



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - CCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROFMAT/UFRN

FRANCISCO NETO LIMA DE SOUZA

LABTJ VIRTUAL
LABORATÓRIO VIRTUAL DE TEORIA DOS JOGOS: UMA PROPOSTA
DIRECIONADA AO ENSINO MÉDIO

NATAL-RN

2025

FRANCISCO NETO LIMA DE SOUZA

**LABORATÓRIO VIRTUAL DE TEORIA DOS JOGOS:
UMA PROPOSTA DIRECIONADA AO ENSINO
MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte — PROFMAT/UFRN, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Débora Borges Ferreira

NATAL-RN
2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Souza, Francisco Neto Lima de.

Laboratório virtual de teoria dos jogos: uma proposta
direcionada ao ensino médio / Francisco Neto Lima de Souza. -
2025.

113 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do
Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Natal, RN,
2025.

Orientação: Dra. Débora Borges Ferreira.

1. Ensino de matemática - Dissertação. 2. Teoria dos jogos -
Dissertação. 3. Investigação matemática - Dissertação. 4.
Laboratório virtual de teoria dos jogos - Dissertação. 5.
Sequência didática - Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II.
Título.

RN/UF/CCET

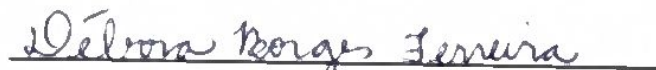
CDD 51.37 026 (043 3)

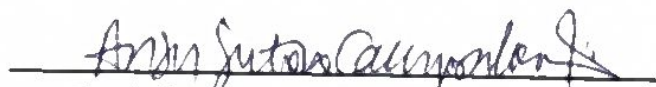
FRANCISCO NETO LIMA DE SOUZA

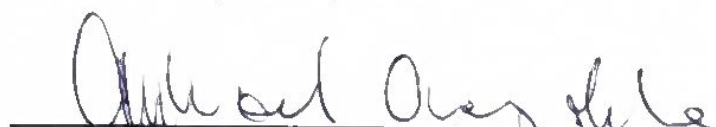
**LABORATÓRIO VIRTUAL DE TEORIA DOS JOGOS:
UMA PROPOSTA DIRECIONADA AO ENSINO
MÉDIO**

Natal-RN, 19/02/2025

COMISSÃO EXAMINADORA


Dra. Débora Borges Ferreira
(Orientadora) - UFRN


**Prof. Dr. André Gustavo Campos
Pereira**
(Interno) - UFRN


Prof. Dr. Annaxsuel Araújo de Lima
(Externo) - IFRN

À vovô Diassis e à vovó Maria que sempre deram o melhor de si para que eu pudesse trilhar meus caminhos acadêmicos com segurança e bem-estar. Com vocês, aprendi o valor do amor e do cuidado.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus! Ele é o dono dos meus dias e tem cuidado de mim em cada detalhe. O Seu amor me alcançou em cada momento deste mestrado, desde a seleção até a defesa desta dissertação. Em cada momento, vi provas de Seu amor na minha vida.

À minha família, que tanto me apoia. Especialmente, cito três pessoas que moram no meu coração e nunca deixam de segurar minha mão e torcer ao meu favor: vovó Maria, vovô Diassis e meu tio Nilson. Sou feliz e realizado por ter vocês na minha vida.

Ao meu querido companheiro, meu Geovane, por todo o apoio e incentivo na construção de um futuro melhor.

Aos meus amigos que me acompanharam e me apoiaram neste período de mestrado. Em nome de todos, cito José, Olga e Rafael. Obrigado! Vocês são exemplos de que a educação transforma.

A todos os meus colegas da turma PROFMAT 2023. Vocês moram no meu coração e vão permanecer para sempre. Passei um dos momentos mais lindos da minha trajetória acadêmica ao lado de vocês. As nossas sextas-feiras foram as melhores. Obrigado pela troca de experiências e pelo companheirismo que marcou a existência da nossa turma. Compartilho, como forma de homenagem, um registro fotográfico que reúne todos os integrantes da turma.



Aos meus professores do PROFMAT, que faço questão de mencionar um a um: Alan Guimarães, Viviane Klein, Débora Borges, Carlos Gomes, Fagner Santana, Santos Borjas e Viviane Simioli. Muito obrigado por compartilharem comigo o que vocês têm de mais valioso: o conhecimento. Aproveitei o curso e, dentro das minhas possibilidades, dei o meu melhor em cada momento de partilha de conhecimento.

Em especial, agradeço à minha orientadora e professora Dra. Débora Borges. Obrigado pelo acompanhamento, atenção e direcionamento no desenvolvimento da pesquisa. Agradeço por acreditar em mim e por me fornecer apoio para que a conclusão desta dissertação fosse possível.

Por fim, termino pontuando que a finalização do PROFMAT, para minha vida acadêmica, representa uma ponte que me levará a outros horizontes. Como sempre digo: conheço-me e sei que não acaba aqui.

*“Prosperarei com o suor do meu trabalho
Me guardei, lutei sem buscar atalho
Ou sem pisar em ninguém
Sem roubar também, então sei
Que hoje o meu nome é Foda e meu sobrenome é Pra Caralho”*

(Muleque de vila, Projota)

RESUMO

O presente estudo tem como temática principal a Teoria dos Jogos (TJ), contemplando aspectos históricos, matemáticos e didáticos desse campo de estudo. É orientado pela seguinte interrogação: como a TJ pode ser abordada no Ensino Médio para promover o pensamento crítico e desenvolver a capacidade de tomada de decisões? Para responder a esse questionamento, estabelecemos como objetivo geral propor uma abordagem investigativa, a partir da TJ, direcionada ao Ensino Médio. Como um dos principais desdobramentos do presente estudo, apresentamos o nosso Produto Educacional (PE) intitulado Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos. O LabTJ Virtual é um espaço virtual, organizado a partir de um *site*, que compreende aspectos teóricos e práticos relacionados à TJ, oferecendo uma variedade de recursos - vídeos, textos, sequência didática e materiais de estudo - direcionados ao público do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Teoria dos Jogos. Investigação matemática. Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos. Sequência didática.

ABSTRACT

The present study focuses on Game Theory, encompassing the historical, mathematical, and didactic aspects of this field of study. It is guided by the following question: how can Game Theory be addressed in high school to promote critical thinking and develop decision-making skills? To answer this question, we established the general objective of proposing an investigative approach based on Game Theory, targeted at high school education. As one of the main outcomes of this study, we present our Educational Product titled Virtual Game Theory Laboratory. The Virtual Game Theory Laboratory is an online space, organized through a website, that includes both theoretical and practical aspects of Game Theory. It offers a variety of resources - videos, texts, a didactic sequence, and study materials -designed for a high school audience.

Keywords: Mathematics Teaching. Game Theory. Mathematical investigation. Virtual Game Theory Laboratory. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de jogos e o critério	6
Figura 2 – Árvore de recompensas do jogo par ou ímpar	14
Figura 3 – Δ_i considerando $m_i = 2$ representada no espaço $\mathbb{R}^2$ e definido por: $p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0$ e $p_{i1} + p_{i2} = 1$	26
Figura 4 – Δ_i considerando $m_i = 3$ representada no espaço $\mathbb{R}^3$ e definido por: $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} \geq 0$ e $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = 1$	27
Figura 5 – Linha do tempo (parte 1)	43
Figura 6 – Linha do tempo (parte 2)	44
Figura 7 – Diferenciação entre exercícios, problemas, explorações e investigações.	47
Figura 8 – Momentos da investigação matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019)	49
Figura 9 – Identidade visual do LabTj Virtual	53
Figura 10 – Capa da sequência didática	55
Figura 11 – Ilustração do problema das rotas	67
Figura 12 – Ilustração do problema das rotas (reformulação)	69

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1 – Tipos de jogos.	6
Quadro 2 – Funções de utilidade dos jogadores no Jogo das Moedas	13
Quadro 3 – Matriz de recompensas do “Jogo das moedas”.	13
Quadro 4 – Funções de utilidade dos jogadores em um jogo de prisão	16
Quadro 5 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros”.	16
Quadro 6 – Recompensas para os Jogadores 1 e 2 no jogo "Pedra, papel e tesoura".	18
Quadro 7 – Matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura”.	18
Quadro 8 – Matriz de recompensas inicial do jogo “Marketing Empresas Alfa e Beta”.	20
Quadro 9 – Matriz de recompensas do jogo após eliminar a linha L e M	21
Quadro 10 – Matriz de recompensas do jogo após eliminar as colunas M e H	21
Quadro 11 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros” com perfil que representa o equilíbrio de Nash em vermelho.	22
Quadro 12 – Matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura”	22
Quadro 13 – Comparação entre Equilíbrio de Nash e Estratégia Estritamente Dominante no contexto das estratégias puras.	23
Quadro 14 – Matriz de recompensas do jogo “Moedas emparelhadas”	24
Quadro 15 – Matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura”	29
Quadro 16 – Matriz de recompensas de um jogo.	31
Quadro 17 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros”.	33
Quadro 18 – Elementos do LabTJ Virtual.	54
Quadro 19 – Especificação da Investigação 1: O que é um jogo?	57
Quadro 20 – Especificação da Investigação 2: O dilema dos prisioneiros	61
Quadro 21 – Modelagem matemática do jogo “O dilema dos prisioneiros”	64
Quadro 22 – Especificação da Investigação 3: Escolhendo rotas	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APCN	Apresentação de Proposta para Curso Novo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCET	Centro de Ciências Exatas e da Terra
DMAT	Departamento de Matemática
LabTJ	Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
TJ	Teoria dos Jogos
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\prod \sum$	Produtório e somatório.
$\times$	Produto cartesiano.
$\geq, \leq, >, <$	Relações de ordem.
$\forall$	Quantificador universal (“para todo”).
$\exists$	Quantificador existencial (“existe”).
∇	Gradiente, usado para calcular máximos/mínimos.
J	Conjunto finito de jogadores ($J = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \geq 2$).
S	Conjunto de todas as estratégias do jogo.
S_i	Conjunto de estratégias disponíveis para o jogador i ($S_i \subset S$).
m_i	Número de estratégias disponíveis para o jogador i ($m_i \geq 2$).
E	Espaço de estratégias $\left(E = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n\right)$.
s	Perfil de estratégias ($s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$).
s_{-i}	Perfil de estratégias de $n - 1$ jogadores, exceto i .
$s = (s_i, s_{-i})$	Representação de um perfil de estratégias, destacando a estratégia do jogador i .
u_i	Função utilidade do jogador i ($u_i : E \rightarrow \mathbb{R}$).
$u_i(s)$	Recompensa do jogador i associada ao perfil de estratégias s ($u_i(s) \in \mathbb{R}$).
$u_i(s_i, s_{-i})$	Utilidade do jogador i , dada sua estratégia s_i e o perfil de estratégias s_{-i} dos outros jogadores.

Δ_i	Conjunto de todas as estratégias mistas possíveis para o jogador i $\left(\Delta_{m_i} = \left\{ (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1 \right\} \right).$
$\mathbf{p}$	Perfil de estratégias mistas ($\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$).
p_i	Estratégia mista do jogador i ($p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$).
Δ	Espaço de estratégias mistas $\left(\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i} \right).$
p_{ij}	Probabilidade do jogador i escolher a j -ésima estratégia pura ($p_{ij} \geq 0$).
$\mathbf{p}^*$	Estratégia mista de equilíbrio para um jogador ($\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$).
$u_i(\mathbf{p})$	Recompensa do jogador i associada a um perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}$ $\left(u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^n p_{kj_k} \right) u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}) \right).$

Sumário

1 – INTRODUÇÃO	1
2 – TEORIA DOS JOGOS: ASPECTOS MATEMÁTICOS E HISTÓRICOS	4
2.1 JOGO E TEORIA DOS JOGOS: UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO	4
2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DOS JOGOS	8
2.2.1 Jogos de estratégia pura	8
2.2.2 Soluções de um jogo com estratégia pura	19
2.2.3 Jogos de estratégia mista	24
2.2.4 Equilíbrio de Nash em jogos de estratégias mistas	30
2.3 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TEORIA DOS JOGOS	35
3 – INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	45
3.1 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NOS PROCESSOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA	45
3.2 AS FASES DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	48
4 – PRODUTO EDUCACIONAL	51
4.1 POR QUE UM PRODUTO EDUCACIONAL?	51
4.2 LABORATÓRIO VIRTUAL DE TEORIA DOS JOGOS - LabTJ Virtual	52
4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	55
4.3.1 Investigação 1 - O que é um jogo?	56
4.3.2 Investigação 2 - O dilema dos prisioneiros	60
4.3.3 Investigação 3 - Escolhendo rotas	65
5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
Referências	73

Apêndices	77
APÊNDICE A – LABTJ VIRTUAL	78
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	79

1 INTRODUÇÃO

Dentro do campo da Educação, em especial da Educação Matemática, muito se tem falado sobre oportunizar aos alunos uma reflexão crítica da realidade que os cerca (SKOVSMOSE, 1994; D'AMBROSIO, 1985). Por esta razão, recomenda-se que o ensino de Matemática vá além da memorização de fórmulas e da simples transmissão de conteúdos, constituindo-se como um espaço de reflexão onde os alunos desenvolvam as capacidades de analisar e interpretar a realidade para resolver os problemas que os cercam.

A Teoria dos Jogos (TJ) é um campo de estudos da filosofia, economia e matemática que oferece instrumentos para tomada de decisões e resolução de conflitos. A TJ se volta ao estudo de situações em que agentes (empresas, países e indivíduos) enfrentam a necessidade de tomar decisões onde os resultados das ações de cada um não são determinados somente por suas próprias escolhas, mas também pelas decisões tomadas pelos demais agentes envolvidos.

Ao analisarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), principais documentos orientadores da Educação Básica brasileira, percebemos a ênfase em uma proposta educacional que destaca um modelo formativo pautado pela necessidade de que os estudantes desenvolvam habilidades para tomar decisões conscientes e fundamentadas em diversos contextos (BRASIL, 2018).

Essa recomendação nos faz apostar que a TJ é um campo com potenciais didáticos que podem ser explorados na educação escolar. Diante disso, estabelecemos como questão de pesquisa para o nosso estudo: **como a TJ pode ser abordada no Ensino Médio para promover o pensamento crítico e desenvolver a capacidade de tomada de decisões?**¹

Para responder essa questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo geral para o presente estudo: **propor uma abordagem investigativa, a partir da TJ, direcionada ao Ensino Médio, para promover o pensamento crítico e a capacidade de tomada de decisões.** Diante desse objetivo geral, apontamos três objetivos

¹Especificamente na introdução, partes importantes como questão de pesquisa e objetivos (geral e específicos) serão destacados com negrito.

específicos intimamente relacionados:

(1) Fazer um estudo histórico e matemático introdutório da TJ, identificando os conhecimentos de natureza matemática que serão tratados didaticamente para o estudo da TJ no Ensino Médio. Esse tratamento didático dado, considera uma aproximação da TJ com a investigação matemática de [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019\)](#), levando-nos a estabelecer como segundo objetivo específico **(2) discutir os fundamentos teóricos e metodológicos da investigação matemática para estruturar tarefas**.

Por fim, estabelecemos como terceiro e último objetivo específico, **(3) elaborar um Produto Educacional (PE)² intitulado Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos (LabTJ Virtual), aplicável ao contexto do Ensino Médio**. Hospedado em um *site*, o LabTJ Virtual foi pensado como um espaço digital que se volta à exploração de elementos históricos, didáticos e matemáticos da TJ, oferecendo uma plataforma que combina teoria e prática, voltada a alunos do Ensino Médio. Entre os elementos que constituem o nosso PE, destacamos a sequência didática ³ sendo resultado da articulação dos objetivos específicos 1 e 2. Além disso, materiais catalogados no decorrer da pesquisa (livros, artigos, dissertações, teses e filmes) também fazem parte da composição do LabTJ Virtual.

No que diz respeito à estrutura da dissertação, podemos apontar que ela se divide em cinco capítulos, incluindo a presente introdução (Capítulo 1) que apresenta a temática de estudo, a questão de pesquisa e os objetivos (geral e específicos) que foram estabelecidos.

No Capítulo 2, apresentamos a fundamentação matemática e histórica da pesquisa. Inicialmente, dissertamos sobre os jogos de estratégias puras e mistas, bem como de suas soluções. Em seguida, sistematizamos um estudo histórico sobre a TJ, destacando acontecimentos e estudiosos importantes para sua consolidação.

Dedicamos o Capítulo 3 ao estudo dos fundamentos teóricos e metodológicos da investigação matemática proposta por [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019\)](#). Essa teo-

²O Documento de Área (Ensino) de 2019 (p. 16) define o Produto Educacional como “o resultado de um processo criativo gerado a partir de uma atividade de pesquisa, com vistas a responder a uma pergunta ou a um problema, ou, ainda, a uma necessidade concreta associados ao campo de prática profissional, podendo ser um artefato real ou virtual, ou ainda, um processo”.

³Trataremos melhor desse conceito no Capítulo 4. O termo sequência didática, segundo [Souza \(2013, p. 50\)](#), “refere-se à organização de uma sequência de aulas, geralmente planejadas para pesquisas relacionadas à Didática, podendo ser também uma produção para o próprio ensino”.

ria é central no trabalho, por embasar a construção das três atividades (investigações) que constituem a sequência didática (Apêndice B) que consta no PE.

O conteúdo do Capítulo 4 compreende o nosso Produto Educacional (PE), o LabTJ Virtual, entendido como um espaço de reflexão sobre TJ que combina elementos matemáticos, didáticos e históricos destinado aos alunos do Ensino Médio interessados em estudar a TJ. Ainda neste Capítulo, é apresentada uma descrição das atividades que constam na sequência didática, com recomendações para sua aplicação em sala de aula.

No Capítulo 5, estão expressas nossas considerações finais sobre a pesquisa, momento da investigação em que apresentamos uma possível resposta à pergunta de pesquisa, avaliamos até onde nossos objetivos foram alcançados e vislumbramos alguns desdobramentos provenientes desse estudo.

2 TEORIA DOS JOGOS: ASPECTOS MATEMÁTICOS E HISTÓRICOS

Este capítulo foi estruturado em quatro seções. Na Seção 2.1, exploramos a noção de jogo e de Teoria dos Jogos (TJ). Em seguida (Seção 2.1), destacamos algumas classificações dos jogos, explorando, em cada caso, o critério adotado para classificação e exemplos associados. Na Seção 2.2, apresentamos um estudo matemático da TJ que reúne definições, resultados e exemplos sobre os jogos de estratégias puras e mistas, bem como suas soluções. Por fim, na Seção 2.3 sistematizamos aspectos históricos do tema, reunindo acontecimentos, personagens e marcos deste campo de estudo. Esse estudo culmina na criação de uma linha do tempo da TJ.

2.1 JOGO E TEORIA DOS JOGOS: UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

A ideia mais imediata de jogo associa esse conceito à infância, já que quando crianças, brincamos com os mais diversos tipos de jogos - de tabuleiro, de cartas e até mesmo eletrônicos (ALENCAR; YAMAMOTO, 2008). No entanto, para além dessa concepção, quando usarmos a palavra jogo no contexto dessa dissertação, estamos indicando uma situação de conflito onde os agentes envolvidos precisam tomar decisões e, para isso, devem considerar não apenas suas próprias opções, mas também as possíveis escolhas dos outros, tendo em vista que cada decisão pode impactar o resultado coletivo e individual.

Barrichelo (2017, p. 30) coloca que a palavra jogo é utilizada, na TJ, por

possuir exatamente essa característica — os jogadores buscam o melhor para si e há uma interdependência de estratégias que afetam o resultado. Em outras palavras, várias decisões das nossas vidas se parecem com um jogo.

Dessa forma, ao buscarem o melhor para si, os jogadores precisam reconhecer que as decisões não são isoladas, mas interdependentes. Essa característica, é fundamental nos jogos de interação estratégicas estudados pela TJ. A ideia central de pensar sobre a escolha considerando as potenciais escolhas dos seus adversá-

rios expressa a essência de muitas situações do dia a dia. Diante dessa dinâmica de interação, a TJ se utiliza de modelos matemáticos para analisar essas situações de conflito e cooperação (jogos) entre os agentes da situação (jogadores).

O exemplo que segue, apresenta uma situação de conflito que pode ser analisada à luz da TJ: uma empresa A disputa com a empresa B uma contratação para prestar serviços a uma prefeitura do interior do Rio Grande do Norte.

O exemplo apresenta uma situação de conflito entre mais de um agente (empresas A e B) e é marcado por uma interdependência de decisões, ou seja, as estratégias a serem utilizadas para contratação devem sempre considerar as ações da empresa concorrente. Situações como essa são cada vez mais comuns e perpassam o dia a dia de muitos de nós. Independentemente de ser pessoa ou empresa, essas decisões buscam sempre obter alguma vantagem nesses cenários de disputa, seja para obter lucro ou mesmo por interesses pessoais ([CAMPOS; CARDOSO, 2015](#)).

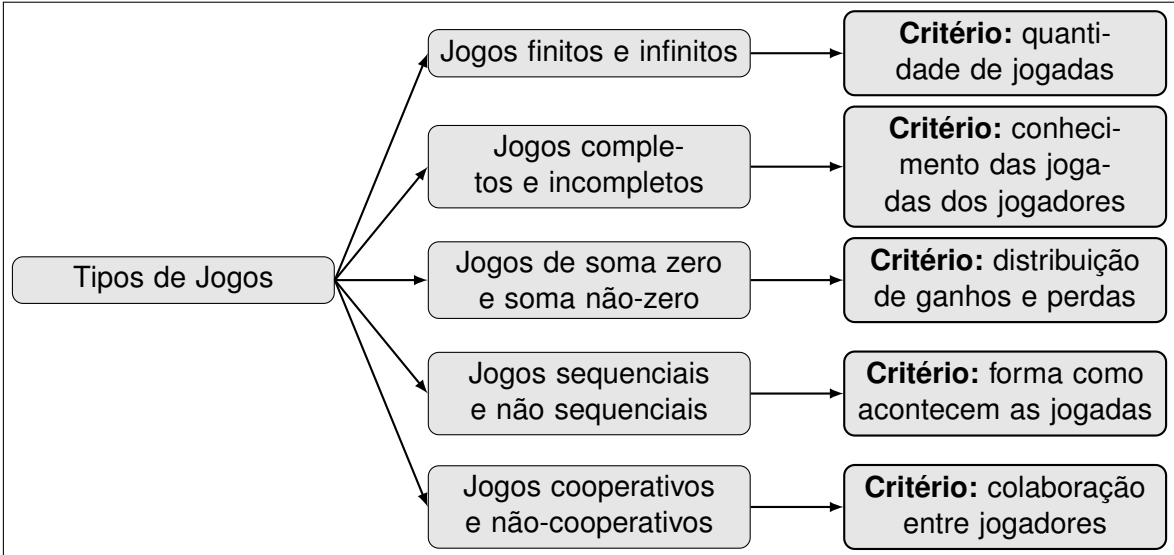
No entanto, nem toda situação pode ser modelada pela TJ. Por isso, o seguinte exemplo ilustra uma situação que não pode ser analisada sob a perspectiva da TJ: um indivíduo quer comprar uma casa.

