



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



JOSÉ JOSIMÁRIO DA SILVA BASTO

MÉDIAS E OUTRAS MEDIDAS ESTATÍSTICAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES

ORIENTADOR:
PROF. DR. CARLOS ALEXANDRE GOMES DA SILVA

Natal - RN
Junho de 2025

JOSÉ JOSIMÁRIO DA SILVA BASTO

MÉDIAS E OUTRAS MEDIDAS ESTATÍSTICAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Dissertação de Mestrado sob o título **Médias e outras medidas estatísticas: conceitos e aplicações**, apresentada por José Josimário da Silva Basto e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROF-MAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof^o. Dr^o. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Orientador

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Prof^a. Dr^o Esteban Pereira da Silva.

Examinador Interno

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Prof^o. Dr^o Elthon John Rodrigues de Medeiros.

Examinador externo

IFRN - Instituto Federal do Rio Grande do Norte - Campus Central

Natal/RN - junho de 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Basto, José Josimário da Silva.

Médias e outras medidas estatísticas: conceitos e aplicações
/ José Josimário da Silva Basto. - 2025.
84 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN,
2025.

Orientação: Carlos Alexandre Gomes da Silva.

1. Matematica aplicada - Dissertação. 2. Médias -
Dissertação. 3. Desigualdades clássicas das médias, outras
medidas estatísticas - Dissertação. 4. Medidas de dispersão -
Dissertação. 5. Planilhas eletrônicas - Dissertação. 6. Recursos
e tecnologias digitais - Dissertação. I. Silva, Carlos Alexandre
Gomes da. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 519.222(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dedico primeiramente a Deus, sem a permissão dele nada é possível. Em seguida, dedico a toda minha família, em especial a minha esposa Josilaini de Oliveira Santos, a minha mãe Maria José Gomes da Silva Bastos, ao meu pai José Gilson de Bastos e a todos os amigos e colegas que me ajudaram de forma direta e indireta.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço ao meu senhor Deus pelo dom da vida e também por ter me proporcionado experiências ímpares no decorrer deste curso. Sem a permissão dele nada é possível. Com toda força e amor deste mundo, agradeço a minha família e amigos pelo estímulo, carinho e paciência durante essa fase da minha vida. Em especial, agradeço a minha companheira de vida, minha esposa Josilaini de Oliveira Santos. Essa que sempre me deu forças e cuidou de tudo que estava ao seu alcance para que eu pudesse concluir esse mestrado. Foram muitas viagens como copiloto para que eu pudesse estar presente nas aulas, inúmeras palavras de carinho e atos de cuidado. A mesma acreditou que eu concluiria esse mestrado quando eu mesmo não achava que iria concluir. Eu agradeço pela parceria, incentivo e reciprocidade na vida. Obrigado por tudo meu amor, eu te amo muito. Em especial, a minha mãe Maria José Gomes da Silva Basto, agradeço por toda educação que pudeste me proporcionar nas condições que tivestes. Obrigado por todo esforço em cuidar de mim. Agradeço também ao meu orientador, o professor Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva, por toda bagagem teórica repassada durante a produção deste trabalho e nas aulas na qual tive a oportunidade de ser seu aluno. Com grande satisfação agradeço em especial aos meus amigos e colegas de turma: Adriano Costa, Adilson Júnior, Ewerton Paulo, Evaldo Araújo, Jeferson Azevedo, Mikaelly Guimarães, Francisco Neto, David Luan, Jafia Gileane, Júlio César, Júnior Negão, Joel Ferreira e Robson Lucas. Estes fizeram dessa difícil caminhada algo mais satisfatório e gratificante. Finalmente, agradeço a todos os professores que passaram em minha vida, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior e também aos meus amigos que contribuíram de alguma forma na minha formação acadêmica ou social.

A todos meus sinceros agradecimentos!

“Tudo tem seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do céu!” - Eclesiastes 3:1

Resumo

Esta dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), tem como objetivo investigar e propor abordagens pedagógicas para o ensino de médias e medidas estatísticas nos ensinos Fundamental e Médio. O estudo enfatiza a importância desses conceitos na formação de cidadãos críticos e capazes de interpretar e analisar dados em um mundo cada vez mais orientado por informações quantitativas. Para isso, foram exploradas estratégias didáticas que incorporam o uso de planilhas eletrônicas, como o Microsoft Excel e o LibreOffice Calc, com o intuito de tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico, visual e conectado com a realidade digital dos estudantes. A proposta busca não apenas facilitar a compreensão dos conteúdos estatísticos, mas também desenvolver competências tecnológicas e analíticas. O material desenvolvido pode ser utilizado de forma integral ou adaptada por professores, conforme o nível e as necessidades de suas turmas, e também se mostra acessível a alunos autodidatas. Os resultados apontam que a utilização de recursos computacionais contribui significativamente para o engajamento dos estudantes e para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos estatísticos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática aplicada, Médias, desigualdades clássicas das médias, outras medidas Estatísticas; Medidas de dispersão; Planilhas eletrônicas; recursos e Tecnologias digitais.

Abstract

This dissertation, developed within the scope of the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network (PROFMAT), aims to investigate and propose pedagogical approaches for teaching averages and statistical measures in middle and high school education. The study highlights the importance of these concepts in the formation of critical citizens capable of interpreting and analyzing data in a world increasingly driven by quantitative information. To this end, didactic strategies incorporating the use of spreadsheet software, such as Microsoft Excel and LibreOffice Calc, were explored to make the learning process more dynamic, visual, and aligned with students' digital realities. The proposal seeks not only to facilitate the understanding of statistical content but also to develop technological and analytical skills. The material can be used in full or adapted by teachers according to the level and needs of their students, and it is also accessible to self-taught learners. The results indicate that the use of digital tools significantly contributes to student engagement and promotes a more meaningful understanding of statistical concepts.

KEYWORDS : Applied Mathematics; Averages; Classical Mean Inequalities; Other Statistical Measures; Measures of Dispersion; Spreadsheets; Digital Resources and Technologies.

Sumário

1	Introdução, motivações e preliminares	1
2	Médias, o que são e para que servem?	4
2.1	Introdução	4
2.2	Média Aritmética	5
2.3	Média Geométrica	5
2.4	Média Harmônica	6
2.5	Média Quadrática	6
2.6	Desigualdades entre as médias	7
2.6.1	Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica	8
2.6.2	Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica	11
2.6.3	Desigualdade entre as Médias Aritmética e Quadrática	12
3	Outras médias e medidas importantes	21
3.1	A média móvel	21
3.2	Medidas de Tendência Central	30
3.2.1	A Mediana	31
3.2.2	A Moda	32
3.3	Medidas de Dispersão	32
3.3.1	A Amplitude	32
3.3.2	Desvio Médio	32
3.3.3	A Variância e Desvio Padrão	33
3.4	Outros índices importantes	35
3.4.1	A Importância do Contato Precoce com Conceitos Es-	
	tatísticos e Financeiros	35
3.4.2	A Importância dos Conceitos Estatísticos	35

3.4.3	A Importância dos Conceitos Financeiros	36
3.4.4	Desenvolvimento de Habilidades para a Vida Profissional e Pessoal	37
3.4.5	A Importância dessas ideias na Formação Escolar	37
3.4.6	O que são ações de uma empresa?	38
3.4.7	Como uma empresa entra na bolsa de valores?	38
3.4.8	Quais são as vantagens para uma empresa ao entrar na bolsa?	39
3.5	Alguns parâmetros para avaliar boas ações	40
3.5.1	Dividend Yield (DY)	40
3.5.2	Preço/Lucro (P/L)	41
3.5.3	Preço/Valor Patrimonial (P/VP)	41
3.5.4	ROE (Return on Equity)	41
4	Uma proposta para sala de aula!	43
4.1	Introdução	43
4.2	Médias e medidas estatísticas × planilhas eletrônicas	44
4.2.1	ATIVIDADE 01 - Médias	44
4.2.2	ATIVIDADE 02 - Calculando a Média Aritmética no Excel – Um Estudo sobre o Desempenho Escolar.	47
4.2.3	ATIVIDADE 03 - Atividade: Média ou Mediana? Analisando Consumo de Energia com o Excel.	49
4.2.4	ATIVIDADE 04 - Analisando a Variância – A média é igual... mas o desempenho é?	53
4.2.5	ATIVIDADE 05 - Construindo o gráfico de dispersão	56
4.2.6	ATIVIDADE 06 – Calculando o desvio padrão.	59
4.2.7	ATIVIDADE 06 – Analisando o melhor investimento – O desvio Padrão me diz!	62
	Considerações finais	67

Lista de Figuras

4.1	Tabela contendo as notas e seus respectivos pesos	44
4.2	Tabela contendo os dados do enunciado	45
4.3	Tabela Somando os pesos	45
4.4	Tabela inserindo o comando =SOMARPRODUTO	47
4.5	Tabela Média aritmética ponderada	47
4.6	Tabela boletim contendo as respectivas notas	48
4.7	Tabela notas do boletim colocadas no excel	48
4.8	Tabela Calculando a média das notas de cada aluno	48
4.9	Tabela com as respectivas médias	49
4.10	Tabela contendo os consumos	50
4.11	Tabela consumos colocados no excel	51
4.12	Tabela calculando a média aritmética dos consumos	51
4.13	Tabela encontrando a mediana	52
4.14	Gráfico dos consumos mensais	52
4.15	Tabela lançamentos de Bruno e Ana	53
4.16	Tabela média aritmética dos lançamentos	54
4.17	Tabela encontrando a variância dos lançamentos de Bruno	54
4.18	Tabela encontrando a variância dos lançamentos de Ana	55
4.19	Tabela variância dos lançamentos de Bruno e Ana	55
4.20	Tabela com colunas separadas	56
4.21	Tabela inserido o gráfico de dispersão	57
4.22	Gráfico de dispersão de Bruno.	57
4.23	Gráfico de dispersão de Ana.	58
4.24	Gráfico de dispersão de Bruno com linha de tendência	58
4.25	Gráfico de dispersão de Ana com linha de tendência	58

