois focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, localizados sobre o eixo OX . Pela definição de Hipérbole, temos

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Observe que $d(P, F_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ e $d(P, F_2) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Consideremos, inicialmente, o caso em que trabalhamos somente com um dos ramos da Hipérbole, a saber

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \iff \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Simplifiquemos subtraindo y^2 em ambos os termos:

$$\begin{aligned} (x - c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 \\ \iff x^2 - 2cx + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2. \end{aligned}$$

Simplifiquemos subtraindo x^2 e c^2 dos dois membros:

$$\begin{aligned} -2cx &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \\ \iff -4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \iff -cx - a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevemos ambos os termos ao quadrado novamente:

$$\begin{aligned} c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2((x+c)^2 + y^2) \\ \iff c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\ \iff c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Subtraindo $2a^2cx$ de ambos os termos:

$$\begin{aligned} c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\ \iff a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\ \iff a^2(a^2 - c^2) &= x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2. \end{aligned}$$

Como $a^2 + b^2 = c^2$, logo $a^2 - c^2 = -b^2$, portanto,

$$-a^2b^2 = -x^2b^2 + a^2y^2.$$

Dividindo ambas as parcelas por $-a^2b^2$ e trocando os termos, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.14}$$

Que é a **Equação da Hipérbole** de Centro $(0, 0)$ e Eixo Focal em OX .

A rigor, para mostrar que o passo 3.13 pode ser invertido, é necessário provar que, dado $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, é verdade que:

$$-cx - a^2 \geq 0.$$

De fato, como $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, logo $x \leq -a \Leftrightarrow -x \geq a$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies x^2 \geq a^2 \\ &\implies -a^2 \geq -x^2 \\ &\implies -cx - a^2 \geq -cx - x^2 \\ &\implies -cx - a^2 \geq (-x) \cdot (c + x^2) \\ &\implies -cx - a^2 \geq a \cdot (c + x^2) \geq 0. \end{aligned}$$

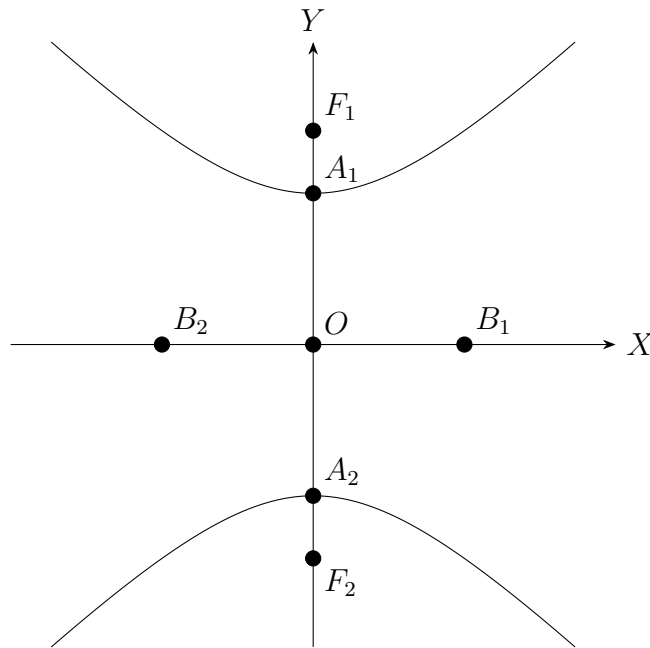
Recorde que consideramos somente um dos ramos da Hipérbole. É necessário ainda considerar o caso em que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

No entanto, se seguirmos o passo a passo que realizamos para o primeiro ramo chegaremos à mesma equação.

Equação da Hipérbole de Centro $(0, 0)$ e Eixo Focal em OY

Figura 3.27: Hipérbole de Centro na Origem e Eixo Focal em OY



Fonte: Autor

Considere dois focos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, localizados sobre o eixo OY . Pela definição de Hipérbole, temos

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Observe que $d(P, F_1) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$ e $d(P, F_2) = \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff \left| \sqrt{x^2 + (y - c)^2} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} \right| = 2a.$$

Procedendo como no caso em que o Eixo Focal coincidia com o Eixo OX , obtemos

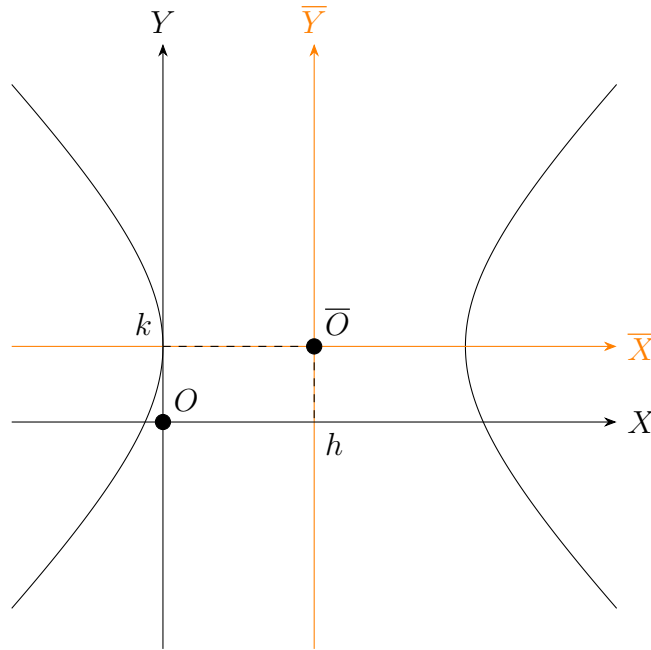
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (3.15)$$

Que é a **Equação da Hipérbole** de Origem em $(0, 0)$ e Eixo Focal em OY .

Equação da Hipérbole de Centro (h, k)

Seja $\mathcal{H}$ uma Hipérbole de Centro (h, k) e Eixo Focal paralelo ao eixo OX . Da mesma forma que na Elipse, podemos realizar uma translação dos eixos ordenados para o ponto (h, k) . Assim, a equação no sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$ será $\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$.

Figura 3.28: Hipérbole de Centro na Origem e Eixo Focal em OX



Fonte: Autor

Agora, por (2.12) sabemos que $\overline{x} = x - h$ e $\overline{y} = y - k$. Consequentemente

$$\mathcal{H} : \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

é a Equação da Hipérbole de Centro (h, k) e Eixo Focal paralelo a OX .

De forma análoga

$$\mathcal{H} : \frac{(x - h)^2}{b^2} - \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

é a Equação da Hipérbole de Centro (h, k) e Eixo Focal paralelo a OY .

Problema 3.3.5. (*EsFCEEx 2023*) Uma Hipérbole é dada pela equação: $-9x^2 + 4y^2 + 72x + 8y - 284 = 0$. A excentricidade desta Hipérbole é igual a

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- (C) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

$$(D) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(E) \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Resolução: Começemos reorganizando a equação e completando os quadrados:

$$\begin{aligned} -9x^2 + 72x + 4y^2 + 8y &= 284 \\ \Rightarrow -9x^2 + 72x - 144 + 4y^2 + 8y + 4 &= 284 - 144 + 4 \\ \Rightarrow -(3x - 12)^2 + (2y + 2)^2 &= 144. \end{aligned}$$

Retirando dos quadrados os fatores comuns, obtemos:

$$-3^2(x - 4)^2 + 2^2(y + 1)^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad -9(x - 4)^2 + 4(y + 1)^2 = 144.$$

Dividindo ambos os termos por 144, temos:

$$-\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{36} = 1.$$

Sendo assim, essa é uma Hipérbole cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OY e tem coeficientes $a = 6$ e $b = 4$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, logo

$$4^2 = c^2 - 6^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16 + 36 = 52 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Pela equação 3.12 sabemos que a excentricidade da Hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{13}}{6} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

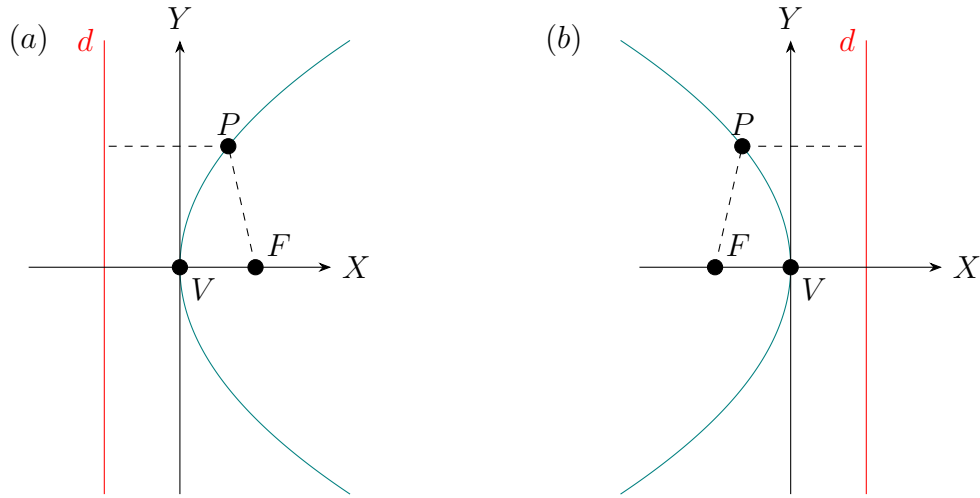
Gabarito: Letra C.

3.3.6 Parábola

Dados uma reta d , denominada *diretriz*, e um ponto $F \notin d$, denominado *Foco*, a Parábola $\mathcal{P}$ é o Lugar Geométrico definido pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F) = d(P, d).$$

Figura 3.29: Parábola de Vértice em $(0,0)$ e reta focal em OX com a concavidade para a: (a) direita; (b) esquerda.



Fonte: Autor

A **reta focal** é a perpendicular a d que passa por F . O ponto de interseção da Parábola com a reta focal é denominado **Vértice** da Parábola. O número $2p = d(F, d)$ é o **parâmetro** da parábola $\mathcal{P}$. Note que $d(V, F) = d(V, d) = p$.

Equação da Parábola de Vértice em $(0,0)$ e reta focal em OX

Vejam, inicialmente, o caso em que a reta diretriz está à esquerda do Foco. Dizemos, nesse caso, que a **Concavidade** da Parábola está para a direita.

Sejam $V = (0,0)$, d é a reta vertical $d : x = -p$ e F é o ponto $(p,0)$. Pela definição de Parábola, temos que

$$P \in \mathcal{P} \iff d(P, F) = d(P, d).$$

No entanto, como a diretriz é uma reta vertical, $d(P, d) = |x + p|$. Portanto

$$P \in \mathcal{P} \iff \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = |x + p|.$$

Elevando ambos os termos ao quadrado obtemos

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2 \iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Simplificando, obtemos

$$y^2 = 4px. \quad (3.16)$$

Que é a **Equação da Parábola** de Vértice $(0,0)$, reta focal em OX e concavidade para a direita.

Vejam agora a possibilidade da reta diretriz estar à direita do Foco, ou seja, o caso em que a **Concavidade** da Parábola está para a esquerda. Sejam $V = (0,0)$, d a

reta diretriz $d : x = p$ e F o Foco $(-p, 0)$. Pela definição de Parábola, temos que

$$P \in \mathcal{P} \iff d(P, F) = d(P, d).$$

No entanto, como a diretriz é uma reta vertical, $d(P, d) = |x - p|$. Portanto,

$$P \in \mathcal{P} \iff \sqrt{(x + p)^2 + (y - 0)^2} = |x - p|.$$

Elevando ambos os termos ao quadrado obtemos

$$(x + p)^2 + y^2 = (x - p)^2 \iff x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2.$$

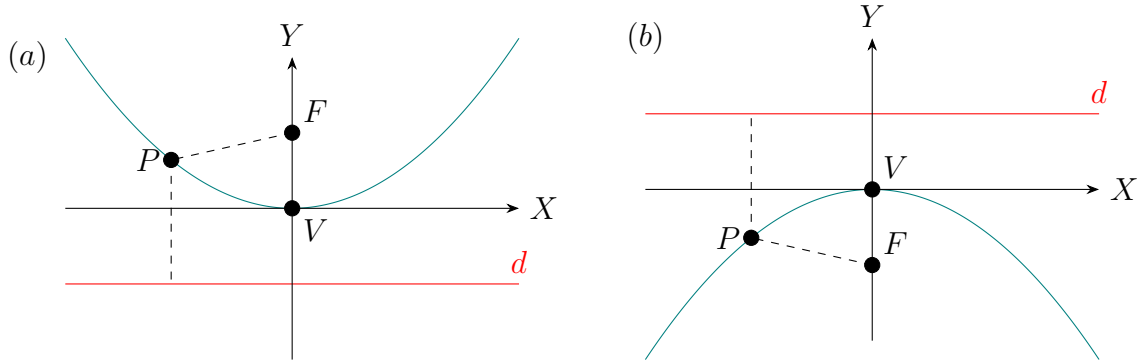
Simplificando, obtemos

$$y^2 = -4px. \quad (3.17)$$

Que é a **Equação da Parábola** de Vértice $(0, 0)$, reta focal em OX e concavidade para a esquerda.

Equação da Parábola de Vértice em $(0, 0)$ e reta focal em OY

Figura 3.30: Parábola de Vértice em $(0, 0)$ e reta focal em OY



Fonte: Autor

Novamente, é possível verificar dois casos:

- O foco F está **acima** da diretriz d e, portanto, a **Concavidade** da Parábola está para cima. Nesse caso, $F = (0, -p)$ e $d : y = p$. Segue que

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff \sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \\ &\iff x^2 = 4py. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Que é a **Equação da Parábola** de Vértice $(0, 0)$, reta focal em OY e concavidade para a cima.

- O foco F está **abaixo** da diretriz d e, portanto, a **Concavidade** da Parábola está para baixo. Nesse caso, $F = (0, p)$ e $d : y = -p$. Segue que

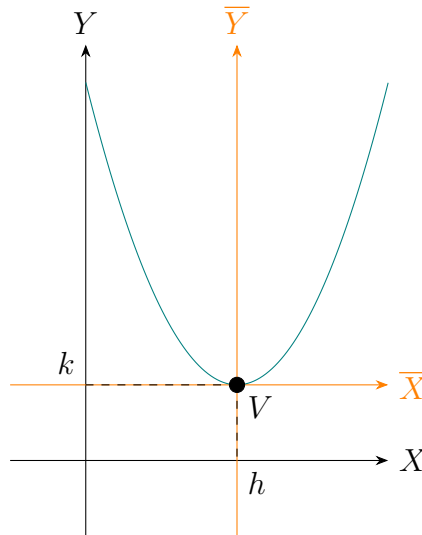
$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \\ &\iff x^2 = -4py. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Que é a **Equação da Parábola** de Vértice $(0, 0)$, reta focal em OY e concavidade para a baixo.

Equação de Parábola de Vértice em (h, k)

Seja $\mathcal{P}$ uma Parábola de Vértice em (h, k) , reta focal paralela ao eixo OY e diretriz abaixo do Vértice. Podemos realizar uma translação dos eixos ordenados para o ponto (h, k) . Assim, a equação no sistema $\overline{O} \overline{X} \overline{Y}$ será $x^2 = 4py$.

Figura 3.31: Parábola de Centro (h, k) e reta focal paralela a OX



Fonte: Autor

Por outro lado, por (2.12) sabemos que $\overline{x} = x - h$ e $\overline{y} = y - k$. Consequentemente

$$(x - x_V)^2 = 4p(y - y_V) \quad (3.20)$$

é a Equação da Parábola de Vértice (h, k) , reta focal paralela a OX e diretriz à esquerda do Vértice. As demais equações podem ser obtidas de forma similar.

4 Cônicas Rotacionadas

4.1 Equação Geral do Segundo Grau

No capítulo anterior foi possível verificar que as Cônicas possuem o formato de uma equação do segundo grau, seja na variável x , seja na variável y ou ainda nas duas variáveis. É razoável que estudemos os Lugares Geométricos que obedecem equações dessa forma.

Definição 4.1.1. *A equação geral do segundo grau nas variáveis x e y é a equação de coeficientes reais no formato*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Adiantamos que todas as curvas que obedecem a essa equação serão Elipses, Hipérboles, Parábolas, algum dos seus casos degenerados ou o Conjunto Vazio. Para definir qual caso estaremos estudando, é necessário introduzir um número especial: o discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$.

4.1.1 O Discriminante e sua relação com as Cônicas

- Sendo $\mathcal{E}$ uma Elipse de Centro $C = (x_C, y_C)$ cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OX , sabemos que sua equação é da forma

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} b^2(x - x_C)^2 + a^2(y - y_C)^2 - a^2b^2 &= 0 \\ \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_Cx - 2a^2y_Cy + b^2x_C^2 + a^2y_C^2 - a^2b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Perceba, nesse caso, que $A = b^2$, $B = 0$ e $C = a^2$. Segue que o discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4b^2a^2 = -4a^2b^2 < 0.$$

Para o caso em que temos uma Elipse de Centro $C = (x_C, y_C)$ e cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OY só trocamos a^2 por b^2 , logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma Elipse, no formato em que estudamos, o discriminante Δ é negativo.

- Sendo $\mathcal{H}$ uma Hipérbole de Centro $C = (x_C, y_C)$ cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OX , sabemos que sua equação é da forma

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1.$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} b^2(x - x_C)^2 - a^2(y - y_C)^2 - a^2b^2 &= 0 \\ \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_Cx + 2a^2y_Cy + b^2x_C^2 - a^2y_C^2 - a^2b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Perceba, nesse caso, que $A = b^2$, $B = 0$ e $C = -a^2$. Assim, o discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4b^2(-a^2) = 4a^2b^2 > 0.$$

Para o caso em que temos uma Hipérbole de Centro $C = (x_C, y_C)$ cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OY só trocamos a^2 por $-b^2$ e vice-versa, logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma Hipérbole, no formato em que estudamos, o discriminante Δ é positivo.

- Sendo $\mathcal{P}$ uma Parábola de Vértice $V = (x_V, y_V)$ cuja Reta Focal é paralela ao eixo OX e com concavidade para a direita, sabemos que sua equação é da forma

$$(y - y_V)^2 = 4p(x - x_V).$$

que pode ser reescrita como

$$(y - y_C)^2 - 4p(x - x_C) = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4px - 2y_Cy + y_C^2 + 4px_C = 0.$$

Perceba, nesse caso, que $A = 1$, $B = 0$ e $C = 0$. Logo, o discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Para o caso em que a concavidade está para a esquerda trocaremos o sinal dos coeficientes, não alterando o valor de Δ . Já para o caso em que temos uma Parábola de Vértice $V = (x_V, y_V)$ cuja reta focal seja paralela ao eixo OY trocaremos somente as variáveis x e y entre si na equação base, logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma Parábola, no formato em que estudamos, o discriminante

Δ é nulo.

Teorema 4.1.1. *Ao transladar os eixos coordenados, o valor de Δ não é alterado.*

Demonstração: Seja $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma equação geral do segundo grau nas variáveis x e y no sistema de coordenadas OXY . Recorde que $\Delta = B^2 - 4AC$.

Queremos realizar uma translação da Origem para o ponto (h, k) . Portanto, pela relação (2.12) $x = \bar{x} + h$ e $y = \bar{y} + k$. Substituindo x e y na equação geral, temos

$$A(\bar{x} + h)^2 + B(\bar{x} + h)(\bar{y} + k) + C(\bar{y} + k)^2 + D(\bar{x} + h) + E(\bar{y} + k) + F = 0$$

o que implica em

$$\begin{aligned} A\bar{x}^2 + 2Ah\bar{x} + Ah^2 + B\bar{x}\bar{y} + Bk\bar{x} + Bh\bar{y} + Bhk + C\bar{y}^2 + 2Ck\bar{y} + Ck^2 + D\bar{x} \\ + Dh + E\bar{y} + Ek + F = 0. \end{aligned}$$

Sendo $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$ a equação geral do segundo grau no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é verdade que

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A; \\ \bar{B} &= B; \\ \bar{C} &= C; \\ \bar{D} &= 2Ah + Bk + D; \\ \bar{E} &= 2Ck + Bh + E; \\ \bar{F} &= Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F. \end{aligned}$$

Portanto, nesse sistema de coordenadas, o valor de Δ permanecerá igual a $B^2 - 4AC$. $\square$

Teorema 4.1.2. *Ao rotacionar os eixos coordenados, o valor de Δ não é alterado.*

Demonstração: Seja $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma equação geral do segundo grau nas variáveis x e y no sistema de coordenadas OXY . Recorde que $\Delta = B^2 - 4AC$.

Queremos realizar uma rotação no sentido anti-horário dos Eixos ao redor da Origem em um ângulo

$$0 < \theta < \pi.$$

Sendo assim

$$x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \quad \text{e} \quad y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta.$$

Substituindo x e y na equação geral, temos

$$\begin{aligned} A(\bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta))^2 + B(\bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta))(\bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta)) + \\ C(\bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta))^2 + D(\bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta)) + E(\bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta)) + F = 0 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
& A(\bar{x}^2 \cos^2(\theta) - 2\bar{x}\bar{y}\sin(\theta) \cos(\theta) + \bar{y}^2 \sin^2(\theta)) \\
& + B(\bar{x}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \bar{x}\bar{y} \cos^2(\theta) - \bar{x}\bar{y} \sin^2(\theta) - \bar{y}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \\
& + C(\bar{x}^2 \sin^2(\theta) + 2\bar{x}\bar{y}\sin(\theta) \cos(\theta) + \bar{y}^2 \cos^2(\theta)) \\
& + D(\bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta)) + E(\bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta)) + F = 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$ é a equação geral do segundo grau no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é verdade que

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= A \cos^2(\theta) + \frac{B}{2} \sin(2\theta) + C \sin^2(\theta); \\
\bar{B} &= (C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta); \\
\bar{C} &= A \sin^2(\theta) - \frac{B}{2} \sin(2\theta) + C \cos^2(\theta); \\
\bar{D} &= D \cos(\theta) + E \sin(\theta); \\
\bar{E} &= E \cos(\theta) - D \sin(\theta); \\
\bar{F} &= F.
\end{aligned}$$

Sendo $\bar{\Delta} = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} &= ((C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta))^2 \\
&- 4 \cdot \left(A \cos^2(\theta) + \frac{B}{2} \sin(2\theta) + C \sin^2(\theta) \right) \cdot \left(A \sin^2(\theta) - \frac{B}{2} \sin(2\theta) + C \cos^2(\theta) \right).
\end{aligned}$$

Façamos, agora, as devidas multiplicações:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} &= ((C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta))^2 \\
&- 4 \cdot (A^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - \frac{AB \sin(2\theta) \cos^2(\theta)}{2} + AC \cos^4(\theta) + \\
&\frac{AB \sin(2\theta) \sin^2(\theta)}{2} - \frac{B^2 \sin^2(2\theta)}{4} + \frac{BC \sin(2\theta) \cos^2(\theta)}{2} + \\
&AC \sin^4(\theta) - \frac{BC \sin^2(\theta) \sin(2\theta)}{2} + C^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} &= ((C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta))^2 \\
&- 4 \cdot \left(\frac{A^2 \sin^2(2\theta)}{4} + \frac{AB \sin(2\theta) (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))}{2} + AC (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + \right. \\
&\left. - \frac{B^2 \sin^2(2\theta)}{4} + \frac{BC \sin(2\theta) (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{2} + \frac{C^2 \sin^2(2\theta)}{4} \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} &= A^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + B^2 \cos^2(2\theta) + C^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) \\ &\quad - 2AB \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) - 2AC \operatorname{sen}^2(2\theta) + 2BC \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) \\ &\quad - 4 \cdot \left(\frac{(A^2 - B^2 + C^2) \operatorname{sen}^2(2\theta)}{4} - \frac{AB \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta)}{2} + \right. \\ &\quad \left. AC(\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)) + \frac{BC \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta)}{2} \right).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} &= A^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + B^2 \cos^2(2\theta) + C^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) \\ &\quad - 2AB \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) - 2AC \operatorname{sen}^2(2\theta) + 2BC \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) \\ &\quad - (A^2 - B^2 + C^2) \operatorname{sen}^2(2\theta) + 2AB \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) \\ &\quad - 4AC(\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)) - 2BC \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta).\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} &= B^2 \cos^2(2\theta) - 2AC \operatorname{sen}^2(2\theta) + B^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) - 4AC(\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)) \\ &= B^2(\cos^2(2\theta) + \operatorname{sen}^2(2\theta)) - 4AC(\cos^4(\theta) + \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{2} + \operatorname{sen}^4(\theta)) \\ &= B^2 \cdot 1 - 4AC(\cos^4(\theta) + 2\operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)) \\ &= B^2 - 4AC(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))^2 \\ &= B^2 - 4AC \cdot 1^2 \\ &= B^2 - 4AC.\end{aligned}$$

Concluimos que o valor do discriminante Δ não foi alterado ao realizarmos a rotação dos eixos cartesianos. $\square$

4.1.2 Reconhecendo as Cônicas

Pelos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, sabemos que o valor de Δ é invariante com relação a Translações e Rotações. Consequentemente, de acordo com o sinal de Δ a equação geral do segundo grau nas variáveis x e y na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é dividida em três categorias, quais sejam:

- Se $\Delta < 0$, então a equação representa uma Elipse ou suas formas degeneradas (Conjunto Vazio ou um Ponto).
- Se $\Delta = 0$, então a equação representa uma Parábola ou suas formas degeneradas (Conjunto Vazio, Uma reta ou a união de duas retas paralelas).

- Se $\Delta > 0$, então a equação representa uma Hipérbole ou a sua forma degenerada (Duas retas concorrentes).

Exemplo 4.1.1. Dada a equação $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$, encontre o discriminante Δ e classifique a Cônica (ou degeneração) encontrada.

Resolução: Na equação em questão, os valores dos coeficientes são: $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 4$, $E = -2$ e $F = 7$. Calculemos o discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Sendo o discriminante nulo, logo a curva é uma Parábola ou suas formas degeneradas.

Segundo Oliveira e Boulos (1987) [24], um bom roteiro para reconhecer as Cônicas dada a sua equação é:

1. Eliminar, por meio de translação, os termos do 1º grau (caso possível);
2. Eliminar o termo B a partir de uma rotação.

4.1.3 Eliminando os termos do 1º Grau

Como já vimos no Teorema 4.1.1 ao transladarmos o sistema OXY para o ponto (h, k) , a curva cuja equação é representada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

é vista pelo sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ com os coeficientes:

$$\overline{A} = A;$$

$$\overline{B} = B;$$

$$\overline{C} = C;$$

$$\overline{D} = 2Ah + Bk + D;$$

$$\overline{E} = 2Ck + Bh + E;$$

$$\overline{F} = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F.$$

Visto que queremos que $\overline{D}$ e $\overline{E}$ sejam iguais a 0, procuramos por valores de h e k que façam com que:

$$\begin{cases} 2Ah + Bk + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Repare que se o determinante

$$\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC = \Delta \quad (4.2)$$

for diferente de zero, o sistema (4.1) tem solução e esta é única. Lembre-se que $\Delta \neq 0$ implica que a Cônica é uma Elipse, uma Hipérbole ou suas degenerações.

Já no caso desse determinante ser nulo, podem existir infinitas soluções ou pode não existir nenhuma, sendo impossível eliminar os termos de 1º grau por meio de uma translação. Nesse caso temos uma Parábola ou suas degenerações.

Observação: Translações não modificam os termos do 2º grau nem o termo misto.

4.1.4 Eliminando, por meio de uma rotação, o termo misto

Como já vimos no Teorema 4.1.2, ao rotacionarmos o sistema OXY em torno da Origem em um ângulo de θ a curva cuja equação é representada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

é vista pelo sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ com os coeficientes:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A \cos^2(\theta) + \frac{B}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + C \operatorname{sen}^2(\theta); \\ \overline{B} &= (C - A) \operatorname{sen}(2\theta) + B \cos(2\theta); \\ \overline{C} &= A \operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + C \cos^2(\theta); \\ \overline{D} &= D \cos(\theta) + E \operatorname{sen}(\theta); \\ \overline{E} &= E \cos(\theta) + D \operatorname{sen}(\theta); \\ \overline{F} &= F.\end{aligned}$$

É útil, no entanto, saber qual ângulo devemos rotacionar o nosso eixo para eliminar o termo B . Desse forma, nessa última seção, nos dedicaremos a essa tarefa.

Uma vez que queremos que $\overline{B}$ seja igual a 0, devemos ter

$$(C - A) \operatorname{sen}(2\theta) = -B \cos(2\theta).$$

Se $A = C$, então

$$0 = -B \cos(2\theta) \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Agora, se $A \neq C$, então

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{-B}{C - A} = \frac{B}{A - C}.$$

Por outro lado, sabemos que $1 + \operatorname{tg}^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$, portanto,

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)} = \cos^2(2\theta).$$

Para concluir, desde que $\cos(2\theta)$ possui o mesmo sinal de $\operatorname{tg}(2\theta)$, segue que

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} > 0 \text{ e} \\ \cos(2\theta) &= -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} < 0.\end{aligned}$$

Além disso, fazendo uso das identidades

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

podemos inferir que

$$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

e

$$2\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}.$$

Utilizando esses valores de $\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ é possível eliminar o termo misto da Equação Geral do Segundo Grau.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo principal contribuir para o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, com ênfase no conceito de Lugar Geométrico e na sua aplicação na resolução de problemas, especialmente aqueles presentes em vestibulares, concursos e olimpíadas. Ao longo do trabalho, foi possível evidenciar que a integração entre teoria e prática é fundamental para promover a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, bem como para desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes.

No Capítulo 1, foi realizada uma análise histórica dos exames vestibulares no Brasil, destacando as transformações educacionais ocorridas desde a sua criação até a consolidação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Esse panorama evidenciou não apenas os desafios enfrentados pelos alunos e professores diante da crescente complexidade dos processos seletivos, mas também a importância de materiais didáticos bem estruturados como ferramentas estratégicas para a preparação dos estudantes. A discussão ressaltou que recursos pedagógicos de qualidade não servem apenas para transmitir conteúdo, mas também para fomentar a autonomia, o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas.

O Capítulo 2 apresentou os conceitos primordiais da Geometria Analítica no plano, abordando noções de comprimento, distância entre pontos e vetores, além das operações fundamentais bem como casos particulares do produto interno. Esses fundamentos foram essenciais para a construção dos conhecimentos que permitiram a compreensão dos tópicos avançados discutidos nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, o foco foi direcionado ao estudo dos Lugares Geométricos, com especial atenção às cônicas – circunferência, parábola, elipse e hipérbole. Ao explorar exemplos clássicos e aplicações práticas, o trabalho evidenciou como a compreensão dos lugares geométricos pode facilitar a resolução de problemas.

O Capítulo 4 aprofundou a discussão ao abordar as cônicas, apresentando a equação geral do segundo grau, o papel do discriminante na identificação das diferentes cônicas e a técnica de rotação dos eixos para eliminação do termo misto. Essa análise mostrou como o domínio das transformações geométricas e algébricas é indispensável para uma compreensão completa das figuras estudadas e para o desenvolvimento de métodos de resolução mais eficientes.

Ao final deste estudo, pode-se concluir que a elaboração e a utilização de um material didático inovador, que integre de forma harmoniosa os fundamentos teóricos e os

exercícios práticos, representa uma contribuição significativa para a melhoria do ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio. Além de oferecer um recurso valioso para os professores, o material proposto tem o potencial de preparar os alunos de maneira mais eficaz para os desafios dos exames seletivos, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Em síntese, esta dissertação reafirma a importância de repensar os recursos pedagógicos disponíveis para o ensino da matemática, evidenciando que a combinação entre uma fundamentação teórica sólida e a aplicação prática por meio de materiais didáticos inovadores é essencial para formar alunos mais críticos, autônomos e preparados para os desafios acadêmicos e profissionais do século XXI.

Referências Bibliográficas

- [1] AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.
- [2] BALTAR, A. et al. **O Sistema de Vestibular UnB 80**; p. 15-28, UnB, Brasília, 1980.
- [3] BANDEIRA, Denise. **Materiais didáticos**. Curitiba, PR: IESDE, 2009
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- [5] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.
- [6] BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ensino médio, volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologia-parte III. Brasília: MEC-2006.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência ENEM**. Brasília: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM: Histórico**. Brasília: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/historico>
- [9] BRASIL. Ministério da Educação. **Enem 2024: 3,15 milhões participaram da primeira etapa**. Brasília: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/secom>
- [10] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica**. 3ª ed. rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [11] FERRO, Jeferson; BERGMANN, Juliana Cristina Faggion. **Produção e avaliação de materiais didáticos em língua materna e estrangeira**, Curitiba: Ibpex, 2008.
- [12] FISCARELLI, R. B. de O. **Material didático e prática docente**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 2, n. 1, p. 31–39, 2007.

- [13] FRENSEL, K.; DELGADO, J. **Geometria Analítica**. Instituto de Matemática – Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/aula21.pdf>.
- [14] FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica**. São Luís: UFMA, NEAD, 2011. 259 p. Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Maranhão.
- [15] GÓMEZ-CHACÓN, Inés M^a; ESCRIBANO, Jesús. **Geometric Locus activities in a dynamic geometry system**. Non-iconic visualization and instrumental genesis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, 4-2, 2014.
- [16] GUIMARÃES, Sonia. **Como se faz a indústria do vestibular**. 1984, Petrópolis, RJ: Vozes.
- [17] Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). **Texto para discussão - Brasília** : Rio de Janeiro : Ipea , 2023.
- [18] JAMES, Glenn; JAMES, Robert C. **Mathematics Dictionary**. Nova Jersey, D. Van Nostran Company, 2015.
- [19] LIMA, Elon Lages; **Coordenadas no Plano**: Com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [20] LORETO, Ana Célia da Costa; LORETO JUNIOR, Armando Pereira. **Vetores e geometria analítica**: teoria e exercícios. São Paulo: LCTE Editora, 2005.
- [21] MARTINS, Carlos Benedito. **O Ensino Superior Brasileiro nos Anos 90**. São Paulo em Perspectiva, v. 14, n. 1, p. 41–60, jan. 2000.
- [22] NICOLETTI, André. **Vestibular completa 91 anos após muitas mudanças**. Folha de S.Paulo, 2002, disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/cotidian/ff0404200228.htm>
- [23] NOGUEIRA, C. M. M. et al.. **Promessas e Limites**: O SISU e sua Implementação na Universidade Federal de Minas Gerais. Educação em Revista, v. 33, p. e161036, 2017.
- [24] OLIVEIRA, Ivan de Camargo e; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica**: um tratamento Vetorial. 2ed. São Paulo: MacGraw-Hill, 1987.
- [25] PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Pontes, 1995.

- [26] QUARANTA NETO, Francisco. **Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679)** e sua relevância para o ensino de Matemática. 2008. 310 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.
- [27] ROSALIN, B. C. M.; CRUZ, J. A. S.; MATTOS, M. B. G. de. **A importância do material didático no ensino a distância.** Revista on line de Política e Gestão Educacional, Araraquara, p. 814–830, 2017.
- [28] SENAI - SP; **Manual de elaboração de material didático impresso.** São Paulo, 1994. 121p.
- [29] VIANNA, Heraldo M. **Processos alternativos de seleção para o ingresso no ensino superior.** CP 34, p. 35-37, 1980.
- [30] WEXLER, Charles. **Analytic Geometry: A Vector Approach.** Addison-Wesley Publishing Company, Arizona, 1967.
- [31] WHITAKER, Dulce Consuelo Andreatta. **Da “invenção” do vestibular aos cursinhos populares: Um desafio para a Orientação Profissional.** Revista Brasileira de Orientação Profissional jul.-dez. 2010, Vol. 11, No. 2, 289-297.

A Apostila

INTRODUÇÃO

Antes de começar a expor o conteúdo dessa obra, gostaria de tomar-lhe alguns poucos minutos para explicar como ela será estruturada e quais as motivações para ela sequer existir.

Olá! Meu nome é David Luan e eu sou professor de Matemática de Cursinho Preparatório para Vestibular desde 2016. Nesses anos de preparação de alunos alguns fatos não me fugiram à atenção:

- O conteúdo programático é pautado pela banca e não pela sequência lógica matemática.
- Mesmo conteúdos importantes são deixados de lado, tendo em vista a dificuldade generalizada dos alunos nos conteúdos mais básicos.
- Ainda existem alunos excepcionais que precisam de atenção especial e materiais extras para o seu estudo e desenvolvimento.

Tendo em mente essa realidade, um dos conteúdos que praticamente nunca recebe a atenção que merece é o de Geometria Analítica, a fabulosa interseção entre a Álgebra e a Geometria. Esse conteúdo, por não ser prevalente na prova do ENEM, acaba sendo deixada somente como uma nota de rodapé ou um conteúdo para os cursos militares e de provas especializadas, provas nas quais a Geometria Analítica tem aparição garantida.

O objetivo desse material não será, no entanto, ser um material completo para o curso de Geometria Analítica: isso seria redundante e soberbo de minha parte, tendo em vista que já existem materiais maravilhosos sobre o tema. O objetivo desse material será expandir os conceitos já existentes com foco em um tópico que, por vezes, se apresenta em provas de vestibulares e concursos, o de **Lugar Geométrico**.

Sendo assim, começaremos o nosso material já com um grande “memorex” para rápida checagem de definições e fórmulas pelo leitor. Na sequência faremos a construção do conteúdo básico de Geometria Analítica, desde distância entre pontos até as equações das cônicas, utilizando exemplos clássicos atrelados a questões de provas selecionadas dentre Olimpíadas, Vestibulares e Concursos.

Espero que esse material seja enriquecedor em sua formação e esclarecedor em dúvidas que, por ventura, possam aparecer.

Memorex

Neste capítulo são apresentadas algumas definições e resultados básicos que devemos conhecer.

A.1 Distância entre Pontos no Plano

Dados $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos do plano, a distância de P_1 até P_2 é dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Ponto Médio de um Segmento

Dados $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos do plano, o ponto médio do segmento P_1P_2 é dado por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right). \quad (\text{A.2})$$

A.2 Vetores no Plano

A.2.1 Coordenadas de um vetor dados os pontos inicial e final

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ é o ponto inicial e $P_2 = (x_2, y_2)$ é o ponto final do vetor $\vec{v}$, então

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_v, y_v). \quad (\text{A.3})$$

A.2.2 Operações com Vetores

Dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e um número real k , tem-se

$$i) \quad \vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v);$$

$$ii) \quad k \cdot \vec{u} = (k \cdot x_u, k \cdot y_u);$$

$$iii) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v;$$

$$iv) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}.$$

A.2.3 Ângulo entre dois vetores

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}. \quad (\text{A.4})$$

A.2.4 Vetor Perpendicular

Se $\vec{v} = (x_v, y_v)$, então os vetores

$$\vec{u} = (-y_v, x_v) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (y_v, -x_v)$$

são perpendiculares a $\vec{v}$.

A.3 Equações da Reta

A.3.1 Equação Cartesiana (Equação Geral)

$$r : ax + by + c = 0, \text{ onde } \vec{v} = (a, b) \text{ é perpendicular (ou normal) a } r. \quad (\text{A.5})$$

A.3.2 Equação Paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases} \quad \text{onde } v = (a, b) \text{ é um vetor paralelo à reta.} \quad (\text{A.6})$$

A.3.3 Distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto $P = (x_P, y_P)$ até uma reta $r : ax + by + c = 0$ é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (\text{A.7})$$

A.4 Equações das Cônicas

A.4.1 Equação da Circunferência

A equação da circunferência de centro $C = (x_C, y_C)$ e raio r é dada por

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2. \quad (\text{A.8})$$

A.4.2 Equação da Elipse de centro $C = (x_C, y_C)$

Eixo Focal paralelo a OX

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.9})$$

Eixo Focal paralelo a OY

$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1. \quad (\text{A.10})$$

Relação entre os parâmetros da Elipse

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (\text{A.11})$$

Excentricidade

$$e = \frac{c}{a}. \quad (\text{A.12})$$

A.4.3 Equação da Hipérbole de centro $C = (x_C, y_C)$

Eixo Focal paralelo a OX

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.13})$$

Eixo Focal paralelo a OY

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.14})$$

Relação entre os parâmetros da Hipérbole

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (\text{A.15})$$

Excentricidade

$$e = \frac{c}{a}. \quad (\text{A.16})$$

A.4.4 Equação da Parábola com vértice $V = (x_V, y_V)$

Reta Focal paralela a OX

$$(x - x_V)^2 = 4p(y - y_V). \quad (\text{A.17})$$

Eixo Focal paralelo a OY

$$(y - y_V)^2 = 4p(x - x_V). \quad (\text{A.18})$$

A.5 Transformações no Plano Cartesiano

A.5.1 Translação dos eixos

$$\begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}. \quad (\text{A.19})$$

A.5.2 Rotação dos eixos

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ \bar{y} = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}. \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta) \\ y = \bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta) \end{cases}. \quad (\text{A.21})$$

A.6 Equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (\text{A.22})$$

A.6.1 Discriminante Δ

Dada uma equação geral do segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ o discriminante associado é o seguinte número:

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Relação do sinal de Δ e a cônica obtida:

i) Se $\Delta < 0$, então a cônica é uma Elipse;

- ii)* Se $\Delta = 0$, então a cônica é uma Parábola;
- iii)* Se $\Delta > 0$, então a cônica é uma Hipérbole.

B Conceitos Básicos

Para começarmos o nosso estudo de Lugares Geométricos, que por sua vez é um conteúdo de Geometria Analítica, precisamos primeiramente bater um papo sobre alguns conceitos iniciais.

Vamos conversar um pouco sobre os Elementos Básicos da Geometria: O Ponto, a Reta e o Plano. Você conhece os três, certo? Ótimo, pois esses objetos são noções primitivas da Geometria.

Eu preciso também que você saiba alguns axiomas¹ da Geometria Euclidiana, pois é a partir deles que toda a Geometria Clássica é construída.

Os cinco axiomas da Geometria Euclidiana² são:

- Por dois pontos no plano passam uma e somente uma reta.
- Qualquer segmento de reto pode ser continuado de maneira única em uma reta.
- Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Todos os ângulos retos são iguais.
- Dada uma reta e um ponto exterior a ela, existe uma e apenas uma reta contendo o ponto dado e paralela a reta dada.

Lembrou-se de tudo? Excelente, então podemos começar!

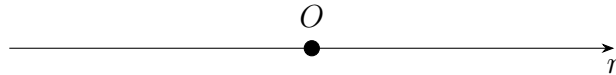
¹Não sabe o que é axioma? Sem problemas, eu explico. Um axioma é uma proposição lógica que assumimos como verdadeira, ou seja, ela não precisa ser provada.

²Basicamente a Geometria Plana e Espacial clássicas. Se alguém te falar sobre Geometrias Esféricas ou Hiperbólicas, diga que você não fala com estranhos.

B.1 Eixo

De acordo com o livro “Coordenadas no Plano” (Lima, 2002), de Elon Lages, uma reta é *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; e um sentido inverso chamado *negativo*. Quando adicionamos a essa ideia um ponto fixo, chamado de Origem, temos então um *Eixo*, conforme a Figura abaixo:

Figura B.1



Fonte: Autor

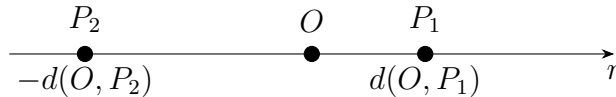
Sem grandes dificuldades, para cada ponto do Eixo podemos atribuir um número baseando-se na sua distância ao ponto O .

Sendo assim, dado P um ponto do Eixo, temos três possibilidades de acordo com a posição do ponto P .

- Se $P = O$, então associamos P ao número 0.
- Se P estiver no sentido positivo, então associa-se a P o comprimento do segmento OP .
- Se P estiver no sentido negativo, então associa-se a P o oposto do comprimento do segmento OP .

O número associado ao ponto P é a sua *coordenada* e indicaremos tal número abaixo do ponto P . Veja a figura:

Figura B.2



Fonte: Autor

B.2 Distância entre Pontos em um Eixo

Dados X e Y pontos de um eixo r cujas coordenadas são x e y , respectivamente, definimos a distância entre X e Y por

$$d(X, Y) = |x - y|, \quad (\text{B.1})$$

isto é, tem-se:

$$\begin{cases} d(X, Y) = x - y, & \text{se } x \geq y \text{ e} \\ d(X, Y) = y - x, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

Perceba³ que:

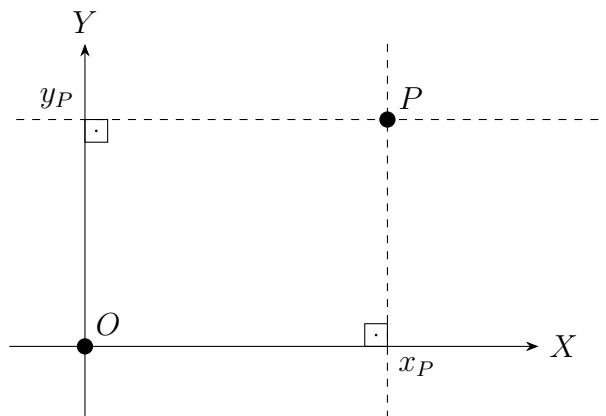
- A distância entre os pontos sempre é um número não-negativo ($d(X, Y) \geq 0$);
- A distância entre os pontos será igual a zero se e somente se os pontos coincidirem ($d(X, Y) = 0 \iff X = Y$);
- A distância entre X e Y é igual à distância entre Y e X ($d(X, Y) = d(Y, X)$);
- A distância entre um ponto e a Origem é igual a coordenada do ponto. ($d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$);
- $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$.⁴

B.3 Localização de um Ponto no Plano

Seja P um ponto do Plano Cartesiano, podemos distinguir esse ponto de todos os outros a partir de sua localização no Plano, a qual pode ser determinada por suas coordenadas.

