MINISTERIO DA EDUCACAO - MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DA TERRA - CCET
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA - DMAT
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM MATEMATICA - PROFMAT/UFRN

EWERTON PAULO OLIVEIRA DA SILVA

CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA COM ABORDAGEM VETORIAL PARA O ENSINO MEDIO

NATAL-RN
2025

EWERTON PAULO OLIVEIRA DA SILVA

CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA COM ABORDAGEM VETORIAL PARA O ENSINO MEDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - PROFMAT/UFRN, como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas

NATAL-RN

2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Ewerton Paulo Oliveira da.
Conceitos de geometria analítica com abordagem vetorial para o ensino médio / Ewerton Paulo Oliveira da Silva. - 2026.
80f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2026.
Orientação: Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas.

1. Geometria analítica - Dissertação. 2. Vetores - Dissertação. 3. Abordagem vetorial - Dissertação. I. Borjas, Santos Demetrio Miranda. II. Título.

RN/UF/BSCCET CDU 514.12

Elaborado por Elaine Paiva de Assunção - CRB-15/492

EWERTON PAULO OLIVEIRA DA SILVA

CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA COM ABORDAGEM VETORIAL PARA O ENSINO MEDIO

O PRESENTE TRABALHO EM NÍVEL DE MESTRADO FOI AVALIADO E APROVADO PELA BANCA EXAMINADORA COMPOSTA PELOS SEGUINTES MEMBROS:

gov.br Documento assinado digitalmente
SANTOS DEMETRIO MIRANDA BORJAS
Data: 23/02/2026 11:09:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas
(Orientador) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

gov.br Documento assinado digitalmente
JULIA VICTORIA TOLEDO BENAVIDES
Data: 23/02/2026 12:37:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Julia Victoria Toledo Benavides
(Interno) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

gov.br Documento assinado digitalmente
WALTER MARTINS RODRIGUES
Data: 23/02/2026 10:58:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues
(Externo) Universidade Federal Rural do Semi-Árido

CERTIFICAMOS QUE ESTA É A VERSÃO ORIGINAL E FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO, CONSIDERADO ADEQUADO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA. COM ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO DA MATEMÁTICA.

NATAL-RN
2025

Dedicatória: "Com a direção dada por Deus, pelo apoio incondicional oferecido em todos os aspectos pela minha esposa Cristiane e minhas filhas Alexya e Sarah, bem como aos meus pais que foram a mola propulsora que permitiu o meu avanço, mesmo durante os momentos mais difíceis. A conclusão deste trabalho não seria possível, por causa disso, dedico a estes a minha dissertação. Com muita gratidão no coração o resultado deste trabalho de pesquisa é dedicado. "

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que Seus planos fossem realizados em minha vida, durante todos esses anos de estudos, por ter permitido que tivesse saúde e determinação para não desanimar durante a realização deste trabalho, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados.

Agradeço a minha esposa Cristiane, companheira, confidente e amiga, por sua paciência, amor e apoio incondicional durante toda a elaboração, a quem devo este trabalho e que esteve ao meu lado nos momentos de alegria e de dificuldade, e as minhas filhas, gratidão, por me incentivar a seguir em frente e me oferecer suporte emocional constante.

Agradeço aos meus pais, Paulo Cesar e Vanuza Mascena, cuja dedicação e apoio incondicional permitiram a realização deste sonho, que sempre motivaram, investiram e propiciaram todas as condições para que estudasse e também me mostraram que o aprendizado e o conhecimento são permanentes não podendo ser subtraídos. Foram minha base e meu suporte durante toda a minha vida, meu sincero agradecimento.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas, por sua paciência, tempo, organização, orientação diligente, apoio incansável e valiosas sugestões ao longo deste processo. Seu profundo conhecimento e incentivo foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus colegas da turma PROFMAT 2023. Ficarão marcados para sempre em minha memória e em minha trajetória acadêmica. Passamos momentos incríveis juntos melhorando nossas sextas-feiras. Obrigado pela troca de experiências e pelo companheirismo que marcou a existência da nossa turma.

Aos meus professores, Alan Guimaraes, Viviane Klein, Debora Borges, Carlos Gomes, Fagner Santana, Santos Borjas e Viviane Simioli. Muito obrigado por compartilharem comigo o que vocês têm de mais valioso: o conhecimento. Aproveitei o curso e, dentro das minhas possibilidades, dei o meu melhor em cada momento de partilha de conhecimento.

Por fim, a Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, vinculada ao programa do mestrado profissional, que nos deram subsídios para o aprendizado e não mediram esforços para dirimir todas as nossas dúvidas o que se tornou fundamental para superar os desafios e concluir o mestrado.

"Por isso mesmo, empenhem-se para acrescentar

à sua fé a virtude; à virtude o conhecimento;

ao conhecimento o domínio próprio;

ao domínio próprio a perseverança;

à perseverança a piedade;

à piedade a fraternidade;

e à fraternidade o amor."

(**2 *Pedro* 1:5 – 7**)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo oferecer uma experiência Pedagógica dentro das normas da BNCC - Base Nacional Comum Curricular, utilizando Conceitos de Geometria Analítica com Abordagem Vetorial para o Ensino Médio. Iniciamos explorando uma fundamentação teórica, com conceitos, propriedades e operações envolvendo vetores. Compreender essas operações é crucial para estabelecer uma relação posterior na análise vetorial de Geométrica Analítica. As atividades foram propostas abordando vetores e sua valiosa aplicação dentro do estudo da Geometria Analítica, tendo como base o plano cartesiano e são delineadas através de figuras e gráficos. Além disso, são apresentadas considerações abrangentes sobre a resolução de questões desse referido tema.

Palavras-chave: Abordagem Vetorial. Vetores. Geometria Analítica.

ABSTRACT

This work aims to offer a pedagogical experience within the standards of the BNCC - National Common Curricular Base, using Concepts of Analytical Geometry with a Vectorial Approach for High School. We begin by exploring a theoretical foundation, with concepts, properties and operations involving vectors. Understanding these operations is crucial to establish a later relationship in the vector analysis of Analytical Geometry. The activities were proposed addressing vectors and their valuable application within the study of Analytical Geometry, based on the Cartesian plane and are outlined through figures and graphs. In addition, comprehensive considerations are presented on the resolution of questions on this topic.

Keywords: Vectorial Approach. Vectors. Analytical Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCET	Centro de Ciências Exatas e da Terra
DMAT	Departamento de Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

$\exists$	: existe
$\forall$	: qualquer que seja ou para todo(s)
$\Rightarrow$	: implica
$\Leftrightarrow$	: se, e somente se
$\therefore$	: portanto
$:=$	: definição

(o termo à esquerda de $:=$ *é definido pelo termo ou expressão à direita)*

$i.e.$	: id est (em português, isto é)
$\blacksquare$	: indica o final de uma demonstração
$\overleftrightarrow{AB}$	: reta passando pelos pontos A e B
$\overline{AB}$	: segmento de reta ligando os pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	: segmento orientado de reta ligando os pontos A e B
$\overrightarrow{v}$	: vetor v
$\left\Vert\overrightarrow{AB}\right\Vert$	: comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$
$\Vert\overrightarrow{v}\Vert$	: comprimento do vetor v
$\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$	: Produto escalar ou Produto interno de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$
Δ	: Triângulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A educação básica no Brasil enfrenta desafios persistentes, especialmente na aprendizagem de Matemática. Os altos índices de déficits e dificuldades, frequentemente apontados em avaliações como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), revelam lacunas profundas. Pesquisas como as citadas por Furlani (1993) e Tokarnia (2016) indicam que o desempenho dos estudantes em matemática tem se mantido em níveis preocupantes, um quadro que pode ser atribuído a diversos fatores: desde a falta de uma base sólida e problemas de concentração até a carência de metodologias de ensino inovadoras que consigam despertar o interesse dos alunos.

A Geometria Analítica, em particular, destaca-se como um dos temas mais complexos no ensino médio, pois exige a integração de conceitos geométricos e algébricos. Tradicionalmente, o ensino dessa disciplina, conforme apontado por Dante (2005), pode parecer "árido e desconectado da intuição espacial", deixando os estudantes com a sensação de que estão diante de um conjunto isolado de fórmulas. Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) reforçam essa percepção, argumentando que a gradual perda de espaço da Geometria nos currículos comprometeu o raciocínio lógico e a capacidade de abstração dos alunos.

Nesse contexto, esta dissertação propõe uma abordagem alternativa: o tratamento vetorial para os conceitos da Geometria Analítica. O objetivo central é elaborar um material didático que possa ser utilizado diretamente por professores e estudantes, preenchendo a lacuna observada em muitos livros didáticos do ensino médio, que não oferecem uma visão unificada e vetorial do tema. Essa abordagem encontra precedentes em pesquisas anteriores, como a dissertação de Rodrigues [13], que também explora a Geometria Analítica com enfoque vetorial no ensino médio, demonstrando a viabilidade e a relevância dessa metodologia. Ao integrar a álgebra linear desde o início, buscamos uma conexão mais natural entre os diferentes ramos da Matemática.

A pesquisa adota uma metodologia de natureza qualitativa, fundamentada em uma pesquisa bibliográfica e análise documental. A proposta didática foi construída a partir da revisão de literatura e de livros didáticos, e é exemplificada por meio de exercícios resolvidos. O trabalho analisa a viabilidade de aplicação dessa metodologia em sala de aula, com a convicção de que o estudo de vetores pode não apenas simplificar a compreensão de conceitos complexos, mas também fortalecer a base matemática dos estudantes.

1.2. FUNDAMENTOS HISTÓRICOS E TEÓRICOS

1.1.1. O NASCIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

O século XVII foi um período de grandes transformações no pensamento científico, marcado pela transição do saber empírico para métodos mais rigorosos. Nomes como Francis Bacon, com sua abordagem indutiva "de baixo para cima", e René Descartes, com seu racionalismo e método dedutivo "de cima para baixo", foram fundamentais para a consolidação da ciência moderna. Foi nesse ambiente intelectual que a Geometria Analítica emergiu, desenvolvida de forma independente por Pierre de Fermat e René Descartes. Na figura 1, apresentamos o retrato do filósofo René Descartes (1596-1650), da Coleção do Museu do Louvre em Paris, e retrato do matemático francês Pierre de Fermat (1607-1665), de Rolland Lefebvre do século XIX.

Figura 1: René Descartes, à esquerda, e Pierre de Fermat, à direita.

Fonte: El Pais: El juego de la Ciência - 12 de abril de 2024 - Descartes vs Fermat el combate del siglo XVII

A grande inovação da Geometria Analítica foi a criação de uma ponte entre a geometria clássica e a álgebra simbólica. Isso permitiu que problemas geométricos fossem resolvidos por meio de equações e que curvas e superfícies fossem representadas no plano cartesiano. Essa conexão entre álgebra e geometria, ao introduzir a representação algébrica de objetos, pavimentou o caminho para a criação de conceitos como ponto, reta, plano e, posteriormente, os vetores.

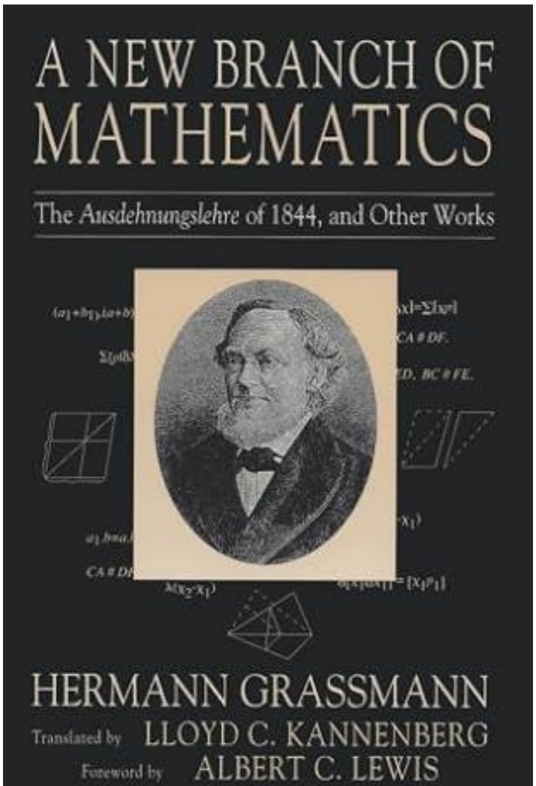
1.1.2. A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE VETOR

O conceito de vetor, tal como o conhecemos hoje, é uma construção relativamente recente, mas suas raízes remontam à antiguidade. Noções intuitivas de grandezas com direção e sentido já eram utilizadas na física por pensadores como Aristóteles e Isaac Newton para descrever forças e movimentos.

A formalização do conceito teve início no século XIX com matemáticos como Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, que começaram a representar números complexos como pontos em um plano, com segmentos direcionados. Em 1827, August Ferdinand Möbius introduziu os "segmentos orientados", e Giusto Bellavitis formalizou a "equipolência", tratando como equivalentes segmentos que possuíam a mesma direção, sentido e módulo.

No entanto, a formalização matemática completa do vetor é atribuída a Hermann Grassmann, que em sua obra *Ausdehnungslehre* (1844), introduziu noções de combinação linear, produto interno e produto vetorial, além de propor o conceito de espaço vetorial. Apresentamos na figura 2, a capa de uma tradução do *Ausdehnungslehre* (1844), de Hermann Grassmann.

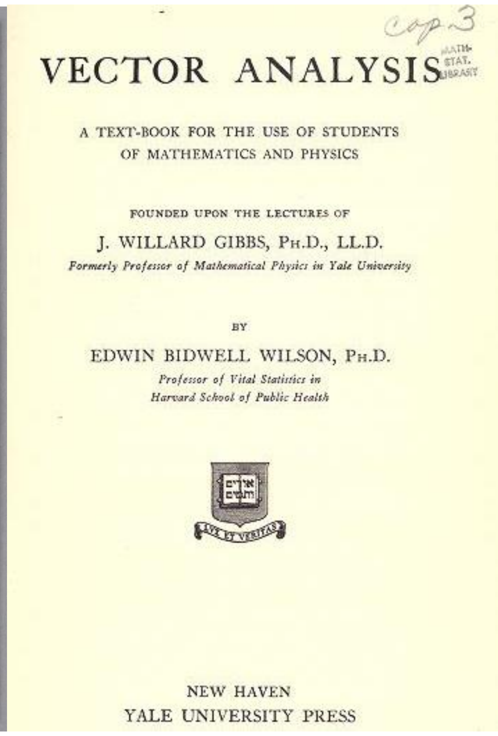
Figura 2: Capa de uma tradução do *Ausdehnungslehre* (1844), de Hermann Grassmann.



Fonte: https://www.amazon.com.br/New-Branch-Mathematics-Ausdehnungslehre-Other/dp/0812692764

A transição dos vetores de um conceito abstrato para uma ferramenta prática foi um marco na história da matemática. No final do século XIX, Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside simplificaram a linguagem vetorial ao introduzir operações-chave como o produto escalar e o produto vetorial, facilitando enormemente sua aplicação na física. Edwin Bidwell Wilson, em sua obra *Vector Analysis* (1901), Figura 3, consolidou esses avanços, tornando o formalismo vetorial uma ferramenta padrão para a comunidade científica e educacional. Essa base permitiu que, no século XX, o conceito se expandisse para estruturas mais abstratas como os espaços vetoriais, solidificando seu papel central na matemática e na física.

Figura 3: Edwin Bidwell Wilson e sua obra *Vector Analysis* (1901)



VECTOR ANALYSIS

A TEXT-BOOK FOR THE USE OF STUDENTS
OF MATHEMATICS AND PHYSICS

FOUNDED UPON THE LECTURES OF
J. WILLARD GIBBS, PH.D., LL.D.
Formerly Professor of Mathematical Physics in Yale University

BY
EDWIN BIDWELL WILSON, PH.D.
Professor of Vital Statistics in
Harvard School of Public Health

NEW HAVEN
YALE UNIVERSITY PRESS

Fonte: Museu do MIT **Fonte:** https://archive.org/details/117714283/page/n13/mode/2up

1.2. RELAÇÃO COM A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em sua versão de 2018, reforça a importância de um ensino de matemática que promova a capacidade de resolução de problemas e a modelagem de situações do cotidiano. A inclusão de temas como vetores e Geometria Analítica na área de Matemática e suas Tecnologias visa aprofundar a compreensão dos estudantes sobre a relação entre a álgebra e a geometria, proporcionando ferramentas poderosas para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

A Geometria Analítica já era um tema presente, mas ganha um novo enfoque, sendo vista não apenas como um estudo de equações, mas como uma ponte fundamental entre o raciocínio geométrico e o algébrico. O objetivo é que o estudante consiga transitar com fluidez entre o plano cartesiano e as representações algébricas de figuras (retas, circunferências, cônicas), intersecções e posições relativas. A BNCC defende uma integração entre os eixos de Espaço e Forma e Álgebra, de modo que o estudante compreenda a conexão entre as representações geométricas e algébricas.