4.26 Tabela notas de Beto e Ravi	60
4.27 Tabela notas de Beto e Ravi np excel	60
4.28 Tabela inserindo o comando = DESVPAD.A	60
4.29 Tabela Desvio padrão referente as notas de Beto	61
4.30 Tabela inserindo o comando = DESVPAD.A	61
4.31 Tabela Desvio padrão referente as notas de Ravi	61
4.32 Gráfico de dispersão das notas de Beto com linha de tendência	61
4.33 Gráfico de dispersão das notas de Ravi com linha de tendência	62
4.34 Tabela com os retornos dos fundos A e B	62
4.35 Gráfico média aritmética dos fundos A e B	63
4.36 Gráfico média aritmética dos fundos A e B	63
4.37 Tabela Calculando o Desvio padrão do fundo A	64
4.38 Tabela com o Desvio padrão do fundo A	64
4.39 Tabela Calculando o Desvio padrão do fundo B	64
4.40 Tabela com o Desvio padrão do fundo A	65
4.41 gráfico de dispersão do fundo A com a linha de tendência	65
4.42 gráfico de dispersão do fundo B com a linha de tendência	66

Lista de Tabelas

1 Introdução, motivações e preliminares

O ensino da Matemática carrega grandes responsabilidades. Em um mundo onde a maioria das decisões é tomada com base em dados quantitativos, é essencial possuir conhecimentos básicos para fazer escolhas fundamentadas, independentemente da profissão, seja professor, jardineiro, vendedor, empresário, médico ou qualquer outra.

A escola, como instrumento de transformação e preparação para a vida, tem o papel fundamental de proporcionar aos estudantes experiências matemáticas que os capacitem a tomar decisões embasadas e conscientes. Isso se alinha à afirmação de [3]: “No ensino médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos.”

Neste trabalho, abordamos um conceito matemático que, frequentemente, é tratado apenas como uma aplicação técnica baseada na repetição, sendo utilizado principalmente em exercícios de fixação. Embora essa abordagem tenha seu valor, quando nos limitamos a esse aspecto, deixamos de explorar a riqueza e as potencialidades desse conceito.

O ensino das médias matemáticas se justifica de diversas formas, tanto por sua utilidade na vida cotidiana quanto por seu papel estruturante no ensino da Matemática. Dentre as habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio de acordo com a [3], destacamos: “resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).”

O estudo das médias dá suporte a diversas áreas do conhecimento científico, como Física, Economia, Biologia e Ciências Sociais, evidenciando sua relevância no ensino interdisciplinar. A média é uma ferramenta essencial na interpretação de dados e tomada de decisões fundamentadas em diferentes contextos, como

Economia, Saúde e Educação. Muitas dessas decisões envolvem a análise de informações estatísticas apresentadas pelos meios de comunicação, como televisão, redes sociais e jornais.

Dessa forma, o estudo das médias está diretamente relacionado ao desenvolvimento do pensamento estatístico, sendo um passo inicial para aplicações mais avançadas, como o estudo do desvio padrão, da variância e da inferência estatística. Esses conceitos permitem a análise e compreensão de fenômenos sociais e econômicos, como desigualdade de renda, inflação, indicadores de qualidade da educação, desemprego e expectativa de vida. Um exemplo recente e amplamente divulgado é a média móvel de casos de COVID-19. A compreensão desse conceito foi crucial para interpretar a evolução da pandemia e embasar medidas preventivas.

Diante do exposto, este trabalho visa promover um estudo aprofundado sobre o tema, oferecendo suporte aos professores do Ensino Básico, que se dedicam diuturnamente à consolidação de uma educação de qualidade.

O diferencial deste trabalho em relação ao ensino tradicional das médias é que buscamos construir um texto rigoroso do ponto de vista matemático, ao mesmo tempo em que enriquecemos a abordagem com diversas aplicações. Nosso objetivo é demonstrar como os diferentes tipos de médias e as relações entre elas podem ser ferramentas poderosas para resolver desde problemas matemáticos teóricos até situações reais do cotidiano.

Estrutura do Trabalho

Nosso trabalho está estruturado em seis capítulos:

1. **Introdução, motivações e preliminares** – Apresentamos a motivação e a justificativa do estudo, destacando sua relevância no ensino da Matemática e em aplicações reais.
2. **Médias: o que são e para que servem?** – Exploramos os aspectos conceituais das médias, definindo cada uma delas e finalizando com exercícios e análises de aplicações diretas.

3. **Outras Médias e Medidas Importantes** – Abordamos médias menos usuais na educação básica, mas de grande relevância em diversas áreas, como as médias ponderadas, geométricas, harmônicas e quadráticas. Ainda neste capítulo evidenciamos a aplicação e a utilidade das médias definidas nos capítulos anteriores, incluindo exemplos concretos retirados do mercado financeiro, da estatística aplicada e das ciências naturais.
4. **Uma proposta para sala de aula!** – Propomos uma abordagem pedagógica para o ensino das médias, sugerindo atividades e estratégias didáticas para professores.
5. **Considerações Finais - Conclusão** – Destacamos as principais conclusões do estudo, refletindo sobre sua contribuição para o ensino e o aprendizado da Matemática.

Este trabalho tem como objetivo promover a compreensão das médias matemáticas, proporcionando um material rico e aplicável tanto para estudantes quanto para professores, permitindo uma visão mais ampla e aprofundada desse conceito fundamental na Matemática.

2 Médias, o que são e para que servem?

Este capítulo apresenta os principais tipos de médias matemáticas: aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Cada uma é definida de forma simples e clara, explicando em que situações pode ser aplicada e qual propriedade preserva. O objetivo é ajudar o leitor a perceber que existem diferentes médias para diferentes contextos e que compreender suas características é fundamental para uma boa análise de dados.

Além das definições, o capítulo explora as desigualdades clássicas entre as médias, como $H \leq G \leq A \leq Q$, com demonstrações acessíveis e exemplos práticos do cotidiano, como situações envolvendo áreas, volumes e limites de bagagens. As explicações são fundamentadas em referências clássicas da matemática e em documentos oficiais da educação básica, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que reforçam a importância de se trabalhar com medidas de tendência central e dispersão para o desenvolvimento do pensamento estatístico dos estudantes.

2.1 Introdução

A média é uma das ferramentas mais utilizadas na análise de dados e tomada de decisões. Presente em diversas áreas do conhecimento — da Estatística à Economia, da Educação às Ciências Sociais —, ela permite resumir um conjunto de valores por meio de um único número representativo. Seja para avaliar o desempenho de uma turma, calcular índices econômicos ou compreender padrões em grandes volumes de informação, o conceito de média oferece uma maneira simples e eficaz de interpretar a realidade. No entanto, entender seus diferentes tipos, como a média aritmética, a ponderada e a geométrica, é fundamental para aplicar corretamente essa ferramenta e evitar conclusões equivocadas.

Definição 2.1.1 (Média). *Uma média é um valor representativo de um conjunto de números. Dizemos que um número real M é uma média de uma lista de elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais, se M for capaz de substituir cada um desses números sem alterar alguma característica da lista dada.*

Dependendo da característica da lista de números que seja preservada, a média receberá uma nomenclatura diferente. A seguir, os quatro tipos mais usuais de médias.

2.2 Média Aritmética

Definição 2.2.1 (Média aritmética). *Dados n números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$, a média aritmética da lista dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é o número real A capaz de substituir cada termo da lista $x_1, x_2, \dots, x_n$, sem alterar a soma dos elementos dessa lista, isto é,*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ parcelas}} = nA,$$

o que nos leva à conhecida fórmula para o cálculo da média aritmética.

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

2.3 Média Geométrica

De modo completamente análogo, podemos definir a chamada média geométrica de uma lista $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Vejamos:

Definição 2.3.1 (Média geométrica). *Dados n números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$, a média geométrica da lista dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é o número real G capaz de substituir cada termo da lista $x_1, x_2, \dots, x_n$, sem alterar o produto dos elementos dessa lista, isto é,*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \underbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}_{n \text{ fatores}} = G^n,$$

o que nos leva a conhecida fórmula para o cálculo da média Geométrica.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Observação 2.3.1. Note que, ao contrário da média aritmética, que sempre existe para quaisquer números reais, em $\mathbb{R}$, a média geométrica nem sempre existe em $\mathbb{R}$. Por exemplo, se tomarmos uma lista com apenas dois números reais $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$, não existe um número real G tal que $(-1) \cdot 2 = G \cdot G$, isto é, $G^2 = -2$, visto que em $\mathbb{R}$, sempre teremos $G^2 \geq 0$.

2.4 Média Harmônica

Seguindo a mesma linha de raciocínio podemos definir a chamada média harmônica de uma lista de números reais.