Não sabe encontrar as coordenadas de um ponto? Veja: Sejam OX e OY os eixos perpendiculares. Podemos traçar retas paralelas aos eixos passando pelo ponto P , conforme a imagem a seguir:

Figura B.3



Fonte: Autor

³Pelas propriedades do módulo.

⁴O caso em que $d(X, Y) = d(X, Z) + d(Z, Y)$ ocorre se e somente se Z pertencer ao segmento XY .

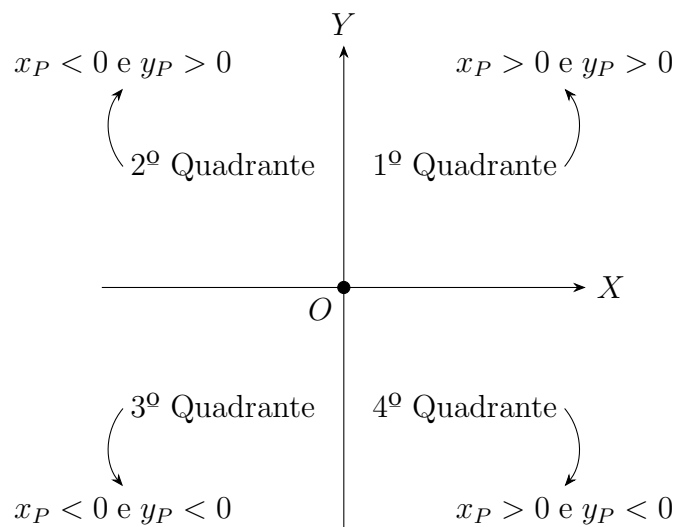
Essas retas intersectam cada eixo em um ponto. Como OX e OY são eixos, cada um desses pontos de interseção está a uma certa distância da Origem, as quais chamaremos de x_P (abscissa de P) e y_P (ordenada de P).

Portanto, o ponto P pode ser tratado de forma única como $P = (x_P, y_P)$.

B.4 Quadrantes

Os eixos ortogonais OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*.

Figura B.4: Divisão do Plano em Quadrantes



Fonte: Autor

Note que os pontos do eixo OX são da forma $(x,0)$ e os pontos do eixo OY são da forma $(0,y)$, sendo a origem o ponto $O = (0,0)$.

B.5 Distância entre Pontos em $\mathbb{R}^2$

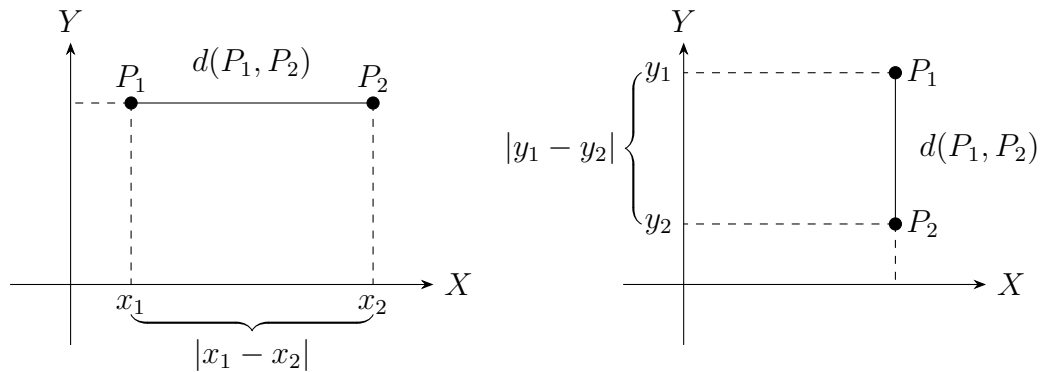
Vejamos agora como encontrar a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Caso P_1 e P_2 possuam a mesma *ordenada*⁵, temos $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$;
- Caso P_1 e P_2 possuam a mesma *abscissa*⁶, $d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$;

⁵o mesmo valor de y , só o x varia.

⁶leia a nota acima, troque y por x e vice-versa, seja feliz.

Figura B.5

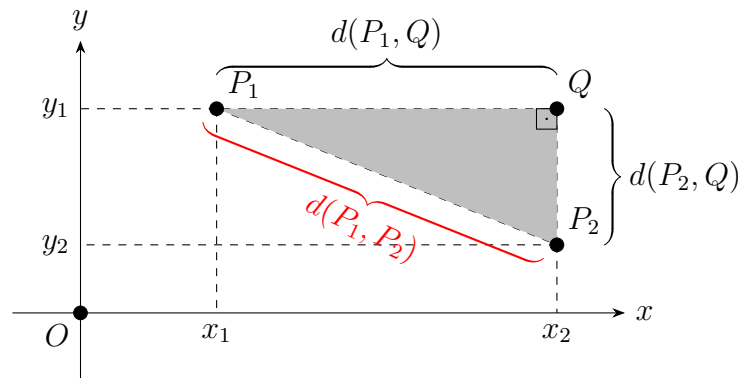


Fonte: Autor

- Caso P_1 e P_2 possuam *abscissas* e *ordenadas* distintas, basta utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir que:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (\text{B.2})$$

Figura B.6: Distância entre Pontos com Abscissas e Ordenadas distintas

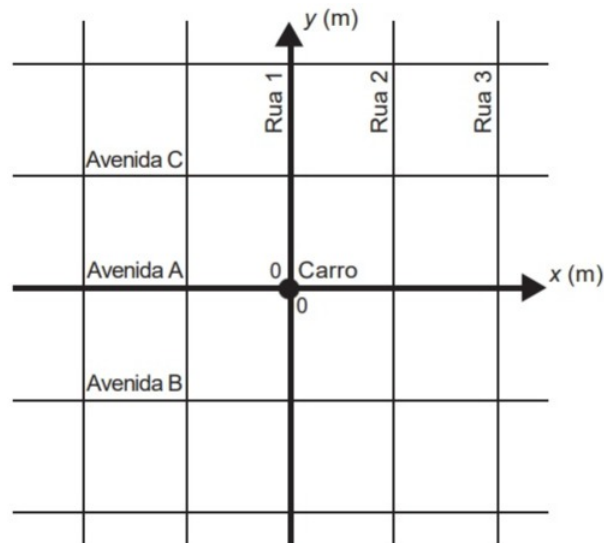


Fonte: Autor

Problema B.5.1. (ENEM 2022 PPL) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem $(0, 0)$ o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.

Figura B.7



Fonte: INEP

A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é

A) - 60.

B) - 40.

C) 0.

D) 40.

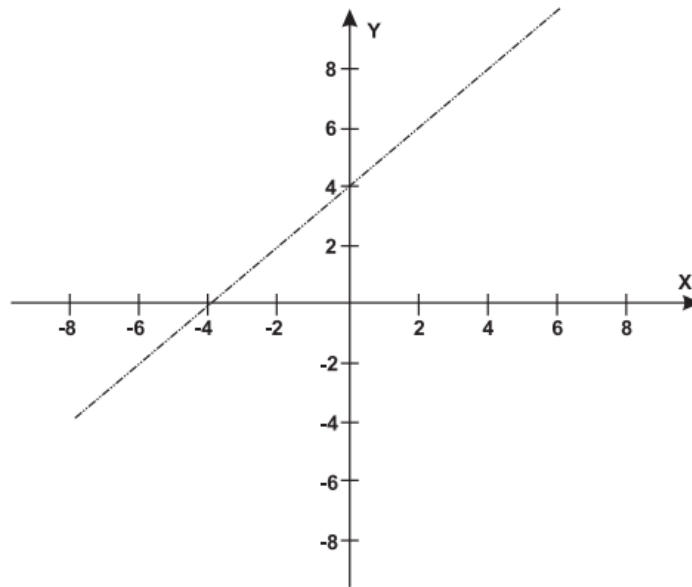
E) 60.

Resolução: Como o hotel fica posicionado a 40 metros na direção da Avenida A para a Avenida B, logo ele está no sentido negativo do eixo OY , tendo portanto **ordenada** igual a -40m.

Gabarito: Letra B.

Problema B.5.2. (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

Figura B.8



Fonte: INEP

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

- A) $(-5, 0)$.
- B) $(-3, 1)$.
- C) $(-2, 1)$.
- D) $(0, 4)$.
- E) $(2, 6)$.

Resolução: Primeiramente, como a estação do metrô deve estar na reta $y = x + 4$, logo podemos representá-la como um ponto $(x, x + 4)$.

As alternativas A) e C) não respeitam essa representação, visto que $0 \neq -5 + 4$ e $1 \neq -2 + 4$. Além disso, como a distância entre a estação e o hospital público não deve ser superior a 5km, podemos calcular a distância das alternativas restantes ao ponto P .

- $d(B, P) = \sqrt{(-3 - (-5))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \leq 5$.
- $d(D, P) = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} > 5$.
- $d(E, P) = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} > 5$.

Concluimos que, das alternativas, a única que representa um ponto da reta $y = x + 4$ que está a menos de 5km do ponto $P = (-5, 5)$ é a letra B.

Gabarito: Letra B.

B.6 Exercícios

Exercício B.6.1. No eixo real, a origem é o ponto O . Se um ponto A está localizado 7 unidades à direita de O e um ponto B está localizado 4 unidades à esquerda de O , quais são as coordenadas de A e B ?

Exercício B.6.2. No eixo real, qual é a coordenada do ponto que está exatamente no meio entre os pontos $P = (3)$ e $Q = (-5)$?

Exercício B.6.3. No eixo orientado, um ponto X tem coordenada -8 . Se Y está 5 unidades à direita de X , qual é a coordenada de Y ?

Exercício B.6.4. No eixo real, um ponto C tem coordenada 10 e um ponto D tem coordenada -6 . Encontre a coordenada do ponto médio entre C e D .

Exercício B.6.5. No eixo real, um ponto E tem coordenada 2 e um ponto F tem coordenada -3 . Se um ponto G está três vezes mais próximo de F do que de E , qual é a coordenada de G ?

Exercício B.6.6. Se um ponto M está localizado exatamente no meio entre os pontos $A = (4)$ e $B = (10)$, qual é a sua coordenada?

Exercício B.6.7. Sejam os pontos $X = (-2)$, $Y = (6)$ e Z desconhecido. Sabemos que a distância entre X e Z é o dobro da distância entre X e Y . Determine a coordenada de Z .

Exercício B.6.8. No eixo orientado, um ponto W está localizado a uma distância de 9 unidades do ponto $V = (5)$. Quais são as possíveis coordenadas de W ?

Exercício B.6.9. No eixo real, considere que a coordenada de um ponto P seja um número tal que sua distância até o ponto $Q = (12)$ seja igual ao triplo de sua distância até o ponto $R = (6)$. Qual é a coordenada de P ?

Exercício B.6.10. No eixo orientado, três pontos A , B e C satisfazem a condição de que B está exatamente no meio de A e C . Sabendo que a coordenada de A é -5 e que a soma das coordenadas de A , B e C é 12, determine as coordenadas de B e C .

Exercício B.6.11. No plano cartesiano, um ponto P tem coordenadas $(3, 5)$. Identifique sua abscissa e sua ordenada.

Exercício B.6.12. Determine as coordenadas do ponto Q que está localizado no eixo OX e a 4 unidades à esquerda da origem.

Exercício B.6.13. O ponto A está localizado no eixo OY . Se sua ordenada é -7 , determine suas coordenadas.

Exercício B.6.14. O ponto $B = (x, y)$ está localizado a 3 unidades acima do eixo OX e 5 unidades à esquerda do eixo OY . Quais são suas coordenadas?

Exercício B.6.15. Se um ponto $C = (x, y)$ tem sua abscissa igual ao dobro de sua ordenada e sua ordenada vale -2 , determine as coordenadas de C .

Exercício B.6.16. No plano cartesiano, um ponto $D = (x, y)$ está localizado no primeiro quadrante e sua ordenada é o triplo de sua abscissa. Se a soma de suas coordenadas é 16, determine (x, y) .

Exercício B.6.17. O ponto $E(a, b)$ está localizado no terceiro quadrante e satisfaz a equação $2a - 3b = 6$. Sabendo que $b = -4$, determine as coordenadas de E .

Exercício B.6.18. No plano cartesiano, um ponto G está localizado a 4 unidades do eixo OX e 6 unidades do eixo OY . Quais são as quatro possíveis coordenadas desse ponto?

Exercício B.6.19. Calcule a distância entre os pontos $A = (2, 3)$ e $B = (6, 7)$ no plano cartesiano.

Exercício B.6.20. Determine a distância entre os pontos $P = (-3, 4)$ e $Q = (1, 4)$.

Exercício B.6.21. A distância entre os pontos $M = (0, 2)$ e $N = (x, 5)$ é igual a 5. Determine os possíveis valores de x .

Exercício B.6.22. No plano cartesiano, qual deve ser a coordenada y do ponto $C = (5, y)$ para que a distância entre C e $D = (1, -3)$ seja 10?

Exercício B.6.23. Um triângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 5)$ e $C = (7, 1)$. Mostre que os lados AB e BC possuem o mesmo comprimento.

Exercício B.6.24. Sejam os pontos $E = (2, k)$ e $F = (6, 4)$. Para qual valor de k a distância entre E e F será mínima?

Exercício B.6.25. No plano cartesiano, os pontos $X = (-2, 3)$ e $Y = (4, -1)$ são os extremos de um segmento. Determine a distância entre esses pontos e encontre as coordenadas do ponto médio do segmento XY .

Exercício B.6.26. Considere os pontos $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$ e $C = (7, y)$. Para que o triângulo ABC seja um triângulo isósceles com $\overline{AB} = \overline{BC}$, qual deve ser o valor de y ?

C Vetores

C.1 Por que Vetores?

Este capítulo é sobre vetores. Sim, vetores. Eu imagino que você deve estar se perguntando o que um capítulo de vetores está fazendo fora de um livro de Física. Caso você já saiba a resposta, por favor, sinta-se à vontade para pular para as propriedades e as operações. Caso você não saiba, por favor, deixe-me explicar.

Eu não poderia falar melhor do que Camargo (2005) quando o autor disse:

Se a ferramenta básica para o estudo da Geometria Axiomática é a Lógica, a Geometria Descritiva, por sua vez, utiliza fundamentalmente o Desenho, enquanto a Geometria Analítica encontra na Álgebra seu aliado mais importante. Não apenas a Álgebra Elementar, como também - e talvez esta seja a grande novidade para você - a Álgebra Vetorial. (Camargo 2005)

Estudaremos vetores para nos aproveitar de suas características algébricas para resolver nossos problemas geométricos. Pura Geometria Analítica, não é mesmo?

C.1.1 Segmentos Orientados

Dados dois pontos A e B , o segmento orientado AB é um segmento de origem em A e extremidade B . Geometricamente:

Figura C.1: Segmento Orientado



Fonte: Autor

Dois segmentos orientados são iguais se e somente se têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Todos os segmentos orientados possuem **comprimento**¹, **direção** e **sentido**.

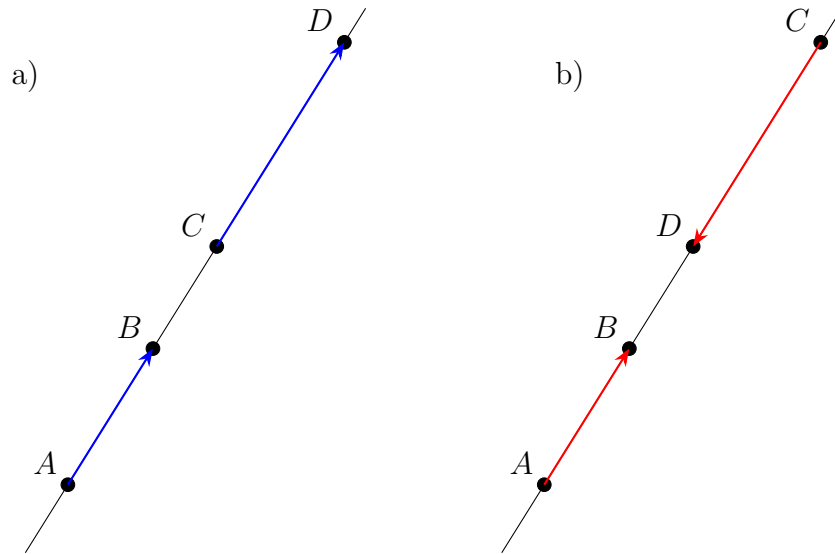
Definição C.1.1. *Dois segmentos orientados, AB e CD , serão equipolentes se possuírem o mesmo comprimento, forem paralelos ou colineares e possuírem o mesmo sentido. Indicaremos que AB é equipolente a CD escrevendo $AB \equiv CD$.*

¹Em alguns casos, o comprimento pode ser chamado de Módulo ou Tamanho.

Dada essa definição, é importante verificar quando essas condições são atendidas. Como já fizemos um estudo da distância entre dois pontos num eixo e no plano, já sabemos verificar se dois segmentos são congruentes ² entre si.

Para que dois segmentos colineares AB e CD tenham o mesmo sentido, é necessário e suficiente que as semiretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ induzam o mesmo sentido de percurso na reta que as contém.

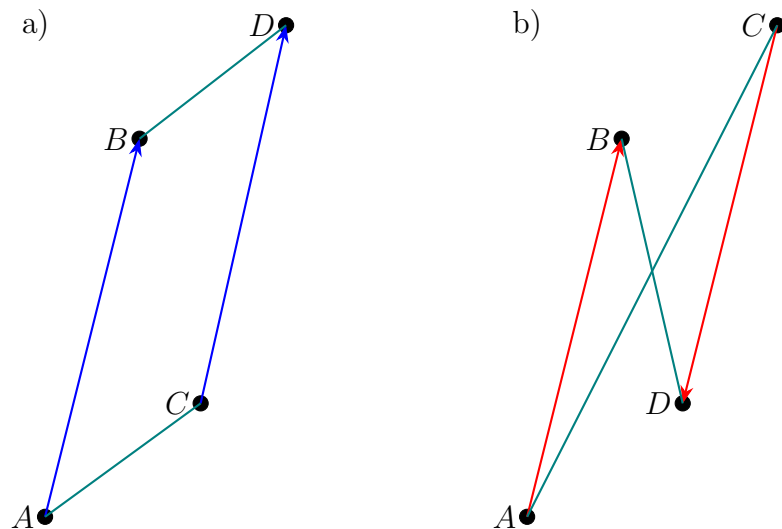
Figura C.2: Segmentos colineares com o mesmo sentido (a) e com sentidos opostos (b)



Fonte: Autor

Se AB e CD são segmentos paralelos e possuem o mesmo comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo.

Figura C.3: Segmentos paralelos com o mesmo sentido (a) e com sentidos opostos (b)

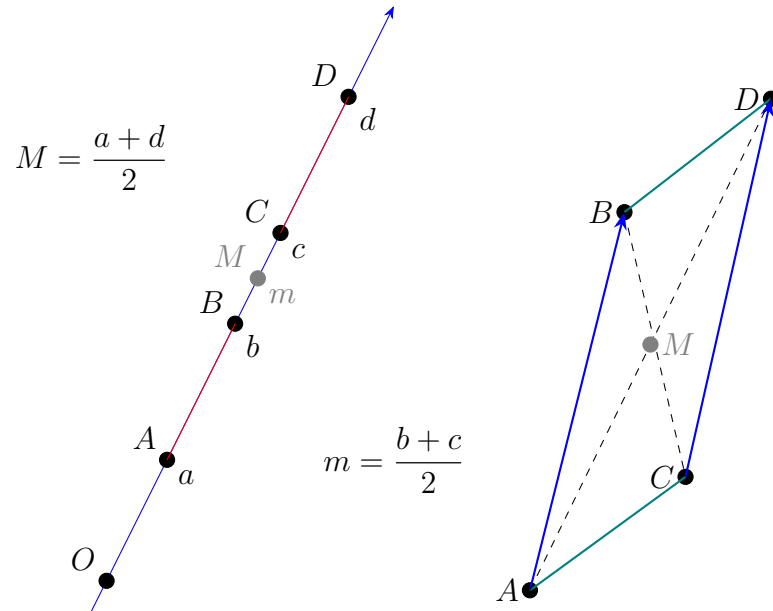


Fonte: Autor

²Possuem o mesmo comprimento.

Os segmentos orientados AB e CD serão equipolentes se e somente se o ponto médio de AD coincidir com o ponto médio de BC .

Figura C.4

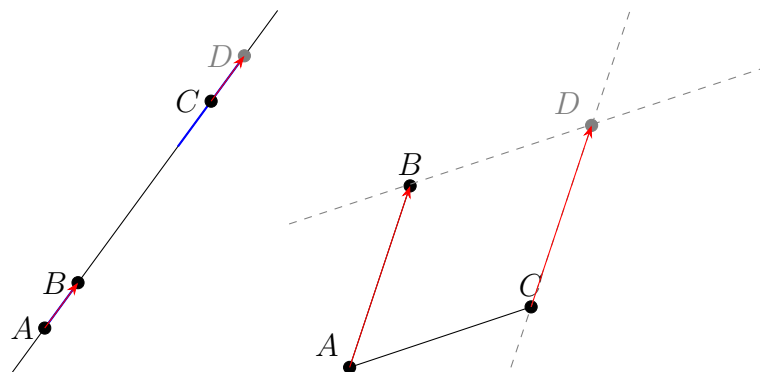


Fonte: Autor

Dados os pontos A , B e C , existe um único ponto D tal que

$$AB \equiv CD.$$

Figura C.5



Fonte: Autor

Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, logo

$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Exemplo C.1.1. Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (5, 1)$, determine as

coordenadas do ponto $D = (x, y)$ de modo que $AB \equiv CD$.

Resolução: Sabemos que

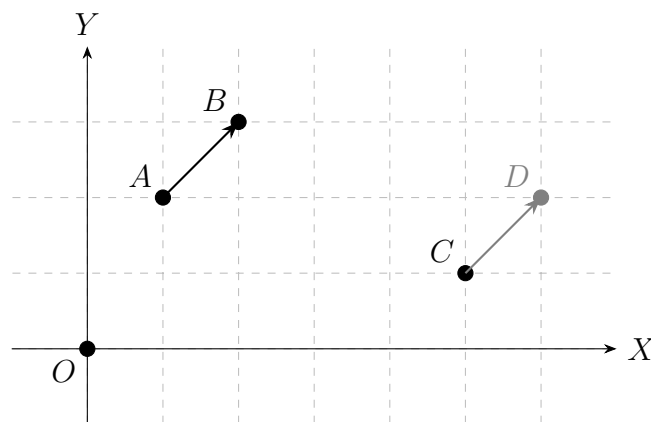
$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Portanto,

$$2 - 1 = x - 5 \quad \text{e} \quad 3 - 2 = y - 1 \Rightarrow x = 6 \quad \text{e} \quad y = 2.$$

Concluimos que $D = (6, 2)$.

Figura C.6



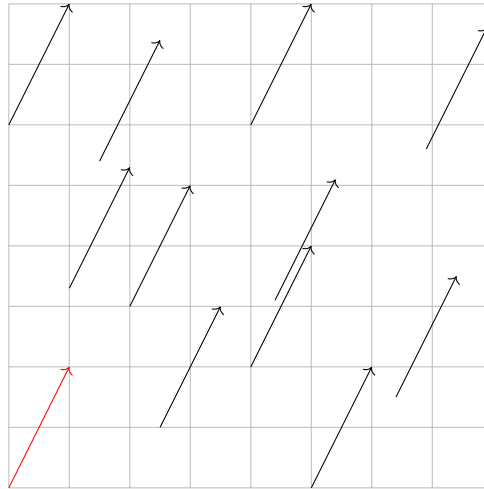
Fonte: Autor

C.1.2 Definição de Vetor

Definição C.1.2. Dado um segmento orientado AB , um **Vetor** é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB .

Sendo assim, um vetor é um conjunto. Diferente do que estudamos, não? De modo preciso, de todos os segmentos orientados possíveis, escolhemos um para ser um **representante** de todos os outros, conforme observado na figura a seguir:

Figura C.7: Segmentos Equipolentes e Seu Representante



Fonte: Autor

Dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do plano, o segmento orientado de origem A e extremidade B é denotado por $\overrightarrow{AB}$ e o vetor que representa esse segmento é o vetor $\overrightarrow{AB}$. Sabemos que existe um único ponto P tal que $OP \equiv AB$, isto é

$$x_P - 0 = x_B - x_A \quad \text{e} \quad y_P - 0 = y_B - y_A.$$

Definição C.1.3. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ serão as coordenadas do ponto $P = (x_P, y_P)$ do plano tal que $OP \equiv AB$ e escrevemos $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Dois vetores serão iguais se forem equipolentes, ou seja, tiverem mesmo módulo sentido e direção (a localização no espaço não é importante). De forma algébrica, dois vetores serão iguais se tiverem as mesmas coordenadas. Ao vetor com ambas as coordenadas iguais a zero denominamos **Vetor Nulo** e o simbolizamos por $\vec{0}$.

Exemplo C.1.2. Dados os pontos $A = (2, 3)$, $B = (4, 1)$ e $C = (3, 6)$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e encontre o ponto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Resolução: Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Portanto,

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 - 3) = (2, -2).$$

Como queremos que $\overrightarrow{CD}$ seja igual a $\overrightarrow{AB}$, logo $(x_D - x_C, y_D - y_C) = (2, -2)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} (x_D - 3, y_D - 6) &= (2, -2) \Rightarrow x_D - 3 = 2 \quad \text{e} \quad y_D - 6 = -2 \\ &\Rightarrow x_D = 5 \quad \text{e} \quad y_D = 4. \end{aligned}$$

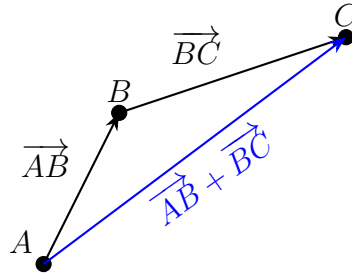
Concluimos que $D = (5, 4)$.

Operações com Vetores

1. Adição de Vetores

Definição C.1.4. Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, a soma dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$.

Figura C.8: Adição de Vetores



Fonte: Autor

Algebricamente, a soma dos vetores é um vetor cujas coordenadas são as somas das coordenadas de cada vetor. Dessa forma, sendo $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ e $\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B)$, logo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_B - x_A + x_C - x_B, y_B - y_A + y_C - y_B) = (x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}.$$

Propriedades da Adição de Vetores

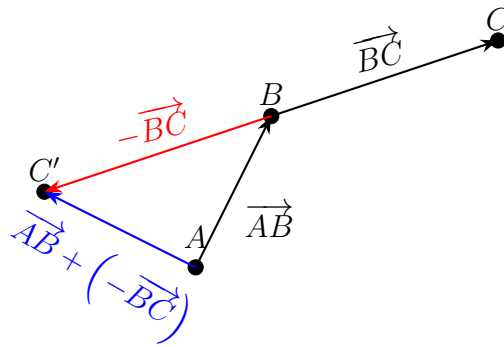
Para quaisquer vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ são válidas as seguintes propriedades³:

- Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- Elemento Neutro: $\exists \vec{0}^* / \vec{u} + \vec{0}^* = \vec{u}$.
- Elemento Oposto: $\forall \vec{u} \neq \vec{0}, \exists (-\vec{u}) / \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2. Subtração de Vetores: Subtrair dois vetores é o mesmo que adicionar ao primeiro vetor o oposto do segundo. Ou seja $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

³Todas as propriedades decorrem das coordenadas dos vetores pertencerem aos números reais.

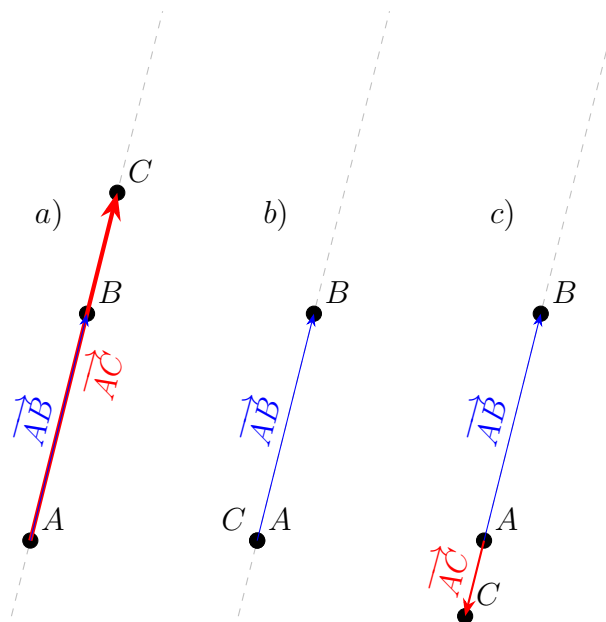
Figura C.9: Subtração de Vetores



Fonte: Autor

3. **Multiplicação de um vetor por um escalar:** Dados um número real λ e um vetor qualquer $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, definimos o produto de λ por $\vec{v}$, denotado por $\lambda \vec{v}$, como sendo o vetor $\overrightarrow{AC}$, tal que:

- (a) A , B e C são colineares;
- (b) $d(A, C) = |\lambda|d(A, B)$;
- (c) $C = A$ se $\lambda = 0$;
- (d) os segmentos AC e AB tem igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Figura C.10: Multiplicação de um Vetor por um Escalar λ , a) $\lambda > 0$, b) $\lambda = 0$ e c) $\lambda < 0$ 

Fonte: Autor

Sendo $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, dizemos que $\overrightarrow{AC}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$.

C.1.3 Produto Interno e Ângulo entre Vetores

4. **Produto Interno:** Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, definimos o produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ pelo número $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ e denotamos por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Exemplo C.1.3. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{v} = (5, 6)$, qual o valor de $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

Pela definição de Produto Interno temos que:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 10 + 18 = 28.$$

Propriedades do Produto Interno:

Para quaisquer vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ são válidas as seguintes propriedades:

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- $\langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \alpha \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.

5. **Norma⁴ de um Vetor:** Dado um vetor $\vec{u}$ definimos a norma como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

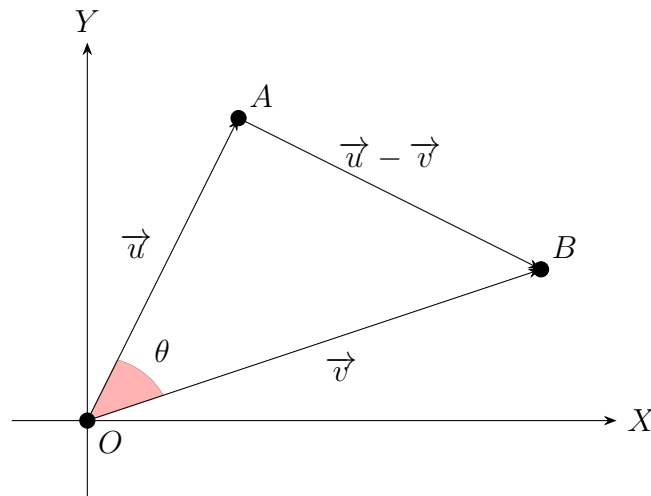
Um vetor é dito Unitário quando $\|\vec{u}\| = 1$.

Ângulo entre Vetores

Dados os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem no mesmo ponto, existe um menor ângulo θ entre esses vetores, conforme a figura abaixo:

⁴Entenda Norma como o Tamanho do Vetor.

Figura C.11



Fonte: Autor

É sempre verdade que:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta).$$

Repare que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem perpendiculares, logo $\cos(\theta) = 0$ e, portanto o produto interno será igual a 0. Reciprocamente, como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos, logo o produto interno ser igual a 0 implica que $\cos(\theta) = 0$ e, portanto, que os vetores são perpendiculares entre si.

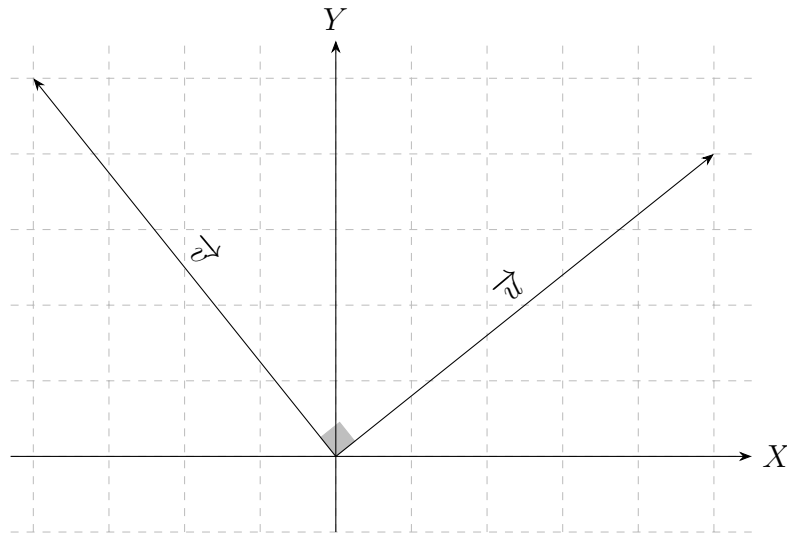
Observação: Seja $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor não nulo. Uma forma rápida e eficiente de encontrar um vetor perpendicular a $\vec{u}$ é trocar as suas coordenadas e alterar o sinal de uma. Sendo assim $\vec{v} = (-y_1, x_1)$, por exemplo, é um vetor perpendicular a $\vec{u}$. De fato,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 \cdot (-y_1) + y_1 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Exemplo C.1.4. Encontre um vetor perpendicular a $\vec{u} = (5, 4)$.

Pela Observação acima, sabemos que $\vec{v} = (-4, 5)$ é perpendicular a $\vec{u}$. Não acredita em mim? Pois acredite no desenho:

Figura C.12



Fonte: Autor

C.2 Exercícios

Exercício C.2.1. Dado o segmento orientado com origem em $A = (1, 2)$ e extremidade em $B = (4, 6)$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Exercício C.2.2. O vetor $\overrightarrow{CD}$ possui coordenadas $(3, -2)$. Se $C = (1, 4)$, quais são as coordenadas do ponto D ?

Exercício C.2.3. Dados os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (7, 9)$, encontre a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Exercício C.2.4. Verifique se os segmentos orientados PQ e RS são equipolentes, sabendo que $P = (1, 2)$, $Q = (4, 5)$, $R = (2, 3)$ e $S = (5, 6)$.

Exercício C.2.5. Dados os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (-2, 1)$, calcule $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercício C.2.6. Determine a soma e a diferença dos vetores $\vec{a} = (2, -1)$ e $\vec{b} = (-3, 4)$.

Exercício C.2.7. O vetor $\vec{v}$ tem norma 10 e forma um ângulo de 60° com o eixo OX . Determine suas coordenadas.

Exercício C.2.8. Determine o valor de k para que o vetor $(k, 3)$ seja paralelo ao vetor $(4, 6)$.

D Equação da Reta

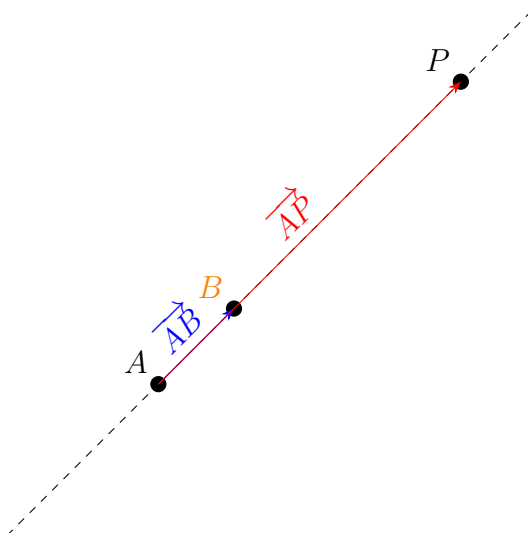
D.1 Equação Paramétrica

Dados dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^2$, sabemos axiomáticamente que existe uma única reta que contém os dois pontos. Podemos determinar tal reta de forma vetorial da seguinte forma: Seja $\overrightarrow{AB}$ um vetor que pertence à reta e $P \in \mathbb{R}^2$, definimos que

$$P \in r \iff \overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Figura D.1



Fonte: Autor

Sendo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $P = (x, y)$ definimos as **equações paramétricas** da reta como:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Exemplo D.1.1. *Quais são as Equações Paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 5)$?*

Resolução Como $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$, então

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff (x, y) = (1, 2) + t \cdot (1, 3), \quad t \in \mathbb{R} \\ &\iff (x, y) = (1 + t, 2 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas de r são: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

D.1.1 Equação Cartesiana (ou Geral)

Definição D.1.1. Um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta r se $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A)$ e tem vetor normal $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$. Então a **equação cartesiana** da reta r é

$$ax + by + c = 0 \tag{D.2}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b são as coordenadas do vetor normal. Em muitos exercícios encontraremos c depois de sabermos os valores de a e b .

Seguem alguns resultados clássicos que utilizaremos com bastante frequência:

- Uma reta tangente a uma circunferência sempre é perpendicular ao vetor que sai do Centro e tem como extremo no ponto de tangência;
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{u}$, logo $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{v}$;
- A mediatriz de um segmento é perpendicular ao próprio segmento.

Exemplo D.1.2. Qual a Equação Cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 5)$?

Resolução: Como $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$, logo um vetor perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ é $\vec{u} = (3, -1)$. A equação da reta pode ser escrita como

$$r : 3x - y + c = 0.$$

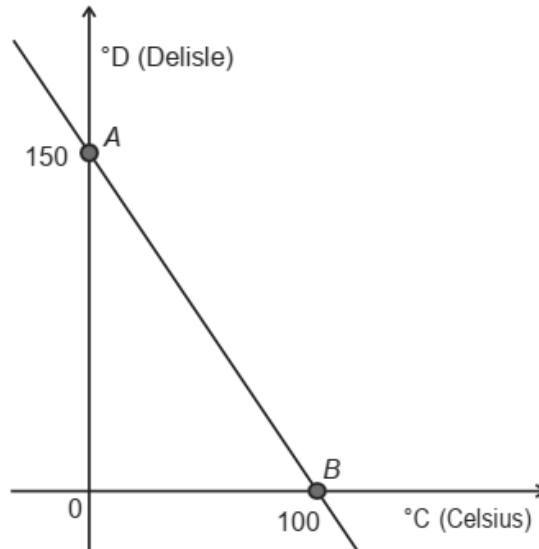
Como $A \in r$, logo $3 \cdot 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = -1$. Concluímos que a Equação Cartesiana de r é

$$r : 3x - y - 1 = 0.$$

Problema D.1.1. (ENEM 2022 PPL) A escala de temperatura Delisle ($^{\circ}D$), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas

na escala Celsius ($^{\circ}\text{C}$) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B .

Figura D.2



Disponível em: www.proftbus.com.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Fonte: INEP

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

- A) $2D + C = 100$
- B) $2D + 3C = 150$
- C) $3D + 2C = 300$
- D) $2D + 3C = 300$
- E) $3D + 2C = 450$

Resolução: Consideremos $x = C$ e $y = D$. Além disso, pelo gráfico é possível verificar que os pontos $A = (0, 150)$ e $B = (100, 0)$ pertencem à reta. Como $\overrightarrow{AB} = (100, -150)$, um vetor perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ é $\vec{u} = (150, 100)$. Sendo assim, a Equação Cartesiana da reta pode ser dada por

$$r : 150C + 100D + c = 0.$$

Como $A = (0, 150) \in r$, logo

$$\begin{aligned} 150 \cdot 0 + 100 \cdot 150 + c &= 0 \\ \Rightarrow 15000 + c &= 0 \\ \Rightarrow c &= -15.000. \end{aligned}$$

Portanto, a Equação Cartesiana de r pode ser dada por

$$r : 150C + 100D - 15000 = 0.$$

Dividindo ambos os termos por 50 obtemos:

$$r : 3C + 2D - 300 = 0.$$

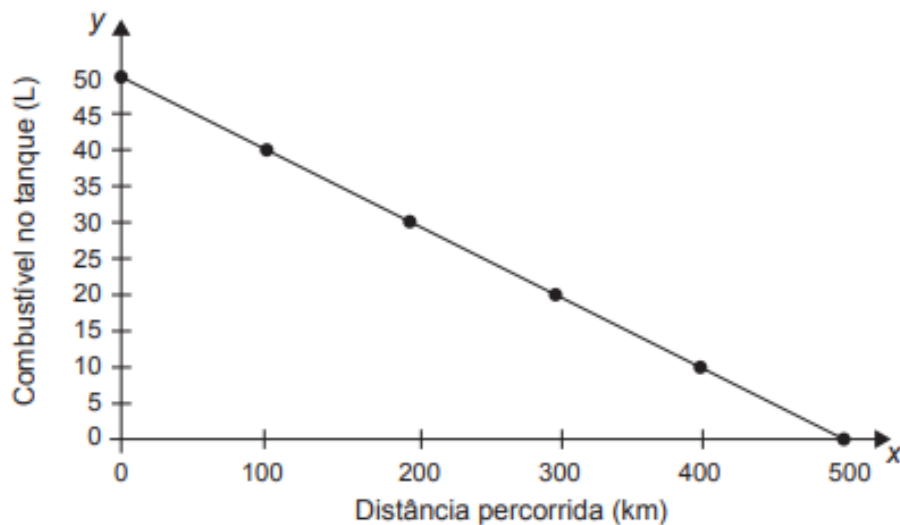
Somando 300 em ambos os termos e ajustando a ordem, encontramos:

$$r : 2D + 3C = 300.$$

Gabarito: Letra D.

Problema D.1.2. (ENEM 2018 PPL) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura D.3



Fonte: INEP

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

A) $y = -10x + 500$

B) $y = \frac{-x}{10} + 50$

C) $y = \frac{-x}{10} + 500$

D) $y = \frac{x}{10} + 50$

E) $y = \frac{x}{10} + 500$

Resolução: De acordo com o esboço gráfico apresentado, seja r a reta que passa pelos pontos $A = (0, 50)$ e $B = (500, 0)$.

O vetor $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (500 - 0, 0 - 50) = (500, -50)$ é um vetor da reta r . Um possível vetor perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ é $\vec{v} = (50, 500)$.

Sabemos que $r : ax + by + c = 0$, em que os coeficientes a e b são as coordenadas do vetor perpendicular à reta. Como $\overrightarrow{AB} \perp r$, logo a reta é descrita por

$$50x + 500y + c = 0.$$

Como $B = (500, 0) \in r$, logo podemos substituir as coordenadas de B na equação da reta a fim de encontrar o coeficiente c .

$$\begin{aligned} 50 \cdot 500 + 500 \cdot 0 + c &= 0 \\ \Rightarrow 25.000 + c &= 0 \\ \Rightarrow c &= -25.000. \end{aligned}$$

Portanto, a Equação Cartesiana de r é dada por

$$50x + 500y - 25.000 = 0.$$

Dividindo ambos os membros por 500 obtemos

$$\frac{x}{10} + y - 50 = 0.$$

Ou ainda,

$$y = \frac{-x}{10} + 50.$$

Gabarito: Letra B.

Problema D.1.3. (ENEM 2011 PPL) Um programador visual deseja modificar uma imagem, aumentando seu comprimento e mantendo sua largura. As figuras 1 e 2 representam, respectivamente, a imagem original e a transformada pela duplicação do comprimento.