Nesse contexto de inovação pedagógica, destacam-se abordagens como a do professor Chico Nery, que promove um ensino de Geometria Analítica de forma prática e contextualizada. Ao utilizar o plano cartesiano para descrever elementos geométricos a partir de exemplos do cotidiano — como o funcionamento de sistemas de GPS e a computação gráfica — e ao propor problemas desafiadores que envolvem reflexões, simetrias e distâncias, essa metodologia alinha-se à proposta vetorial desta dissertação. Ambas as abordagens buscam superar a percepção da Geometria Analítica como um campo puramente abstrato, integrando teoria e prática por meio de exercícios que estimulam o raciocínio lógico e a visualização espacial, conforme defendido em publicações como a Revista do Professor de Matemática (RPM).

A BNCC espera que o aluno desenvolva a capacidade de "usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações". Essa habilidade é essencial, pois o plano cartesiano é a base para a representação gráfica de funções e a modelagem matemática, indo além da simples memorização de fórmulas. Como argumenta Wagner, o ensino de Geometria Analítica deve transcender a simples aplicação de fórmulas, promovendo uma compreensão profunda das relações entre representações geométricas e algébricas. No ensino médio, isso se traduz no desenvolvimento de habilidades relacionadas a grandezas vetoriais, representação de movimentos e relações métricas no espaço.

Nesse contexto, os vetores surgem como um instrumento unificador e essencial. Embora historicamente o tema fosse tratado apenas no currículo de Física (para grandezas como velocidade e força), a BNCC propõe sua abordagem também na Matemática, reconhecendo seu papel como um conceito estruturante. Conforme Cury (2015), a Geometria Analítica deve ser vista *"como um campo de conexões, não como um conjunto isolado de técnicas"*.

O estudo de vetores na Matemática do Ensino Médio, conforme a BNCC, deve proporcionar aos alunos a compreensão do significado de um vetor (módulo, direção e sentido), das operações vetoriais (adição, subtração e multiplicação por escalar) e de sua representação analítica. A abordagem vetorial, ao permitir operações como soma, subtração e multiplicação por escalar, possibilita que o estudante reconheça padrões e desenvolva o raciocínio dedutivo para resolver problemas complexos.

Uma das competências gerais da BNCC que se relaciona diretamente a esse tema é a de *"compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas"* (Competência Específica 4 da Matemática). Vetores e Geometria Analítica são o ápice dessa integração, exigindo que o aluno alterne entre a visualização geométrica e a manipulação algébrica.

As habilidades específicas de (E13MAT501) "*Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.*" e (EM13MAT502) *"Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo* $y = ax^2$". estabelecem uma base para a Geometria Analítica, focando na identificação de padrões e generalizações. Embora não mencione vetores diretamente, o pensamento vetorial é um passo natural na generalização de relações no plano e no espaço.

A BNCC valoriza a resolução e a elaboração de situações-problema (habilidades como a EM13MAT314, que lida com grandezas), o que exige do estudante a mobilização do conhecimento de Geometria Analítica e vetores para modelar e solucionar contextos reais. O estudo de deslocamentos, forças, trajetórias e campos elétricos, por exemplo, demonstra a utilidade prática da matemática e contribui para uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Além de alinhar-se aos princípios da BNCC, o ensino de vetores permite a transversalidade com outras áreas, como Física, Engenharia e Ciências da Computação. Em avaliações externas, como o ENEM, a linguagem vetorial pode fornecer uma abordagem mais clara e intuitiva para a resolução de problemas envolvendo movimento, direção e posição.

Portanto, a BNCC sinaliza uma mudança na ênfase pedagógica: de um estudo puramente formal e focado em fórmulas para uma abordagem que privilegia a conexão entre diferentes linguagens matemáticas, o raciocínio espacial e a aplicação prática na modelagem da realidade, desenvolvendo o essencial "pensamento vetorial".

1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A estrutura da presente dissertação, intitulada "Conceitos de Geometria Analítica com Abordagem Vetorial para o Ensino Médio", está organizada de forma a apresentar uma progressão lógica, partindo da fundamentação teórica até a aplicação didática.

O trabalho se inicia com o Capítulo 1: Introdução, que estabelece o contexto e a justificativa da pesquisa, abordando os desafios do ensino de Matemática e a complexidade da Geometria Analítica. A introdução também se aprofunda nos Fundamentos Históricos e Teóricos do surgimento da Geometria Analítica e da evolução do conceito de vetor, e legitima a proposta ao detalhar sua Relação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), defendendo a integração do eixo de Espaço e Forma com a Álgebra.

O desenvolvimento teórico tem seu ponto de partida no Capítulo 2: Vetores no Plano, que visa fornecer a base conceitual necessária para a abordagem vetorial. Esta seção fundamental se dedica a formalizar conceitos primitivos da Geometria, como grandezas escalares e vetoriais, e a definição de segmentos orientados e sua propriedade de equipolência. A partir dessa base, o capítulo 3 avança em definir o vetor e o espaço vetorial, para assim começar as operações com vetores, detalhando a adição de vetores e a multiplicação por escalar, apresentando suas respectivas propriedades, e culmina com o estudo da Combinação linear com vetores, preparando o terreno para a representação analítica.

A partir do desenvolvimento dos fundamentos vetoriais, a estrutura da dissertação, em seus capítulos seguintes, realiza a transição para a Geometria Analítica propriamente dita. O capítulo 4 introduz o sistema de coordenadas no plano cartesiano, estabelecendo a representação analítica dos vetores por meio de coordenadas. Este passo é crucial, pois permite a tradução da linguagem geométrica para a linguagem algébrica, unificando os diferentes ramos da Matemática conforme preconiza o trabalho.

Uma seção substancial do trabalho é dedicada às aplicações métricas e de posição, usando a ferramenta vetorial para redefinir e resolver problemas tradicionais. Isso inclui a formalização da norma de um vetor no plano cartesiano, que é fundamental para o cálculo do comprimento e da distância euclidiana entre pontos. Além disso, a dissertação aborda a condição de alinhamento entre três pontos e a determinação do ponto médio de um segmento, demonstrando a aplicabilidade e a elegância do formalismo vetorial na resolução dessas questões geométricas.

Em seguida, o foco da dissertação se desloca para o estudo das retas no plano, com o uso do produto escalar (ou interno) para introduzir a noção de ortogonalidade e o cálculo do ângulo entre vetores. Esses conceitos são aplicados de maneira sistemática para a obtenção da equação vetorial da reta e suas formas associadas (paramétrica e geral). O ápice dessa aplicação reside na resolução de problemas de distância, como o cálculo da distância de um ponto até uma reta, consolidando a Geometria Analítica com a abordagem vetorial como um instrumento poderoso de resolução.

A dissertação se encerra com as considerações finais, onde são discutidos os resultados alcançados pelo trabalho, a viabilidade de aplicação do material didático e as sugestões para a continuidade da pesquisa em temas correlatos, dada a natureza do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), cumprindo o objetivo central de oferecer uma experiência pedagógica alinhada à BNCC e simplificada pelo raciocínio vetorial.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Antes de adentrarmos o estudo dos vetores e de suas aplicações na Geometria Analítica, é essencial compreender os conceitos primitivos e os fundamentos que sustentam todo o edifício da Geometria. Assim como em qualquer estrutura lógica, a Matemática se apoia sobre ideias básicas que não são definidas, mas aceitas como intuitivas. Termos como ponto, reta e plano constituem os elementos fundamentais a partir dos quais se constroem definições, axiomas, propriedades e teoremas.

Esses conceitos, embora simples à primeira vista, possuem um papel profundo na organização do pensamento geométrico. A noção de ponto representa uma posição no espaço, sem dimensão; a reta expressa a ideia de alinhamento e direção; e o plano traduz a extensão bidimensional onde ocorrem as principais relações da Geometria. Tais elementos, combinados por meio de axiomas e postulados, formam o conjunto de verdades aceitas que sustentam todo o raciocínio geométrico.

Ao longo deste capítulo, revisitaremos essas noções fundamentais, articulando-as com a linguagem da Geometria Analítica, na qual o ponto passa a ser representado por coordenadas, e as relações geométricas podem ser expressas por meio de equações e vetores. Essa transição entre a Geometria clássica e a Geometria Analítica inaugura uma nova forma de pensar o espaço — não apenas de modo intuitivo e visual, mas também numérico e simbólico, unindo o raciocínio algébrico à intuição geométrica.

A compreensão desses princípios é indispensável para o estudo dos vetores, pois é sobre eles que se apoiam os conceitos de direção, sentido, intensidade e posição. Ao dominar esses fundamentos, o estudante estará preparado para compreender as operações vetoriais e suas múltiplas aplicações na resolução de problemas geométricos e físicos.

2.1. FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA CLÁSSICA (A BASE AXIOMÁTICA)

A Geometria Analítica é construída sobre os conceitos primitivos e postulados da geometria euclidiana. Refere-se à estrutura lógica e conceitual estabelecida principalmente por Euclides de Alexandria em sua obra monumental, *Os Elementos*, por volta de 300 a.C. Essa estrutura é o que define a Geometria Euclidiana, que serviu de base para todo o desenvolvimento posterior da Geometria, incluindo a Analítica.

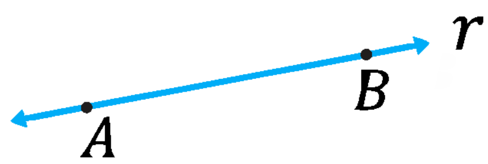
A base axiomática da Geometria Clássica é composta por três tipos de elementos:

2.1.1. CONCEITOS PRIMITIVOS (OU ENTES PRIMITIVOS)

São os elementos que não possuem uma definição formal. Eles são aceitos e compreendidos intuitivamente, servindo como blocos de construção para todos os outros conceitos da Geometria. Tentar defini-los levaria a um ciclo vicioso de definições.

- **Ponto:** É adimensional (não possui dimensão: nem comprimento, largura ou altura). Sua ideia intuitiva é a de localização exata no espaço, sem tamanho ou forma. A representação é com letras maiúsculas do alfabeto latino (ex: A, B, P). É a base de toda a Geometria, e as retas e os planos são formados por conjuntos de pontos.
- **Reta:** É unidimensional. Sua ideia intuitiva é de um conjunto infinito e ininterrupto de pontos, alinhados, que se estende infinitamente em duas direções opostas (não tem começo, nem fim). A representação é com letras minúsculas do alfabeto latino (ex: r, s, t). Podendo ser determinada por dois pontos distintos, como representado na Figura 4, e representada por $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 4: Reta $\overleftrightarrow{AB}$, determinada por dois pontos.



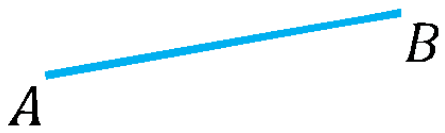
Fonte: Elaboração própria.

OBSERVAÇÃO: É fundamental detalhar as entidades geométricas básicas (reta, semirreta e segmento). Abaixo, apresento os conceitos, organizando a estrutura dos fundamentos. Partes da reta recebem nomes específicos:

Definição 1 *(Semirreta):* É uma das duas partes em que uma reta é dividida por um ponto. É uma porção da reta que tem início (origem) em um ponto, mas não tem fim, estendendo-se infinitamente em uma única direção. Tem um ponto de início bem definido, chamado de origem. Este ponto pertence à semirreta. Estende-se ao infinito em uma única direção a partir da origem. E é definida por sua origem e um segundo ponto pelo qual ela passa. Por exemplo, a semirreta de origem em A que passa pelo ponto B é representada por $\overrightarrow{AB}$.

Definição 2 *(Segmento):* Dados dois pontos distintos A e B quaisquer, que determinam uma única reta r, chamaremos de segmento $\overline{AB}$, ao conjunto formado pelos pontos extremos A e B e por todos os pontos da reta r entre esses dois pontos.

Figura 5: Representação gráfica do segmento $\overline{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

Definição 3 *(Segmento nulo):* Um segmento nulo $\overline{AA}$ será o conjunto unitário formado apenas pelo ponto A.

- **Plano:** É Bidimensional (não possui altura). Sua ideia intuitiva é de uma superfície plana (que não faz curvas), lisa e ininterrupta, que se estende infinitamente em todas as direções. A representação é com letras minúsculas do alfabeto grego (ex: α (alfa), β (beta), γ (gama)). Pode ser determinado por três pontos não colineares

2.2. AXIOMAS (OU NOÇÕES COMUNS) E POSTULADOS

Axioma (ou Noção Comum) é uma proposição que é aceita como verdade evidente e incontestável e que se aplica a todas as áreas do conhecimento ou da Matemática (álgebra, aritmética, etc.). Já postulado é uma proposição que é aceita como verdade evidente e incontestável, mas que é específica de uma área de estudo. Seria uma informação necessária para construir um sistema axiomático.

Os principais axiomas que iremos descrever são:

A. Axiomas de Incidência (Existência e Determinação)

1. **Axioma da Reta Única (Pertinência de Pontos à Reta):** *Dados dois pontos distintos, existe uma e somente uma reta que os contém.* Dois pontos são suficientes para definir e fixar uma reta. Se um ponto está em uma reta, dizemos que ele pertence à reta ou que a reta passa pelo ponto.

2. **Axioma de Infinitude da Reta:** *Toda reta possui pelo menos dois pontos distintos. Além disso, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.* Garante a existência de uma reta e estabelece que ela é um conjunto com múltiplos pontos e que nem todos os pontos do espaço estão nela.
3. **Axioma da Determinação do Plano (Pertinência de Pontos ao Plano):** *Três pontos não colineares determinam um único plano.* Três pontos que não pertencem à mesma reta definem a superfície plana.
4. **Axioma da Inclusão (Pertinência de Reta ao Plano):** *Se uma reta contém dois pontos distintos de um plano, então todos os pontos dessa reta pertencem ao plano (ou seja, a reta está contida no plano).* Se dois pontos de uma reta estão em um plano, a reta inteira não pode "sair" desse plano.
5. **Axioma de Infinitude do Plano (Espaço):** *Existe pelo menos um plano. Nele e fora dele existem infinitos pontos.* Garante a existência do plano e que o espaço geométrico é tridimensional (pois existem pontos fora do plano).

B. Axiomas de Ordem (O Conceito de "Estar Entre")

Postulado de Ordem I: Se um ponto C está entre dois pontos A e B em uma reta:

1. Os três pontos são distintos.
2. Os três pontos são colineares.
3. Se C está entre A e B então C esta entre B e A.

Postulado de Ordem II: Dados dois pontos distintos A e B em uma reta, existe sempre um terceiro ponto C tal que B está entre A e C.

Estes axiomas garantem que a reta se comporta como o conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$), estabelecendo uma correspondência biunívoca.

C. Postulado de Paralelismo (O 5º Postulado de Euclides)

Axioma das Paralelas *(Axioma de Playfair - forma moderna equivalente):* Por um ponto fora de uma reta, passa uma, e somente uma, reta paralela à reta dada. É o postulado que define a Geometria Euclidiana**.** Sua negação levou ao desenvolvimento das Geometrias Não-Euclidianas (como a Hiperbólica e a Elíptica).

Neste momento, a compreensão aprofundada desses conceitos fundamentais da Geometria é indispensável, pois elas formam o alicerce teórico para a análise de interações e movimentos que ocorrem em múltiplos eixos do espaço. Para construir a estrutura formal que sustenta a abordagem vetorial, é crucial introduzir explicando grandezas escalares e vetoriais os segmentos orientados e a relação de equipolência entre eles. É precisamente essa classe de equivalência que nos permitirá, no passo seguinte, definir o Vetor como a entidade matemática abstrata, independente da sua posição inicial, mas determinada unicamente por suas três características essenciais.

2.3. GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

Neste tópico, introduziremos o conceito de vetor, adotando uma abordagem baseada em sua interpretação geométrica e nas operações associadas. Para compreender o papel que os vetores desempenham nas diversas áreas das ciências, é necessário observar que algumas grandezas físicas podem ser completamente descritas por um único número real, dentro de um sistema de unidades — como é o caso do volume, da massa, da temperatura, da carga elétrica e da energia. Tais grandezas, determinadas unicamente por seu valor numérico, são denominadas grandezas escalares.

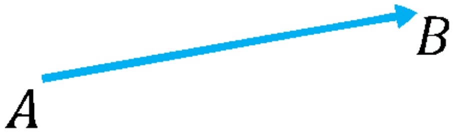
Em contrapartida, há grandezas físicas cuja caracterização completa exige, além de um valor numérico, informações relativas à sua orientação no espaço**.** Para evidenciar essa diferença, imagine um barco em alto-mar, localizado a 5 km de uma ilha. Se esse barco se deslocar 4 km, ele chegará mais perto da ilha? A resposta depende de para onde o barco se desloca. Se seguir na direção da ilha, estará mais próximo dela; porém, se mover-se em sentido oposto, ficará ainda mais distante. Esse exemplo mostra que, em situações como o deslocamento, não basta conhecer apenas o valor da distância percorrida — é fundamental também saber em que direção e em que sentido o movimento ocorre. Grandezas desse tipo, que requerem tanto magnitude quanto orientação (direção e sentido), são denominadas grandezas vetoriais. Elas são essenciais em diversos contextos da física, como no estudo da velocidade, da força, dos campos elétricos, entre outros, justamente por incorporarem características que vão além do simples valor escalar.