Definição 2.4.1 (Média harmônica). Dada uma lista de n números reais não nulos $x_1, x_2, \dots, x_n$, tais que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \neq 0$, a **média harmônica** da lista dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é o número real H capaz de substituir cada membro da lista $x_1, x_2, \dots, x_n$, sem alterar a soma dos inversos elementos dessa lista, isto é,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \dots + \frac{1}{H}}_{n \text{ parcelas}} = \frac{n}{H},$$

o que nos leva à conhecida fórmula para o cálculo da média harmônica

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

2.5 Média Quadrática

Por fim, vamos definir a chamada **média quadrática** de uma lista de números reais.

Definição 2.5.1 (Média quadrática). Dados n números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$, a **média quadrática** da lista dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é o número real Q

capaz de substituir cada membro da lista $x_1, x_2, \dots, x_n$, sem alterar a soma dos quadrados dos elementos dessa lista, isto é,

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + \dots + Q^2}_n = nQ^2,$$

o que nos leva a conhecida fórmula para o cálculo da média quadrática

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

2.6 Desigualdades entre as médias

Nesta seção, vamos abordar um tema que costuma ser pouco explorado no ensino das médias, especialmente nos Ensinos Fundamental e Médio: as chamadas *Desigualdades das médias*. Apesar de sua relevância, esse conteúdo é frequentemente ignorado nos materiais didáticos e nas aulas de matemática. Aqui, propomos uma apresentação cuidadosa e acessível do assunto.

Nosso objetivo é mostrar, passo a passo, como estabelecer as desigualdades clássicas entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Também incluiremos algumas aplicações práticas dessas desigualdades. Daremos atenção especial aos casos em que ocorre a igualdade entre as médias, pois, em muitos problemas, esse detalhe é essencial para se encontrar soluções elegantes e bem fundamentadas.

Para iniciarmos, comecemos analisando o caso particular em que temos apenas dois números reais não negativos a e b . Vejamos:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Além disso, note que a igualdade $\sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b}{2}$ ocorre se, e somente se $a = b$. Essa é a chamada **desigualdade das médias aritmética e geométrica** para dois números reais não negativos.

Neste ponto, uma pergunta natural é: essa desigualdade pode ser estendida para uma lista com uma maior quantidade de números reais positivos? A resposta é sim! Na verdade mais que isso, ocorrem outras desigualdades conforme descreveremos logo a seguir. No caso de uma lista $x_1, x_2, \dots, x_n$ de números reais estritamente positivos, as principais médias obedecem as seguintes desigualdades

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Vamos justificar separadamente cada uma das desigualdades acima.

2.6.1 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

Teorema 2.6.1 (Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.). *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos e $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Para provar esse fato, estabeleceremos inicialmente um lema que será a chave da demonstração.

Lema 2.6.1. *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais e positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, valendo a igualdade se, somente se, $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 1$.*

Demonstração.

Vamos utilizar indução sobre n .

Para $n=1$,

Temos $x_1 = 1$ e portanto $x_1 \geq 1$, o que torna o resultado verdadeiro.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k.$$

Agora vamos verificar que o resultado é válido para $n = k + 1$. De fato, sejam $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Dois casos podem se apresentar:

Todos os números $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ são iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$. Como estamos supondo que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = 1$ segue que neste caso todos eles têm de ser iguais a 1, portanto $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = k + 1$. O resultado vale, para $n = k + 1$.

Analisemos o caso em que nem todos os números são iguais, ou seja, há entre os números um deles que é menor que 1 e outro maior que 1, pois não podemos ter todos os números menores que 1 nem todos os números maiores que 1, visto que o produto de todos eles deve ser igual a 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 < 1$ e que $x_{k+1} > 1$.

Fazendo $x_1 \cdot x_{k+1} = b_1$, segue que:

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = 1 \Rightarrow b_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_k = 1.$$

Pela hipótese de indução segue que $b_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &= \underbrace{b_1 + x_2 + \dots + x_k}_{\geq k} + x_1 - b_1 + x_{k+1} \\ &\geq k + x_1 - b_1 + x_{k+1} \end{aligned}$$

Para finalizar devemos verificar que $x_1 - b_1 + x_{k+1} \geq 1$

De fato, lembrando que $x_1 \cdot x_{k+1} = b_1$, segue que:

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = x_1 - x_1 \cdot x_{k+1} + x_{k+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x_1 - b_1 + x_{k+1} &= x_1 - x_1 \cdot x_{k+1} + x_{k+1} \\
 &= x_1(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 + 1 \\
 &= x_1(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) + 1 \\
 &= (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1.
 \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{cases} x_1 < 1 \Rightarrow (x_1 - 1) < 0 \\ x_{k+1} > 1 \Rightarrow (1 - x_{k+1}) < 0. \end{cases} \Rightarrow (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) > 0.$$

Desse modo,

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1 \geq 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= k + x_1 - b_1 + x_{k+1} \\
 &\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \\
 &\geq k + 1
 \end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar. ■

Com esse lema fica imediato demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de números reais positivos, vejamos:

Seja $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$, então

$$1 = \frac{G}{G} = \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}{G} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G}} \implies \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G} = 1.$$

Como $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G} = 1$, segue pelo resultado que demonstramos inicialmente que:

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_n}{G} \geq n \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq nG \Rightarrow G \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{x_1}{G} = \frac{x_2}{G} = \cdots = \frac{x_n}{G} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = G = A.$$

2.6.2 Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

Teorema 2.6.2 (Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica.). *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos tais que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \neq 0$ e $n > 1$. Então*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

, A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Consideremos os números reais positivos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$. Para essa lista de n números reais positivos, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \Rightarrow H \leq G,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, isto é, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ■

Observação 2.6.1. Como já havíamos demonstrado que $G \leq A$, segue que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow H \leq G \leq A.$$

Para completar as desigualdades entre as principais médias, vamos mostrar na próxima seção a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática

para números reais positivos.

2.6.3 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Quadrática

Teorema 2.6.3 (Desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.). *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos e $n > 1$. Tem-se que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração.

Usando a seguinte identidade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j. \quad (2.1)$$

Concluimos que,

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (2.2)$$

Dado que o termo da esquerda em (2.1) é não negativo. Somando em ambos os membros de (2.2) a quantidade $\sum_{i=1}^n x_i^2$ obtemos

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Ou seja

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \cancel{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

equivalente

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

isto é, $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$. Dividindo essa

desigualdade por n^2 e tomando a raiz quadrada, obtemos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Além disso, perceba que a igualdade (2.2) ocorre se, e somente se,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = 0.$$

O que é verdade se, somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ■

A seguir apresentamos uma demonstração alternativa da relação de ordem entre as médias aritmética e quadrática.

Demonstração. Sabemos que:

$$(x_i - x_j)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^2 &= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\ &\leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_1^2 + x_2^2) + \cdots + (x_{n-1}^2 + x_n^2)}{n^2} \\ &= \frac{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \Rightarrow A \leq Q.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $2x_i x_j = x_i^2 + x_j^2$, o que é equivalente a $(x_i - x_j)^2 = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Portanto a igualdade ocorre se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Em síntese, se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, tem-se que :

$$H \leq G \leq A \leq Q,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

A seguir apresentamos duas consequências imediatas da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que são de grande utilidade na resolução de muitas questões, inclusive de caráter aplicado.

Proposição 2.6.1. *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos tais que a sua soma é constante, i.e., $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$, para algum $S \in \mathbb{R}_+$, fixado. Então o produto $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ será máximo quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.*

Demonstração.

De fato, usando desigualdade $G \leq A$, segue que:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{S}{n},$$

ou seja, $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n$.

Portanto, o valor máximo $\left(\frac{S}{n}\right)^n$ é atingido, se e somente se as médias aritmética e geométrica forem iguais, o que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

Observação 2.6.2. *De modo completamente análogo tem-se que a soma de n números reais positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$, cujo produto é fixo, i.e., $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = P$, com $p \in \mathbb{R}$, é mínima quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.*

De fato, pela desigualdade $A \geq G$, segue que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{P} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{P},$$

com a igualdade ocorrendo, se e somente se as médias aritmética e geométrica forem iguais, o que ocorre se, e somente, se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Exemplo 2.6.1. *Mostre que entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o que tem a maior área é um quadrado.*

Solução.

Sejam x e y a medida dos lados do retângulo, temos $2x + 2y = 2p$ (onde $2p$ é o perímetro), ou seja, $x + y = p$. A média aritmética de x e y é igual a $\frac{p}{2}$. A área do retângulo é $A = xy$. Temos:

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto,

$$A \leq \frac{p^2}{4}.$$

E a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de lado $\frac{p}{2}$ que possui de área $\frac{p^2}{4}$. ■

Exemplo 2.6.2. *Mostre que, entre todos os retângulos de mesma área, aquele que possui o menor perímetro é um quadrado.*

Solução. Se os lados do retângulo são x e y , temos $xy = A$ (onde A é a medida da área do retângulo). O perímetro do retângulo é $2p = 2(x + y)$.

$$2p = 2(x + y) = 4 \cdot \frac{x + y}{2} \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}.$$

Portanto,

$$2(x + y) \geq 4\sqrt{A}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$. ■

Exemplo 2.6.3. *Mostre que, entre todos os triângulos de mesmo perímetro, aquele que possui a maior área é o equilátero.*

Solução. Sejam x , y e z os lados do triângulo. Por Heron, a medida da área do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}.$$

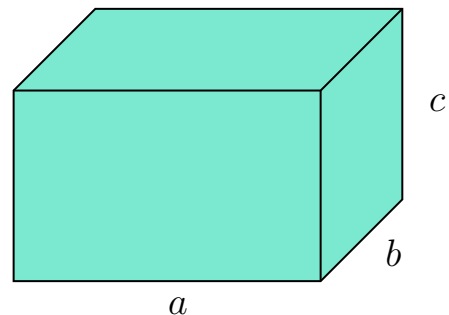
Assim, para um triângulo de perímetro constante, a área é máxima quando produto $p(p - x)(p - y)(p - z)$ é máximo. Note que a soma $(p - x) + (p - y) +$

$(p - z) = 3p - 2p = p$ é sempre constante. Logo, para que $(p - x)(p - y)(p - z)$ seja máximo deve-se ter $(p - x) = (p - y) = (p - z)$, ou seja, $x = y = z$. Portanto, dentre os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero é o de maior área. ■

Observação 2.6.3. De modo análogo ao que ocorreu com o retângulo, também pode-se demonstrar que entre todos os triângulos de mesma área, o de menor perímetro é o equilátero.