Figura D.4

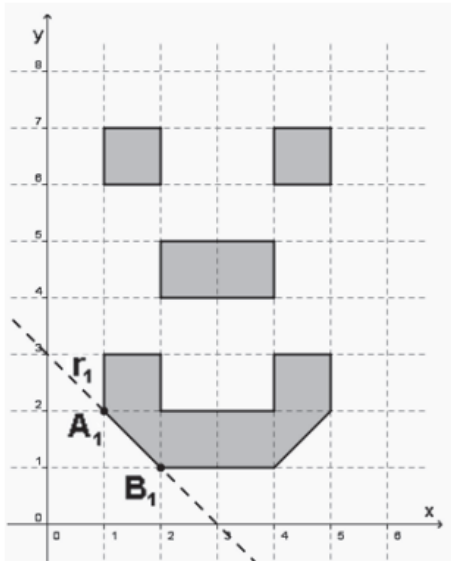


Figura 1

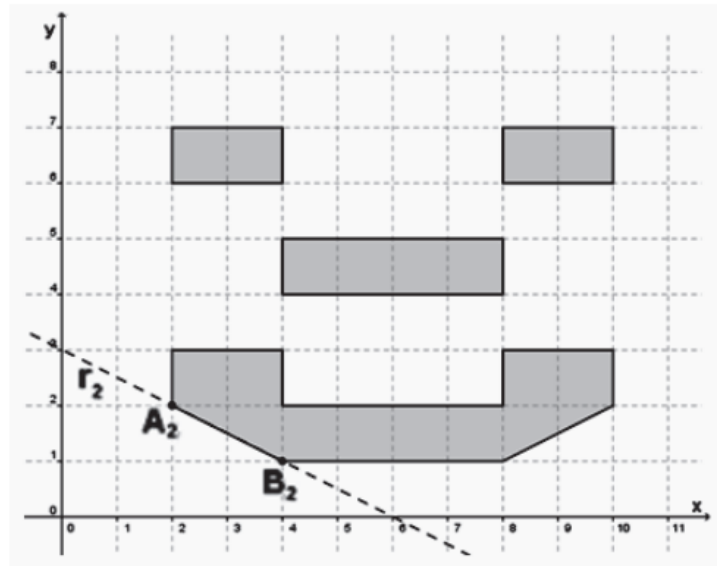


Figura 2

Fonte: INEP

Para modelar todas as possibilidades de transformação no comprimento dessa imagem, o programador precisa descobrir os padrões de todas as retas que contêm os segmentos que contornam os olhos, o nariz e a boca e, em seguida, elaborar o programa.

No exemplo anterior, o segmento A_1B_1 da figura 1, contido na reta r_1 , transformou-se no segmento A_2B_2 da figura 2, contido na reta r_2 .

Suponha que, mantendo constante a largura da imagem, seu comprimento seja multiplicado por n , sendo n um número inteiro e positivo, e que, dessa forma, a reta r_1 sofra as mesmas transformações. Nessas condições, o segmento A_nB_n estará contido na reta r_n .

A equação algébrica que descreve r_n , no plano cartesiano, é

- A) $x + ny = 3n$.
- B) $x - ny = -n$.
- C) $x - ny = 3n$.
- D) $nx + ny = 3n$.
- E) $nx + 2ny = 6n$.

Resolução: Como a largura permanece constante, sabemos que as ordenadas de A_n e B_n são, respectivamente, iguais a 2 e 1. Além disso, como as abscissas são multiplicadas por n , logo $A_n = (n, 2)$ e $B_n = (2n, 1)$. Como $\overrightarrow{A_nB_n} = (n, -1)$, logo uma perpendicular a $\overrightarrow{A_nB_n}$ é o vetor $\vec{u} = (1, n)$. Consequentemente, a reta r_n pode ser representada por $r_n : 1x + ny + k = 0$.

Visto que $A_n \in r_n$, logo

$$\begin{aligned} 1 \cdot n + n \cdot 2 + k &= 0 \\ \Rightarrow n + 2n + k &= 0 \\ \Rightarrow k &= -3n. \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta é $r_n : x + ny - 3n = 0$ ou $r_n : x + ny = 3n$.

Gabarito: Letra A.

D.2 Distância do Ponto à Reta

Sejam $r : ax + by + c = 0$ uma reta e $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano, então a distância de P a r é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (\text{D.3})$$

Exemplo D.2.1. Qual a distância do ponto $P = (3, 4)$ à reta $2x - 3y + 7 = 0$?

Resolução: Pela Equação D.3, deduzimos

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|6 - 12 + 7|}{\sqrt{4 + 9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

D.3 Exercícios

Exercício D.3.1. Determine a equação da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (4, 5)$ utilizando a equação cartesiana da reta.

Exercício D.3.2. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $P = (3, -1)$ e tem coeficiente angular $m = 2$.

Exercício D.3.3. A equação da reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e é perpendicular à reta de equação $3x - 4y + 7 = 0$ é:

Exercício D.3.4. Determine a equação da reta mediatriz do segmento cujos extremos são $A = (1, 4)$ e $B = (5, 8)$.

Exercício D.3.5. Sabendo que a reta $r : 2x - 3y + 6 = 0$ e a reta $s : ax + by + 10 = 0$ são perpendiculares, determine a razão entre a e b .

Exercício D.3.6. Um ponto $P(x, y)$ pertence à reta de equação $5x + 2y - 7 = 0$. Se $x = 3$, qual é o valor de y ?

Exercício D.3.7. A reta r passa pelo ponto de coordenadas $(1, 2)$ e é paralela à reta de equação $y = -\frac{x}{2} + 3$. Determine a equação de r .

Exercício D.3.8. A reta s passa pelo ponto $P = (4, 3)$ e forma um ângulo de 45° com o eixo x . Determine sua equação.

Exercício D.3.9. Encontre o ponto de interseção entre as retas $3x + 2y = 6$ e $x - y = 1$.

Exercício D.3.10. Um triângulo tem vértices em $A = (2, 3)$, $B = (5, 7)$ e $C = (-1, 6)$. Mostre que um dos lados do triângulo é perpendicular a outro.

E Lugar Geométrico

Finalmente temos conteúdo o suficiente para começar a estudar o que realmente viemos aqui estudar. Lugares Geométricos! Uhul!

Começemos entendendo o que são essas belezuras, ok?

E.1 Definição

Seja $\mathbb{R}^2$ o Plano Cartesiano bidimensional e P uma propriedade arbitrária referente a um elemento genérico de $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos da forma

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ satisfazem a } P\}$$

são chamados de Lugares Geométricos.

Para determinar qual Conjunto é o Lugar Geométrico é encontrar um Conjunto A tal que

- Todos os Pontos de A satisfazem a propriedade P e
- Nenhum outro ponto de $\mathbb{R}^n$ satisfaz essa propriedade.

Em outras palavras: Escolhemos uma regra para os pontos e verificamos qual o desenho (conjunto de pontos) que satisfaz àquela regra. Os resultados encontrados podem ser retas (conforme já estudamos), curvas ou até mesmo conjuntos vazios.

Se todos os pontos de $\mathcal{L}$ satisfazem uma determinada equação, dizemos que este é o **Lugar Geométrico da Equação**. Similarmente, damos à equação o nome de **Equação do Lugar Geométrico**.

Em resumo, tentaremos resolver dois tipos de problemas:

1. Determinar o Lugar Geométrico de uma Equação e suas propriedades e
2. Determinar a Equação de um Lugar Geométrico a partir de suas propriedades.

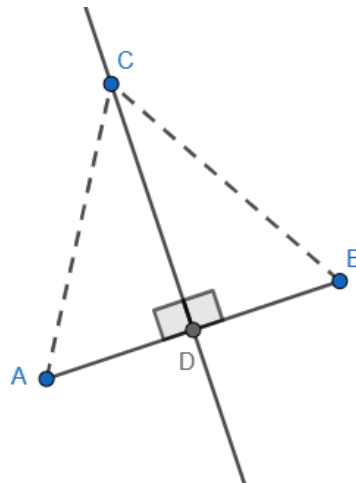
Vamos começar com os casos clássicos!

E.2 Casos Clássicos

Exemplo E.2.1. *Dados dois pontos A e B em $\mathbb{R}^2$ qual o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a esses dois pontos?*

A resposta rápida para essa pergunta é: A **mediatriz**¹ do segmento $\overline{AB}$.
Veja a Figura abaixo:

Figura E.1



Fonte: Autor

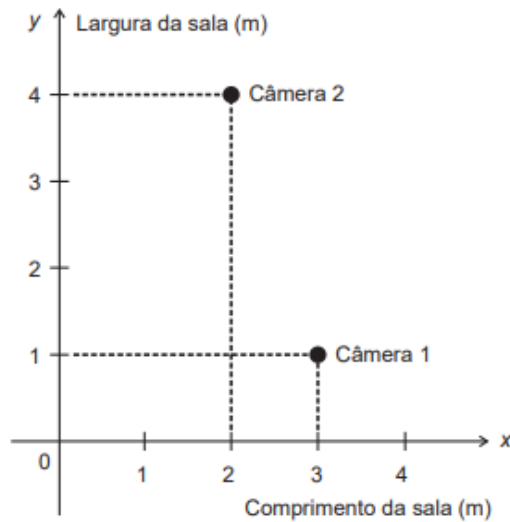
Todos os pontos da mediatriz são equidistantes pela congruência entre os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$. Nenhum outro ponto é equidistante, pois estaria mais próximo de A ou de B (o desenho dá uma boa intuição, para uma explicação mais detalhada, por favor olhar a minha dissertação :D).

Problema E.2.1. *(ENEM 2019 PPL) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:*

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.

¹reta perpendicular que corta o segmento ao meio

Figura E.2



Fonte: INEP

(ii) cinco relações entre as coordenadas $(x ; y)$ da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$$R1 : y = x$$

$$R2 : y = -3x + 5$$

$$R3 : y = -3x + 10$$

$$R4 : y = 1/3x + 5/3$$

$$R5 : y = 1/3x + 1/10$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera.

A relação escolhida pelo instalador foi a

A) R1.

B) R2.

C) R3.

D) R4.

E) R5.

Resolução: Sejam $C_1 = (3, 1)$ e $C_2 = (2, 4)$. Sabemos que $\overrightarrow{C_1C_2} = (-1, 3)$ é perpendicular à mediatriz. Sendo assim, a reta mediatriz pode ser representada por

$$r : -1x + 3y + c = 0$$

Como o ponto médio $M = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ pertence a r , logo

$$\begin{aligned}
& -1 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} + c = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \\
\Rightarrow & \frac{10}{2} + c = 0 \\
\Rightarrow & c = -5.
\end{aligned}$$

Sendo assim

$$r : -x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow r : 3y = x + 5.$$

Que pode ser reescrito da forma

$$r : y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Gabarito: Letra D.

Problema E.2.2. (*EsPCEX 2020*) Os pontos $A(3, -2)$ e $C(-1, 3)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$. A equação da reta que contém a diagonal BD é

[A] $5x + 4y - 7 = 0$.

[B] $8x - 10y - 3 = 0$.

[C] $8x + 10y - 13 = 0$.

[D] $4x - 5y + 3 = 0$.

[E] $4x + 5y - 7 = 0$.

Resolução: Sabemos que o vetor $\overrightarrow{AC} = (-4, 5)$ é perpendicular à Mediatriz. Portanto, a Mediatriz pode ser representada por:

$$r : -4x + 5y + c = 0.$$

Como a reta passa pelo ponto médio de A e C , qual seja $(1, 0.5)$, logo

$$\begin{aligned}
& -4 \cdot 1 + 5 \cdot 0.5 + c = 0 \\
\Rightarrow & -4 + 2.5 + c = 0 \\
\Rightarrow & c = 1.5.
\end{aligned}$$

Portanto, a reta que passa pela diagonal BD tem equação

$$r : -4x + 5y + 1.5 = 0.$$

Que, multiplicando por -2, pode ser reescrita como

$$r : 8x - 10y - 3 = 0.$$

Gabarito: Letra B.

Exemplo E.2.2. Qual o Lugar Geométrico dos Pontos equidistantes aos eixos ordenados em $\mathbb{R}^2$?

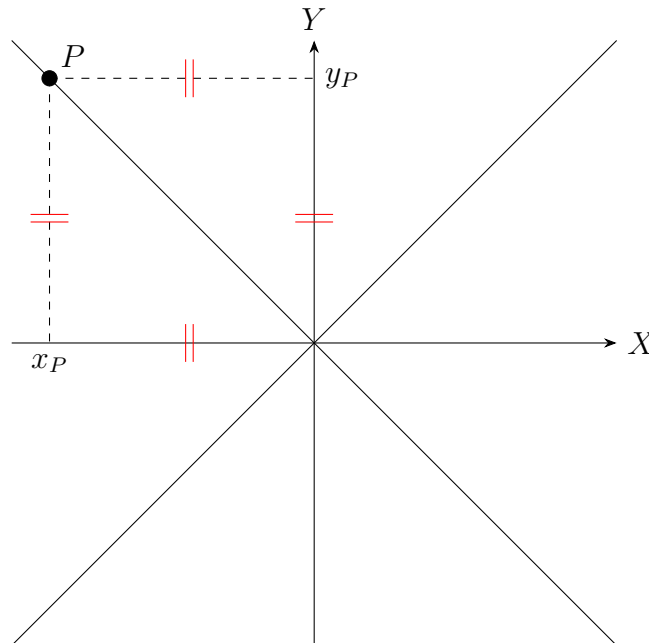
Queremos os pontos P tais que $d(P, OX) = d(P, OY)$. No entanto, já vimos que $d(P, OX) = |y|$ e $d(P, OY) = |x|$. Ou seja, queremos que $|y| = |x|$.

Então $y = x$, certo? **Calma, veloz!** Essa é uma igualdade de módulos.

$$y = x \text{ ou } y = -x.$$

Logo o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes aos eixos ordenados são as retas² $r_1 : y = x$ e $r_2 : y = -x$.

Figura E.3: Reta Identidade e sua Perpendicular que passa pela Origem



Fonte: Autor

Exemplo E.2.3. Qual o Lugar Geométrico dos Pontos equidistantes a duas retas concorrentes?

A resposta curta é: são as bissetrizes de r e s .

A resposta longa é: Sendo $r : ax + by + c = 0$ e $s : mx + ny + k = 0$, o lugar geométrico é representado pelas equações encontradas ao resolvermos a igualdade:

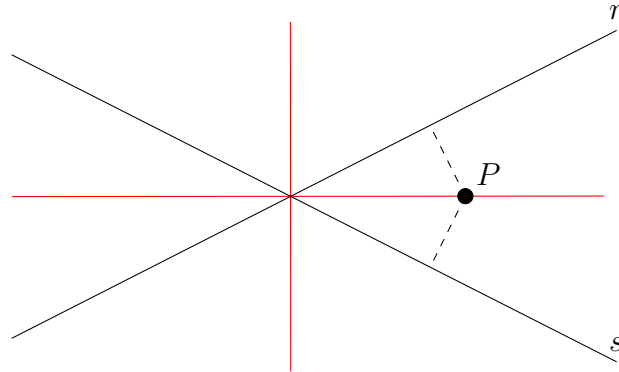
$$d(P, r) = d(P, s)$$

$$\frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|mx_P + ny_P + k|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

² r_1 é conhecida carinhosamente como **Reta Identidade**

Note que, como temos uma igualdade de módulos, teremos duas equações resultantes³.

Figura E.4



Fonte: Autor

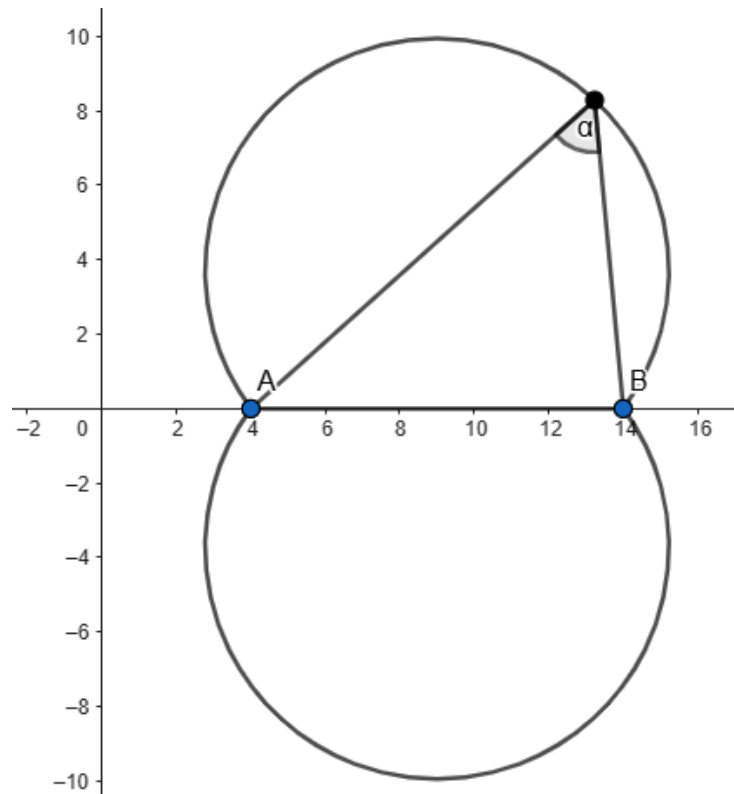
Exemplo E.2.4. *Qual o Lugar Geométrico dos Pontos que enxergam um segmento com um ângulo α ?*

A resposta rápida para essa questão é: **O arco capaz do segmento.**

Sendo o arco capaz dois arcos de circunferência simétricos ao segmento, conforme a imagem:

³o que é conveniente, visto que são **as** bissetrizes e não **a** bissetriz.

Figura E.5



Fonte: Autor

E.3 Exercícios

Exercício E.3.1. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A = (1, 4)$ e $B = (7, 2)$.

Exercício E.3.2. Encontre a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (6, 3)$.

Exercício E.3.3. Encontre a equação da mediatriz dos pontos $A = (-1, 4)$ e $B = (5, -2)$ e verifique se o ponto $P = (2, 1)$ pertence a ela.

Exercício E.3.4. Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $r : 2x - 3y + 4 = 0$ e $s : x + y - 5 = 0$.

Exercício E.3.5. Um ponto $P = (x, y)$ está equidistante das retas $x + 2y - 3 = 0$ e $3x - 4y + 1 = 0$. Determine a equação do lugar geométrico que ele descreve.

Exercício E.3.6. O lugar geométrico dos pontos cuja soma das coordenadas é igual ao triplo da sua diferença pode ser expresso por uma equação. Determine essa equação.

Exercício E.3.7. Um ponto $P = (x, y)$ se desloca de tal forma que sua distância ao eixo y é sempre o dobro da sua distância ao eixo x . Determine a equação do lugar geométrico descrito por P .

F Cônicas

F.1 Cônicas

Já se perguntou o porquê de algumas curvas serem chamadas de cônicas? Não consegue mais dormir à noite sem matar essa curiosidade? Pois seus problemas acabaram!

Figura F.1: Tadaaaaam! Essas são as cônicas

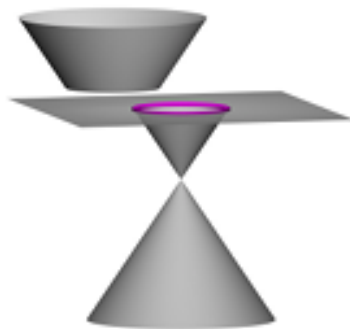


Fig. 1: Círculo.



Fig. 2: Elipse.



Fig. 3: Parábola.



Fig. 4: Hipérbole.

Fonte: FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge.

Como você pode visualizar, essas curvas são o resultado do corte de - rufem os tambores - cones. Existem outros cortes possíveis, mas estes são apenas os casos degenerados¹ de cada uma das cônicas que conhecemos e amamos.

¹Cônicas degeneradas são cortes dos cones que passam pelo vértice. Nesse caso teremos Pontos, Retas ou até Pares de Retas. Estudaremos mais a fundo esses casos nos próximos capítulos

Vamos estudar, portanto, cada uma das quatro² cônicas nesse capítulo.

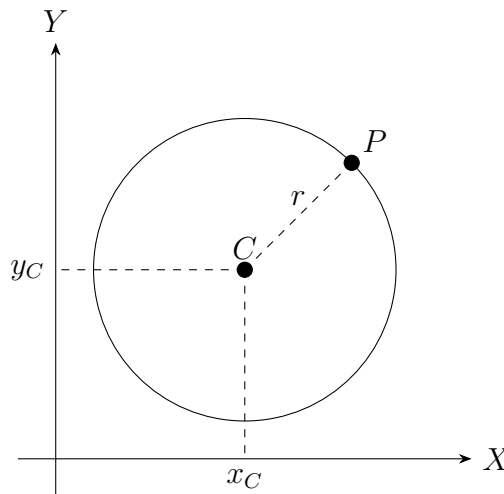
PS: A maioria das questões de vestibular e concursos sobre Geometria Analítica depende deste capítulo. Para checar se isso é verdade, por favor, sinta-se à vontade para olhar o Capítulo H.

F.1.1 Circunferência

Dado um ponto C e um número real positivo r , uma Circunferência $\mathcal{C}$ de Centro C e raio r é o Lugar Geométrico dos Pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) = r.$$

Figura F.2



Fonte: Autor

Sendo $C = (x_C, y_C)$ e $P = (x, y)$, então

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad (\text{F.1})$$

é a **Equação Reduzida da Circunferência** de Centro C e raio r .

Exemplo F.1.1. *Encontre o Conjunto dos pontos cuja distância à Origem dos Eixos Cartesianos é de 5 unidades.*

Resolução: Sabendo que $O = (0, 0)$ é o nosso centro e 5 é o nosso raio, sabemos que $P \in \mathcal{C}$ implica que

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

²A Circunferência é um caso particular da Elipse, mas consideraremos ela como sua própria cônica

Sendo assim, o Conjunto de pontos que desejamos encontrar é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 25\}.$$

Exemplo F.1.2. Qual o Conjunto de pontos que distam 3 unidades do ponto $(4, 5)$?

Resolução: Sendo $C = (4, 5)$ o nosso centro e 3 o nosso raio, sabemos que $P \in \mathcal{C}$ implica que

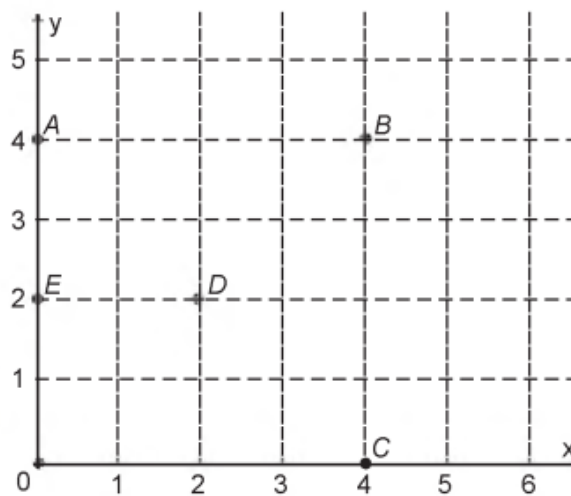
$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9.$$

Segue que o Conjunto de pontos que desejamos encontrar é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9\}.$$

Problema F.1.1. (ENEM 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma Circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da Circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: $A(0 ; 4)$, $B(4 ; 4)$, $C(4 ; 0)$, $D(2 ; 2)$ e $E(0 ; 2)$.

Figura F.3



Fonte: INEP

Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

A) $x = 0$

$$B) y = 0$$

$$C) x^2 + y^2 = 16$$

$$D) x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$E) (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

Resolução: Como o Lugar Geométrico descrito é uma reta ou uma Circunferência que passam pelos pontos A e pela Origem dos eixos cartesianos, analisemos cada caso separadamente:

- Caso o $\mathcal{L}$ seja uma reta, logo ela será a reta $r : x = 0$, tendo em vista que esta é a reta que contém os pontos A e O . Essa reta, segundo as regras do jogo, vale 2 pontos por atingir os pontos A e E .
- Caso o $\mathcal{L}$ seja uma Circunferência, como A e O , pertencem ao $\mathcal{L}$, logo o Centro C da Circunferência é um ponto equidistante a A e O e, portanto, pertence à mediatriz do segmento $\overline{AO}$.

Como $\overrightarrow{AO}$ é um vetor vertical, logo a mediatriz de $\overline{AO}$ é a reta horizontal que passa pelo ponto médio $M = (0, 2)$ que coincide com o ponto E . Tal reta tem equação $r : y = 2$. Note que é impossível o ponto E pertencer à Circunferência, visto que ele é colinear a dois pontos que já pertencem à Circunferência.

É possível que o ponto B pertença à Circunferência, desde que o centro seja no ponto D . Nesse caso, o ponto C também fará parte da Circunferência. Essa Circunferência seria dada pela equação:

$$\begin{aligned} (x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 &= d^2(B, D) \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= (4 - 2)^2 + (4 - 2)^2 \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 8. \end{aligned}$$

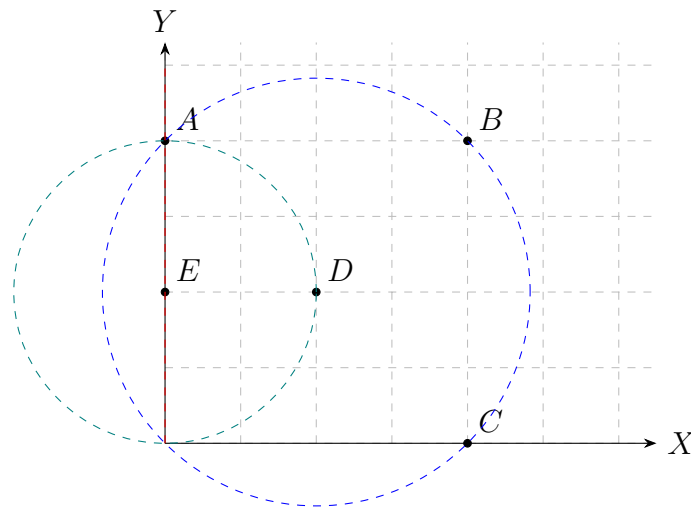
Nesse caso, pelas regras do jogo, a equação vale 6 pontos, visto que passa pelos pontos A , B e C . É possível ainda que o ponto D pertença à Circunferência, desde que o centro seja no ponto E . Essa Circunferência seria dada pela equação:

$$\begin{aligned} (x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 &= d^2(D, E) \\ \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 &= 2^2 \\ \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 &= 4. \end{aligned}$$

No entanto, essa equação só valeria 4 pontos, visto que passa somente pelos pontos A e D .

Sendo assim, a equação que vale mais pontos é a representada na letra E .

Figura F.4



Fonte: Autor

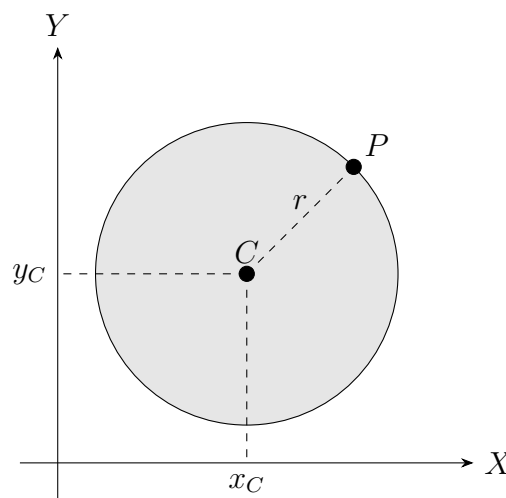
Gabarito: Letra E.

F.1.2 Círculo

Dado um ponto C e um número real positivo r , o Círculo (ou Disco) de Centro C e raio r é o Lugar Geométrico de Pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) \leq r.$$

Figura F.5



Fonte: Autor

Sendo $C = (x_C, y_C)$ e $P = (x, y)$, então $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \leq r^2$ é a inequação que descreve os pontos de um Círculo.

Completando Quadrados

É muito comum, em questões envolvendo as equações das cônicas, que as equações não se encontrem na sua forma mais reduzida. Nesse caso é importante que saibamos como transformar tais equações nas suas versões reduzidas.

É comum, por exemplo, que a equação de uma Circunferência apareça da forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $D, E, F \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, o primeiro passo que tomaremos será agrupar os termos com as mesmas variáveis. Ou seja, transformaremos a equação no formato:

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0.$$

Em seguida, lembraremos que, no produto notável $(x + a)^2$, temos como resultado $x^2 + 2ax + a^2$. Sendo assim, se considerarmos $D = 2a$, para termos um quadrado perfeito, basta adicionarmos $a^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$. Podemos fazer o mesmo com E . Portanto

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F.$$

Na possibilidade em que $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} = 0$ teremos uma Circunferência

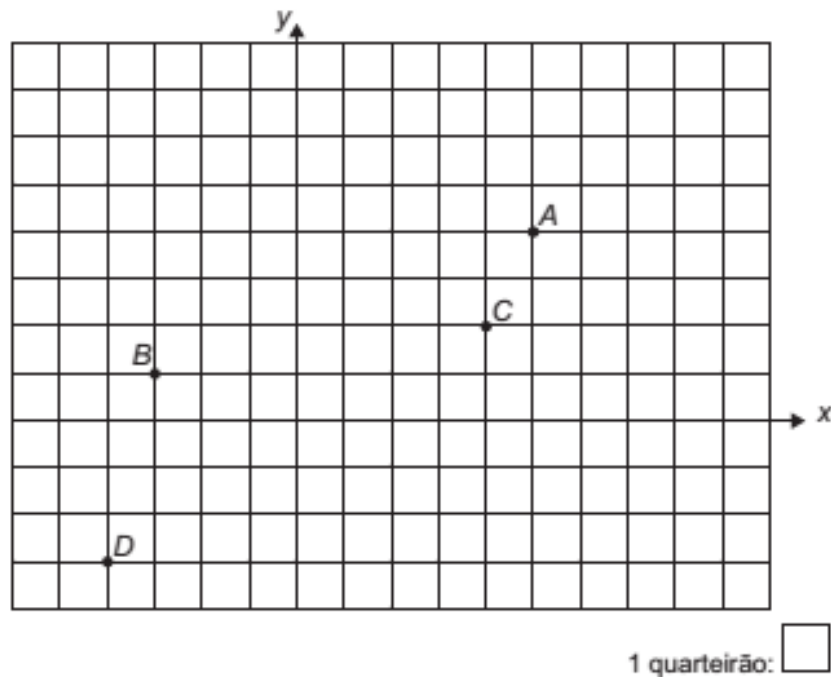
Degenerada, ou seja, um Ponto. Já na possibilidade em que $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} < 0$ teremos o Conjunto Vazio.

Dessa forma, se $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F} > 0$ obtemos a equação de uma Circunferência na forma reduzida com centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$.

Problema F.1.2. (ENEM 2015 PPL) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desprezadas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A , B , C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.

Figura F.6



Fonte: INEP

Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

- A) A e C.
- B) B e C.
- C) B e D.
- D) A, B e C.
- E) B, C e D.

Resolução: Dada a inequação

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0.$$

Podemos completar quadrados para obter:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 31 &\leq +1 + 4 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &\leq 36 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &\leq 6^2. \end{aligned}$$

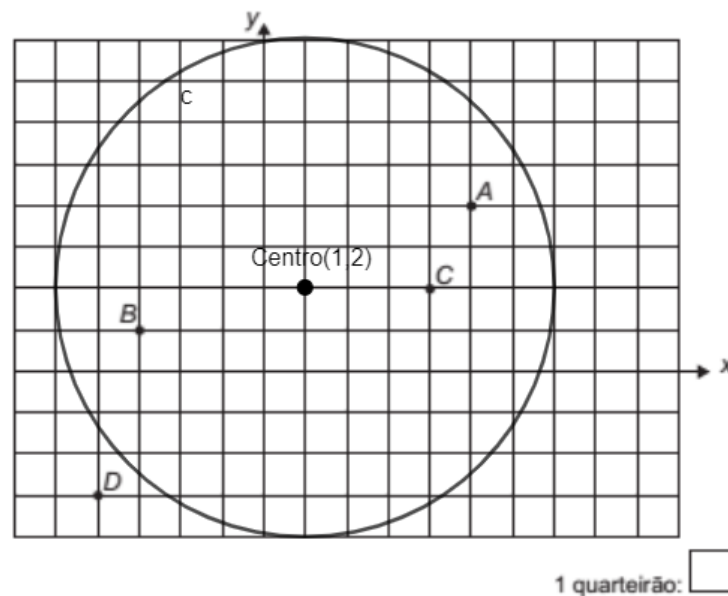
Desta forma, o Lugar Geométrico descrito por essa inequação é o Círculo de Centro no ponto $(1, 2)$ e raio 6.

Para saber se um ponto está nesse Círculo, basta substituir suas coordenadas na inequação e verificar se ela é verdadeira. Observando a figura, verificamos que os pontos dados são: $A = (5, 4)$, $B = (-3, 1)$, $C = (4, 2)$ e $D = (-4, -3)$. Testemos cada um dos pontos utilizando a inequação:

- $(5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \leq 36 \implies A \in \mathcal{L}$
- $(-3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \leq 36 \implies B \in \mathcal{L}$
- $(4 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 3^2 + 0^2 = 9 \leq 36 \implies C \in \mathcal{L}$
- $(-4 - 1)^2 + (-3 - 2)^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 50 > 36 \implies D \notin \mathcal{L}$.

Geometricamente, temos:

Figura F.7



Fonte: Autor

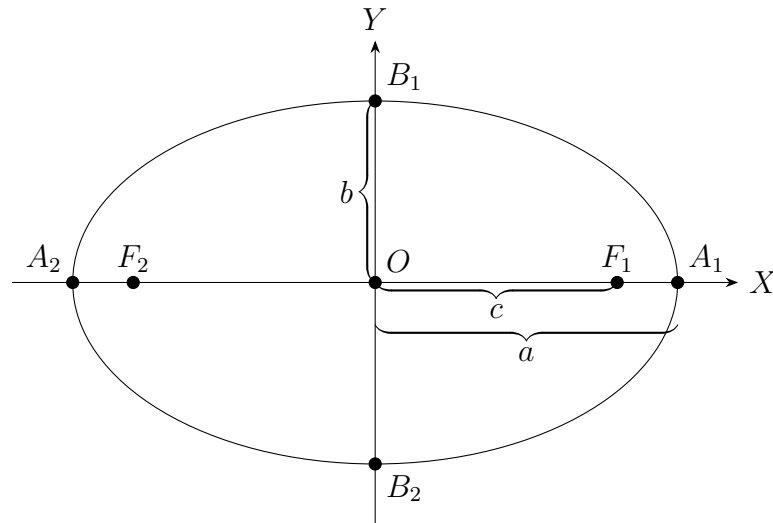
Assim, os pontos A, B e C pertencem ao Lugar Geométrico, mas o ponto D não pertence.

Gabarito: Letra D.

F.1.3 Elipse

Sejam pontos F_1 e F_2 pontos do plano, denominados *Focos*, e a, c reais positivos, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$ e $a > c$. A **Elipse** $\mathcal{E}$ de Focos F_1 e F_2 é o Lugar Geométrico definido pelos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Figura F.8: Elipse de Focos F_1 e F_2 e Centro na Origem.

Fonte: Autor

O eixo que passa pelos pontos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ é denominado **Eixo Focal**, sendo a Elipse simétrica em relação a esse eixo. A interseção do Eixo Focal com a Elipse são os pontos $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, denominados Vértices do Eixo Focal.

A mediatriz do segmento F_1F_2 é denominada **Eixo Transversal**, sendo a Elipse simétrica também em relação a esse eixo. A interseção do Eixo Transversal com a Elipse são os pontos $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$, denominados Vértices do Eixo Transversal.

O ponto de interseção entre o Eixo Focal e o Eixo Transversal é o Centro da Elipse. Tomamos o Sistema OXY com a Origem no Centro da Elipse e Eixos OX e OY coincidindo com o Eixo Focal e o Eixo Transversal, respectivamente.

Se a Elipse for mais achatada para o eixo OX temos a equação:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{F.2})$$

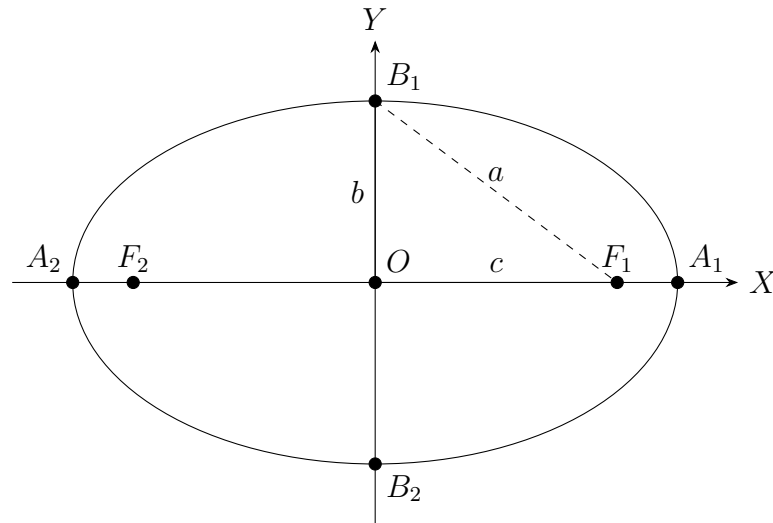
E caso a Elipse seja mais achatada para o eixo OY temos a equação³:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (\text{F.3})$$

Sendo B_1 um ponto da mediatriz, logo $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2)$. Visto que a soma desses valores, pela definição de Elipse, é igual a $2a$, logo $d(B_1, F_1) = a$ e podemos formar o fofíssimo triângulo a seguir:

³Qual a diferença? Bem, o coeficiente a é sempre o maior dos três na Elipse. Note que a variável que estiver dividida pelo maior coeficiente terá o maior eixo.

Figura F.9



Fonte: Autor

Pelo Teorema de Pitágoras, temos a relação⁴ entre os coeficientes:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{F.4})$$

Problema F.1.3. (EFFOM 2024) Considere a equação abaixo:

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Podemos afirmar que essa equação expressa o Lugar Geométrico de uma

- (A) Elipse, com focos em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
- (B) Hipérbole, com vértices em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
- (C) Elipse, com focos em $(0, -3)$ e $(0, 3)$.
- (D) Hipérbole, com vértices em $(0, -3)$ e $(0, 3)$.
- (E) Circunferência de raio 1.

Resolução: Pela Equação F.3 podemos ver que o Lugar Geométrico é uma Elipse cujo eixo maior está no eixo OY . Sendo assim, seus focos serão da forma $(0, y)$.

Pela equação F.4 sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$. Como $b^2 = 27$ e $a^2 = 36$, logo $c^2 = 9$ e, portanto, $c = 3$.

Sendo o Centro o ponto $(0, 0)$, logo os Focos da Elipse são os Pontos $(0, -3)$ e $(0, 3)$.

Gabarito: Letra C.

Problema F.1.4. (EsFCEx 2021) A equação $16x^2 + 25y^2 + 96x - 200y = 1056$ representa uma Elipse cujo eixo menor tem extremidades nos pontos de coordenadas

⁴Guarde essa fórmula no coração ♡, ela resolve diversas questões.

- (A) $(3, -4)$ e $(3, 12)$.
 (B) $(-3, 4)$ e $(-3, 12)$.
 (C) $(-3, -4)$ e $(-3, 12)$.
 (D) $(3, 4)$ e $(3, 12)$.
 (E) $(-3, -12)$ e $(-3, 4)$.

Resolução: Começamos reorganizando a equação e, em seguida, completando os quadrados:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 96x + 25y^2 - 200y &= 1056 \\ \Rightarrow 16x^2 + 96x + 144 + 25y^2 - 200y + 400 &= 1056 + 144 + 400 \\ \Rightarrow (4x + 12)^2 + (5y - 20)^2 &= 1600. \end{aligned}$$

Retirando dos quadrados os fatores comuns, obtemos:

$$4^2(x + 3)^2 + 5^2(y - 4)^2 = 1600 \Rightarrow 16(x + 3)^2 + 25(y - 4)^2 = 1600.$$

Dividindo ambas as parcelas por 1600 temos

$$\frac{(x + 3)^2}{100} + \frac{(y - 4)^2}{64} = 1.$$

Sendo assim, $a = 10$ e $b = 8$. Portanto o seu eixo menor é o eixo vertical, variando 8 unidades para cima e para baixo a partir de seu centro.

Como a Elipse está centrada no ponto $(-3, 4)$, logo o seu eixo menor tem extremidades nos pontos $(-3, -4)$ e $(-3, 12)$.

Gabarito: Letra C.

Excentricidade:

Em algumas questões é dada a medida da Excentricidade⁵ da Elipse que é dada pela equação

$$e = \frac{c}{a}. \quad (\text{F.5})$$

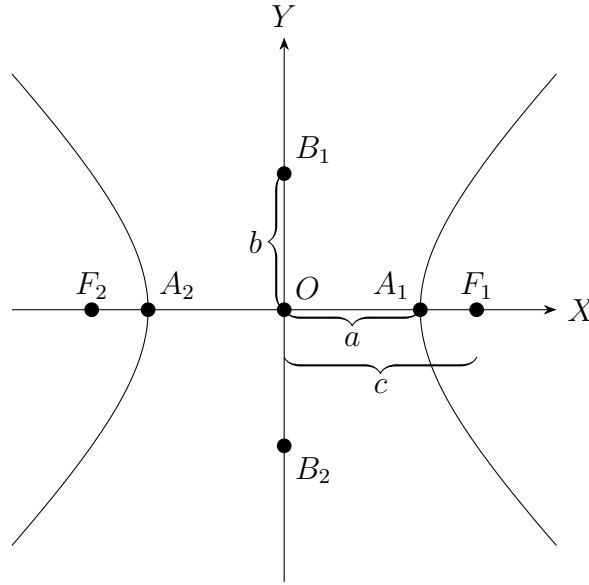
F.1.4 Hipérbole

Dados dois pontos F_1 e F_2 , denominados *Focos*, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < c$, a **Hipérbole** $\mathcal{H}$ de Focos F_1 e F_2 é o Lugar Geométrico definido pelos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

⁵Em resumo, o quão achatada está a Elipse.

Figura F.10: Hipérbole



Fonte: Autor

O eixo que passa pelos pontos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ é denominado **Eixo Focal**, sendo a Hipérbole simétrica em relação a esse eixo. A interseção do Eixo Focal com a Hipérbole são os pontos $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, denominados Vértices da Hipérbole.

A mediatriz do segmento F_1F_2 é denominada **Eixo não Focal**⁶ da Hipérbole, sendo a Hipérbole simétrica também em relação a esse eixo. Os pontos $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$ do Eixo não Focal são os Vértices Imaginários da Hipérbole.

É importante saber que:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (\text{F.6})$$

O ponto de interseção entre o Eixo Focal e o Eixo não focal é o Centro da Hipérbole.

A equação de uma Hipérbole cujo eixo focal é o eixo OX é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{F.7})$$

Enquanto que a equação de uma Hipérbole cujo eixo focal é o eixo OY é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (\text{F.8})$$

Excentricidade:

De forma semelhante à Elipse, podemos encontrar a excentricidade⁷ da Hipérbole, a qual será dada pela razão:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (\text{F.9})$$

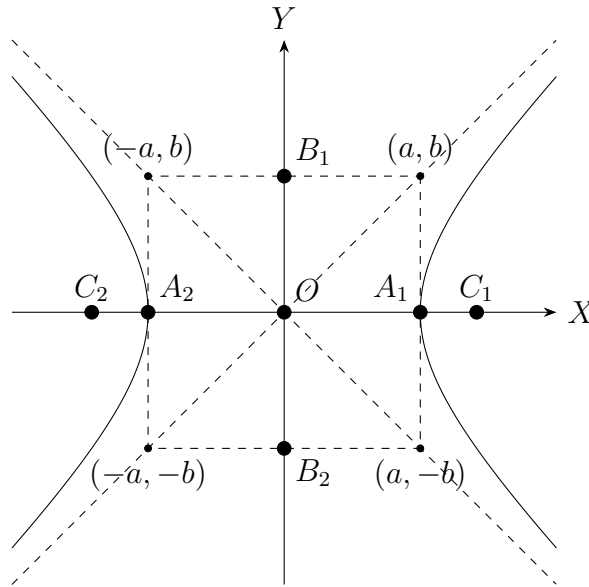
⁶Também conhecido como Eixo Conjugado.

⁷Em resumo, o quão aberta estão os ramos da Hipérbole.

Assíntotas:

É possível traçar duas retas, denominadas assíntotas, que indicam para qual direção os ramos das Hipérboles estão se aproximando.

Figura F.11: Assíntotas



Fonte: Autor

Note que essas assíntotas são as retas: $r : y = \frac{b}{a}x$ e $s : y = -\frac{b}{a}x$. Se você é mais fã da forma cartesiana das retas: $r : ay - bx = 0$ e $s : ay + bx = 0$.

Problema F.1.5. (EsFCEX 2023) Uma Hipérbole é dada pela equação: $-9x^2 + 4y^2 + 72x + 8y - 284 = 0$. A excentricidade desta Hipérbole é igual a

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- (C) $\frac{\sqrt{13}}{3}$
- (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (E) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Resolução: Começamos reorganizando a equação e completando os quadrados:

$$\begin{aligned}
 & -9x^2 + 72x + 4y^2 + 8y = 284 \\
 \Rightarrow & -9x^2 + 72x - 144 + 4y^2 + 8y + 4 = 284 - 144 + 4 \\
 \Rightarrow & -(3x - 12)^2 + (2y + 2)^2 = 144.
 \end{aligned}$$

Retirando dos quadrados os fatores comuns, obtemos:

$$-3^2(x-4)^2 + 2^2(x+1)^2 = 144 \Rightarrow -9(x-4)^2 + 4(y+1)^2 = 144.$$

Dividindo ambos os termos por 144, temos:

$$-\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1.$$

Sendo assim, essa é uma Hipérbole cuja reta focal é paralela ao eixo OY e tem coeficientes $a = 6$ e $b = 4$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, logo

$$4^2 = c^2 - 6^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Pela equação F.9 sabemos que a excentricidade da Hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

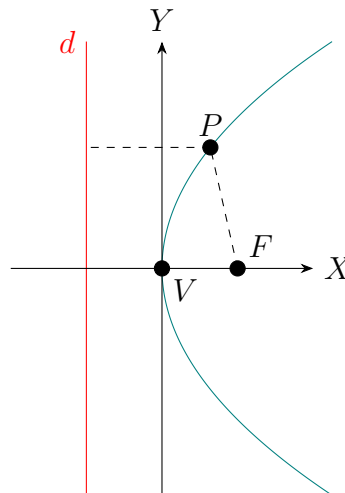
Gabarito: Letra C.