Nessa circunstância, diversos fatores entram em jogo, como o tamanho da casa, a localização, a aparência, o estilo e os móveis que a acompanham. O exemplo apresenta somente um jogador (o comprador da casa) e, mesmo existindo diversas decisões a serem tomadas, comprar ou não a casa depende só do comprador, ou seja, é uma decisão isolada em que não há interferência de outros agentes no resultado. Assim, embora o estudo das escolhas individuais também seja importante, é necessário reconhecer que o comportamento de um indivíduo de maneira singular não é suficiente para determinar o resultado de um processo de tomada de decisão, por esse motivo, situações como essa não se enquadram na análise da TJ ([ALENCAR; YAMAMOTO, 2008](#); [PONTES, 2018](#)).

Esta seção apresenta alguns dos principais tipos de jogos abordados na literatura da TJ. As classificações são baseadas nos seguintes estudos: [Osboner e Rubinstein \(2003\)](#), [Burlamaqui \(2002\)](#), [Fudenberg e Tirole \(2006\)](#), [Câmara \(2011\)](#) e [Leandro \(2018\)](#). Apresentamos 10 classificações de jogos que consideram os seguintes critérios: (1) número de jogadas (finitas ou infinitas); (2) conhecimento das jogadas (informação completa e incompleta); (3) resultado (soma zero e soma não zero); (4) forma como acontecem as jogadas (sequencial e não sequencial); e (5) colaboração

(cooperativo e não cooperativo). A Figura 1 ilustra, por meio de um diagrama, os tipos de jogos indicados.

Figura 1 – Tipos de jogos e o critério



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A partir do estudo dos principais tipos de jogos, estruturamos o Quadro 1 que foi dividido em três colunas que contemplam: tipo, especificação e exemplo do referido tipo de jogo. Com isso, temos o objetivo de apresentar os diferentes tipos de jogos de forma rápida e resumida. Nesta oportunidade, não é nossa intenção discutir profundamente cada tipologia nos cabendo somente, de forma rápida e resumida, fornecer uma breve descrição do jogo para que, na oportunidade em que este for mencionado à frente, o leitor compreenda do que se trata e possa consultar um exemplo para facilitar sua compreensão.

Quadro 1 – Tipos de jogos.

TIPO	ESPECIFICAÇÃO	EXEMPLO
Jogo cooperativo	Jogos cooperativos se tratam de situações em que os agentes precisam lidar com coalizões, ou seja, formar alianças ou parcerias para alcançar objetivos e maximizar resultados positivos.	Duas empresas A e B do ramo de petróleo se unem para dividir custos de produção e maximizar ganhos.

TIPO	ESPECIFICAÇÃO	EXEMPLO
Jogos não cooperativos	As ações são executadas com foco no objetivo individual. Não existe cooperação entre os jogadores, e eles competem considerando apenas seu resultado.	O jogo pedra-papel-tesoura (Jokenpô) é um exemplo desse tipo de jogo.
Jogo simultâneo	Os jogadores tomam decisões ao mesmo tempo, sem conhecer as escolhas dos outros jogadores.	Jogo ímpar ou par com duas pessoas, onde cada uma escolhe seu número simultaneamente.
Jogo sequencial	As decisões são tomadas sequencialmente e os jogadores decidem baseados nas decisões que já foram tomadas.	Xadrez, onde um jogador faz uma jogada e o oponente responde com base na jogada feita.
Jogo de soma zero	Envolve um conflito direto entre os jogadores e o ganho de um jogador implica na perda do outro.	Uma partida de xadrez é um exemplo, onde o ganho de um jogador implica na perda do outro.
Jogo de soma não-zero	Os participantes podem ganhar ou perder simultaneamente. Assim, temos uma situação em que os ganhos/perdas de um agente não resultam, necessariamente, na perda de outros jogadores.	Colaboração entre empresas concorrentes, como Gol e Azul, para criar uma aliança em rotas de voos.
Jogos de informação completa	Os jogadores conhecem todas as jogadas que ocorreram até o momento, ou seja, a jogada subsequente pode ser feita tomando como base as jogadas anteriormente efetuadas.	O jogo de xadrez.
Jogos de informação incompleta	Diferentemente dos jogos de informação completa, nesse tipo de jogo, quando um jogador efetua a sua jogada, ele não tem conhecimento das decisões anteriores à sua.	O jogo de pôquer.
Jogos finitos e infinitos	Como o próprio nome sugere, se tratam de jogos cujo número de jogadas seria finito ou infinito.	Um exemplo de jogo finito seria o pôquer. Um exemplo de jogo infinito seria os jogos econômicos de mercado, que podem gerar negociações contínuas.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Com a apresentação do Quadro 1, temos dois apontamentos a serem feitos. O primeiro é que o quadro não esgota todas as categorias existentes, pois dependendo da abordagem ou do contexto de análise, outras referências podem propor

classificações distintas das que foram apresentadas neste estudo. O segundo é que as categorias apresentadas não devem ser vistas como excludentes entre si, pois a complexidade de um jogo pode contemplar mais de um desses critérios observados, convergindo na possibilidade de que um jogo pertença a mais de uma categoria.

2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DOS JOGOS

Esta seção trata de alguns aspectos matemáticos da Teoria dos Jogos (TJ). Em um primeiro momento (Subseções 2.2.1 e 2.2.2), apresentamos os jogos de estratégias pura e suas soluções. Em seguida (Subseções 2.2.3 e 2.2.4), apresentamos os jogos de estratégias mistas, apontando o equilíbrio de Nash como uma possível solução desse tipo de jogo. As referências bibliográficas que embasam este estudo matemático são: [Figueiredo \(1994\)](#), [Sartini et al. \(2004b\)](#), [Mara \(2011\)](#), [Fiani \(2015\)](#), [Osboner e Rubinstein \(2003\)](#), [Marinho \(2005\)](#), [Burlamaqui \(2002\)](#), [Tanimoto \(2015\)](#), [Hotz \(2006\)](#), [González-Díaz, García-Jurado e Fiestras-Janeiro \(2021\)](#), [Laraki, Renault e Sorin \(2019\)](#), [Mazalov \(2014\)](#), [Maschler, Solan e Zamir \(2013\)](#) e [Silver \(2024\)](#).

2.2.1 Jogos de estratégia pura

Jogo é uma situação de conflito onde os jogadores envolvidos são marcados por uma interdependência das decisões. Assim, cada decisão tomada por um jogador afeta seus próprios resultados e o resultado dos outros jogadores envolvidos. As situações estratégicas (jogos) observadas à luz da TJ, são acompanhadas por pressupostos fundamentais que permitem a análise do jogo e a construção de uma teoria. Apresentamos três desses pressupostos:

- **Os jogadores são racionais e as regras são conhecidas por cada jogador:** não faz sentido falar em racionalidade caso os jogadores não conheçam as regras e, conseqüentemente, as possíveis ações a serem realizadas pelos outros jogadores. Dessa forma, assume-se que os jogadores (agentes das ações) são racionais e, por isso, sempre optam por ações que maximizam seus ganhos.
- **O jogador sempre consegue avaliar seus ganhos em cada ação:** cada jogador consegue avaliar os potenciais ganhos de sua escolha com base na estra-

tégia adotada, conseguindo identificar a situação mais vantajosa em cada caso apresentado.

- **O jogo pode ser modelado/formalizado matematicamente:** esse pressuposto compreende a possibilidade de analisar um jogo a partir de padrões mais rigorosos. A formalização de um jogo é caracterizada pelo uso de uma simbologia matemática e definições específicas da TJ.

Particularmente nas Subseções 2.2.1 e 2.2.2, toda vez que nos referirmos a “estratégia”, estamos fazendo referência ao conceito de “estratégia pura”. Na TJ, estratégia pura é um modelo no qual o jogador escolhe uma única ação específica de um conjunto predefinido de estratégias disponíveis para ele. Essa escolha ocorre de forma determinística, sem considerar a aleatoriedade.

Na sequência, alguns resultados e definições fundamentais para a formalização dos jogos, no contexto da TJ, são apresentados¹. Tais resultados servem como base para compreender as ferramentas matemáticas utilizadas na TJ, permitindo que situações estratégicas sejam modeladas matematicamente.

Definição 1: Estratégia

Seja $J = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \geq 2$, um conjunto finito de jogadores e $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ o conjunto que reúne os conjuntos de estratégias de cada jogador. Para cada $i \in J$, o conjunto $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{im_i}\} \in S$ representa as **estratégias** disponíveis para o Jogador i e contém m_i elementos ($m_i \geq 2$).

O $m_i \geq 2$ presente na Definição 1, ilustra um componente importante nesse contexto. Esse índice denota duas considerações importantes, são elas: (1) um jogador precisa ter mais de uma ação possível para variar sua estratégia, pois caso haja somente uma opção de ação, o jogador não teria liberdade de escolha, resultando em um comportamento fixo que torna o jogo previsível; (2) por outro lado, m_i especifica o Jogador i , fazendo com que jogadores diferentes possam ter um número distinto de estratégias.

¹Para aproximar a estrutura do texto de uma linguagem matemática usual, apresentamos as definições e exemplos em caixas de texto. As caixas de texto azuis representam as definições e os exemplos se encontram nas caixas de texto amarelas.

Os Exemplos 1 e 2 ilustram dois jogos que serão observados a partir da Definição 1. O primeiro exemplo, apresenta um jogo cujo número de estratégias para ambos os jogadores é igual, enquanto no segundo, o número de estratégias entre os jogadores é diferente.

Exemplo 1: Jogo par ou ímpar com dois jogadores

Note que para $J = \{1, 2\}$, temos: $S_1 = S_2 = \{0, 1, \dots, 10\}$. Ilustrando um caso em que $m_1 = m_2 = 11$. Assim, os Jogadores 1 e 2 têm mesma quantidade de estratégias disponíveis para o jogo.

Exemplo 2: Jogo da velha 3×3

O jogo da velha tradicional (3×3) com $J = \{1, 2\}$, exemplifica uma situação em que a quantidade de estratégias dos jogadores não é igual. O primeiro jogador, que vamos tomar como sendo o Jogador 1, tem 9 opções, ou seja, $|S_1| = m_1 = 9$. O Jogador 2, que efetua sua jogada na sequência, tem 8 opções, fazendo com que $|S_2| = m_2 = 8$. Consequentemente, $m_1 \neq m_2$.

A Definição 2, apresenta o conjunto E cujos elementos compreendem todas as combinações de estratégias possíveis para um jogo com n jogadores.

Definição 2: Espaço de estratégias

Denominado de **espaço de estratégias**, o conjunto E é definido como:

$$E = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n. \quad (1)$$

onde $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{im_i}\}$ são as estratégias disponíveis para o Jogador i .

Cada elemento de E será chamado de **perfil de estratégias** e representado pela n -úpla $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, em que o elemento s_i ($1 \leq i \leq n$) que corresponde a uma entrada representa uma estratégia escolhida pelo Jogador i dentre as m_i disponíveis². O Exemplo 3, ilustra um jogo em que observamos o espaço de estratégias e o perfil de estratégias correspondente.

²Neste ponto, não é necessário especificar qual estratégia s_i o Jogador i escolheu entre as m_i .

Exemplo 3: Espaço de estratégias e perfil de estratégias

Considere os Jogadores 1 e 2 com as seguintes estratégias: $S_1 = \{A, B\}$ e $S_2 = \{X, Y\}$. O espaço de estratégias correspondente ao jogo é: $E = \prod_{i=1}^2 S_i = S_1 \times S_2 = \{(A, X), (A, Y), (B, X), (B, Y)\}$. Os elementos $(A, X), (A, Y), (B, X), (B, Y)$ são os perfis de estratégias que juntos formam o conjunto E .

Tomando como domínio o conjunto E , podemos definir a função u_i que chamamos de **função utilidade**. A Definição 3, formaliza esse objeto matemático.

Definição 3: Função utilidade

Para cada jogador $i \in J$, podemos definir a **função utilidade**:

$$\begin{aligned} u_i : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto u_i(s) \end{aligned} \quad (2)$$

A $u_i(s)$ associa um perfil de estratégias $s \in E$ a um número real $u_i(s)$.

A função utilidade modela matematicamente os ganhos e perdas dos jogadores em um jogo. Dado o perfil de estratégias s , chamamos o número real $u_i(s)$ de recompensa³ do Jogador i associada ao perfil de estratégias s . A função utilidade dos jogadores de um jogo, pode ser representada de duas maneiras, são elas: matriz de recompensas e diagrama de árvore.

No que se refere à matriz de recompensas, ela é um recurso que permite organizar, de forma sistemática, todas as recompensas atribuídas aos jogadores, facilitando a análise das interações. A Definição 4, trata da matriz de recompensas.

³Na literatura consultada, a exemplo de [Figueiredo \(1994\)](#), [Sartini et al. \(2004b\)](#) e [Hotz \(2006\)](#), o termo utilizado para designar esse objeto é *payoff*. Reconhecendo as possíveis traduções para o termo, optamos por adotar, convenientemente, a palavra “recompensa” como tradução mais conveniente.

Definição 4: Matriz de recompensas para dois jogadores

Para os Jogadores 1 e 2, a **matriz de recompensas** é representada por $P = [p_{ij}]_{m_i \times m_j}$, onde $i \in \{1, 2, \dots, m_i\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m_j\}$. Cada elemento da matriz P é definido como $p_{ij} = (u_1(s), u_2(s))$ com $s = (s_{1i}, s_{2j})$ sendo o perfil de estratégias.

Apesar de ser chamado de “matriz” de recompensas, gostaríamos de esclarecer que essa designação não implica que o objeto em questão seja, rigorosamente, apresentado como uma matriz propriamente dita. Nesta dissertação, a matriz de recompensas se estrutura por meio de quadro que organiza informações de maneira a associar, para cada combinação de estratégias dos jogadores, os respectivos valores de recompensas.

A formulação desse recurso permite que as recompensas dos jogadores sejam visualizadas e comparadas de forma rápida para todas as estratégias possíveis em um jogo, facilitando a visualização da melhor estratégia para a situação analisada. O Exemplo 4 apresenta um jogo e a matriz de recompensas correspondente.

Exemplo 4: Jogo das moedas

Os Jogadores 1 e 2 participam de um jogo envolvendo moedas. Cada jogador deve escolher uma das duas opções disponíveis (“**faces iguais**” ou “**faces diferentes**”), sendo obrigatoriamente escolhas diferentes. Em seguida, ambos lançam suas moedas e observam as faces voltadas para cima. O resultado do jogo é expresso por +1 para o vencedor e -1 para o perdedor.

- se as moedas exibirem a mesma face, o jogador que escolheu “**faces iguais**” vence e recebe um ganho de +1, enquanto o outro jogador recebe -1.
- se as moedas exibirem faces diferentes, o jogador que escolheu “**faces diferentes**” vence e recebe um ganho de +1, enquanto o outro jogador recebe -1.

Com relação ao “Jogo das moedas” ilustrado pelo Exemplo 4, podemos fazer os seguintes apontamentos no que diz respeito aos elementos que constituem a formalização matemática desse jogo, a saber:

- **Jogadores:** $J = \{1, 2\}$.

- **Espaço de Estratégias:** cada jogador pode escolher entre: FI (Faces Iguais) e FD (Faces Diferentes). Com isso: $S_1 = S_2 = \{FI, FD\}$. Como as escolhas devem ser diferentes, o espaço de estratégias para o jogo em questão pode ser representado como: $E = \{(FI, FD), (FD, FI)\}$.
- **Cálculo das recompensas a partir das funções utilidades:** o Quadro 2 que segue, ilustra os cálculos das recompensas conforme os perfis de estratégia observados para o jogo e indicados anteriormente.

Quadro 2 – Funções de utilidade dos jogadores no Jogo das Moedas

Função utilidade do Jogador 1	Função utilidade do Jogador 2
$u_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ $s \mapsto u_1(s)$	$u_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ $s \mapsto u_2(s)$
$u_1(FI, FD) = -1$ $u_1(FD, FI) = +1$	$u_2(FI, FD) = +1$ $u_2(FD, FI) = -1$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Diante disso, o Quadro 3⁴ representa a matriz de recompensas para esse jogo e organiza as recompensas de forma sistematizada, indicando, para o perfil de estratégias indicado, a recompensa do jogador.

Quadro 3 – Matriz de recompensas do “Jogo das moedas”.

		Jogador 2	
		Faces Iguais	Faces Diferentes
Jogador 1	Faces Iguais	N/D	$(-1, 1)$
	Faces Diferentes	$(1, -1)$	N/D

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Outra alternativa para representar um jogo é o diagrama de árvore. Frequentemente é utilizado para jogos que se desenvolvem por etapas (sequencial). Cada nó da árvore simboliza uma escolha, enquanto as ramificações indicam as estratégias subsequentes. Nos finais dos ramos, após as decisões do jogo já terem sido tomadas, apresentam-se as recompensas dos jogadores em forma de pares ordenados.

⁴**FI vs. FD** → Se o Jogador 1 escolhe FI e o Jogador 2 escolhe FD , o Jogador 2 vence se as moedas forem diferentes $+1$ para ele, -1 para o outro.

FD vs. FI → Se o Jogador 1 escolhe FD e o Jogador 2 escolhe FI , o Jogador 1 vence se as moedas forem diferentes $+1$ para ele, -1 para o outro.

As células “**N/A**” representam situações impossíveis, pois os jogadores não podem escolher a mesma estratégia.

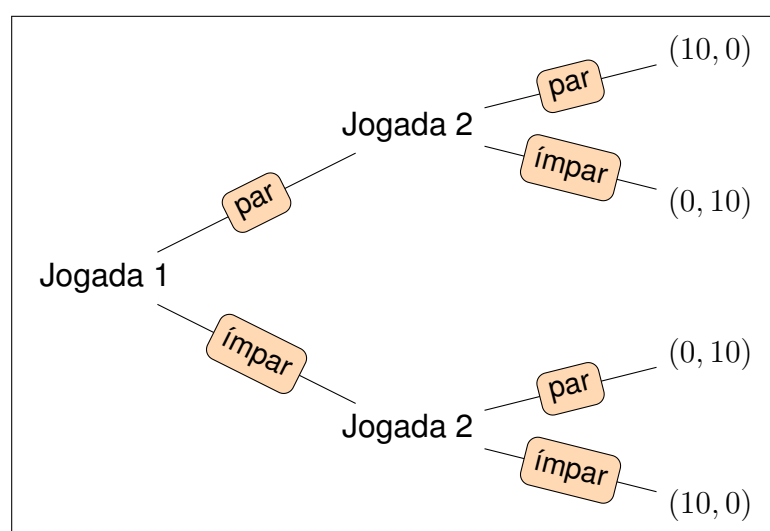
Exemplo 5: Jogo de par ou ímpar

A banca dispõe de 10 reais que transitará entre os jogadores. O Jogador 1 fica com “par”, restando para o Jogador 2 a opção “ímpar”. Cada um dos jogadores escolhe um número inteiro de 0 a 10, revelando sua escolha simultaneamente. A soma dos números escolhidos é calculada e sua paridade é observada. As jogadas ocorrerão consecutivamente e o prêmio transitará entre os jogadores de cada jogada.

- se a paridade da soma for par, o Jogador 1 ganha 10 reais e o Jogador 2 não ganha nada.
- se a paridade da soma for ímpar, o Jogador 2 ganha 10 reais e o Jogador 1 não ganha nada.

Na Figura 2, o diagrama de árvore que representa as recompensas de cada jogador do Exemplo 5 é apresentado. Nos pares ordenados indicados, a primeira coordenada corresponde a recompensa do Jogador 1 e a segunda coordenada a recompensa do Jogador 2 conforme o perfil de estratégias observado ao final das jogadas.

Figura 2 – Árvore de recompensas do jogo par ou ímpar



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Até o momento, apresentamos alguns conceitos para o estudo da TJ visando construir a fundamentação teórica necessária definir o objeto matemático central da nossa dissertação: o jogo. Inicialmente, introduzimos o conceito de estratégia (Definição 1) que representa um conjunto de ações disponíveis para um dado jogador. Em

seguida, definimos o espaço de estratégias (Definição 2) que ilustra o conjunto de todas as combinações possíveis de estratégias e, por fim, definimos a função utilidade (Definição 3), que associa para um dado jogador, um número real (recompensa) com base em um perfil de estratégias formulado. Esses três objetos, ora tratados, fornecem a base necessária para introduzir a definição formal de jogo, a partir de seus elementos constitutivos.

Definição 5: Jogo

Um **jogo** é uma terna (J, E, U) , na qual:

- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito de jogadores, com $n \geq 2$.
- $E = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ é o espaço de estratégias do jogo.
- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é o conjunto de funções utilidades.

Os Exemplos 6 e 7 ilustram dois jogos clássicos estudados no contexto da TJ, são eles: “O dilema dos prisioneiros” e “Pedra, papel e tesoura”. Para cada um desses exemplos, ilustramos o processo de modelização matemática do jogo, aplicando a cada um, a definição de jogo (Definição 5) apresentada no contexto deste estudo.

Exemplo 6: Jogo “O dilema dos prisioneiros”

Dois indivíduos que chamaremos de Jogador 1 e Jogador 2 são capturados sob acusação de um mesmo crime. Eles estão presos em celas separadas e não têm nenhuma comunicação entre eles. O delegado de plantão faz a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Serão aplicadas as seguintes sentenças:

- se nenhum confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano;
- se ambos confessarem, os dois terão uma pena de 5 anos, cada;
- se um confessar e o outro negar, então o que confessou será liberto e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

A partir da Definição 5, podemos entender o jogo “O dilema dos prisioneiros” da seguinte forma:

- $J = \{1, 2\}$ um conjunto finito de jogadores, com os Jogadores 1 e 2;
- As estratégias do Jogador 1 e Jogador 2 são: $S_1 = S_2 = \{\text{confessar, negar}\}$. O espaço de estratégias é:

$$\begin{aligned} E &= \prod_{i=1}^2 S_i = S_1 \times S_2 \\ &= \{(\text{confessar, confessar}), (\text{confessar, negar}), (\text{negar, confessar}), (\text{negar, negar})\}. \end{aligned}$$

A partir disso, podemos destacar as funções utilidade dos Jogadores 1 e 2. O Quadro 4 ilustra a função utilidade de cada um dos jogadores, associando os perfis de estratégias a recompensa para cada jogador.

Quadro 4 – Funções de utilidade dos jogadores em um jogo de prisão

Função utilidade do Jogador 1	Função utilidade do Jogador 2
$u_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ $s \mapsto u_1(s)$	$u_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ $s \mapsto u_2(s)$
$u_1(\text{confessar, confessar}) = -5$ $u_1(\text{confessar, negar}) = 0$ $u_1(\text{negar, confessar}) = -10$ $u_1(\text{negar, negar}) = -1$	$u_2(\text{confessar, confessar}) = -5$ $u_2(\text{confessar, negar}) = -10$ $u_2(\text{negar, confessar}) = 0$ $u_2(\text{negar, negar}) = -1$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A partir das recompensas indicadas no Quadro 4, podemos construir a matriz de recompensa do jogo. Representada aqui pelo Quadro 5, ela exibe os pares ordenados constituídos pelas recompensas diante da estratégia observada.

Quadro 5 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros”.

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Quando analisamos o jogo na perspectiva do Jogador 1, duas situações podem acontecer em relação ao Jogador 2: confessar ou não confessar. Se o Jogador 2 não confessar, o Jogador 1 fica livre caso confesse. Por outro lado, se o Jogador 2 confessar, então é melhor que o Jogador 1 também confesse, recebendo 5 anos de condenação. Em todo caso, o melhor que pode ser feito pelo Jogador 1 é confessar,

tendo em vista que nessa situação as penalidades que podem ser empregadas são as melhores possíveis.