Geralmente, quando estudamos as desigualdades entre as médias (para números reais positivos) não damos a devida atenção para o fato de que as médias são iguais se, e somente se, os dados são iguais. A seguir, mostraremos dois exemplos onde propriedade é a principal peça para a solução do problema.

Exemplo 2.6.4. A figura ao lado representa um paralelepípedo retângulo cujo volume é de 216 m^3 e sua área superficial mede 216 m^2 . Mostre que esse paralelepípedo é um cubo.



Solução. Sendo a, b, c as medidas das arestas do paralelepípedo, segue que:

$$\begin{cases} abc = 216 \\ 2(ab + ac + bc) = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc = 216 \\ ab + ac + bc = 108 \end{cases}$$

Calculando as médias aritmética e geométrica dos números positivos ab, ac e bc , obtemos

$$A = \frac{ab + ac + bc}{3} = \frac{108}{3} = 36.$$

$$G = \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{(216)^2} = \sqrt[3]{(6^3)^2} = \sqrt[3]{6^6} = 6^2 = 36.$$

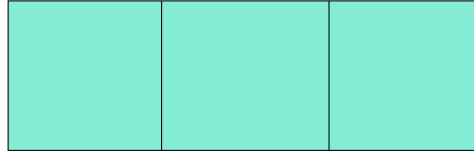
Ora, como $A = G$, segue que

$$ab = ac = bc \Rightarrow a = b = c,$$

o que nos permite concluir que um paralelepípedo de volume 216 m^3 e área total

216 m^2 é um cubo de aresta 6 m. ■

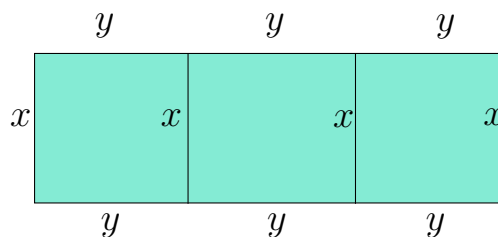
Exemplo 2.6.5. (*Mathcounts-94*) Numa fazenda há uma cerca retangular que é construída a partir de 60 m de tela (sem desperdícios), conforme ilustra a figura abaixo



Essa cerca é subdividida internamente em três regiões retangulares de mesma área (utilizando a mesma tela) que serão utilizadas para abrigar os cavalos, bois e porcos da fazenda. Utilizando toda a tela disponível, qual é a maior área que pode ser cercada?

Solução.

Suponhamos que a cerca maior seja subdividida em três retângulos menores de dimensões x e y , conforme ilustra a figura abaixo:



Nesse caso, $4x + 6y = 60$. Por outro lado, a área total cercada é $S = 3xy$. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que

$$G \leq A \Rightarrow \sqrt{4x \cdot 6y} \leq \frac{4x + 6y}{2} = \frac{60}{2} = 30 \Rightarrow$$

$$4x \cdot 6y \leq 900 \Rightarrow 3xy \leq \frac{900}{2} \Rightarrow S \leq 112,5 \text{ m}^2.$$

Diante do exposto, a máxima área que pode ser cercada com os 60 m de tela disponíveis é $112,5 \text{ m}^2$.

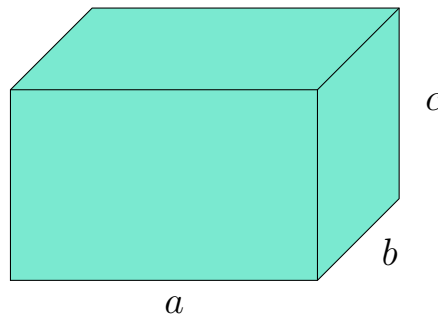
Além disso, note que essa área é atingida quando $4x = 6y \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$. Como $4x + 6y = 60$, segue que $x = 7,5 \text{ m}$ e $y = 5 \text{ m}$ são as dimensões de cada um dos currais. ■

Exemplo 2.6.6. A figura abaixo traz informações a respeito das dimensões máximas das bagagens despachadas que os passageiros podem transportar durante suas viagens aéreas, segundo as regras da ANAC.



Respeitando-se essas regras, Admitindo-se que a bagagem tem a forma de um bloco retangular (paralelepípedo retângulo) qual o volume máximo admitido para uma bagagem que pode ser despachada?

Solução. Suponhamos que o paralelepípedo retângulo que representa a bagagem tenha dimensões a , b e c , conforme ilustra a figura a seguir:



Nesse caso, $a + b + c = 158$ e $v = abc$ é o seu volume. Como $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ podemos aplicar a desigualdades médias,

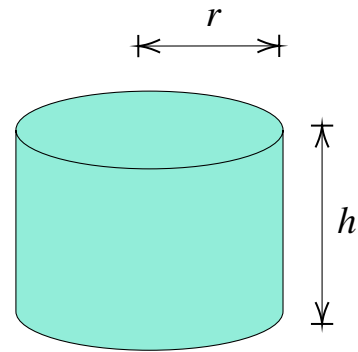
$$G \leq A \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = \frac{1,58}{3} \simeq 0,52 \text{ m} \Rightarrow abc \leq (0,52)^3 \Rightarrow v \leq 0,14 \text{ m}^3,$$

o que revela que o volume máximo que poderia ser transportado seguindo as regras da ANAC seria de $0,14 \text{ m}^3$, o que ocorreria quando $a = b = c = \frac{158}{3} \text{ cm}$.

■

Exemplo 2.6.7.

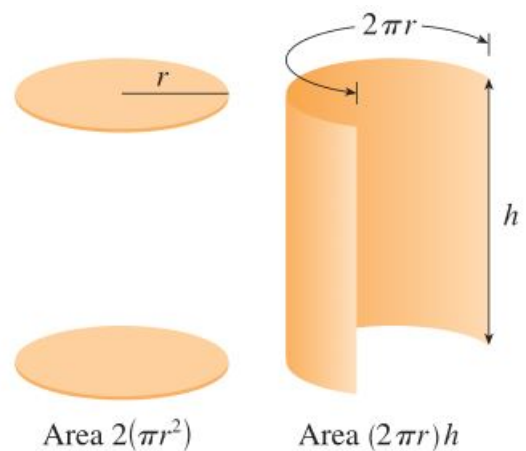
Entre todos os cilindros circulares retos de volume constante V , verifique que o de menor área superficial é o cilindro equilátero, ou seja, é aquele que cumpre a relação $h = 2r$ (a sua altura é igual ao diâmetro da base)



Solução.

O volume e a área superficial do cilindro circular reto de altura h e raio da base r são

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ S &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} h &= \frac{V}{\pi r^2} \\ S &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned}$$



Dessa forma,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \end{aligned}$$

Ora, como o produto $2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} = 2\pi V^2$ é constante, segue que a soma $S = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$ será mínima quando as três parcelas são iguais, ou seja,

$$2\pi r^2 = \frac{V}{r} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Mas ocorre que

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

ou seja, o cilindro reto de menor área que comporta o mesmo volume é o cilindro equilátero, noutras palavras, aquele em que a altura é igual ao diâmetro da base.

■

3 Outras médias e medidas importantes

O terceiro capítulo da dissertação amplia o estudo das médias matemáticas, explorando conceitos que vão além das médias clássicas. O texto começa com a apresentação da *média móvel*, explicando sua utilidade em séries temporais e sua aplicação em áreas como meteorologia, saúde e finanças. Em seguida, são abordadas outras medidas de tendência central como a mediana e a moda, além de medidas de dispersão como a amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão. A organização segue uma lógica clara e didática, intercalando definições formais, explicações acessíveis e exemplos contextualizados, muitos dos quais extraídos de situações reais, como pandemia, mercado de ações e previsão de demanda.

O capítulo também traz reflexões sobre a importância do ensino desses conceitos desde as etapas iniciais da formação escolar, destacando como o contato precoce com noções estatísticas e financeiras pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades úteis na vida pessoal e profissional. As principais referências utilizadas incluem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e autores da Educação Matemática e Estatística Aplicada. Além disso, o capítulo se destaca pela preocupação em conectar teoria e prática, oferecendo um conteúdo acessível e relevante tanto para professores quanto para estudantes.