F.1.5 Parábola

Dados uma reta d , denominada *diretriz*, e um ponto $F \notin d$, denominado *Foco*, uma Parábola é o Lugar Geométrico definido pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F) = d(P, d).$$

Figura F.12: Parábola



Fonte: Autor

A **reta focal** é a perpendicular a d que passa por F . O ponto de interseção da

Parábola com a focal é denominado **Vértice** da Parábola. O número $2p = d(F, d)$ é o **parâmetro** da parábola $\mathcal{P}$. Note que $d(V, F) = d(V, d) = p$.

Se $d : x = -p$ e $F = (p, 0)$, logo a equação da Parábola é igual a:

$$y^2 = 4px. \quad (\text{F.10})$$

Se $d : x = p$ e $F = (-p, 0)$, logo a equação da Parábola é igual a:

$$y^2 = -4px. \quad (\text{F.11})$$

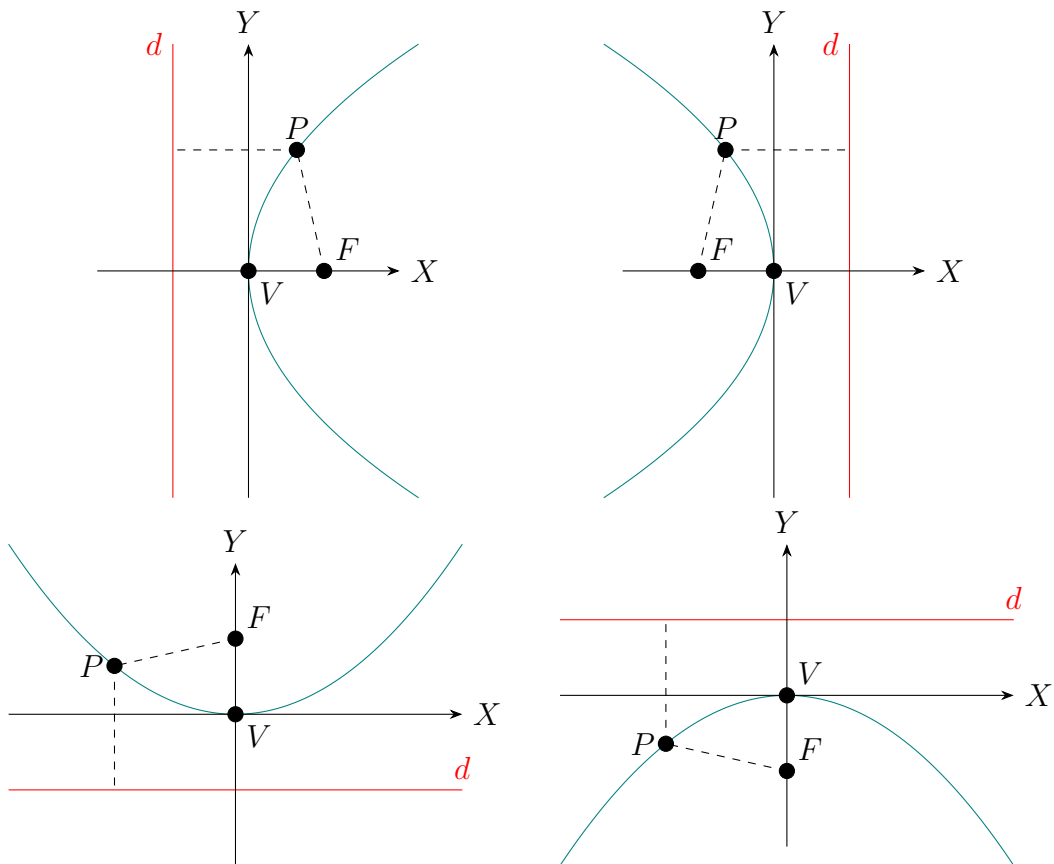
Se $d : y = -p$ e $F = (0, p)$, logo a equação da Parábola é igual a:

$$x^2 = 4py. \quad (\text{F.12})$$

Se $d : y = p$ e $F = (0, -p)$, logo a equação da Parábola é igual a:

$$x^2 = -4py. \quad (\text{F.13})$$

Figura F.13



Fonte: Autor

F.2 Exercícios

Exercício F.2.1. *Determine a equação da Circunferência com centro em $C = (3, 4)$ e raio $r = 5$.*

Exercício F.2.2. *Determine o Centro e o raio da Circunferência dada pela equação $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$?*

Exercício F.2.3. *Qual a equação da Circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (3, 5)$?*

Exercício F.2.4. *A equação $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ representa uma Circunferência. Determine o valor de k para que o raio seja igual a 3.*

Exercício F.2.5. *Um ponto $P = (x, y)$ se move de tal forma que sua distância ao ponto $C = (2, -1)$ é o dobro de sua distância ao ponto $D = (4, 3)$. Determine a equação do Lugar Geométrico descrito por P .*

Exercício F.2.6. *Determine a equação da Circunferência que tem diâmetro determinado pelos pontos $A = (-2, 5)$ e $B = (4, 1)$.*

Exercício F.2.7. *Determine a equação da Circunferência tangente ao eixo OX no ponto $(2, 0)$ e cujo centro pertence à reta $r : -x + y + 3 = 0$.*

Exercício F.2.8. *A Circunferência $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ intercepta a reta $r : x - 2y + 3 = 0$ em dois pontos. Determine a distância entre esses pontos.*

Exercício F.2.9. *Um triângulo tem vértices $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$ e $C = (7, 2)$. Determine a equação da Circunferência circunscrita ao triângulo.*

Exercício F.2.10. *Determine a equação da Elipse com centro na origem, eixo maior sobre o eixo OX , semi-eixo maior de 6 unidades e semi-eixo menor de 4 unidades.*

Exercício F.2.11. *A equação $\mathcal{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ representa uma Elipse. Determine o comprimento do eixo maior, do eixo menor e a posição dos focos.*

Exercício F.2.12. *Qual a equação da Elipse com focos em $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$, sabendo que o comprimento do eixo maior é 10?*

Exercício F.2.13. *A equação de uma Elipse é dada por $\mathcal{E} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$. Determine a excentricidade da Elipse.*

Exercício F.2.14. *Uma Elipse tem centro em $(1, -2)$, foco em $(4, -2)$ e passa pelo ponto $(5, -2)$. Determine sua equação.*

Exercício F.2.15. *Um ponto $P = (x, y)$ se move de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0, 3)$ é constante e igual a 10. Determine a equação do Lugar Geométrico de P .*

Exercício F.2.16. Uma Elipse tem seu eixo maior ao longo do eixo OY e excentricidade $e = 0.6$. Se o semi-eixo maior mede 10 unidades, determina sua equação.

Exercício F.2.17. A interseção entre a Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ e a reta $r : y = \frac{3}{4}x$ são dois pontos. Calcule a distância entre eles.

Observações: Em questões de Vestibular sobre Hipérboles, *Eixo Maior* refere-se a $2a$, *Eixo Menor* refere-se a $2b$, *Semi-Eixo Maior* refere-se a a e *Semi-Eixo Menor* refere-se a b .

Exercício F.2.18. Determine a equação da Hipérbole com centro na origem, focos sobre o eixo OX, semi-eixo real igual a 5 e semi-eixo conjugado igual a 3.

Exercício F.2.19. A equação $\mathcal{H} : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ representa uma Hipérbole. Determine os valores dos semi-eixos, a excentricidade e as coordenadas dos focos.

Exercício F.2.20. Determine a equação da Hipérbole que tem focos em $F_1 = (-6, 0)$ e $F_2 = (6, 0)$ e cuja excentricidade é $e = \frac{5}{4}$.

Exercício F.2.21. Uma Hipérbole tem centro em $(2, 1)$, vértices em $(6, 1)$ e $(-2, 1)$ e passa pelo ponto $(5, 3)$. Determine sua equação.

Exercício F.2.22. Um ponto $P = (x, y)$ se move de tal forma que o valor absoluto da diferença de suas distâncias aos pontos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ é constante e igual a 6. Determine a equação do Lugar Geométrico descrito por P .

Exercício F.2.23. Determine as equações das assíntotas da Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ e verifique se o ponto $(7, 2)$ está dentro dos ramos da Hipérbole.

Exercício F.2.24. A interseção entre a Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e a reta $r : y = \frac{3}{4}x$ são dois pontos. Calcule a distância entre eles.

Exercício F.2.25. Determine a equação da Parábola com vértice na origem e foco em $(0, 3)$.

Exercício F.2.26. A equação $\mathcal{P} : y = 2x^2 - 4x + 1$ representa uma Parábola. Encontre o vértice dessa Parábola.

Exercício F.2.27. Determine a equação da Parábola que possui foco em $(2, 3)$ e diretriz dada por $d : y = 1$.

Exercício F.2.28. A equação da Parábola centrada na origem é dada por $\mathcal{P} : x^2 = 8y$. Determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz.

Exercício F.2.29. Uma Parábola tem vértice em $(1, -2)$, eixo de simetria paralelo ao eixo OY, e passa pelo ponto $(3, 1)$. Determine a sua equação.

Exercício F.2.30. Um ponto $P = (x, y)$ se move de tal forma que sua distância ao ponto $F = (0, 2)$ é sempre igual à sua distância à reta $r : y = -2$. Determine a equação do Lugar Geométrico descrito por P .

Exercício F.2.31. Encontre a equação da Parábola cuja diretriz é $d : x = -4$ e cujo foco está em $(2, 0)$.

Exercício F.2.32. A interseção entre a Parábola $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 3$ e a reta $r : y = x + 1$ são dois pontos. Calcule a distância entre eles.

G Mudança de Eixos

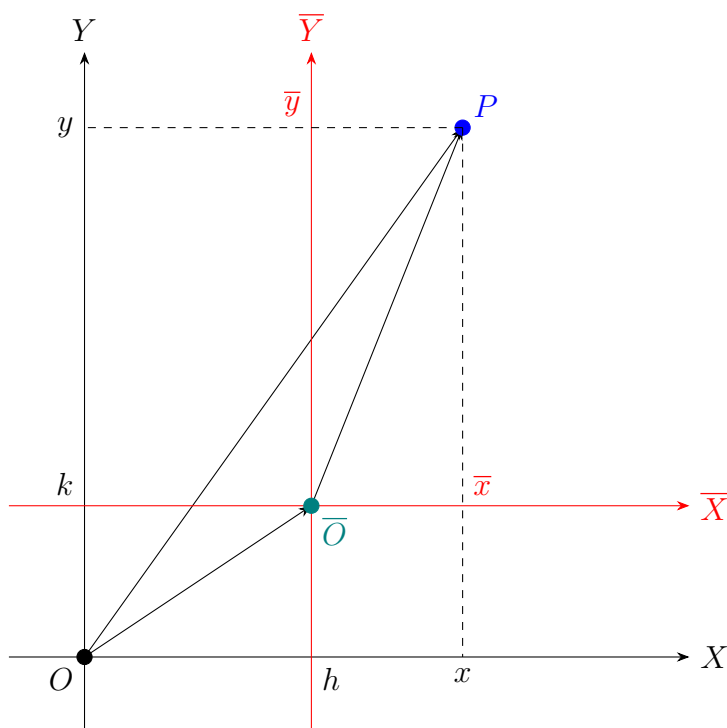
G.1 Transformações no Plano Cartesiano

G.1.1 Translação dos Eixos

A translação dos eixos cartesianos é uma transformação que desloca o sistema de coordenadas sem alterar as distâncias e os ângulos entre os pontos. Essa transformação é frequentemente utilizada para simplificar equações de curvas e retas, deslocando sua representação para um sistema de coordenadas mais conveniente.

Sejam OXY um sistema de eixos com Origem em O , $\bar{O}$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido desses eixos, respectivamente. Designamos por $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

Figura G.1



Fonte: Autor

Pela definição das coordenadas de um vetor, sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = (x, y), \quad \overrightarrow{OO} = (h, k) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP} = (\bar{x}, \bar{y}).$$

E, pela adição de vetores, temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP} &\Rightarrow (x, y) = (h, k) + (\bar{x}, \bar{y}) \\ &\Rightarrow (x, y) = (\bar{x} + h, \bar{y} + k). \end{aligned}$$

Assim, a relação entre as coordenadas nos dois sistemas é dada por:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + h \\ y = \bar{y} + k \end{cases}, \quad (\text{G.1})$$

Ou ainda,

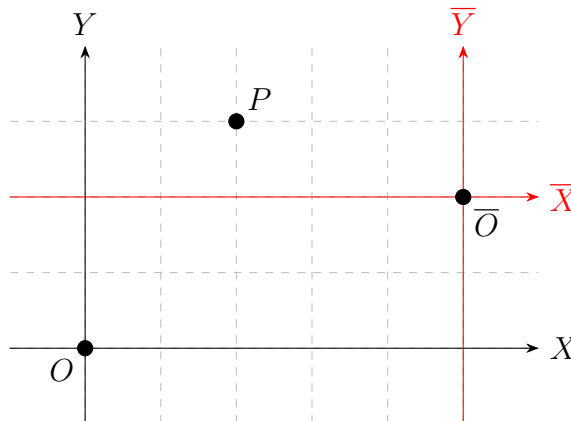
$$\begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}, \quad (\text{G.2})$$

onde (h, k) são as coordenadas da nova origem no sistema original e $(\bar{x}, \bar{y})$ são as coordenadas de P no novo sistema de referência.

Exemplo G.1.1. *Seja $A = (2, 3)$ um ponto do sistema cartesiano OXY . Caso a origem seja transladada para o ponto $(5, 2)$, qual será a coordenada do ponto A no novo sistema de coordenadas?*

Resolução: Pela relação G.2 temos que $\bar{x} = 2 - 5 = -3$ e $\bar{y} = 3 - 2 = 1$. Portanto, o ponto $A = (2, 3)$ no novo sistema de coordenadas é o ponto $\bar{A} = (-3, 1)$.

Figura G.2



Fonte: Autor

Pela adição de vetores, sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP}$$

Além disso, é verdade que $\overrightarrow{OP} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OO} = (5, 2)$ e $\overrightarrow{OP} = (\bar{x}, \bar{y})$. Segue que

$$\begin{aligned}(2, 3) &= (5, 2) + (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (2, 3) = (5 + \bar{x}, 2 + \bar{y}) \\ &\Rightarrow 2 = 5 + \bar{x} \quad \text{e} \quad 3 = 2 + \bar{y} \\ &\Rightarrow \bar{x} = -3 \quad \text{e} \quad \bar{y} = 1.\end{aligned}$$

Portanto, o ponto $P = (2, 3)$ no novo sistema de coordenadas é o ponto $\bar{P} = (-3, 1)$.

Exemplo G.1.2. *Seja $r : 2x + 3y - 5 = 0$ a equação de uma reta no sistema cartesiano OXY . Seja $\bar{O} = (3, 2)$ a Origem do sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$. Determine a equação dessa reta no novo sistema de coordenadas.*

Resolução: Seja $P = (x, y)$ um ponto de r e $\bar{x}, \bar{y}$ as coordenadas desse ponto no novo sistema de coordenadas. Pela relação G.1 temos

$$x = \bar{x} + 3 \quad \text{e} \quad y = \bar{y} + 2.$$

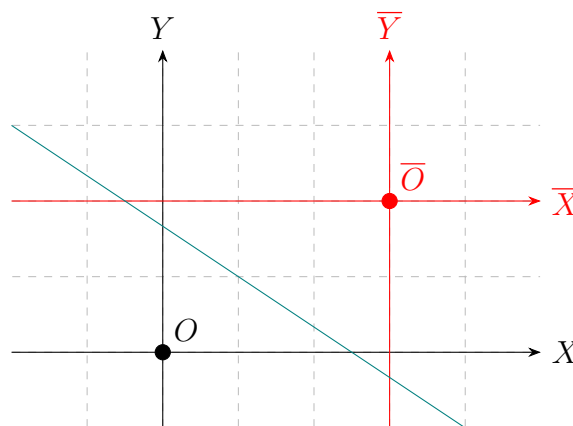
Substituindo os valores de x e y na equação da reta, obtemos

$$\begin{aligned}2(\bar{x} + 3) + 3(\bar{y} + 2) - 5 &= 0 \\ \Rightarrow 2\bar{x} + 6 + 3\bar{y} + 6 - 5 &= 0 \\ \Rightarrow 2\bar{x} + 3\bar{y} + 7 &= 0.\end{aligned}$$

Sendo assim, a equação da reta r no novo sistema de coordenadas é

$$\bar{r} : 2\bar{x} + 3\bar{y} + 7 = 0.$$

Figura G.3



Fonte: Autor

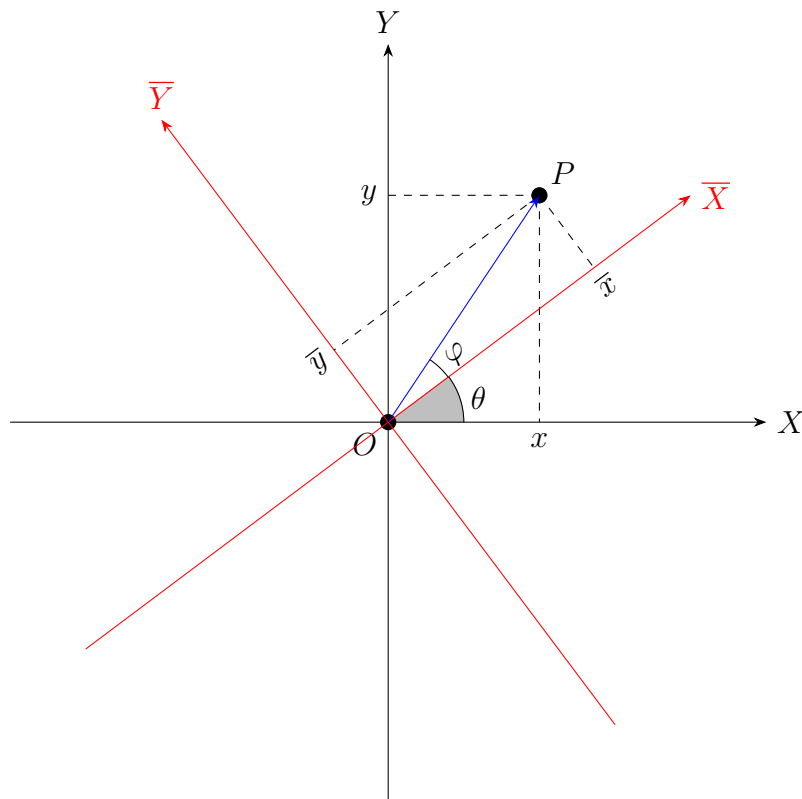
Note que a reta continua perpendicular ao vetor $(2, 3)$, tendo em vista que a translação dos eixos não altera os ângulos entre os pontos.

G.1.2 Rotação dos Eixos

A rotação dos eixos cartesianos é uma transformação que altera a orientação dos eixos de coordenadas em torno da origem sem modificar as distâncias ou os ângulos entre os pontos. Essa transformação é útil para simplificar equações de retas e curvas, eliminando termos mistos ou facilitando sua interpretação algébrica.

Seja $P = (x, y)$ um ponto no sistema de coordenadas OXY . Suponha que queremos rotacionar os eixos cartesianos em torno da origem de um ângulo θ , mantendo as distâncias inalteradas, conforme a figura a seguir:

Figura G.4: Rotação dos eixos cartesianos, onde o sistema OXY é girado em um ângulo θ



Fonte: Autor

As coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do ponto $\bar{P}$ no novo sistema de coordenadas são dadas pelas equações:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ \bar{y} = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}. \quad (\text{G.3})$$

As quais podem ser obtidas pelo produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De forma semelhante, se quisermos retornar para o sistema original, podemos utilizar as equações:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos(\theta) - \bar{y}\sin(\theta) \\ y = \bar{x}\sin(\theta) + \bar{y}\cos(\theta). \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

Sendo assim, um ponto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ resultante de uma rotação de θ ao redor da Origem, nas coordenadas OXY pode ser encontrado pelo produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

A equação G.4 é particularmente útil para simplificar equações com termos indesejados, sendo necessário apenas encontrar os valores de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ para a mágica acontecer.

G.2 Equação Geral do Segundo Grau

No capítulo anterior foi possível verificar que as Cônicas possuem o formato de uma equação do segundo grau, seja na variável x , seja na variável y ou ainda nas duas variáveis.

É razoável que estudemos os lugares geométricos dos pontos que obedecem à equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, tendo em vista que uma parcela deles serão as cônicas já estudadas e os novos lugares geométricos expandirão os nossos horizontes.

Sem querer estragar o prazer de qualquer leitor (e estragando desde já), todas as curvas que obedecem a essa equação são, elipses, hipérboles ou parábolas (ou os seus casos degenerados).

Mas vamos com calma, primeiramente vamos analisar um termo especial, o discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$.

G.2.1 O Discriminante e sua relação com as cônicas

- Sendo $\mathcal{E}$ uma elipse cujo eixo focal é o eixo OX , sabemos que sua equação é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que pode ser reescrita como

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nesse caso, discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4b^2a^2 = -4a^2b^2 < 0.$$

Como em uma elipse cujo eixo focal é paralelo ao eixo OY só trocamos a^2 por b^2 , logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma elipse, no formato em que estudamos, o discriminante Δ é negativo.

- Sendo $\mathcal{H}$ uma Hipérbole cujo eixo focal é o eixo OX , sabemos que sua equação é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que pode ser reescrita como

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nesse caso, o discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4b^2(-a^2) = 4a^2b^2 > 0.$$

Como em uma Hipérbole cujo eixo focal seja igual ao eixo OY só trocamos a^2 por $-b^2$ e vice-versa, logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma Hipérbole, no formato em que estudamos, o discriminante Δ é positivo.

- Sendo $\mathcal{E}$ uma Parábola cujo eixo focal é o eixo OY , sabemos que sua equação é do tipo

$$x^2 = 4py$$

que pode ser reescrita como

$$x^2 - 4py = 0,$$

Nesse caso o discriminante Δ será igual a

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Como em uma Parábola cujo eixo focal seja o eixo OX trocaremos somente a variável x por y na equação base, logo o resultado acima continua válido. Concluimos que para uma Parábola, no formato em que estudamos, o discriminante Δ é nulo.

Ao transladar ou rotacionar os eixos coordenados, o valor de Δ não é alterado.

G.2.2 Reconhecendo as Cônicas

Como o valor de Δ é invariante com relação a Translações e Rotações, logo a equação na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é dividida em três categorias,

quais sejam:

- Se $\Delta < 0$, então a equação representa uma elipse ou suas formas degeneradas (Conjunto Vazio ou um Ponto).
- Se $\Delta = 0$, então a equação representa uma parábola ou suas formas degeneradas (Conjunto Vazio, Uma reta ou a União de duas retas paralelas).
- Se $\Delta > 0$, então a equação representa uma hipérbole ou a sua forma degenerada (Duas retas concorrentes).

Exemplo G.2.1. Qual o Lugar Geométrico determinado pela equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$?

Resolução: Ora, tal equação parece a de uma circunferência (e, portanto, uma elipse), mas sabemos que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Sendo assim, a soma desses dois termos nunca poderá ser -1 , conforme solicita a equação. Portanto, não existem pontos que satisfazem essa equação, sendo o Lugar Geométrico o Conjunto Vazio.

Exemplo G.2.2. Qual o Lugar Geométrico determinado pela equação $x^2 + y^2 = 0$?

Resolução Novamente, como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, a única forma da soma desses termos ser nula é ambos serem iguais a 0. Concluímos que o Lugar Geométrico é o ponto $(0, 0)$.

Exemplo G.2.3. Qual o Lugar Geométrico do Plano determinado pela equação $x^2 = 4$?

Resolução: Sendo $x^2 = 4$, logo $|x| = 2$ e, portanto, o Lugar Geométrico é dado pelas retas paralelas $x = -2$ e $x = 2$.

Exemplo G.2.4. Mostre que a equação $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$ representa duas retas concorrentes.

Resolução: A dica para essa situação é resolver a equação em relação à variável x . Assim, agrupemos os termos da seguinte forma

$$2x^2 - 3xy + 5x - 2y^2 + 5y - 3 = 0.$$

Nesse caso $a = 2$, $b = (-3y + 5)$ e $c = -2y^2 + 5y - 3$. Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac$, logo

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3y + 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2y^2 + 5y - 3) \\ \Rightarrow &= 9y^2 - 30y + 25 + 16y^2 - 40y + 24 \\ \Rightarrow &= 25y^2 - 70y + 49 = (5y - 7)^2.\end{aligned}$$

Segue que

$$x = \frac{-b \pm \Delta}{2a} = \frac{3y - 5 \pm (5y - 7)}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 2y - 3 \text{ ou } x = -y/2 + 1/2.$$

Segundo Oliveira e Boulos (1987) [24], um bom roteiro para simplificar e reconhecer as cônicas dada a sua equação é:

1. Eliminar, por meio de translação, os termos do 1º grau (caso possível)¹;
2. Eliminar o termo B a partir de uma rotação.

É útil, no entanto, saber qual ângulo devemos rotacionar o nosso eixo para eliminar o termo B . Portanto, nessa última seção, nos dedicaremos a essa tarefa.

G.2.3 Descobrimos o ângulo de rotação

Seja $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma equação do segundo grau na forma geral. Queremos fazer uma rotação dos eixos coordenados de forma a eliminar o termo B .

- Se $A = C$, então o ângulo θ será 45° .

Segue que $\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Se $A \neq C$, então seguiremos o seguinte passo a passo:

1. Encontre $\tan(2\theta)$:

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

2. A partir da $\tan(2\theta)$ podemos descobrir o $\cos(2\theta)$ da seguinte forma:

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} > 0 \text{ e}$$

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} < 0.$$

3. Por fim, a partir do $\cos(2\theta)$, podemos encontrar $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$:

Como $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ e $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}.$$

Exemplo G.2.5. Qual o Lugar Geométrico representado pela equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 18x + 9 = 0?$$

Resolução: Primeiramente determinemos o coeficiente Δ .

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 16 - 160 = -144 < 0.$$

¹Não será possível no caso Parabólico, tendo em vista que a equação base da Parábola depende de um termo do 1º grau.

Assim, como $\Delta < 0$, temos uma elipse ou alguma de suas formas degeneradas.

Seguindo o passo a passo de Oliveira e Boulos (1987), devemos inicialmente eliminar os termos do 1º grau. Ao transladar o centro dos eixos coordenados para um novo centro (h, k) , teremos a equação:

$$\begin{aligned} & 5(x-h)^2 - 4(x-h)(y-k) + 8(y-k)^2 - 18(x-h) + 9 = 0 \\ \Rightarrow & (5x^2 - 10hx + 5h^2) + (-4xy + 4kx + 4hy - 4hk) \\ & + (8y^2 - 16ky + 8k^2) - 18x + 18h + 9 = 0 \\ \Rightarrow & 5x^2 - 4xy + 8y^2 + (-10h + 4k - 18)x + (4h - 16k)y \\ & + 5h^2 - 4hk + 8k^2 + 18h + 9 = 0. \end{aligned}$$

Queremos que $\begin{cases} -10h + 4k - 18 = 0 & e \\ 4h - 16k = 0. \end{cases}$

Pela segunda equação temos que $h = 4k$.

Substituindo $4k$ na primeira equação por h , descobrimos que $h = -2$ e, portanto, $k = -1/2$.

Portanto, nossa nova equação, após a translação dos eixos será:

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 4xy + 8y^2 + 5(-2)^2 - 4(-2)(-1/2) + 8(-1/2)^2 + 18(-2) + 9 = 0 \\ \Rightarrow & 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Continuando o passo a passo de Oliveira e Boulos, devemos agora rotacionar os eixos para eliminar o termo B . Como $A \neq C$, logo utilizaremos o passo a passo:

1. Encontrar $tg(2\theta)$:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{5-8} = \frac{4}{3}.$$

2. Encontrar $cos(2\theta)$:

Como $tg(2\theta) > 0$, logo

$$cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{9} + \frac{16}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

3. Encontrar $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$:

$$sen(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim, pelo retorno da rotação do ângulo, temos

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos(\theta) - \bar{y}\sin(\theta) \\ y = \bar{x}\sin(\theta) + \bar{y}\cos(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{x} - \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{y} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{x} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{y} \end{cases}.$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{x} + 2\bar{y}) \end{cases}.$$

Disso, a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 9 = 0$ se torna:

$$5 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{x} - \bar{y}) \right)^2 - 4 \left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{x} - \bar{y}) \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{x} + 2\bar{y}) \right) + 8 \left(\frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{x} + 2\bar{y}) \right)^2 - 9 = 0.$$

Simplificando os coeficientes, temos:

$$\begin{aligned} & (2\bar{x} - \bar{y})^2 - \frac{4}{5}(2\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} + 2\bar{y}) + \frac{8}{5}(\bar{x} + 2\bar{y})^2 - 9 = 0 \\ \Rightarrow & 4\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - \frac{4}{5}(2\bar{x}^2 + 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2) + \frac{8}{5}(\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2) - 9 = 0 \\ \Rightarrow & 4\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - \frac{8}{5}\bar{x}^2 - \frac{12}{5}\bar{x}\bar{y} + \frac{8}{5}\bar{y}^2 + \frac{8}{5}\bar{x}^2 + \frac{32}{5}\bar{x}\bar{y} + \frac{32}{5}\bar{y}^2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Simplificando a equação, temos:

$$4\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 - 9 = 0.$$

Somando 9 em ambos os termos e dividindo-os por 9, obtemos:

$$4\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 = 9 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{\frac{9}{4}} + \bar{y}^2 = 1.$$

Concluimos que essa é uma elipse de coeficientes $a = \frac{3}{2}$ e $b = 1$.

G.3 Exercícios

Exercício G.3.1. *Seja o ponto $P = (4, -2)$ no sistema de coordenadas OXY . Se a origem for transladada para $\bar{O} = (2, 3)$ determine as novas coordenadas de P .*

Exercício G.3.2. A equação de uma reta no sistema OXY é dada por $3x - 4y + 12 = 0$. Se os eixos forem deslocados para $(2, -3)$, qual será a nova equação da reta?

Exercício G.3.3. A equação de uma parábola é dada por $y = x^2 - 4x + 3$. Realize uma translação de eixos que leve o vértice da parábola para a origem e encontre a nova equação da parábola.

Exercício G.3.4. O centro de uma circunferência é o ponto $C = (5, -3)$ e sua equação é $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$. Se trasladarmos os eixos para que o novo sistema tenha origem em C , qual será a nova equação da circunferência?

Exercício G.3.5. Rotacione o sistema cartesiano em um ângulo de 45° e encontre a nova equação da reta dada por $x + y - 2 = 0$.

Exercício G.3.6. Determine o ângulo de rotação necessário para eliminar o termo misto da equação $3x^2 + 4xy + 2y^2 - 5 = 0$.

Exercício G.3.7. Uma Hipérbole tem equação $9x^2 - 6xy - 4y^2 - 36 = 0$. Utilize a rotação dos eixos cartesianos para eliminar o termo misto da equação.

Exercício G.3.8. Classifique a cônica representada pela equação $4x^2 + 6xy + 9y^2 - 36 = 0$ utilizando o discriminante.

Exercício G.3.9. Encontre a equação reduzida da cônica dada pela equação

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 - 6x + 8y - 5 = 0.$$

H Questões

Segundo George Pólya, famoso matemático húngaro por estruturar a teoria de resolução de problemas, o primeiro passo para resolver um problema é a Identificação.

Com as questões separadas por conteúdo programático o leitor não tem como exercitar a Identificação, a qual teria sido feita pelo próprio material.

Sendo assim, aqui segue um conjunto de questões (sem ordenação por conteúdo, mas sim anual e alfabética) de Lugar Geométrico que estiveram presentes em diversos vestibulares, concursos e até olimpíadas para que o leitor possa praticar. As resoluções estão presentes no próximo capítulo. Obrigado por ler :).

H.1 2025

Problema H.1.1. (EFOMM 2025) Considere a hipérbole $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$ e tome o ponto A seu vértice no eixo y positivo e o ponto E seu vértice no eixo y negativo.

Tome B e D , respectivamente, como os pontos com o maior e menor valor da coordenada y no lugar geométrico

$$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0.$$

Tome C e F , respectivamente, como os pontos com o maior e menor valor da coordenada x no lugar geométrico

$$64x^2 + 121y^2 - 320x - 1536 = 0.$$

Qual a área do polígono convexo $ABCDEF$?

(A) 64 u.a.

(B) $\frac{1}{3} \left(4\sqrt{5} - \sqrt{3} \right)$ u.a.

(C) $\frac{75}{2}\sqrt{5}$ u.a.

(D) 52 u.a.

(E) $\frac{128}{3}$ u.a.

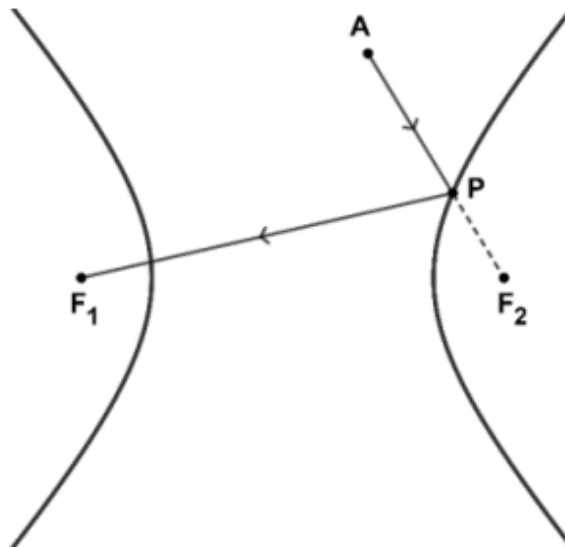
H.2 2024

Problema H.2.1. (EFOMM 2024) Sejam as circunferências C_1 , de centro $(2,0)$ e raio 2, e C_2 , de centro $(0,1)$ e raio 1. Determine os pontos que pertencem a C_1 e a C_2 simultaneamente.

- (A) $(0, 1)$ e $(3/5, 3/5)$.
- (B) $(0, 0)$ e $(1/5, 8/5)$.
- (C) $(1, 0)$ e $(3/5, 7/5)$.
- (D) $(0, 0)$ e $(4/5, 8/5)$.
- (E) $(0, 1)$ e $(1/5, 8/5)$.

Problema H.2.2. (ESA 2024) A figura abaixo ilustra a propriedade refletora da hipérbole. Se um raio partir de um ponto A em direção a F_2 , então ele é refletido pela hipérbole, no ponto P , e segue em direção a F_1 .

Figura H.1



Considere a hipérbole $4x^2 - 5y^2 = 20$ de focos F_1 e F_2 , com F_1 à esquerda de F_2 . Qual das retas abaixo dá a direção do raio que deve partir do ponto $A(1,3)$ para ser refletido no ramo da direita da hipérbole e caminhar em direção a F_1 ?

- A) $3x + 2y - 9 = 0$
- B) $2x + 2y - 7 = 0$
- C) $x + 2y - 8 = 0$
- D) $2x - y + 7 = 0$
- E) $x - 2y + 8 = 0$

Problema H.2.3. (EsPCEEx 2024) A reta r dada pela equação $y = x - 1$ não intersecta a hipérbole cuja equação reduzida é $\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$. Seja s a reta que passa pelo centro dessa hipérbole e é perpendicular a r . É correto inferir que s :

- [A] não tem interseção com a hipérbole e intersecta o eixo das ordenadas em $y = 5$.
- [B] tem interseção com a hipérbole e intersecta o eixo das ordenadas em $y = 5$.
- [C] não tem interseção com a hipérbole e intersecta o eixo das ordenadas em $y = -1$.
- [D] tem interseção com a hipérbole e intersecta o eixo das ordenadas em $y = -1$.
- [E] tem interseção com a hipérbole e intersecta o eixo das ordenadas em $y = 2$.

Problema H.2.4. (FUVEST 2024) Considere a parábola P dada pela equação $y = x^2$ e a reta r dada pela equação $ax + by + c = 0$, onde a , b e c são constantes reais. Denote por $O = (0, 0)$ a origem do sistema de coordenadas cartesiano Oxy .

- a) Se $a = 2$, $b = -1$ e $c = 3$, determine todos os pontos do plano cartesiano que pertencem, simultaneamente, à reta r e à parábola P .
- b) Se $a = 4$, $b = 3$ e $c = -7$, determine o ponto da reta r que está mais próximo de O .
- c) Considere três pontos A , B e C na parábola P , tais que $A = (-1, 1)$, B pertence ao primeiro quadrante e os segmentos AB e OC são paralelos. Determine B e C de forma que a distância de B até C seja $\sqrt{17}$.

Problema H.2.5. (IME 2023/2024) Considere duas circunferências no plano cartesiano Oxy , uma de raio igual a 6 e centro no ponto $(6, 6)$ e outra de centro na origem e tangente exterior à primeira. A equação da tangente interior comum às circunferências é:

- (A) $y + 2x - 3(\sqrt{2} - 2) = 0$
- (B) $2y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$
- (C) $y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$
- (D) $y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$
- (E) $2y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

Problema H.2.6. (ITA 2024) Considere o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $C = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, 0\right)$. A equação da reta que passa por B e é perpendicular à bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$ é:

- A () $y = (5 - 2\sqrt{6})x + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$.
- B () $y = (5 + 2\sqrt{6})x - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$.
- C () $y = (5 - \sqrt{6})x + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$.
- D () $y = -(5 + 2\sqrt{6})x + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$.
- E () $y = (-5 + 2\sqrt{6})x - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$.

Problema H.2.7. (ITA 2024) Considere a elipse dada pela equação

$$\lambda x^2 + (\lambda + 4)y^2 - 4\lambda x - (10\lambda + 40)y + 25(\lambda + 4) - \lambda^2 = 0.$$

e o círculo de equação

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 36 = 0.$$

Estando o interior do círculo inteiramente contido no interior da elipse, o valor de $\lambda \in \mathbb{R} - \{-4, 0\}$ quando a excentricidade da elipse é máxima é igual a:

A () 3.

B () 5.

C () 9.

D () 13.

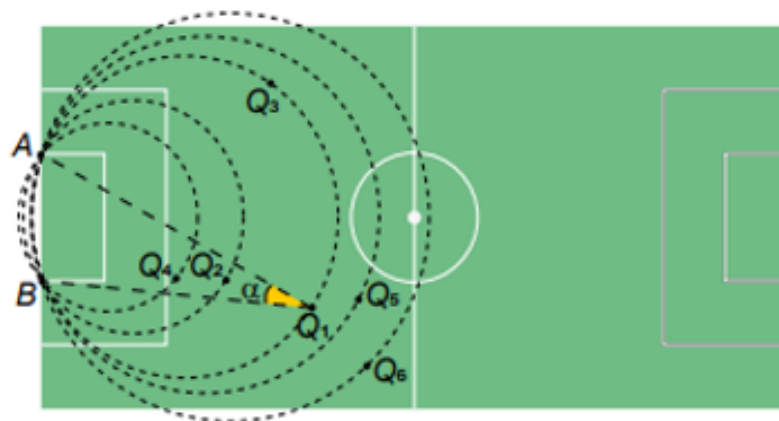
E () 15.

Problema H.2.8. (ITA 2024) Determine a equação da circunferência de maior raio que é tangente ao eixo y e passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(3, 6)$.

H.3 2023

Problema H.3.1. (ENEM 2023) Num certo momento de um jogo digital, a tela apresenta a imagem representada na figura. O ponto Q_1 representa a posição de um jogador que está com a bola, os pontos Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 e Q_6 também indicam posições de jogadores da mesma equipe, e os pontos A e B indicam os dois pés da trave mais próxima deles. No momento da partida retratado, o jogador Q_1 tem a posse da bola, que será passada para um dos outros jogadores das posições $Q_n, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, cujo ângulo $\widehat{AQ_nB}$ tenha a mesma medida do ângulo $\alpha = \widehat{AQ_1B}$.

Figura H.2



Qual é o jogador que receberá a bola?

- A) Q_2
- B) Q_3
- C) Q_4
- D) Q_5
- E) Q_6

Problema H.3.2. (ESA 2023) Considerando o ponto $P(-1, -3)$ e o ponto $Q(3, 5)$, marque a alternativa que expressa a equação da reta que passa pelo ponto P e Q .

- A) $5x + 2y - 3 = 0$
- B) $3x - 5y - 5 = 0$
- C) $2x - y - 1 = 0$
- D) $2x + y + 1 = 0$
- E) $3x - 5y + 2 = 0$

Problema H.3.3. (EsPCEEx 2023) Considere as retas $r : -\frac{x}{2} + 2y - 3 = 0$ e $s : ax + by + c = 0$. Sabendo que $r \perp s$ e que $P(2, 2) \in s$, assinale a opção que contém valores corretos possíveis para a , b e c respectivamente:

- [A] 4, 1, 10
- [B] 4, 1, -10
- [C] -4, -1, -10
- [D] -4, 1, 10
- [E] 4, -1, 10

Problema H.3.4. (EsPCEEx 2023) Considere as circunferências $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$. Qual a posição relativa de λ_1 e λ_2 ?

- [A] Uma interior à outra.
- [B] Tangentes interiormente.
- [C] Exteriores.
- [D] Tangentes exteriormente.
- [E] Secantes.

Problema H.3.5. (EsPCEEx 2023) A fim de proporcionar a seus militares melhores condições para a prática de Treinamento Físico Militar, um Batalhão do Exército Brasileiro planeja construir uma pista de corrida. Sabe-se que a pista deverá ser limitada por duas elipses, conforme ilustrado pela figura abaixo. A largura da pista ainda será definida, mas já existe a determinação de que a distância de $P1$ a $P2$ seja de 120 metros. Planeja-se também instalar um mastro em cada foco da elipse interior, representados na figura pelos pontos $R1$ e $R2$, para que posteriormente o Batalhão possa hastear bandeiras. A ordem é que os mastros possuam a distância de 80 metros entre si. Considere a equação da elipse interior como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Figura H.3

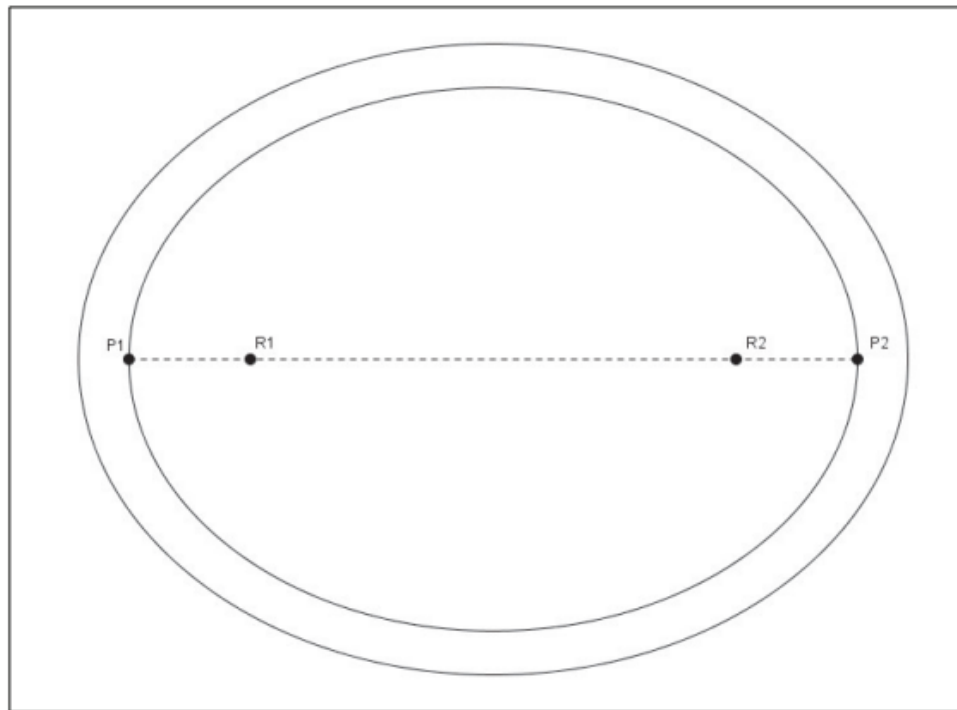


Figura fora de escala

Assinale a alternativa que contém o valor, em metros, de $a + b$:

- [A] $60 + 20\sqrt{5}$
- [B] $60 + 40\sqrt{5}$
- [C] $60 + 100\sqrt{5}$
- [D] 40
- [E] 80

Problema H.3.6. (IME 2022/2023) Considere um ponto P cujas coordenadas (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$, satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 4\operatorname{cosec}(\alpha)x - 6\cot g(\alpha)y = 4\operatorname{sen}(\alpha) \\ 12\operatorname{cosec}(\alpha)y - 8\cot g(\alpha)x = 0 \end{cases}$$

onde α é um ângulo em radianos diferente de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). O lugar geométrico descrito pelos pontos P , conforme se varia o ângulo α , é um segmento de:

- (A) reta horizontal.
- (B) reta vertical.
- (C) reta inclinada.
- (D) elipse.
- (E) parábola.