Nota Pedagógica: A distinção entre grandezas escalares e vetoriais pode ser explorada de maneira dinâmica com o auxílio de softwares livres como o GeoGebra. Conforme demonstrado por Silva [14], a ferramenta permite a criação e manipulação interativa de vetores, possibilitando que os estudantes visualizem em tempo real os efeitos de alterações no módulo, direção e sentido, consolidando a compreensão desses conceitos fundamentais.

2.4. SEGMENTOS ORIENTADOS

Definição 4 *(Segmento orientado):* Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é definido por um segmento $\overline{AB}$ e uma escolha de um dos seus extremos como ponto inicial A e o outro como ponto final B, isto é, no segmento $\overline{AB}$ estabelecemos o sentido do percurso de A para B.

Figura 6: Segmento Orientado $\overrightarrow{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

Observação 2.1 Em relação aos segmentos e segmentos orientados temos:

- O segmento $\overline{AB} = \overline{BA}$,
- O segmento orientado $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$,
- O segmento orientado $\overrightarrow{AA}$ é chamado de segmento orientado nulo. Não tem direção nem sentido.

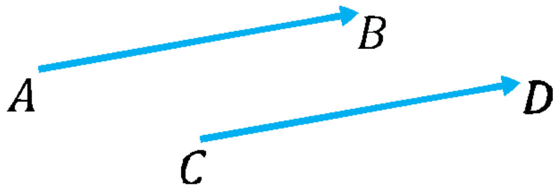
Definição 5 *(Segmentos equipolentes):* Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes e denotamos por $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, quando satisfaz as seguintes propriedades:

(a) têm o mesmo comprimento

(b) são paralelos ou colineares

(c) têm o mesmo sentido

Figura 7: Segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ equipolentes.



Fonte: Elaboração própria.

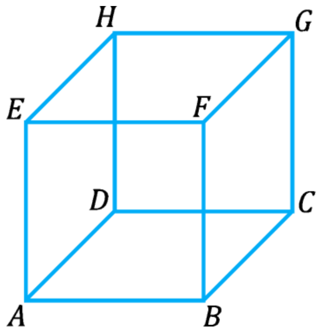
Observamos que equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados e, portanto, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Reflexividade: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$.
2. Simetria: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$.
3. Transitividade: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF}$ implica que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

Nota Pedagógica: O conceito de equipolência, central para a definição de vetores, pode ser demonstrado de forma visualmente impactante utilizando o GeoGebra ou o Octave. Conforme indicado por Silva [14], nesses ambientes é possível construir diferentes segmentos orientados e verificar que, enquanto possuírem o mesmo módulo, direção e sentido, representam o mesmo vetor. Essa prática reforça a ideia de que um vetor é uma classe de equivalência de segmentos orientados equipolentes.

EXERCÍCIO 1: No paralelepípedo definido pelos pontos $ABCDEFGH$, verifique se existem 64 segmentos orientados?

Figura 8: Representação do paralelepípedo $ABCDEFGH$.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: De fato, observe:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HH}} - Vértices\ (8)$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DH}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EH}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GH}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HG}} \end{matrix} - Arestas\ (24)$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{\boldsymbol{AF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CH}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AH}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HF}}, \\ \overrightarrow{\boldsymbol{FA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{ED}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FH}} \end{matrix} - Diagonais\ das\ faces\ (24)$$

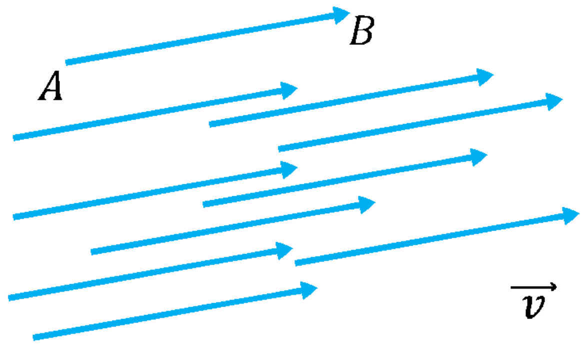
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AG}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BH}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}, \overrightarrow{\boldsymbol{DF}}, \overrightarrow{\boldsymbol{GA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{HB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{EC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{FD}} - Diagonais\ do\ Paralelepípedo\ (8)$$

Por se tratar de segmento orientado, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

3. VETORES NO PLANO

Definição 6 *(Vetor):* Sejam A e B pontos. Chama-se $vetor\ \vec{v} = \overrightarrow{AB}$ o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$. Cada segmento orientado do conjunto é chamado imagem geométrica ou representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

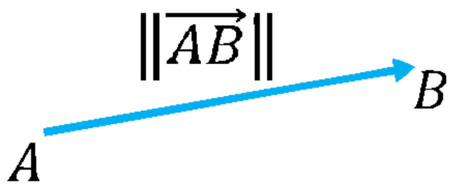
Figura 9: Representantes de $\overrightarrow{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

O comprimento de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ será denotado por $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{v}\|$ e será denominado também tamanho, intensidade, magnitude ou norma do vetor.

Figura 10: Comprimento de um segmento $\overline{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

OBSERVAÇÃO:

(a) O vetor $\overrightarrow{AB}$ não é o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ como conjunto de pontos, mas um representante do conjunto formado por todos os segmentos orientados que tem a mesma norma, mesma direção e mesmo sentido do um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

(b) Por convecção, o vetor nulo é o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$ qualquer seja o ponto A.

(c) Vetor unitário é o vetor de módulo igual a 1.

(d) Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

(e) Versor de um vetor é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\overrightarrow{v}$. O versor de $\overrightarrow{u}$ é dado por $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

Figura 11: $\overrightarrow{u}$, o versor de $\overrightarrow{v}$.

Fonte: Elaboração própria.

OBSERVAÇÃO: Sob a notação de *Hermann Grassmann*, o vetor $\overrightarrow{AB}$ será escrito como a diferença entre suas extremidades, e será justificado no tópico 3.4. Essa relação adquire uma forma mais direta:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

3.1. ESPAÇO VETORIAL

Seja V um conjunto, não vazio, onde estão definidas duas operações internas soma e produto por um escalar. Se, além disso, o conjunto V satisfaz oito axiomas, quatro axiomas de soma e quatro axiomas do produto,

S1. $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$

S2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

S3. Existe um elemento e em V tal que $\overrightarrow{u} + e = e$

S4. Para todo $\overrightarrow{u}$ em V existe um elemento $-\overrightarrow{u}$ em V tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = e$

P1. $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$

P2. $(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$

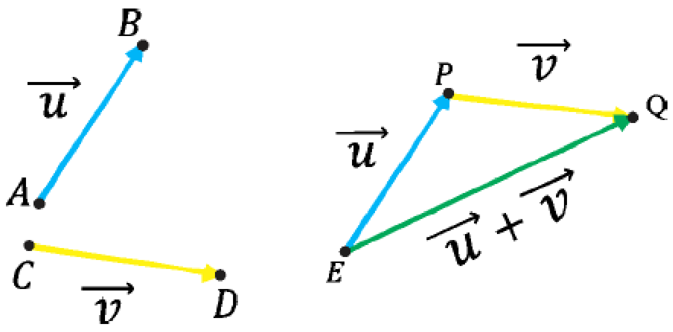
P3. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$

P4.$1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

Onde $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são elementos em V e $a, b, c, 1$ são elementos em K, K representa um corpo, então dizemos que o conjunto V é um espaço vetorial e neste caso os elementos de V são chamados de vetores. Por exemplo, se V representa N o conjunto dos números naturais com soma e produto usual em N e $K = R$ é claro que V não representa um espaço vetorial. Mas se V representa o conjunto de números reais R e $K = R$ com soma e produto usual definido em R, então pode ser provado que V é um espaço vetorial e cada número real é chamado de vetor.

Definição 7 *(Adição de vetores):* Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores dados e seja E um ponto no plano, pela observação citada acima, existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$ novamente escolhendo o ponto P, pela observação citada acima, existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$. Definimos o vetor soma de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ como sendo o único vetor que tem o segmento $\overline{EQ}$ como representante, isto é $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EQ}$ ou $\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ}$.

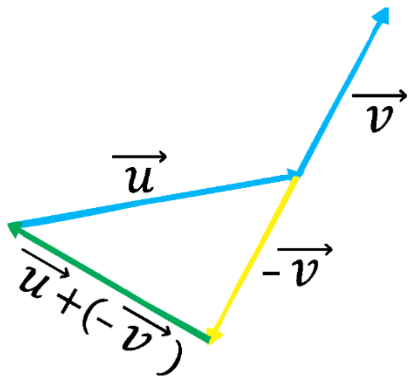
Figura 13: Soma de vetores



Fonte: Elaboração própria.

Definição 8 *(Subtração de vetores):* A diferença entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é igual à soma de $\overrightarrow{u}$ com o oposto de $\overrightarrow{v}$, ou seja: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

Figura 17: Subtração dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.



Fonte: Elaboração própria.

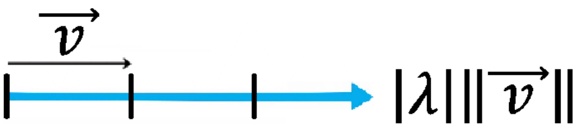
Definição 9 (*Multiplicação por escalar):* Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um escalar λ. O produto de λ por $\overrightarrow{v}$ é o vetor

$$\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

• Se o vetor $\overrightarrow{v}$ é nulo ou o escalar λ é zero então $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

• Se $\lambda > 0$, o vetor $\lambda\overrightarrow{v}$ tem a mesma direção e sentido que o vetor $\vec{v}$ e comprimento $|\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$.

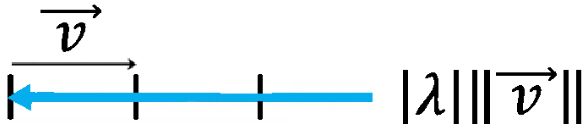
Figura 22: Multiplicação por escalar (mesma direção e sentido)



Fonte: Elaboração própria.

• Se $\lambda < 0$, o vetor $\lambda\overrightarrow{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\overrightarrow{v}$ e comprimento $|\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$.

Figura 23: Multiplicação por escalar (mesma direção e sentido contrários)



Fonte: Elaboração própria.

Seja V o conjunto, de vetores, não nulo munido da operação soma de vetores e produto de um vetor por um escalar, vamos provar que V é um espaço vetorial.

3.1.1. AXIOMAS DA ADIÇÃO DE VETORES

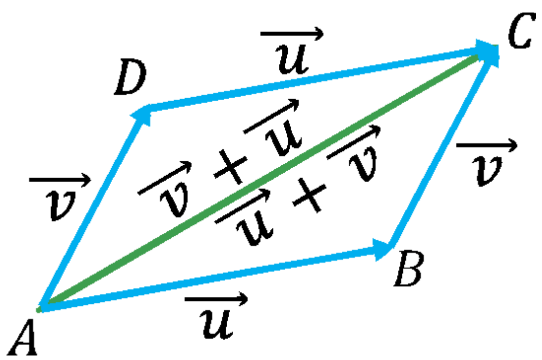
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do plano. Valem as seguintes propriedades:

- **Comutatividade:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

Prova: Dado o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Podemos escolher outro representante do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ em forma análoga, dado o vetor $\vec{u}$ e ponto D sabemos que existe um único ponto C no plano tal que $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$. Desta forma completando o paralelogramo, e considerem as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura a seguir, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{v} + \vec{u}$$

Figura 14: Soma de vetores *(Lei do Paralelogramo)*



Fonte: Elaboração própria.

Isso também fornece uma outra maneira de construir a soma: se posicionarmos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de maneira que eles comecem no mesmo ponto, então $\vec{u} + \vec{v}$ estará ao longo da diagonal do paralelogramo com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como lados. *(Lei do Paralelogramo).*

- **Associatividade:** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

Prova: Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ vetores dados, e considere as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura15, temos:

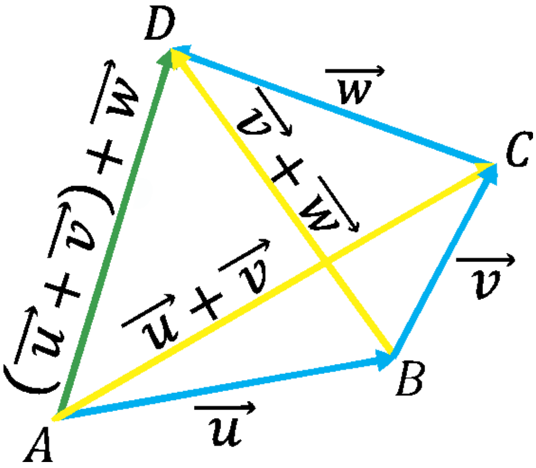
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

logo,

$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}.$$

Figura 15: Representantes da propriedade associatividade da soma de vetores



Fonte: Elaboração própria.

- **Existência do elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\vec{0}$ (ou vetor nulo) é tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;

Prova: Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, e $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$, assim temos:

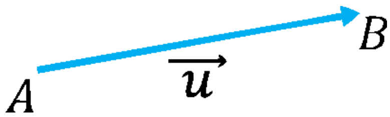
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$$

Pela propriedade comutativa temos $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$.

- **Existência do inverso aditivo:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, o inverso (ou simétrico) aditivo de $\overrightarrow{u}$, designado $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Prova: Dado um vetor $\overrightarrow{u}$, e considere a imagem geométrica do vetor $\overrightarrow{u}$ representado na figura:

Figura 16: Representante do vetor $\overrightarrow{u}$.



Fonte: Elaboração própria.

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}.$$

3.1.2. AXIOMAS DA MULTIPLICAÇÃO DE ESCALARES POR VETORES:

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano e $\lambda, \mu \in R$.

- **Associatividade:** $\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}$;

Prova:

Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ então $\mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e $\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Por outro lado $(\lambda\mu)\overrightarrow{v} = (\lambda\mu)\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, portanto,

$$\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}.$$

Supor que $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, os vetores $\lambda(\mu\overrightarrow{v})$ e $(\lambda\mu)\overrightarrow{v}$ tem a mesma direção e mesmo sentido e como $\|(\lambda\mu)\overrightarrow{v}\| = |\lambda\mu|\|\overrightarrow{v}\| = |\lambda||\mu|\|\overrightarrow{v}\|$ e $\|\lambda(\mu\overrightarrow{v})\| = |\lambda|\|\mu\overrightarrow{v}\| = |\lambda||\mu|\|\overrightarrow{v}\|$, eles têm o mesmo comprimento. Portanto, são iguais. Para os outros casos dos escalares é tratado de forma análoga.

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** o número $1 \in \mathbb{R}$ é tal que $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$;

Prova:

Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ então $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ logo resulta $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ então os vetores $1\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$ tem o mesmo sentido, pois $1 > 0$, e como $\|1\overrightarrow{v}\| = |1|\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}\|$, eles têm mesmo comprimento. Portanto, são iguais.

- **Distributividade (Escalar sobre Soma de Vetores):** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$

Prova:

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ então os vetores $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ e $\lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ são iguais.

Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e seja $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DE}$ um representante dos vetores $\lambda\overrightarrow{u}$ e $\lambda\overrightarrow{v}$ respectivamente, assim temos $\lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$. Por outro lado, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ temos $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Note que os triângulos ADE e ABC são semelhantes e que $|\lambda|$ é a razão de semelhança, resulta que $\overrightarrow{AE} = \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, portanto $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

- **Distributividade (Soma de Escalares sobre Vetor):** $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

Prova:

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ temos $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ e $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{0} + \mu\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ logo $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e considere o caso $\lambda > 0$ e $\mu > 0$.

Os vetores $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u}$ e $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ tem o mesmo sentido e direção.

Como $\|(\lambda + \mu)\overrightarrow{u}\| = |\lambda + \mu|\|\overrightarrow{u}\|$ e

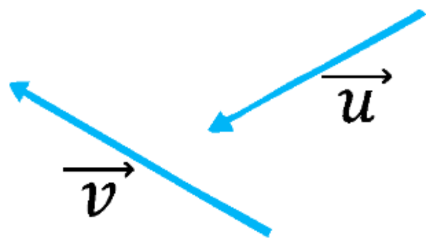
$\|\lambda\overrightarrow{u}\| + \|\mu\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\| + |\mu|\|\overrightarrow{u}\| = (|\lambda| + |\mu|)\|\vec{u}\| = |\lambda + \mu|\|\vec{u}\|$, os vetores $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u}$ e $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ tem o mesmo comprimento. Portanto são iguais.

Para os outros casos dos escalares é tratado de forma análoga.

Assim, o conjunto de vetores munido das operações soma e produto, definidos acima, é um espaço vetorial. Isto nos permite realizar diferentes operações algébricas, vejamos alguns exemplos.

EXERCÍCIO 3: Desenhe a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mostrados na figura abaixo.