3.1 A média móvel

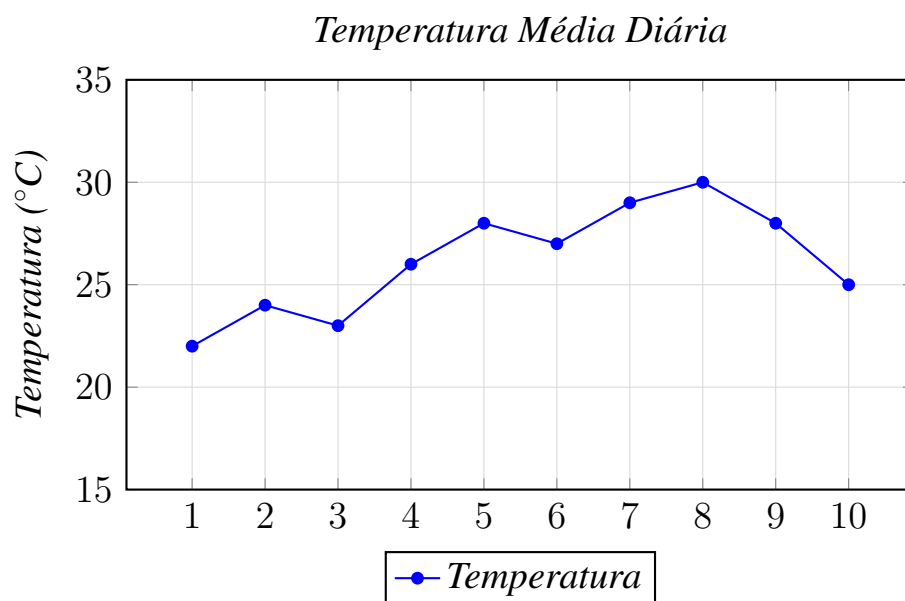
Chamamos de *série temporal*, uma sequência de dados coletados ao longo do tempo, geralmente em intervalos regulares — como dias, meses, anos, segundos, etc. Por exemplo,

- Temperatura registrada diariamente em uma cidade.

- Número de vendas mensais de uma loja.
- Cotação de uma ação na bolsa a cada minuto.
- Casos diários de uma doença.

para ilustrar de modo mais preciso, apresentamos o exemplo a seguir:

Exemplo 3.1.1. *Abaixo temos uma série temporal que mostra a variação da temperatura média em uma cidade durante 10 dias consecutivos.*



Como podemos ver, a série apresenta uma tendência de aumento até o dia 8, seguida de uma leve queda. Esse tipo de análise pode ser útil, por exemplo, para prever picos de calor ou orientar decisões relacionadas ao clima.

A **média móvel** é uma técnica estatística utilizada para mensurar flutuações em séries temporais, facilitando a identificação de tendências ao longo do tempo. Ela é chamada de “móvel” porque é calculada repetidamente ao longo da série, utilizando subconjuntos (janelas) de dados consecutivos.

Existem diferentes tipos de médias móveis, como a simples, a ponderada e a exponencial. A mais comum, a *média móvel simples*, é calculada somando os valores dentro da janela e dividindo pelo número de elementos dessa janela.

Definição 3.1.1 (Média móvel simples). *Para uma série de dados $x_1, x_2, \dots, x_n$ e uma janela de tamanho k , a média móvel simples no tempo t é:*

$$MM_t = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t x_i$$

A média móvel é amplamente utilizada em diversas áreas, como finanças, economia, meteorologia e saúde pública. Sua principal função é destacar padrões relevantes em dados que variam com o tempo. A seguir, apresentaremos alguns exemplos para ilustrar a importância desse conceito, assim como fixá-lo.

Exemplo 3.1.2 (Análise de Ações na Bolsa de Valores). *Na análise técnica do mercado financeiro, a média móvel é usada para prever movimentos de preços de ações. Por exemplo, um analista pode comparar a média móvel de 20 dias com a de 50 dias para identificar melhores momentos de compra ou venda. Quando a média de curto prazo cruza acima da de longo prazo, pode ser um sinal de alta; o oposto pode indicar queda. Essa técnica ajuda investidores a tomarem decisões melhor fundamentadas, reduzindo o impacto de variações diárias, que costumam ser bastante voláteis.*

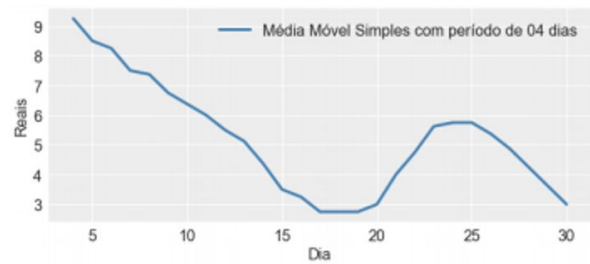
Exemplo 3.1.3 (Monitoramento da Pandemia de COVID-19). *Durante a pandemia, a média móvel de 7 dias foi amplamente utilizada para monitorar o número de casos e mortes por COVID-19. Como os dados diários frequentemente apresentavam oscilações (devido a atrasos de notificação ou subnotificações nos fins de semana), a média móvel oferecia uma visão mais clara da tendência real da doença em determinada região.*

Essa abordagem possibilitou que autoridades de saúde a tomarem decisões baseadas em dados mais confiáveis, como intensificar medidas de isolamento ou liberar recursos para hospitais.

A média móvel é uma ferramenta simples, mas poderosa, para análise de dados temporais. Seu uso permite interpretar informações de forma mais precisa, destacando tendências e padrões que seriam difíceis de perceber em dados brutos. Em tempos de grandes volumes de informação, como em crises sanitárias ou no mercado financeiro, ela se torna essencial para uma boa tomada de decisão.

A seguir, com o intuito de ilustrar de maneira mais clara a aplicação deste importante conceito, mostramos duas questões interessantes sobre o tema.

Exemplo 3.1.4 (IMPARH - 2021 - Prefeitura de Fortaleza - CE). *Durante a pandemia da COVID-19, muito se tem falado sobre o conceito de médias móveis. Esse conceito também é amplamente utilizado no estudo de gráficos de preços de ativos no mercado financeiro. O propósito da média móvel é suavizar o gráfico a fim de melhor visualizar tendências de longo prazo, ignorando oscilações de curto prazo, já que estas são, muitas vezes, causadas por instabilidades momentâneas ou pela irregularidade na coleta dos dados. Há vários tipos de médias móveis, entre elas a simples, a cumulativa e a exponencial. Para exemplificar, veja o gráfico com valores fictícios de um ativo financeiro e, em seguida, o gráfico das médias móveis desse ativo com período de 04 dias. Veja que a média móvel simples, de um ativo financeiro, com período 04 (quatro), é calculada em cada data, tomando-se a média aritmética dos valores do ativo em quatro dias consecutivos, sendo o último dia do período igual à data desejada. Com base nos dados das tabelas abaixo referentes ao mesmo ativo fictício, calcule o valor da média móvel com período 04 referente ao dia 24.*



<i>Dia</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>Valor (R\$)</i>	11,00	9,00	10,00	7,00	8,00	8,00	7,00	6,50	5,50	6,50	5,50	4,50	4,00	3,50	2,00

<i>Dia</i>	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<i>Valor (R\$)</i>	3,50	2,00	3,50	2,00	4,50	6,00	6,50	5,50	5,00	6,00	5,00	3,50	2,50	3,50	2,50

(a) 5,00

(b) 5,50

(c) 5,75

(d) 6,00

Solução. Inicialmente, perceba que são 4 valores referentes ao dia 24. Assim, vamos localizar os valores correspondentes aos dias 21, 22, 23 e 24, que são, respectivamente, 6; 6,5; 5,5 e 5. Desse modo, vamos calcular a média como sugere a questão:

$$MM_4 = \frac{6+6,5+5,5+5}{4} = \frac{23}{4} = 5,75$$

o que nos permite concluir que a resposta correta é a **Alternativa (C)**. ■

A seguir mostramos alguns exemplos interessantes para fixar as ideias apresentadas nesta seção.

Exemplo 3.1.5 (Enade – 2017 – Engenharia de Produção). *Um dos métodos utilizados para previsão de demanda é a média móvel ponderada; em que se considera a influência da demanda real dos meses anteriores. Considere que uma*

empresa de embalagens pretenda utilizar esse método para definir a previsão de demanda para novembro de 2017. Verificou-se que a influência dos últimos meses, nesse ano, é de 50%; 30% e 20%, do mês anterior mais próximo até os meses mais distantes, e que a correspondente demanda real; em toneladas, foi a seguinte:

- *julho: 75;*
- *agosto: 125;*
- *setembro: 175;*
- *outubro: 225.*

Com base nesses dados, qual a previsão de demanda; em toneladas, para o mês de novembro de 2017?

- (a) 175
- (b) 275
- (c) 190
- (d) 160
- (e) 150

Solução. De acordo com o enunciado, a previsão que queremos determinar é a do mês de novembro. Ressaltamos aqui a importância de uma leitura atenta do comando da questão:

“Verificou-se que a influência dos últimos meses, nesse ano, é de 50%; 30% e 20%, do mês anterior mais próximo até os meses mais distantes...”

Desse modo, temos que:

- 50% é correspondente ao mês de outubro;
- 30% é correspondente ao mês de setembro;

- 20% é correspondente ao mês de agosto.

Vamos chamar de P a previsão de demanda de novembro, e D_1 , D_2 e D_3 as demandas de outubro, setembro e agosto, respectivamente. Assim, de acordo com o enunciado do problema, temos que:

$$\begin{aligned} P &= D_1 \cdot 50\% + D_2 \cdot 30\% + D_3 \cdot 20\% \\ &= 225 \cdot 0,5 + 175 \cdot 0,3 + 125 \cdot 0,2 \\ &= 112,5 + 52,5 + 25 \\ &= 190. \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que a resposta correta é a **Alternativa (D)**.