O Exemplo 7 aborda o jogo simultâneo “Jokempô”, conhecido no Brasil como “Pedra, papel e tesoura”. Neste exemplo, apresentamos e analisamos formalmente esse jogo, considerando a Definição 5 introduzida nesta subseção.

Exemplo 7: O jogo “Pedra, papel e tesoura” com dois jogadores

Cada um dos Jogadores 1 e 2 escolhe um entre os três símbolos: pedra, papel ou tesoura. No momento oportuno, revelam simultaneamente sua escolha. Feito isso, as regras são as seguintes:

- a pedra perde para o papel (que a embrulha);
- o papel perde para a tesoura (que o corta);
- a tesoura perde para a pedra (que a quebra).

Para formalizar o jogo, vamos atribuir os seguintes valores: vitória com 1 , derrota com -1 e empate com 0 .

Assim, ao considerarmos o Exemplo 7, temos um jogo que envolve os Jogadores 1 e 2 com três estratégias possíveis para cada um deles: pedra, papel ou tesoura. A partir da Definição 5, vamos modelar esse jogo. Observe os seguintes elementos:

- Conjunto finito de jogadores $J = \{1, 2\}$;
- As estratégias são $S_1 = S_2 = \{\text{pedra, papel, tesoura}\}$. O espaço de estratégias associado é:

$$\begin{aligned} E &= \prod_{i=1}^2 S_i = S_1 \times S_2 \\ &= \{(\text{pedra, pedra}), (\text{pedra, papel}), (\text{pedra, tesoura}), \\ &\quad (\text{papel, pedra}), (\text{papel, papel}), (\text{papel, tesoura}), \\ &\quad (\text{tesoura, pedra}), (\text{tesoura, papel}), (\text{tesoura, tesoura})\}. \end{aligned}$$

A partir disso, podemos destacar a função utilidade dos Jogadores 1 e 2 . Representadas por $u_1, u_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ e com conjunto imagem $\{-1, 0, 1\}$, o Quadro 6 apre-

senta, para os Jogadores 1 e 2, as possíveis recompensas para os perfis de estratégia.

Quadro 6 – Recompensas para os Jogadores 1 e 2 no jogo "Pedra, papel e tesoura".

Jogador	Recompensas associadas aos perfis de estratégias.
1	$u_1(\text{pedra, pedra}) = u_1(\text{papel, papel}) = u_1(\text{tesoura, tesoura}) = 0.$ $u_1(\text{pedra, tesoura}) = u_1(\text{papel, pedra}) = u_1(\text{tesoura, papel}) = 1.$ $u_1(\text{pedra, papel}) = u_1(\text{papel, tesoura}) = u_1(\text{tesoura, pedra}) = -1.$
2	$u_2(\text{pedra, pedra}) = u_2(\text{papel, papel}) = u_2(\text{tesoura, tesoura}) = 0,$ $u_2(\text{pedra, tesoura}) = u_2(\text{papel, pedra}) = u_2(\text{tesoura, papel}) = -1,$ $u_2(\text{pedra, papel}) = u_2(\text{papel, tesoura}) = u_2(\text{tesoura, pedra}) = 1.$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

As recompensas obtidas pelas funções utilidades u_1 e u_2 que foram apresentadas no Quadro 6, estão sistematizadas na matriz de recompensas ilustrada por meio do Quadro 7.

Quadro 7 – Matriz de recompensas do jogo "Pedra, papel e tesoura".

		Jogador 1		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 2	Pedra	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	Papel	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	Tesoura	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Diante disso, o jogo "Pedra, papel e tesoura" apresentado por meio do Exemplo 7, cuja matriz de recompensas está no Quadro 7, trata de um conflito no qual as recompensas (0, 0) ocorrem quando ambos escolhem a mesma opção, indicando a ausência de vantagem ou prejuízo para os jogadores nessa situação. Por outro lado, quando um jogador vence, suas recompensas são positivas (+1) e as do oponente são negativas (-1). Conforme foi indicado, por exemplo, se o Jogador 1 escolhe pedra e o Jogador 2 escolhe tesoura, o Jogador 1 vence e o par ordenado que representa esse resultado é (1, -1).

Na Subseção 2.2.2 que segue, exploramos a solução de um jogo de estratégias puras. Na TJ, existem diferentes conceitos de soluções para um jogo, analisamos dois desses conceitos nesta oportunidade: estratégia estritamente dominante e equilíbrio de Nash.

2.2.2 Soluções de um jogo com estratégia pura

Uma estratégia é considerada dominante para um jogador se ela sempre tem como retorno um maior ganho, independentemente das escolhas dos outros jogadores. A dominância é apontada a partir da avaliação das estratégias disponíveis para um determinado jogador. Neste estudo, chamamos de **estratégia dominante** aquela que, para qualquer cenário possível, sempre gera um retorno superior em relação às outras estratégias disponíveis. Construímos, a partir de agora, a teoria necessária para definição desse conceito matemático.

Vamos definir s_{-i} como sendo um perfil de estratégias de todos os $n - 1$ jogadores, com exceção do Jogador i . Com o intuito de facilitar a notação, vamos denotar s_k , com $1 \leq k \leq n$, como uma estratégia qualquer do Jogador k . Dito isso, usamos a seguinte notação:

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j. \quad (3)$$

Com isso, um perfil de estratégias $s \in E$ pode ser convenientemente denotado como:

$$s = (s_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n). \quad (4)$$

Assim, o s indicado em (4) representa um perfil de estratégias na forma de uma $(n\text{-upla})$ para um jogo com n jogadores. Assim, por definição, s_i denota que a estratégia do Jogador i pode variar à medida que as estratégias dos outros $n - 1$ jogadores, representadas por s_{-i} , se mantêm fixas.

Diante disso, na Definição 6, formalizamos matematicamente o conceito de estratégia estritamente dominante⁵.

Definição 6: Estratégia estritamente dominante

Uma estratégia $s'_i \in S_i$ referente ao Jogador $i \in J$ é uma **estratégia estritamente dominante** sobre outra estratégia $s_i \in S_i$ se, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, temos:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}). \quad (5)$$

onde u_i é a função de utilidade do Jogador i .

⁵A palavra “estritamente” é utilizada, pois a estratégia estritamente dominante é a melhor em todos os casos, sem empates ou resultados iguais. Ou seja, a utilidade da estratégia dominante retorna uma recompensa maior do que qualquer outra estratégia que possa ser escolhida

Assim, a desigualdade estrita (5) toma um conjunto de estratégias fixas s_{-i} correspondente aos $n - 1$ jogadores e compara com todas as estratégias do Jogador i , mostrando que s'_i é uma estratégia que maximiza estritamente a recompensa u_i .

O Exemplo 8 ilustra a análise de um jogo para a determinação da estratégia estritamente dominante apresentada pela Definição 6. Nele, ilustramos como a dominância, a partir da análise dos perfis de estratégia, pode identificar qual (ou quais) estratégias proporcionam vantagens a um jogador, independentemente das estratégias escolhidas pelos outros jogadores.

Exemplo 8: Marketing empresas Alfa e Beta

Duas empresas rivais, Alfa e Beta, estão lançando novos produtos no mercado. Por esse motivo, precisam decidir entre três estratégias de marketing: leve (L), moderada (M) ou hostil (H). A matriz de recompensas^a desse jogo está representada pelo Quadro 8.

Quadro 8 – Matriz de recompensas inicial do jogo “Marketing Empresas Alfa e Beta”.

		Empresa Beta		
		L	M	H
Empresa Alfa	L	(5, 5)	(2, 6)	(1, 4)
	M	(6, 4)	(4, 5)	(2, 3)
	H	(7, 3)	(5, 2)	(3, 1)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

^aCada entrada da matriz representa o vetor recompensa $(u_{\text{Alfa}}(s), u_{\text{Beta}}(s))$ para o perfil de estratégias s .

Faremos a análise da dominância estritamente iterada do jogo apresentado no Exemplo 8. Inicialmente, identificamos quais são as estratégias estritamente dominadas utilizando a matriz de recompensas. Quando comparamos as estratégias **L**, **M**, **H** adotadas pela empresa Alfa, percebemos que a estratégia **L** e **M** são estritamente dominadas por **H**, pois as recompensas para **H** são estritamente maiores que as de **L** e **M** em todas as situações. A partir disso, podemos eliminar as linhas correspondentes às estratégias **L** e **M** da matriz original, gerando uma nova matriz de recompensas (Quadro 9).

Quadro 9 – Matriz de recompensas do jogo após eliminar a linha **L** e **M**.

		Empresa Beta		
		L	M	H
Empresa Alfa	H	(7, 3)	(5, 2)	(3, 1)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Comparando as estratégias **L**, **M**, **H** para a empresa Beta, observamos que as estratégias **M** e **H** são estritamente dominadas por **L**. Como resultado, podemos eliminar as colunas **M** e **H**, gerando uma nova matriz de recompensas (Quadro 10).

Quadro 10 – Matriz de recompensas do jogo após eliminar as colunas **M** e **H**.

		Empresa Beta	
		L	
Empresa Alfa	H	(7, 3)	

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Assim, podemos concluir que a solução do jogo é o perfil de estratégias (H, L) , com o respectivo pagamento $(7, 3)$. Ou seja, a estratégia dominante para a Empresa Alfa é **H**, enquanto a Empresa Beta é **L**.

Outro conceito a ser discutido nesta subseção é o equilíbrio de Nash, condição de solução para um jogo na TJ. Dizemos que ocorre um equilíbrio de Nash em um jogo quando o jogador não tem incentivo para mudar sua estratégia, pois qualquer mudança resultaria em uma situação com recompensa menos favorável ou, no máximo, equivalente a que já possui. Na TJ o equilíbrio de Nash é definido conforme a Definição 7.

Definição 7: Equilíbrio de Nash

Dizemos que um perfil de estratégias $s^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \in E$ é um **equilíbrio de Nash** se, para todo i , vale: $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

À medida que temos a validade da desigualdade $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$, garantimos que, ao usar a estratégia s_i^* , a recompensa do Jogador i é sempre maior ou igual do que usar qualquer outra estratégia alternativa s_i . Isso implica que o jogador i não tem motivos para mudar de estratégia unilateralmente.

Os Exemplos 9 e 10, ilustram, respectivamente, um jogo que possui equilíbrio de Nash e outro que não apresenta tal equilíbrio⁶.

⁶É importante ressaltar que existem jogos que apresentam mais de um equilíbrio de Nash. Para não

Exemplo 9: Equilíbrio de Nash no jogo “O dilema dos prisioneiros”

A matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros” está ilustrada aqui pelo Quadro 11.

Quadro 11 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros” com perfil que representa o equilíbrio de Nash em vermelho.

		Jogador 1	
		Confessar	Negar
Jogador 2	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Observando a matriz de recompensas, podemos apontar que o perfil de estratégias $s^* = (\text{confessar}, \text{confessar})$ (destacado de vermelho no Quadro 11) é um equilíbrio de Nash. Neste caso, se o Jogador 1 mantiver sua estratégia enquanto o Jogador 2 mudar, o Jogador 2 sofrerá um prejuízo. Da mesma forma, se o Jogador 2 mantiver sua estratégia e o Jogador 1 decidir mudar, o Jogador 1 também sofrerá um prejuízo. Assim, nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia, ocasionando no equilíbrio de Nash.

Exemplo 10: Equilíbrio de Nash no jogo “Pedra, papel e tesoura”

No Quadro 12, apresentamos a matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura” analisado anteriormente.

Quadro 12 – Matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura”

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	Papel	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	Tesoura	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A partir da matriz de recompensas apresentada no Quadro 12, podemos observar que o jogo “Pedra, papel e tesoura” não tem equilíbrio de Nash em estratégias puras. Quando observamos os perfis de estratégias, existe sempre um incentivo para, pelo menos um dos jogadores, mudar a sua estratégia. Observe que:

ficar cansativo para o leitor, optamos por apresentar esse exemplo na Subseção 2.2.4, oportunidade em que falamos do equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

- Se o Jogador 1 escolher “pedra” e o Jogador 2 escolher “tesoura”, o resultado é $(1, -1)$. O Jogador 2 vai ter o incentivo para mudar para a estratégia “papel”, alcançando $(-1, 1)$, o que é mais favorável para si.
- Se o Jogador 1 escolher “papel” e o Jogador 2 escolher “pedra”, o resultado é $(1, -1)$. Incentivando o Jogador 2 a mudar para “tesoura”.

Como essa característica pode ser sempre observada para qualquer perfil de estratégias, sempre vai existir uma melhor opção para, pelo menos, um dos jogadores, assegurando que mudar unilateralmente não traz uma melhor recompensa. Disso, justificamos que o jogo não tem equilíbrio de Nash.

Por fim, queremos destacar que embora as definições de dominância e equilíbrio de Nash sejam distintas, os enunciados dessas definições são, em essência, bastante semelhantes. Por esse motivo, elaboramos o Quadro 13 para esclarecer as diferenças entre o equilíbrio de Nash e a estratégia estritamente dominante. Procuramos caracterizar cada uma dessas soluções respondendo o que é analisado, qual a condição determinada pela definição e indicando se o que é observado depende ou não somente do Jogador i .

Quadro 13 – Comparação entre Equilíbrio de Nash e Estratégia Estritamente Dominante no contexto das estratégias puras.

ASPECTO	EQUILÍBRIO DE NASH	ESTRATÉGIA ESTRITAMENTE DOMINANTE
O que é analisado?	Perfil de estratégias (s^*)	Estratégia individual (s'_i)
Qual condição da definição?	Nenhum jogador melhora unilateralmente no perfil s^* .	A estratégia s'_i é melhor do que qualquer outra s_i .
Depende só do Jogador i ?	Sim, u_i considera s_{-i}^* fixo.	Não, $u_i(s'_i, s_{-i})$ é melhor independentemente das escolhas dos outros.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Nas Subseções 2.2.3 e 2.2.4, estudaremos os jogos de estratégia mistas que permitem os jogadores enfrentarem a incerteza da escolha oponente por meio da análise probabilística dos perfis de estratégia.

2.2.3 Jogos de estratégia mista

Como vimos no Exemplo 10, nem todo jogo possui um equilíbrio de Nash em estratégias puras, pois em alguns casos, os jogos apresentam situações em que há sempre incentivo para mudar de estratégia, impossibilitando a estabilidade da estratégia adotada pelo jogador. O Exemplo 11, que trata do jogo “Moedas emparelhadas” ilustra, semelhantemente ao Exemplo 10, uma situação em que não podemos observar um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Exemplo 11: O jogo “Moedas emparelhadas”.

Cada um dos Jogadores 1 e 2 possui uma moeda. Eles lançam simultaneamente suas moedas sobre a mesa e observam as faces voltadas para cima.

- se ambas as moedas apresentarem a mesma face (cara ou coroa) voltada para cima, o Jogador 1 ganha ambas as moedas (representaremos por $+1$) e o Jogador 2 perde (representaremos por -1).
- caso contrário, quando as faces observadas forem diferentes, o Jogador 2 ganha ambas as moedas (representado por $+1$) e o Jogador 1 perde (representado por -1).

A matriz de recompensas do Exemplo 11 pode ser consultada no Quadro 14.

Quadro 14 – Matriz de recompensas do jogo “Moedas emparelhadas”

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
	Coroa	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Observe que a situação apresentada por meio do exemplo, não permite a existência do equilíbrio de Nash dado que, quando a estratégia observada for:

- **(cara, cara):** se o Jogador 2 mudar para coroa, ele melhora sua recompensa de -1 para $+1$. Assim, (cara, cara) não é um equilíbrio de Nash.
- **(coroa, coroa):** se o Jogador 2 mudar para cara, ele melhora sua recompensa de -1 para $+1$. Assim, (coroa, coroa) não é um equilíbrio de Nash.

- **(cara, coroa)**: o Jogador 1 mudaria para coroa para melhorar sua recompensa de -1 para $+1$. Assim, (cara, coroa) não é um equilíbrio de Nash.
- **(coroa, cara)**: o Jogador 1 mudaria para cara para melhorar sua recompensa de -1 para $+1$. Assim, (coroa, cara) não é um equilíbrio de Nash.

Ao observamos o jogo “Moedas emparelhadas” (Exemplo 11) em estratégias puras, os perfis de estratégia apontados um a um, revelam que, pelo menos um dos jogadores, sempre tem o incentivo para mudar de estratégia, o que indica que o jogo não apresenta equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Diante desse empasse, para contornar essa situação, podemos observar o jogo do ponto de vista probabilístico. Ao invés de olhar para as estratégias puras, consideraremos que as recompensas estão associadas à probabilidade de acontecimento de cada estratégia “cara” ou “coroa” no lançamento aleatório de uma moeda.

A abordagem probabilística, que pode ser explorada no Exemplo 11, ilustra uma possibilidade de solução para jogos que, quando observados no contexto das estratégias puras, não têm solução. Apresentamos a seguir os conceitos referentes aos jogos de estratégias mistas. Muitas das ideias que serão apresentadas aqui representam uma reorganização das ideias discutidas sobre estratégias puras nas subseções anteriores. A Definição 8, caracteriza uma estratégia mista.

Definição 8: Estratégias mistas

Uma **estratégia mista** $\mathbf{p}_i$ para o Jogador $i \in J$ é um vetor de probabilidades sobre o conjunto S_i que contém m_i estratégias puras. O elemento $\mathbf{p}_i$ pertence ao conjunto Δ_i , definido como:

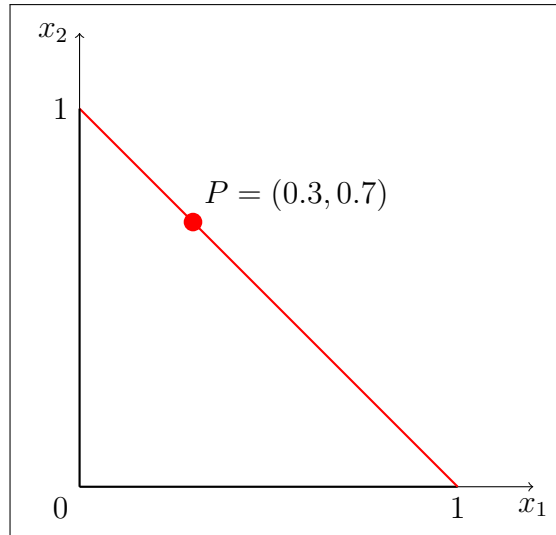
$$\Delta_i = \left\{ (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid p_{i1} \geq 0, \dots, p_{im_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1 \right\}. \quad (6)$$

Esse vetor de probabilidades é chamado de distribuição de probabilidades.

O conjunto Δ_i representa todas as estratégias mistas possíveis para o Jogador i que tem m_i estratégias disponíveis. Os elementos deste conjunto são m_i -uplas da forma $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$ que devem satisfazer as condições explicitadas na Definição 8. Na Figura 3, ilustramos a representação cartesiana de Δ_i considerando $m_i = 2$.

Dessa forma, $\Delta_i = \left\{ (p_{i1}, p_{i2}) \in \mathbb{R}^2 \mid p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1 \right\}$.

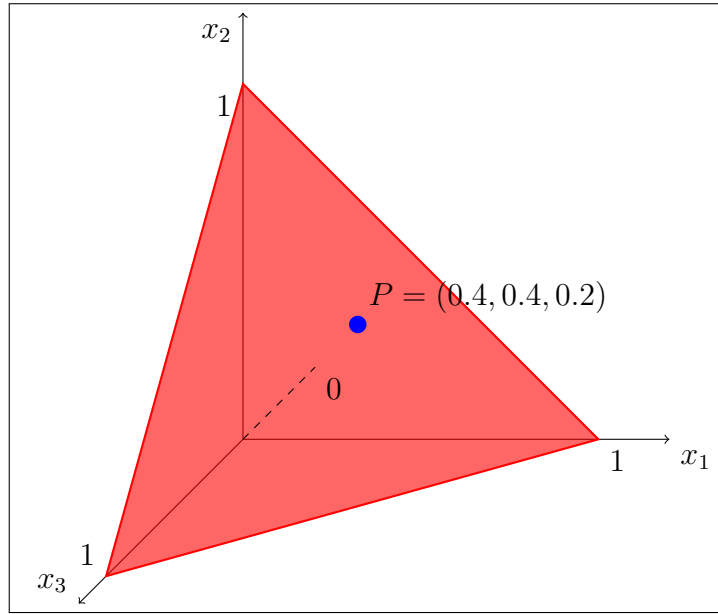
Figura 3 – Δ_i considerando $m_i = 2$ representada no espaço $\mathbb{R}^2$ e definido por: $p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0$ e $p_{i1} + p_{i2} = 1$.



Fonte: adaptado de [Sartini et al. \(2004a\)](#).

Assim, todas as possibilidades para p_{i1} e p_{i2} são devidamente contempladas no segmento de reta vermelho exibida no gráfico da Figura 3. Os pontos que estão sobre esse segmento têm abscissa e ordenada maiores que zero e a soma correspondente sempre a 1, contemplando os requisitos para ser uma representação da Definição 8. Essa representação gráfica facilita a visualização das possíveis escolhas estratégicas do jogador i no espaço de probabilidades considerado. Por esse motivo, na Figura 4 faremos a ilustração tridimensional de Δ_i com $m_i = 3$.

Figura 4 – Δ_i considerando $m_i = 3$ representada no espaço $\mathbb{R}^3$ e definido por:
 $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} \geq 0$ e $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = 1$



Fonte: adaptado de [Sartini et al. \(2004a\)](#).

De maneira análoga, podemos apontar que cada ponto que pertence à região plana destacada em vermelho no gráfico representado pela Figura 4, satisfaz aos requisitos da Definição 8, constituindo-se como uma possível distribuição de probabilidades para o perfil de estratégias puras do Jogador i com $m_i = 3$ estratégias.

De posse da Definição 8, semelhantemente ao que foi feito no estudo das estratégias puras, vamos definir o espaço de estratégias mistas de um jogo com n jogadores. A Definição 9 apresenta a formalização desse conceito.

Definição 9: Espaço de estratégias mistas

Denotado por Δ , o **espaço de estratégias mistas** é o conjunto:

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_n$$

onde Δ_i representa o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre as estratégias do Jogador i .

Cada um dos elementos $\mathbf{P} \in \Delta$ é chamado de **perfil de estratégia mista**, sendo representado da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}; p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}; \dots; p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n})$$

onde cada p_{ij} representa a probabilidade do Jogador i escolher a j -ésima estratégia,

com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$. O espaço de estratégias mistas, denotado por Δ é um conjunto muito importante e basilar para definir a função utilidade de um jogo de estratégias mistas. A Definição 10 formaliza a função utilidade em estratégias mistas.

Definição 10: Função utilidade em jogos de estratégias mistas

Denotada por $r_i(\mathbf{P}) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, a **função utilidade** do Jogador i para o perfil de estratégias mistas $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ é dada pela seguinte expressão:

$$r_i(\mathbf{P}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^n p_{kj_k} \right) u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}) \quad (7)$$

Com relação à notação usada: a função $r_i(\mathbf{P})$ representa a recompensa esperada para o Jogador i , considerando que os jogadores escolhem estratégias de forma probabilística (estratégias mistas). Já $u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$ representa a recompensa do Jogador i quando as estratégias puras $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}$ são escolhidas.

Assim, $r_i(\mathbf{P})$ será chamada de recompensa do Jogador i associada ao perfil de estratégias mistas $\mathbf{P}$. Na expressão 7, o elemento p_{kj_k} indica a probabilidade associada à estratégia s_{kj_k} do Jogador k , dado que ele escolhe sua j_k -ésima estratégia pura. O elemento $u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$ representa a utilidade do Jogador i resultante da combinação das estratégias $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}$.