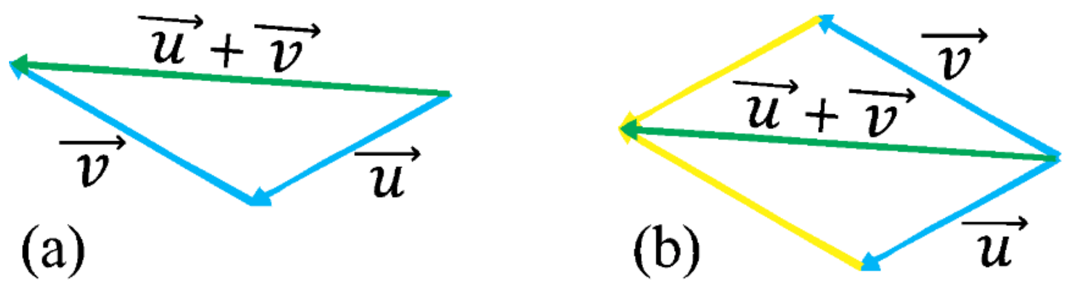
Figura 18: Representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Primeiro transladamos $\vec{v}$ e posicionamos seu ponto inicial no ponto final de $\vec{u}$, tomando cuidado para desenhar uma cópia de $\vec{v}$ que tenha o mesmo comprimento e direção. A seguir, desenhamos o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ começando no ponto inicial de $\vec{u}$ e terminando no ponto final da cópia de $\vec{v}$ *(figura 19 (a))*. Alternativamente, podemos posicionar $\vec{v}$ tal que ele comece onde $\vec{u}$ começa e construir $\vec{u} + \vec{v}$ pela Lei do Paralelogramo *(figura 19 (b))*.

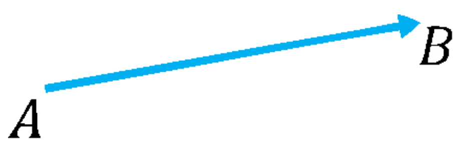
Figura 19: Soma de Vetores *Lei do Triângulo* (a) e pela *Lei do Paralelogramo* (b).



Fonte: Elaboração própria.

EXERCÍCIO 4: Prove que, se $A \neq B$, então os vetores orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm mesmo comprimento**,** mesma direção **e** sentidos contrários**.**

Figura 20: Representante do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Escrevendo em notação vetorial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ e } \overrightarrow{BA} = A - B$$

Logo,

$$\overrightarrow{BA} = A - B = -(B - A) = -\overrightarrow{AB}$$

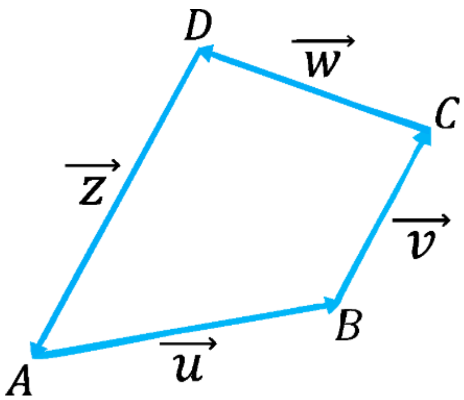
Agora, decorrências disso:

1. **Mesmo comprimento**: $\|-\overrightarrow{AB}\| = \|-1\,\overrightarrow{AB}\| = |-1|\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.
2. **Mesma direção (colinearidade)**: $\overrightarrow{BA}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$ (-1 vezes). Portanto, são colineares, isto é, têm a mesma linha de direção.
3. **Sentidos contrários**: O escalar é negativo (-1). Dois vetores não nulos colineares ligados por um escalar negativo têm sentidos opostos. A hipótese $A \neq B$ garante que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ e, portanto, faz sentido falar em direção/sentido.

Conclui-se que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm mesmo comprimento, mesma direção **e** sentidos contrários**.**

EXERCÍCIO 5: Na figura abaixo o vetor $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$ é igual a:

Figura 21: Representante do vetor $\overrightarrow{s}$



Fonte: Elaboração própria.

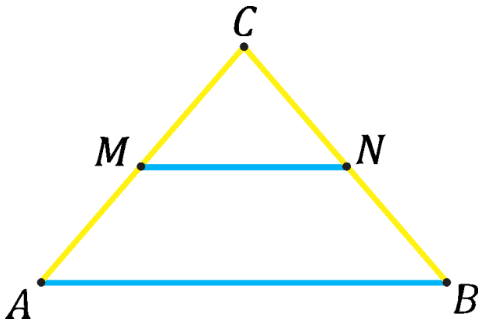
RESPOSTA: Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores dados, e considere as imagens geométricas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ representados na figura: $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$,

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}.$$

Dizemos que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos se existe um escalar β tal que $\overrightarrow{u} = \beta\,\overrightarrow{u}$.

EXERCÍCIO 6: Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Vamos provar que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e tem comprimento igual a metade do comprimento de $\overline{AB}$.

Figura 24: Triângulo ABC, com M e N pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Devemos provar que:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Agora, a partir da figura acima temos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$

Como M é ponto médio de $\overline{AC}$ e N é ponto médio de $\overline{BC}$, então: $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}\ e\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$

Logo,

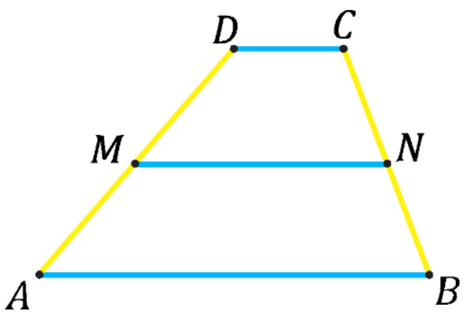
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Como $\overrightarrow{MN}$ é múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$, temos que $\overrightarrow{MN}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.

Portanto, o segmento que liga os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e tem comprimento igual à metade de $\overline{AB}$.

EXERCÍCIO 7: Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Figura 25: Trapézio $ABCD$, com M e N pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Devemos provar que:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

Agora, a partir da figura acima temos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

Como M é ponto médio de $\overline{AD}$ e N é ponto médio de $\overline{BC}$, então:

$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA} \text{ e } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Logo, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\right)$$

Em um quadrilátero fechado vale $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$, logo:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$$

Substituindo:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

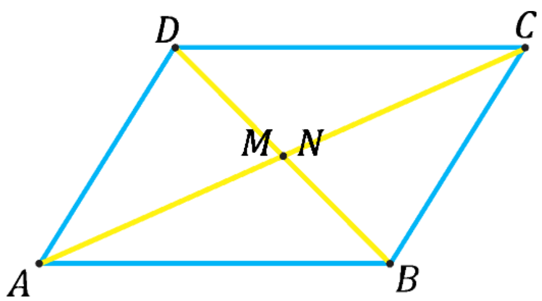
Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são paralelos, sua soma é paralela a elas, portanto $\overrightarrow{MN}$ é paralelo ás bases. Além disso, sendo colineares e com o mesmo sentido escolhido.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

isto é, o comprimento de $\overrightarrow{MN}$ é a média aritmética das medidas das bases.

EXERCÍCIO 8: Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

Figura 26: Paralelogramo $ABCD$, com diagonais que se cortam ao meio.



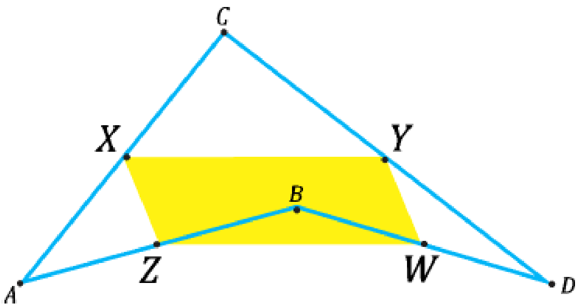
Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Sejam M o ponto médio da diagonal AC valem as igualdades $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$. Para concluir que M também é ponto médio da diagonal DB, basta mostrar que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MD}.$$

EXERCÍCIO 9: Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

Figura 27: Pontos médios de um lado do quadrilátero



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X, Y, W e Z os pontos médios dos lados $\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DB}$ e $\overline{BA}$, respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo. Como,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BW} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Logo, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ZW}$. Portanto $XYZW$ é um paralelogramo.

3.2. COMBINAÇÃO LINEAR COM VETORES

Conforme discutido anteriormente, as operações de soma entre vetores, bem como a multiplicação de um vetor por um número real, possibilitam a construção de novos vetores a partir de outros já conhecidos. Esses vetores resultantes recebem o nome de combinações lineares dos vetores originais.

Definição 10 *(combinação linear):* Diremos que um vetor $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ se existem escalares $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ tal que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{v_i}$$

Nesse caso diremos também que o vetor $\vec{v}$ é gerado pelos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$, ou ainda, que o vetor $\vec{v}$ pode ser representado em função dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$. Os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são chamados coeficientes da combinação linear. Um exemplo é o vetor nulo, que é gerado por quaisquer vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ uma vez que $\vec{0} = 0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + \cdots + 0\vec{v_n}$.

- Um vetor $\overrightarrow{v}$ é dito linearmente dependente (LD) se $\overrightarrow{v} = \vec{0}$ e linearmente independente (LI) se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- Um par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é LD se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Caso contrário $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.
- Os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ $(n \geq 2)$ são ditos LD se existe um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que o vetor $\overrightarrow{v_i}$ seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$\overrightarrow{v_i} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{v_j}$$

Onde $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$.

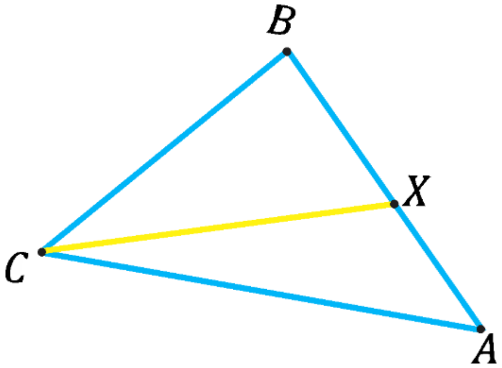
EXERCÍCIO 10: Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, isto é, como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

RESPOSTA: Como $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não vai representar nenhuma restrição.

O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$$

Figura 27: Quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$.



Fonte: Elaboração própria.

Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{AB}$.

Mas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = (1 - \lambda)\overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Assim, $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

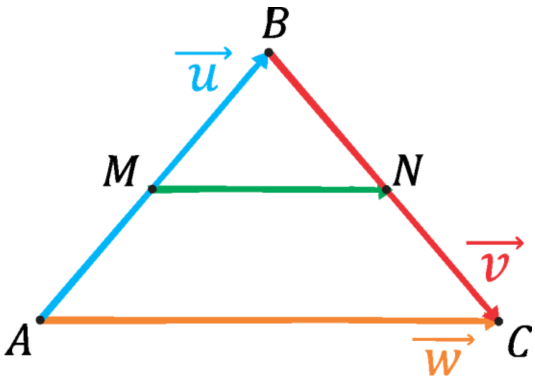
EXERCÍCIO 11: Considere um triângulo ABC qualquer, e os pontos M e N como pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, como exibido no triângulo abaixo, logo verifique:

a) $\overrightarrow{MN}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

c) $\vec{w}$ é uma combinação linear do vetor $\overrightarrow{MN}$.

Figura 28: Triângulo ABC qualquer, com e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA:

a) Dados $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

- Como M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos:

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

- Como N é ponto médio do segmento $\overline{BC}$, temos:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{v}$$

Além disso,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

Então, $\overrightarrow{MN}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Pela formação do triângulo ABC, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, logo:

$$\vec{w} = 1\vec{u} + 1\vec{v}.$$

Então, $\vec{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

c) Do item a) temos:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

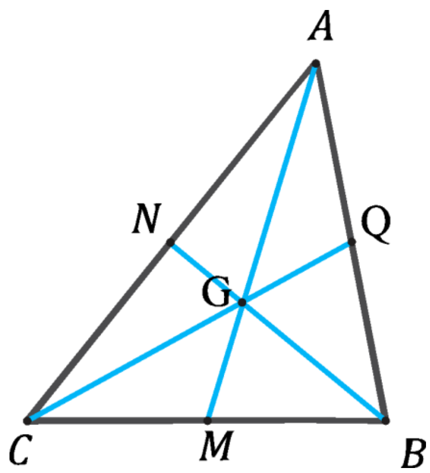
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{w}$$

Portanto, $\vec{w} = 2\overrightarrow{MN}$

Então, $\vec{w}$ é uma combinação linear do vetor $\overrightarrow{MN}$. (na verdade, múltiplo escalar)

EXERCÍCIO 12: Sejam M, N e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, lados do triângulo ABC. Prove que as três medianas do triângulo ABC têm um único ponto comum, G, que divide as três medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CQ}$ na razão 2 para 1.
G é conhecido como baricentro do triângulo.

Figura 29: Ponto G, baricentro do triângulo



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Sejam $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, observe que, como os vetores a, b não são paralelos, são linearmente independentes. E expressaremos todos os demais vetores da figura em função desses vetores. Fixada a notação, passemos a cada uma das etapas:

Observamos inicialmente que pela definição de subtração que $\overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$,e assim:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{v} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$$

Como os pontos A, G e M são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \kappa\overrightarrow{AM} = \frac{\kappa}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \lambda\overrightarrow{BN} = -\lambda\overrightarrow{u} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{v}$$

E

$$\overrightarrow{CG} = \mu\overrightarrow{CQ} = -\mu\overrightarrow{v} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{u}$$

Observamos que, nesse estágio, não sabemos ainda que G divide os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ e $\overline{CQ}$ na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes ($\kappa, \lambda\ e\ \mu$) para os escalares das equações acima.

A equação envolvendo os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BG}$ é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}$$

$$-\lambda\overrightarrow{u} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} + \frac{\kappa}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

Isolando os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, na equação, temos então:

$$\overrightarrow{u}\left(-\lambda + 1 - \frac{\kappa}{2}\right) + \overrightarrow{v}\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) = 0.$$

Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente independentes segue então que:

$$\begin{cases} -\lambda + 1 - \dfrac{\kappa}{2} = 0 \\ \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\kappa}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\kappa = \lambda = \frac{2}{3}$$

Ou seja, G divide tanto o segmento $\overline{AM}$ quanto o segmento $\overline{BN}$ na razão 2 para 1.

Agora a equação envolvendo os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{CG}$ é:

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}$$

$$-\mu\overrightarrow{v} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v} + \frac{\kappa}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

Isolando os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, na equação, temos então:

$$\overrightarrow{u}\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + \overrightarrow{v}\left(-\mu + 1 - \frac{\kappa}{2}\right) = 0$$

Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente independentes segue então que:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{\kappa}{2} = 0 \\ -\mu + 1 - \dfrac{\kappa}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\kappa = \mu = \frac{2}{3}$$

Portanto a solução comum é

$$\kappa = \lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

Conclusão: As três medianas do triângulo ABC têm um único ponto comum, G, que divide as três medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CQ}$ na razão 2 para 1, estando à distância $\frac{2}{3}$ da origem da mediana (vértice) e $\frac{1}{3}$ do ponto médio do lado oposto.

A seguir trataremos vetores no sistema cartesiano para isto é necessário definir o que é sistema cartesiano. Este novo enfoque de vetores no plano nos permite trabalhar vetores em função de suas coordenadas.

4. VETORES NO PLANO CARTESIANO

O estudo de vetores no plano cartesiano constitui uma das bases fundamentais da Matemática moderna, com aplicações que se estendem desde a Geometria e a Álgebra até áreas como a Física, a Engenharia e a Computação. A noção de vetor, inicialmente concebida como um segmento orientado capaz de representar deslocamentos, forças ou direções, ganhou formalidade matemática ao ser inserida no contexto do espaço vetorial, permitindo generalizações para dimensões superiores e para diferentes campos do conhecimento.

No ambiente do plano cartesiano, a representação de vetores torna-se especialmente didática, pois associa elementos geométricos a pares ordenados de números reais, estabelecendo uma ponte direta entre a Geometria e a Álgebra. Essa dualidade entre o geométrico e o algébrico não apenas facilita o processo de ensino-aprendizagem, como também fornece ferramentas poderosas para a resolução de problemas, sejam eles de natureza puramente matemática ou aplicados a situações do cotidiano.

Além disso, o estudo dos vetores no plano cartesiano possibilita a introdução de conceitos estruturantes, para operações entre vetores, produto interno, norma, ângulos e projeções, os quais se revelam essenciais para a compreensão de tópicos mais avançados, como a Geometria Analítica, a Álgebra Linear e o Cálculo Vetorial. Dessa forma, o aprofundamento neste tema não se restringe apenas a um conteúdo curricular, mas representa uma etapa indispensável para a formação matemática sólida, tanto no âmbito acadêmico quanto no profissional.

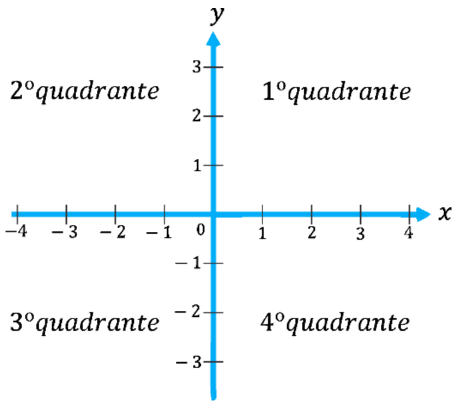
4.1. PLANO CARTESIANO

A concepção desse sistema remonta às contribuições de René Descartes, que, em sua obra *La Géométrie* (1637), estabeleceu os fundamentos daquilo que viria a ser conhecido como Geometria Analítica. A inovação cartesiana consistiu em articular os métodos algébricos com as construções geométricas, criando uma linguagem matemática unificadora que possibilitou descrever curvas e figuras planas por meio de equações. Assim, o plano cartesiano não apenas se consolidou como uma ferramenta de representação espacial, mas também se tornou um instrumento epistemológico de relevância central para o desenvolvimento da Matemática moderna.