Problema H.3.7. (IME 2022/2023) Se a equação $2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2 = 0$ representa no plano real duas retas concorrentes, então o valor positivo do número real c é

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 10

Problema H.3.8. (ITA 2023) Considere a hipérbole H de equação $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Seja T um triângulo de vértices P, F_1, F_2 , onde F_1 e F_2 são os focos de H e P um ponto em H . Sabendo que o perímetro de T é $5\sqrt{5}$, o produto da medida dos lados de T é

- A () $\frac{41\sqrt{5}}{2}$.
- B () $\frac{41}{4}$.
- C () $\frac{41\sqrt{5}}{4}$.
- D () $\frac{41}{8}$.
- E () $\frac{41\sqrt{5}}{8}$.

Problema H.3.9. (ITA 2023) Determine os pontos P pertencentes à elipse E definida pela equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

tais que os segmentos de reta que ligam P aos focos de E formam um ângulo de 60° .

Problema H.4.3. (FUVEST 2022) Considere, no plano cartesiano, a circunferência com centro no ponto $(0, 3)$ e com raio 2 e, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a parábola cuja equação é $y = ax^2 + 1$.

- a) Para $a = -1$, encontre o ponto comum entre a circunferência e a parábola.
- b) Para $a = 1$, apresente 3 pontos em comum entre a circunferência e a parábola.
- c) Encontre todos os valores de a para os quais a circunferência e a parábola possuam exatamente 3 pontos em comum.

Problema H.4.4. (IME 2021/2022) Considere o ponto $A(-4, 2)$ e B um ponto variável sobre o eixo das ordenadas. Traçam-se as retas AB e por B , a perpendicular a AB que intercepta o eixo das abcissas em C . Seja a equação do lugar geométrico do ponto de interseção da perpendicular ao eixo das abcissas traçada por C com a perpendicular ao eixo das ordenadas traçada por B . A equação desse lugar geométrico é:

- (A) $x^2 = 4y + 1$
- (B) $y^2 = 4x$
- (C) $y = -x + 2$
- (D) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
- (E) $(y - 1)^2 = 4x + 1$

Problema H.4.5. (ITA 2022) Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que a equação

$$x^2 - 6bx - (1 - b^2)(y^2 - 2by) + b^4 + 8b^2 - 1 = 0$$

determina uma hipérbole. Com respeito ao centro C deste hipérbole podemos afirmar:

- A () $C \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2/9 + y^2/12 < 1\}$.
- B () $C \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2/4 + y^2/2 > 1\}$.
- C () $C \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2/9 - y^2/2 < 1\}$.
- D () $C \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 - 2y^2 > 1\}$.
- E () Nenhuma das alternativas anteriores.

Problema H.4.6. (ITA 2022) Sejam $P_1 = (0, 6)$, $P_2 = (1, 5)$ e $P_3 = (2, 6)$ e sejam C_1 , C_2 e C_3 circunferências centradas em P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente. Sabendo que existe uma reta horizontal que é tangente a C_1 , C_2 e C_3 determine $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ quando este não for vazio.

H.5 2021

Problema H.5.1. (ESA 2021) Qual é a posição do ponto $P(5, 3)$ em relação à circunferência de centro $C(3, 1)$ e raio igual a 5 unidades?

- A) Externo.
- B) Interno, não coincide com o centro.
- C) Pertence à circunferência.
- D) Coincidente com o centro.
- E) Excêntrico.

Problema H.5.2. (EsPCEEx 2021) A circunferência que tem seu centro no ponto $(1, -1)$ e é tangente à reta de equação $y = \frac{3}{4}x + 2$ tem equação dada por

- [A] $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.
- [B] $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.
- [C] $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$.
- [D] $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 7 = 0$.
- [E] $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

Problema H.5.3. (FUVEST 2021) São dados os pontos no plano cartesiano $P_1 = (3; 3)$, $P_2 = (5; 1)$, $P_3 = (3; -1)$ e $P_4 = (-2; 5)$.

- a) Determine a equação da reta que passa por P_3 e é paralela à reta que passa por P_1 e P_4 .
- b) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos P_1 , P_2 e P_3 .
- c) Sendo C a circunferência do item (b) e P o ponto de interseção de C com o eixo Ox , que está mais próximo da origem, determine a equação da reta tangente a C em P .

Problema H.5.4. (ITA 2021) Considere a curva plana definida pela equação $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$. O ponto $P = (0, 0)$ é vértice de um retângulo circunscrito à curva. Então a equação da circunferência circunscrita ao retângulo é:

- A () $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.
- B () $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
- C () $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.
- D () $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$.
- E () $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$.

Problema H.5.5. (ITA 2021) Determine todos os pontos (x, y) que pertencem à circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}.$$

Problema H.5.6. (UVV 2021) Um professor de matemática propôs a seus alunos que representassem, num mesmo plano cartesiano, os conjuntos algébricos I, II e III como se segue:

I – é o retângulo formado pelos vértices $A(-2, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(2, -3)$ e $D(2, -1)$.

II – é o quadrado formado pelos vértices $E(-4, 4)$, $F(-4, -4)$, $G(4, -4)$ e $H(4, 4)$.

III – é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

A seguir, pediu que seus alunos representassem também, nesse mesmo plano cartesiano, a reta $r : 2x - 3y + 3 = 0$ e pediu que verificassem se havia interseções da reta com os conjuntos algébricos I, II e III.

A representação gráfica correta do que o professor propôs a seus alunos, mostrou que a reta r teve interseção com o retângulo

A) ABCD, o quadrado EFGH e a circunferência.

B) ABCD e a circunferência.

C) EFGH e a circunferência.

D) ABCD e o quadrado EFGH.

E) ABCD apenas.

Problema H.5.7. (UVV 2021) Durante séculos, a bússola foi utilizada como principal instrumento de orientação por qualquer um que quisesse se aventurar por locais desconhecidos, seja na terra, no mar ou no ar. Porém, a chegada da era espacial trouxe uma tecnologia que acabou deixando obsoleta não só a bússola, mas também o ato de pedir informações na rua, surgiu o GPS.

O GPS, ou Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global), é um elaborado sistema de satélites e outros dispositivos que tem como função básica prestar informações precisas sobre o posicionamento individual no globo terrestre.

O sistema está plenamente ativo desde 1995 e foi criado pelo Departamento de Defesa Americano para fins militares, mas também pode ser aproveitado no meio civil, principalmente na aviação. Uma constelação de 24 satélites é o elemento principal do aparato, enviando informações para que qualquer dispositivo receptor calcule sua posição usando um processo chamado de trilateração.

Figura H.5



Uma trilateração 2D seria o processo usado para determinar o ponto de interseção de três circunferências.

Na trilateração 3D, ao invés de círculos de raios conhecidos, são formadas esferas com esses raios.

Usando uma trilateração 2D, o pesquisador Roger chegou a localização exata de um objeto, situado no ponto $P(1, m)$ de interseção das três circunferências de equações:

$$C_1 : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

$$C_2 : (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

$$C_3 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Nesse caso, o valor da expressão $3m - 2$ é

A) -20.

B) -14.

C) 0.

D) 2.

E) 4.

H.6 2020

Problema H.6.1. (ESA 2020) Um ponto P , de um sistema de coordenadas cartesianas, pertence à reta de equação $y = x - 2$. Sabe-se que o ponto P é equidistante do eixo das ordenadas e do ponto $Q(16, 0)$. Dessa maneira, um possível valor para as coordenadas do ponto P é:

(A) $P(8, 10)$.

(B) $P(10, 8)$.

(C) $P(9, 7)$.

(D) $P(12, 10)$.

(E) $P(7, 9)$.

Problema H.6.2. (EsPCEX 2020) Sabendo-se que a equação $2x^2 + ay^2 - bxy - 4x + 8y + c = 0$ representa uma circunferência de raio 3, a soma $a + b + c$ é igual a

[A] -10.

[B] -6.

[C] -2.

[D] 2.

[E] 6.

Problema H.6.3. (FUVEST 2020) Um ponto (x, y) do plano cartesiano pertence ao conjunto F se é equidistante dos eixos OX e OY e pertence ao círculo de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$. É correto afirmar que F

- (A) é um conjunto vazio.
 (B) tem exatamente 2 pontos, um no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.
 (C) tem exatamente 2 pontos, ambos no primeiro quadrante.
 (D) tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.
 (E) tem exatamente 4 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e dois no segundo quadrante.

Problema H.6.4. (IME 2019/2020) O lugar geométrico definido pela equação $x^2 + 3y^2 + 5 = 2x - xy - 4y$ representa

- (A) uma elipse.
 (B) uma hipérbole.
 (C) uma circunferência.
 (D) um conjunto vazio.
 (E) duas retas paralelas.

Problema H.6.5. (ITA 2020) Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1, 1)$, $Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$. Determine:

- a) A equação de λ
 b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ , sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

H.7 2019

Problema H.7.1. (EFOMM 2019) A equação $(x^2/144) + (y^2/225) = 1$ representa uma

- (a) elipse com focos $(0, 9)$ e $(0, -9)$.
 (b) circunferência de raio igual a 9.
 (c) parábola.
 (d) hipérbole.
 (e) elipse com centro em $(12, 15)$.

Problema H.7.2. (EsPCEX 2019) As equações das retas paralelas à reta $r : 3x + 4y - 1 = 0$, que cortam a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ e determinam cordas de comprimento igual a 8, são, respectivamente

- [A] $3x + 4y + 5 = 0$ e $3x + 4y + 25 = 0$.
 [B] $3x + 4y - 5 = 0$ e $3x + 4y - 25 = 0$.
 [C] $3x - 4y + 5 = 0$ e $3x - 4y + 25 = 0$.
 [D] $3x + 4y - 5 = 0$ e $3x + 4y + 25 = 0$.
 [E] $3x + 4y + 5 = 0$ e $3x + 4y - 25 = 0$.

Problema H.7.3. (IME 2018/2019) Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

(A) $xy = 2$

(B) $x^2 + xy - y^2 = 4$

(C) $x^2 - y^2 = 2$

(D) $xy = -2$

(E) $x^2 - y^2 = -2$

Problema H.7.4. (ITA 2019) Seja γ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Se r e s são duas retas que se interceptam no ponto $P = (1, 3)$ e são tangentes a γ , então o cosseno do ângulo entre r e s é igual a

A () $\frac{1}{5}$.

B () $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

C () $\frac{1}{2}$.

D () $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

E () $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

H.8 2018

Problema H.8.1. (EFOMM 2018) A projeção ortogonal de A sobre a reta BC , sabendo-se que $A = (3, 7)$, $B = (1, 1)$ e $C = (9, 6)$, terá as coordenadas da projeção

(a) $x = 468/85; y = 321/89$.

(b) $x = 478/87; y = 319/87$.

(c) $x = 487/84; y = 321/87$.

(d) $x = 457/89; y = 319/89$.

(e) $x = 472/89; y = 295/89$.

Problema H.8.2. (EFOMM 2018) A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ ($6 \leq x \leq 11$). Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto $(2,0)$. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

- (a) $(8, 9)$.
- (b) $(8, 6)$.
- (c) $(7, 9)$.
- (d) $(7, 5)$.
- (e) $(7, 4)$.

Problema H.8.3. (ENEM 2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A , de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B , de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

- A) 30.
- B) 40.
- C) 45.
- D) 60.
- E) 68.

Problema H.8.4. (EsPCEEx 2018) Uma hipérbole tem focos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$ e passa pelos pontos $P(3, 0)$ e $Q(4, y)$, com $y > 0$. O triângulo com vértices em F_1 , P e Q tem área igual a

- [A] $\frac{16\sqrt{7}}{3}$.
- [B] $\frac{16\sqrt{7}}{5}$.
- [C] $\frac{32\sqrt{7}}{3}$.
- [D] $\frac{8\sqrt{7}}{3}$.
- [E] $\frac{8\sqrt{7}}{5}$.

Problema H.8.5. (IME 2017/2018) Seja uma elipse com foco no eixo OX e centrada na origem. Seus eixos medem 10 e $20/3$. Considere uma hipérbole tal que os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da elipse. As parábolas que passam pelas interseções entre a elipse e a hipérbole e que são tangentes ao eixo OY , tem as seguintes equações:

$$(A) \ y^2 = \pm 2 \frac{\sqrt{35}}{7} x$$

$$(B) \ y^2 = \pm 4 \frac{\sqrt{5}}{7} x$$

$$(C) \ y^2 = \pm 6 \frac{\sqrt{5}}{7} x$$

$$(D) \ y^2 = \pm 6 \frac{\sqrt{35}}{7} x$$

$$(E) \ y^2 = \pm 8 \frac{\sqrt{35}}{63} x$$

Problema H.8.6. (ITA 2018) O lugar geométrico das soluções da equação $x^2 + bx + 1 = 0$, quando $|b| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, é representado no plano complexo por

A () dois pontos.

B () um segmento de reta.

C () uma circunferência menos dois pontos.

D () uma circunferência menos um ponto.

E () uma circunferência.

H.9 2017

Problema H.9.1. (EFOMM 2017) Sejam as circunferências $c_1 : x^2 + y^2 - 16 = 0$ e $c_2 : (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$. Considere A e B os pontos de interseção dessas circunferências.

Determine a distância entre A e B .

$$(a) \ 2\sqrt{7}$$

$$(b) \ \sqrt{14}$$

$$(c) \ 2\sqrt{14}$$

$$(d) \ \sqrt{7}$$

$$(e) \ \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Problema H.9.2. (ESA 2017) A equação da circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 é

$$A) \ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 14 = 0.$$

$$B) \ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

$$C) \ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0.$$

$$D) \ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 14 = 0.$$

$$E) \ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 14 = 0$$

Problema H.9.3. (FUVEST 2017) Duas circunferências com raios 1 e 2 têm centros no primeiro quadrante do plano cartesiano e ambas tangenciam os dois eixos coordenados. Essas circunferências se interceptam em dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .

O valor de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ é igual a

- A) $5/2$
- B) $7/2$
- C) $9/2$
- D) $11/2$
- E) $13/2$

Problema H.9.4. (ITA 2017) O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

- A () uma circunferência.
- B () uma parábola.
- C () uma hipérbole.
- D () uma reta.
- E () duas retas paralelas.

H.10 2016

Problema H.10.1. (EFOMM 2016) Quando à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ como

- (a) secantes.
- (b) tangentes internas.
- (c) tangentes externas.
- (d) externas.
- (e) internas.

Problema H.10.2. (FUVEST 2016) No plano cartesiano, um círculo de centro $P = (a, b)$ tangencia as retas de equações $y = x$ e $x = 0$. Se P pertence à parábola de equações $y = x^2$ e $a > 0$, a ordenada b do ponto P é igual a

- a) $2 + 2\sqrt{2}$
- b) $3 + 2\sqrt{2}$
- c) $4 + 2\sqrt{2}$
- d) $5 + 2\sqrt{2}$
- e) $6 + 2\sqrt{2}$

Problema H.10.3. (FUVEST 2016) No plano cartesiano Oxy , a circunferência C tem centro no ponto $P = (2, 1)$, a reta t é tangente a C no ponto $Q = (-1, 5)$.

- a) Determine o raio da circunferência C .
- b) Encontre uma equação para a reta t .
- c) Calcule a área do triângulo PQR , sendo R o ponto de interseção de t com o eixo Ox .

Problema H.10.4. (IME 2015/2016) O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes às retas de equações

$$4x + 3y - 2 = 0 \text{ e } 12x - 16y + 5 = 0$$

é

- (A) $4x + 28y + 13 = 0$
- (B) $8x - 7y - 13 = 0$
- (C) $28x - 4y - 3 = 0$
- (D) $56x^2 + 388xy - 184x - 56y^2 - 16y + 19 = 0$
- (E) $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$

Problema H.10.5. (ITA 2016) Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se distância de P a S , $d(P, S)$, como a menor das distâncias $d(P, Q)$, com $Q \in S$:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) : Q \in S\}.$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

- a) Determine $d(P, S_1)$ quando $P = (1, 4)$ e $d(Q, S_1)$ quando $Q = (-3, 0)$.
- b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2 .

H.11 2015

Problema H.11.1. (EFOMM 2015) Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy . Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP , onde O é a origem, que forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

(a) $x + y - 2 = 0$.

(b) $\sqrt{2}x + y - 1 = 0$.

(c) $-\sqrt{2}x + y - 2 = 0$.

(d) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

(e) $x - y - 2\sqrt{2} = 0$.

Problema H.11.2. (ESA 2015) Em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $O(0,0)$ e $A(8,0)$. A equação do conjunto dos pontos $P(x,y)$ desse plano sabendo que a distância de O a P é o triplo da distância de P a A , é uma

A) circunferência de centro $(9,0)$ e raio 3.

B) elipse de focos $(6,0)$ e $(12,0)$, e eixo menor 6.

C) hipérbole de focos $(3,0)$ e $(15,0)$, e eixo real 6.

D) parábola de vértice $(9,3)$, que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(6,0)$ e $(12,0)$.

E) reta que passa pelos pontos $(6,0)$ e $(9,3)$.

Problema H.11.3. (EsPCEEx 2015) Considere as afirmações:

I - Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

II - Os focos de uma hipérbole dão $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2 - 9y^2 = 576$.

III - A parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ tem como vértices o ponto $V(3,0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.

[C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Problema H.11.4. (FUVEST 2015) A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto $(-3,4)$. Os valores de m e n são, respectivamente,

- a) -4 e 3
- b) 4 e 5
- c) -4 e 2
- d) -2 e 4
- e) 2 e 3

Problema H.11.5. (ITA 2015) Considere as afirmações a seguir:

1. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
2. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.
3. Os pontos $(2, 3)$, $(4, -1)$ e $(3, 1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

- A () apenas 1.
- B () apenas 2.
- C () apenas 3.
- D () 1 e 2.
- E () 1 e 3.

Problema H.11.6. (ITA 2015) Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s , formando um ângulo agudo θ . Determine a tangente de θ .

H.12 2014

Problema H.12.1. (ESA 2014) Dada a equação da circunferência é: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, sendo (a, b) as coordenadas do centro e r medida do raio, identifique a equação geral da circunferência de centro $(2, 3)$ e raio igual a 5.

- A) $x^2 + y^2 = 25$
- B) $x^2 + y^2 - 4xy - 12 = 0$
- C) $x^2 - 4x = -16$
- D) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
- E) $y^2 - 6y = -9$

Problema H.12.2. (ITA 2014) A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r : 2x - 2y + 5 = 0$ e $s : x + y - 4 = 0$ é

$$A () \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4.$$

$$B () \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4.$$

$$C () \left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4.$$

$$D () \left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$$

$$E () \left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4.$$

H.13 2013

Problema H.13.1. (EsPCEEx 2013) Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

[A] Seu centro é $(-2, 1)$.

[B] A medida do seu eixo maior é 25.

[C] A medida do seu eixo menor é 9.

[D] A distância focal é 4.

[E] Sua excentricidade é 0,8.

Problema H.13.2. (EsPCEEx 2013) Sejam dados a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P , que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P .

[A] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$

[B] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

[C] $\lambda : x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$

[D] $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$

[E] $\lambda : x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

Problema H.13.3. (FUVEST 2013) São dados, no plano cartesiano, o ponto P de coordenadas $(3, 6)$ e a circunferência C de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Uma reta t passa por P e é tangente a C em um ponto Q . Então a distância de P a Q é

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{19}$

e) $\sqrt{20}$

Problema H.13.4. (ITA 2013) Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

A () ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox .

B () ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox .

C () ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox .

D () a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

E () a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

H.14 2012

Problema H.14.1. (EFOMM 2012) Se θ é o menor ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ nos pontos $P = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right)$ e $Q = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} \right)$ então o valor de θ , em radianos, é

a) $\frac{\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{5\pi}{12}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

Problema H.14.2. (FUVEST 2012) No plano cartesiano Oxy , a circunferência C é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto $(1, 2)$. Nessas condições, o raio de C vale

a) $\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{5}$

c) 5

d) $3\sqrt{5}$

e) 10

Problema H.14.3. (IME 2011/2012) A equação da reta tangente à curva de equação $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ no ponto $P(8, 3)$ é:

(A) $2x + 3y - 25 = 0$

(B) $x + y - 11 = 0$

(C) $3x - 2y - 18 = 0$

(D) $x + 2y - 14 = 0$

(E) $3x + 2y - 30 = 0$

H.15 2011

Problema H.15.1. (EFOMM 2011) Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$, assinale a opção que apresenta a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas.

- a) 5
- b) 6
- c) 8
- d) $\sqrt{24}$
- e) $\sqrt{29}$

Problema H.15.2. (EsPCEEx 2011) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ que tem ordenada máxima é

- [A] $(0, -6)$
- [B] $(-1, -3)$
- [C] $(-1, 0)$
- [D] $(2, 3)$
- [E] $(2, -3)$

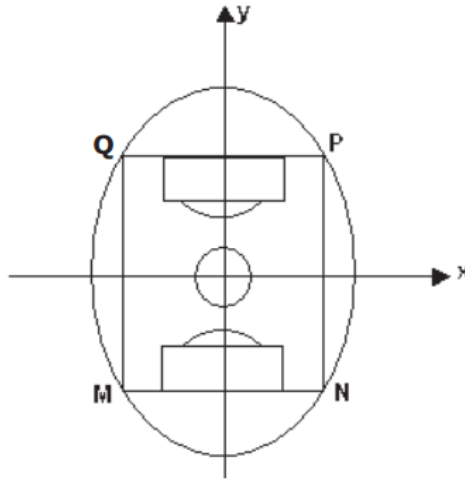
Problema H.15.3. (EsPCEEx 2011) A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por

- [A] duas retas concorrentes.
- [B] uma circunferência.
- [C] uma elipse.
- [D] uma parábola.
- [E] uma hipérbole.

Problema H.15.4. (EsPCEx 2011) Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo $MNPQ$, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo $MNPQ$.

Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

Figura H.6



- [A] 48m
- [B] 68m
- [C] 84m
- [D] 92m
- [E] 96m

Problema H.15.5. (FUVEST 2011) No plano cartesiano, os pontos $(0, 3)$ e $(-1, 0)$ pertencem à circunferência C . Uma outra circunferência de centro em $(-1/2, 4)$, é tangente a C no ponto $(0, 3)$. Então, o raio de C vale

- a) $\frac{\sqrt{5}}{8}$
- b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- d) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$
- e) $\sqrt{5}$

H.16 2010

Problema H.16.1. (FUVEST 2010) No plano cartesiano Oxy , a reta de equação $x+y=2$ é tangente à circunferência C no ponto $(0,2)$. Além disso, o ponto $(1,0)$ pertence a C . Então, o raio de C é igual a

- a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
- d) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- e) $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

Problema H.16.2. (IME 2009/2010) Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5},1)$. A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y=2x$ é:

- A) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$
- B) $y = -2x + 3\sqrt{3}$
- C) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$
- D) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$
- E) $y = 2x + \sqrt{3}$

H.17 2009

Problema H.17.1. (ITA 2009) A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

- A () 2.
- B () $\frac{3}{2}$.
- C () 1.
- D () $\frac{3}{4}$.
- E () $\frac{1}{2}$.

H.18 2003

Problema H.18.1. *(OBM-U 2003 2ª Fase) São dados uma parábola e um ponto A fora dela. Para cada ponto P da parábola, seja t por A corta r em Q . Prove que, ao variar P , o ponto Q percorre uma hipérbole equilátera.*

I Resoluções

I.1 2025

Resolução H.1.1:

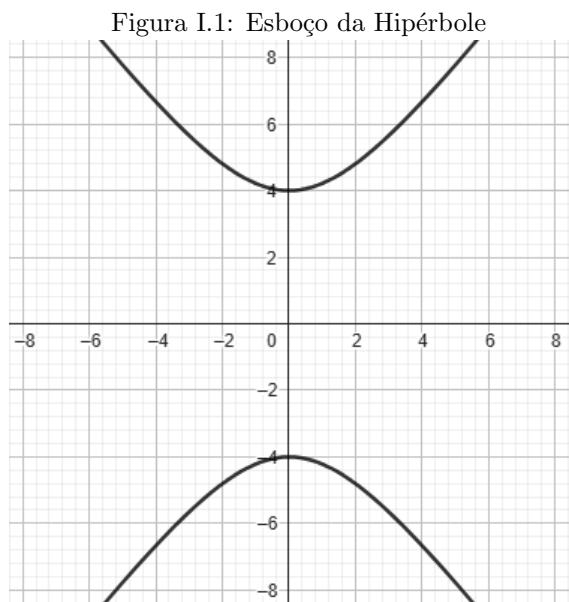
1. Dada a Hipérbole

$$\mathcal{H} : 9y^2 - 16x^2 - 144 = 0,$$

podemos reescrevê-la dividindo ambos os termos por 144 e depois somando 1,

$$\lambda : \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Consequentemente, essa é uma Hipérbole de Centro na Origem cujos coeficientes a e b são, respectivamente, iguais a 4 e 3. Além disso, o Eixo Focal da Hipérbole é o eixo OY , sendo os seus vértices do Eixo Focal os pontos $A = (0, 4)$ e $E = (0, -4)$.



2. Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0,$$

podemos reescrevê-la completando os seus quadrados:

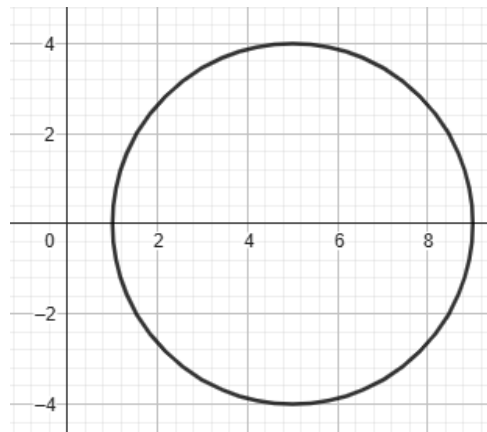
$$x^2 - 10x + y^2 = -9.$$

O que implica

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 - 9 \Rightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 16.$$

Assim, essa é a equação de uma Circunferência de centro $C = (5, 0)$ e raio igual a 4. Concluimos que os seus pontos de maior e menor coordenada y são, respectivamente $B = (5, 4)$ e $D = (5, -4)$.

Figura I.2: Esboço da Circunferência



3. Dada a equação $64x^2 + 121y^2 - 320x - 1536 = 0$ podemos reescrevê-la completando os seus quadrados:

$$64x^2 - 320x + 121y^2 = 1536$$

$$64(x^2 - 5x) + 121y^2 = 1536$$

$$64\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 121y^2 = 1536$$

$$64\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 121y^2 - 400 = 1536$$

$$64\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 121y^2 = 1936.$$

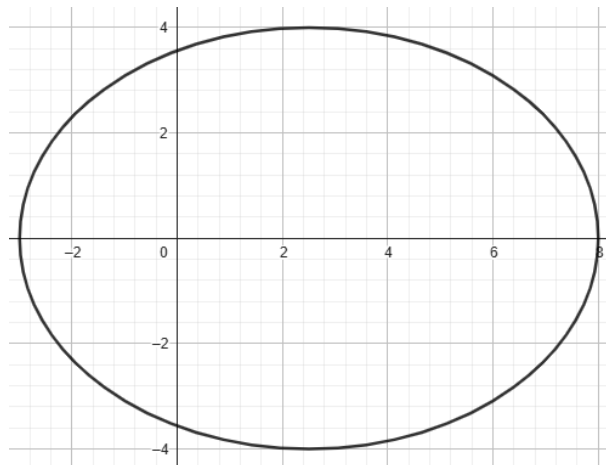
Dividindo ambos os termos por 1936 temos

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{121}{4}} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{11}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

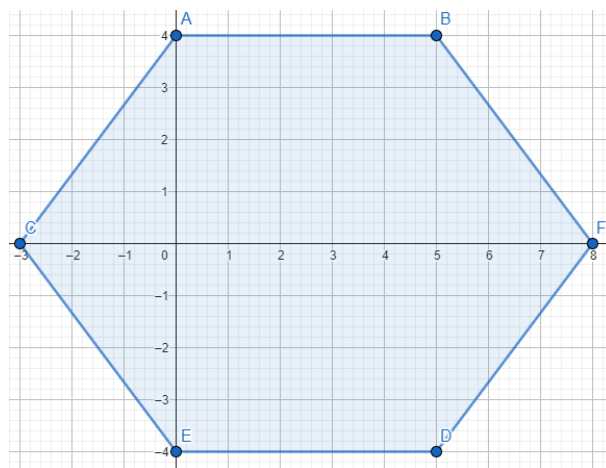
Portanto, essa é a equação de uma Elipse cujo Eixo Focal coincide com o Eixo OX , de centro $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, cujos coeficientes a e b são, respectivamente $\frac{11}{2}$ e 2 . Portanto, seus pontos de maior e menor coordenada x são, respectivamente $C = (-3, 0)$ e $F = (8, 0)$.

Figura I.3: Esboço da Elipse



Queremos, portanto, descobrir a área do polígono convexo de vértices $A = (0, 4)$, $B = (5, 4)$, $C = (-3, 0)$, $D = (5, -4)$, $E = (0, -4)$ e $F = (8, 0)$ conforme o esboço abaixo:

Figura I.4: Esboço



Como esse hexágono é simétrico em relação ao eixo x , podemos calcular a área superior e dobrá-la para encontrar a área total da figura. Calculemos a área do trapézio $ABFC$:

$$A_{ABFC} = \frac{\overline{CF} + \overline{AB}}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 4 = 32.$$

Segue que a área do hexágono é igual a 64 u.a..

Gabarito: Letra A.

I.2 2024

Resolução H.2.1:

Resolução 1: Podemos calcular a distância de cada um dos pontos das alternativas até os centros e verificar se essa distância equivale aos raios das Circunferências.

Sendo $A = (2, 0)$ o centro da Circunferência C_1 e $B = (0, 1)$ o centro da Circunferência C_2 , testemos primeiramente os primeiros pontos de cada alternativa:

- $d(A, (0, 1)) = \sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5};$
 $d(B, (0, 1)) = \sqrt{(0-0)^2 + (1-1)^2} = 0;$
- $d(A, (0, 0)) = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2;$
 $d(B, (0, 0)) = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2} = 1.$
- $d(A, (1, 0)) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2} = 1;$
 $d(B, (1, 0)) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$

Portanto, as alternativas A , C e E são falsas.

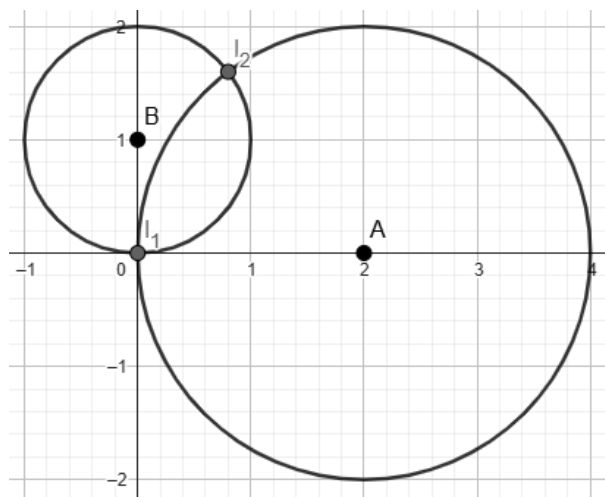
Testemos agora os últimos pontos das alternativas B e D

- $d(A, (1/5, 8/5)) = \sqrt{(2-1/5)^2 + (0-8/5)^2} = \sqrt{81/25 + 64/25} = \sqrt{145/25} > 2;$
 $d(B, (1/5, 8/5)) = \sqrt{(0-1/5)^2 + (1-8/5)^2} = \sqrt{1/25 + 9/25} < 1;$
- $d(A, (4/5, 8/5)) = \sqrt{(2-4/5)^2 + (0-8/5)^2} = \sqrt{36/25 + 64/25} = 2;$
 $d(B, (4/5, 8/5)) = \sqrt{(0-4/5)^2 + (1-8/5)^2} = \sqrt{16/25 + 9/25} = 1.$

Segue que os pontos que estão nas duas Circunferências são $(0, 0)$ e $(4/5, 8/5)$.

Gabarito: Letra D.

Figura I.5: Esboço



Resolução 2: Podemos representar as Circunferências C_1 e C_2 pelas equações

$$C_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 4 \text{ e } C_2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Agora, basta encontrarmos os valores de x e y que satisfazem as duas equações simultaneamente. Sendo $P = (x, y)$ um ponto que satisfaz as duas equações, logo $P \in C_1$ e, portanto

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4.$$

Podemos subtrair $2y - 1$ de ambos os termos, tendo assim

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 - 2y + 1 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 - 4x + 4 = 5 - 2y.$$

Como $P \in C_2$, logo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, em vista disso

$$1 - 4x + 4 = 5 - 2y \Rightarrow -4x = -2y \Rightarrow y = 2x.$$

Sendo assim, os pontos de interseção de C_1 e C_2 estão na reta $r : y = 2x$. Vamos utilizar $y = 2x$ na equação de C_1 para encontrar as interseções:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (2x)^2 &= 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 = 4 \\ &\Rightarrow 5x^2 - 4x = 0 \\ &\Rightarrow x \cdot (5x - 4) = 0. \end{aligned}$$

Diante do exposto, $x = 0$ e $y = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$ e $y = \frac{8}{5}$.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.2.2:

Dada a Hipérbole $4x^2 - 5y^2 = 20$, para encontrar seus focos precisamos reorganizar a sua equação e encontrar seus coeficientes. Dividindo ambos os membros por 20 temos

$$4x^2 - 5y^2 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

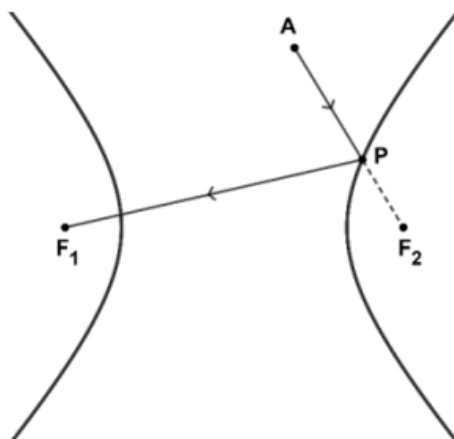
Assim, essa Hipérbole centrada na Origem tem coeficientes $a = \sqrt{5}$ e $b = 2$.

Pela equação F.6, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$, portanto

$$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3.$$

Segue que os focos dessa Hipérbole são $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$.

Figura I.6



Dado o ponto $A = (1, 3)$, para que ele reflita para F_1 precisamos encontrar a reta que o levaria até F_2 .

Sabemos que $\overrightarrow{AF_2} = (2, -3)$. Sendo assim, um possível vetor perpendicular a $\overrightarrow{AF_2}$ é o vetor $\vec{v} = (3, 2)$. Levando isso em conta, a reta que contém A e F_2 pode ser representada por

$$r : 3x + 2y + k = 0.$$

Como $A \in r$, temos que

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow 3 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = -9.$$

Concluimos que a reta é representada por $3x + 2y - 9 = 0$.

Gabarito: Letra A

Resolução H.2.3:

Dadas a reta $r : y = x - 1$ e a Hipérbole $H : \frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$, queremos encontrar, inicialmente, uma perpendicular a r que passe pelo centro de H .

Sabemos que s é perpendicular a r se o produto de suas inclinações for -1. Portanto a equação de s é

$$s : y = -x + k.$$

Como o Centro $C = (3, 2)$ da Hipérbole pertence à reta s , logo

$$2 = -3 + k \Rightarrow k = 5.$$

Ou seja, a reta s tem equação $s : y = -x + 5$. Tal reta intersecta o eixo das ordenadas em $y = 5$, sendo as únicas alternativas possíveis as letras [A] e [B], nos restando verificar se há ou não interseção entre a reta e a Hipérbole.

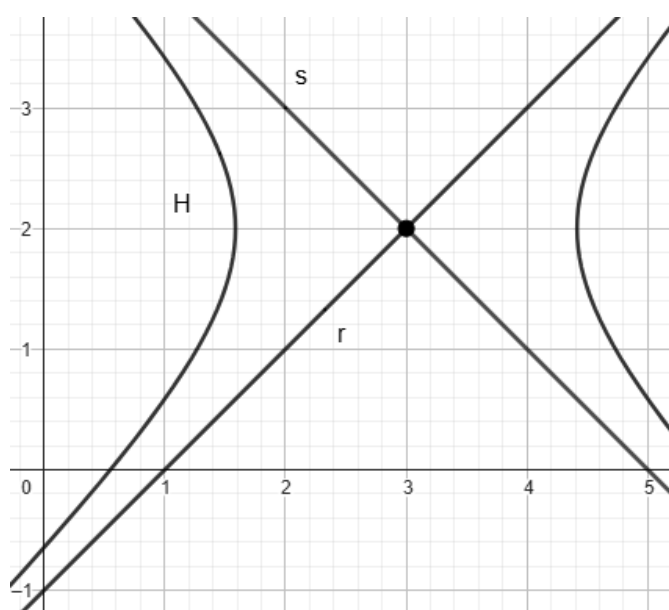
Ora, basta verificar se ao substituir y por $-x+5$ na equação da Hipérbole é possível

encontrar algum ponto.

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(-x+5-2)^2}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(-x+3)^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Note que $(x-3)^2 = (-x+3)^2$ e, portanto, a subtração acima terá diferença nula. Como $0 \neq 1$, logo não existe ponto da reta s que pertença à Hipérbole H , não havendo assim interseção.

Figura I.7: Esboço



Gabarito: Letra A.

Resolução H.2.4:

a) Dada a Parábola $P : y = x^2$ e a reta $r : 2x - y + 3 = 0$, queremos determinar todos os pontos de interseção entre a reta e a Parábola.

Seja Q um ponto que pertence a $P \cap r$. Como $Q \in r$, logo $2x - y + 3 = 0$. Visto que $Q \in P$, logo $y = x^2$ e, portanto, $2x - x^2 + 3 = 0$.

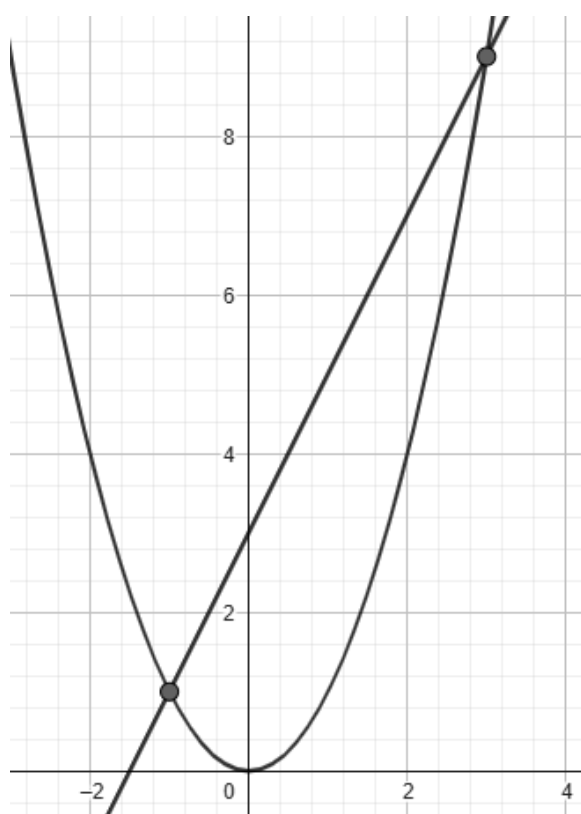
Podemos resolver uma equação do 2º grau para encontrar as abscissas das

interseções.

$$\begin{aligned}
 & -x^2 + 2x + 3 = 0 \\
 \Rightarrow & \Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 \\
 \Rightarrow & \Delta = 4 + 12 \\
 \Rightarrow & \Delta = 16. \\
 \Rightarrow & x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} \\
 \Rightarrow & x = \frac{-2 \pm 4}{-2} \\
 \Rightarrow & x = 1 \mp 2.
 \end{aligned}$$

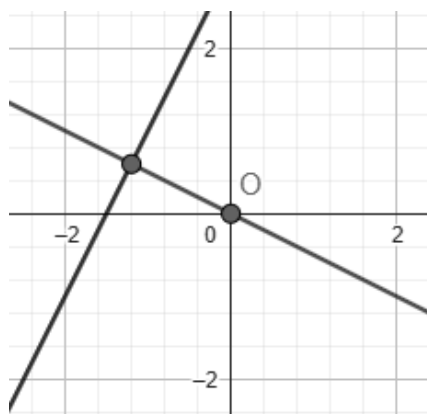
Sendo assim, $x = -1$ ou $x = 3$. Como $y = x^2$, logo os pontos de interseção são: $(-1, 1)$ e $(3, 9)$.

Figura I.8: Esboço



b) Dada a reta $r : 4x + 3y - 7 = 0$ queremos saber o ponto de r que está mais próximo da Origem O . Para isso, encontraremos a perpendicular a r que passa por O e encontraremos a interseção das duas retas.

Figura I.9: Esboço



Uma forma de representar uma perpendicular a r é $s : 3x - 4y + k = 0$.

Como $O \in s$, logo

$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Sendo assim, a perpendicular a r que passa pela origem é a reta $s : 3x - 4y = 0$.

Seja $P \in r \cap s$. Como $P \in r$, logo

$$4x + 3y - 7 = 0$$

Como $P \in s$, logo

$$3x - 4y = 0 \iff x = \frac{4y}{3}.$$

Portanto

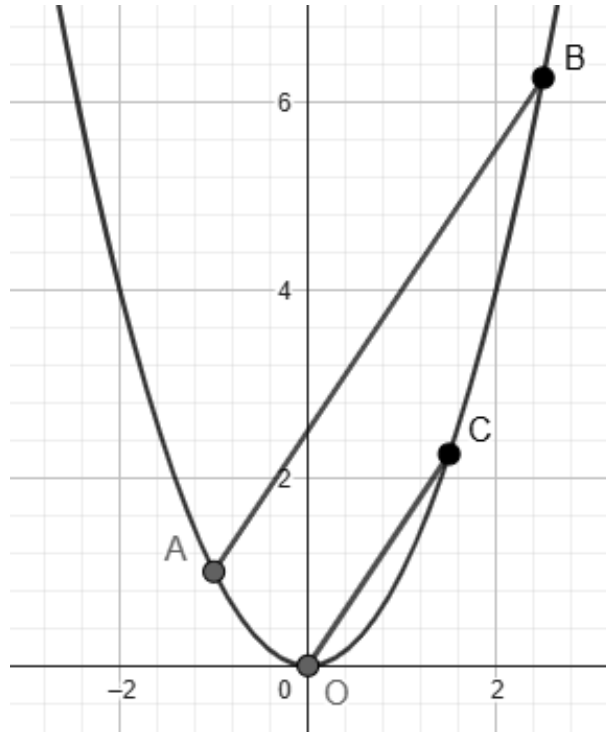
$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{4y}{3} + 3y - 7 &= 0 \Rightarrow \frac{16y}{3} + \frac{9y}{3} = 7 \\ &\Rightarrow \frac{25y}{3} = 7 \\ &\Rightarrow y = \frac{21}{25}. \end{aligned}$$

$$\text{Como } x = \frac{4y}{3}, \text{ logo } x = \frac{4 \cdot \frac{21}{25}}{3} = \frac{28}{25}.$$

Portanto, o ponto de r que está mais próximo da origem é o ponto $P = \left(\frac{28}{25}, \frac{21}{25} \right)$.

c) Sendo A , B e C três pontos da Parábola $P : y = x^2$, tais que $A = (-1, 1)$, B está no primeiro quadrante e $AB \parallel OC$, queremos determinar B e C de forma que $d(B, C) = 17$.

Figura I.10: Esboço



Como $B \in P$, podemos representar B da forma (x_B, x_B^2) . Dessa forma, sabemos que $\overrightarrow{AB} = (x_B + 1, x_B^2 - 1)$, que é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1 - x_B^2, x_B + 1)$.