Os elementos teóricos que analisamos no contexto dos jogos de estratégia mistas (conjunto finito de jogadores (J); espaço de estratégias mistas (Δ); e função utilidade em jogos de estratégia mista $r_i(\mathbf{P})$), nos permitem formalizar matematicamente um jogo de estratégia mista.

Definição 11: Função utilidade em estratégias mistas

Um **jogo** em estratégias mistas é uma terna (J, Δ, R) , na qual:

- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de jogadores ($n \geq 2$);
- $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_n$ é o espaço de estratégias mistas;
- $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ é o conjunto de funções utilidade.

Apresentamos o Exemplo 12 que ilustra a formalização do jogo “Pedra, papel e tesoura” no contexto das estratégias mistas, conforme apresentado na Definição 11.

Exemplo 12: O jogo “Pedra, papel e tesoura”

Quadro 15 – Matriz de recompensas do jogo “Pedra, papel e tesoura”

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	Papel	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	Tesoura	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Vamos adotar para o Jogador 2, o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}_2 = (p_{21}, p_{22}, p_{23}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ que representa uma distribuição de probabilidades⁷. Assim, estamos considerando que:

- $p_{21} = \frac{1}{2}$: probabilidade de o Jogador 2 escolher pedra;
- $p_{22} = \frac{1}{2}$: probabilidade de o Jogador 2 escolher papel;
- $p_{23} = 0$: probabilidade de o Jogador 2 escolher tesoura.

Diante disso, a utilidade esperada para Jogador 1, referente ao perfil de estratégias mista $\mathbf{p}_2$, conforme as estratégias pedra, papel e tesoura, será denotada, respectivamente, por: $r_1(s_{11}, \mathbf{p}_2)$, $r_1(s_{12}, \mathbf{p}_2)$ e $r_1(s_{13}, \mathbf{p}_2)$.

- Cálculo de $r_1(s_{11}, \mathbf{p}_2)$:

$$\begin{aligned}
 r_1(s_{11}, \mathbf{p}_2) &= \sum_{j_2=1}^3 p_{2j_2} \cdot u_1(s_{11}, s_{2j_2}) \\
 &= p_{21} \cdot u_1(s_{11}, s_{21}) + p_{22} \cdot u_1(s_{11}, s_{22}) + p_{23} \cdot u_1(s_{11}, s_{23}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\
 &= 0 - \frac{1}{2} + 0 \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

⁷A escolha da estratégia foi arbitrária e respeitou a condição (6) presente na Definição 8. A escolha de $\mathbf{p}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ se deu com vistas a simplificação dos cálculos para ilustrar o conceito de utilidade esperada com probabilidades desiguais.

- Cálculo de $r_1(s_{12}, \mathbf{p}_2)$:

$$\begin{aligned}
 r_1(s_{12}, \mathbf{p}_2) &= \sum_{j_2=1}^3 p_{2j_2} \cdot u_1(s_{12}, s_{2j_2}) \\
 &= p_{21} \cdot u_1(s_{12}, s_{21}) + p_{22} \cdot u_1(s_{12}, s_{22}) + p_{23} \cdot u_1(s_{12}, s_{23}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\
 &= \frac{1}{2} + 0 + 0 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

- Cálculo de $r_1(s_{13}, \mathbf{p}_2)$:

$$\begin{aligned}
 r_1(s_{13}, \mathbf{p}_2) &= \sum_{j_2=1}^3 p_{2j_2} \cdot u_1(s_{13}, s_{2j_2}) \\
 &= p_{21} \cdot u_1(s_{13}, s_{21}) + p_{22} \cdot u_1(s_{13}, s_{22}) + p_{23} \cdot u_1(s_{13}, s_{23}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Os valores esperados para o Jogador 1, considerando a estratégia mista $\mathbf{p}_2$ do Jogador 2, são:

$$r_1(s_{11}, \mathbf{p}_2) = -\frac{1}{2}, \quad r_1(s_{12}, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2}, \quad r_1(s_{13}, \mathbf{p}_2) = 0.$$

Disso, a melhor estratégia que o Jogador 1 pode adotar, diante da estratégia mista do Jogador 2, é jogar pedra - representada em nossa notação como s_{12} - tendo em vista que essa escolha maximiza sua recompensa.

Na Subseção 2.2.4, exploramos um conceito fundamental para a análise da solução de jogos em estratégias mistas, o equilíbrio de Nash. Cabe ressaltar que esse conceito, discutido no contexto das estratégias mistas, é uma expansão das ideias previamente discutidas nas estratégias puras.

2.2.4 Equilíbrio de Nash em jogos de estratégias mistas

Considerando as notações adotadas e detalhadamente apresentadas na Subseção 2.2.3, a Definição 12 introduz o conceito de equilíbrio de Nash para estratégias mistas.

Definição 12: equilíbrio de Nash

Um perfil de estratégias mistas $\mathbf{P}^* = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash se, para cada Jogador i , a estratégia mista p_i^* é uma melhor resposta ao perfil de estratégias mistas dos outros jogadores $\mathbf{P}_{-i}^*$. Isto é, para todo $i \in J$:

$$r_i(p_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \geq r_i(p_i, \mathbf{P}_{-i}^*), \quad \forall p_i \in \Delta_i.$$

O $\mathbf{P}_{-i}^*$ representa um perfil de estratégias mistas dos $n-1$ jogadores, excluindo-se a estratégia mista do Jogador i e $r_i(p_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*)$ representa a recompensa do Jogador i dada a sua estratégia mista p_i^* e o perfil de estratégias mistas $\mathbf{P}_{-i}^*$ dos outros jogadores. Dessa forma, a Definição 12 introduz a condição $r_i(p_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \geq r_i(p_i, \mathbf{P}_{-i}^*)$ indicando que o Jogador i não tem incentivo para mudar unilateralmente sua estratégia mista p_i^* , pois qualquer outra estratégia $p_i \in \Delta_i$ não lhe proporcionará uma recompensa maior.

Para contextualizar e apresentar aplicações do equilíbrio de Nash em estratégias mistas, apresentamos os Exemplos 13 e 14.

Nos jogos “Moedas emparelhadas” (Exemplo 11) e “Pedra, papel e tesoura” (Exemplo 12), que foram apresentados anteriormente na Subseção 2.2.3, analisamos duas situações em que o equilíbrio de Nash só ocorre exclusivamente nas estratégias mistas. Além disso, nos casos estudados até agora em que o equilíbrio de Nash ocorreu, foi único. No entanto, os equilíbrios de Nash em estratégias mistas, quando existem, não precisam ser únicos. O Exemplo 14 explora essa possibilidade.

Exemplo 13: Equilíbrios de Nash em um jogo

Considere um jogo representado pela matriz de recompensas expressa no Quadro 16.

Quadro 16 – Matriz de recompensas de um jogo.

		Jogador 2	
		C	R
Jogador 1	M	(0, 0)	(3, 5)
	D	(4, 4)	(0, 3)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Para este jogo, a estratégia mista do Jogador 1 é dada por $\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12}) = (p, 1-p)$, onde p é a probabilidade de o Jogador 1 escolher M , e $1-p$ é a probabilidade

de escolher D . Da mesma forma, a estratégia mista do Jogador 2 deve ser dada por $\mathbf{q} = (p_{21}, p_{22}) = (q, 1 - q)$, onde q é a probabilidade de o Jogador 2 escolher C , e $1 - q$ é a probabilidade de escolher R .

Recorrendo à equação (7) presente na Definição 10, podemos calcular a função utilidade: $r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3p + 4q - 7pq$. Diante disso, temos que analisar os seguintes casos:

- Se o Jogador 1 escolhe M , teremos $p = 1$. Logo: $r_1(s_{11}, \mathbf{q}) = 3(1)(1 - q) + 0(1)q = 3 - 3q$.
- Se o Jogador 1 escolhe D , teremos $p = 0$. Com isso: $r_1(s_{12}, \mathbf{q}) = 4(1)(q) + 0(1)(1 - q) = 4q$.

Assim, para que o Jogador 1 seja indiferente no que diz respeito as estratégias s_{11} e s_{12} - ou seja, M e D - as recompensas para ambos os casos devem ser iguais. Consequentemente, temos que:

$$r_1(s_{11}, \mathbf{q}) = r_1(s_{12}, \mathbf{q}) \Rightarrow q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 3 = q \cdot 4 + (1 - q) \cdot 0 \Rightarrow q = \frac{3}{7}.$$

Para o Jogador 2, a função utilidade é dada por: $r_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3 - 3p + 4q - 5pq$. Analisamos os seguintes casos:

- Se o Jogador 2 escolhe s_{21} ($q = 1$): $r_2(\mathbf{p}, s_{21}) = 3 - 3p + 4(1) - 5p(1) = 7 - 8p$.
- Se o Jogador 2 escolhe s_{22} ($q = 0$): $r_2(\mathbf{p}, s_{22}) = 3 - 3p$.

Para que o Jogador 2 seja indiferente entre as estratégias s_{21} e s_{22} , igualamos as utilidades:

$$r_2(\mathbf{p}, s_{21}) = r_2(\mathbf{p}, s_{22}) \Rightarrow 7 - 8p = 3 - 3p \Rightarrow 4 = 5p \Rightarrow p = \frac{4}{5}.$$

Disso, podemos concluir que, para estratégias mistas, o Jogador 1 será indiferente entre escolher M e D quando o Jogador 2 escolher s_{21} com probabilidade $q = \frac{3}{7}$ e s_{22} com probabilidade $1 - q = \frac{4}{7}$. Do mesmo modo, o Jogador 2 será indiferente entre escolher s_{21} e s_{22} quando o Jogador 1 escolher M com probabilidade $p = \frac{4}{5}$ e D com probabilidade $1 - p = \frac{1}{5}$. Assim, o equilíbrio de Nash é $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

Exemplo 14: Jogo “O dilema dos prisioneiros” em estratégias mistas

Dois indivíduos, o Jogador 1 e Jogador 2 são capturados sob acusação de um mesmo crime. Eles estão presos em celas separadas e não têm nenhuma comunicação entre eles. O delegado de plantão faz a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Sendo aplicadas as seguintes sentenças:

- se nenhum confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano;
- se ambos confessarem, ambos terão uma pena de 5 anos;
- se um confessar e o outro negar, então o que confessou será liberto e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

Para o jogo “O dilema dos prisioneiros” com os Jogadores 1 e 2, vamos considerar que a distribuição de probabilidade de Jogador 1 é dada por $\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12}) = (p, 1 - p) \in \Delta_1$ e a do Jogador 2 é dada por $\mathbf{q} = (p_{21}, p_{22}) = (q, 1 - q) \in \Delta_2$, com $0 \leq p \leq 1$ e $0 \leq q \leq 1$. O Quadro 17 ilustra a matriz de recompensas desse jogo que já foi explorada anteriormente.

Quadro 17 – Matriz de recompensas do jogo “O dilema dos prisioneiros”.

		Jogador 2	
		Confessar (q)	Negar ($q - 1$)
Jogador 1	Confessar (p)	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
	Negar ($p - 1$)	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Vamos expressar a recompensa de Jogador 1 como $r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a partir dos perfis de estratégias mistas $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. De forma análoga e a partir das mesmas distribuições de probabilidade, vamos expressar a recompensa de Jogador 2 como $r_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Para que o perfil de estratégia $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ seja considerado um equilíbrio de Nash, a relação entre as funções utilidades deve ser a seguinte:

$$r_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \text{ e } r_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq r_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta.$$

Ou seja, as utilidades de ambos os jogadores devem ser maximizadas diante das outras estratégias. A recompensa esperada de Jogador 1, expressa como $r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$,

pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 p_{1j_1} \cdot p_{2j_2} \cdot u_1(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \\
 &= p_{11} \cdot p_{21} \cdot u_1(s_{11}, s_{21}) + p_{11} \cdot p_{22} \cdot u_1(s_{11}, s_{22}) \\
 &\quad + p_{12} \cdot p_{21} \cdot u_1(s_{12}, s_{21}) + p_{12} \cdot p_{22} \cdot u_1(s_{12}, s_{22}) \\
 &= p \cdot q \cdot (-5) + p \cdot (1 - q) \cdot 0 + (1 - p) \cdot q \cdot (-10) + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (-1) \\
 &= -5pq + 0 + (-10q + 10pq) + (-1 + p + q - pq) \\
 &= -5pq + 10pq - 10q - 1 + p + q - pq \\
 &= 4pq - 10q - 1 + p + q.
 \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos expressar a recompensa esperada de Jogador 2, $r_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 r_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 p_{1j_1} \cdot p_{2j_2} \cdot u_2(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \\
 &= p_{11} \cdot p_{21} \cdot u_2(s_{11}, s_{21}) + p_{11} \cdot p_{22} \cdot u_2(s_{11}, s_{22}) \\
 &\quad + p_{12} \cdot p_{21} \cdot u_2(s_{12}, s_{21}) + p_{12} \cdot p_{22} \cdot u_2(s_{12}, s_{22}) \\
 &= p \cdot q \cdot (-5) + p \cdot (1 - q) \cdot (-10) + (1 - p) \cdot q \cdot 0 + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (-1) \\
 &= -5pq + (-10p + 10pq) + 0 + (-1 + p + q - pq) \\
 &= -5pq - 10p + 10pq - 1 + p + q - pq \\
 &= 4pq - 9p + q - 1.
 \end{aligned}$$

Para encontrar o equilíbrio de Nash no Exemplo 13, precisamos analisar as condições de melhor resposta para Jogador 1 e Jogador 2. Observe que $r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e $r_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ são funções de duas variáveis, pois as recompensas - como já era esperado - dependem das escolhas das estratégias de ambos os jogadores. Para encontrar o valor que maximiza essas funções, usaremos o conceito de derivadas parciais⁸.

Para calcular o equilíbrio de Nash nesse caso, é necessário determinar a estratégia de Jogador 1 que maximiza sua utilidade $r_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, dado que Jogador 2 escolheu

⁸**Condição necessária para a existência de pontos extremantes:** seja a função $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto. Se um ponto (x_0, y_0) desse conjunto é um ponto extremo local (máximo ou mínimo local), então: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Isto é, (x_0, y_0) é um ponto crítico de f .

uma estratégia q . Da mesma forma, precisamos calcular a estratégia de Jogador 2 que maximiza sua utilidade $r_2(p, q)$, dado que Jogador 1 escolheu uma estratégia p . Esses cálculos podem ser feitos utilizando as derivadas parciais de cada uma dessas funções de utilidade em relação às suas respectivas estratégias. Dessa maneira, temos:

- Maximizar $r_1(p, q)$ em relação a p :

$$\frac{\partial r_1}{\partial p} = 4q + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{1}{4}.$$

- Maximizar $r_2(p, q)$ em relação a q :

$$\frac{\partial r_2}{\partial q} = 4p + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{4}.$$

Diante de todo esforço depreendido até aqui, podemos assegurar que os pontos críticos das funções $r_1(p, q)$ e $r_2(p, q)$ são: $p = -\frac{1}{4}$ e $q = -\frac{1}{4}$. Como estes valores representam uma probabilidade e não pertencem ao intervalo $[0, 1]$, temos o indicativo que não existe um equilíbrio misto válido para o jogo “O dilema dos prisioneiros”. O único equilíbrio de Nash ocorre quando ambos os jogadores escolhem, no contexto das estratégias puras, a estratégia confessar.

Na próxima seção, trataremos dos aspectos históricos da TJ, abordando fatos, personagens e acontecimentos marcantes no desenvolvimento histórico desse campo de estudos.

2.3 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TEORIA DOS JOGOS

As informações históricas presentes nesta seção são resultados de interlocuções entre algumas fontes, gerando uma versão da história da Teoria dos Jogos (TJ)⁹. Walker (2012) aponta que uma das primeiras inquietações intelectuais sobre o que se conhece na atualidade como TJ é percebida ainda na antiguidade (500 a.C.), no Talmud Babilônico¹⁰. Segundo o autor, “um problema discutido no Talmud é o chamado problema do casamento contratual: um homem tem três esposas cujos contratos de

⁹Consideramos para essa elaboração as seguintes referências: Figueiredo (1994), Sartini et al. (2004a), Fiani (2015), Campos e Cardoso (2015), Osborne (2004), Tanimoto (2015), Hotz (2006), Holt e Roth (2004), Amaral (2019), Alencar e Yamamoto (2008), Marinho (2005), Monteiro (2008), Pontes (2018), Souza e Malavazi (2020), Araújo e Júnior (2017), Walker (1995) e Walker (2012).

¹⁰Coletânea de livros judeus que registram histórias e costumes do judaísmo.

casamento especificam que no caso desta morte recebem um valor de herança proporcional a 100, 200 e 300 respectivamente” (WALKER, 2012, p. 1, tradução nossa). No problema, percebemos a presença de agentes (esposas) que estão em um contexto de divisão de recurso limitado entre diferentes partes com reivindicações concorrentes, relacionando a situação a um possível caso observável à luz da TJ.

Outros indícios de referência às ideias da TJ datam do século XVIII, quando o estudioso James Waldegrave (1684 – 1741) endereça uma carta ao matemático suíço Nicolau Bernoulli (1687–1759), registrando nela um estudo de um jogo de cartas conhecido à época como *Le Her*, no qual o autor propõe uma solução que considera o que conhecemos hoje como estratégias mistas¹¹. Na carta, ele elabora o estudo considerando apenas dois jogadores, sem generalizar a ideia.

Em que consiste o jogo *La Her*?

O jogo é pensado para duas pessoas, inicialmente. São 13 cartas (embaralhadas) de um mesmo naipe. No início do jogo, o jogador 1 recebe uma carta X (só ele vê esta carta), o jogador 2 recebe uma carta Y (só ele vê esta carta) e uma carta Z é colocada sobre a mesa (ninguém vê esta carta). O jogador 1 joga primeiro: ele deve decidir se vai ficar com ou trocar sua carta X pela carta Y do jogador 2 (no último caso, o jogador 2 não pode negar a troca). Após a decisão do jogador 1, o jogador 2 deve decidir se vai ficar com ou trocar sua carta com Z. O vencedor é aquele a carta com o maior valor ($J > Q$) (SARTINI et al., 2004a, s.p.).

Cabe colocar que a versão original deste jogo foi estudada por Nicolau Bernoulli e Rémond de Montmort (1678–1719), no entanto, foi James Waldegrave que propôs uma solução para o jogo com duas pessoas, utilizando estratégias mistas. Até hoje, essa carta é vista como um dos primeiros marcos em que se observam alguns pressupostos do que se conhece como a TJ moderna, campo de conhecimento formalizado no século XX, por volta do ano de 1944.

Depois dessa carta, no início do século XIX, o estudioso francês Antoine Augustin Cournot (1801 – 1877) ficou conhecido por elaborar uma análise do comportamento de duas empresas em competição de mercado apresentada em um tratado intitulado de *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*¹² publicado em 1838.

¹¹ **Estratégia mista:** o jogador decide qual será sua ação tomando como base a probabilidade de determinada ação por parte do oponente.

¹² Pesquisa sobre os princípios matemáticos da teoria da riqueza (tradução nossa).

Na literatura, esse estudo ficou conhecido como o Duopólio de Cournot. Historicamente, conforme as fontes que tivemos acesso, essa foi uma das primeiras tentativas de uma formalização matemática da TJ. Esse foi um estudo pioneiro que visou investigar a decisão de duas empresas concorrentes sobre a produção de determinadas quantidades de mercadoria. Tomou como base uma análise mercadológica, onde a decisão da empresa concorrente e o preço são determinados pela procura, dependendo das quantidades.

Em 1913, ocorreu outro marco significativo na TJ: uma palestra do matemático e filósofo alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 – 1953) no V Congresso Internacional de Matemáticos em Cambridge, na Inglaterra. Na oportunidade, Zermelo demonstra, por meio da palestra, intitulada *An application of set theory with chess theory*¹³ que o jogo de xadrez é sempre determinado, ou seja, em qualquer momento do jogo, o jogador sempre terá alguma estratégia que lhe garanta a vitória ou, pelo menos, o empate.

Pouco depois de Zermelo, precisamente em 1921, 1924 e 1927, o matemático e político francês Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956) publicou três artigos¹⁴ sobre jogos de estratégia, propondo uma solução que usa o que mais adiante ficaria conhecida como Soluções Minimax¹⁵. Nesses artigos, Borel estuda alguns cenários de guerra, entendendo como a economia pode ser entendida no contexto de decisões estratégicas. Em oposição ao que Araújo e Júnior (2017) discutem, embora Émile Borel tenha entendido os pressupostos das Soluções Minimax e estabelecido, em seus estudos, bases para a formulação desse teorema, nesses trabalhos ora apresentados ele não formaliza tal conceito.

Outro marco para a constituição desse campo foi a contribuição do matemático húngaro de origem judaica, John von Neumann (1903–1957) com a publicação do

¹³Uma aplicação da teoria dos conjuntos com a teoria de xadrez (tradução nossa).

¹⁴As nossas pesquisas, em confronto com o trabalho de Araújo e Júnior (2017), nos levam a crer que esses três artigos que as bibliografias sugerem que foram publicados por Emile Borel foram republicados pela Revista *Econometrica* em 1953 sob os seguintes títulos:

BOREL, Émile. The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 97-100, 1953a.

BOREL, Émile. On Games that Involve Chance and the Skill of the Players. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 101-115, 1953b.

BOREL, Émile. On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 116-117, 1953c.

¹⁵**Soluções Minimax:** são estratégias de jogo que visam maximizar a obtenção de um determinado nível mínimo de ganho.

artigo *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*¹⁶ em 1928, em que ele demonstra que todo jogo finito de soma zero¹⁷ com dois jogadores possui uma solução em estratégias mistas. Na oportunidade, ele conduz o seu estudo utilizando ferramentas matemáticas avançadas do que se conhece hoje por topologia e análise funcional para demonstrar seus resultados. Mais adiante, ciente da complexidade do seu trabalho, ele propõe outra demonstração para o resultado, considerando agora o teorema do ponto fixo de Brouwer.

John von Neumann era um estudioso que tinha interesse em diversos campos de conhecimento. Isso fez com que, continuando seus estudos, ele publicasse, em 1944, com o economista austríaco Oskar Morgenstern (1902–1977) a obra intitulada *The Theory of Games and Economic Behaviour*¹⁸. Além da densidade de conceitos, esse estudo é conhecido como um marco dentro da TJ moderna, pois a partir dele, temos a formalização matemática da TJ. A Solução Minimax citada anteriormente no trabalho de Émile Borel é formalizada matematicamente nesse livro, ganhando o nome de Teorema das Alternativas.

O livro foi importante na medida em que se constituiu como uma ferramenta para o processo de tomada de decisões econômicas. Lançando uma visão nova sobre antigas dinâmicas e problemas, faz com que agentes econômicos atuem de maneira estratégica, permitindo um processo competitivo e fazendo com que a economia seja entendida como um mecanismo em que agentes envolvidos precisam a todo instante tomar decisões que consideram a ação de seus pares.

Por volta do ano 1950, o estudioso John Forbes Nash Jr. (1928–2015) propõe avanços dentro do campo da TJ com a publicação de quatro trabalhos vistos, até hoje, como muito importantes para a TJ não-cooperativa¹⁹ e para a teoria da barganha. Em *Equilibrium Points in n-Person Games*, John Nash aponta que o Teorema das Soluções Minimax é válido para muitos indivíduos envolvidos, representando um avanço, pois esse Teorema só havia sido estudado, até então, para dois agentes envolvidos.