■

Exemplo 3.1.6 (Questão 1 Unicamp 2021 - 2ª fase - dia 2). *Durante a pandemia de Covid-19, a imprensa tem utilizado a “média móvel” para divulgar a evolução do número de casos notificados da doença. Para calcular a média móvel do dia d com respeito aos últimos k dias, somamos o número de casos do dia d com o número de casos registrados nos $k - 1$ dias anteriores e dividimos por k . Na tabela abaixo, indicamos, para uma dada cidade, a quantidade de casos notificados em cada dia de um determinado mês, e também a média móvel de cada dia com respeito aos últimos 4 dias. Alguns dados foram perdidos, e não constam na tabela.*

<i>Dia do mês</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<i>Casos notificados</i>	16	18	22	24	24	26	22		32		28	32	30		30	28	28	26	22	20	20
<i>Média móvel</i>		20	22	22	24	24				28	31	32		30	30	30	29	26	24	22	

Analizando a tabela, calcule

- a média móvel do dia 18;*
- a quantidade de casos notificados nos dias 8, 10 e 11.*

Solução. O enunciado nos diz que, para calcular a média móvel do dia 18 (com respeito aos últimos 4 dias), devemos somar o número de casos dos dias 15, 16, 17 e 18 e depois dividi-lo por 4:

$$\frac{30 + 28 + 28 + 26}{4} = \frac{112}{4} = 28$$

Logo, a média móvel do dia 18 é 28.

Sejam x , y e z o número de casos notificados nos dias 8, 10 e 11, respectivamente.

Note que os valores de média móvel conhecidos, envolvendo estes dias, são os valores de média móvel dos dias:

- 10: cuja média começa a ser contabilizada no dia 7 e é dada por

$$\frac{22 + x + 32 + y}{4} = 28$$

- 11: cuja média começa a ser contabilizada no dia 8 e é dada por

$$\frac{x + 32 + y + z}{4} = 31$$

- 12: cuja média começa a ser contabilizada no dia 9 e é dada por

$$\frac{32 + y + z + 28}{4} = 32$$

Desta maneira, podemos construir o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{22 + x + 32 + y}{4} = 28 \\ \frac{x + 32 + y + z}{4} = 31 \\ \frac{32 + y + z + 28}{4} = 32 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x + y = 58 \\ x + y + z = 92 \\ y + z = 68 \end{array} \right.$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$$z = 92 - 58 = 34$$

Subtraindo na terceira, temos:

$$y + 34 = 68 \iff y = 34$$

Substituindo na primeira, temos:

$$x + 34 = 58 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 24$$

Ou seja, quantidade de casos nos dias 8, 10 e 11 são, respectivamente: 24, 34 e 34. ■

Exemplo 3.1.7 (FUNDEP (Gestão de Concursos) - 2021 - CBM-MG). A tabela a seguir mostra os dados relativos ao número de mortes por Covid-19, na cidade de São Paulo, no período de 27 de junho a 15 de julho de 2020.

MORTES POR COVID-19	
Data	Mortes (nas últimas 24h)
27/06/2020	25
28/06/2020	37
29/06/2020	141
30/06/2020	204
01/07/2020	91
02/07/2020	67
03/07/2020	43
04/07/2020	46
05/07/2020	34
06/07/2020	131
07/07/2020	150
08/07/2020	98
09/07/2020	85
10/07/2020	74
11/07/2020	42
12/07/2020	30
13/07/2020	225
14/07/2020	131
15/07/2020	131

Disponível em: <https://camaraptsp.org.br/prefeitura-maquia-dados-de-obitos-por-covid-19/>. Acesso em: 21 ago. 2020 (Adaptação).

A média móvel é um indicador que auxilia na observação das variações do número de mortes causadas pelo novo coronavírus. Para calcular a média móvel em um determinado dia, soma-se o número de mortes desse dia aos números dos

6 dias anteriores e divide-se o resultado por 7. No dia 03 de julho, por exemplo, a média móvel do número de mortes foi, aproximadamente, 87. De acordo com essa tabela, a média móvel do número de mortes no dia 06 de julho de 2020 foi de

(a) 82

(b) 88

(c) 90

(d) 103

Solução. Após uma boa leitura do problema, percebemos que se trata de um problema relativamente tranquilo, pois o mesmo traz consigo a definição bem clara da média móvel pedida. Assim, chamando de MM_6 a média móvel referente ao dia 06/07/2020, temos:

$$M_m(6) = \frac{204 + 91 + 67 + 43 + 46 + 34 + 131}{7} = \frac{616}{7} = 88$$

Assim, de acordo com a tabela dada no problema, a média móvel é de 88 mortes causadas pelo coronavírus.

Alternativa (B)

■

3.2 Medidas de Tendência Central

Nesta seção, apresentaremos a Média, mediana e moda como medidas de tendência central que constituem instrumentos fundamentais da estatística descritiva. Elas permitem sintetizar um conjunto de dados por meio de valores representativos.

Embora a média aritmética costume receber maior ênfase nos estudos introdutórios, a mediana e a moda assumem funções analíticas igualmente relevantes, especialmente quando se busca uma interpretação mais crítica e contextualizada das informações. De acordo com [6]

“É importante ressaltar que, em algumas situações, a presença de um valor muito maior ou muito menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo.”

3.2.1 A Mediana

A mediana é o valor que separa a metade superior da metade inferior dos dados. Ela é resistente a valores extremos, sendo apropriada quando a distribuição é assimétrica ou há distorções (outliers).

¹

Para uma sequência de números ordenados:

- Se a quantidade de elementos é ímpar, a mediana é o termo central.
- Se é par, a mediana é a média dos dois termos centrais.

Exemplo 3.2.1. *Valores pagos em contas de água pela pousada Descanse Bem no primeiro semestre:*

<i>Mês</i>	<i>Valor (R\$)</i>
<i>Janeiro</i>	<i>562,33</i>
<i>Fevereiro</i>	<i>350,12</i>
<i>Março</i>	<i>56,17</i>
<i>Abril</i>	<i>42,50</i>
<i>Maio</i>	<i>40,43</i>
<i>Junho</i>	<i>46,45</i>

Média aritmética: R\$183,00.

Como os valores de janeiro e fevereiro são muito altos, a média é distorcida. A mediana, portanto, é mais representativa. Ordenando:

40,43; 42,50; 46,45; 56,17; 350,12; 562,33

Sendo quantidade par, a mediana é a média entre os dois centrais:

¹Outlier é um termo em inglês que, em estatística, se refere a valores que se desviam significativamente dos demais. Em português, os termos mais próximos são *valores discrepantes* ou *valores atípicos*.

$$Mediana = \frac{46,45 + 56,17}{2} = 51,31$$

3.2.2 A Moda

A moda representa o(s) valor(es) mais frequente(s) de um conjunto.

Exemplo 1: O conjunto $\{0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4\}$ tem moda 1.

Exemplo 2: Em uma pesquisa sobre tipo sanguíneo com 20 pessoas:

- O: 7 pessoas
- A: 5 pessoas
- AB: 4 pessoas
- B: 4 pessoas

A moda é o tipo sanguíneo O.

3.3 Medidas de Dispersão

As medidas de dispersão indicam como os dados se distribuem em torno da média.

3.3.1 A Amplitude

Diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto.

Exemplo 3.3.1. • *Lista 01:* $\{7, 9, 9, 9, 10, 10\} \rightarrow \text{Amplitude: } 10 - 7 = 3$

- *Lista 02:* $\{6, 7, 8, 10, 11, 12\} \rightarrow \text{Amplitude: } 12 - 6 = 6$

3.3.2 Desvio Médio

É a média dos valores absolutos dos desvios em relação à média.

- *Lista 01:* Média = 9 $\rightarrow D_m = \frac{|7-9|+3\cdot|9-9|+2\cdot|10-9|}{6} = 0,67$

- *Lista 02:* Média = 9 $\rightarrow D_m = \frac{|6-9|+|7-9|+|8-9|+|10-9|+|11-9|+|12-9|}{6} = 2$

3.3.3 A Variância e Desvio Padrão

A Variância

Variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios. Indicamos a variância por V ou σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (x_n - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n}$$

O Desvio Padrão

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Indicamos o desvio padrão por D ou σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n}}$$

Exemplo 3.3.2 (Questão retirada do livro *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 11: Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*). Em certo país, o governo financia um programa de assistência às famílias de baixa renda. Cada família recebe, de cinco em cinco semanas, a quantia de 100 UM (unidades monetárias) para comprar produtos de alimentação em estabelecimentos conveniados.