Como $OC \parallel AB$, logo $OC \perp \vec{v}$. Sendo assim, podemos representar a reta que passa por O e C por

$$s : (1 - x_B^2)x + (x_B + 1)y + k = 0.$$

Como $O \in s$, logo

$$(1 - x_B^2) \cdot 0 + (x_B + 1) \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Segue que

$$s : (1 - x_B^2)x + (x_B + 1)y = 0.$$

Já que queremos a interseção de s com a Parábola P , basta assumir que $y = x^2$. Assim,

$$(1 - x_B^2)x + (x_B + 1)x^2 = 0.$$

Tendo em vista que não queremos a Origem, podemos considerar $x \neq 0$ e dividiremos ambos os termos por x .

$$\begin{aligned} 1 - x_B^2 + (x_B + 1)x &= 0 \Rightarrow (x_B + 1)x = x_B^2 - 1 \\ &\Rightarrow (x_B + 1)x = (x_B + 1) \cdot (x_B - 1). \end{aligned}$$

Como $B \neq A$, logo $x_B \neq -1$ e, portanto $(x_B + 1) \neq 0$. Podemos, portanto, dividir

ambos os termos por $(x_B + 1)$ para obter

$$x = (x_B - 1).$$

Sendo assim, o ponto C pode ser representado por $(x_B - 1, (x_B - 1)^2)$.

Logo

$$\begin{aligned} d(B, C) &= \sqrt{((x_B - 1) - x_B)^2 + ((x_B - 1)^2 - x_B^2)^2} \\ \Rightarrow d(B, C) &= \sqrt{(-1)^2 + (-2x_B + 1)^2}. \end{aligned}$$

Como $d(B, C) = \sqrt{17}$, logo

$$\sqrt{1 + (-2x_B + 1)^2} = \sqrt{17}.$$

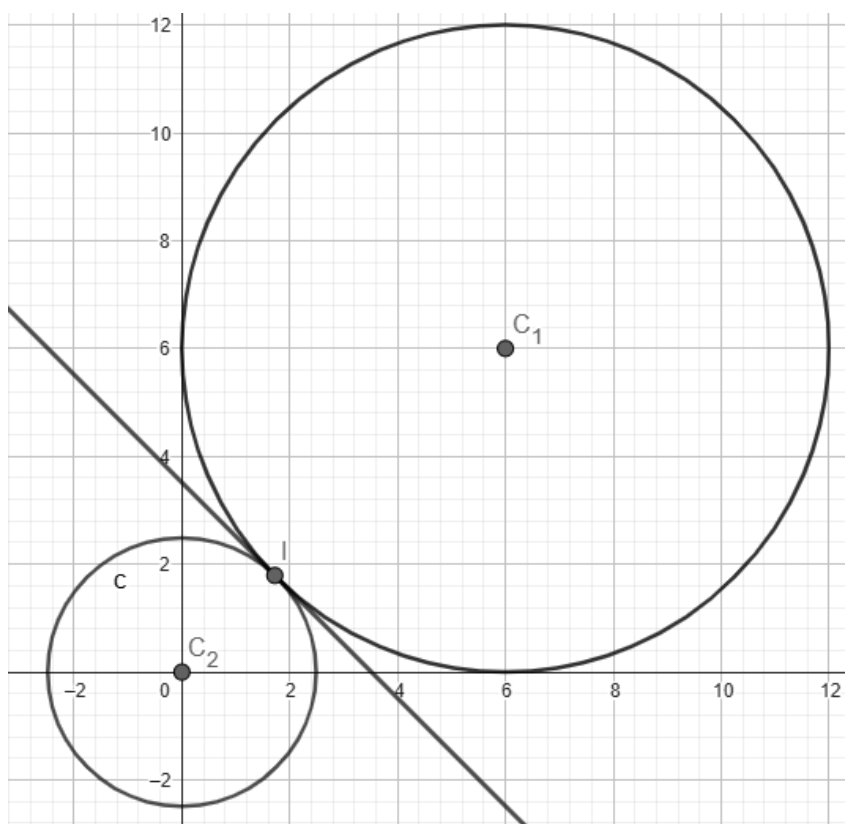
Visto que $1 + (-2x_B + 1)^2 > 0$, é verdade que

$$\begin{aligned} 1 + (-2x_B + 1)^2 = 17 &\Rightarrow (-2x_B + 1)^2 = 16 \\ &\Rightarrow (-2x_B + 1) = \pm 4 \\ &\Rightarrow -2x_B = -1 \pm 4 \\ &\Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \mp 2. \end{aligned}$$

Como B é um ponto do primeiro quadrante, logo $x_B = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. Sendo assim, o ponto B é determinado por $B = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ e, conseqüentemente, o ponto C é determinado por $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

Resolução H.2.5:

Figura I.11: Esboço



Como os centros das Circunferências são os pontos $C_1 = (6, 6)$ e $C_2 = (0, 0)$, logo a reta tangente às Circunferências deve ser perpendicular ao vetor $\overrightarrow{C_2C_1} = (6, 6)$. Tal reta pode ser escrita da forma

$$r : 6x + 6y + c_1 = 0.$$

Que, por simplicidade, podemos reescrever como

$$r : x + y + c = 0.$$

O ponto de tangencia entre as Circunferências é um ponto da Circunferência $\mathcal{C}_1 : (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$ que pertence à reta s que contém os centros C_2 e C_1 . Sem grandes dificuldades, podemos verificar que a reta é representada pela equação

$$s : y = x.$$

Encontremos os pontos de $\mathcal{C}_1$ tais que $y = x$.

$$\begin{aligned} (x - 6)^2 + (x - 6)^2 &= 36 \Rightarrow (x - 6)^2 = 18 \\ &\Rightarrow x - 6 = \pm 3\sqrt{2} \\ &\Rightarrow x = 6 \pm 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Encontramos, portanto, dois pontos possíveis que estão simultaneamente na reta s e na Circunferência $\mathcal{C}_1$, quais sejam $(6 + 3\sqrt{2}, 6 + 3\sqrt{2})$ e $(6 - 3\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2})$. No entanto, o ponto que designamos no esboço por I é, desses dois, o mais próximo da origem, sendo assim,

$$I = (6 - 3\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2}).$$

Como I é um ponto de r , logo

$$(6 - 3\sqrt{2}) + (6 - 3\sqrt{2}) + c = 0 \Rightarrow c = 6\sqrt{2} - 12 = 6(\sqrt{2} - 2).$$

Portanto a equação da reta tangente interior comum às Circunferências é dada por

$$r : x + y + 6(\sqrt{2} - 2).$$

Gabarito: Letra C

Resolução H.2.6:

Dados os pontos $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $C = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, podemos encontrar as retas AB e BC para então encontrar as bissetrizes¹ do ângulo $\widehat{ABC}$. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ que é perpendicular a $v_1 = (\sqrt{3}, -\sqrt{2})$. Portanto, a reta que passa por A e B tem equação:

$$r_1 : \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + k_1 = 0.$$

No entanto, como $A = (0, 0) \in r_1$, logo

$$r_1 : \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0.$$

Sabemos também que $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$ que é perpendicular a $\vec{v}_2 = \left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Portanto, a reta que passa por B e C tem equação:

$$r_2 : \sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y + k_2 = 0.$$

No entanto, como $B \in r_2$, logo

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + k_2 = 0 &\Rightarrow \sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} + k_2 = 0 \\ &\Rightarrow k_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Portanto,

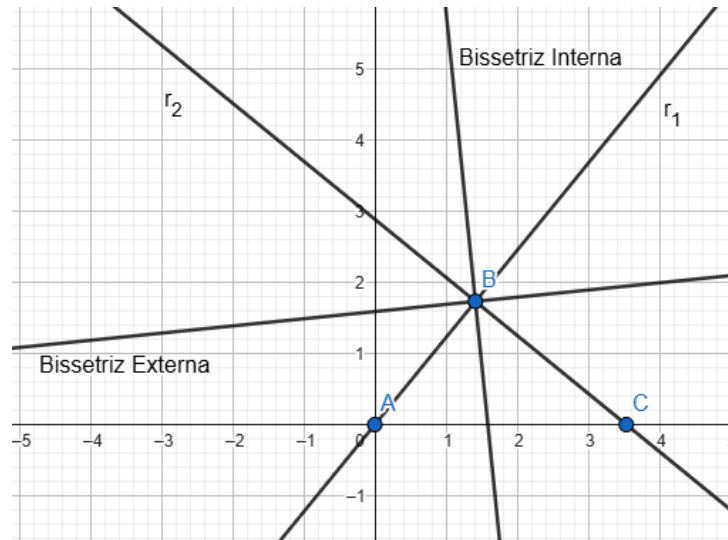
$$r_2 : \sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6} = 0.$$

Encontremos agora as bissetrizes de r_1 e r_2 , visto que uma delas será a bissetriz

¹Lembre-se que as bissetrizes são o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a duas retas.

do ângulo $\widehat{ABC}$ e a outra será a sua perpendicular, conforme o esboço abaixo:

Figura I.12: Esboço



Sendo $P(x, y)$ um ponto de uma das bissetrizes, sabemos que

$$\begin{aligned}
 d(P, r_1) = d(P, r_2) &\Rightarrow \frac{|\sqrt{3}x - \sqrt{2}y|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{|\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}} \\
 &\Rightarrow \frac{|\sqrt{3}x - \sqrt{2}y|}{\sqrt{3+2}} = \frac{|\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}|}{\sqrt{3+\frac{9}{2}}} \\
 &\Rightarrow \frac{|\sqrt{3}x - \sqrt{2}y|}{\sqrt{5}} = \frac{|\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}|}{\sqrt{\frac{15}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os termos por $\sqrt{5}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 |\sqrt{3}x - \sqrt{2}y| &= \frac{|\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}|}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \\
 &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}|\sqrt{3}x - \sqrt{2}y| = |\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}| \\
 &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}x - \sqrt{2}y) = \pm(\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}) \\
 &\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{3}y = \pm(\sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{5}{2}\sqrt{6}).
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os termos por 2:

$$3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = \pm(2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y - 5\sqrt{6}).$$

Para o caso positivo, temos

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y &= 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y - 5\sqrt{6} \\ \Rightarrow 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}x + 5\sqrt{6} &= 2\sqrt{3}y + 3\sqrt{2}y \\ \Rightarrow (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})x + 5\sqrt{6} &= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})y. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os termos por $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ obtemos

$$\begin{aligned} (18 - 12\sqrt{6} + 12)x - (30\sqrt{3} - 30\sqrt{2}) &= (18 - 12)y \\ \Rightarrow (30 - 12\sqrt{6})x + 30\sqrt{3} - 30\sqrt{2} &= 6y. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos por 6, obtemos

$$(5 - 2\sqrt{6})x + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2} = y.$$

Note que essa é uma reta crescente e, pelo esboço, sabemos que a bissetriz interna é uma reta decrescente. Portanto, a equação da reta que passa por B e é perpendicular à bissetriz interna é

$$r : y = (5 - 2\sqrt{6})x + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}.$$

Gabarito: Letra A.

Resolução H.2.7:

Encontremos, inicialmente, o centro e o raio da Circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 36 = 0.$$

Ou seja,

$$x^2 - 4x + y^2 - 12y + 36 = 0.$$

Completando quadrados, obtemos

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4.$$

Portanto, o centro da Circunferência é o ponto $(2, 6)$ e o seu raio é 2.

Agora, encontremos os coeficientes da Elipse em função de λ .

$$\begin{aligned}\lambda x^2 + (\lambda + 4)y^2 - 4\lambda x - (10\lambda + 40)y + 25(\lambda + 4) - \lambda^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda x^2 - 4\lambda x + (\lambda + 4)y^2 - (10\lambda + 40)y &= \lambda^2 - 25(\lambda + 4) \\ \Rightarrow \lambda(x^2 - 4x) + (\lambda + 4)(y^2 - 10y) &= \lambda^2 - 25(\lambda + 4).\end{aligned}$$

Completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda(x^2 - 4x + 4) + (\lambda + 4)(y^2 - 10y + 25) &= \lambda^2 - 25(\lambda + 4) + 4\lambda + 25(\lambda + 4) \\ \Rightarrow \lambda(x - 2)^2 + (\lambda + 4)(y - 5)^2 &= \lambda^2 + 4\lambda \\ \Rightarrow \lambda(x - 2)^2 + (\lambda + 4)(y - 5)^2 &= \lambda(\lambda + 4).\end{aligned}$$

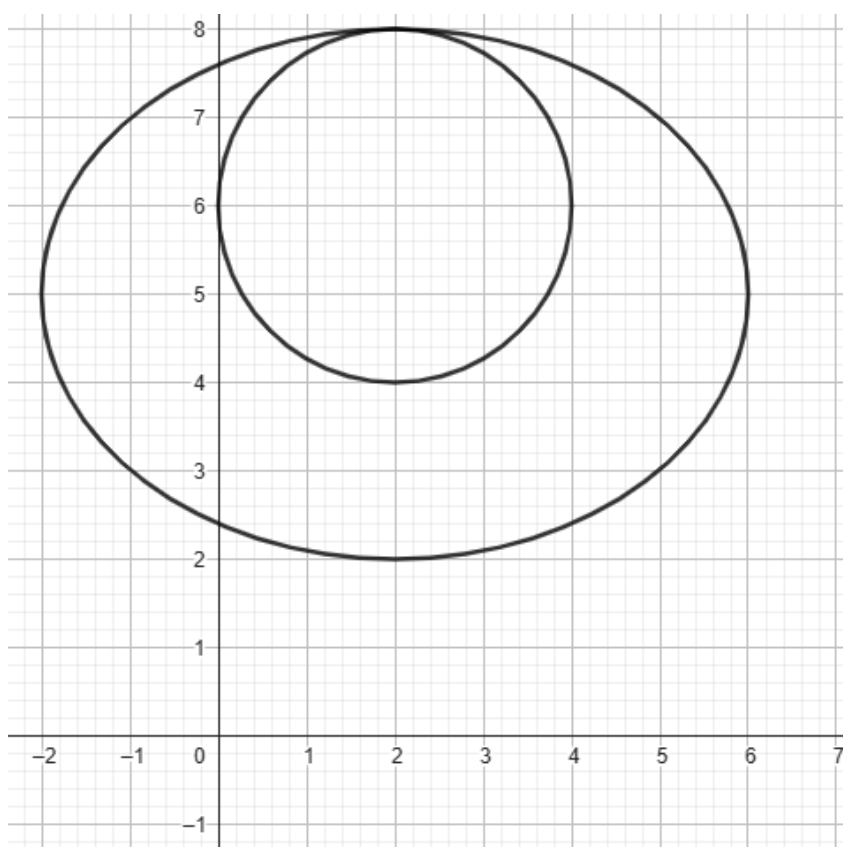
Dividindo ambos os termos por $\lambda(\lambda + 4)$, obtemos

$$\frac{(x - 2)^2}{\lambda + 4} + \frac{(y - 5)^2}{\lambda} = 1.$$

Portanto, essa é uma Elipse cujo Eixo Focal é paralelo ao Eixo OX , de centro no ponto $(2, 5)$ e de coeficientes $a = \sqrt{\lambda + 4}$, $b = \sqrt{\lambda}$ e $c = 4$.

Como b é a distância do centro aos vértices verticais, vejamos o seguinte esboço:

Figura I.13: Esboço



Note que, como o ponto de maior ordenada da Circunferência $(2, 8)$ está acima do centro da Elipse em 3 unidades de medida, é suficiente que b seja igual a 3. Portanto

$$\sqrt{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = 9.$$

Repare que para qualquer valor de λ menor a Circunferência não ficará inscrita na Elipse e para qualquer valor de λ maior, diminuirá a excentricidade².

Gabarito: Letra C.

Resolução H.2.8:

Para que uma Circunferência seja tangente ao eixo OY , é suficiente e necessário que o seu raio seja igual à abscissa de seu centro. Como a Circunferência passa pelos pontos $B = (1, 4)$ e $C = (3, 6)$, logo o centro pertence à mediatriz desses pontos.

Sabemos que $\overrightarrow{BC} = (2, 2)$ é perpendicular à mediatriz e que o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M = (2, 5)$. Consequentemente, a mediatriz é a reta de equação

$$r : 2x + 2y + k = 0.$$

Visto que $M \in r$, logo

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + k = 0 \Rightarrow k = -14.$$

Portanto, a mediatriz tem equação

$$r : 2x + 2y - 14 = 0 \Rightarrow r : x + y - 7 = 0.$$

Queremos um ponto $P(a, b)$ dessa mediatriz, tal que $d(P, B) = d(P, C) = a$. Como $P \in r$, logo $a + b - 7 = 0 \Rightarrow b = 7 - a$. Segue que $P = (a, 7 - a)$.

$$\begin{aligned} d(P, B) &= \sqrt{(a-1)^2 + (7-a-4)^2} = a \\ &= \sqrt{a^2 - 2a + 1 + (3-a)^2} = a \\ &= \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 9 - 6a + a^2} = a \\ &= \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = a. \end{aligned}$$

Já que $(a-1)^2 + (7-a-4)^2 > 0$, podemos elevar ambos os termos ao quadrado

$$2a^2 - 8a + 10 = a^2 \Rightarrow a^2 - 8a + 10 = 0.$$

²Como a excentricidade é $\frac{c}{a}$ e a é diretamente proporcional a λ , logo quanto maior o valor de λ , menor será a excentricidade.

Resolvendo a equação do segundo grau na variável a , obtemos

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \Rightarrow \Delta = 24. \\ \Rightarrow a &= \frac{8 \pm \sqrt{24}}{2} \\ \Rightarrow a &= \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ \Rightarrow a &= 4 \pm \sqrt{6}.\end{aligned}$$

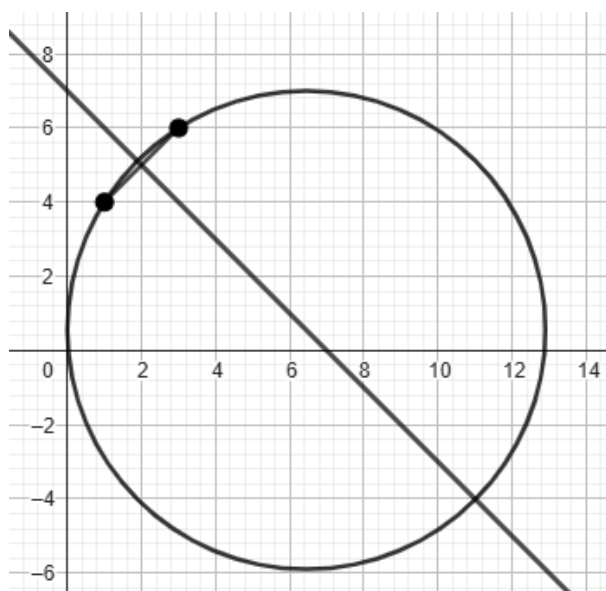
Assim, é possível que o centro P dessa Circunferência esteja no ponto

$$\begin{aligned}C_1 &= (4 + \sqrt{6}, 7 - (4 + \sqrt{6})) = (4 + \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}) \quad \text{ou} \\ C_2 &= (4 - \sqrt{6}, 7 - (4 - \sqrt{6})) = (4 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}).\end{aligned}$$

Como a questão quer a Circunferência de maior raio, queremos aquela em que o valor da abscissa seja maior, portanto aquela em que $P = C_1$. Concluimos que a equação da Circunferência será

$$(x - 4 - \sqrt{6})^2 + (y - 3 + \sqrt{6})^2 = (4 + \sqrt{6})^2.$$

Figura I.14: Esboço



I.3 2023

Resolução H.3.1:

Sabemos que o Lugar Geométrico dos pontos que observam um segmento com um ângulo fixo α são dois arcos capazes simétricos ao segmento. Dessa forma, sendo Q_1 um ponto de uma Circunferência que toca os pontos A e B , basta que tenhamos outro ponto

no arco $\widehat{AB}$.

O único ponto Q_n que está nessa mesma Circunferência é o ponto Q_3 .

Gabarito: Letra B.

Resolução H.3.2:

Para descobrir a reta que passa pelos pontos $P(-1, -3)$ e $Q(3, 5)$, primeiro descobriremos um vetor perpendicular a $\overrightarrow{PQ} = (4, 8)$. Um vetor possível é $\vec{v} = (8, -4)$. Assim $r : 8x - 4y + k = 0$. Como $P \in r$, logo

$$\begin{aligned} 8 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3) + k &= 0 \Rightarrow -8 + 12 + k = 0 \\ &\Rightarrow k = -4. \end{aligned}$$

Concluimos que $r : 8x - 4y - 4 = 0$, que também pode ser representada por

$$r : 2x - y - 1 = 0.$$

Gabarito: Letra C.

Resolução H.3.3:

Sabemos que $r : -\frac{x}{2} + 2y - 3 = 0$ e $s : ax + by + c = 0$ são perpendiculares. É verdade que r é perpendicular ao vetor $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Consequentemente, s é perpendicular ao vetor $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Assim, podemos representar s pela equação

$$s : 2x + \frac{1}{2}y + c_1 = 0.$$

A qual podemos multiplicar por 2 para obter

$$s : 4x + y + c = 0.$$

Como $P = (2, 2) \in s$, logo

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 2 + c &= 0 \Rightarrow 8 + 2 + c = 0 \\ &\Rightarrow 10 + c = 0 \\ &\Rightarrow c = -10. \end{aligned}$$

Portanto, a reta s pode ser representada pela equação

$$s : 4x + y - 10.$$

Sendo os possíveis valores para a, b e c , respectivamente 4, 1 e -10.

Gabarito: Letra B

Observação: As alternativas [A] e [C] representam a mesma reta, portanto são auto-excludentes (não pode haver duas alternativas corretas).

Resolução H.3.4:

Dadas as Circunferências

$$\lambda_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0,$$

podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_1 : x^2 - 2x + y^2 - 4y &= -1 \\ \Rightarrow \lambda_1 : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= -1 + 1 + 4 \\ \Rightarrow \lambda_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 4 \quad \text{e} \\ \lambda_2 : x^2 + 4x + y^2 - 10y &= -13 \\ \Rightarrow \lambda_2 : x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 &= -13 + 4 + 25 \\ \Rightarrow \lambda_2 : (x + 2)^2 + (y - 5)^2 &= 16. \end{aligned}$$

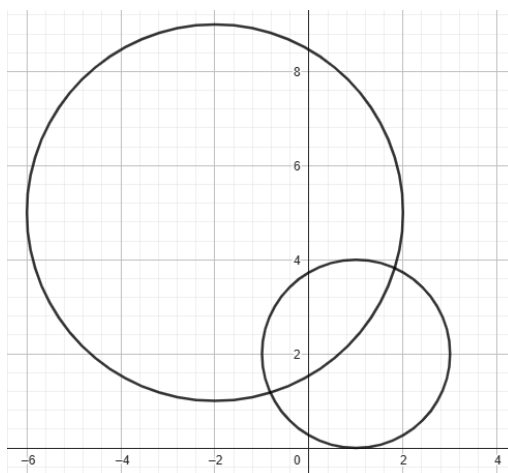
Assim, λ_1 tem centro $C_1 = (1, 2)$ e raio 2 e λ_2 tem centro $C_2 = (-2, 5)$ e raio 4.

Podemos encontrar a posição relativa entre λ_1 e λ_2 comparando seus raios às distâncias entre seus centros.

$$\begin{aligned} d(C_1, C_2) &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 5)^2} \\ \Rightarrow d(C_1, C_2) &= \sqrt{3^2 + (-3)^2} \\ \Rightarrow d(C_1, C_2) &= \sqrt{18}. \end{aligned}$$

Note que $|r_2 - r_1| < d(C_1, C_2) < |r_2 + r_1|$. Portanto, as Circunferências são secantes entre si.

Figura I.15: Esboço



Gabarito: Letra E.

Resolução H.3.5:

Como a questão disse que a distância entre $P1$ e $P2$ é de 120 metros, logo $2a = 120$ e, portanto, $a = 60$. De forma análoga, como sabemos que os mastros possuem 80 metros entre si, concluímos que $2c = 80$ e, consequentemente $c = 40$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, logo

$$\begin{aligned} 60^2 = b^2 + 40^2 &\Rightarrow 3600 = b^2 + 1600 \\ &\Rightarrow b^2 = 2000 \\ &\Rightarrow b = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o valor de $a + b$ é $60 + 20\sqrt{5}$.

Gabarito: Letra A.

Resolução H.3.6:

Sendo $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$ e $\cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$, logo $\frac{\cotg(\alpha)}{\operatorname{cosec}(\alpha)} = \cos(\alpha)$.

Como $12\operatorname{cosec}(\alpha)y - 8\cotg(\alpha)x = 0$, logo

$$12\operatorname{cosec}(\alpha)y = 8\cotg(\alpha)x \Rightarrow y = \frac{8\cotg(\alpha)x}{12\operatorname{cosec}(\alpha)} \Rightarrow y = \frac{2\cos(\alpha)}{3}x.$$

Além disso, sabemos que

$$4\operatorname{cosec}(\alpha)x - 6\cotg(\alpha)y = 4\operatorname{sen}(\alpha).$$

Substituindo o valor de y , temos

$$4\operatorname{cosec}(\alpha)x - 6\cotg(\alpha) \cdot \frac{2\cos(\alpha)}{3}x = 4\operatorname{sen}(\alpha).$$

Como a questão disse que $\alpha \neq k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), logo podemos multiplicar ambos os termos por $\operatorname{sen}(\alpha)$

$$\begin{aligned} 4x - 4\cos^2(\alpha)x &= 4\operatorname{sen}^2(\alpha) \Rightarrow 4x(1 - \cos^2(\alpha)) = 4\operatorname{sen}^2(\alpha) \\ &\Rightarrow x(\operatorname{sen}^2(\alpha)) = \operatorname{sen}^2(\alpha). \end{aligned}$$

Como $\alpha \neq k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), podemos dividir ambos os termos por $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ e obter $x = 1$. Concluímos que os pontos desse Lugar Geométrico podem ser representados por

$$(x, y) = \left(1, \frac{2\cos(\alpha)}{3}\right).$$

Sendo esse um segmento de reta vertical, cuja abscissa é igual a 1 e a ordenada varia de $-2/3$ a $2/3$.

Gabarito: Letra B.

Resolução H.3.7:

Conforme visto no capítulo 6, para mostrar que a equação do segundo grau representa duas retas concorrentes, resolveremos a equação na variável x .

Reorganizemos a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + (cy - 3)x + (6y^2 - 4y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Assim $a = 2$, $b = (cy - 3)$ e $c = (6y^2 - 4y - 2)$. Encontremos o discriminante Δ .

$$\begin{aligned} \Delta &= (cy - 3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (6y^2 - 4y - 2) \\ &= c^2y^2 - 6cy + 9 - 8 \cdot (6y^2 - 4y - 2) \\ &= c^2y^2 - 6cy + 9 - 48y^2 + 32y + 16 \\ &= (c^2 - 48)y^2 + (32 - 6c)y + 25. \end{aligned}$$

Para que a equação represente duas retas concorrentes é suficiente e necessário que Δ seja um trinômio quadrado perfeito. Uma consequência disso é que a metade do termo do meio é a média geométrica dos termos extremos³. Portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{32 - 6c}{2}\right)^2 &= (c^2 - 48) \cdot 25 \Rightarrow (16 - 3c)^2 = 25c^2 - 1200 \\ &\Rightarrow 256 - 96c + 9c^2 = 25c^2 - 1200 \\ &\Rightarrow -16c^2 - 96c + 1456 = 0. \end{aligned}$$

Podemos simplificar essa expressão dividindo seus termos por -16.

$$c^2 + 6c - 91 = 0.$$

Encontremos o discriminante dessa nova equação:

$$\begin{aligned} \Delta &= (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-91) \\ \Rightarrow \Delta &= 36 + 364 = 400 \\ \Rightarrow c &= \frac{-6 \pm 20}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $c_1 = -13$ e $c_2 = 7$. Como queremos o valor positivo de c , logo o único valor possível é $c = 7$.

Gabarito: Letra B.

³ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Note que ab é a média geométrica de a^2 e b^2 .

Resolução H.3.8:

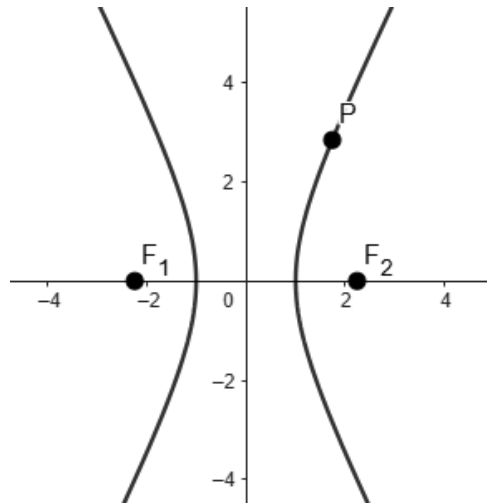
Dada a equação da Hipérbole $H : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, sabemos que seus coeficientes são $a = 1$ e $b = 2$.

Pela equação F.6 sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}.$$

Como essa é uma Hipérbole cujo Eixo Focal coincide com o eixo OX , centrada na origem, logo seus focos estão nos pontos $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$. Sendo assim $d(F_1, F_2) = 2\sqrt{5}$.

Figura I.16: Esboço



Sendo P um ponto de Hipérbole tal que o triângulo PF_1F_2 tem perímetro $5\sqrt{5}$, podemos afirmar, tendo em vista que o segmento $\overline{F_1F_2}$ tem comprimento $2\sqrt{5}$, que a soma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é igual a $3\sqrt{5}$.

Além disso, pela definição de Hipérbole, sabemos que, sendo $P \in H$, temos que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Sem perda de generalidade⁴, consideremos $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$. Nesse caso

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2 \Rightarrow \overline{PF_1} = 2 + \overline{PF_2}.$$

Vamos substituir, então, $\overline{PF_1}$ por $2 + \overline{PF_2}$ na equação da soma:

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 3\sqrt{5} &\Rightarrow 2 + \overline{PF_2} + \overline{PF_2} = 3\sqrt{5} \\ &\Rightarrow 2\overline{PF_2} = 3\sqrt{5} - 2 \\ &\Rightarrow \overline{PF_2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} - 1. \end{aligned}$$

⁴O outro caso traria a mesma solução, porém de forma simétrica

Como $\overline{PF_1} = 2 + \overline{PF_2}$, logo $\overline{PF_1} = \frac{3\sqrt{5}}{2} + 1$. Queremos o produto das medidas dos lados do triângulo, portanto

$$\overline{F_1F_2} \cdot \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} + 1 \right).$$

Utilizando o produto notável, obtemos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{9 \cdot 5}{4} - 1^2 \right) &= 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{45}{4} - 1 \right) \\ &= 2\sqrt{5} \cdot \frac{41}{4} \\ &= \frac{41\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o produto das medidas dos lados do triângulo é $\frac{41\sqrt{5}}{2}$.

Gabarito: Letra A.

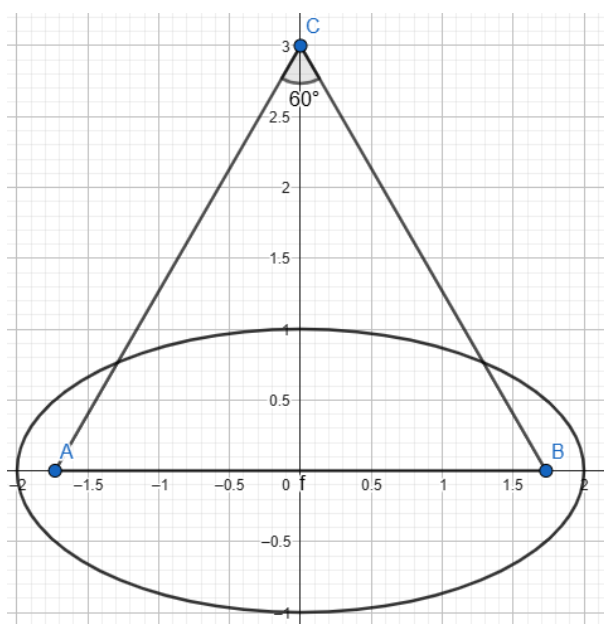
Resolução H.3.9:

Queremos determinar os pontos da Elipse $E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, tais que os segmentos que ligam P aos focos de E formem um ângulo de 60° .

Sabemos que o Lugar Geométrico dos pontos que observam um segmento com um ângulo α é um par de arcos capazes simétricos a esse segmento. Temos, portanto, que encontrar esses arcos e em seguida encontrar as suas interseções com a Elipse.

Sabemos que o ponto C que forma um triângulo equilátero com F_1 e F_2 forma um ângulo de 60° quando ligado a esses focos. Portanto C pertence ao arco capaz. Sendo assim, encontremos a Circunferência que contém os pontos C , F_1 e F_2 .

Figura I.17: Esboço

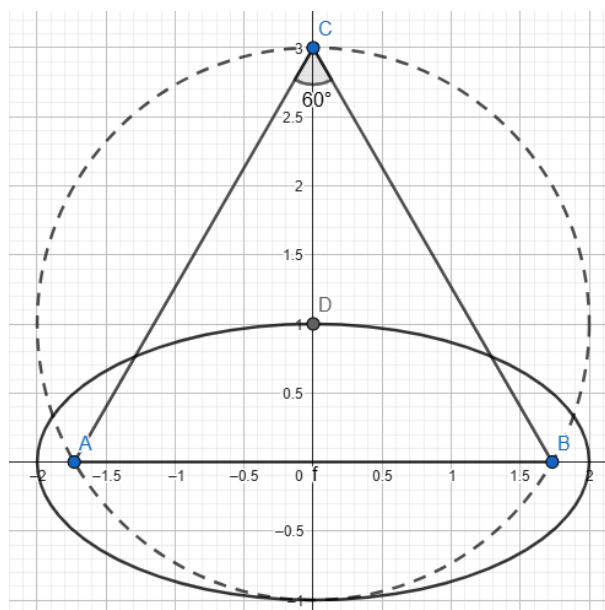


Como $\overline{F_1 F_2} = 2\sqrt{3}$, logo o lado desse triângulo equilátero é igual a $2\sqrt{3}$. Sabemos que o circuncentro em um triângulo equilátero coincide com seu baricentro e com seu ortocentro, portanto podemos dividir a sua altura em uma proporção de dois para um para encontrar as suas coordenadas. Visto que $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, encontramos que

$$h = \frac{(2\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Consequentemente, o centro dessa Circunferência encontra-se no ponto $(0,1)$.

Figura I.18: Esboço



Como $C = (0, 3)$ pertence a Circunferência, logo o seu raio é igual a 2. Sendo assim, a equação da Circunferência é:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

No entanto, sabemos que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e, portanto

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Vamos substituir x^2 nessa equação por $4 - (y - 1)^2$

$$\begin{aligned} 4 - (y - 1)^2 + 4y^2 &= 4 \Rightarrow -y^2 + 2y - 1 + 4y^2 = 0 \\ &\Rightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Esta é uma equação do segundo grau na variável y . Encontremos as suas possíveis soluções:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm 4}{6}.$$

Portanto $y_1 = -1$ e $y_2 = \frac{1}{3}$.
 Para $y = -1$, temos

$$x^2 = 4 - (-1 - 1)^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então, para y_1 o único ponto de interseção é $(0, -1)$. Note, no esboço, que é possível ver que esse ponto não está no mesmo arco que C . Sendo assim, ele forma um ângulo de 120° e não de 60° como desejado.

Para $y = \frac{1}{3}$, temos

$$x^2 = 4 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 \Rightarrow x^2 = 4 - \frac{4}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{32}{9}.$$

Logo, para y_2 temos os pontos de interseção $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Temos, assim, 2 pontos de interseção. No entanto, lembre-se que consideramos somente o arco acima de AB . Como o outro arco é simétrico, logo os pontos serão simétricos ao eixo OX e, portanto, serão: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Concluimos que existem somente 4 pontos que pertencem à Elipse E que ligados aos focos formam um ângulo de 60° sendo eles: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

I.4 2022

Resolução H.4.1:

Sendo a equação encontrada pela aluna $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$, precisamos reorganizá-la:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 1 + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Portanto, essa é a equação de uma Circunferência de centro $(1, 1)$ e raio 1.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.4.2:

Figura I.19



A Hipérbole h é representada pela equação

$$\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{900} = 1,$$

cujos focos estão no eixo OX . Sabemos que o ponto S é um ponto da Hipérbole que tangencia o eixo OX , portanto com $y = 0$. Como a abscissa de S é positiva, concluímos que S é o ponto $(40, 0)$. Queremos saber a distância da Circunferência j de equação

$$x^2 + y^2 = 144$$

até o ponto S .

A distância de um conjunto de pontos Q até um determinado ponto P é dada pela equação $d(Q, P) = \min\{d(q, P) \mid q \in Q\}$.

Pelo desenho, é possível verificar que o ponto da Circunferência mais próximo de S é aquele em que $y = 0$ e $x > 0$, portanto $(12, 0)$. Isso pode ser feito de forma analítica, mas eu confio que o leitor acredita no desenho (e em mim, espero).

Sendo assim, queremos saber a distância de $(12, 0)$ a $(40, 0)$ que é de 28m.

Gabarito: Letra C.

Resolução H.4.3:

a) Queremos encontrar o ponto em comum à Circunferência $\lambda : x^2 + (y - 3)^2 = 4$ e a Parábola $y = -x^2 + 1$.

Para isso, vamos substituir x^2 na equação da Circunferência por $1 - y$.

$$\begin{aligned} 1 - y + (y - 3)^2 &= 4 \Rightarrow 1 - y + y^2 - 6y + 9 = 4 \\ &\Rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ dessa equação

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \Rightarrow \Delta = 49 - 24 = 25.$$

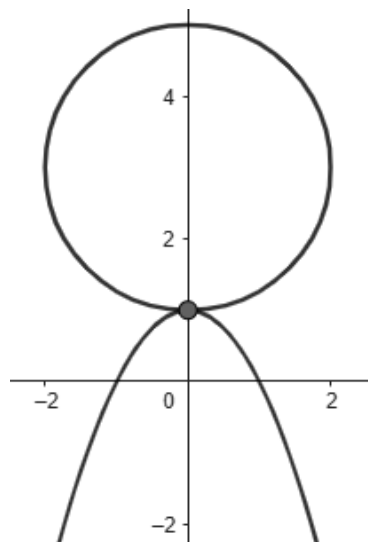
Assim

$$y = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 6.$$

Para $y = 1$, $x^2 = 1 - y = 0 \Rightarrow x = 0$. Portanto, temos o ponto $(0, 1)$. Para $y = 6$, $x^2 = 1 - 6 = -5$, que não tem valor real.

Concluimos que a interseção entre a Circunferência e a Parábola é o ponto $(0, 1)$.

Figura I.20: Esboço



b) Queremos encontrar os pontos de interseção entre a Circunferência $\lambda : x^2 + (y - 3)^2 = 4$ e a Parábola $y = x^2 + 1$.

Para isso, vamos substituir x^2 na equação da Circunferência por $y - 1$.

$$\begin{aligned} y - 1 + (y - 3)^2 &= 4 \Rightarrow y - 1 + y^2 - 6y + 9 = 4 \\ &\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9.$$

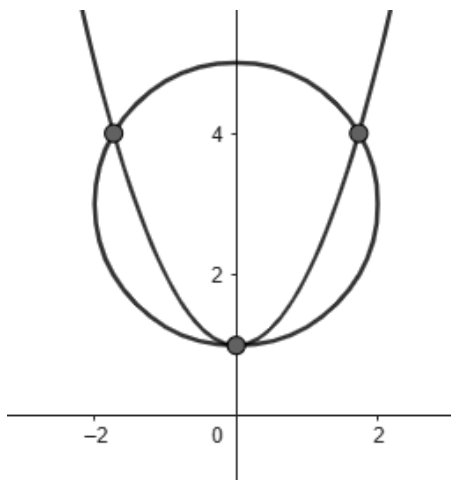
Segue que

$$y = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 4.$$

Para $y = 1$, $x^2 = 1 - 1 \Rightarrow x = 0$. Portanto, temos o ponto $(0, 1)$. Para $y = 4$, $x^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Portanto, temos os pontos $(-\sqrt{3}, 3)$ e $(\sqrt{3}, 3)$.

Concluimos que as interseções entre a Circunferência e a Parábola são os pontos $(0, 1)$, $(-\sqrt{3}, 3)$ e $(\sqrt{3}, 3)$.

Figura I.21: Esboço



c) Como, para qualquer valor de $a \neq 0$, o ponto $(0,1)$ pertence tanto à Circunferência $\lambda : x^2 + (y - 3)^2 = 4$, quanto à Parábola $\gamma : y = ax^2 + 1$, logo o que precisamos procurar são os valores de a que façam γ ter outras duas interseções com λ .

Podemos substituir x^2 na equação da Circunferência por $\frac{y-1}{a}$.

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{a} + y^2 - 6y + 9 &= 4 \Rightarrow y - 1 + ay^2 - 6ay + 9a = 4a \\ &\Rightarrow ay^2 + (1 - 6a)y + (5a - 1) = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - 6a)^2 - 4 \cdot a \cdot (5a - 1) \Rightarrow \Delta = 1 - 12a + 36a^2 - 20a^2 + 4a \\ &\Rightarrow \Delta = 16a^2 - 8a + 1 \\ &\Rightarrow \Delta = (4a - 1)^2. \end{aligned}$$

Segue que:

$$y = \frac{(6a - 1) \pm (4a - 1)}{2a} \Rightarrow y_1 = 1 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{10a - 2}{2a} = 5 - \frac{1}{a}.$$

Para $y = 1$, temos $x^2 = \frac{1-1}{a} = 0$.

Para $y = 5 - \frac{1}{a}$, temos

$$x^2 = \frac{\left(5 - \frac{1}{a}\right) - 1}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{4 - \frac{1}{a}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \left(4 - \frac{1}{a}\right).$$

Sabemos que $a > 0$, tendo em vista que, caso contrário, a interseção entre a Parábola e a Circunferência seria um único ponto (conforme a letra a)).

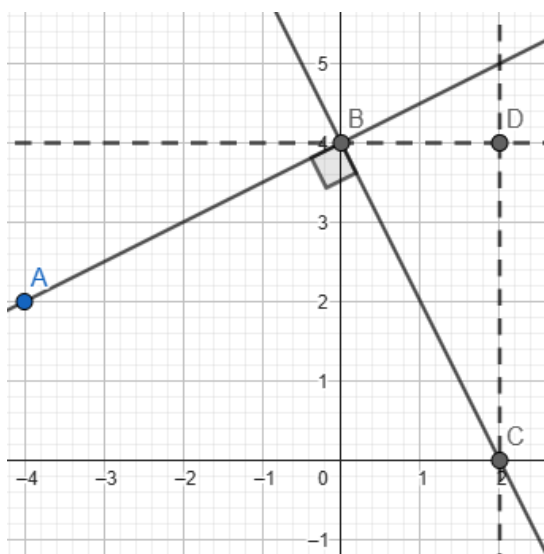
Além disso, sabemos que $x^2 > 0$, portanto

$$4 - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow 4 > \frac{1}{a} \Rightarrow a > \frac{1}{4}.$$

Concluimos que qualquer valor de a maior que $\frac{1}{4}$ satisfaz a condição da Parábola e da Circunferência ter três pontos de interseção.

Resolução H.4.4:

Figura I.22: Esboço



Seja $B(0, m)$ com $m \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (4, m - 2)$. Portanto a reta perpendicular a AB tem equação

$$r : 4x + (m - 2)y + c = 0.$$

Como $B \in r$ temos

$$4 \cdot 0 + (m - 2) \cdot m + c = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + c = 0 \Rightarrow c = -m^2 + 2m.$$

Logo, a equação da perpendicular pode ser representada por

$$r : 4x + (m - 2)y - m^2 + 2m = 0.$$

Como $C = (x, 0) \in r$, logo

$$4x - m^2 + 2m = 0$$

$$4x = m^2 - 2m$$

$$x = \frac{m^2 - 2m}{4}.$$

Sendo assim, o ponto C pode ser representado por $C = \left(\frac{m^2 - 2m}{4}, 0 \right)$.

O ponto D é formado pela interseção da perpendicular a OX que passa por C e pela perpendicular a OY que passa por B . Logo

$$D = (x_C, y_B) = \left(\frac{m^2 - 2m}{4}, m \right).$$

É possível, portanto, parametrizar a curva formada pelos possíveis pontos D . Sendo $y = m$,

$$x = \frac{y^2 - 2y}{4}.$$

Multiplicando ambos os termos por 4, temos:

$$4x = y^2 - 2y \Rightarrow 4x + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 4x + 1 = (y - 1)^2.$$

Concluimos que o Lugar Geométrico representado pelos possíveis pontos D tem equação $4x + 1 = (y - 1)^2$.

Gabarito: Letra E.

Resolução H.4.5:

Dada a equação da Hipérbole $H : x^2 - 6bx - (1 - b^2) \cdot (y^2 - 2by) + b^4 + 8b^2 - 1 = 0$, devemos, inicialmente, completar os quadrados

$$\begin{aligned} x^2 - 6bx + 9b^2 - (1 - b^2)(y - 2by + b^2) + b^4 + 8b^2 - 1 &= 9b^2 - (1 - b^2) \cdot b^2 \\ \Rightarrow (x - 3b)^2 - (1 - b^2) \cdot (y - b)^2 + b^4 + 8b^2 - 1 &= 9b^2 - b^2 + b^4. \end{aligned}$$

Simplificando a equação, obtemos:

$$(x - 3b)^2 - (1 - b^2) \cdot (y - b)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x - 3b)^2}{1} - \frac{(y - b)^2}{\frac{1}{1 - b^2}}.$$

Como H é uma Hipérbole, logo $1 - b^2 > 0$, ou seja $b^2 < 1$. Portanto, essa é uma Hipérbole de centro $(3b, b)$, com $b^2 < 1$. Repare que

$$b^2 < 1 \Rightarrow \frac{b^2}{2} < 1 \Rightarrow b^2 - \frac{b^2}{2} < 1 \Rightarrow \frac{(3b)^2}{9} - \frac{b^2}{2}.$$

Portanto $\frac{x_C^2}{9} - \frac{y_C^2}{2} < 1$.