Na obra *Non-cooperative Games*, o autor trabalha a ideia de que existe um

¹⁶Sobre a teoria dos jogos de tabuleiro (tradução nossa). Mais informações, consultar: NEUMANN, John von. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. **Mathematische Annalen**, vol. 100, pp. 295 – 320, 1928.

¹⁷**Jogo do tipo soma zero:** o ganho de um jogador representa necessariamente a perda do outro.

¹⁸NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton/EUA: Princeton University Press, 1944.

¹⁹Não existe cooperação entre os jogadores. As ações são baseadas unicamente no resultado individual.

equilíbrio para jogos não cooperativos²⁰, propondo o estudo de jogos cooperativos²¹ a partir da redução desses a jogos não-cooperativos. Já nos trabalhos *The Bargaining Problem* e *Two-Person Cooperative Games* ele traz uma solução para o problema da barganha e formaliza o que passa a ser conhecido como Teoria da Barganha²².

Desses estudos, surge o conceito de equilíbrio de Nash, que engloba a ideia de que, em um jogo, nenhum jogador pode melhorar sua situação pensando e agindo unilateralmente. Esse conceito amplia significativamente as aplicações da TJ, fazendo com que não apenas a economia ou matemática aplicada se beneficiassem, mas também vários outros campos de conhecimento, incluindo Biologia, Ciência Política e Sociologia.

Em 1952 o economista e matemático norte-americano, Lloyd Stowell Shapley (1923–2016) apresenta à comunidade intelectual o conceito de Núcleo, que se refere a um conjunto de alocações (distribuição de recursos, recompensas ou benefícios) nos jogos cooperativos, indicando que a decisão de permanecer na coalizão (grupo de jogadores que decide unir forças) é sempre mais benéfico do que desviar dela, ou seja, um agente não pode obter um melhor resultado fora da cooperação.

No ano de 1959 tivemos outra grande contribuição a TJ com a publicação do livro *Strategy and Market Structure: Competition* cujo autor é o economista e matemático americano, Martin Shubik (1926–2018). Este foi um dos primeiros livros a assumir explicitamente a abordagem da TJ não cooperativa para modelar oligopólios, ou seja, modelar matematicamente um conjunto de relações que existem entre algumas empresas que determinam algum setor produtivo, impactando na questão da demanda e oferta de produtos.

Segundo Figueiredo (1994), nos anos 1960, a TJ entra em um estado de latência intelectual e o debate sobre o tema fica restrito a pequenos grupos de estudiosos, o que não resulta em publicações significativas para o campo. Por outro lado, em discordância com essa opinião, Walker (2012) menciona que nos anos 1960, alguns trabalhos significativos foram publicados, por exemplo, o artigo *A General Theory of Rational Behavior in Game Situations* do economista húngaro John Charles Harsanyi (1920–2000), que apresenta formas de definir jogos cooperativos e jogos não coope-

²⁰ **Jogos cooperativos:** jogadores tomam decisões estratégicas em comum acordo.

²¹ **Jogos cooperativos:** os jogadores cooperam entre si para maximizar os ganhos.

²² Pressupostos teóricos que se referem ao poder ou vantagem que uma pessoa ou grupo tem ao discutir preços ou negociar.

rativos mais próximas de como conhecemos atualmente.

Quase dez anos depois, em 1972, a TJ se populariza e o *International Journal of Game Theory* é criado por Oskar Morgenstern, sendo administrado pela *Springer* e reconhecido como primeiro periódico especializado em TJ. Desde então, a revista tem publicado pesquisas originais que fazem contribuições significativas do ponto de vista conceitual, metodológico e matemático ao campo.

O início dos anos 70 também é marcado pelo surgimento de diferentes aplicações à luz da TJ, como a Teoria das escolhas sociais. À época, os pesquisadores Allan Fletcher Gibbard (nascido em 1942) e Mark Allen Satterthwaite exploraram aplicações da TJ em sistemas de votação. Esse estudo que aconteceu de forma simultânea, embora sem relações diretas entre os autores, se dá quando Allan Gibbard e Mark Satterthwaite resolvem o sistema de votação proposto por Kenneth Joseph Arrow (1921–2017) pensando na ação de votar estrategicamente.

Como o Teorema foi solucionado por esses dois estudiosos, quase simultaneamente, esse resultado hoje é conhecido como Teorema de Gibbard-Satterthwaite²³. Esse estudo fomentou discussões para o campo da teoria das escolhas sociais, que busca representar mecanismos de escolha, onde os agentes envolvidos são incentivados a votar estrategicamente.

Nos anos 1980 a TJ tem uma aproximação notável com a Biologia, criando uma subárea conhecida como TJ evolutiva e popularizada pelo biólogo britânico John Maynard Smith (1920–2004), por meio da obra *Evolution and the Theory of Games*. Nesse estudo, o autor introduz o conceito de “estratégia evolutivamente estável” que diz respeito ao fato de que a melhor ação, em termos evolutivos, a ser feita por um conjunto de seres (plantas ou animais) é sempre observar o comportamento de seus pares.

Esse conceito é amplamente utilizado na Biologia para estudar comportamentos de cooperação e competição entre espécies. A TJ evolutiva foi uma área que contou com estudos notáveis, aproximando-se de questões da Psicobiologia. Sobretudo nos anos de 1990 a 2000, o aumento da capacidade computacional, aliado ao conjunto das novas tecnologias, permitiu que esse campo explorasse modelos complexos sem tantas restrições.

²³A título de informação, o Teorema é enunciado na literatura da seguinte forma: se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A com $|A|$ então f é uma ditadura.

A TJ tem sido reconhecida como um campo de notável importância, com aplicações e contribuições em diversos campos da vida. Em 1994, John Forbes Nash Jr., John Charles Harsanyi (1920–2000) e Reinhard Selten (1930 – 2016) ganharam o Prêmio do Banco da Suécia para as Ciências econômicas em Memória de Alfred Nobel, usual e erroneamente chamado de Prêmio Nobel de Economia. A pesquisa foi reconhecida por apresentar uma análise pioneira do equilíbrio em jogos não cooperativos, formulando uma teoria matemática que explica em que condições o trabalho em conjunto é ou não vantajoso. O trabalho exemplifica como a TJ transforma as situações econômicas, substituindo uma visão clássica da economia que se baseia na competição.

Em 1999 a *International Society of Game Theory* foi criada para acompanhar os avanços da TJ e suas aplicações. Sua criação contribui para a disseminação e avanço do conhecimento na área, promovendo colaboração, inovação e visibilidade. Hoje, a Sociedade Internacional de Teoria dos Jogos visa promover a investigação, o ensino e a aplicação da TJ.

O sucesso da TJ foi tão reconhecido mundialmente que um dos intelectuais mais influentes quando se trata do tema teve na sua história uma fonte de inspiração para a criação de um filme em 2001. O filme *A Beautiful Mind* (Uma Mente Brilhante) foi uma produção americana que marcou o mundo a partir da história de John Forbes Nash Jr. (1928–2015), contada a partir da mistura dos gêneros dramático e bibliográfico.

Jonh Nash, nasceu em West Virginia-EUA. Desde cedo sempre foi um aluno notável. Quando adulto, se torna professor da Universidade de Princeton, em Nova Jersey-EUA, posição que garante ao Jonh Nash a possibilidade de continuar os seus estudos. A questão é que, diferentemente dos filmes de super-herói, em que estes passam por situações e superam expectativas com um final feliz, a vida de John Nash não seguiu esse padrão.

O filme apresenta que, aos 21 anos, Jonh Nash formula um importante Teorema para TJ. De fato, os aspectos históricos mobilizados neste estudo indicam que esse Teorema é o Equilíbrio de Nash. Na mesma época, o intelectual foi diagnosticado com o que hoje conhecemos por esquizofrenia, o que lhe rendeu muitos anos em busca de sua recuperação. Apesar disso, devido o seu empenho e contribuição para a ciência, foi agraciado com um Prêmio do Banco da Suécia para as Ciências econômicas em

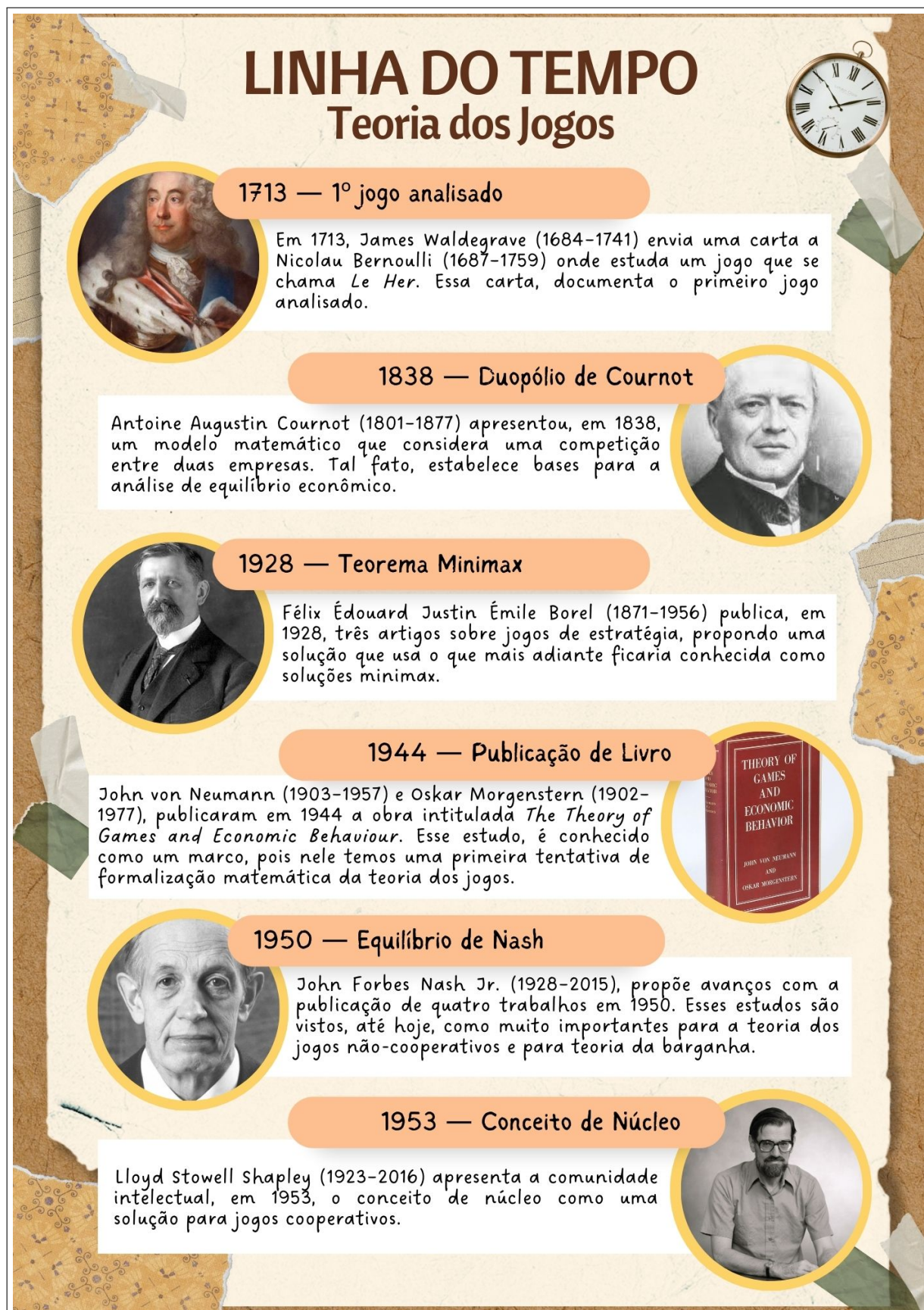
Memória de Alfred Nobel em 1994.

Dirigido por Ronald William Howard, o filme tem Russell Ira Crowe como personagem principal. Ganhou o Oscar 4 vezes, sendo indicado em várias outras categorias. No entanto, a produção recebeu inúmeras críticas por focar em aspectos específicos da vida de John Nash, deixando de lado aspectos igualmente importantes para constituição da história. Apesar dessa limitação, o filme perpassa por um tema fundamental para a História e Filosofia das Ciências e Matemática: a humanização das descobertas. Os personagens deixam de ser gênios, sendo percebidos como seres humanos que, apesar de suas limitações, precisam se superar e alcançar suas conquistas intelectuais.

Em 2005, quatro anos após o lançamento do filme, o economista estadunidense Thomas Crombie Schelling (1921–2016) e economista Robert John Aumann (1930-), repetiram o feito, conquistando o Prêmio do Banco da Suécia para as Ciências econômicas em Memória de Alfred Nobel com trabalhos no campo da TJ. O estudo dos autores teve como objetivo modelar estratégias de cooperação em um contexto de conflitos internacionais. Thomas Schelling aplicou a TJ e modelou situações de conflito com possibilidades de guerra nuclear e Robert Aumann formulou hipóteses importantes para esse tipo de situação, considerando que cooperação é menos provável ao ter um número grande de participantes e inquietações frequentes.

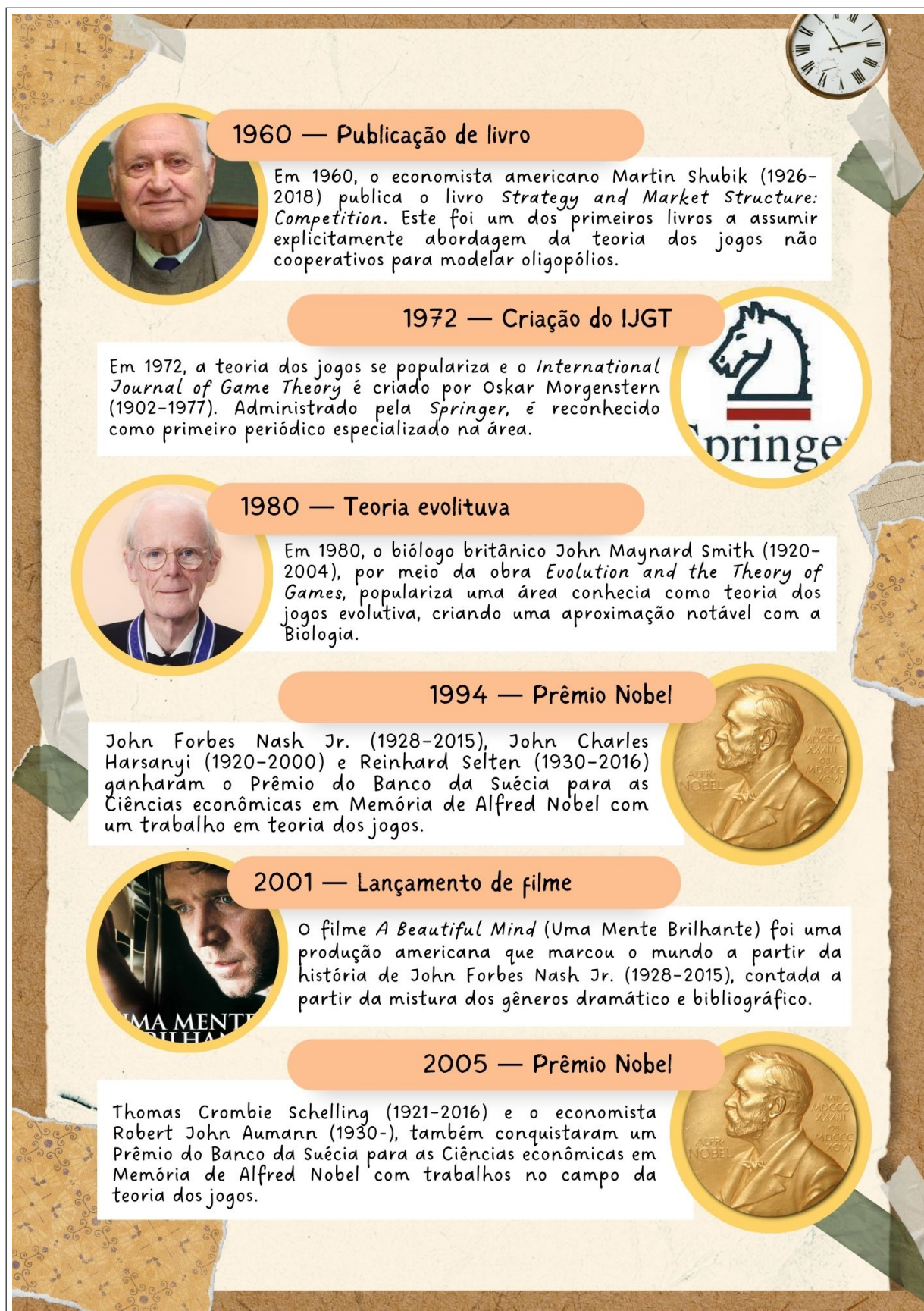
Diante do exposto, as Figuras 5 e 6 sintetizam nosso estudo histórico, apresentando, por meio de uma Linha do Tempo, alguns fatos significativos (sob nossa perspectiva) no desenvolvimento da TJ. Esse olhar abrange o período de 1713 até 2005. Destacamos que, devido à complexidade e amplitude dos acontecimentos que marcaram a TJ, não é possível abranger todos os marcos e personagens importantes na nossa Linha do Tempo. Assim sendo, ressaltamos que outros acontecimentos igualmente importantes podem não estar incluídos aqui, refletindo a vastidão e a diversidade de acontecimentos que marcam esse campo de estudo.

Figura 5 – Linha do tempo (parte 1)



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 6 – Linha do tempo (parte 2)



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos nossas considerações sobre o estudo teórico-metodológico introdutório feito fundamentado na investigação matemática proposta por [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019\)](#). Dito isso, estruturamos o capítulo em duas subseções. Na primeira delas (Subseção 3.1) discutimos a relevância da investigação para os processos de ensino de matemática, destacando o referencial que sustenta nossa pesquisa. Outrossim, na Subseção 3.2, abordamos as fases da investigação matemática que orientam a elaboração das tarefas que serão propostas na sequência didática que compõe o Produto Educacional.

3.1 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NOS PROCESSOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA

O ato de investigar pode ser entendido como um processo sistemático e metódico de busca e análise de informações. Seu objetivo é alcançar um entendimento mais profundo sobre um determinado fenômeno ou problema. No âmbito científico, a investigação é um método que permite descobrir, validar ou refutar hipóteses. Empregando um conjunto de técnicas, esse processo envolve a coleta e análise de dados de maneira objetiva e crítica, assegurando a precisão e a validade dos resultados obtidos ([SOUZA; OLIVEIRA; ALVES, 2021](#)).

Para [Ponte \(2003, p. 28\)](#)

investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

A investigação, como instrumento de pesquisa, pode perpassar questões cotidianas e de interesse pessoal que precisam de esclarecimentos. Ao incentivar uma abordagem mais democrática do ato de pesquisar, o valor do trabalho investigativo se reafirma como uma prática social que está além das descobertas inéditas e de questões de alto grau de especialidade ([GUERRA, 2023](#)).

Diante dessas perspectivas, a investigação tem sido amplamente associada ao ensino de Matemática por oferecer um meio de construção do conhecimento que vai além da mera memorização de fórmulas e procedimentos. O foco na investigação, para o ensino de Matemática, está em desenvolver a capacidade dos alunos na formulação questões, busca de respostas e compreensão dos conceitos de forma contextualizada (CORRADI, 2011; FREIRE, 2011).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) pontua que “o componente curricular Matemática [...] tem o propósito de desenvolver nos estudantes a capacidade de investigar, formular e resolver problemas” (BRASIL, 2018, p. 256). Essa recomendação enfatiza o papel da investigação nos processos de ensino a medida que oportuniza a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno.

Observadas as competências e habilidades previstas pela BNCC, que incluem, principalmente: resolver problemas, pensar de forma crítica e argumentar com base em evidências, temos o indicativo que investigação tem relação direta com cada uma dessas. O documento, menciona diretamente que a resolução de problemas e a investigação matemática são tendências que devem permear a Matemática e seu ensino.

Os processos matemáticos de **resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 267, grifo nosso).

Com isso, temos que a investigação ocupa um lugar de centralidade nos processos matemáticos, ao ser uma forma privilegiada da atividade Matemática. Busca favorecer o desenvolvimento do letramento matemático - compreende a capacidade de raciocinar, representar, formular conjecturas, comunicar e argumentar (BRASIL, 2018) - a medida em que evidencia processos de ensino com uma abordagem mais ativa por parte dos alunos, conectando-se com questões mais contextualizadas.

As concepções aqui apresentadas convergem para o entendimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), quando estes destacam que “a curiosidade e a capacidade de investigar fazem parte da atividade matemática e são importantes para o desenvolvimento de uma atitude investigativa frente ao conhecimento” (BRA-

SIL, 1997, p. 28). Isso destaca a importância de uma ação pedagógica que favoreça a construção do conhecimento a partir de práticas investigativas.

O ensino de Matemática que incorpora atividades investigativas permite que os alunos conectem teoria e prática, facilitando a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos variados e contribuindo para a formação de um pensamento crítico-reflexivo (MENDES, 2009).

Freitas (2023) destaca que a caracterização da investigação no ambiente educacional exige uma compreensão das diferentes formas de atividades matemáticas, a saber: exercícios, problemas, explorações e investigações. Cada uma dessas atividades possui características distintas e exerce uma função no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. A esse respeito, Corradi (2011) propõe um diagrama (Figura 7) que apresenta essas diferentes formas de atividade matemática com base no tipo (aberto ou fechado) e o nível de dificuldade (difícil e fácil).

Figura 7 – Diferenciação entre exercícios, problemas, explorações e investigações.



Fonte: Corradi (2011, p. 167), adaptado de Ponte (2003).

Os exercícios matemáticos são atividades fechadas¹ que visam a prática de habilidades e conceitos específicos. Realizados em um curto espaço de tempo, são formulados para os alunos aplicarem técnicas ensinadas, memorizando e reforçando o aprendizado de conceitos e procedimentos. A abordagem dos exercícios é roteirizada, com respostas que podem ser verificadas como corretas ou incorretas (MILANI, 2020).

¹Uma questão aberta é aquela que permite uma resposta mais ampla e elaborada, sem uma única resposta correta. Já uma questão fechada é aquela que tem uma resposta objetiva e específica.

Os problemas matemáticos também se apresentam de forma sistematizada, no entanto, diferentemente dos exercícios, são situações mais difíceis que demandam interpretação e utilização de estratégias variadas para sua solução. Por esse motivo, estimulam o raciocínio e a capacidade de aplicar conhecimentos matemáticos em contextos novos e desafiadores (PONTE, 2003). Dessa forma, na resolução de um problema

objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 4).

Apresentada na Figura 7, como aberta e fácil, a exploração matemática permite aos alunos investigar conceitos e relações de forma mais livre. Com isso, a exploração pode levar a descobertas inesperadas e a uma compreensão mais intuitiva da Matemática (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022), fazendo dessa disciplina um campo para exercício da criatividade.

No que diz respeito a investigação, Jucá e Pironel (2022) apresentam que elas são atividades caracterizadas pela busca aprofundada de respostas para questões mais complexas, que se apresentam de forma aberta. Essa atividade exige dos alunos a formulação de perguntas, o desenvolvimento de hipóteses e a realização de análises. Além disso, pode promover habilidades de pesquisa e pensamento crítico, relacionando-se com práticas pedagógicas que valorizam a autonomia do aluno e a capacidade de resolver problemas de forma independente.