Nesse contexto, a utilização do sistema cartesiano ultrapassa a simples organização gráfica de pontos, possibilitando o estudo das relações métricas, a análise de funções e a investigação de propriedades geométricas. Do ponto de vista pedagógico, sua introdução no ensino médio representa um marco importante, pois permite aos estudantes visualizar a correspondência entre expressões algébricas e formas geométricas, desenvolvendo uma compreensão integrada e aplicada da Matemática.

O sistema cartesiano ortogonal constitui-se por dois eixos perpendiculares entre si, denominados eixo Ox e eixo Oy, os quais se interceptam em um ponto comum chamado de origem do sistema. Essa interseção estabelece a estrutura do denominado plano cartesiano, recurso fundamental para a representação de pontos, segmentos e relações geométricas em duas dimensões. O eixo horizontal, identificado como eixo das abscissas, e o eixo vertical, denominado eixo das ordenadas, organizam a disposição dos elementos no plano. A presença desses eixos promove a divisão do espaço bidimensional em quatro quadrantes, que, por convenção, são numerados no sentido anti-horário, iniciando-se no quadrante situado à direita e acima da origem.

Figura 30: Sistema Cartesiano Ortogonal



Fonte: Elaboração própria.

Ao se fixar um sistema de eixos ortogonais no plano cartesiano, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \in R^2; a, b \in R\}$. Essa correspondência assegura que, para cada ponto $P \in \pi$, existe um único par ordenado (a, b), e, reciprocamente, cada par ordenado (a, b) determina de forma única um ponto P do plano. Os números $a, b \in R$ do par ordenado (a, b) associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P, a é a abscissa ou primeira coordenada de P e b é a ordenada ou segunda coordenada de P.

O processo de localização de um ponto no plano cartesiano segue um procedimento sistemático:

- o primeiro número do par ordenado, denominado abscissa, deve ser marcado no eixo horizontal (Ox);
- o segundo número, chamado ordenada, deve ser assinalado no eixo vertical (Oy);
- a partir dessas posições, traçam-se retas paralelas aos eixos, e a interseção dessas retas indica a localização precisa do ponto.

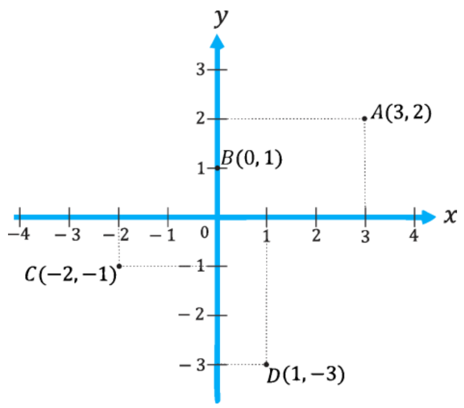
OBSERVAÇÃO: Usaremos a seguinte notação, seja P um ponto no plano π então para este ponto corresponde um par ordenado (a, b) em R^2, e escrevemos $P = (a, b)$.

Observe que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$ e os pontos do eixo OY tem coordenadas $(0, y)$.

EXERCÍCIO 12: Representar no plano cartesiano, os pontos $A(3, 2), B(0,1), C(-2, -1)$ e $D(1, -3)$.

RESPOSTA:

Figura 31: Representação de pontos no plano



Fonte: Elaboração própria.

Nosso seguinte objetivo é representar vetores no plano cartesiano. Vetor é definido como segmentos dirigidos equipolentes motivo pelo qual vamos caracterizar a equipolência de segmentos em termos de coordenadas. Para isso, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam $A = (x_1, y_1); B = (x_2, y_2); C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$ pontos no plano expressos em coordenadas com relação ao sistema ortogonal fixado.

PROPOSIÇÃO 1: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ponto médio de $\overline{AD}$ = ponto médio de $\overline{BC}$.

A prova pode ser vista em [4].

A proposição 1 fornece um critério para verificar quando dois segmentos são equipolentes. Assim mesmo, da proposição 1, resulta que, se A, B, C e D são pontos no plano, então:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{BD}.$$

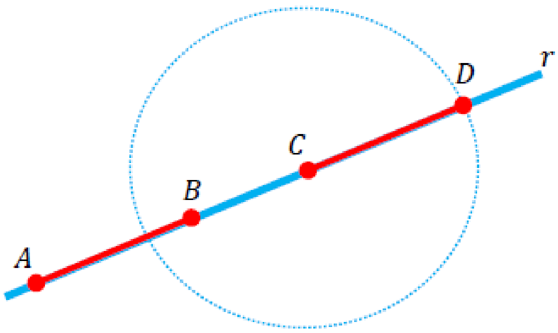
PROPOSIÇÃO 2: Dados os pontos A, B, C e D, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

Prova: Como os pontos dados podem ou ser colineares, temos então que considerar dois casos.

1. Os pontos A, B e C são colineares.

   Considerar r a reta soporte dos pontos colineares A, B e C. A circunferência de centro C e raio $|\overline{AB}|$ intercepta r em dois pontos, mas apenas um deles que designamos por D, é tal que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido e comprimento, ver figura 32.

Figura 32: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ com A, B e C colineares

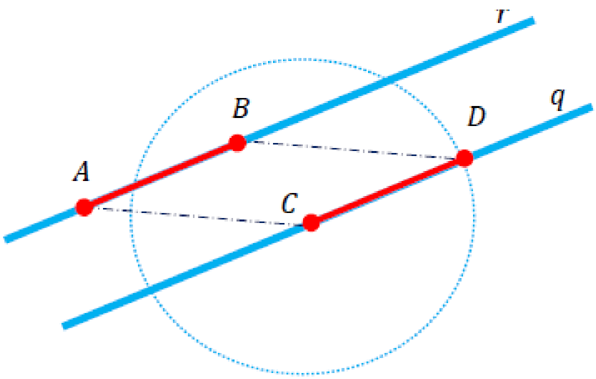


Fonte: Elaboração própria.

2. Os pontos A, B e C não são colineares.

   Por dois pontos passa uma reta, seja r a reta que passa pelos pontos A e B. Como $C \notin r$ então sabemos que existe uma reta q paralela a r que passa pelo ponto C. O circulo de centro C e raio $|\overline{AB}|$ intersecta a reta q em exatamente dois pontos, mas só um, que designamos por D, é tal que $ABCD$ é um paralelogramo. Ou seja, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, ver figura 33

Figura 33: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ com A, B e C não colineares



Fonte: Elaboração própria.

PROPOSIÇÃO 3: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow\ x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \quad e \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3$

Prova:

Pela proposição 1 temos, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ponto médio de $\overline{AD}$ = ponto médio de $\overline{BC}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2}\right) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad e \quad \frac{y_1 + y_4}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \quad e \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3.$$

Uma forma prática de usar a proposição 3 é supor que:

$A = (x_1, y_1); B = (x_2, y_2); C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$, então

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C \Leftrightarrow (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_4, y_4) - (x_3, y_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_4 - x_3, y_4 - y_3) \Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3\ \ e\ \ y_2 - y_1 = y_4 - y_3.$

EXERCÍCIO 13 Dado os pontos $A = (2,3), B = (3,-1)$ e $C = (-4,0)$ determine as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ de modo que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

RESPOSTA:

Sabemos que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C$

$$\Leftrightarrow (3,-1) - (2,3) = (x, y) - (-4,0)$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2, -1 - 3) = (x + 4, y) \Leftrightarrow x = -3\ \ e\ \ y = -4.$$

Na prática, os vetores são manipulados através das suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais fixado.

4.2. PONTOS E VETORES

DEFINIÇÃO: Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ os números $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$; $B = (x_2, y_2)$; $C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$ e se os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes então pela proposição 3, temos:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_4 - x_3, y_4 - y_3) = \overrightarrow{CD}.$$

É dizer as coordenadas de um vetor são calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

EXERCICIO 14. Sejam $A = (2, -3), B = (-3, -1)$ e $C = (-4,2)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

RESPOSTA:

Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3, -1) - (2, -3) = (-3 - 2, -1 + 3) = (-5,2)$, Além disso, se $D = (x, y)$, então devemos ter

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C \Leftrightarrow (-5,2) = (x, y) - (-4,2)$$

$$\Leftrightarrow -5 = x + 4 \quad e \quad 2 = y - 2$$

$$\Leftrightarrow -9 = x \quad e \quad 4 = y$$

Logo $D = (-9,4)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (-9,4) - (-4,2) = (-5,2)$.

A seguinte proposição nos permite relacionar um ponto do plano com um vetor é dizer para cada ponto do plano corresponde um vetor e assim mesmo para cada vetor corresponde um ponto no plano.

PROPOSIÇÃO 4: Sejam OXY um sistema fixo de eixos ortogonais no plano. Para todo vetor $\overrightarrow{v}$ existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Prova: Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e seja $\overrightarrow{AB}$ um de seus representantes, então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

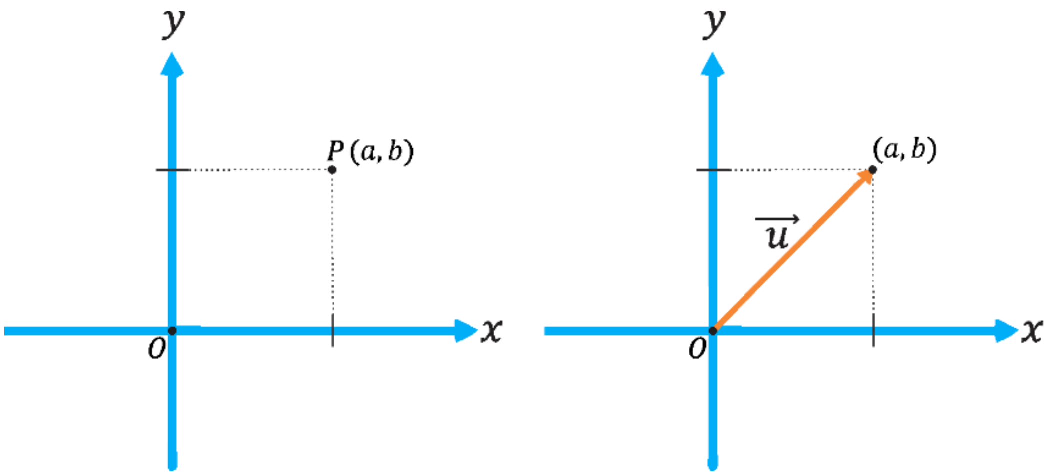
Assim, se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $P = (x_P, y_P)$ pontos no plano, então

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_P - 0, y_P - 0) = (x_P, y_P)$$

$$\overrightarrow{v} = (x_P, y_P).$$

A proposição 4 permite associar a cada ponto A de coordenadas (a, b) um vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ chamado vetor posição do ponto A como mostra a figura 34,

Figura 34: Ponto $A = (a, b)$ à esquerda e vetor $\overrightarrow{u} = (a, b)$ à direita.



Fonte: Elaboração própria.

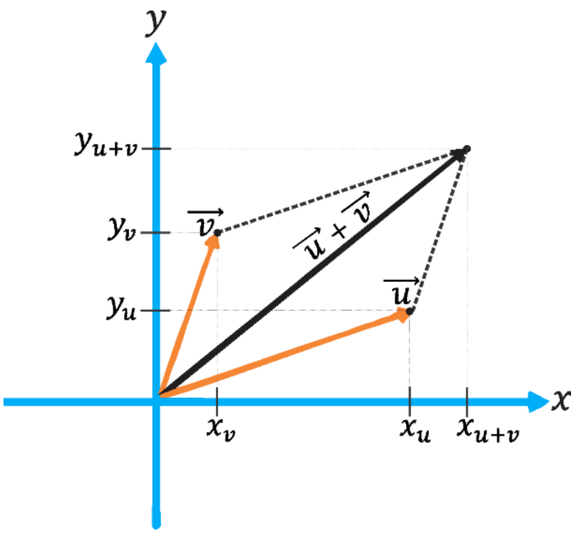
4.3. OPERAÇÕES COM VETORES

4.3.1. ADIÇÃO DE VETORES

PROPOSIÇÃO 5: Sejam $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$, dois vetores no plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo OXY, então:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_u + x_v,\ y_u + y_v)\,.$$

Figura 35: Ilustração dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e do vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria.

Prova: Sejam $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ existem e são únicos os pontos P e Q tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, além disso as coordenadas desses pontos coincidem com as coordenadas do vetor correspondente. Sendo assim, temos $P = (x_u, y_u)$ e $Q = (x_v, y_v)$.

Dado $\overrightarrow{v}$ e um ponto existe um único ponto $S = (w_1, w_2)$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PS}$ é dizer

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} \equiv \overrightarrow{PS} \Leftrightarrow Q - O = S - P \Leftrightarrow (x_v, y_v) = (w_1 - x_u, , w_2 - y_u)$$

$$\Leftrightarrow x_v = w_1 - x_u \quad e \quad y_v = w_2 - y_u \ \Leftrightarrow w_1 = x_u + x_v \quad e \quad w_2 = y_u + y_v.$$

Logo,

$$S = (w_1, w_2) = (x_u + x_v \, , y_u + y_v)$$

E

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (x_u + x_v \, , y_u + y_v).$$

Na prática a operação de multiplicar um vetor por um escalar é efetuada usando coordenadas. Vejamos que as coordenadas do vetor $k\overrightarrow{u}$ é obtido das coordenadas de $\vec{u}$ multiplicada pelo escalar k.

4.3.2. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO REAL POR VETOR

PROPOSIÇÃO 6: Sejam $A = (x_1, y_1)\ e\ B = (x_2, y_2)$ pontos no plano e $k \in R$, então

$$k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

Onde $C = \big(x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1)\big)$.

A prova desta proposição pode ser encontrada em [4].

Da proposição 6 temos que se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $k \in R$ então,

$$k\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB} = \big(k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1)\big).$$

Logo, para multiplicarmos um número real k por um vetor $\overrightarrow{u}$, multiplicamos cada componente de $\overrightarrow{u}$ por este número.

EXERCÍCIO 13 : Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (3, -5)$ de $\mathbb{R}^2$, determine:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

c) $3\overrightarrow{u}$

d) $1/_2\, \overrightarrow{v}$

RESPOSTA:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Sejam $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (3, -5)$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (-1, 2) + (3, -5) = \big(-1 + 3, 2 + (-5)\big) = (2, -3)$$

b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

Sejam $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (3, -5)$, temos:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) = (-1, 2) + (-3, 5) = (-1 + (-3), 2 + 5) = (-4, 7)$$

c) $3\overrightarrow{u}$

Sejam $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$, temos:

$$3\overrightarrow{u} = 3(-1, 2) = (-3,6)$$

d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$

Sejam $\overrightarrow{v} = (3, -5)$, temos:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(3, -5) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

EXERCÍCIO 14: Determinar o vetor $\overrightarrow{x}$ na igualdade $3\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{x}$, sendo dados $\overrightarrow{u} = (-1, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (4, -2)$.

RESPOSTA:

$$3\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}$$

$$2\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}$$

$$2\overrightarrow{x} = (4, -2) - 2(-1, 3)$$

$$2\overrightarrow{x} = (4, -2) + (2, -6)$$

$$2\overrightarrow{x} = (6, -8)$$

$$\overrightarrow{x} = \frac{(6, -8)}{2}$$

$$\overrightarrow{x} = (3, -4)$$

PROPOSIÇÃO 7: Um ponto P pertence à reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se, para algum $k \in R$:

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}.$$

A prova pode ver vista em [4].

EXERCICIO 15: Sejam $A = (-1,0), B = (0,1), C = (1,2), D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Verifique que os quatro pontos pertencem a uma reta r.

RESPOSTA: Basta determinar se existem p e q escalares tal que $\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} = q\overrightarrow{AB}$. Escrevendo os vetores em suas respectivas coordenadas temos:

$$\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow C - A = p(B - A) \Leftrightarrow (2,2) = p(1,1) \Leftrightarrow p = 2.$$

E

$$\overrightarrow{AD} = q\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \ D - A = q(B - A) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = q(1,1) \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Portanto os quatro pontos pertencem a uma reta r.

4.4. VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Inúmeras vezes um vetor é representado por um segmento orientado que não parte da origem de um sistema cartesiano. Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_A, y_A)$ e extremidade em $B(x_B, y_B)$.

Diante do exposto, é possível adotar, de maneira natural, a notação proposta pelo matemático *Hermann Grassmann*, a qual simplifica a representação de vetores. Nessa convenção, o vetor $\overrightarrow{OA}$ pode ser indicado apenas pela letra A, e o vetor $\overrightarrow{OB}$ simplesmente por B.