O coordenador desse projeto selecionou, em uma pequena cidade, quatro famílias e acompanhou a distribuição dos gastos semana a semana:

	1ª sem.	2ª sem.	3ª sem.	4ª sem.	5ª sem.	Total
Família I	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	100 UM
Família II	20 UM	24 UM	20 UM	16 UM	20 UM	100 UM
Família III	12 UM	28 UM	24 UM	20 UM	16 UM	100 UM
Família IV	36 UM	32 UM	20 UM	8 UM	4 UM	100 UM

Observação 3.3.1. Visualmente é perceptível que as famílias fazem uma administração diferente do valor recebido. Vejamos:

- Família I – mantém seu gasto uniformemente em 20 UM $\rightarrow D_m = 0$
- Família II – varia entre 16 e 24 UM $\rightarrow D_m = 8$

- *Família III – varia entre 12 e 28 UM $\rightarrow D_m = 16$*
- *Família IV – varia entre 4 e 36 UM $\rightarrow D_m = 32$*

Cálculo da Variância (média semanal = 20 UM)

- **Família I**

$$\sigma^2 = \frac{(20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2}{5} = 0$$

- **Família II**

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(20 - 20)^2 + (24 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (16 - 20)^2 + (20 - 20)^2}{5} \\ &= \frac{16 + 16}{5} = 6,4 \text{ UM}^2\end{aligned}$$

- **Família III**

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(12 - 20)^2 + (28 - 20)^2 + (24 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (16 - 20)^2}{5} \\ &= \frac{64 + 64 + 16 + 0 + 16}{5} = 32 \text{ UM}^2\end{aligned}$$

- **Família IV**

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(36 - 20)^2 + (32 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (8 - 20)^2 + (4 - 20)^2}{5} \\ &= \frac{256 + 144 + 0 + 144 + 256}{5} = 160 \text{ UM}^2\end{aligned}$$

Cálculo do Desvio Padrão

- Família I $\rightarrow \sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \text{ UM}$
- Família II $\rightarrow \sigma^2 = 6,4 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma \approx 2,53 \text{ UM}$
- Família III $\rightarrow \sigma^2 = 32 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma \approx 5,66 \text{ UM}$
- Família IV $\rightarrow \sigma^2 = 160 \text{ UM}^2 \Rightarrow \sigma \approx 12,65 \text{ UM}$

3.4 Outros índices importantes

Apresentamos uma reflexão sobre a relevância do ensino de conceitos estatísticos e financeiros na formação escolar. Essa seção foi organizada em oito tópicos que abordam desde a importância do contato precoce com esses conteúdos até aplicações práticas no cotidiano, como o funcionamento do mercado de ações e os critérios utilizados na análise de investimentos. Inicialmente, discuto como o conhecimento estatístico e financeiro pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades essenciais à vida pessoal e profissional. Em seguida, abordo questões como o que são ações, como uma empresa ingressa na bolsa de valores e quais as vantagens desse processo. Finalizo com uma introdução a parâmetros utilizados para avaliar ações, como o Dividend Yield, o índice Preço/Lucro (P/L), o Preço/Valor Patrimonial (P/VP) e o ROE (Return on Equity).

3.4.1 A Importância do Contato Precoce com Conceitos Estatísticos e Financeiros

A formação de uma base sólida de conhecimento em conceitos estatísticos e financeiros desde cedo tem se mostrado essencial para a formação de cidadãos mais preparados para tomar decisões informadas, tanto no âmbito pessoal quanto profissional. Cada vez mais, o mercado de trabalho exige habilidades que envolvem o entendimento de dados, tomada de decisões baseadas em probabilidades e, especialmente, a capacidade de compreender questões financeiras.

3.4.2 A Importância dos Conceitos Estatísticos

A estatística é uma área que lida com a coleta, análise e interpretação de dados. Desde cedo, é fundamental que os estudantes tenham contato com esses conceitos, pois eles ajudam a entender padrões, tendências e probabilidades, aspectos que estão presentes em nosso cotidiano. Exemplos simples como análise de resultados de pesquisas, gráficos de desempenho de

um time de futebol ou até mesmo a previsão do tempo são frequentemente usados para introduzir as ideias básicas da estatística.

O estudo da estatística permite que os alunos desenvolvam habilidades analíticas essenciais, como pensamento crítico e resolução de problemas. Saber interpretar dados corretamente, entender a relevância de diferentes tipos de média (média, mediana e moda) e compreender a importância da variabilidade (como o desvio padrão) são habilidades que, se dominadas de maneira prática, podem ser úteis em diversos aspectos da vida. Além disso, esses conceitos são frequentemente utilizados em outras disciplinas acadêmicas, como ciências, economia e até em projetos interdisciplinares.

Ao analisar os dados sobre o número de acidentes de trânsito em diferentes cidades, por exemplo os estudantes podem aprender a calcular a média e a variabilidade, além de perceber como esses dados podem influenciar decisões públicas sobre segurança. Esse tipo de exercício mostra, desde cedo, como a estatística é uma ferramenta poderosa para entender o mundo ao nosso redor.

3.4.3 A Importância dos Conceitos Financeiros

O ensino de conceitos financeiros na Educação Básica pode ser decisivo para que os jovens desenvolvam uma relação mais saudável com o dinheiro. No entanto, muitos estudantes deixam a escola sem o conhecimento necessário para administrar suas finanças pessoais, o que pode levar a decisões financeiras equivocadas ao longo da vida. Conceitos de orçamento, investimentos, poupança, juros compostos, rendimento e risco são fundamentais para uma vida financeira equilibrada e para o desenvolvimento de uma mentalidade empreendedora.

Quando uma pessoa aprende como calcular o dividend yield de uma ação ou como interpretar o índice de preço/lucro (P/E), ela começa a entender como avaliar uma empresa no mercado financeiro. Isso não apenas

pode abrir portas para o desenvolvimento de habilidades de investimento mais vantajosas, além de proporcionar uma compreensão mais profunda do funcionamento da economia e dos mercados financeiros.

3.4.4 Desenvolvimento de Habilidades para a Vida Profissional e Pessoal

O domínio de conceitos estatísticos e financeiros desde cedo prepara os estudantes para enfrentar um mundo cada vez mais orientado por dados e financeiramente complexo. Essas competências são fundamentais não apenas para o exercício de diversas profissões — especialmente nas áreas de tecnologia, economia e ciência de dados, que exigem a capacidade de lidar com grandes volumes de informações e realizar análises financeiras —, mas também para a vida pessoal.

O contato precoce com esses temas contribui para a redução da desigualdade econômica, uma vez que muitos jovens de classes sociais menos favorecidas não têm acesso à educação financeira em seus lares. Ensinar essas habilidades nas escolas pode nivelar oportunidades e proporcionar a todos os estudantes as ferramentas necessárias para tomar decisões mais conscientes, inteligentes e seguras sobre seu futuro financeiro.

Ao aprenderem a calcular o risco de diferentes investimentos ou a entender o impacto de juros compostos, os estudantes são mais propensos a tomar decisões de poupança e investimento que favoreçam seu crescimento financeiro no longo prazo. Além disso, o domínio desse conhecimento tende a promover o desenvolvimento da disciplina financeira, permitindo que os alunos se sintam mais confiantes em sua capacidade de gerenciar seu dinheiro no futuro.

3.4.5 A Importância dessas ideias na Formação Escolar

Integrar conceitos estatísticos e financeiros de maneira estruturada e prática no currículo escolar contribui para a formação de uma geração mais

preparada para as exigências do mercado de trabalho e para os desafios do cotidiano. Ao incorporar essas disciplinas em atividades do dia a dia, como projetos e simulações financeiras, as escolas podem ajudar os estudantes a desenvolver habilidades que vão além da simples memorização de conceitos e fórmulas.

Simulações de investimentos em um mercado fictício, onde os alunos possam investir em ações e observar a evolução de seus investimentos, podem ensinar de forma divertida e prática os conceitos de risco, rendimento e gestão de portfólio. Essas atividades tornam o aprendizado mais interessante e aplicável à realidade.

Portanto, o contato com conceitos estatísticos e financeiros desde cedo é crucial para a formação de cidadãos mais conscientes e preparados para tomar decisões informadas. Além de ajudar a melhorar a compreensão do mundo, esse conhecimento também pode ser um diferencial significativo na atuação no mercado de trabalho e na vida cotidiana. Quando investimos no ensino desses conceitos na formação escolar, estamos preparando os alunos não apenas para serem consumidores mais críticos, mas também cidadãos mais responsáveis e empreendedores no futuro.

3.4.6 O que são ações de uma empresa?

Ações são pequenas partes do capital social de uma empresa. Quando uma empresa decide “abrir capital”, ela passa a vender essas partes ao público, transformando-se em uma empresa de capital aberto. Quem compra uma ação se torna acionista, ou seja, sócio da empresa, com direito a participar dos lucros (na forma de dividendos) e, em alguns casos, das decisões da companhia (por meio de votos em assembleias).

3.4.7 Como uma empresa entra na bolsa de valores?

Para uma empresa entrar na bolsa de valores, ela precisa passar por um processo chamado oferta pública inicial (em inglês, *IPO* — *Initial Public*

Offering). Esse processo geralmente envolve os seguintes passos:

1. **Planejamento interno e auditorias financeiras:** a empresa precisa demonstrar transparência e solidez.
2. **Contratação de bancos e assessores financeiros:** eles ajudam a avaliar o valor da empresa e organizar a oferta.
3. **Registro na CVM (Comissão de Valores Mobiliários):** órgão que regula o mercado de capitais no Brasil.
4. **Divulgação de informações ao mercado:** a empresa publica um *prospecto* com dados financeiros, riscos e estratégias.
5. **Lançamento das ações na bolsa:** após aprovação, as ações são negociadas no mercado, por exemplo na B3 (a bolsa de valores brasileira).

3.4.8 Quais são as vantagens para uma empresa ao entrar na bolsa?

As principais vantagens de abrir capital são:

- **Captação de recursos:** a venda de ações permite à empresa levantar grandes quantias de dinheiro sem recorrer a empréstimos.
- **Expansão dos negócios:** com o capital obtido, a empresa pode investir em crescimento, aquisições, tecnologia, etc.
- **Aumento de visibilidade e credibilidade:** estar listada em bolsa reforça a imagem da empresa perante investidores, clientes e parceiros.
- **Liquidez para os sócios:** os fundadores e investidores iniciais podem vender suas ações e realizar lucros.
- **Atração de talentos:** empresas listadas muitas vezes oferecem ações como parte da remuneração de executivos.

Em resumo, ao vender ações na bolsa, a empresa consegue financiar seu crescimento com o apoio de milhares de investidores, compartilhando seus resultados com o mercado. Por outro lado, ela precisa seguir regras mais rígidas de transparência e governança corporativa.