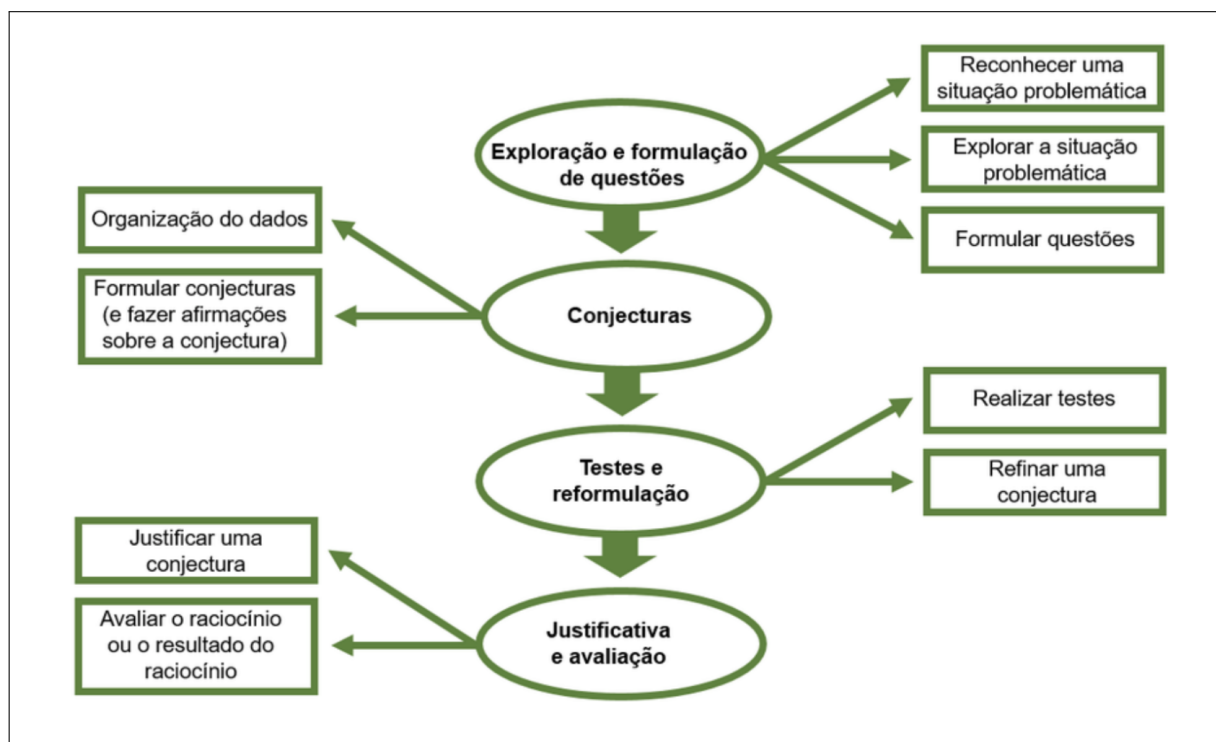
Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 10).

3.2 AS FASES DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando os estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), a condução de uma investigação matemática compreende quatro etapas principais: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulações; e justificativa/avaliação.

Cada uma dessas fases constitui um processo essencial para a compreensão de uma prática investigativa no ensino de Matemática. A Figura 8 ilustra um esquema que resume alguns dos procedimentos que devem ser mobilizados em cada uma dessas fases.

Figura 8 – Momentos da investigação matemática de [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019\)](#)



Fonte: [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019, p. 21\)](#).

A primeira fase, denominada exploração e formulação de questões, apresenta ao aluno o problema ou a situação matemática que será estudada. Nesse estágio inicial da investigação, o objetivo é permitir que o aluno interaja livremente com o problema, explorando conceitos e propriedades sem a pressão de encontrar uma solução específica. Como indicado na Figura 8, é o momento de reconhecer, explorar e formular questões sobre a situação explorada.

A segunda fase da investigação é denominada formulação de conjecturas, se concentra na criação de hipóteses com base nas observações feitas. Os alunos começam a generalizar padrões e a estabelecer relações entre diferentes aspectos do problema, formulando possíveis soluções. Esta etapa envolve um pensamento mais estruturado, onde o aluno organiza suas ideias e possíveis respostas para o problema em questão ([PONTE, 2003](#); [PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019](#)).

Na sequência, a terceira fase é denominada teste e reformulação. É o momento da investigação em que os alunos verificam as conjecturas formuladas por meio da experimentação e análise das informações. A validação ou refutação das hipóteses é realizada por meio da aplicação de diferentes estratégias e métodos. Essa etapa exige que os alunos ajustem e refinem suas ideias com base nos resultados obtidos, promovendo um entendimento mais profundo do problema matemático (PONTE, 2003; PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019).

A última fase da investigação, conhecida como justificativa e avaliação, é o momento em que a organização e apresentação das descobertas são estruturadas. Os alunos devem refletir sobre o processo investigativo, argumentando e evidenciando os apontamentos que sustentam suas conclusões. Essa etapa reforça a reflexão crítica sobre o processo investigativo, destacando a importância da comunicação dos resultados.

Essas quatro fases da investigação matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) não acontecem, necessariamente, na ordem com que foram apresentadas. O movimento formativo do investigar permite uma dinâmica que faz com que essas fases se entrelacem e se manifestem concomitantemente. A natureza do pensamento matemático faz da investigação um caminho privilegiado para argumentar, refletir e adaptar estratégias conforme novos desafios ou informações surgem.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo tratamos da parte didática do nosso trabalho dissertativo. Proveniente da articulação dos três capítulos imediatamente anteriores, está organizado em três Seções. Na Seção 4.1, discutimos a importância de um PE, fundamentados na legislação que regulamenta os Mestrados Profissionais. Na Subseção 4.2, descrevemos o nosso PE e apresentamos seus elementos constitutivos. Na Subseção 4.3 exploramos a sequência didática, um elemento central indicado no nosso PE. As três tarefas indicadas na nossa sequência didática estão descritas nas Subseções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3.

4.1 POR QUE UM PRODUTO EDUCACIONAL?

Segundo o Documento Orientador de Apresentação de Proposta para Curso Novo (APCN) da Área 46 (Ensino) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o Mestrado Profissional possui características que o diferenciam significativamente do Mestrado Acadêmico. Um Mestrado Profissional, como o próprio nome sugere, visa “que o aluno entenda a importância da pesquisa em sua área profissional, que saiba onde encontrar a pesquisa ainda não feita, mas que se fará no futuro – e finalmente, que consiga incorporá-la em seu exercício da profissão” (RIBEIRO, 2006, p. 215).

Assim, pensar a pesquisa no campo educacional, especialmente na sala de aula, exige que as dissertações provenientes dos Mestrados Profissionais desenvolvam, como desdobramento direto da pesquisa desenvolvida, um Produto Educacional (PE).

Conforme CAPES (2019, p. 35) um PE é definido como

Um processo ou produto educativo aplicado em condições reais de sala de aula, ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros.

O documento da CAPES ainda destaca que “a dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no refe-

rencial teórico metodológico escolhido” (CAPES, 2019, p. 215). Assim, como o presente estudo dissertativo é um desdobramento do Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, é necessário assegurar que ele atenda às exigências estabelecidas para esse tipo de programa.

Conforme posto no regimento interno do PROFMAT ¹

Art. 13º Para a obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, **é necessário o desenvolvimento de um recurso educacional e de uma dissertação de mestrado**, na qual estejam descritos os fundamentos teóricos empregados e os processos que culminaram neste produto e na sua aplicação em situações de ensino. Isso deve ser feito com foco em tópicos específicos relacionados ao currículo de Matemática na Educação Básica e seu impacto na prática pedagógica em sala de aula (SBM, 2024, s.p., grifo nosso).

Dessa forma, considerando o caráter central do PE, justificado a partir dos documentos apresentados, neste capítulo apresentaremos o nosso PE intitulado Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos - LabTJ Virtual. As Subseções que compõem esse capítulo procuramos apresentar detalhadamente o LabTJ Virtual, destacando seus elementos constitutivos com ênfase em uma sequência didática que o compõe.

4.2 LABORATÓRIO VIRTUAL DE TEORIA DOS JOGOS - LabTJ Virtual

Segundo o *Oxford Languages*², dicionário *online*, um laboratório é definido como um “local ou sala especial de trabalho, experimentação e investigações científicas, equipada com aparelhagem específica para pesquisa e experimentos”. Essa definição remete a uma ideia tradicional em que se observa a condução de experimentos científicos com equipamentos especializados. Assim, apesar de ser uma definição abrangente, ela ainda se limita ao entendimento de que um laboratório deve ser um espaço físico.

Com a expansão dos meios tecnológicos, essa ideia clássica se reformula, a partir da concepção de laboratório virtual. Esses espaços, que têm se popularizado

¹O regimento entrou em vigor na data de 31 de agosto de 2024, revogando todos os anteriores. O documento está disponível na íntegra em: <<https://profmatt-sbm.org.br/regimento/>>.

²O dicionário de Língua Portuguesa que o Google tira as informações.

nos meios educacionais, simulam experimentos e pesquisas sem a necessidade de um espaço físico, mostrando que pode haver pesquisa e experimentação fora dos limites físicos.

Conforme discutido por Santos (2020, p. 56),

Um laboratório virtual é um ambiente virtual que permite simular algumas ações realizadas em ambientes físicos. Nesse tipo de laboratório, encontram-se vários recursos organizados em páginas de web, plugins e arquivos, por exemplo: biblioteca (vídeos e / ou textos), cursos, ambientes de discussão, materiais, jogos, desafios, formulários de pesquisa e atividades.

O laboratório virtual é muito mais do que um espaço físico, é um meio de interação e socialização do conhecimento, capaz de abordar temas diversos conforme sua especificidade. Assim, tomando como inspiração Santos (2020), definimos o Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos - LabTJ Virtual³, como um espaço virtual que abrange aspectos teóricos e práticos relacionados à Teoria dos Jogos (TJ). Oferece recursos - vídeos, textos, sequência didática e materiais - organizados em um *site*, entrelaçando elementos matemáticos, históricos e didáticos da TJ. Para conferir visibilidade e identidade ao nosso PE, criamos a identidade visual ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Identidade visual do LabTj Virtual



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

O LabTJ Virtual atende a alunos do Ensino Médio. O formato virtual foi escolhido por possibilitar o alcance a um público maior e mais diversificado. Dessa forma,

³O site está disponível no link: <https://produtoeducacional122.my.canva.site/produtoeducacionalprofmatt>.

pode ser popularizado e divulgado por diversos canais digitais, conferindo uma maior divulgação do PE. O LabTJ Virtual foi estruturado em oito partes, especificadas no Quadro 18.

Quadro 18 – Elementos do LabTJ Virtual.

SEÇÃO	DESCRIÇÃO
Início	A <i>homepage</i> do <i>site</i> apresenta algumas informações sobre o LabTJ Virtual: a Universidade, o Departamento e o Curso em que foi desenvolvido. Além disso, a identidade visual e institucional do projeto também é evidenciada.
O que é? Para quem?	Esclarece que a criação do PE está vinculada a uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática do PROF-MAT/UFRN, sendo uma proposta destinada a alunos do Ensino Médio.
Pré-requisitos	Exploração da noção intuitiva de jogo apresentada no Capítulo 2 Seção 2.3.
Elementos históricos e matemáticos da TJ	Apresenta partes importantes do estudo histórico e matemático empreendido para sistematização desta dissertação, que foi sistematizado nas Seções 2.3 e 2.2.
Sequência didática	Resultado da articulação dos Capítulos 2 e 3, trata de um conjunto de três tarefas com a temática da TJ criadas à luz da investigação matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) . Na página, o usuário do <i>site</i> ainda pode consultar a versão da sequência didática com as possíveis respostas.
Materiais suplementares	A catalogação de materiais para elaboração da dissertação resultou na criação de um acervo bibliográfico (vídeos, dissertações, teses e artigos) que está disponibilizado em uma parte do <i>site</i> .
Dissertação completa	Acesso ao arquivo da dissertação em formato PDF.
Autores	Formação acadêmica, vinculação profissional e e-mail de contato dos autores envolvidos na criação do <i>site</i> .

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

O desenvolvimento deste laboratório tem como objetivo proporcionar aos seus usuários uma experiência educacional que conecte teoria e prática em um ambiente digital acessível ao público a que se destina. O LabTJ Virtual foi construído com o auxílio da plataforma Canva, amplamente conhecida pela criação, edição e publicação de designs virtuais de diferentes naturezas e finalidades.

Estudos recentes, como [Silva et al. \(2023\)](#) e [Oliveira et al. \(2024\)](#), evidenciam que o Canva tem sido uma ferramenta amplamente explorada no contexto educacional, nos diferentes níveis de ensino. Especificamente com relação aos *sites*, funcionalidade utilizada neste trabalho, a plataforma Canva oferece uma interface intuitiva

que permite a criação de *sites*, sem a necessidade de grande experiência, acessado por criadores do nível básico até o avançado. Cada usuário pode publicar até 5 *sites* gratuitamente.

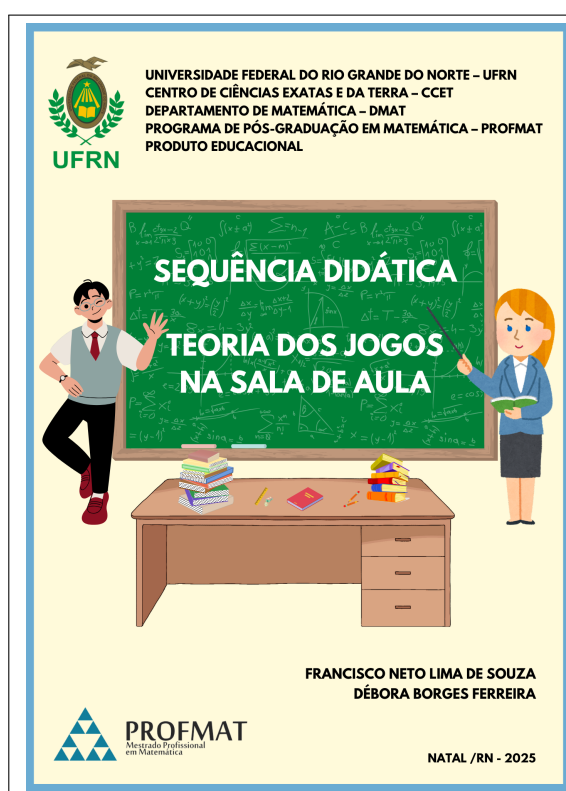
4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com Pais (2019, p. 157), a sequência didática é uma estratégia da prática pedagógica, descrita como:

um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática [...] tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento durante as sessões ao maior número de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado.

Dessa forma, a sequência didática pode ser entendida como uma sistematização de um saber em forma de tarefas para ensino (ARAÚJO, 2013; COSTA; GONCALVES, 2022; FELÍCIO, 2024) que devem estar conectadas a uma teoria que fundamente sua elaboração. Na Figura 10, ilustramos a capa da sequência didática estruturada neste trabalho dissertativo.

Figura 10 – Capa da sequência didática



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A sequência didática que integra a composição do nosso PE, o LabTj Virtual, foi desenvolvida com base na Competência 3, específica da área de Matemática e suas Tecnologias, conforme a BNCC. Foi organizada em três tarefas intimamente conectadas que, devido à aproximação com a investigação matemática proposta por [Ponte, Brocardo e Oliveira \(2019\)](#), optamos por chamar tais tarefas de investigação. Elas estão especificadas como:

- **Investigação 1:** O que é um jogo?;
- **Investigação 2:** O dilema dos prisioneiros;
- **Investigação 3:** Escolhendo rotas.

Cada uma das investigações é orientada por uma estrutura que procura se aproximar, sempre que possível, da seguinte estrutura: apresentação do problema; questionamentos orientadores da investigação; e finalização ⁴. Além da sequência didática (Apêndice B) disponibilizamos no LabTJ Virtual possíveis respostas para as investigações propostas. Nas Subseções [4.3.1](#), [4.3.2](#) e [4.3.3](#), apresentamos, para cada investigação, uma identificação que contempla: público-alvo; objetivos; competências específicas da área Matemática e suas Tecnologias, preparação para a aula; recursos; e tempo estimado.

Para cada uma delas, apresentamos uma discussão de como elas podem ser aplicadas em sala de aula, aproximando-se de um percurso metodológico para a sequência didática planejada. Com a descrição de como a aplicação pode ser conduzida, nosso objetivo não é fornecer uma receita a ser seguida rigidamente. Pelo contrário, trata-se de uma sugestão para a condução das atividades, adaptável à realidade específica de aplicação.

4.3.1 Investigação 1 - O que é um jogo?

Conforme discutido anteriormente no Capítulo [2](#), a concepção de jogo permeia a realidade de muitos sujeitos, de modo especial na infância, quando o ato de brincar está fortemente ligado ao uso desse tipo de recurso. No entanto, quando falamos em Teoria dos Jogos (TJ), o termo jogo adquire um novo significado, distinto do senso

⁴A sequência didática completa, bem como cada investigação, pode ser consultada no Apêndice [B](#).

comum que cerca esse conceito. Nesse contexto, quando nos referimos a jogo na TJ, estamos fazendo referência às situações de conflito, em que os agentes envolvidos (empresas, pessoas e organizações) precisam fazer escolhas e, para tanto, devem considerar as potenciais escolhas dos sujeitos que coexistem na situação.

Compreender o caráter estratégico e analítico do termo jogo, tal como é empregado na TJ, é um ponto de partida para a compreensão de problemas que podem ser observados à luz da TJ. Inspirados por essa problemática, desenvolvemos a investigação 1, intitulada “O que é um jogo?”. O Quadro 19 contempla as principais informações referentes a essa parte da sequência didática.

Quadro 19 – Especificação da Investigação 1: O que é um jogo?

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio
Objetivos	• Compreender o conceito de jogo no contexto da TJ; • Analisar situações de tomada de decisão, identificando se podem ser caracterizadas como jogos na perspectiva da TJ; • Estudar uma aplicação de TJ a partir de uma situação prática de competição entre duas empresas, explorando possíveis resultados e estratégias.
Competência específica da área Matemática e suas Tecnologias	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Folhas de papel para anotações; • Canetas.
Tempo estimado	90 minutos.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A primeira parte da investigação 1 inicia-se a partir da leitura do texto intitulado Teoria dos Jogos⁵, escrito em prosa que apresenta, sucintamente, a definição de jogo no contexto da TJ. Destacamos que o referido texto serve como sugestão, outro texto também pode ser usado com o mesmo fim.

⁵Produzido para a sequência didática e consta no Apêndice B

Nesse primeiro contato dos alunos com o conceito de jogo, é importante que o professor promova uma leitura coletiva do texto, garantindo a participação dos alunos. Caso o professor considere o texto um recurso insuficiente, uma apresentação pode ser criada com uso de recursos digitais. Como sugestão, no *site* “Portal dos Professores de Matemática”, existe um jogo chamado “Evolução da Confiança”⁶ que retrata, na prática, por meio de uma situação aplicada, o conceito de jogo.

Após esse momento inicial, considerando uma leitura do texto, a sequência didática indica o levantamento de alguns possíveis questionamentos⁷, são eles:

Questionamentos a partir da leitura do texto

- Qual é a principal diferença entre os jogos infantis e o “jogo da vida” mencionado no texto?
- O que o autor quer dizer com “jogo da vida”? Por que as decisões nesse tipo são mais complexas do que as decisões em jogos infantis?

O objetivo desse momento inicial é que os alunos compreendam a concepção de jogo no contexto da TJ, identificando quando temos uma situação que pode ser analisada como um jogo. Para isso, dois exemplos serão ilustrados e, com base em perguntas de cunho investigativo, os alunos devem ser orientados a perceber quais episódios ou momentos podem ser analisados à luz da TJ.

Esse momento se vale de dois exemplares, a saber: O dilema dos prisioneiros (1) e A compra de uma casa por um indivíduo (2). Com essa proposição, alguns questionamentos serão propostos com o intuito de guiar os estudantes na análise das situações podem ser observadas pela TJ.

⁶Acesse o recurso online por meio do link: <<https://brunolemos.github.io/trust/>>. Acesso em 23 de dez. 2024.

⁷Especificamente nas Subseções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3, as caixas de texto com contorno vermelho e fundo amarelo representam partes que constam na sequência didática no Apêndice B.

Questionamentos para os dois exemplos que serão apresentados

- Quais agentes estão envolvidos na situação observada? Na situação há conflito de interesses? Você identifica algum elemento de competição, cooperação ou interdependência de decisões?
- Essa situação poderia ser analisada pela Teoria Jogos? Justifique apresentando os elementos que te levaram à essa conclusão.

Depois desses dois exemplos, é esperado que os alunos reconheçam situações que podem ser analisadas pela TJ. Essa capacidade envolve a habilidade de identificar os agentes da situação e o conflito de interesse, bem como, a interdependência das escolhas dos envolvidos. Para reforçar essa compreensão, a investigação 1 será finalizada com a proposição de uma atividade prática que consiste em uma simulação. Essa parte da tarefa será realizada de forma coletiva e colaborativa, cada grupo - sugerimos a formação de grupos com cinco componentes - deve refletir sobre a seguinte situação apresentada na sequência didática.

Atividade prática (Simulação - parte final da investigação 1)

Cada um dos grupos, representa uma empresa que cogita prestar serviços a prefeitura local da cidade. Como representantes, vocês precisam decidir se a empresa deve investir em marketing ou em uma proposta econômica mais vantajosa.

A partir disso, cada grupo deve construir uma estratégia, considerando que não sabe quais escolhas os outros grupos farão. Esse exercício, que simula um conflito analisado pela TJ, deve oportunizar aos alunos o senso crítico para analisar qual decisão tomar e as potenciais consequências dessa decisão diante das escolhas dos outros agentes que coexistem na situação. Diante disso, é necessário perceber: qual seria a consequência de todas as empresas escolherem o marketing? Qual a consequência de ser a única empresa a escolher uma proposta econômica vantajosa? Diante dessas possibilidades, para orientar as discussões, propomos alguns questionamentos investigativos na sequência didática.

Questionamentos norteadores da atividade prática

- Quais seriam as consequências de sua empresa investir em marketing enquanto as outras optam por uma proposta econômica mais vantajosa?
- Como o sucesso da sua empresa pode ser influenciado pela decisão das empresas concorrentes?

Essa primeira atividade contextualizou a teoria, proporcionando uma aproximação inicial dos alunos com o conceito de jogo no contexto da TJ e com situações que podem ser analisadas pela TJ. Espera-se que os alunos comecem a refletir sobre as características de um jogo, fomentando subsídios teóricos para as análises subsequentes desenvolvidas nas Investigações 2 e 3.

4.3.2 Investigação 2 - O dilema dos prisioneiros

O dilema dos prisioneiros é um jogo clássico estudado na TJ. Segundo [Fidelis e Faleiros \(2017\)](#), ele foi inicialmente investigado por Merrill Meeks Flood (1908-1991) e Melvin Dresher (1911-1992) no ano de 1950, sendo posteriormente denominado de “O dilema dos prisioneiros” pelo matemático canadense Albert William Tucker (1905-1995). A segunda investigação, apresentada na sequência didática, é inspirada neste problema. As informações gerais sobre essa investigação podem ser consultadas no Quadro [20](#).