Aplicando a Regra do Paralelogramo para a soma de vetores, tem-se:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Sob a notação de Grassmann, essa relação adquire uma forma mais direta:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

o que permite concluir que $\overrightarrow{AB} = B - A$

Assim, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ podem ser determinadas por meio da diferença entre as coordenadas de seus extremos, isto é, pela operação $B - A$.

4.4.1. NORMA DE UM VETOR NO PLANO CARTESIANO

Na Matemática, a definição de Norma é um conceito fundamental, especialmente em Álgebra Linear e Análise Funcional, que generaliza a noção de "comprimento" de um vetor (ou de um elemento mais abstrato).

Definição 11 *(Norma):* Dado um espaço vetorial V sobre um corpo K (considere, $K = \mathbb{R}$), uma função

$$\| \cdot \|: V \ \to \mathbb{R}$$

é chamada de norma em V se satisfaz,

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
3. $\| \alpha \overrightarrow{v}\| = |\alpha| \|\overrightarrow{v}\|$
4. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$

para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{u} \in V$ e qualquer escalar $\alpha \in K$. O par $(V, \|.\|)$ é chamado espaço normado. O número $\|\vec{u}\|$ denomina-se norma de $\vec{u}$.

Se consideramos o espaço vetorial $V = R$ e $K = R$, a função $\|x\| = \sqrt{x^2}$ define uma norma em V pois esta função satisfaz as quatro propriedades acima todas elas derivadas das propriedades do módulo em R.

Se $V = R^2 = \{\vec{u} = (x, y)/\ x, y \in R\}$ e $K = R$. Defina-se em V a função $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ pode ser provado que esta função define uma norma, chamada norma euclidiana ela representa a noção usual de distância à origem.

A definição correta e mais abrangente de distância em matemática é dada pelo conceito de Métrica. Enquanto a noção intuitiva de distância, como a distância euclidiana, é familiar, a Métrica generaliza essa ideia para qualquer conjunto não vazio, permitindo definir "distância" mesmo em espaços que não são o $\mathbb{R}^n$, como por exemplo: conjuntos de funções e matrizes.

Definição 12 *(Métrica):* Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica (ou função distância) em M é uma função:

$$d: M\ x\ M \ \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa um número real $d(x, y)$ (distância entre x e y) a cada par de pontos $x, y \in M$, e que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in M$:

1. Positividade e Não-Degeneração

$$d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2. Simetria

$$d(x, y) = d(y, x)$$

3. Desigualdade Triangular

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

O par (d, M) é chamado espaço métrico.

Se consideramos $M = R$ e a função $d(x, y) = |y - x|$, representa uma métrica em M. A verificação das propriedades da métrica são dadas pelas propriedades da função módulo em R.

Se consideramos $M = R^2 = \{(x, y)/\ x, y \in R\}$ no qual está definida a norma euclidiana. E sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ em R^2, então a função

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

define uma métrica em R^2, neste caso dizemos que a métrica foi induzida pela norma. De fato, $0 \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \|B - A\| = d(A, B)$.

$x_2 = x_1 \; e \; y_2 - y_1 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow 0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \|B - A\| = d(A, B)$.

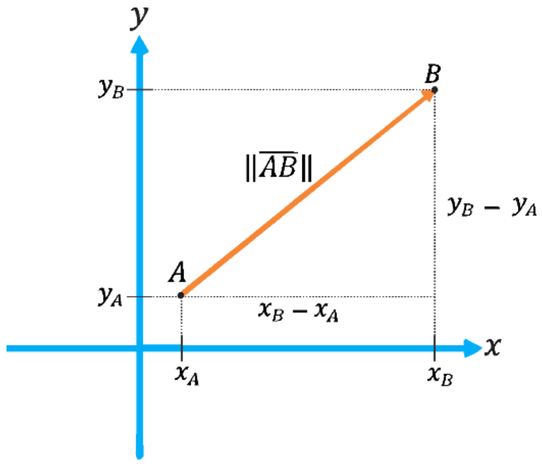
Verificando a simetria, $d(A, B) = \|B - A\| = |-1|\|A - B\| = d(B, A)$

Verificando a desigualdade triangular,

$$d(A, B) = \|B - A\| = \|B - A + C - C\| \leq \|C - A\| + \|B - C\| = d(A, C) + d(C, B).$$

Dado um vetor $\overrightarrow{u}$ e seja $\overrightarrow{AB}$ um representante desse vetor, onde $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ pertencem ao espaço normado (considere a norma euclidiana) R^2. Como $\overrightarrow{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ então a norma de $\overrightarrow{u}$ expresso em função de suas coordenadas é dada por $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(A, B)$.

Figura 35: Norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria.

OBSERVAÇÕES:

a) A norma ou modulo de um vetor não depende da escolha do segmento orientado representante. Assim, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow d(A, B) = d(C, D) = \|\overrightarrow{u}\|$.

b) Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, então $\|\overrightarrow{u}\| = d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EXERCÍCIO 15: Sejam $A = (1, -2)$, $B = (2, 1)$ e $\overrightarrow{u} = (-4, 3)$, determine:

a) $\|\overrightarrow{u}\|$

b) $\|\overrightarrow{AB}\|$

RESPOSTA:

a) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

4.4.2. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO ENTRE TRÊS PONTOS

Verificamos também que A, B e C estão alinhados se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos. O que é equivalente a dizer que se $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

- $(x_B - x_A) = k(x_C - x_A)$
- $(y_B - y_A) = k(y_c - y_A)$

$$\Leftrightarrow k = \frac{(x_B - x_A)}{(x_C - x_A)} = \frac{(y_B - y_A)}{(y_c - y_A)}$$

$$\Leftrightarrow x_B y_c - x_B y_A - x_A y_c - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0.$$

4.4.3. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

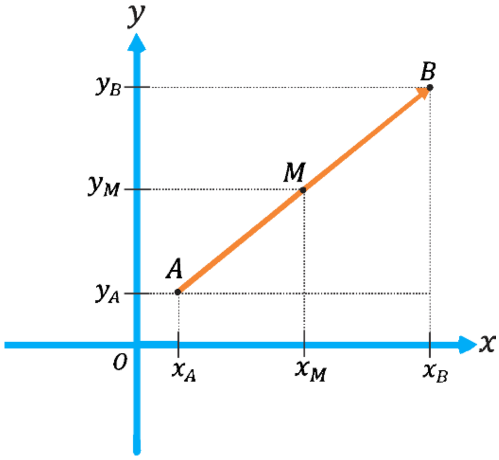
Sejam A e B extremos de um segmento e M seu ponto médio. Podemos, então, afirmar que:

$$\overrightarrow{AM} \equiv \overrightarrow{MB} \Rightarrow M - A = B - M \Rightarrow M = \frac{A + B}{2}$$

$$(x_M, y_M) = \frac{(x_A, y_A) + (x_B, y_B)}{2}$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \; e \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Figura 36: Ponto médio de um segmento



Fonte: Elaboração própria.

EXERCÍCIO 16: Sejam os pontos $A(1,2), B(4,6)$ e $C(7,2)$ no plano cartesiano.

a) Verifique se os pontos A, B e C são não colineares, isto é, se eles de fato determinam um triângulo.

b) Caso formem um triângulo, calcule o comprimento dos lados e classifique-o quanto aos lados

RESPOSTA:

a) Verificar não-colinearidade (existência do triângulo)

Calculemos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4-1,\ 6-2) = (3,4)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (7-1,\ 2-2) = (6,0)$.

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ fossem paralelos, existiria $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Para isso os componentes deveriam satisfazer simultaneamente

$$3 = k \cdot 6 \text{ e } 4 = k \cdot 0$$

Da segunda equação segue $4 = 0 \cdot k = 0,$ o que é impossível. Logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, portanto os pontos A, B e C não são colineares e determinam um triângulo.

b) Comprimentos dos lados (normas dos vetores)

Usamos a norma euclidiana:

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Lado $\overline{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (3,4) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- Lado $\overline{AC}$: $\overrightarrow{AC} = (6,0) \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36} = 6$
- Lado $\overline{BC}$: $\overrightarrow{BC} = (3,-4) \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Portanto os comprimentos são: $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 6$ e $\overline{BC} = 5$.

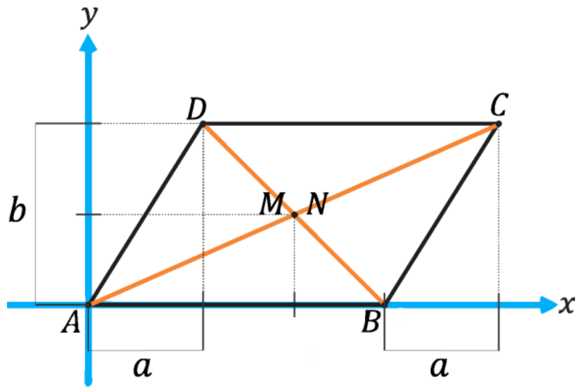
Classificação quanto aos lados

Como dois lados são iguais ($\overline{AB} = \overline{BC} = 5$) e o terceiro é diferente ($\overline{AC} = 6$), o triângulo é isósceles**.**

Observação adicional: os lados iguais $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ se encontram no vértice B; logo o triângulo é isósceles de vértice em B.

EXERCÍCIO 17: Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

Figura 37: Paralelogramo $ABCD$, no Plano Cartesiano.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: A escolha conveniente de coordenadas facilita os cálculos. Coloque o triângulo de modo que o ponto A seja a origem do Plano Cartesiano, o segmento $\overline{AB}$ esteja paralelo ao eixo Ox.

Escolhemos coordenadas para os vértices:

Seja $A = (0, 0), B = (x_B, 0), C = (x_B + a, b)$ e $D = (a, b)$

O ponto médio M de $\overline{AC}$ é

$$M = (x_M, y_M) = \frac{(0, 0) + (x_B + a, b)}{2} = \frac{(x_B + a, b)}{2}$$

O ponto médio N de $\overline{BD}$ é

$$N = (x_N, y_N) = \frac{(x_B, 0) + (a, b)}{2} = \frac{(x_B + a, b)}{2}$$

Logo coincidem.

5. PRODUTO INTERNO E EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Realizaremos o estudo sobre o produto interno e as equações vetoriais da reta**,** dois conceitos fundamentais na Geometria Analítica. O produto interno será abordado tanto em seu aspecto algébrico quanto em sua interpretação geométrica, destacando sua relevância na determinação de ângulos entre vetores, projeções e ortogonalidade. Em seguida, a atenção se voltará para a equação vetorial da reta, ressaltando sua formulação, propriedades e aplicações, bem como sua relação com outras formas de representação da reta, como a equação paramétrica. A integração entre esses dois temas permitirá compreender como as operações vetoriais se articulam na construção e no estudo de equações de retas, oferecendo uma base sólida para a resolução de problemas geométricos e para o desenvolvimento de aplicações em diferentes áreas da matemática.

5.1 PRODUTO ESCALAR OU PRODUTO INTERNO

Além do tipo de multiplicação de um vetor por um número real que chamamos de multiplicação por escalar, podemos também definir multiplicações ou produto de vetores entre si. Apresentaremos uma nova modalidade de multiplicação entre vetores, cujo resultado é definido como Produto escalar ou Produto interno entre dois vetores.

O produto interno entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, denotado por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ ou $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v}$, e que nos fornece como resultado um número real, possui grande aplicabilidade nas diversas áreas afins. Na matemática, por exemplo, entre outras aplicações, o produto interno pode ser usado para resolver muitos problemas de natureza geométrica.

Definição 13 *(Produto Interno):* Dado um espaço vetorial V sobre um corpo de escalares K $(K = \mathbb{R})$ um Produto Interno é uma função:

$$.: V \, x \, V \rightarrow R$$

que associa um par ordenado de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ a um escalar $\overrightarrow{u} \, . \, \overrightarrow{v} \in R$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\overrightarrow{u}. \overrightarrow{u} \geq 0 \;\; e \; \overrightarrow{u}. \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{u} \, . \, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{u}$
3. $\alpha \overrightarrow{u}. \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}. \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}. \alpha \overrightarrow{v}$
4. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}). w = \overrightarrow{u}. w + \overrightarrow{v}. w$

   para quaisquer $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} \in V$ e $\alpha \in R$.

Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$ e $\overrightarrow{w} = (e, f)$ vetores em R^2 e $\alpha \in R$. A função $(.)$,

$$\overrightarrow{u} \, . \, \overrightarrow{v} = ac + bd$$

Define um produto interno entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

De fato,

$$\overrightarrow{u}. \overrightarrow{u} = aa + bb = a^2 + b^2 \geq 0 \;\;\text{ e se } \overrightarrow{u} = (0{,}0) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}. \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

E,

$$\overrightarrow{u}. \overrightarrow{v} = ac + bd = ca + db = \overrightarrow{v}. \overrightarrow{u}$$

Veja que

$$\alpha \overrightarrow{u}. \overrightarrow{v} = (\alpha a, \alpha b).(c, d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d = \alpha(ac + bd) = \alpha(\overrightarrow{u}. \overrightarrow{v})$$

$$\alpha \overrightarrow{u}. \overrightarrow{v} = (\alpha a, \alpha b).(c, d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d = a(\alpha c) + b(\alpha d) = \overrightarrow{u}.(\alpha \overrightarrow{v})$$

Por último

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}). \overrightarrow{w} = [(a, b) + (c, d)].(e, f) = (a + c)e + (b + d)f = ae + bf + ce + df$$
$$= \overrightarrow{u}. \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}. \overrightarrow{w}$$

O produto interno definido acima permite definir a norma $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}. \overrightarrow{u}}$ norma inducida pelo produto interno, de onde resulta $\overrightarrow{u}. \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

EXERCÍCIO 18: Vale a igualdade $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$? Justifique sua resposta. E quanto a $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{w}\|$?

RESPOSTA:

1) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$?

Não. Em geral vale apenas a desigualdade triangular $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2|\vec{u} \cdot \vec{v}|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Pois $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (*Cauchy-Schwarz)*

Tirando a raiz:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

A igualdade ocorre somente quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e apontam no mesmo sentido ($\vec{v} = \lambda\vec{u}$ com $\lambda \geq 0$).

2) $\|\vec{u} - \vec{w}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$?

Não. O que vale é a desigualdade triangular reversa $\|\vec{u} - \vec{w}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$.

- $\|\vec{u} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|)^2 \geq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|$

$$\|\vec{u} - \vec{w}\|^2 \geq (\|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|)^2$$

A igualdade $\|\vec{u} - \vec{w}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$ só ocorre quando $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{w}\|$ e $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares no mesmo sentido ($\vec{w} = \lambda\vec{u}, 0 \leq \lambda \leq 1$).

5.2. ÂNGULO FORMADO ENTRE DOIS VETORES

Por convenção matemática, define-se o ângulo entre dois vetores como sendo **o** menor ângulo formado entre eles, isto é, aquele cuja medida está compreendida no intervalo $0° \leq \theta \leq 180°$. Essa escolha é justificada pela própria simetria da situação: uma vez que os vetores se estendem indefinidamente em ambas as direções, considerar o maior ângulo não acrescenta nova informação geométrica, pois ele é sempre o suplemento do menor.

PROPOSIÇÃO: Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, dois vetores do plano. Então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ac + bd = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, cos\theta$$

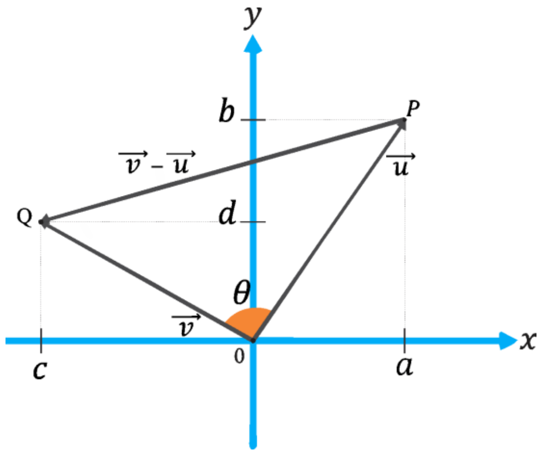
Prova:

a) Se um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, também que $ac + bd = 0$ e $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta = 0$ Logo a proposição é satisfeita.

b) Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$. Então, como mostra a figura a seguir,

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (c - a, d - b).$$

Figura 38: Ângulo formado entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ no plano cartesiano



Fonte: Elaboração própria.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OPQ, obtemos:

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\, cos\theta \qquad (I)$$

onde θ é o ânguo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Partimos de:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\, cos\theta$$

Substituindo em (I), temos:

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = (\alpha^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - [(c-a)^2 + (d-b)^2]$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2db + b^2]$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 - c^2 + 2ac - a^2 - d^2 + 2db - b^2$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 2ac + 2db$$

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 2(ac + db)$$

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = (ac + db)$$

Portanto,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\ = ac + bd = \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\, cos\theta$$

Assim, a definição adotada garante unicidade e consistência, além de facilitar os cálculos algébricos. Portanto, o ângulo θ formado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é dado por

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\, cos\theta$$

$$cos\theta\ = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|}$$

OBSERVAÇÃO: da expressão $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\, cos\theta$, temos que

O sinal de $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ é o mesmo de $cos\ \theta$, assim temos:

1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle > 0 \Leftrightarrow cos\,\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta \leq 90°$ ($\hat{a}ngulo\ agudo$)
2. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle < 0 \Leftrightarrow cos\,\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$ ($\hat{a}ngulo\ obtuso$)
3. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow cos\,\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ ($\hat{a}ngulo\ reto$)

Com isso, dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, ou seja, o ângulo entre eles é 90°

EXERCÍCIO 19: Sejam os vetores

$$\overrightarrow{u} = (1{,}0) \text{ e } \overrightarrow{v} = (-1{,}1)$$

a) Calcule o produto interno $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

b) Determine o ângulo θ formado entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

c) Classifique o ângulo obtido como agudo, reto ou obtuso.