Gabarito: Letra C.

Resolução H.4.6:

Dados os pontos $P_1 = (0, 6)$, $P_2 = (1, 5)$ e $P_3 = (2, 6)$ e as Circunferências C_1 , C_2 e C_3 centradas, respectivamente, em P_1 , P_2 e P_3 tais que existe uma reta horizontal s tangente às três Circunferências. Queremos encontrar a interseção tripla das três Circunferências quando esta existir.

Note que, como P_1 e P_3 possuem a mesma ordenada, logo os raios de suas Circunferências serão iguais. Além disso, note que existem somente três possibilidades para a reta horizontal: acima dos pontos P_1 e P_3 , entre os pontos P_1 , P_3 e o ponto P_2 e abaixo do ponto P_2 .

Vamos analisar cada caso e verificar se existe alguma interseção.

- Para $s : y = k$ acima dos pontos P_1 e P_3 .

Como s está acima de P_1 e P_2 , logo $k > 6$.

Além disso, podemos escrever as equações das Circunferências C_1 , C_2 e C_3 como

$$\begin{aligned} - C_1 : x^2 + (y - 6)^2 &= (k - 6)^2 \\ - C_2 : (x - 1)^2 + (y - 5)^2 &= (k - 5)^2 \\ - C_3 : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 &= (k - 6)^2. \end{aligned}$$

Note que, pelas equações de C_1 e C_3 temos que $x = 1$. Assim, substituindo esse valor em C_2 obtemos

$$(1 - 1)^2 + (y - 5)^2 = (k - 5)^2 \Rightarrow (y - 5)^2 = (k - 5)^2 \Rightarrow y - 5 = \pm k - 5.$$

Ou seja, $y = k$ ou $y = 10 - k$. Substituindo x por 1 e y por k em C_1 , obtemos:

$$1^2 + (k - 6)^2 = (k - 6)^2 \Rightarrow 1 = 0.$$

O que é um absurdo.

Substituindo x por 1 e y por $10 - k$ em C_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + (10 - k - 6)^2 &= (k - 6)^2 \\ \Rightarrow 1 + (4 - k)^2 &= (k - 6)^2 \\ \Rightarrow 1 + 16 - 8k + k^2 &= k^2 - 12k + 36 \\ \Rightarrow 4k &= 19 \\ \Rightarrow k &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

No entanto, sabemos que $k > 6$, portanto $k = \frac{19}{4}$ é um absurdo. Concluimos que s não pode estar acima de P_1 e P_3 .

- Para s entre os pontos P_1 , P_3 e do ponto P_2 .

Note que a distância de P_1 a P_3 é de 2 unidades. Além disso, note que a diferença entre as ordenadas de P_1 e P_2 é de somente uma unidade. Sendo assim, independentemente do valor que escolhermos para k , se ele estiver entre os pontos, as Circunferências C_1 e C_3 não terão interseção, tendo em vista que $d(P_1, P_3) > 2r$.

Concluimos que s não pode estar entre os pontos.

- Para s abaixo do ponto P_2 .

Como s está abaixo de P_2 , logo $k < 5$. Além disso, podemos escrever as equações das Circunferências C_1 , C_2 e C_3 como

$$\begin{aligned} - C_1 : x^2 + (y - 6)^2 &= (6 - k)^2 \\ - C_2 : (x - 1)^2 + (y - 5)^2 &= (5 - k)^2 \\ - C_3 : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 &= (6 - k)^2. \end{aligned}$$

Note que, como $(6 - k)^2 = (k - 6)^2$ e $(5 - k)^2 = (k - 5)^2$, encontraremos os mesmos resultados que no caso em que s estava acima dos pontos P_1 e P_3 , ou seja, concluimos que $k = \frac{19}{4}$. Nesse caso, no entanto, essa igualdade não é absurda, tendo em vista que $k < 5$. Sabendo que $y = 10 - k$, obtemos $y = 10 - \frac{19}{4} = \frac{21}{4}$.

Portanto a interseção tripla de C_1 , C_2 e C_3 , quando essa existe, é o ponto $\left(1, \frac{21}{4}\right)$.

I.5 2021

Resolução H.5.1:

Dada a Circunferência de Centro $(3,1)$ e raio 5, para sabermos se o ponto $P(5,3)$ é interno, externo, ou pertencente a Circunferência devemos verificar se a distância de P ao Centro da Circunferência é maior, menos ou igual ao seu raio.

$$d(P, C) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 - 1)^2} \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{8} < r.$$

Sendo a distância entre C e P menor do que o raio, mas não igual a 0, logo o ponto é interno à Circunferência, mas não coincide com o centro.

Gabarito: Letra B.

Resolução H.5.2:

Para que uma Circunferência seja tangente a uma reta, basta que o seu raio seja igual à distância do seu centro a essa reta. Assim, como o centro é o ponto $C = (1, -1)$ e a

reta é representada pela equação $r : y = \frac{3}{4}x + 2$, que representaremos por $r : \frac{3}{4}x - y + 2 = 0$, podemos calcularmos a distância de C a r . De fato,

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + 1 + 2}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Segue que a Circunferência tem centro $C = (1, -1)$ e raio 3. Podemos, portanto, encontrar a equação da Circunferência:

$$\begin{aligned} \Gamma : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 &= 3^2 \\ \Rightarrow \Gamma : x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ \Rightarrow \Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra A.

Resolução H.5.3:

a) Sendo $P_1 = (3; 3)$, $P_3 = (3; -1)$ e $P_4 = (-2; 5)$, queremos descobrir a equação da reta que passa por P_3 e é paralela à reta que passa por P_1 e P_4 .

Inicialmente, podemos encontrar um vetor perpendicular ao vetor $\overrightarrow{P_1P_4} = (-5, 2)$. Um vetor possível de ser encontrado é $\vec{v} = (2, 5)$.

Visto que a reta que queremos encontrar é paralela a $\overrightarrow{P_1P_4}$, logo ela é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, 5)$. Portanto, sua equação pode ser representada por

$$r : 2x + 5y + k = 0.$$

Como $P_3 \in r$,

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + k = 0 \Rightarrow 6 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Logo, a equação da reta que passa por P_3 e é paralela à reta que passa por P_1 e P_4 é

$$r : 2x + 5y - 1 = 0.$$

b) Queremos descobrir a equação da Circunferência que passa pelos pontos $P_1 = (3; 3)$, $P_2 = (5; 1)$ e $P_3 = (3; -1)$.

Note que P_1 e P_3 tem a mesma abscissa. Portanto, o centro terá ordenada igual à média das ordenadas desses pontos. Podemos inferir que $y_C = 1$. Portanto, a equação da Circunferência é

$$\lambda : (x - x_C)^2 + (y - 1)^2 = r^2.$$

Visto que $P_2 \in \lambda$

$$(5 - x_C)^2 + (1 - 1)^2 = r^2 \Rightarrow r = |5 - x_C|.$$

Como $P_1 = (3; 3)$, $P_2 = (5; 1)$ e $P_3 = (3; -1)$, logo $3 < x_C < 5$, logo

$$r = 5 - x_C \Rightarrow x_C = 5 - r.$$

Segue que

$$\lambda : (x - (5 - r))^2 + (y - 1)^2 = r^2.$$

Já que $P_1 \in \lambda$, logo

$$\begin{aligned} (3 - (5 - r))^2 + (3 - 1)^2 = r^2 &\Rightarrow (r - 2)^2 + 2^2 = r^2 \\ &\Rightarrow r^2 - 4r + 4 + 4 = r^2 \\ &\Rightarrow -4r + 8 = 0 \\ &\Rightarrow 4r = 8 \\ &\Rightarrow r = 2. \end{aligned}$$

Como $x_C = 5 - r$, logo $x_C = 3$.

Concluimos que a equação da Circunferência que passa pelos pontos P_1 , P_2 e P_3 é

$$\lambda : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

c) Dada a Circunferência $\lambda : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$, queremos, primeiramente, encontrar a interseção de λ com o eixo OX que está mais próxima da origem.

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 4 &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \Rightarrow \Delta = 36 - 24 = 12.$$

Portanto:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Segue que o ponto $P \in \lambda$ que intersecta o eixo OX mais próximo da origem é o ponto $P = (3 - \sqrt{3}, 0)$. Sabemos que a reta tangente a λ que passa por P é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{CP}$, em que C é o Centro da Circunferência.

Visto que $\overrightarrow{CP} = (3 - \sqrt{3} - 3, 0 - 1) = (-\sqrt{3}, -1)$, logo a reta tangente a λ pode ser escrita como

$$r : -\sqrt{3}x - y + k = 0.$$

Como $P \in r$, logo

$$-\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3}) - 0 + k = 0$$

$$-3\sqrt{3} + 3 + k = 0$$

$$k = 3\sqrt{3} - 3.$$

Concluimos que a equação da reta tangente à Circunferência no ponto P é:

$$r : -\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} - 3 = 0.$$

Resolução H.5.4:

Primeiramente, é importante compreendermos que curva é dada pela equação $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$.

Para isso, vamos começar unindo termos com as mesmas variáveis e completando os quadrados.

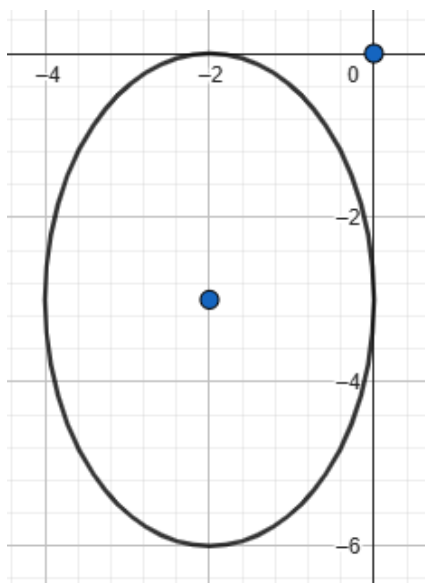
$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x + 4y^2 + 24y + 36 &= 0 \\ \Rightarrow 9x^2 + 36x + 36 + 4y^2 + 24y + 36 &= +36 \\ \Rightarrow (3x + 6)^2 + (2y + 6)^2 &= 36 \\ \Rightarrow 9(x + 2)^2 + 4(y + 3)^2 &= 36. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos por 36 obtemos

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1,$$

que é a equação de uma Elipse cujo Eixo Focal é paralelo ao eixo OY de centro $(-2, -3)$ e coeficientes $a = 3$, $b = 2$ e, conseqüentemente, $c = \sqrt{5}$.

Figura I.23: Esboço



Note que o centro da Elipse também será o centro da Circunferência que circunscreve o retângulo. Note também que, sendo $(0,0)$ um ponto do retângulo, logo o raio da Circunferência será a distância do centro $(-2,-3)$ ao ponto $(0,0)$, que rapidamente podemos encontrar como $\sqrt{13}$.

Sendo assim, a equação da Circunferência circunscrita ao retângulo é:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

Gabarito: Letra D.

Resolução H.5.5: Os pontos (x, y) da Circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 5 podem ser representados pela equação

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25.$$

Queremos que eles satisfaçam a equação

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}.$$

Para isso, elevemos essa equação ao quadrado (note que teremos de verificar, ao final, se os valores encontrados geram ou não raízes negativas).

$$\begin{aligned} 3x - y - 4 &= x^2 - 7x - 5y - 4 \Rightarrow x^2 - 10x - 4y = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 10x + 25 - 4y = 25 \\ &\Rightarrow (x - 5)^2 = 4y + 25. \end{aligned}$$

Utilizando a equação da Circunferência, obtemos:

$$4y + 25 + y^2 = 25 \Rightarrow 4y + y^2 = 0 \Rightarrow y(4 + y) = 0.$$

Portanto $y = 0$ ou $y = -4$.

Para $y = 0$ temos

$$(x - 5)^2 = 6 \cdot 0 + 25 \Rightarrow (x - 5)^2 = 25.$$

Portanto $x = 0$ ou $x = 10$. Temos que testar agora se os pontos $(0, 0)$ e $(10, 0)$ geram raízes negativas ou não.

- Para $(x, y) = (0, 0)$ temos: $3 \cdot 0 - 0 - 4 = -4$ que não é válido, pois não podemos utilizar raízes quadradas negativas;
- Para $(x, y) = (10, 0)$ temos: $3 \cdot 10 - 0 - 4 = 26$ que é válido.

Para $y = -4$ temos

$$(x - 5)^2 = 6 \cdot (-4) + 25 \Rightarrow (x - 5)^2 = 1.$$

Portanto, $x = 4$ ou $x = 6$. Temos que testar, portanto, os pontos $(-4, 4)$ e $(-4, 6)$.

- Para $(x, y) = (-4, 4)$ temos: $3 \cdot (-4) - 4 - 4 = 4$ que é válido;
- Para $(x, y) = (-4, 6)$ temos: $3 \cdot (-4) - 6 - 4 = 2$ que é válido.

Concluimos que os únicos pares (x, y) da Circunferência que satisfazem à equação são os pares $(10, 0)$, $(-4, 4)$ e $(-4, 6)$.

Resolução H.5.6:

Primeiramente, note que a reta $r : 2x - 3y + 3 = 0$ pode ser reescrita como $r : y = \frac{2x}{3} + 1$.

Em seguida, note que os conjuntos fornecidos pelo professor podem ser reescritos para facilitar a verificação de interseção.

- O retângulo formado pelos vértices $A = (-2, -1)$, $B = (-2, -3)$, $C = (2, -3)$ e $D = (2, -1)$ pode ser reescrito como o conjunto $I = \{(x, y) | -2 < x < 2; -3 < y < -1\}$.

$$-2 < x < 2 \Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{2x}{3} < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + 1 < \frac{7}{3}.$$

Porém, $y = \frac{2x}{3} + 1$, segue que $-\frac{1}{3} < y < \frac{7}{3}$, o qual não tem interseção com o conjunto I.

- O retângulo formado pelos vértices $E = (-4, 4)$, $F = (-4, -4)$, $G = (4, -4)$ e $H = (4, 4)$ pode ser reescrito como o conjunto $II = \{(x, y) | -4 < x < 4; -4 < y < 4\}$.

$$-4 < x < 4 \Rightarrow -\frac{8}{3} < \frac{2x}{3} < \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{2x}{3} + 1 < \frac{11}{3}.$$

No entanto $y = \frac{2x}{3} + 1$, portanto $\frac{-5}{3} < y < \frac{11}{3}$ que tem interseção com o conjunto II .

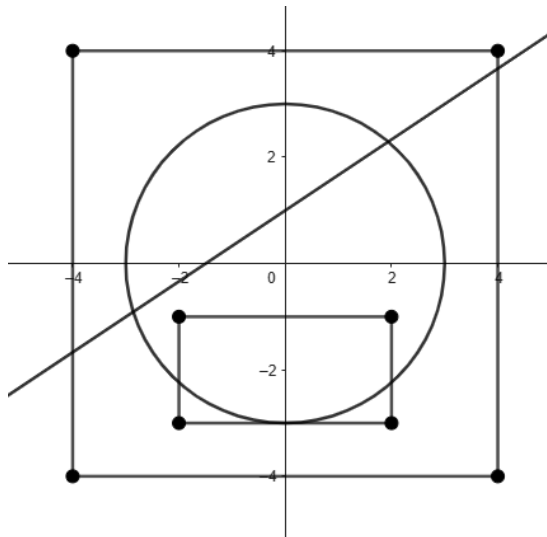
- Para a Circunferência $x^2 + y^2 = 9$, basta substituímos y por $\frac{2x}{3} + 1$ e verificar se há alguma interseção.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{2x}{3} + 1\right)^2 &= 9 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x}{3} + 1 &= 9 \\ \Rightarrow \frac{13x^2}{9} + \frac{4x}{3} - 8 &= 0 \\ \Rightarrow 13x^2 + 12x - 8 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-8) &> 0. \end{aligned}$$

Como Δ é positivo, logo existe um valor de y real tal que a reta r intersecta a Circunferência.

Concluimos que a reta r intersecta os conjuntos II e III.

Figura I.24: Esboço



Gabarito: Letra C.

Resolução H.5.7:

Dadas as Circunferências $C_1 : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$, $C_2 : (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$ e $C_3 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ seria possível encontrar a interseção tripla resolvendo um sistema de equações. No entanto, a questão foi gentil o suficiente para nos dizer que esse ponto é do tipo $P(1, m)$, ou seja, tem abscissa igual a 1. Basta, portanto, encontrar o valor de y que satisfaz a todas as equações das Circunferências quando $x = 1$.

Testemos inicialmente para C_3

$$(1-1)^2 + (y+2)^2 = 16 \Rightarrow (y+2)^2 = 16 \Rightarrow y+2 = \pm 4 \Rightarrow y = -2 \pm 4.$$

Segue que, $y = -6$ ou $y = 2$.

Testemos agora para C_1

$$(1+2)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow 3^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow 9 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow \pm(y-2) = 0.$$

Consequentemente, $y = 2$ ou $y = -2$.

Portanto, como o valor de $y = 2$ coincide para C_1 e C_3 , só nos resta verificar se o ponto $P(1, 2)$ também é ponto de C_2 . Ora

$$(1-5)^2 + (2+1)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25.$$

Confirmamos que o ponto $P(1, m)$ é igual a $P(1, 2)$. Visto que a questão está interessada em saber o valor de $3m - 2$, basta substituir m por 2 para encontrar o valor 4.

Gabarito: Letra E.

I.6 2020

Resolução H.6.1:

Como P é equidistante aos eixos das ordenadas e ao ponto $Q(16, 0)$, logo ele pertence à Parábola horizontal cujo $p = 8$ e cujo Vértice é o ponto $(8, 0)$.

A equação dessa Parábola é dada por

$$\lambda : 4 \cdot 8 \cdot (x - 8) = y^2 \Rightarrow \lambda : 32(x - 8) = y^2$$

Como P pertence à reta $y = x - 2$, podemos encontrar as suas coordenadas substituindo y na equação da Parábola por $x - 2$.

$$32(x - 8) = (x - 2)^2 \Rightarrow 32x - 256 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -x^2 + 36x - 260 = 0.$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = 36^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-260) = 1296 - 1040 = 256.$$

Portanto,

$$x = \frac{-36 \pm 16}{-2} = 18 \mp 8.$$

Sabendo que $y = x - 2$, os possíveis pontos P são $(26, 24)$ e $(10, 8)$.

Gabarito: Letra B.

Resolução H.6.2: Dada a equação $2x^2 + ay^2 - bxy - 4x + 8y + c = 0$, queremos que ela represente uma Circunferência de raio 3.

Sabemos que a equação de uma Circunferência não pode ter um termo xy , portanto $b = 0$. Além disso, sendo a Circunferência um caso particular da Elipse, sabemos que o coeficiente de x^2 deve ser igual ao coeficiente de y^2 , sendo $a = 2$.

Dadas essas informações, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + c = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + \frac{c}{2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = -\frac{c}{2} \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4 - \frac{c}{2} \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

No entanto, sabemos que $r = 3$, portanto

$$5 - \frac{c}{2} = 3^2 \Rightarrow -\frac{c}{2} = 9 - 5 \Rightarrow c = -8.$$

Concluimos que a soma dos coeficientes a , b e c será

$$2 + 0 + (-8) = -6.$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.6.3:

Queremos encontrar a interseção F do conjunto de pontos equidistantes aos eixos OX e OY e do conjunto que obedece a equação da Circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$.

Sabemos que os pontos equidistantes aos eixos ordenados estão no Lugar Geométrico descrito pelas retas $y = x$ e $y = -x$.

Sendo assim, vamos substituir y na equação da Circunferência por x e por $-x$ e verificar quantas interseções existem.

- Para $y = x$

$$x^2 + x^2 - 2x - 6x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Sendo assim, temos duas interseções, os pontos $(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ e $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$, os quais estão no primeiro quadrante.

- Para $y = -x$

$$\begin{aligned}
 x^2 + (-x)^2 - 2x - 6(-x) + 2 &= 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \\
 &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\
 &\Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow x + 1 = 0 \\
 &\Rightarrow x = -1.
 \end{aligned}$$

Segue que existe uma única interseção, a qual fica no ponto $(-1, 1)$, o qual fica no segundo quadrante.

Concluimos que o conjunto F tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.6.4: Consideremos a equação $x^2 + 3y^2 + 5 = 2x - xy - 4y$ como uma equação do 2º grau na variável x

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + xy + 3y^2 + 4y + 5 &= 0 \\
 \Rightarrow x^2 + (-2 + y)x + (3y^2 + 4y + 5) &= 0.
 \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-2 + y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3y^2 + 4y + 5) \\
 &= 4 - 4y + y^2 - 12y^2 - 16y - 20 \\
 &= -11y^2 - 20y - 16.
 \end{aligned}$$

Repare que essa expressão é sempre negativa, portanto, o valor de Δ é negativo.

Concluimos que não existe valor de $x \in \mathbb{R}$ que faça com que a expressão seja verdadeira. Ou seja, o Lugar Geométrico definido pela equação é um conjunto vazio.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.6.5:

a) Dados os pontos $P = (1, 1)$, $Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$, sabemos que o centro da Circunferência que passa por esses três pontos está no circuncentro⁵ do triângulo PQR .

Como P e Q tem a mesma ordenada, a mediatriz do segmento PQ é a reta vertical $r : x = 7$.

Sabendo que $\overrightarrow{PR} = (6, 8)$ é perpendicular à mediatriz de PR e que o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ é $M = (4, 5)$, logo podemos encontrar a equação do segmento $\overline{PR}$:

$$s : 6x + 8y + k = 0.$$

⁵Encontro das mediatrizes

Visto que $M \in s$

$$6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + k = 0 \Rightarrow 24 + 40 + k = 0 \Rightarrow k = -64.$$

Portanto $s : 6x + 8y - 64 = 0$.

Para encontrar a interseção de r e s basta substituir x por 7 na equação de s .

$$\begin{aligned} 6 \cdot 7 + 8y - 64 = 0 &\Rightarrow 42 + 8y - 64 = 0 \\ &\Rightarrow 8y - 22 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Segue que o Centro da Circunferência λ é o ponto $O = \left(7, \frac{11}{4}\right)$.

Para encontrar o raio dessa Circunferência, basta encontrar a distância do Centro a qualquer um de seus pontos.

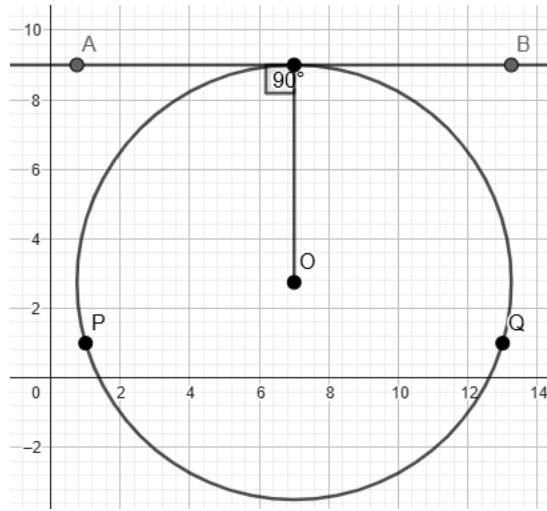
$$\begin{aligned} d(C, P) &= \sqrt{(7-1)^2 + \left(\frac{11}{4} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{36 + \frac{49}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{625}{16}} \\ &= \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Logo, a equação de λ é dada por $(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$.

b) Queremos encontrar os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ , sabendo que R é o ponto médio de AB .

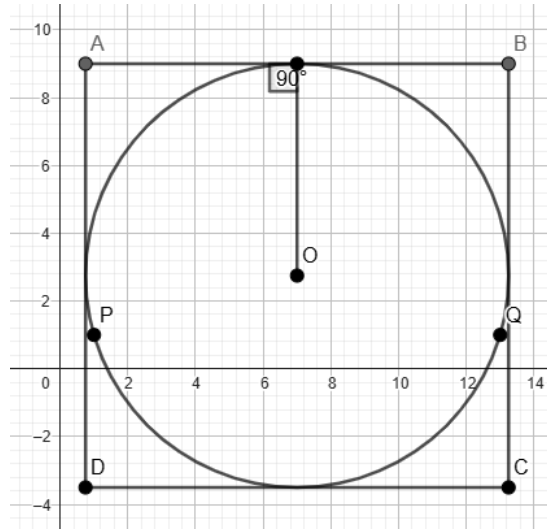
Ora, como R tem a mesma abscissa do centro da Circunferência, logo o vetor $\overrightarrow{OR}$ é vertical. Sendo assim, como AB é tangente à λ , logo ele é perpendicular a $\overrightarrow{OR}$ e, portanto, os pontos A e B tem a mesma ordenada de R .

Figura I.25: Esboço



Visto que $ABCD$ é um quadrado, logo os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$ sendo assim segmentos verticais. Concluimos que o quadrado tangencia a Circunferência em seus pontos de abscissa ou ordenada extremos.

Figura I.26: Esboço



Como $O = \left(7, \frac{11}{4}\right)$ e $r = \frac{25}{4}$, logo os pontos do quadrado são:

- $A = \left(7 - r, \frac{11}{4} + r\right) = \left(7 - \frac{25}{4}, \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, 9\right)$
- $B = \left(7 + r, \frac{11}{4} + r\right) = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, 9\right)$
- $C = \left(7 + r, \frac{11}{4} - r\right) = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, -\frac{7}{2}\right)$
- $D = \left(7 - r, \frac{11}{4} - r\right) = \left(7 - \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{2}\right)$.

I.7 2019

Resolução H.7.1:

A equação $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{225} = 1$ representa uma elipse centrada na origem de coeficientes $a = 15$ e $b = 12$. Pela equação F.4 sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, portanto

$$15^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow c = 9.$$

Como o coeficiente a está associado à variável y , logo essa Elipse tem Eixo Focal coincidindo com o eixo OY e, portanto, tem focos $F_1 = (0, 9)$ e $F_2 = (0, -9)$.

Gabarito: Letra A.

Resolução H.7.2:

Queremos duas retas paralelas a $r : 3x + 4y - 1 = 0$ que cortem a Circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ e determinem cordas de comprimento igual a 8.

Tais retas poderão ser expressas por

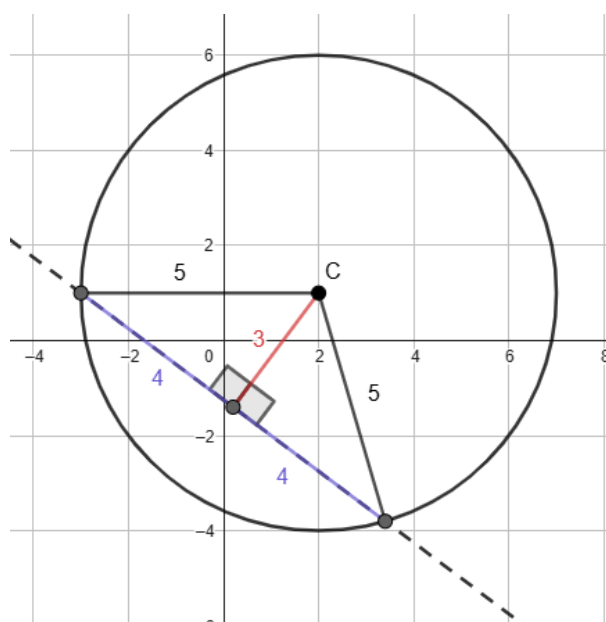
$$s : 3x + 4y + k = 0.$$

Encontremos o Centro e o Raio dessa Circunferência

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y &= 20 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 20 + 4 + 1 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2. \end{aligned}$$

Segue que o Centro é o ponto $(2, 1)$ e o raio dessa Circunferência é 5. Para que uma corda tenha comprimento igual a 8 ela deve distar 3 do centro, conforme o esboço:

Figura I.27: Esboço



Portanto,

$$\begin{aligned}
 d(C, s) = 3 &\Rightarrow \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \\
 &\Rightarrow \frac{|6 + 4 + k|}{\sqrt{9 + 16}} = 3 \\
 &\Rightarrow \frac{|10 + k|}{5} = 3 \\
 &\Rightarrow |10 + k| = 15 \\
 &\Rightarrow 10 + k = \pm 15 \\
 &\Rightarrow k = -10 \pm 15.
 \end{aligned}$$

Concluimos que as equações das paralelas a r que cortam λ determinando cordas de comprimento igual a 8 são $3x + 4y + 5 = 0$ e $3x + 4y - 25 = 0$.

Gabarito: Letra E

Resolução H.7.3:

Primeiramente, verifiquemos qual era a equação da Hipérbole antes de ser rotacionada. Por ser uma Hipérbole equilátera com eixos paralelos aos eixos coordenados, logo $a = b$. Como o centro da Hipérbole tinha origem no centro e seu eixo era igual a 4, concluimos que a equação da Hipérbole original era

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ao realizar uma rotação de 45° nos eixos cartesianos, modificamos as variáveis de acordo com a expressão:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ \bar{y} = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}.$$

Como a rotação foi de 45° , logo

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} \\ \bar{y} = \frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2} \end{cases}.$$

Sendo assim

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2} \right) \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{2x^2}{4} - \frac{2y^2}{4} = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Portanto, ao ser rotacionada, a Hipérbole tem equação $xy = 2$.

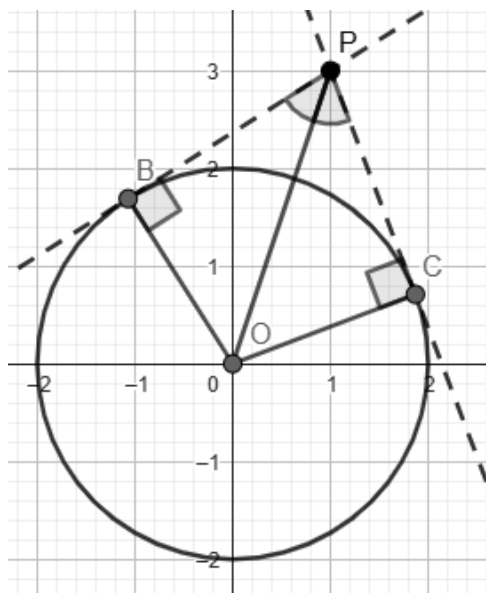
Gabarito: Letra A.

Resolução H.7.4:

Dado o ponto $P = (1, 3)$ e a Circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = 4$, queremos encontrar o cosseno do ângulo entre as retas que tangenciam γ e passam por P .

Sabemos que se as retas tangenciam γ , logo elas são perpendiculares ao raio da Circunferência. Assim, podemos formar dois triângulos retângulos conforme o esboço abaixo:

Figura I.28: Esboço



Perceba que esses dois triângulos são congruentes, tendo em vista que ambos são retângulos com a mesma hipotenusa e os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são congruentes por serem raios da Circunferência. Sendo assim, os ângulos $\widehat{OPB}$ e $\widehat{OPC}$ são congruentes entre si. Como $\triangle OPB$ é um triângulo retângulo, conseguimos encontrar o valor do cosseno do ângulo $\widehat{OPB}$.

Primeiramente, encontremos o comprimento de $\overline{OP}$.

$$d(O, P) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}.$$

Utilizemos o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida de $\overline{PB}$

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{OB}^2 \Rightarrow (\sqrt{10})^2 = \overline{PB}^2 + 2^2 \\ &\Rightarrow 10 = \overline{PB}^2 + 4 \\ &\Rightarrow \overline{PB}^2 = 6 \\ &\Rightarrow \overline{PB} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Segue que o cosseno de $\widehat{OPB}$ pode ser calculado por

$$\cos(\widehat{OPB}) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

E o seno de $\widehat{OPB}$ pode ser calculado por

$$\text{sen}(\widehat{OPB}) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Sabemos que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BPC}) &= \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{15}{25} - \frac{10}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Gabarito: Letra A.

I.8 2018

Resolução H.8.1:

Dados os pontos $A = (3, 7)$, $B = (1, 1)$ e $C = (9, 6)$, queremos a projeção ortogonal de A sobre a reta BC .

Inicialmente, encontremos a equação da reta BC . Sabemos que $\overrightarrow{BC} = (8, 5)$. Uma possível perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ é o vetor $\vec{v} = (-5, 8)$. Portanto, a reta BC é do tipo

$$r : -5x + 8y + k = 0.$$

Como $B \in r$, logo

$$-5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow -5 + 8 + k = 0 \Rightarrow k = -3.$$

Então $r : -5x + 8y - 3 = 0$ é a reta que passa por B e C .

Encontremos agora uma perpendicular a r que passe por A . Visto que $\overrightarrow{BC} = (8, 5)$, logo a equação da perpendicular é do tipo

$$s : 8x + 5y + c = 0.$$

Sendo $A \in s$, logo

$$8 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + c = 0 \Rightarrow 24 + 35 + c = 0 \Rightarrow c = -59.$$

Dessa forma, $s : 8x + 5y - 59 = 0$ é a perpendicular a r que passa por A .

Encontremos agora a interseção entre r e s . Por r , temos que

$$-5x + 8y - 3 = 0 \Rightarrow 8y = 5x + 3 \Rightarrow y = \frac{5x}{8} + \frac{3}{8}.$$

Substituindo esse valor de y em s , temos

$$\begin{aligned} 8x + 5 \left(\frac{5x}{8} + \frac{3}{8} \right) - 59 &= 0 \Rightarrow 8x + \frac{25x}{8} + \frac{15}{8} - 59 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{89x}{8} - \frac{457}{8} = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{457}{89}. \end{aligned}$$

Desde que $y = \frac{5x}{8} + \frac{3}{8}$, logo

$$\begin{aligned} y &= \frac{5 \cdot \frac{457}{89}}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{2285}{712} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{2285}{712} + \frac{267}{712} \\ &= \frac{2552}{712} = \frac{319}{89}. \end{aligned}$$

Portanto, a projeção de A sobre a reta BC é o ponto de coordenadas $x = 457/89$ e $y = 319/89$.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.8.2:

Estando o atirador no ponto $P = (2, 0)$, é possível encontrar uma reta que passa por esse ponto e que tangencia a Parábola $y = -x^2 + 17x - 66$. A essa interseção daremos o nome de C

Considerando o coelho como um corpo puntiforme⁶, podemos dizer que o coelho estará seguro em qualquer ponto após o ponto C .

Seja $r : y = ax + b$ a reta que tangencia a Parábola e que passa pelo ponto P , com a e $b \in \mathbb{R}$. Como r tangencia a Parábola, logo a equação

$$ax + b = -x^2 + 17x - 66.$$

tem uma única solução e, portanto, tem $\Delta = 0$.

$$x^2 + ax - 17x + b + 66 = 0 \Rightarrow x^2 + (a - 17)x + (b + 66) = 0.$$

⁶O sonho de todo professor de física

Encontremos o discriminante Δ , o qual sabemos ser igual a 0:

$$\begin{aligned}\Delta &= (a - 17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b + 66) \\ \Rightarrow 0 &= a^2 - 34a + 289 - 4b - 264 \\ \Rightarrow 0 &= a^2 - 34a - 4b + 25.\end{aligned}$$

Como $P \in r$, logo $0 = 2a + b$. Portanto, vamos substituir b por $-2a$ na equação do Delta.

$$\begin{aligned}0 &= a^2 - 34a - 4(-2a) + 25 \\ \Rightarrow 0 &= a^2 - 34a + 8a + 25 \\ \Rightarrow 0 &= a^2 - 26a + 25.\end{aligned}$$

Visto que a soma dos coeficientes é igual a 0, logo uma das soluções é $a = 1$. Além disso, pelo método da Soma e Produto, encontramos rapidamente que a outra solução é aquela em que $a = 25$. Desde que $b = -2a$, temos que as possíveis retas que tangenciam a Parábola são

$$r : y = x - 2 \text{ ou } r : y = 25x - 50.$$

Encontremos, então, os possíveis pontos de interseção.

Para $y = x - 2$ temos:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 17x - 66 \\ \Rightarrow x - 2 &= -x^2 + 17x - 66 \\ \Rightarrow x^2 - 16x + 64 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 8)^2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= 8.\end{aligned}$$

Portanto, o ponto de interseção entre a reta e a Parábola é $(8, 6)$, o qual está à direita de $(2, 0)$ e é, portanto, seguro.

Para $y = 25x - 50$ temos:

$$\begin{aligned}25x - 50 &= -x^2 + 17x - 66 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 4)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = -4.\end{aligned}$$

Portanto, o ponto de interseção entre a reta e a Parábola é $(-4, -150)$, o qual está à esquerda de $(2, 0)$ e, portanto, não é seguro.

Consequentemente, qualquer ponto da montanha a partir do ponto $(8, 6)$ será seguro para o indefeso coelho.

Gabarito: Letra B.

Resolução H.8.3:

Consideremos o eixo cartesiano com origem em A e cujo eixo OX está orientado em direção ao ponto B . Sendo assim, $A = (0, 0)$ e $B = (30, 0)$.

Seja P um ponto em $\mathbb{R}^2$ tal que $d(P, A) = 2d(P, B)$.

Nesse caso:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2} &= 2 \cdot \sqrt{(x_P - 30)^2 + (y_P - 0)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x_P^2 + y_P^2} &= 2 \cdot \sqrt{x_P^2 - 60x_P + 900 + y_P^2}.\end{aligned}$$

Elevando ambos os termos ao quadrado:

$$\begin{aligned}x_P^2 + y_P^2 &= 4 \cdot (x_P^2 - 60x_P + 900 + y_P^2) \\ \Rightarrow x_P^2 + y_P^2 &= 4x_P^2 - 240x_P + 3600 + 4y_P^2 \\ \Rightarrow 3x_P^2 - 240x_P + 3600 + 3y_P^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos por 3:

$$\begin{aligned}x_P^2 - 80x_P + 1200 + y_P^2 &= 0 \\ \Rightarrow x_P^2 - 80x_P + 1200 + 400 + y_P^2 &= +400 \\ \Rightarrow x_P^2 - 80x_P + 1600 + y_P^2 &= 400 \\ \Rightarrow (x_P - 40)^2 + y_P^2 &= 20^2.\end{aligned}$$

Concluimos que P pertence a Circunferência de Centro $C = (40, 0)$ e raio $r = 20$. Visto que a maior distância entre dois pontos de uma Circunferência é a medida de seu diâmetro, logo concluimos que a maior distância entre os bombeiros é de 40 metros.

Gabarito Letra B.

Resolução H.8.4:

Sabendo que a Hipérbole tem focos $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$, logo essa é uma Hipérbole cujo Eixo Focal é o eixo OX , de Centro na origem e com coeficiente $c = 5$. Como $P(3, 0) \in H$, logo

$$\frac{3^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 3.$$

Pela equação F.6, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$. Como $a = 3$ e $c = 5$, concluimos que $b = 4$. Portanto a equação da Hipérbole é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

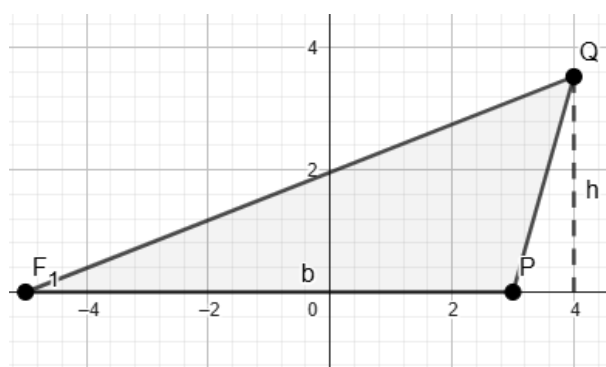
Sendo, $Q = (4, y)$, com $y > 0$, podemos encontrar a ordenada de Q .

$$\frac{4^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{16}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} \Rightarrow \frac{7}{9} = \frac{y^2}{16} \Rightarrow \frac{7 \cdot 16}{9} = y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$

Desde que $y > 0$, logo $y = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.

Sendo os pontos F_1 e P com a mesma ordenada, logo a área do triângulo $\triangle F_1PQ$ pode ser encontrada pela fórmula $A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b é a medida do segmento $\overline{F_1P}$ e h é a altura do triângulo a partir do vértice Q (que é exatamente igual a ordenada de Q).

Figura I.29: Esboço



Concluimos que

$$A_{\triangle} = \frac{8 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{3}}{2} = \frac{16\sqrt{7}}{3}.$$

Gabarito: Letra A.

Resolução H.8.5:

Como a Elipse tem foco no eixo OX , é centrada na origem e tem eixos medindo 10 e $20/3$, logo, seus coeficientes são $a = 5$ e $b = 10/3$. Pela equação F.4 sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, portanto

$$5^2 = (10/3)^2 + c^2 \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

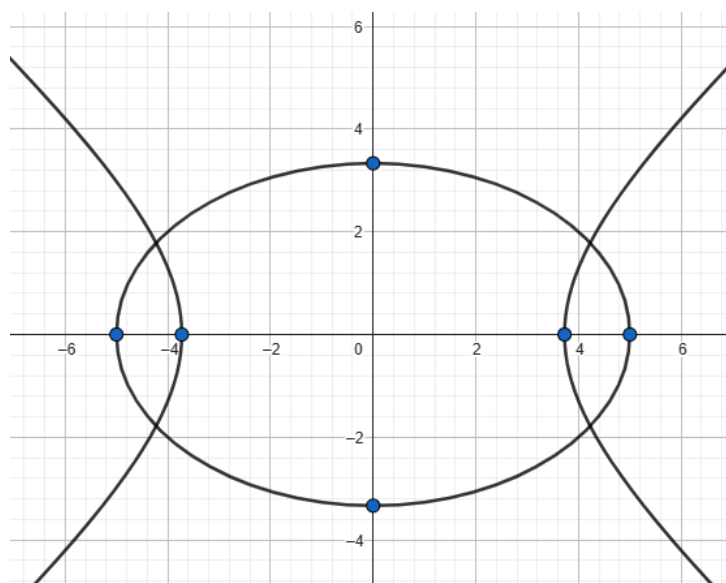
Assim, essa Elipse tem equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1,$$

com Vértices $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, -10/3)$ e $B_2 = (0, 10/3)$ e Focos $F_1 = \left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}, 0\right)$ e $F_2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{3}, 0\right)$.

A Hipérbole H tem focos que coincidem com os vértices da Elipse e vértices que coincidem com os focos da Elipse, conforme o esboço:

Figura I.30: Esboço



Dessa maneira, os coeficientes de H são $a = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $b = \frac{10}{3}$ e $c = 5$. Portanto a equação da Hipérbole é

$$\frac{x^2}{\frac{125}{9}} - \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1.$$

Encontremos os pontos de interseção entre a Elipse e a Hipérbole. Somando as equações da Hipérbole e da Elipse, vemos que

$$\frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{\frac{125}{9}} = 2.$$

Multiplicando ambos os termos por 125, implica que

$$\begin{aligned} 5x^2 + 9x^2 &= 250 \Rightarrow 14x^2 = 250 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{125}{7} \\ \Rightarrow x &= \pm \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \pm \frac{5\sqrt{35}}{7}. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na equação da Elipse, deduzimos

$$\frac{\frac{125}{7}}{25} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1.$$

Multiplicando ambos os termos por 100, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{500}{7} + 9y^2 = 100 &\Rightarrow 9y^2 = \frac{200}{7} \\
&\Rightarrow y^2 = \frac{2 \cdot 100}{9 \cdot 7} \\
&\Rightarrow y = \pm \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} \\
&\Rightarrow y = \pm \frac{10\sqrt{14}}{21}.
\end{aligned}$$

Queremos as Parábolas que tangenciam o eixo OY e passam pelos pontos $\left(\pm \frac{5\sqrt{35}}{7}, \pm \frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$. Consideremos somente o caso para x positivo, tendo em vista que o caso negativo é simétrico. Queremos, portanto, a Parábola que passa pelos pontos

$$\left(\frac{5\sqrt{35}}{7}, \frac{10\sqrt{14}}{21}\right) \text{ e } \left(\frac{5\sqrt{35}}{7}, -\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$$

e que tangencia o eixo OY . Como esses pontos são simétricos, logo a Parábola tangencia o eixo OY na origem. A equação da Parábola pode ser escrita por

$$\lambda : y^2 = 4px.$$

$$\text{Por } \left(\frac{5\sqrt{35}}{7}, \frac{10\sqrt{14}}{21}\right) \in \lambda, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)^2 &= 4p \left(\frac{5\sqrt{35}}{7}\right) \Rightarrow \frac{100 \cdot 14}{441} = p \left(\frac{20\sqrt{35}}{7}\right) \\
&\Rightarrow \frac{100 \cdot 14}{441} \cdot \frac{7}{20\sqrt{35}} = p \\
&\Rightarrow \frac{10}{9\sqrt{35}} = p \\
&\Rightarrow \frac{10\sqrt{35}}{9 \cdot 35} = p \\
&\Rightarrow \frac{2\sqrt{35}}{63} = p.
\end{aligned}$$

A equação da Parábola pode ser escrita como

$$\lambda : y^2 = 4 \cdot \frac{2\sqrt{35}}{63}x. \Rightarrow \lambda : y^2 = \frac{8\sqrt{35}}{63}x.$$

Gabarito: Letra E.