Quadro 20 – Especificação da Investigação 2: O dilema dos prisioneiros

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio
Objetivos	• Analisar o jogo “O dilema dos prisioneiros”, jogo clássico da TJ; • Modelar o jogo “O dilema dos prisioneiros” por meio da linguagem matemática da TJ; • Desenvolver, por meio da análise do jogo “O dilema dos prisioneiros”, o raciocínio estratégico, tomando ciência de que decisões individuais impactam o coletivo.
Competência específica da área Matemática e suas Tecnologias	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Canetas; • Quadro com projetor (para explicar o contexto e regras).
Tempo estimado	90 minutos.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Recomendamos que o primeiro momento dessa investigação ocorra com a apresentação, por parte do professor, do jogo “O dilema dos prisioneiros”. Esse contato inicial deve ter como objetivo o envolvimento dos alunos com o contexto do jogo, compreendendo as estratégias que podem ser adotadas.

A apresentação pode se dar por meio de *slides*, recurso que permite a inserção de imagens, gráficos e ilustrações para construir uma comunicação mais interativa e atrativa. Propor perguntas durante a apresentação que leve os alunos a refletir sobre o jogo é um caminho que pode ser seguido nesse momento.

O enunciado do jogo “O dilema dos prisioneiros”, apresentado na investigação 2 da sequência didática, é descrito a seguir:

Enunciado do jogo “O dilema dos prisioneiros”

Dois suspeitos de um grande crime são mantidos em celas separadas. Há provas suficientes para condenar cada um deles por um crime menor, mas não há provas suficientes para condenar nenhum deles pelo crime maior, a menos que um deles atue como informante contra o outro (delate). Assim, temos as seguintes possibilidades:

- se ambos ficarem quietos, cada um será condenado por crime menor e passará um ano na prisão.
- se um deles, e apenas um, delatar, será liberto e usado como testemunha contra o outro, que passará 10 anos na prisão.
- se ambos delatarem, cada um passará 5 anos na prisão.

Após conhecerem o enunciado do jogo, é fundamental avançar para a elaboração de conjecturas. Nesse ponto, a sequência didática recomenda que os alunos sejam organizados em duplas para simular “O dilema dos prisioneiros” entre si, analisando os possíveis resultados do “ficar quieto” ou “denunciar”, na prática. Cada aluno deve escolher, individualmente, sua opção sem revelar sua escolha até o momento combinado.

Após todos os pares revelarem suas escolhas, o professor, em conjunto com os alunos, podem entender a sentença empregada. Com base nas decisões de cada dupla, eles podem então sistematizar os raciocínios dos alunos no quadro. Essa ação deve ajudar a compreender todas as sentenças possíveis conforme as escolhas feitas pelas duplas. É importante mediar esse momento com perguntas que verifiquem a compreensão do enunciado do jogo, incentivando a participação dos alunos mediante o resultado das escolhas efetuadas. Assim, possíveis questionamentos que podem ser explorados nesse momento, são:

- Vocês optaram por trair ou confiar?;
- Como se sentiram ao tomar a decisão sem saber o que o outro faria?;
- Será que existem outras situações na vida semelhantes a essa?

- Especialmente sobre o jogo, qual foi o resultado de vocês? A escolha dos jogadores nesse caso é interdependente? Ou independente?

Diante da vivência com o jogo “O dilema dos prisioneiros”, é importante destacar que, embora a cooperação seja mutuamente benéfica, cabe deixar claro que falta de confiança pode levar os sujeitos a uma situação de traição mútua, expondo alguns desafios para a construção da confiança. A adoção de estratégias defensivas em um contexto de interdependência de decisões, ilustra uma das principais problemáticas em um contexto de interação estratégica.

Esse momento de orientação do professor é oportuno para formalização matemática do problema com base nos resultados derivados da simulação anterior. Diante dessas escolhas, o problema vai ser explorado a partir de uma abordagem matemática, agregando mais compreensão ao jogo. Inicialmente, é necessário entender que esse jogo pode ser modelado matematicamente pelas ferramentas da TJ, tendo os seguintes componentes:

- **Jogadores:** os dois suspeitos 1 e 2;
- **Estratégias disponíveis:** o conjunto de ações de cada suspeito (jogador) é ficar quieto ou delatar;
- **Possíveis resultados para cada jogador:** a ordenação dos possíveis resultados para o Suspeito 1⁸, da melhor para a pior, é a seguinte:
 - (delatar, ficar quieto): ele delata e o Suspeito 2 permanece quieto, sendo liberto;
 - (ficar quieto, ficar quieto): ele recebe um ano de prisão;
 - (delatar, delatar): ele recebe cinco anos de prisão;
 - (ficar quieto, delatar): ele recebe dez anos de prisão;

De forma análoga, os potenciais resultados do Suspeito 2 seguem a mesma lógica.

A formalização matemática do jogo sugere a necessidade de criar uma função, para cada suspeito, que associe uma dada combinação de escolhas a um valor

⁸O par ordenado representado em cada ponto indica: (**Escolha do Suspeito 1, Escolha do Suspeito 2**).

numérico que indique o ganho ou perda do respectivo jogador. Essa função, conhecida na literatura como função de recompensa, permite a quantificação dos possíveis resultados, facilitando a análise do jogo.

Nesse momento, o professor pode apresentar o argumento que para facilitar a análise dos resultados, os dados obtidos por meio da função recompensa podem ser organizados em um Quadro. Chamado no contexto da TJ de Quadro de ganhos e perdas, esse recurso visual pode facilitar a análise e a compreensão dos resultados de maneira mais clara, permitindo que os estudantes vejam as implicações das diferentes estratégias adotadas.

O Quadro 21 ilustra os possíveis resultados do jogo “O dilema dos prisioneiros”. As linhas do Quadro 21 correspondem às duas ações possíveis do Suspeito 1, as colunas correspondem às duas ações possíveis do Suspeito 2, e os pares ordenados de números em cada célula são os ganhos ou perdas dos suspeitos. O resultado do Suspeito 1 é indicado pela primeira entrada do par ordenado, enquanto a segunda entrada refere-se ao resultado do Suspeito 2.

Quadro 21 – Modelagem matemática do jogo “O dilema dos prisioneiros”

		Suspeito 2	
		Delatar	Ficar Quieto
Suspeito 1	Delatar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
	Ficar Quieto	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Diante disso, o jogo “O dilema dos prisioneiros”, se apresenta como uma situação em que se percebe ganhos na cooperação, ou seja, é mais benéfico para maioria se os jogadores escolherem não delatar. Em contrapartida, cada jogador tem um incentivo para escolher delatar para ter uma melhor pena para si, embora isso dependa da ação do outro jogador também.

Já finalizando a Investigação 2, a sequência didática propõe, como último procedimento para este momento, uma sequência de questionamentos orientadores. Os questionamentos sugeridos na sequência didática, seguem:

Questionamentos investigativos para finalização da Investigação 2

- Quais são os incentivos para trair ou cooperar no jogo “O Dilema dos Prisioneiros”?
- O que acontece se ambos os Suspeitos escolherem trair? Esse é o melhor resultado possível?
- Como a confiança entre os Suspeitos pode mudar o resultado do jogo?
- Se o Suspeito 2 optar pela estratégia confessar, quais serão as possíveis penalidades do Suspeito 1?
- Se o Suspeito 2 optar pela estratégia não confessar, quais serão as possíveis penalidades do Suspeito 1?

Esses questionamentos são propostos para sistematizar o raciocínio em torno do jogo “O dilema dos prisioneiros”, estimulando o pensamento crítico e a formulação de conclusões sobre o jogo. Nesse momento, é importante optar por uma abordagem dialogada. O professor, ao guiar os alunos com questionamentos investigativos, promove a compreensão de conceitos como estratégia e cooperação. Ele também pode identificar conexões entre o jogo estudado e o cotidiano dos alunos.

4.3.3 Investigação 3 - Escolhendo rotas

Proposto por John Forbes Nash Jr. (1928-2015), o Equilíbrio de Nash representa um modelo matemático que ilustra uma situação em que os jogadores (sejam eles dois ou mais), não têm incentivos para mudar sua estratégia, pois esse movimento não implicaria, como consequência, em um ganho. Dessa forma, representa uma situação de equilíbrio entre perdas e ganhos, que possibilita ao jogador não mudar de estratégia. Esse conceito, inspira nossa Investigação 3 - Escolhendo rotas que trata de um contexto hipotético, em que se faz necessário pensar estrategicamente para conhecer as possibilidades do problema que se apresenta por meio do jogo. O Quadro 22 apresenta algumas informações sobre essa investigação que consta na sequência didática.

Quadro 22 – Especificação da Investigação 3: Escolhendo rotas

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio
Objetivos	• Compreender o conceito de equilíbrio de Nash e a sua importância na TJ; • Analisar o jogo “Escolhendo rotas”, estudando o Equilíbrio de Nash na situação.
Competência específica da matemática	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Folhas de papel para anotações; • Canetas; • Quadro com projetor (para explicar o contexto e regras).
Tempo estimado	90 minutos.

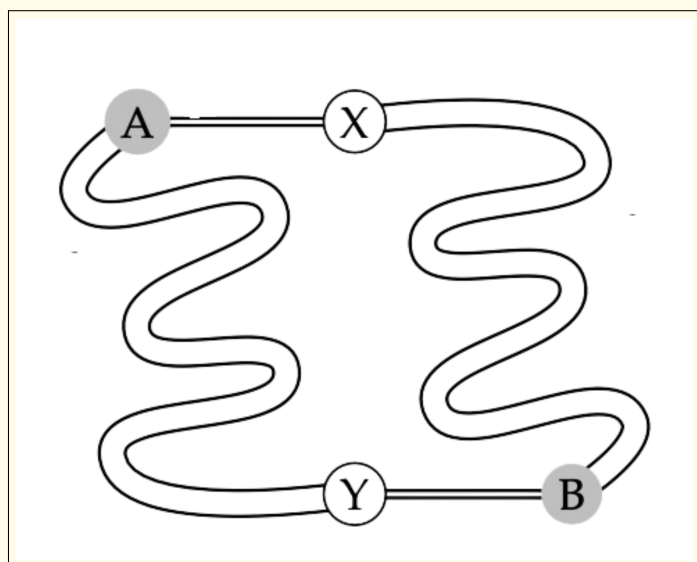
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Inicialmente, o professor deve apresentar a versão do problema aos alunos para eles compreenderem o contexto do problema e seu enunciado, se familiarizando com a situação que será tratada. O professor pode recorrer a recursos visuais (apresentação de *slides*) e a participação dos alunos. Na Investigação 3 que consta na sequência didática, o enunciado do problema é apresentado da seguinte forma:

Enunciado do jogo Escolhendo as rotas

Quatro pessoas devem dirigir de A para B ao mesmo tempo. Cada uma delas deve escolher qual rota seguir. Duas rotas estão disponíveis, uma via X e outra via Y.

Figura 11 – Ilustração do problema das rotas



Fonte: adaptado de [Osboner e Rubinstein \(2003, p. 33\)](#).

As estradas de A para X e de Y para B são curtas e estreitas; em cada caso, um carro leva 6 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 3 minutos. (Se dois carros dirigirem de A para X, por exemplo, cada carro levará 9 minutos.) As estradas de A para Y e de X para B são longas e largas; em A para Y, um carro leva 20 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 1 minuto; em X para B, um carro leva 20 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 0,9 minutos.

O auxílio visual fornecido pela imagem que ilustra a situação é muito importante por permitir que os alunos possam pensar melhor nas rotas calculando o tempo de cada uma. Optamos por apresentar a versão do problema que compreende um conjunto de quatro indivíduos, mas, dependendo do nível da turma, pode ser apresentado inicialmente para um grupo de 2 jogadores e, em seguida, expandir o raciocínio para quatro pessoas.

Depois desse momento, são necessários questionamentos para os alunos serem guiados na investigação proposta com a atividade. Na oportunidade, exploramos

os seguintes questionamentos:

Questionamentos norteadores da investigação

- Essa situação pode ser analisada à luz da teoria dos jogos? Justifique sua resposta.
- O que aconteceria se todos os quatro motoristas escolhessem a rota A–X–B, e ninguém escolhesse a rota A–Y–B? Nessa situação, um dos motoristas teria incentivo para mudar sua rota?
- Se dois motoristas escolhessem a rota A–X–B e dois escolhessem a rota A–Y–B, algum motorista teria incentivo para mudar sua rota? Analise cada situação e justifique sua resposta.

Este exercício está relacionado à aplicação de um conceito central na TJ, o Equilíbrio de Nash. Ao analisar como os motoristas podem tomar decisões estratégicas para ir de A para B, é possível constatar que para cada motorista escolher a melhor rota, é necessário considerar o comportamento dos outros motoristas. Assim, o Equilíbrio de Nash acontece nessa situação quando nenhum motorista pode reduzir seu tempo de viagem mudando unilateralmente de rota (assumindo que os outros motoristas mantêm suas escolhas). Isso significa que existe uma interdependência entre as escolhas para o resultado. Assim, o Equilíbrio de Nash representa uma condição em que ninguém se sente motivado a alterar sua escolha, mesmo quando o resultado coletivo não é o mais favorável.

Com a proposição da Investigação 3, os alunos são convidados a refletir sobre o jogo “Escolhendo as rotas”, entendendo, em um primeiro momento, porque a situação pode ser modelada como um jogo estratégico e, subsequentemente, investigando a existência de incentivos para que os jogadores (motoristas) alterem suas estratégias.

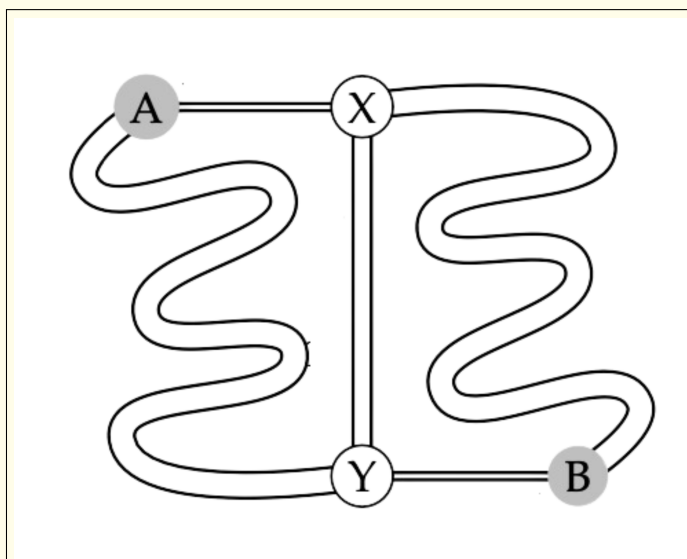
Esse processo permite que os jogadores investiguem o Equilíbrio de Nash na situação analisada. Esse conceito pode ser percebido no jogo quando os motoristas não têm incentivo para trocar de rotas considerando as escolhas potenciais dos outros. Assim, um motorista não pode melhorar a situação da sua viagem (reduzir tempo) mudando, unilateralmente, de rota.

Após discutir o problema, espera-se que os alunos compreendam sua dinâmica. Dessa forma, eles poderão calcular autonomamente o tempo gasto, considerando diferentes rotas. Seguindo, será proposta uma reformulação do problema. Agora, vamos considerar a introdução de um novo trecho XY, mudando a dinâmica do jogo ao trazer consigo novas possibilidades. A apresentação do enunciado do jogo é formulado na sequência didática da seguinte forma:

O jogo “Escolhendo as rotas”: uma reformulação

Agora, uma nova estrada foi construída de X para Y. Nessa estrada, um carro leva 7 minutos e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 1 minuto.

Figura 12 – Ilustração do problema das rotas (reformulação)



Fonte: adaptado de [Osboner e Rubinstein \(2003, p. 33\)](#).

Uma sugestão é que a apresentação dos jogos mencionados esteja apoiada no uso das imagens para facilitar o entendimento dos estudantes. Mediar essa apresentação com perguntas, trazendo os alunos para o contexto do problema e das diversas possibilidades que se apresentam a partir dele, também é uma recomendação nossa. Dito isso, a sequência didática sugere alguns questionamentos que podem ser levantados com o intuito de fazer com que os alunos investiguem a nova situação a partir das possibilidades que surgem com o novo caminho.

Questionamentos norteadores para a investigação

- Se os motoristas combinaram de seguir juntos por um mesmo caminho, saindo de A para B. Qual o percurso mais vantajoso?
- Considerando o percurso mais vantajoso. Se todos saírem de A às 7:00, qual horário devem chegar em B?
- Agora, uma nova estrada foi construída de X para Y. Como essa nova opção pode influenciar as escolhas dos motoristas?
- Se três motoristas escolherem A–X–Y–B e um motorista escolher A–Y–B, os motoristas que usam a nova estrada têm incentivo para mudar?

Nessa nova situação, espera-se que os alunos reflitam criticamente sobre as implicações que a inserção do novo trecho trazem para o problema. Eles devem entender o novo equilíbrio e as novas possibilidades. Então, identificarão qual a melhor opção para maximizar ganhos ou minimizar perdas. A reflexão crítica que esperamos oportunizar com essa Investigação 3 envolve: entender as opções disponíveis e avaliar como essas opções afetam os resultados para cada jogador. Os alunos devem conseguir identificar qual seria a melhor escolha em termos de maximização dos ganhos ou minimização das perdas, considerando não apenas as suas próprias decisões, mas também as escolhas dos outros jogadores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação, que se materializa a partir desta dissertação de Mestrado Profissional, buscou entender como a Teoria dos Jogos (TJ), por meio de uma abordagem investigativa, pode ser utilizada como objeto de estudo na educação escolar, especialmente no contexto do Ensino Médio. A análise das recomendações dos dois principais documentos que orientam a Educação Básica brasileira: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), permitiu identificar uma forte convergência entre o componente curricular Matemática com a resolução de problemas, desenvolvimento do pensamento crítico e capacidade de tomar decisões frente a situações, habilidades diretamente conectadas à TJ.

Ao possibilitar a exploração e análise de cenários (reais ou hipotéticos), em que as decisões individuais afetam os resultados próprios e coletivos, a TJ estimula os alunos a pensarem sobre suas escolhas, tendo em vista as consequências de suas ações. Esse potencial reflexivo, nos fez apostar que a TJ pode ser um recurso capaz de estimular o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos do Ensino Médio.

No nosso estudo, levantamos a seguinte questão de pesquisa:

- Como a TJ pode ser abordada no Ensino Médio para promover o pensamento crítico e desenvolver a capacidade de tomada de decisões?

Essa questão é respondida a partir da elaboração e proposição do nosso Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos (LabTJ Virtual) como Produto Educacional (PE). O LabTJ Virtual é um espaço de aprendizagem estruturado a partir de um *site* na *web*, pensado para ser um ambiente dinâmico e acessível a estudantes do Ensino Médio.

As diferentes experiências presentes no LabTJ Virtual, permitem que os seus usuários conheçam aspectos históricos, matemáticos e tenham acesso a atividades didáticas desenvolvidas a partir dessa dissertação com a temática da TJ. Especialmente por meio das três tarefas que compõem a sequência didática presente no LabTJ Virtual, os estudantes do Ensino Médio têm a oportunidade de desenvolver o raciocínio estratégico e a capacidade de tomada de decisões a partir de problemas que combinam a colaboração e a negociação de significados.

Chegando a este momento em que escrevemos nossas considerações finais, entendemos que não faz sentido em falar em “final da pesquisa”. Apesar deste ciclo se encerrar pela conclusão das atividades obrigatórias do mestrado, algumas perguntas que podem nortear outras pesquisas surgem, por exemplo:

- Como uma abordagem investigativa, baseada na TJ, poderia ser aplicada para outras áreas como Biologia ou Ciências Sociais?
- Como o LabTJ Virtual poderia ser aplicado no contexto da licenciatura em Matemática? Quais seriam suas potencialidades nesse caso?
- Quais potencialidades didáticas podem ser percebidas a partir da aplicação da sequência didática em uma turma de Ensino Médio?

Dessa forma, o trabalho desenvolvido e registrado nesta dissertação deixa claro que o nosso estudo atende as exigências de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Matemática e abre caminhos para futuras investigações na interface TJ e educação escolar.

Nesse momento, elencamos dois principais direcionamentos para a continuidade desta pesquisa. O primeiro diz respeito à aplicação do LabTJ Virtual, bem como das tarefas que o compõe, em contextos reais de ensino, visando entender os possíveis desdobramentos dessa aplicação na formação dos alunos. O segundo refere-se à expansão do LabTJ Virtual a partir da proposição de novas atividades e recursos que possibilitem a utilização do nosso PE em diversos contextos de ensino, abrangendo desde a Educação Básica até o Ensino Superior.

Enquanto uma pesquisa desenvolvida no âmbito de um Mestrado Profissional, este estudo reafirma a importância de aproximar a pesquisa científica desenvolvida na Universidade pública à sala de aula da Educação Básica. Esse movimento de aproximação do conhecimento científico com o conhecimento escolar pode contribuir para a formação crítica de alunos e professores, criando um espaço de discussão onde os sujeitos são convidados a refletir sobre suas escolhas diante da complexidade das situações da TJ.

Referências

- ALENCAR, A. I.; YAMAMOTO, M. E. A teoria dos jogos como metodologia de investigação científica para a cooperação na perspectiva da psicologia evolucionista. **Psico**, v. 39, n. 4, 2008.
- AMARAL, C. H. X. do. **Game theory, game design and strategical thinking**. 138 p. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2019. Tese (Doutorado em Design) — Escola Superior de Desenho Industrial, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
- ARAÚJO, D. L. de. O que é (e como faz) sequência didática? **Entrepalavras**, Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 322–334, jan./jul. 2013. Acesso em: 23 ago. 2017. Disponível em: <http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/46/texto%201%20Aula%205.pdf>.
- ARAÚJO, J. P. de; JÚNIOR, G. E. S. Um tópico em história da teoria dos jogos: a análise dos jogos simétricos por Émile borel e john von neumann. In: **Anais do Encontro de Economia da Região Sul**. [S.l.]: [s.n.], 2017.
- BARRICHELO, F. **Estratégias de Decisão**. 1. ed. São Paulo: Agbook, 2017.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.
- BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BURLAMAQUI, L. **Teoria dos Jogos: uma introdução à análise de conflitos**. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2002.
- CAMPOS, C. R.; CARDOSO, M. J. R. A teoria dos jogos e a mente brilhante de john nash. **Prometeica**, n. 10, p. 8, 2015.
- CAPES, B. **Documento de Área – Ensino**. Brasília: [s.n.], 2019.
- CORRADI, D. K. S. Investigações matemáticas. **Revista da Educação Matemática**, v. 1, 2011.
- COSTA, D. E.; GONCALVES, T. O. Compreensões, abordagens, conceitos e definições de sequência didática na área de educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 36, n. 72, p. 358–388, 2022.
- CÂMARA, S. F. **Teoria dos Jogos**. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2011.
- D'AMBROSIO, U. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 44–48, 1985.
- FELÍCIO, M. S. N. B. **O Método de Formação Sequência Fedathi: o bom formador sob a perspectiva da Formação Fedathi Generalizada**. 262 p. Tese (Tese (Doutorado em Educação)) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2024.