RESPOSTA:

a) Calculando o produto interno:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = ac + bd$$

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1.$$

b) Descobrindo o ângulo θ formado entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Devemos calcular as normas

- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
- $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculo do $cos\,\theta$

$$cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}$$

$$cos\theta = \frac{-1}{1\,.\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$$

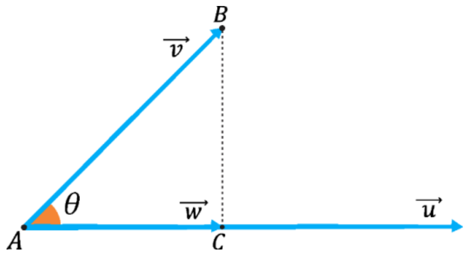
c) Como $\theta = 135° > 90°$, concluímos que o ângulo formado **é** obtuso**.**

Se $\theta = 90°$ então $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ neste caso dizemos que os vetores são ortogonais.

5.2.1. PROJEÇÃO ORTOGONAL DE $\vec{v}$ SOBRE $\vec{u}$

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre outro vetor não nulo $\vec{u}$ é a componente de $\vec{v}$ que está na mesma direção de $\vec{u}$. Em outras palavras, é o vetor obtido quando projetamos $\vec{v}$ sobre a reta que contém $\vec{u}$. Observe a Figura 39, que representa a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Figura 39: Projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Fonte: Elaboração própria.

Definição 14 *(projeção ortogonal):* Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no plano cartesiano com $\vec{u} \neq 0$. Definimos a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ como o vetor $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$, tal que:

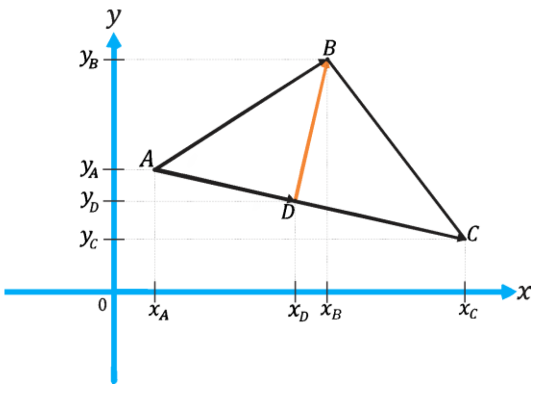
$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

Os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são paralelos, logo existe um número real k tal que $\vec{w} = k\vec{u}$. Além disso $\overrightarrow{CB}$, é ortogonal a $\vec{u}$, ou seja, $\langle \vec{u}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0$, e como $\overrightarrow{CB} = \vec{v} - \vec{w}$, temos:

$$\langle (\vec{v} - \vec{w}), \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{v} - k\vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Longrightarrow k = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \ , \ \ e \ \ \vec{w} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

EXERCÍCIO 18: Cálculo da área de um triângulo ABC utilizando vetores. Seja o vetor $\overrightarrow{AD}$ projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{AB}$ sobre o vetor $\overrightarrow{AC}$, logo o vetor $\overrightarrow{DB}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AC}$, de modo que a norma $\|\overrightarrow{DB}\|$ é a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AC}$.

Figura 40: Ilustração dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DB}$ no plano cartesiano para o cálculo da área do triângulo ABC.



Fonte: Elaboração própria.

RESPOSTA: Sejam $A, B\ e\ C$ os vértices do triângulo e usemos vetores posição ou vetores de lado relativos a A:

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ e } \overrightarrow{AC} = C - A$$

Onde $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$

Se chamarmos $\overrightarrow{AD}$ a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, então a componente ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ (que na figura aparece como $\overrightarrow{DB}$) é

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

Para obter $\overrightarrow{DB}$ em termos dos vetores dados use a projeção ortogonal:

Segue que a área A do triângulo ABC pode ser determinada por:

$$A = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{DB}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\|}{2}$$

Sendo $\overrightarrow{AD}$ a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, ou seja:

$$\overrightarrow{AD} = proj_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC}$$

Assim

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC}$$

Portanto a altura vale

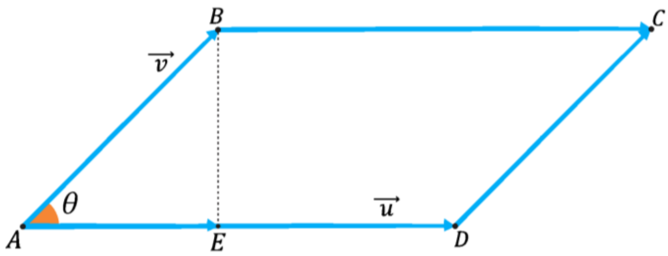
$$h = \|\overrightarrow{DB}\| = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC} \right\|$$

Chegamos à fórmula que nos permite calcular a área A do triângulo ABC por meio de vetores:

$$A = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC} \right\|}{2}$$

EXERCÍCIO 20: Consideremos o paralelogramo $ABCD$ da figura a seguir.

Figura 41: Área do paralelogramo $ABCD$ usando vetores e produto interno



Fonte: Elaboração própria.

Obteremos a área do paralelogramo $ABCD$ usando vetores e produto interno, consideremos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e θ o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

RESPOSTA: Segue que a área A do paralelogramo $ABCD$ pode ser determinada por:

$$A = \|\overrightarrow{AD}\| \, \|\overrightarrow{EB}\|$$

Se $\theta = B\hat{A}C$, então:

$$sen\ \theta = \frac{\|\overrightarrow{EB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\|\overrightarrow{EB}\| = \|\overrightarrow{AB}\| sen\ \theta$$

E portanto,

$$A = \|\overrightarrow{AD}\| \, \|\overrightarrow{AB}\| sen\ \theta$$

Logo

$$sen\ \theta = \frac{A}{\|\overrightarrow{AD}\| \, \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{A}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}$$

Bem como, temos que:

$$cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}$$

Assim, pela Identidade Fundamental da Trigonometria, temos:

$$(sen\ \theta)^2 + (cos\ \theta)^2 = 1$$

$$\left(\frac{A}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{A}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}\right)^2 = \left(\frac{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}\right)^2$$

$$(A)^2 + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2 = (\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|)^2$$

$$(A)^2 + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$, em relação a um sistema de eixos ortogonais de centro O, então $\|\overrightarrow{u}\|^2 = a^2 + b^2$, $\|\overrightarrow{v}\|^2 = c^2 + d^2$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = ac + bd$.

e portanto,

$$(A)^2 + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2$$

$$(A)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$(A)^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^{2c^2} - 2acbd - b^2d^2$$

$$(A)^2 = a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2$$

$$(A)^2 = (ad - bd)^2$$

$$A = (ad - bd)$$

Assim, a área do paralelogramo ABCD, cujos lados adjacentes são representados por $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$.

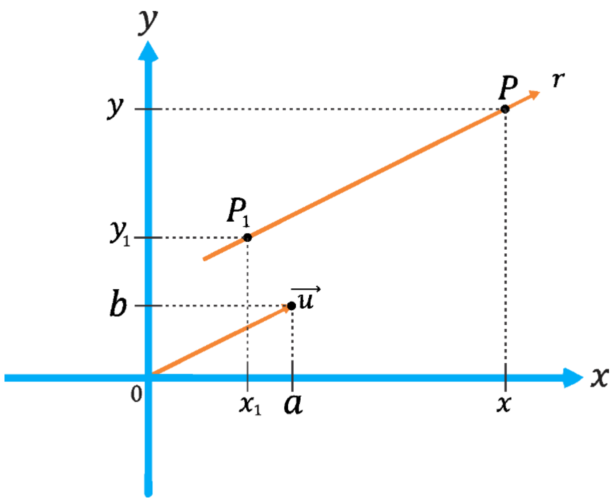
5.3. EQUAÇÃO DA RETA

O estudo da reta no plano cartesiano constitui um dos pilares da Geometria Analítica, fornecendo instrumentos fundamentais para a compreensão de diversas relações espaciais e algébricas. Neste capítulo, será desenvolvida uma análise sistemática das diferentes formas de representação da reta, com ênfase na equação vetorial e na equação paramétrica, bem como nas propriedades e consequências que emergem dessas formulações. A abordagem adotada permitirá não apenas compreender a estrutura algébrica que descreve a reta, mas também visualizar sua interpretação geométrica, estabelecendo pontes entre os conceitos abstratos e sua aplicação em problemas matemáticos. Dessa maneira, busca-se consolidar uma visão unificada entre a álgebra e a geometria, evidenciando as potencialidades da linguagem vetorial no estudo das retas e em suas múltiplas aplicações.

5.3.1. EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Considere r uma reta que contém o ponto $P_1(x_1, y_1)$ e possui a direção do vetor não nulo $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e seja o ponto $P(x, y)$, um ponto distinto qualquer da reta r. Utilizando a equação vetorial $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{u}$, com $k \in \mathbb{R}^*$. e substituindo as coordenadas nesta equação, temos

Figura 42: Equação vetorial da reta no Plano Cartesiano



Fonte: Elaboração própria.

Vamos determinar uma fórmula para a equação da reta usando a equação vetorial. Como $\overrightarrow{P_1P}$ é paralelo a $\overrightarrow{u}$, isso implica que

$$\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{u}$$

$$\Leftrightarrow P - P_1 = k(a,b)$$
$$\Leftrightarrow P = P_1 + k(a,b)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (x_1, y_1) + k(a,b)$$

O vetor $\overrightarrow{u}$ é chamado vetor diretor da reta r e k é denominado parâmetro.

5.3.2. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja r uma reta que contém o ponto $P_1(x_1, y_1)$ e possui a direção do vetor não nulo $\overrightarrow{u} = (a,b)$ e seja o ponto $P(x,y)$, um ponto qualquer da reta r.

Temos que a equação vetorial da reta é dada por $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{u}$, com $k \in \mathbb{R}^*$.

$$(x,y) = (x_1, y_1) + k(a,b)$$

Segue que,

$$\begin{cases} x = x_1 + ka \\ y = y_1 + kb \end{cases}$$

Que representam as equações paramétricas no plano. Salientamos que com a variação de k, a reta r é percorrida a partir de P_1 na direção de $\overrightarrow{u}$. Observe que quando k = 0, obtemos o ponto P_1.

EXERCÍCIO 21: Considere o ponto $P(1,2)$ e o vetor diretor $\overrightarrow{u} = (3,-1)$.

a) Determine a equação vetorial da reta que passa por P e tem $\overrightarrow{u}$ como vetor diretor.

b) Escreva também a equação paramétrica da reta correspondente

c) Verifique se o ponto $A(3,1)$ pertence a essa reta.

RESPOSTA:

a) Equação vetorial da reta que passa por P com vetor diretor $\overrightarrow{u}$:

$$(x,y) - (x_1, y_1) = k(a,b)$$
$$(x,y) = (x_1, y_1) + k(a,b)$$
$$r: \overrightarrow{r}(k) = (1,2) + k(3,-1), \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

b) Equação paramétrica correspondente

$$\begin{cases} x - 1 = 3k \\ y - 2 = -k \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 2 - k \end{cases}, \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

c) Verificação se $A(3,1)$ pertence à reta.

Se A pertence, existe k tal que $3 = 3k + 1$ e $1 = 2 - k$,

Da primeira, segue:

$$3 = 3k + 1 \Rightarrow 3k = 3 - 1 \Rightarrow \boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Da segunda

$$1 = 2 - k \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{1}$$

Não compatível

Logo $P(3,1)$ não **pertence** à reta

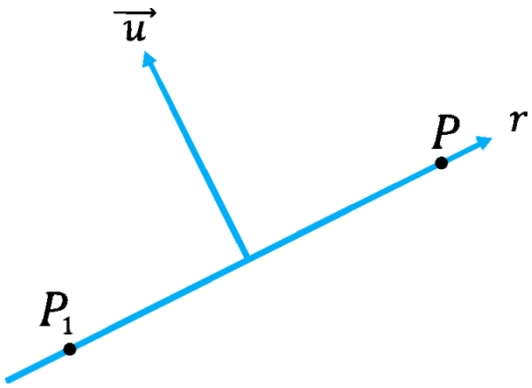
5.3.3. RETAS PERPENDICULARES

Dadas duas retas r e t, com vetores direção $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a_1, b_1)$. Dizemos que r é perpendicular a t se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

5.3.4. VETOR NORMAL À RETA

Considere r uma reta do $\mathbb{R}^2$ e que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b)$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de r, conforme figura abaixo.

Figura 43: Vetor normal à reta



Fonte: Elaboração própria.

O vetor $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a $\overrightarrow{P_1P}$, com $cos\ (90°) = 0$, portanto o produto interno entre eles é nulo. Sendo

$$\langle \overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \ e\ \overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1) \Leftrightarrow (a, b)(x - x_1, y - y_1) = 0$$

ou seja, $ax + by - ax_1 - by_1 = 0$ e, considerando $c = -ax_1 - by_1$, obtemos $ax + by + c = 0$, que é a equação geral da reta r e os coeficientes de x e y, (a, b), nesta equação representam as coordenadas do vetor normal a reta r.

5.3.5. RETAS PARALELAS

Duas retas são paralelas se os seus vetores normais são paralelos.

Dadas duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $t : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, se r é paralela a t então seus respectivos vetores normais $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a_1, b_1)$ formam entre si um ângulo nulo ou de 180◦ e teremos:

$$cos\,\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$$

com $cos\,(0°) = 1$ e $cos\,(180°) = -1$, teremos:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|,$$

$$\text{ou} \quad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = -\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|,$$

$$\text{ou} \quad \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIO 22: Dadas as retas r e s, com equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \end{cases}, \text{com } k \in \mathbb{R}. \text{ e } s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}, \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva a equação vetorial de cada reta.

b) Verifique se as retas r e s são concorrentes ou paralelas.

c) Caso sejam concorrentes, determine o ponto de interseção, e se são perpendiculares.

RESPOSTA:

a) Equações vetoriais

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k(a, b)$$

$$r: \overrightarrow{r}(k) = (1, -1) + k(2, 1) \text{ e } s: \overrightarrow{s}(k) = (3, 2) + k(1, 2)$$

b) Paralelas ou concorrentes?

Vetores diretores: $\overrightarrow{v}_r = (2,1)\ e\ \overrightarrow{v}_s = (1,2)$

Verificamos se são múltiplos: não existe k tal que $(2,1) = k(1,2)$ (porque $2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 2$ e então $1 \neq 2 \cdot 2$). Logo não são paralelas. Como não são paralelas, ou são concorrentes ou são "complementares" (no plano qualquer par de retas não paralelas se intersecta). Portanto buscaremos a interseção.

c) Ponto de interseção

Igualamos coordenadas:

$$1 + 2k = 3 + t \text{ e } -1 + k = 2 + 2t$$

Sistema linear para t, s:

$$\begin{cases} 2k - t = 2 \\ k - 2t = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$k = \frac{1}{3} \; e \; t = -\frac{4}{3}$$

Coordenadas do ponto de interseção (usar a reta r, com o k):

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2.\frac{1}{3} \\ y = -1 + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto as retas são concorrentes e o ponto de interseção é

$$P = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Verificando Perpendicularidade:

Vetores diretores: $\vec{v}_r = (2,1) \; e \; \vec{v}_s = (1,2)$

Duas retas no plano são perpendiculares se o produto interno (escalar) dos seus vetores diretores for zero**:**

$$\langle \vec{v}_r, \vec{v}_s \rangle = 0$$

Cálculo do produto interno:

$$(2,1) \cdot (1,2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\langle \vec{v}_r, \vec{v}_s \rangle = 4 \neq 0$$

As retas r e s não são perpendiculares**.**

5.4. DISTÂNCIA DE UM PONTO ATÉ UMA RETA

Seja $M(x, y)$ a projeção ortogonal de $P(x_P, y_P)$ sobre a reta $r : ax + by + c = 0$. Então $d(P, r) = \|\overrightarrow{PM}\|$. Observe que $\overrightarrow{PM}$ é normal a reta r. Portanto existe $k \in \mathbb{R}^*$. tal que $\overrightarrow{PM} = k(a, b)$, ou seja, se $M = (x, y)$, então $(x - x_P, y - y_P) = k(a, b)$.