Resolução H.8.6:

Dada a equação $x^2 + bx + 1 = 0$, tal que $|b| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, queremos encontrar o Lugar Geométrico das soluções dessa equação no plano complexo.

Para encontrar as soluções de uma equação do segundo grau utilizamos a Fórmula de Bháskara, portanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

Como $|b| < 2$, logo $b^2 - 4 < 0$, portanto $\sqrt{b^2 - 4} = i\sqrt{4 - b^2}$. Assim, as soluções da equação são

$$x_1 = \frac{-b}{2} - i\frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b}{2} + i\frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}.$$

Para analisar essas soluções no plano complexo, fazamos uma substituição de variáveis. Seja $\bar{x} = \frac{-b}{2}$ e $\bar{y} = \pm \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}$. Agora, note que

$$\bar{x}^2 = \frac{b^2}{4} \quad \text{e} \quad \bar{y}^2 = \frac{4 - b^2}{4} = 1 - \frac{b^2}{4} = 1 - \bar{x}^2,$$

portanto $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$.

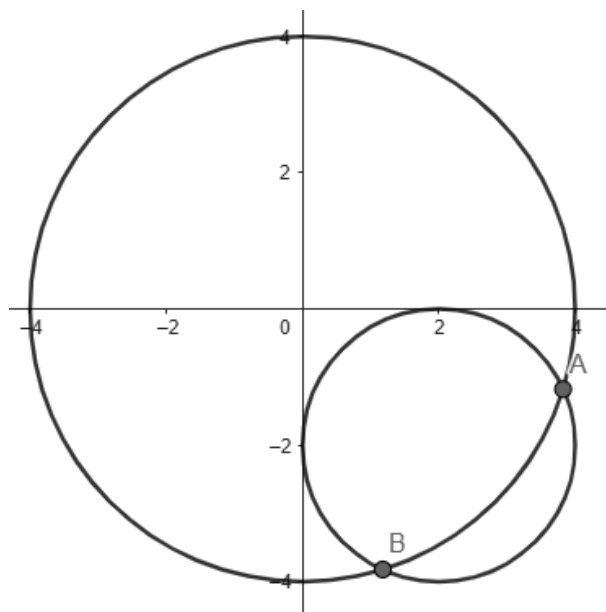
Segue que o conjunto de soluções está na Circunferência $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$. Como $|b| < 2$, logo $-2 < b < 2$ e, portanto $-1 < \bar{x} < 1$. Consequentemente, os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ não estão no conjunto de soluções. Concluimos que o Lugar Geométrico das soluções é uma Circunferência menos dois pontos.

Gabarito: Letra C.

I.9 2017**Resolução H.9.1:**

Dadas as Circunferências $c_1 : x^2 + y^2 - 16 = 0$ e $c_2 : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$, queremos encontrar a distância entre seus pontos de interseção A e B .

Figura I.31: Esboço



Como $A, B \in c_2$, logo

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+2)^2 &= 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 4 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0.\end{aligned}$$

No entanto, como $A, B \in c_1$, logo $x^2 + y^2 = 16$. Portanto,

$$16 - 4x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow 4y = 4x - 20 \Rightarrow y = x - 5.$$

Portanto, os pontos de interseção de c_1 e c_2 pertencem à reta $r : y = x - 5$. Encontremos as interseções dessa reta com a Circunferência c_1 .

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 16 &= 0 \Rightarrow x^2 + (x-5)^2 - 16 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + x^2 - 10x + 25 - 16 = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 - 10x + 9 = 0.\end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 100 - 72 = 28.$$

Consequentemente:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Sabemos que $y = x - 5$, logo

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} - 5 = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Portanto, os pontos A e B tem coordenadas

$$A = \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{7}}{2} \right) \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{7}}{2} \right).$$

Calculemos a distância entre A e B .

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2} - \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-5 + \sqrt{7}}{2} - \frac{-5 - \sqrt{7}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{7 + 7} \\ &= \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.9.2:

A equação da Circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 é:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

que pode ser reescrita da forma

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.9.3:

Se uma Circunferência no primeiro quadrante tangencia os dois eixos coordenados, logo as coordenadas de seu centro são iguais ao raio dessa Circunferência.

Portanto, as Circunferências de raios 1 e 2 com centros no primeiro quadrante que tangenciam ambos os eixos ordenados podem ser representadas pelas equações

$$\lambda_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

respectivamente.

Queremos encontrar as interseções entre essas duas Circunferências.

Como $P \in C_1$, logo

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1.$$

Como $P \in C_2$, temos

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x + 4y - 4.$$

Utilizando as duas equações encontradas, podemos dizer que

$$2x + 2y - 1 = 4x + 4y - 4 \Rightarrow -2y = 2x - 3 \Rightarrow y = -x + \frac{3}{2}.$$

Portanto, as interseções das duas Circunferências estão na reta $r : y = -x + \frac{3}{2}$. Encontremos as interseções dessa reta com a Circunferência λ_1 .

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 &\Rightarrow (x-1)^2 + \left(-x + \frac{3}{2} - 1\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + \left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 9 - 2 = 7.$$

Logo,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{4}.$$

Recorde que $y = -x + \frac{3}{2}$, então $y = \frac{-3 \mp \sqrt{7}}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{7}}{4}$.

Os pontos de interseção das Circunferências são

$$P_1 \left(\frac{3 + \sqrt{7}}{4}, \frac{3 - \sqrt{7}}{4} \right) \quad \text{e} \quad P_2 \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{4}, \frac{3 + \sqrt{7}}{4} \right).$$

Concluimos que $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{72}{16} = \frac{9}{2}$.

Gabarito: Letra C.

Resolução H.9.4:

Vamos considerar $z = x + iy$. Para que z possua uma raiz puramente imaginária, teremos, necessariamente, que $x = 0$. Assim:

$$z = iy.$$

Substituindo na equação do problema:

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0 \Rightarrow (iy)^2 + (iy) + 2 - (a + ib) = 0 \Rightarrow -y^2 + iy + 2 - (a + ib) = 0.$$

Reorganizando os termos:

$$-y^2 - a + 2 + i(y + b) = 0.$$

Para que essa equação seja verdadeira é necessário e suficiente que $-y^2 - a + 2 = 0$ e $y + b = 0$. Uma vez que $y + b = 0$, segue que $y = -b$. Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos

$$-(-b)^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow -b^2 = a - 2.$$

Concluimos que os pontos $(a, b) \in \mathbb{R}$ que resolvem a equação são os pontos que satisfazem a equação $-b^2 = a - 2$ sendo essa a equação de uma Parábola.

Gabarito: B.

I.10 2016

Resolução H.10.1:

Para encontrar a posição relativa entre as Circunferências de equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$$

devemos encontrar seus centros e seus raios.

Sendo C_1 e C_2 os centros das Circunferências e r_1 e r_2 os seus raios, temos que:

1. Pela equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$, sabemos que $C_1 = (2, 3)$ e $r_1 = 3$.
2. Pela equação $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$ podemos completar os quadrados para obter a equação $(x - 4)^2 + y^2 = 1$, portanto $C_2 = (4, 0)$ e $r_2 = 1$.

Calculemos agora a distância entre C_1 e C_2 e comparemos essa distância à soma dos raios.

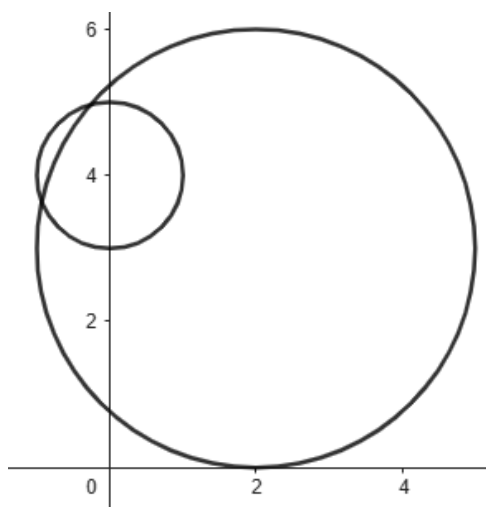
$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Perceba que

$$r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2.$$

De onde segue que essas Circunferências são secantes.

Figura I.32: Esboço



Gabarito: Letra A.

Resolução H.10.2:

Se o Círculo de centro $P = (a, b)$ tangencia as retas $r : y = x$ e $s : x = 0$, logo a distância de P a r é igual a distância de P a s . Perceba que a distância de P a s é a sua abscissa e, portanto a .

Além disso, como P pertence à Parábola $y = x^2$, logo $b = a^2$. Sendo assim $P = (a, a^2)$. Reescrevendo r como $-x + y = 0$ podemos utilizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta:

$$d(P, r) = \frac{|-x_P + y_P|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \Rightarrow a = \frac{|-a + a^2|}{\sqrt{2}}.$$

Desde que $a > 0$, implica

$$a\sqrt{2} = a^2 - a \Rightarrow \sqrt{2} = a - 1 \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1.$$

Por outro lado, de $b = a^2$, temos

$$b = (\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.10.3:

a) Sabendo que $P = (2, 1)$ é o centro da Circunferência e $Q = (-1, 5)$ é um ponto da Circunferência, logo o raio será a distância entre P e Q . Portanto,

$$r = d(P, Q) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

b) Sabemos que a reta tangente à Circunferência em Q é perpendicular a $\overrightarrow{PQ} = (-3, 4)$.

Sendo assim, $t : -3x + 4y + k = 0$. Como $Q \in t$, logo

$$-3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + k = 0 \Rightarrow 3 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -23.$$

Segue que a equação da reta tangente à Circunferência em Q é

$$t : -3x + 4y - 23 = 0.$$

c) Sendo R o ponto de interseção de t com o eixo OX , logo $y = 0$. Portanto,

$$-3x - 23 = 0 \Rightarrow x = -\frac{23}{3},$$

ou seja, $R = (-23/3, 0)$.

Queremos a área do triângulo PQR , sendo $P = (2, 1)$, $Q = (-1, 5)$ e $R = (-23/3, 0)$. Observe, no entanto, que esse triângulo é retângulo em Q , tendo em vista que a reta t é tangente à Circunferência em Q . Consequentemente, a área desse triângulo pode ser calculada por $A_{\Delta} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{QR}}{2}$.

Como PQ é o raio da Circunferência, logo $\overline{PQ} = 5$. Basta, portanto, calcular o comprimento do segmento $\overline{QR}$.

$$\begin{aligned} d(Q, R) &= \sqrt{(-1 + 23/3)^2 + (5 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(20/3)^2 + 25} \\ &= \sqrt{400/9 + 225/9} \\ &= \sqrt{625/9} = 25/3. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{QR} = 25/3$.

Concluimos que $A_{\Delta} = \frac{5 \cdot 25/3}{2} = 125/6$ u.a.

Resolução H.10.4:

Uma vez que P é um ponto equidistante às retas

$$r : 4x + 3y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad s : 12x - 16y + 5 = 0,$$

temos

$$\begin{aligned} d(P, r) = d(P, s) &\Rightarrow \frac{|4x + 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|12x - 16y + 5|}{\sqrt{12^2 + 16^2}} \\ &\Rightarrow \frac{|4x + 3y - 2|}{5} = \frac{|12x - 16y + 5|}{20} \\ &\Rightarrow 4(4x + 3y - 2) = \pm(12x - 16y + 5) \\ &\Rightarrow 16x + 12y - 8 = \pm(12x - 16y + 5) \\ &\Rightarrow 16x + 12y - 8 = 12x - 16y + 5 \text{ ou } 16x + 12y - 8 = -12x + 16y - 5. \end{aligned}$$

Portanto $4x + 28y - 13 = 0$ ou $28x - 4y - 3 = 0$.

Concluimos que o Lugar Geométrico que atende a essas duas equações é dada pela equação

$$(4x + 28y - 13) \cdot (28x - 4y - 3) = 0 \Rightarrow 112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0.$$

Gabarito: Letra E.

Resolução H.10.5:

a) Dado o ponto $P = (1, 4)$ e o conjunto $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$, queremos encontrar $d(P, S)$.

Um ponto do conjunto S_1 é do tipo $A = (0, y)$, em que $y \geq 2$. Sendo assim

$$d(P, A) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (4 - y)^2} = \sqrt{1 + (4 - y)^2}.$$

Note que $d(P, A)$ será mínimo quando $1 + (4 - y)^2$ for mínimo e, portanto, quando $y = 4$. Logo,

$$d(P, S_1) = \sqrt{1 + (4 - 4)^2} = 1.$$

Agora, dado o ponto $Q = (-3, 0)$ e o conjunto S_1 , queremos encontrar $d(Q, S_1)$. Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, temos que

$$d(Q, A) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{9 + y^2}.$$

Note que $d(Q, A)$ será mínimo quando $9 + y^2$ for mínimo e, portanto, quando $y = 2$, tendo em vista que $y \geq 2$. Assim,

$$d(Q, S_1) = \sqrt{9 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

b) Seja C um ponto, o qual queremos que seja equidistante de S_1 e S_2 .

Sejam $A \in S_1$ e $B \in S_2$ tais que $d(C, A) = d(C, S_1)$ e $d(C, B) = d(C, S_2)$. Sendo assim:

$$d(C, A) = \sqrt{x_c^2 + (y_c - y)^2}.$$

Como $d(C, A)$ é mínimo, logo se $y_c < 2$, então $y = 2$ e se $y_c \geq 2$, então $y = y_c$. Portanto, para $y_c < 2$ temos $d(C, A) = \sqrt{x_c^2 + (y_c - 2)^2}$ e para $y_c \geq 2$ temos $d(C, A) = \sqrt{x_c^2}$.

Além disso,

$$d(C, B) = \sqrt{(x_c - x)^2 + y_c^2}.$$

Por outro lado, $d(C, B)$ é mínimo, logo $x = x_c$ e, portanto, $d(C, B) = \sqrt{y_c^2}$.

Ademais, C é equidistante a S_1 e S_2 , logo para $y_c < 2$ temos

$$\begin{aligned}\sqrt{x_c^2 + (y_c - 2)^2} &= \sqrt{y_c^2} \Rightarrow x_c^2 + (y_c - 2)^2 = y_c^2 \\ &\Rightarrow x_c^2 + y_c^2 - 4y_c + 4 = y_c^2 \\ &\Rightarrow x_c^2 = 4y_c - 4 \\ &\Rightarrow x_c^2 = 4(y_c - 1).\end{aligned}$$

Portanto, para $y_c < 2$ temos a Parábola vertical $x^2 = 4(y + 1)$ como Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a S_1 e S_2 .

Para $y_c \geq 2$ temos

$$\sqrt{x_c^2} = \sqrt{y_c^2} \Rightarrow x_c^2 = y_c^2 \Rightarrow x_c = \pm y_c.$$

Concluimos que, para $y > 2$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$ como Lugar Geométrico dos pontos equidistantes a S_1 e S_2 .

I.11 2015

Resolução H.11.1:

Como C é uma Circunferência de raio 2 centrada na origem e P é um ponto de C do 1º quadrante que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo das abscissas, logo

$$P = (2\cos(\pi/4), 2\sin(\pi/4)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Queremos uma reta r tangente a C que passe por P . Como $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ é perpendicular a r , logo

$$r : \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + c = 0.$$

Sendo $P \in r$, temos

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + c = 0 \Rightarrow 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -4.$$

Portanto, $r : \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4 = 0$ é a equação da reta tangente a C passando por P , a qual pode ser dividida por $\sqrt{2}$ para dar a equação $r : x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.11.2:

Dados $O = (0, 0)$ e $A = (8, 0)$, queremos o conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que

$$d(O, P) = 3d(P, A)$$

Ou seja,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}.$$

Elevando os termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 9[(x - 8)^2 + y^2] &\Rightarrow x^2 + y^2 = 9[x^2 - 16x + 64 + y^2] \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 9x^2 - 144x + 576 + 9y^2. \end{aligned}$$

Subtraindo $x^2 + y^2$ em ambos os termos, obtemos:

$$8x^2 - 144x + 576 + 8y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 72 + y^2 = 0.$$

Completando os quadrados:

$$x^2 - 18x + 81 + y^2 = 9 \Rightarrow (x - 9)^2 + y^2 = 3^2.$$

Essa equação, portanto, representa uma Circunferência de centro $(9, 0)$ e raio 3.

Gabarito: Letra A.

Resolução H.11.3:

I- Sendo os focos da Elipse os pontos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, sabemos que o centro é a origem e $c = 3$.

Sendo o eixo maior igual a 8, logo $a = 4$. Sabemos, pela equação F.4 que $a^2 = b^2 + c^2$, portanto $4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 7$. Portanto, a equação dessa Elipse é

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

II- Sendo os focos da Hipérbole $F_1(-10, 0)$ e $F_2 = (10, 0)$, sabemos que o centro é a origem e $c = 10$.

Sendo a excentricidade $\frac{5}{3}$, logo $\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ e, portanto, $a = 6$.

Sabemos, pela equação F.6 que $c^2 = a^2 + b^2$, portanto $10^2 = 6^2 + b^2 \Rightarrow b = 8$.

Portanto, a equação dessa Hipérbole é

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1,$$

a qual podemos multiplicar por 576 para obter $16x^2 - 9y^2 = 576$.

III- A Parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ pode ser reescrita como

$$8x = -(y - 3)^2,$$

portanto o vértice é o ponto $(0, 3)$.

Concluimos que as afirmações (I) e (II) são as únicas verdadeiras.

Gabarito: Letra C.

Resolução H.11.4:

Dada a equação da Circunferência $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, sabemos que a reta $y = -x + 1$ passa pelo centro da Circunferência e a intersecta no ponto $(-3, 4)$.

Completando o quadrado da variável x é possível verificar que o centro da Circunferência tem abscissa igual a -1 . Como esse centro pertence à reta $y = -x + 1$, logo

$$y = -(-1) + 1 = 2.$$

Consequentemente, o centro da Circunferência é o ponto $(-1, 2)$. Pela equação geral da Circunferência, é possível verificar que, sendo $y_C = 2$, logo $m = -4$. Além disso, como $(-3, 4)$ é um ponto da Circunferência, logo

$$\begin{aligned} (-3)^2 + 2(-3) + 4^2 + 4m &= n \Rightarrow 9 - 6 + 16 + 4(-4) = n \\ &\Rightarrow 19 - 16 = n \\ &\Rightarrow n = 3. \end{aligned}$$

Concluimos que $m = -4$ e $n = 3$.

Gabarito: Letra A.

Resolução H.11.5:

1. Sendo $A \in OX$ e $B \in OY$, podemos dizer que $A = (x_A, 0)$ e $B = (0, y_B)$.

Dessa forma, o ponto médio de A e B é o

$$M = \left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2} \right).$$

Além disso, sabemos que $d(A, B) = l$, portanto

$$\sqrt{(x_A - 0)^2 + (0 - y_B)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} = l.$$

Então,

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_B^2 &= l^2 \Rightarrow \left(\frac{x_A}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_B}{2} \right)^2 = \left(\frac{l}{2} \right)^2 \\ &\Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = \left(\frac{l}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

que é a equação de uma Circunferência. Portanto, a afirmação 1 é verdadeira.

2. Dada a equação $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$, sabemos que

$$x(6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y) = 0.$$

Logo, $x = 0$ é solução da equação e como a reta $x = 0$ é infinita, logo o conjunto solução da equação não pode ser finito. Portanto, a afirmação 2 é falsa.

3. Dados quaisquer três pontos não alinhados, existe uma Circunferência que passa pelos três. Sendo assim, basta verificar se os pontos $A = (2, 3)$, $B = (4, -1)$ e $C = (3, 1)$ são alinhados.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 4, 3 + 1) = (-2, 4) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, 3 - 1) = (-1, 2).$$

Como $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, logo os pontos são colineares. Portanto, a afirmação 3 é falsa.

Gabarito: Letra A.

Resolução H.11.6:

Dada a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ que representa a união de duas retas concorrentes, devemos, inicialmente, encontrar a equação de cada uma dessas retas.

Para tanto, consideremos essa uma equação do segundo grau na variável x .

$$3x^2 + (5y - 3)x - 2y^2 + 8y - 6 = 0.$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (5y - 3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2y^2 + 8y - 6) \\ &= 25y^2 - 30y + 9 + 24y^2 - 96y + 72 \\ &= 49y^2 - 126y + 81 = (7y - 9)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$x = \frac{-(5y - 3) \pm (7y - 9)}{2 \cdot 3}.$$

Consequentemente, as duas retas concorrentes são dadas pelas equações:

$$r : x = \frac{-5y + 3 + 7y - 9}{6} \Rightarrow r : x = \frac{y}{3} + 2$$

e

$$s : x = \frac{-5y + 3 - 7y - 9}{6} \Rightarrow s : x = -2y - 1.$$

Ou ainda, $r : y = 3x - 6$ e $s : y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Sabemos que a tangente dos ângulos formados por r e s com o eixo OX , respectivamente, são 3 e $-1/2$. Sabendo que $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)}$, logo

$$tg(\theta) = \frac{-1/2 - 3}{1 + (-1/2)(3)} = \frac{-7/2}{-1/2} = 7.$$

Concluimos que a tangente do ângulo θ formado entre r e s é igual a 7.

I.12 2014

Resolução H.12.1:

A equação da Circunferência de Centro $(2, 3)$ e raio 5 é igual a $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$, a qual pode ser desenvolvida da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 25 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 25 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.

Resolução H.12.2:

Sabendo que o Círculo possui 4π de área, podemos encontrar o seu raio, tendo em vista que $A_{\bigcirc} = \pi R^2$. Sendo assim $R = 2$. Além disso, sendo a Circunferência tangente às retas $r : 2x - 2y + 5 = 0$ e $s : x + y - 4 = 0$, sabemos que o seu centro C é equidistante às retas.

Note que a reta s pode ser reescrita por $s : 2x + 2y - 8 = 0$. Sendo $C = (x, y)$ temos que

$$\begin{aligned} d(C, r) = d(C, s) &\Rightarrow \frac{|2x - 2y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2x + 2y - 8|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \\ &\Rightarrow |2x - 2y + 5| = |2x + 2y - 8| \\ &\Rightarrow 2x - 2y + 5 = \pm(2x + 2y - 8). \end{aligned}$$

Para o caso negativo, temos

$$2x - 2y + 5 = -2x - 2y + 8 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Observe que, o centro da Circunferência tem abscissa $\frac{3}{4}$. Ademais, essa Circunferência não ficará localizada no 1º quadrante, tendo em vista que o raio da Circunferência é maior que a sua abscissa.

Para o caso positivo, temos

$$2x - 2y + 5 = 2x + 2y - 8 \Rightarrow 13 = 4y \Rightarrow y = \frac{13}{4}.$$

Assim, a ordenada do centro é $\frac{13}{4}$. Como a distância entre o centro e a reta r é igual ao raio, logo

$$d(C, r) = 2 \Rightarrow \frac{\left| 2x - 2 \cdot \frac{13}{4} + 5 \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{\left| 2x - \frac{13}{2} + \frac{10}{2} \right|}{2\sqrt{2}} = 2.$$

Multiplicando ambos os termos por $2\sqrt{2}$ temos:

$$\left|2x - \frac{3}{2}\right| = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2x - \frac{3}{2} = \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \pm 2\sqrt{2}.$$

Como a Circunferência está localizada no 1º quadrante, logo $x = \frac{3}{4} + 2\sqrt{2}$. Sendo assim, a equação dessa Circunferência é:

$$\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$$

Gabarito: Letra D.

I.13 2013

Resolução H.13.1:

A equação $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y &= 164 \\ \Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) &= 164 \\ \Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) &= 164 + 36 + 25 \\ \Rightarrow 9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 &= 225. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por 225, obtemos

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

Portanto, essa equação representa uma Elipse de coeficientes $a = 5$ e $b = 3$. Pela equação F.4, sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ e, portanto $c = 4$. Sendo assim, a excentricidade dessa Elipse é $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Gabarito: Letra E.

Resolução H.13.2:

Sendo P simétrico a $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas, logo $P = (-1, -1)$.

Dada a Circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ queremos encontrar o seu centro. Para tanto, vamos reorganizar a equação e completar os quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 + 10y &= -25 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = -25 + 4 + 25 \\ &\Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 4. \end{aligned}$$

Seque que o centro dessa Circunferência é o ponto $C = (-2, -5)$.

Agora, queremos determinar a equação da Circunferência centrada em $(-2, -5)$ e

que passa pelo ponto P . Para tanto, calculemos a distância desse centro ao ponto P para encontrar o raio dessa Circunferência.

$$\begin{aligned} d(C, P) &= \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (-1 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Portanto, essa Circunferência tem centro $(-2, -5)$ e raio $r = \sqrt{17}$. Podemos encontrar a sua equação por

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + (y + 5)^2 &= (\sqrt{17})^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 17 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 - 17 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.13.3:

Seja $A = (1, 2)$ o centro da Circunferência. Sendo a reta t tangente a C , logo t é perpendicular ao segmento $\overline{AQ}$. Consequentemente, o triângulo $\triangle APQ$ é retângulo em Q . Sabemos que o raio da Circunferência é igual a 1, portanto $\overline{AQ} = 1$. Além disso $\overline{PA} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{AQ}^2 \Rightarrow (\sqrt{20})^2 = \overline{PQ}^2 + 1^2 \\ &\Rightarrow 20 = \overline{PQ}^2 + 1 \\ &\Rightarrow 19 = \overline{PQ}^2 \\ &\Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{19}. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.

Resolução H.13.4:

Dada a Parábola de equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, queremos verificar quantas retas tangentes à Parábola são paralelas ao eixo OX .

Lembre-se que uma reta paralela ao eixo OX é do tipo $r : y = k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo y por k na equação da Parábola, obtemos

$$x^2 + 2kx + k^2 - 2x + 4k + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (2k - 2)x + k^2 + 4k + 1 = 0.$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (2k - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 + 4k + 1) = 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 - 16k - 4 = -24k.$$

Como r é tangente à Parábola, logo $\Delta = 0$. Concluimos que $k = 0$. Assim, a única reta tangente à Parábola tangente ao eixo OX é $r : y = 0$.

Gabarito: Letra B.

I.14 2012

Resolução H.14.1:

Dada a Circunferência $\lambda : x^2 + y^2 = 9$, sabemos que o seu centro é o ponto $O = (0, 0)$. Sendo r a reta tangente a λ pelo ponto $P = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$, logo r é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$. Por simplicidade utilizaremos o vetor $\vec{v} = (-1, -1)$ que é paralelo a $\overrightarrow{OP}$. Portanto $r : -x - y + k = 0$. Como $P \in r$, logo

$$-\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) + k = 0 \Rightarrow k = -3\sqrt{2},$$

ou seja, a equação de r é $-x - y - 3\sqrt{2} = 0$ que pode ser reescrita como $y = -x - 3\sqrt{2}$. Sendo s a reta tangente a λ pelo ponto $Q = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, logo s é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right)$. Por simplicidade utilizaremos o vetor $\vec{w} = (\sqrt{3}, -1)$ que é paralelo a $\overrightarrow{OQ}$. Portanto $s : \sqrt{3}x - y + c = 0$. Como $Q \in s$, temos

$$\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -6,$$

isto é, a equação de s é $\sqrt{3}x - y - 6 = 0$ que pode ser reescrita como $y = \sqrt{3}x - 6$.

Sabemos que em uma equação do tipo $y = ax + b$, o coeficiente a é igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo OX , logo

$$\operatorname{tg}(\theta_r) = -1 \Rightarrow \theta_r = \frac{3\pi}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\theta_s) = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_s = \frac{\pi}{3}.$$

Concluimos que o ângulo formado por r e s é $\theta = \theta_r - \theta_s = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$.

Gabarito: Letra D.

Resolução H.14.2:

Sendo C tangente ao eixo OX no ponto de abscissa 5, sabemos que a abscissa de seu centro também será 5. Além disso, a ordenada de seu centro será igual ao raio da Circunferência.

Sendo assim a equação da Circunferência é: $\lambda : (x - 5)^2 + (y - r)^2 = r^2$. Por $(1, 2) \in \lambda$, logo

$$\begin{aligned}(1 - 5)^2 + (2 - r)^2 &= r^2 \Rightarrow (-4)^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \\ &\Rightarrow 16 + 4 - 4r = 0 \\ &\Rightarrow 20 = 4r \\ &\Rightarrow r = 5.\end{aligned}$$

Gabarito: Letra C.

Resolução H.14.3

Seja $r : y = ax + b$ uma reta tangente à curva de equação $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ no ponto $P(8, 3)$. Sendo assim, a interseção entre a curva e r é um único ponto. Como $P \in r$, sabemos que $3 = 8a + b \Rightarrow b = 3 - 8a$.

Substituindo y por $ax + b$, temos

$$\begin{aligned}x^2 + 4(ax + b)^2 - 100 &= 0 \Rightarrow x^2 + 4a^2x^2 + 8abx + 4b^2 - 100 = 0 \\ &\Rightarrow (4a^2 + 1)x^2 + (8ab)x + 4b^2 - 100 = 0.\end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (8ab)^2 - 4 \cdot (4a^2 + 1) \cdot (4b^2 - 100) \\ &= 64a^2b^2 - 4 \cdot (16a^2b^2 - 400a^2 + 4b^2 - 100) \\ &= 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + 1600a^2 - 16b^2 + 400 \\ &= 1600a^2 - 16b^2 + 400.\end{aligned}$$

Como a interseção é única, logo $\Delta = 0$, portanto

$$1600a^2 - 16b^2 + 400 = 0 \Rightarrow 16b^2 = 1600a^2 + 400 \Rightarrow b^2 = 100a^2 + 25.$$

Sendo $b = 3 - 8a$, temos

$$(3 - 8a)^2 = 100a^2 + 25 \Rightarrow 9 - 48a + 64a^2 = 100a^2 + 25 \Rightarrow 36a^2 + 48a + 16 = 0.$$

Dividindo ambos os termos por 4, obtemos:

$$9a^2 + 12a + 4 = 0.$$

Para essa nova equação, encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Logo,

$$a = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 9} = \frac{-12}{18} = \frac{-2}{3}.$$

Desde que $b = 3 - 8a$, temos

$$b = 3 - 8 \left(\frac{-2}{3} \right) = \frac{9}{3} + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}.$$

Concluimos que a reta tangente à curva no ponto P tem equação $r : y = \frac{-2x}{3} + \frac{25}{3}$, que pode ser reescrita como

$$r : 3y = -2x + 25,$$

ou ainda,

$$r : 2x + 3y - 25 = 0.$$

Gabarito: Letra A.

I.15 2011

Resolução H.15.1:

Para encontrarmos o centro da curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$, precisamos primeiramente completar os quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 10y + 25 = 0 &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 4 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Portanto, a curva é uma Circunferência de centro $C = (2, -5)$.

Queremos saber a distância de C à origem do plano cartesiano.

$$d(C, O) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-5 - 0)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

Gabarito: Letra E.

Resolução H.15.2:

Dada a Circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, para encontrar seu ponto de ordenada máxima, é necessário encontrar o seu centro e o seu raio. Para isso, reorganizemos a equação e completemos os seus quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 + 6y = -1 &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -1 + 1 + 9 \\ &\Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 3^2. \end{aligned}$$

Portanto, o Centro é o ponto $(-1, -3)$ e raio é igual a 3. Sendo assim, o ponto de ordenada máxima dessa Circunferência é $(-1, 0)$.

Gabarito: Letra C.

Resolução H.15.3: Dada a equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$, é conveniente, para analisarmos o seu formato, reorganizar a equação e completar os quadrados:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36x - y^2 - 8y &= -11 \Rightarrow 9(x^2 - 4x) - (y^2 + 8y) = -11 \\ &\Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = -11 + 36 - 16 \\ &\Rightarrow 9(x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 9 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 - \frac{(y + 4)^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

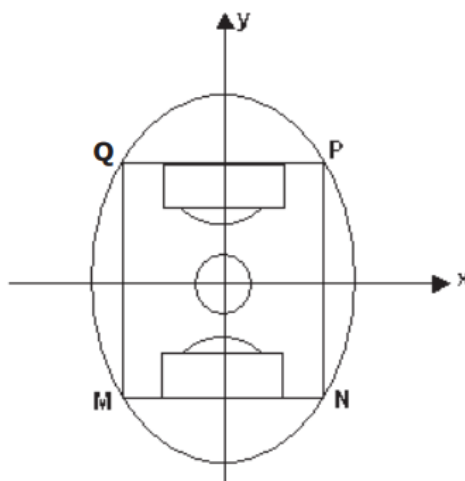
Sendo essa a equação de uma Hipérbole.

Gabarito: Letra E.

Resolução H.15.4:

Dada a Elipse descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$ que pode ser representada pela seguinte figura:

Figura I.33



Queremos encontrar a distância entre as retas MN e PQ , sabendo-se que os focos da Elipse estão situados nos lados do retângulo $MNPQ$. Ora, devemos encontrar os coeficientes dessa Elipse a fim de descobrir os seus focos. Pela equação da Elipse, sabemos que $a = 60$ e $b = 36$. Pela equação F.4, sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 60^2 - 36^2 \Rightarrow c^2 = 3600 - 1296 = 2304 \Rightarrow c = 48.$$

Portanto, a distância do Centro até os lados QP e MN é igual a 48 m. Sendo assim, a distância entre esses lados é 96 m.

Gabarito: Letra E.

Resolução H.15.5:

Seja C uma Circunferência que passa pelos pontos $A(0, 3)$ e $B(-1, 0)$ e λ uma outra Circunferência de Centro $D(-1/2, 4)$ e tangente a C em $(0, 3)$, queremos encontrar o raio de C .

Como A e B pertencem a C , logo o centro de C encontra-se na mediatriz desses pontos. Além disso, como C é tangente a λ , logo o centro de C , o centro de λ e o ponto de interseção $(0, 3)$ são colineares. Portanto, o Centro da Circunferência é a interseção da mediatriz de $A = (0, 3)$ e $B = (-1, 0)$ com a reta que passa por $D = (-1/2, 4)$ e $A = (0, 3)$.

Sabemos que a mediatriz de A e B é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$. Consequentemente, sua equação pode ser representada por

$$r_1 : -x - 3y + k_1 = 0.$$

Sabemos que $M = (-1/2, 3/2)$ é o ponto médio de A e B . Como $M \in r_1$, logo

$$-(-1/2) - 3 \cdot 3/2 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 4.$$

Dessa forma,

$$r_1 : -x - 3y + 4 = 0.$$

Além disso, a reta que passa pelos pontos $D(-1/2, 4)$ e $A(0, 3)$ é paralela ao vetor $\overrightarrow{DA} = (1/2, -1)$ que é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 1/2)$. Portanto sua equação pode ser representada por

$$r_2 : x + y/2 + k_2 = 0.$$

Como $A \in r_2$, temos

$$0 + 3/2 + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -3/2.$$

Segue que

$$r_2 : x + y/2 - 3/2 = 0.$$

Para encontrar a interseção dessas duas retas, isolemos a variável x em r_1 e vamos substituí-la em r_2 :

$$\begin{aligned} x = -3y + 4 &\Rightarrow (-3y + 4) + y/2 - 3/2 = 0 \\ &\Rightarrow -5y/2 + 5/2 = 0 \\ &\Rightarrow -5y = -5 \\ &\Rightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Como $x = -3y + 4$, logo $x = -3 + 4 = 1$. Concluimos que o centro de C é o ponto $E = (1, 1)$.

Para encontrar o raio de C , basta calcular a sua distância a A ou B .

$$d(E, B) = \sqrt{(1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Gabarito: Letra E.

I.16 2010

Resolução H.16.1:

Seja $C : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ a equação da Circunferência C .

Sabemos que a reta $x + y = 2$ é tangente a C no ponto $(0, 2)$. Sendo assim, o centro da Circunferência pertence à reta r perpendicular a $x + y = 2$ no ponto $(0, 2)$.

Como r é perpendicular a $x + y = 2$, logo

$$r : x - y + c = 0.$$

Para $(0, 2) \in r$, temos

$$0 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 2.$$

Portanto, o centro da Circunferência pertence à reta $r : x - y + 2 = 0$, ou seja, o centro é um ponto do tipo $A = (x, x + 2)$.

Além disso, sabemos que os pontos $P_1 = (0, 2)$ e $P_2 = (1, 0)$ pertencem à Circunferência. Sendo assim, queremos um ponto do tipo $A = (x, x + 2)$ tal que $d(A, P_1) = d(A, P_2) = R$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-0)^2 + (x+2-2)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (x+2-0)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + x^2} &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4} \\ \Rightarrow \sqrt{2x^2} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 5} \\ \Rightarrow 0 &= 2x + 5 \\ \Rightarrow x &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim } A = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(A, P_1) &= \sqrt{\left(0 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = R. \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

Resolução H.16.2:

Como a Hipérbole tem excentricidade $\sqrt{2}$, logo

$$\frac{c}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}a.$$

Sabemos, pela equação F.6 que $c^2 = a^2 + b^2$, portanto

$$(\sqrt{2}a)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = b^2.$$

Essa Hipérbole tem, portanto, coeficientes a e b iguais, sendo do tipo

$$\lambda : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \lambda : x^2 - y^2 = a^2.$$

Como $(\sqrt{5}, 1) \in \lambda$, logo

$$(\sqrt{5})^2 - 1^2 = a^2 \Rightarrow 5 - 1 = a^2 \Rightarrow a^2 = 4.$$

Sendo assim $a = b = 2$. Dessa forma,

$$\lambda : x^2 - y^2 = 4.$$

Agora, seja r a reta paralela a $y = 2x$ e tangente à Hipérbole. Sabemos que $r : y = 2x + k$. Substituindo y por $2x + k$ na equação da Hipérbole, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - (2x + k)^2 &= 4 \Rightarrow x^2 - 4x^2 - 4kx - k^2 = 4 \\ &\Rightarrow -3x^2 - 4kx - k^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Encontremos o discriminante Δ :

$$\Delta = (-4k)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-k^2 - 4) = 16k^2 - 12k^2 - 48 = 4k^2 - 48$$

Como a reta r é tangente, existe um único ponto de interseção e, portanto, $\Delta = 0$. Isto é,

$$0 = 4k^2 - 48 \Rightarrow 48 = 4k^2 \Rightarrow 12 = k^2 \Rightarrow k = 2\sqrt{3}.$$

Concluimos que

$$r : y = 2x + 2\sqrt{3},$$

que pode ser reescrita multiplicando ambos os termos por $\sqrt{3}$ na forma

$$r : \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6.$$

Gabarito: Letra A.

I.17 2009

Resolução H.17.1:

Dada a equação da Parábola $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$, desejamos encontrar a distância entre o vértice e o foco da Parábola, ou seja, o coeficiente p .

Primeiramente, vamos reescrever essa Parábola no modelo $(x - x_C)^2 = 4p(y - y_C)$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 &\Rightarrow 2x^2 - 4x = 4y - 3 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x = 2y - 3/2 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2y - 1/2 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \cdot (y - 1/4) \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \cdot 1/2 \cdot (y - 1/4). \end{aligned}$$

Assim, o valor de p é igual a $1/2$.

Gabarito: Letra E.

I.18 2003

Resolução H.18.1:

Inicialmente, consideremos uma Parábola da forma:

$$x^2 = 4py,$$

em que p é um número real positivo.

Nesse caso, sabemos que o eixo da Parábola é a reta $x = 0$. Sendo P um ponto dessa Parábola, logo ele é da forma

$$\left(x, \frac{x^2}{4p}\right).$$

Para encontrarmos a reta tangente à P temos duas possibilidades. A primeira é utilizando as equações paramétricas da reta t :

$$t : \begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 + ct \end{cases}.$$

Visto que P é da forma $\left(x, \frac{x^2}{4p}\right)$, logo utilizemos o ponto genérico $\left(a, \frac{a^2}{4p}\right)$. Assim, a reta t será da forma

$$t : \begin{cases} x = a + bt \\ y = \frac{a^2}{4p} + ct \end{cases}.$$

Ou seja, os pontos da reta são da forma $\left(a + bt, \frac{a^2}{4p} + ct\right)$.

Queremos que t seja tangente à Parábola, ou seja, queremos que haja uma única interseção entre os seus pontos. Sendo assim, a equação

$$\frac{(a + bt)^2}{4p} = \frac{a^2}{4p} + ct$$

deve ter solução única. Assim,

$$\begin{aligned}(a + bt)^2 &= a^2 + 4pct \Rightarrow a^2 + 2abt + b^2t^2 = a^2 + 4pct \\ &\Rightarrow 2abt + b^2t^2 = 4pct \\ &\Rightarrow b^2t^2 + (2ab - 4pc)t = 0.\end{aligned}$$

Como queremos que essa equação tenha solução única, então o discriminante Δ deve ser nulo. Segue que:

$$\begin{aligned}\Delta &= (2ab - 4pc)^2 - 4 \cdot b^2 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = (2ab - 4pc)^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2ab - 4pc = 0 \\ &\Rightarrow 2ab = 4pc \\ &\Rightarrow c = \frac{ab}{2p}.\end{aligned}$$

Substituindo esse valor nas equações paramétricas de t temos

$$t : \begin{cases} x = a + bt \\ y = \frac{a^2}{4p} + \frac{abt}{2p} \end{cases}$$

Isolando t em ambas as equações obtemos:

$$\begin{cases} t = \frac{x - a}{b} \\ t = \frac{y - \frac{a^2}{4p}}{\frac{ab}{2p}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - a}{b} = \frac{y - \frac{a^2}{4p}}{\frac{ab}{2p}} \Rightarrow (x - a) \cdot \frac{a}{2p} = \frac{4py - a^2}{4p} \Rightarrow 2x^2 - 2a^2 = 4py - a^2.$$

Assim,

$$4py = 2x^2 - a^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p} - \frac{a^2}{4p}.$$

é a equação cartesiana de t .

Alternativamente, podemos utilizar a noção de Derivada de uma função para encontrar a inclinação dessa reta. Perceba que esse conceito não é apresentado no ensino médio. No entanto, como a questão é de uma olimpíada universitária, tomamos a

liberdade de utilizá-lo também. Dessa forma,

$$f(x) = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2p} \Rightarrow f'(a) = \frac{a}{2p}.$$

Segue que

$$t : y = mx + n \Rightarrow t : \frac{ax}{2p} + n.$$

Como P pertence a t , logo

$$\frac{a^2}{4p} = \frac{a^2}{2p} + n \Rightarrow n = \frac{-a^2}{4p}.$$

Portanto a equação cartesiana de t é

$$t : y = \frac{ax}{2p} - \frac{a^2}{4p}.$$

A reta r paralela ao eixo que passa pelo ponto P é a reta $r: x = a$. Sendo $A = (x_A, y_A)$, queremos encontrar uma reta perpendicular a t que passe por A ,

$$p : y = m_p x + n_p.$$

Visto que $p \perp t$, então

$$\frac{a}{2p} \times m_p = -1 \Rightarrow m_p = \frac{-2p}{a}.$$

Como A pertence a p , logo

$$y_A = \frac{-2px_A}{a} + n_p \Rightarrow n_p = y_A + \frac{2px_A}{a} \Rightarrow p : y = \frac{-2px}{a} + y_A + \frac{2px_A}{a}.$$

Encontremos agora a intersecção de r e p

$$r : x = a.$$

Substituindo a por x em p

$$y = -2p + y_A + \frac{2px_A}{x}.$$

Considerando $x \neq 0$ é verdade que

$$\begin{aligned} y \cdot x &= \left(-2p + y_A + \frac{2px_A}{x} \right) \cdot x \Rightarrow xy = (-2p + y_A)x + 2px_A \\ &\Rightarrow xy + (2p - y_A)x - 2px_A = 0. \end{aligned}$$

Segue que essa equação é uma equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que $A = 0, B = 1, C = 0, D = (2p - y_A)$ e $F = -2px_A$. Sabemos, pelo capítulo 6, que

$$\Delta = B^2 - 4AC = 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 > 0.$$

Portanto, essa equação descreve uma Hipérbole. Além disso, como $A + C = 0$, logo essa Hipérbole é equilátera, como queríamos demonstrar. Não só isso, mas também pelo capítulo 6, afirmarmos que a rotação ou a translação dos eixos cartesianos não alteram os ângulos e as distâncias entre os pontos. Dessa maneira, as mesmas deduções poderiam ser feitas para qualquer Parábola, não só a Parábola $x^2 = 4py$.

Então, o Lugar Geométrico dos pontos Q é uma Hipérbole Equilátera.