- FIANI, R. **Teoria dos jogos: para cursos de administração e economia**. 4. ed. [S.l.]: Elsevier, 2015.
- FIDELIS, D. P.; FALEIROS, P. B. Dilema do prisioneiro na análise experimental do comportamento: uma revisão sistemática da literatura. **Revista Brasileira de Análise do Comportamento**, v. 13, n. 1, 2017.
- FIGUEIREDO, R. S. Teoria dos jogos: conceitos, formalização matemática e aplicação à distribuição de custo conjunto. **Gestão & Produção**, v. 1, p. 273–289, 1994.
- FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. In: **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, 1999.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 43. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011. 143 p.
- FREITAS, M. R. C. P. Mapeamento bibliográfico do ensino por investigação: o que nos dizem as pesquisas acadêmicas? In: **CONEDU – Congresso Nacional de Educação**. [S.l.: s.n.], 2023. ISSN 2358-8829.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Teoria dos Jogos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2006.
- GONZÁLEZ-DÍAZ, J.; GARCÍA-JURADO, I.; FIESTRAS-JANEIRO, M. G. **An Introductory Course on Mathematical Game Theory and Applications**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2021.
- GUERRA, A. de L. R. Metodologia da pesquisa científica e acadêmica. **Revista OWL (OWL Journal) – Revista Interdisciplinar de Ensino e Educação**, v. 1, n. 2, p. 149–159, 2023.
- HOLT, C. A.; ROTH, A. E. The nash equilibrium: A perspective. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 101, n. 12, p. 3999–4002, 2004.
- HOTZ, H. A short introduction to game theory. **Bangladesh Journals Online (JOL)**, v. 21, p. 1–22, 2006.
- JUCÁ, R. de S.; PIRONEL, M. Investigação matemática: um caminho para o ensino da matemática: Mathematical research a pathway to teaching mathematics. **Revista Cocar**, n. 14, 2022.
- LARAKI, R.; RENAULT, J.; SORIN, S. **Mathematical Foundations of Game Theory**. Cham: Springer, 2019.
- LEANDRO, G. d. S. **Teoria dos Jogos Aplicada ao Estudo do Mercado de Trabalho: Uma Análise da Relação entre Risco e Retorno**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018. Disponível em: <<https://tede.ufrj.br/jspui/bitstream/jspui/4765/2/2018%20-%20Gilmar%20dos%20Santos%20Leandro.pdf>>.
- MARA, S. F. **Teoria dos jogos**. [S.l.]: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2011. 92 p.

- MARINHO, R. **Prática na Teoria: Aplicações da teoria dos jogos e da evolução aos negócios**. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.
- MASCHLER, M.; SOLAN, E.; ZAMIR, S. **Game Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- MAZALOV, V. **Mathematical Game Theory and Applications**. Chichester: Wiley, 2014.
- MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- MILANI, R. Transformar exercícios em cenários para investigação: uma possibilidade de inserção na educação matemática crítica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 31, p. 1–18, maio 2020.
- MONTEIRO, C. S. A decisão racional na teoria dos jogos. In: **Anais do Encontro Preparatório Para o Congresso Nacional do COMPEDI**. [S.l.: s.n.], 2008.
- OLIVEIRA, R. S.; PIRES, L. S.; APARECIDA, S. d. A.; MOREIRA, W. L. O uso da plataforma canva como suporte no processo de ensino-aprendizagem. **Mafuá**, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, n. 41, 2024. ISSN 1806-2555.
- OSBONER, M. J.; RUBINSTEIN, A. **Teoria dos Jogos: uma introdução**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2003.
- OSBORNE, M. J. **An Introduction to Game Theory**. Toronto (Canadá): Oxford, 2004.
- PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. [S.l.]: Autêntica Editora, 2019.
- PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. 160 p. ISBN 9788551305867.
- PONTE, J. P. M. da. Investigar, ensinar e aprender. In: **Actas do ProfMat**. Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003. p. 25–39.
- PONTES, E. A. S. A teoria dos jogos: Conflito e colaboração. **RACE — Revista de Administração do CESMAC**, v. 1, p. 46–53, 2018.
- POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. Elaboração/formulação/proposição de problemas em matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, v. 6, n. 12, p. 1–28, 2022.
- RIBEIRO, R. J. Ainda sobre o mestrado profissional. **RBPG**, Brasília, v. 2, n. 6, p. 313–315, 2006.
- SANTOS, B. O. dos. **As relações pedagógicas – metodológicas vivenciadas entre professores que ensinam matemática em um laboratório virtual**. 181 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação de matemática)) — Universidade de Juiz de Fora–MG, Juiz de Fora, 2020.
- SARTINI, B. A.; GARBUGIO, G.; BORTOLOSSI, H. J.; SANTOS, P. A.; BARRETO, L. S. Uma introdução à teoria dos jogos. In: **Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. [S.l.]: Universidade Federal da Bahia, 2004.

SARTINI, B. A. et al. Uma introdução à teoria dos jogos. In: **Bienal da SBM, Anais**. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004. v. 2, p. 62. Acesso em: 11 jan. 2022. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>>.

SBM. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat**. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/4/sites/4/2024/09/Regimento-31-08-2024.pdf>>.

SILVA, E. S. da; SOUZA, L. R. S. e; BARBOSA, L. S. de O.; SOUZA, I. C. de. Estágio supervisionado: a experiência do uso da plataforma canva no meio educacional no ensino médio. **RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar**, v. 4, n. 7, p. e473668–e473668, 2023. Acesso em: 22 dez. 2024. Disponível em: <<https://orcid.org/0009-0000-4759-6874>>.

SILVER, N. **On the Edge: The Art of Risking Everything**. New York: Penguin Press, 2024.

SKOVSMOSE, O. **Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

SOUZA, A. S. de; OLIVEIRA, G. S. de; ALVES, L. H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 43, p. 64–83, 2021.

SOUZA, M. J. A. Sequências no ensino da matemática: retrospectiva histórica de dewey a fedathi. In: SOUSA, F. E. E. d.; VASCONCELOS, F. H. L.; NETO, H. B.; LIMA, I. P. d.; SANTOS, M. J. C. d.; ANDRADE, V. S. d. (Ed.). **Sequência Fedathi: uma proposta para o ensino de matemática e ciências**. Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 49–64.

SOUZA, W. A. V. de; MALVAZI, M. C. Teoria dos jogos: uma atividade de tomada de decisão no contexto do programa residência pedagógica. **REAMEC: Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 8, n. 1, p. 323–342, 2020.

TANIMOTO, J. **Fundamentals of evolutionary game theory and its applications**. Japão: Springer, 2015.

WALKER, P. **An Outline of the History of Game Theory**. [S.l.], 1995. 30 p. (9504). Disponível em: <<https://ageconsearch.umn.edu/record/263767>>.

WALKER, P. **A Chronology of Game Theory**. 2012. Online resource. Disponível em: <<https://competitionandappropriation.econ.ucla.edu/wp-content/uploads/sites/95/2017/08/HistoryGameTheory.pdf>>.

Apêndices

APÊNDICE A – LABTJ VIRTUAL

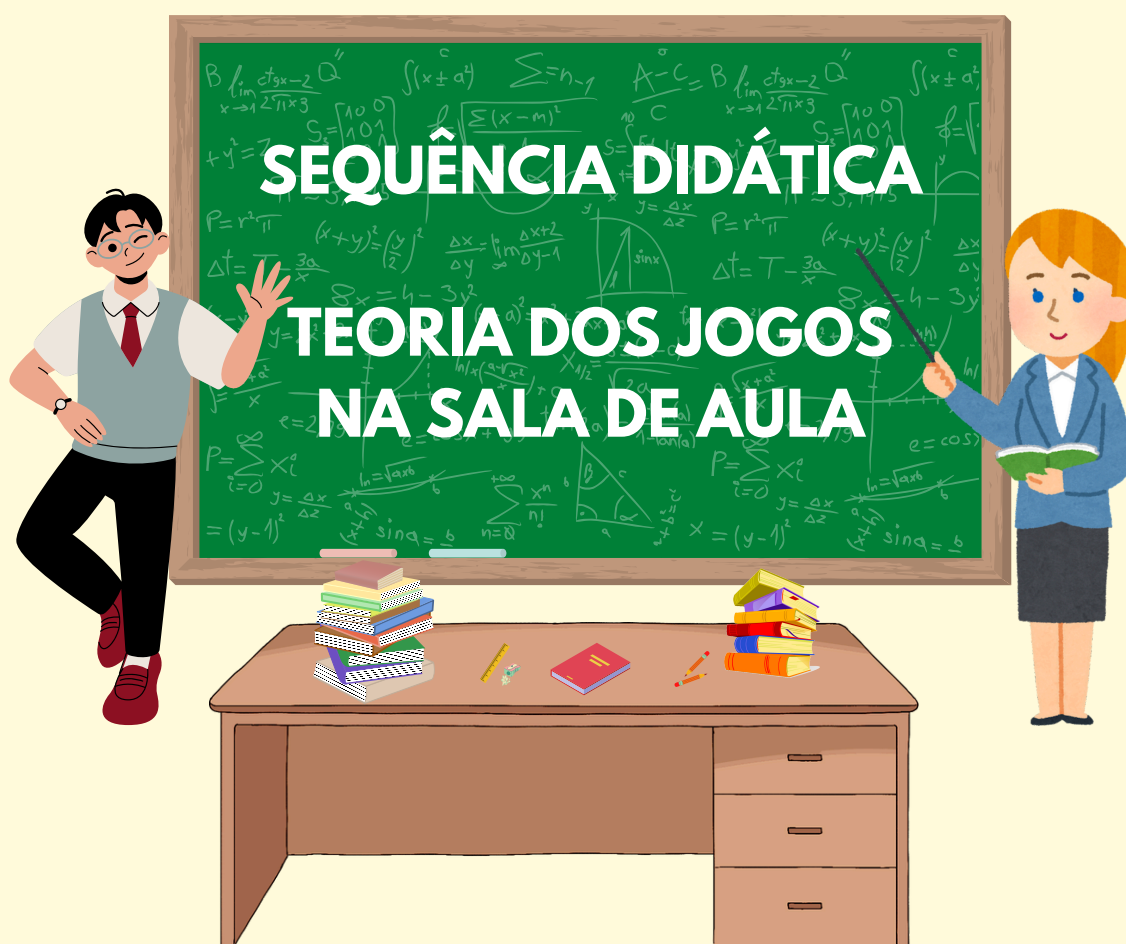


Link: <<https://produtoeducacional122.my.canva.site/produtoeducacionalproformat>>.

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE – UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – CCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA – PROFMAT
PRODUTO EDUCACIONAL



FRANCISCO NETO LIMA DE SOUZA
DÉBORA BORGES FERREIRA



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

NATAL /RN - 2025

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a) do Ensino Médio e Professor(a),

Esta sequência didática é desdobramento de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na instituição associada Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). As três investigações que constituem a sequência didática tem como tema principal a Teoria dos Jogos. Além das atividades, apresentamos recomendações sobre a aplicação e orientamos o acesso ao Laboratório Virtual de Teoria dos Jogos (LabTJ Virtual), um espaço digital onde, além da presente sequência didática, podem ser encontrados materiais suplementares de estudo sobre Teoria dos Jogos.

Francisco Neto Lima de Souza
Débora Borges Ferreira



Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN
Campus Universitário-Lagoa Nova, Natal-RN, 59078-970

SUMÁRIO

Sobre as atividades	1
Investigação 1: O que é um jogo?	2
Folha da investigação 1 - O que é um jogo?	3
Investigação 2: O dilema dos prisioneiros	7
Folha da investigação 2 - O dilema dos prisioneiros	8
Investigação 3: Escolhendo rotas	11
Folha de investigação 3 - Escolhendo rota	12

SOBRE AS ATIVIDADES

A sequência didática que consta nesse trabalho foi desenvolvida com base na competência 3, específica da área Matemática e suas Tecnologias, indicada na BNCC. Foi organizada em três partes, que pela aproximação com a investigação matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), optamos por chamar de investigação, a saber:

- **Investigação 1:** O que é um jogo?;
- **Investigação 2:** O dilema dos prisioneiros;
- **Investigação 3:** Escolhendo rotas.

Cada uma das investigações, é orientada por uma estrutura que inclui apresentação do problema; modelagem matemática; questionamentos orientadores da investigação; e finalização. O tempo previsto para a aplicação de cada uma deles é 90 minutos.

Ao propor essa sequência didática, nosso objetivo não é fornecer receitas infalíveis que devem ser seguidas rigidamente; pelo contrário, é fundamental adaptar as atividades à realidade específica em que serão aplicadas.

Assim, embora o trabalho esteja sob a licença *Creative Commons*, sinta-se a vontade para fazer adaptações das ideias com o fim puramente didático, garantindo que a sequência de atividades atenda às necessidades do seu público. Ao fazer isso, lembre-se de referenciar os autores que dedicaram tempo e esforço para elaborar este material.

INVESTIGAÇÃO 1 - O QUE É UM JOGO?

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio.
Objetivos	• Compreender o conceito de jogo no contexto da TJ; • Analisar situações de tomada de decisão, identificando se podem ser caracterizadas como jogos na perspectiva da TJ; • Estudar uma aplicação de TJ a partir de uma situação prática de competição entre duas empresas, explorando possíveis resultados e estratégias.
Competência específica da área Matemática e suas Tecnologias	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Folhas de papel para anotações; • Canetas;
Tempo estimado	90 minutos.

FOLHA DE ATIVIDADE

INVESTIGAÇÃO 1 - O QUE É UM JOGO?

TEORIA DOS JOGOS

Quando crianças, brincamos com os mais diversos tipos de jogos que podem ser de tabuleiro, cartas ou até mesmo eletrônicos. Esses tipos de jogos têm uma característica em comum: existe sempre um ganhador e o objetivo, na grande maioria das vezes, é a vitória e para que isso aconteça, esse ganhador precisa derrotar seus adversários. Diferente das escolhas simples dos jogos que jogamos quando crianças, as decisões na realidade envolvem estratégias de sobrevivência. Essas situações, analisadas pela Teoria dos Jogos, mostram que as decisões estratégicas não são apenas individuais, mas interdependentes, influenciadas pelo comportamento de todos os envolvidos. Embora o estudo das escolhas individuais também seja importante, é necessário reconhecer que o comportamento de um indivíduo de maneira singular não é suficiente para todas as questões envolvidas em um processo de tomada de decisão estratégico. Com isso, quando nos referimos a jogo no contexto deste estudo, estamos nos referindo a uma perspectiva mais próxima do “jogo da vida”, onde ocorrem situações de conflito, em que os indivíduos envolvidos precisam fazer escolhas, considerando as potenciais escolhas dos sujeitos que coexistem na situação.

1. Qual é a principal diferença entre os jogos infantis e o “jogo da vida” mencionado no texto? O que o autor quer dizer com “jogo da vida”? Por que as decisões nesse tipo são mais complexas do que as decisões em jogos infantis?



EXEMPLO 1

Dois criminosos são presos por um crime, mas a polícia não tem provas suficientes para condená-los. Eles são colocados em salas separadas e recebem uma proposta:

- Se um dos prisioneiros confessar (trair) e o outro permanecer em silêncio, o que confessou será liberado e o outro receberá a pena máxima de 10 anos de prisão.
- Se ambos confessarem, ambos receberão 5 anos de prisão.
- Se ambos ficarem em silêncio, serão condenados a 1 ano de prisão por um crime menor.



2. Quais agentes estão envolvidos na situação?

3. Na situação há conflito de interesses ou necessidade de cooperação?

4. Na situação, você identifica algum elemento de competição, cooperação ou interdependência de decisões? Quais?

5. Essa situação poderia ser analisada pela teoria jogos? Justifique.

EXEMPLO 2

Uma pessoa está decidindo se deve comprar uma casa. Nessa situação, ela precisa considerar diversos fatores como o tamanho da casa, localização, estilo, e se há ou não certos atributos desejáveis, como uma piscina ou um jardim.

6. Quais agentes estão envolvidos na situação?



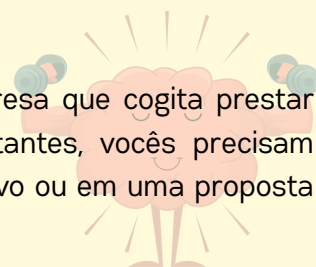
7. Na situação há conflito de interesses ou necessidade de cooperação?

8. Na situação, você identifica algum elemento de competição, cooperação ou interdependência de decisões? Quais?

9. Essa situação poderia ser analisada pela teoria jogos? Justifique.

EXERCITANDO O CÉREBRO!

Cada um dos grupos, são representantes de uma empresa que cogita prestar serviços a prefeitura local da cidade. Como representantes, vocês precisam decidir se a empresa deve investir em *marketing* agressivo ou em uma proposta econômica mais vantajosa.



10. Como o sucesso da sua empresa pode ser influenciado pela decisão das empresas concorrente?

11. Quais seriam as consequências de a sua empresa investir em marketing enquanto as outras optam por uma proposta econômica mais vantajosa?

12. O que poderia acontecer caso todas as empresas optarem por propostas econômicas mais vantajosas?

13. Quais são os riscos associados a cada uma das estratégias escolhidas (marketing agressivo vs. proposta econômica)?



INVESTIGAÇÃO 2 - O DILEMA DOS PRISIONEIRO

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio.
Objetivos	• Analisar o jogo o “O dilema dos prisioneiros”, jogo clássico da TJ; • Modelar o jogo “O dilema dos prisioneiros” por meio da linguagem matemática da TJ; • Desenvolver, por meio da análise do jogo “O dilema dos prisioneiros”, o raciocínio estratégico, tomando ciência de que decisões individuais impactam o coletivo.
Competência específica da área Matemática e suas Tecnologias	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Folhas de papel para anotações; • Canetas; • Quadro com projetor (para explicar o contexto e regras);
Tempo estimado	90 minutos.

FOLHA DE ATIVIDADE

INVESTIGAÇÃO 2 - O DILEMA DO PRISIONEIRO

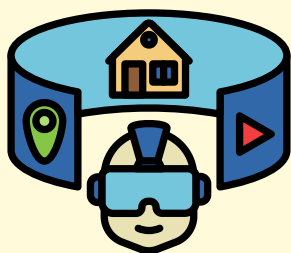
APRESENTAÇÃO DO JOGO

Dois suspeitos de um grande crime são mantidos em celas separadas. Há provas suficientes para condenar cada um deles por um crime menor, mas não há provas suficientes para condenar nenhum deles pelo crime maior, a menos que um deles atue como informante contra o outro (delate).



- se ambos ficarem quietos, cada um será condenado por crime menor e passará um ano na prisão.
- se um deles, e apenas um, delatar, será liberto e usado como testemunha contra o outro, que passará quatro anos na prisão.
- se ambos delatarem, cada um passará três anos na prisão.

SIMULAÇÃO DO JOGO



Organizados em duplas, vamos simular o jogo "O dilema dos prisioneiros". Cada um de vocês deve decidir individualmente se vai 'ficar quieto' ou 'denunciar', sem revelar sua escolha até o momento combinado. **Após todos fazerem suas escolhas, vamos analisar os possíveis resultados de cada ação.**

1. Você e sua dupla fizeram as suas escolhas. Registre aqui entendendo qual foi a sentença empregada para cada um dos jogadores, diante da escolha que vocês fizeram.

Questionamentos orientadores



2. Quais são os incentivos para trair ou cooperar no jogo “O dilema dos prisioneiros”?

3. O que acontece se ambos os jogadores escolherem trair? Esse é o melhor resultado possível?

4. Como a confiança entre os prisioneiros pode mudar o resultado do jogo?

5. Se o jogador 2 optar pela estratégia confessar, quais serão os possíveis penalidades do jogador 1?

6. Se o jogador 2 optar pela estratégia não confessar, as possíveis penalidades do jogador 1?

FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Quais são os jogadores do jogo "O dilema dos prisioneiros"?

Quais são as estratégias de cada jogador?

Quais são todas as combinações possíveis de escolhas que os jogadores podem fazer neste jogo?

Diante da simulação feita anteriormente, vamos organizar as possibilidades em um quadro de recompensas, que mostra os anos de prisão dependendo das escolhas de cada um. Em da célula do quadro, indicaremos um par ordenado que contém as seguintes informações:

(Pena para o Jogador 1, Pena para o Jogador 2)

Na célula 1, indicaremos a pena para o Jogador 1 e para o Jogador 2 no par ordenado indicado para quando ambos os jogadores escolhem confessar.

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar		
	Negar		

Um conjunto finito de jogadores, um espaço de estratégia; e as recompensas expressas no quadro formam juntas um jogo.

INVESTIGAÇÃO 3 - ESCOLHENDO AS ROTAS

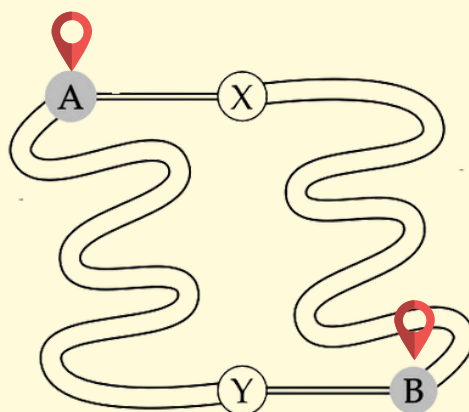
Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio.
Objetivos	• Compreender o conceito de Equilíbrio de Nash e a sua importância na TJ; • Analisar o jogo “Escolhendo rotas”, identificando o Equilíbrio de Nash na situação;
Competência específica da área Matemática e suas Tecnologias	Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Recursos	• Atividades impressas; • Folhas de papel para anotações; • Canetas; • Quadro com projetor (para explicar o contexto e regras);
Tempo estimado	90 minutos.

FOLHA DE ATIVIDADE



INVESTIGAÇÃO 3 - ESCOLHENDO ROTAS

Quatro pessoas devem dirigir de A para B ao mesmo tempo. Cada uma delas deve escolher qual rota seguir. Duas rotas estão disponíveis, uma via X e outra via Y.



- As estradas de A para X e de Y para B são curtas e estreitas; em cada caso, um carro leva 6 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 3 minutos. (Se dois carros dirigirem de A para X, por exemplo, cada carro levará 9 minutos.)
- As estradas de A para Y e de X para B são longas e largas; em A para Y, um carro leva 20 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 1 minuto; em X para B, um carro leva 20 minutos, e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 0,9 minutos.

1. Essa situação pode ser analisada à luz da teoria dos jogos? Justifique sua resposta.

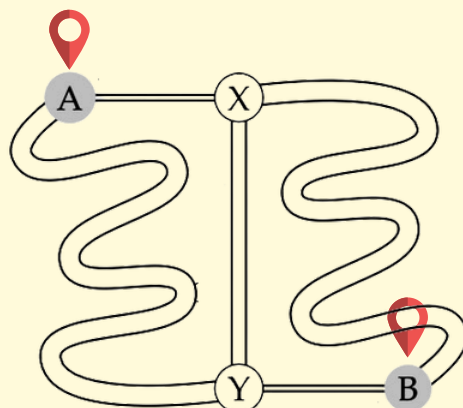
2. O que aconteceria se todos os quatro motoristas escolhessem a rota A-X-B, e ninguém escolher a rota A-Y-B? Nessa situação, um dos motoristas teria incentivo para mudar sua rota?

3. Se dois motoristas escolhessem a rota A-X-B e dois escolhessem a rota A-Y-B, algum motorista teria incentivo para mudar sua rota? Analise cada situação e justifique sua resposta.



REFORMULANDO O PROBLEMA

Agora, uma nova estrada foi construída de X para Y. Nessa estrada, um carro leva 7 minutos e cada carro adicional aumenta o tempo de viagem por carro em 1 minuto.



4. Se os motoristas combinaram de seguir juntos por um mesmo caminho, saindo de A para B. Qual o percurso mais vantajoso?

5. Considerando o percurso mais vantajoso. Se todos saírem de A às 7:00, qual horário devem chegar em B?



6. Se três motoristas escolherem A-X-Y-B e um motorista escolher A-Y-B, os motoristas que usam a nova estrada têm incentivo para mudar?

7. Como essa nova opção pode influenciar as escolhas dos motoristas?