Escrevendo como um sistema linear

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_P + ka \\ y = y_P + kb \end{cases}$$

Temos que $d(P, r) = \|\overrightarrow{PM}\| = \|k(a, b)\| = |k|\|(a, b)\| = |k| \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como $M \in r : ax + by + c = 0$, temos

$$0 = a(x_P + ka) + b(y_P + kb) + c = ax_P + by_P + ka^2 + kb^2 + c$$

Assim

$$k = \frac{-ax_P - by_P - c}{a^2 + b^2}$$

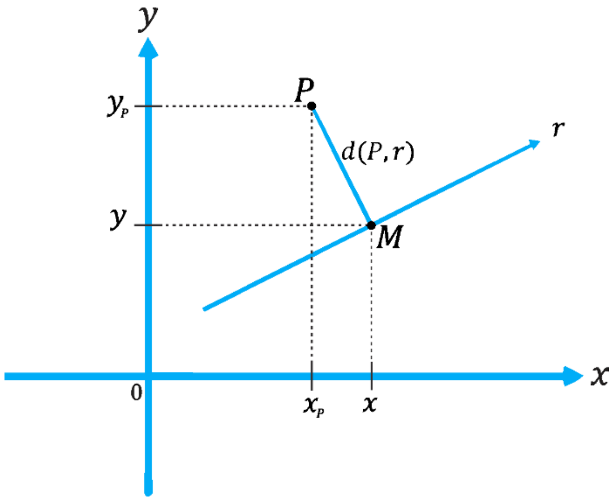
Deste modo

$$d(P,r) = |k|\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|-ax_P - by_P - c|}{a^2+b^2} . \sqrt{a^2+b^2}$$

Portando a distância do ponto P à reta r será dada por:

$$d(P,r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Figura 44: Distância de um ponto até uma reta



Fonte: Elaboração própria.

EXERCÍCIO 23: Calcule a distância d do ponto $P(2,5)$ à reta r, cuja equação geral é $3x - 4y + 2 = 0$.

RESPOSTA:

Identificar os parâmetros:

- Ponto: $(x_P, y_P) = (2,5)$
- Reta: $ax + by + c = 0 \Rightarrow a = 3, b = -4, c = 2$

Substituir na fórmula da distância:

$$d(P,r) = \frac{|3\cdot 2 + (-4)\cdot 5 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|6 - 20 + 2|}{\sqrt{9+16}}$$

$$d(P,r) = \frac{|-12|}{\sqrt{25}}$$

$$d(P,r) = \frac{12}{5}$$

$$d(P,r) = 2,4$$

A distância é 2,4 unidades de comprimento.

EXERCÍCIO 24: Seja o ponto $P(2,-1)$. Calcule a distância desse ponto P até a reta r que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B(3,0)$.

RESPOSTA: Para encontrar a equação vetorial da reta, que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B(3,0)$. precisamos de dois elementos fundamentais: Um ponto por onde a reta passa e um vetor diretor da reta.

A forma geral da equação vetorial da reta é:

$$P - P_1 = k\overrightarrow{u}$$

$$P = P_1 + k(a,b)$$

onde P é um ponto genérico da reta, P_1 é o ponto conhecido, $\overrightarrow{u}$ é o vetor diretor, e k é o parâmetro real ($k \in \mathbb{R}$).

1. Escolher um ponto (P_1): Podemos escolher qualquer um dos pontos dados, por exemplo, o ponto $A(1,4)$ ou $B = (3,0)$

2. Encontrar o vetor diretor ($\overrightarrow{u}$): O vetor diretor pode ser o vetor $\overrightarrow{AB}$, que é obtido pela subtração das coordenadas do ponto final pelo ponto inicial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, 0 - 4) = (2,-4)$$

3. Escrever a Equação Vetorial:

Substituindo P_1 e $\overrightarrow{u}$ na fórmula geral, e usando $P = (x,y)$, temos:

$$P = P_1 + k(a,b)$$

$$(x,y) = (1,4) + k(2,-4)$$

Essa é a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B = (3,0)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 4k \end{cases}$$

Isolando o parâmetro k, temos:

$$k = \frac{x-1}{2} \; e \; k = -\frac{y-4}{4}$$

Igualamos as duas equações, logo

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y-4}{4} \Leftrightarrow 4x - 4 = -2y + 8 \Leftrightarrow 4x + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow r: 2x + y - 6 = 0$$

4. Identificar os parâmetros:

- Ponto: $(x_P, y_P) = (2, -1)$
- Reta: $ax + by + c = 0 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = -6$

5. Substituir na fórmula da distância:

$$d(P,r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|4 - 1 - 6|}{\sqrt{4 + 1}}$$

$$d(P,r) = \frac{|-3|}{\sqrt{5}}$$

$$d(P,r) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

A distância é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ unidades de comprimento.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho, desenvolvido no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), teve como principal objetivo a elaboração e a fundamentação de uma proposta didática para a introdução dos conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio, utilizando uma abordagem essencialmente vetorial. Os capítulos desta dissertação demonstraram a viabilidade e a relevância de se integrar os conceitos de vetores, historicamente relegados ao Ensino Superior, como ferramenta unificadora e simplificadora para a exploração do plano cartesiano. A pesquisa confirmou que a abordagem vetorial não só se alinha com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que preconiza a interligação dos eixos de Álgebra e Geometria, mas também oferece uma estrutura conceitual mais robusta e intuitiva para o estudante.

A transição do estudo dos segmentos orientados para a representação analítica dos vetores no plano foi um dos pontos centrais da dissertação. Ao definir as operações vetoriais de forma geométrica e, em seguida, traduzi-las para a linguagem algébrica das coordenadas, foi possível construir um caminho coerente para a dedução das equações da reta, da distância entre pontos e da condição de alinhamento, de maneira mais elegante e menos dependente de fórmulas prontas. Demonstrou-se que conceitos complexos, como o Produto Escalar e sua relação com o ângulo e a ortogonalidade, podem ser introduzidos de forma acessível, fornecendo ao aluno um entendimento mais profundo da estrutura métrica do plano.

No entanto, a implementação desta proposta requer um esforço de capacitação e uma mudança na cultura pedagógica. A formação inicial e continuada de professores deve incorporar a abordagem vetorial de forma mais explícita e aprofundada, garantindo que o educador se sinta seguro e apto a fazer essa transposição didática. É necessário superar a inércia do currículo tradicional que separa rigidamente a Geometria Analítica dos Vetores, e reconhecer que a sinergia entre esses temas é o caminho para um ensino de Matemática mais integrado e eficaz, conforme sugere a literatura da área e as diretrizes educacionais.

Para trabalhos futuros, sugere-se a realização de uma pesquisa de campo para avaliar a eficácia do Produto Educacional em salas de aula reais do Ensino Médio. Seria valioso analisar o impacto desta abordagem no desempenho e na motivação dos alunos, comparando-o com o ensino tradicional. Outra linha de investigação promissora seria a extensão da abordagem vetorial para outros tópicos da Geometria Analítica, como o estudo das cônicas e do espaço tridimensional, consolidando ainda mais o vetor como o conceito fundamental para a unificação da Álgebra e da Geometria.

Em suma, a dissertação cumpriu seu papel ao apresentar uma alternativa didática sólida, bem fundamentada teoricamente e alinhada às necessidades curriculares atuais, para o ensino da Geometria Analítica. Esperamos que este trabalho possa contribuir efetivamente para o aprimoramento do ensino da Matemática, estimulando professores e alunos a descobrirem a beleza e a potência da união entre o mundo geométrico e o mundo algébrico, mediada pelo conceito transformador de vetor.

ANEXO A

APLICAÇÃO DA ABORDAGEM VETORIAL EM QUESTÕES DO ENEM

Introdução

Neste anexo, apresentamos a resolução de três questões reais do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) utilizando a abordagem vetorial proposta nesta dissertação. As questões foram selecionadas do banco oficial de questões do ENEM disponível no Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e em plataformas de preparação para o exame.

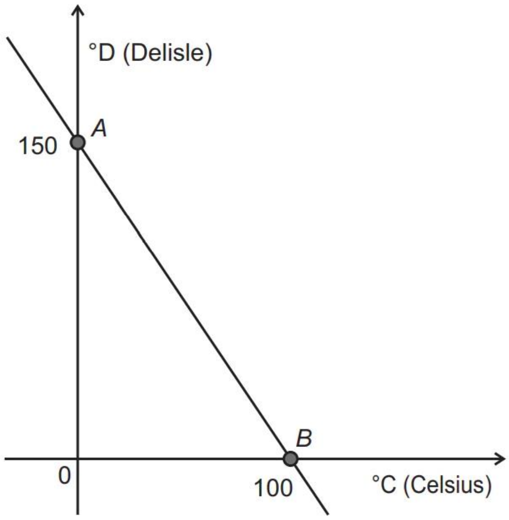
O objetivo é demonstrar como o pensamento vetorial oferece um caminho mais intuitivo e, em muitos casos, mais direto para a solução de problemas de Geometria Analítica. A abordagem vetorial permite que os estudantes visualizem os problemas de forma mais geométrica, facilitando a compreensão das relações espaciais e tornando a resolução mais elegante e menos dependente da memorização de fórmulas.

Questão 1: Relação entre Escalas de Temperatura

ENEM PPL 2021, Questão 155

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)

Enunciado: A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.



Disponível em: www.profibus.com.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

(A) 2D + C = 100

(B) 2D + 3C = 150

(C) 3D + 2C = 300

(D) 2D + 3C = 300

(E) 3D + 2C = 450

Resolução com Abordagem Vetorial

A abordagem vetorial utiliza o conceito de vetor diretor e equação vetorial da reta para resolver o problema de forma mais geométrica.

Passo 1: Identificar os pontos e construir o vetor diretor

Os dois pontos conhecidos são:

- A = (0, 150), em coordenadas (C, D)
- B = (100, 0), em coordenadas (C, D)

O vetor diretor da reta é:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (100, 0) - (0, 150) = (100, -150)$$

Simplificando por 100:

$$\overrightarrow{d} = (1; -1{,}5)$$

Passo 2: Escrever a equação vetorial da reta

Usando o ponto A como ponto de referência e o vetor diretor $\overrightarrow{d}$:

$$\overrightarrow{r}(t) = A + t\,.\,\overrightarrow{d} = (0, 150) + t(1; -1{,}5)$$

Em componentes:

$$C = 0 + t\,.\,1 = t$$

$$D = 150 + t\,.\,(-1{,}5) = 150 - 1{,}5t$$

Passo 3: Eliminar o parâmetro t

Da primeira equação: $t = C$

Substituindo na segunda: $D = 150 - 1{,}5C$

Reorganizando: $D + 1{,}5C = 150$

Multiplicando ambos os lados por 2: $2D + 3C = 300$

Passo 4: Verificação

- Para $C = 0$: $D = 150$ ✓(Ponto A)
- Para $C = 100$: $D = 150 - 200 = -50$ ✓(Ponto B)

Interpretação Vetorial: O vetor diretor $(1, -2)$ indica a taxa de variação entre as escalas: para cada aumento de 1°C, há uma diminuição de 2°D. Essa interpretação permite que o estudante compreenda a relação não apenas como uma fórmula algébrica, mas como uma relação geométrica no plano cartesiano. O vetor diretor fornece informações sobre a taxa de variação entre as duas grandezas, facilitando a compreensão do fenômeno físico representado.

Resposta: (D) 2D + 3C = 300$

Questão 2: Distância entre Pontos (Postos de Saúde e Hospital)

ENEM 2024, caderno azul, Questão 164

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)

Enunciado: A prefeitura de uma cidade planeja construir três postos de saúde. Esses postos devem ser construídos em locais equidistantes entre si e de forma que as distâncias desses três postos ao hospital dessa cidade sejam iguais. Foram conseguidos três locais para a construção dos postos de saúde que apresentam as características desejadas, e que distam 10 km entre si, conforme o esquema, no qual o ponto H representa o local onde está construído o hospital; os pontos P_1, P_2 e P_3, os postos de saúde; e esses quatro pontos estão em um mesmo plano.

A distância, em quilômetro, entre o hospital e cada um dos postos de saúde, é um valor entre:

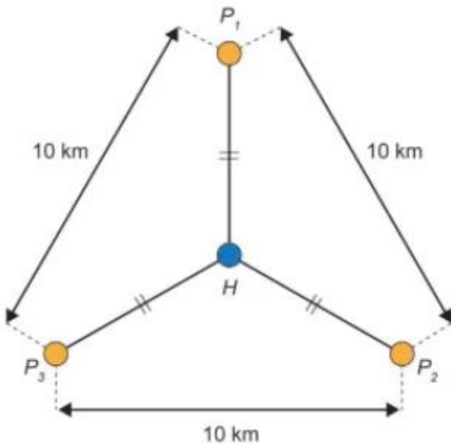
(A) 2 e 3

(B) 4 e 5

(C) 5 e 6

(D) 7 e 8

(E) 8 e 9



Resolução com Abordagem Vetorial

A abordagem vetorial utiliza propriedades de vetores para encontrar o circuncentro de forma mais intuitiva.

Passo 1: Posicionar o triângulo no plano cartesiano

Colocamos o triângulo equilátero com:

- $P_1 = (5, 5\sqrt{3})$
- $P_2 = (10, 0)$
- $P_3 = (0, 0)$

Passo 2: Seja $H = (x, y)$ o ponto do hospital

Como o hospital é equidistante dos três postos, temos:

$$\left\|\overrightarrow{P_1H}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_2H}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_3H}\right\|$$

$$\|H - P_1\| = \|H - P_2\| = \|H - P_3\|$$

$$\left\|(x-5, y-5\sqrt{3})\right\| = \|(x-10, y)\| = \|(x, y)\|$$

Passo 3: Usar a condição

$$\|H - P_2\| = \|H - P_3\|$$
$$\|(x - 10, y)\| = \|(x, y)\|$$

Elevando ao quadrado:

$$\|H - P_2\|^2 = \|H - P_3\|^2$$
$$x^2 - 20x + 100 + y^2 = x^2 + y^2$$
$$x = 5$$

Passo 4: Usar a condição

$$\|H - P_1\| = \|H - P_3\|$$
$$\left\|(x - 5, y - 5\sqrt{3})\right\| = \|(x, y)\|$$

Elevando ao quadrado:

$$\|H - P_1\|^2 = \|H - P_3\|^2$$
$$(x - 5)^2 + \left(y - 5\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + y^2$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10\sqrt{3}y + 75 = x^2 + y^2$$
$$-10x - 10\sqrt{3}y = -100$$
$$x + \sqrt{3}y = 10$$

Substituir $x = 5$

$$\sqrt{3}y = 5$$
$$y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Passo 5: Calcular a distância

O hospital está em

$$H = \left(5, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

A distância do hospital ao posto $P_3 = (0, 0)$ é:

$$\left\|\overrightarrow{P_3H}\right\| = \|H - P_3\| = \|(x, y)\|$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{75}{9}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cong \mathbf{5,77}$$

Interpretação Vetorial: Este método utiliza a propriedade fundamental de que o circuncentro satisfaz a equação $\|H - P_i\|^2 = r^2$ para todos os vértices P_i. Ao igualar as distâncias (ou seus quadrados), criamos um sistema de equações que define a posição do circuncentro. Esse método é mais geral e funciona para qualquer triângulo, não apenas equiláteros.

Resposta: (C) 5 e 6

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFIAS

[01] **BRASIL.** Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

[02] **CURY, H. N.** Geometria Analítica: um campo de conexões. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2015.

[03] **DANTE, L. R.** Matemática: contexto & aplicações. 7. ed. São Paulo: Ática, 2005.

[04] **DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L.** Geometria analítica. SBM, Coleção PROFMAT, 2013.

[05] **DESCARTES, René.** *La Géométrie*. In: DESCARTES, René. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Leyde: Ian Maire, 1637.

[06] **FURLANI, L. M. T.** Educação Matemática: problemas e perspectivas. São Paulo: Cortez, 1993.

[07] **GRASSMANN, Hermann.** Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. Leipzig: Otto Wigand, 1844.

[08] **LORENZATO, S.** O ensino da geometria no Brasil. Campinas: Autores Associados, 1995.

[09] **MUNIZ NETO, A. C.** Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] **PAVANELLO, R. M.** A ausência da geometria: um estudo sobre o ensino da Matemática no Brasil. Campinas: Autores Associados, 1993.

[11] **TOKARNIA, M.** Desempenho escolar em Matemática no Brasil. Brasília: Agência Brasil, 2016.

[12] **WILSON, Edwin Bidwell.** Vector Analysis: A Text-Book for the Use of Students of Mathematics and Physics, Founded Upon the Lectures of J. Willard Gibbs. New York: Charles Scribner's Sons; London: Edward Arnold, 1901.

[13] **RODRIGUES, J. M.** Geometria analítica com enfoque vetorial no ensino médio. Dissertação de Mestrado – Unicamp, 2015.

[14] **SILVA, S. C. R. C.** GeoGebra e Representação Geométrica de Conceitos Relacionados à Geometria Analítica. Formação Continuada em MATEMÁTICA Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ. 2014. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/4fb9d6a5f94b352289838914e170d5f5.pdf. Acesso em: [data de acesso].

[15] **WAGNER, E**. Sobre o ensino de geometria analítica. Revista do Professor de Matemática, n. 45.