Os índices de avaliação da bolsa de valores são indicadores fundamentais para acompanhar o desempenho de determinados grupos de ações, setores econômicos ou do mercado acionário como um todo. Eles funcionam como termômetros que sinalizam o comportamento médio dos preços dos ativos, sendo amplamente utilizados por investidores, analistas e instituições financeiras na tomada de decisões de investimento e na avaliação cenários econômicos.

Cada índice possui uma metodologia própria de cálculo e um conjunto específico de ativos que o compõem, podendo refletir desde o desempenho das ações mais negociadas até empresas de um setor específico, como energia ou tecnologia.

3.5 Alguns parâmetros para avaliar boas ações

Para avaliar se uma ação está cara ou barata, se uma empresa é lucrativa ou endividada, ou se vale a pena investir nela visando dividendos, os investidores utilizam diversos indicadores fundamentais. Esses índices auxiliam na análise de empresas listadas na bolsa de valores e são amplamente utilizados por analistas e investidores de perfil fundamentalista.

3.5.1 Dividend Yield (DY)

O **Dividend Yield** representa o percentual de retorno que o investidor recebe em forma de dividendos, em relação ao preço da ação.

$$DY = \frac{\text{Dividendos por ação}}{\text{Preço da ação}} \times 100$$

Se uma ação custa R\$ 20,00 e paga R\$ 2,00 de dividendos por ano:

$$DY = \frac{2}{20} \times 100 = 10\%$$

3.5.2 Preço/Lucro (P/L)

O índice **P/L** mostra quantos anos seriam necessários para o investidor recuperar seu capital investido com os lucros gerados pela empresa, assumindo lucro constante.

$$P/L = \frac{\text{Preço da ação}}{\text{Lucro por ação}}$$

Se a ação custa R\$ 50,00 e o lucro por ação é R\$ 5,00:

$$P/L = \frac{50}{5} = 10$$

3.5.3 Preço/Valor Patrimonial (P/VP)

O **P/VP** compara o preço de mercado da ação com o valor patrimonial por ação. Um valor inferior a 1 pode indicar que a ação está sendo negociada abaixo de seu valor contábil.

$$P/VP = \frac{\text{Preço da ação}}{\text{Valor patrimonial por ação}}$$

3.5.4 ROE (Return on Equity)

O **ROE** mede a rentabilidade da empresa sobre o patrimônio líquido dos acionistas.

$$ROE = \frac{\text{Lucro líquido}}{\text{Patrimônio líquido}} \times 100$$

Uma empresa com lucro líquido de R\$ 100 milhões e patrimônio líquido de R\$ 500 milhões:

$$ROE = \frac{100}{500} \times 100 = 20\%$$

Esses índices constituem, em verdade uma pequena amostra de uma enorme coleção de índices utilizados no mercado financeiro para balizar a real valorização ou desvalorização das ações de uma dada empresa.

4 Uma proposta para sala de aula!

4.1 Introdução

A Estatística, especialmente por meio do estudo de médias e medidas estatísticas, é uma ferramenta fundamental para a compreensão do mundo atual. Em tempos de abundância de dados, saber interpretar e organizar informações se tornou uma habilidade essencial para o exercício pleno da cidadania. Neste capítulo, propomos uma abordagem prática e contextualizada para o ensino desse conteúdo nos Ensinos Fundamental e Médio, destacando sua relevância tanto para a vida cotidiana quanto para a formação de um cidadão moderno, crítico e bem instruído.

A proposta inclui o uso de ferramentas computacionais acessíveis, como o Excel ou o Calc do LibreOffice, que permitem aos estudantes realizarem cálculos, montarem planilhas e criarem gráficos de maneira dinâmica e visual. Com isso, além de aprender os conceitos matemáticos, os alunos desenvolvem competências digitais e analíticas que os preparam para os desafios da sociedade contemporânea.

O material aqui apresentado foi pensado a proporcionar uma certa flexibilidade, possibilitando que o(a) professor(a) possa utilizá-lo integralmente ou em partes, conforme suas necessidades pedagógicas, o tempo disponível e o nível de aprendizagem de seus alunos. Essa adaptabilidade permite que o conteúdo seja trabalhado de maneira significativa e adequada à realidade de cada sala de aula.

Além disso, o texto também pode ser útil para estudantes autodidatas, que desejem aprender sobre esse tema tão importante no mundo moderno. Vivemos em uma era em que somos constantemente bombardeados por

uma enxurrada de dados numéricos. Saber resumi-los, interpretá-los e extrair deles o que realmente importa é uma habilidade essencial — e as ferramentas da estatística são aliadas poderosas nesse processo.

Com o objetivo de ampliar a transparência e a reprodutibilidade do material apresentado nesta dissertação, disponibilizo as planilhas utilizadas na construção da proposta didática por meio do seguinte link: <https://acesse.one/POuHP>. Esse material complementar tem como finalidade auxiliar na compreensão dos conteúdos abordados e servir de apoio a futuras práticas pedagógicas relacionadas ao tema.

4.2 Médias e medidas estatísticas × planilhas eletrônicas

4.2.1 ATIVIDADE 01 - Médias

- Média Aritmética.
- Média Aritmética Ponderada

Exemplo 4.2.1. *(Uncisal) Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações*

AVALIAÇÃO	Nota	Peso
Prova Escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

Figura 4.1: Tabela contendo as notas e seus respectivos pesos

sua nota bimestral foi aproximadamente igual a:

- (a) 8,6.
- (b) 8,0.
- (c) 7,5.

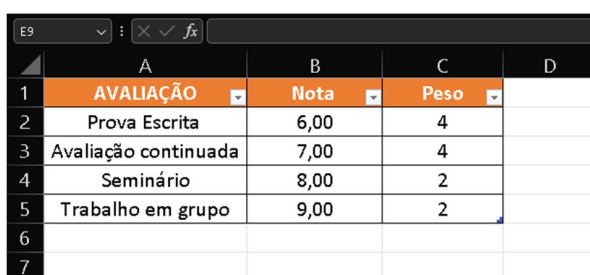
(d) 7, 2.

(e) 6, 8.

Solução. Resolução usando o Excel

A questão proposta trata-se de um problema envolvendo média aritmética ponderada. Para resolve-la vamos usar o comando SOMARPRODUTO. Veja.

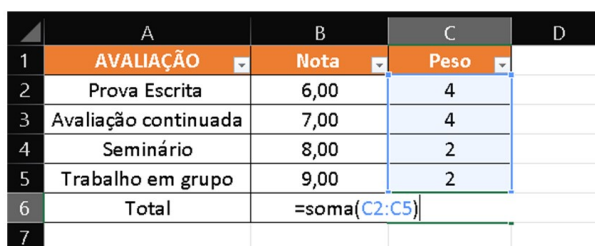
1. Passo 01 - Vamos inserir os dados numa planilha do Excel.



	A	B	C	D
1	AVALIAÇÃO	Nota	Peso	
2	Prova Escrita	6,00	4	
3	Avaliação continuada	7,00	4	
4	Seminário	8,00	2	
5	Trabalho em grupo	9,00	2	
6				
7				

Figura 4.2: Tabela contendo os dados do enunciado

2. Passo 02 - Na célula A6 vamos inserir o texto TOTAL e na célula C6 vamos somar os pesos através do comando =SOMA selecionando a coluna que desejamos somar.



	A	B	C	D
1	AVALIAÇÃO	Nota	Peso	
2	Prova Escrita	6,00	4	
3	Avaliação continuada	7,00	4	
4	Seminário	8,00	2	
5	Trabalho em grupo	9,00	2	
6	Total	=soma(C2:C5)		
7				

Figura 4.3: Tabela Somando os pesos

3. Passo 03 - Para calcular a média aritmética ponderada iremos usar o comando =SOMARPRODUTO.

- Na Célula A7 escrevemos, Média Aritmética Ponderada
- Na célula C7 digitamos o comando =SOMARPRODUTO
- O Seleccionamos os elementos da coluna peso, digitamos (;)
- O Seleccionamos os elementos da coluna nota, fechamos os parênteses

- Dividimos pela soma dos pesos que somamos na célula C6. Veja na imagem abaixo o que deve ser digitado na célula C7.
- Aperte enter.

	A	B	C	D
1	AVALIAÇÃO	Nota	Peso	
2	Prova Escrita	6,00	4	
3	Avaliação continuada	7,00	4	
4	Seminário	8,00	2	
5	Trabalho em grupo	9,00	2	
6	Total		12	
7	Média ponderada=SOMARPRODUTO(C2:C5;B2:B5)/C6			
8				

Figura 4.4: Tabela inserindo o comando =SOMARPRODUTO

Arredondando para uma casa decimal temos

	A	B	C	D
1	AVALIAÇÃO	Nota	Peso	
2	Prova Escrita	6,00	4	
3	Avaliação continuada	7,00	4	
4	Seminário	8,00	2	
5	Trabalho em grupo	9,00	2	
6	Total		12	
7	Média ponderada		7,2	
8				

Figura 4.5: Tabela Média aritmética ponderada

Assim a Média Aritmética ponderada é 7,2, ou seja a alternativa correta é o item (d). ■

4.2.2 ATIVIDADE 02 - Calculando a Média Aritmética no Excel – Um Estudo sobre o Desempenho Escolar.

- Objetivo da Atividade
- Compreender o conceito de média aritmética simples.
- Aplicar o conceito de média utilizando a ferramenta Microsoft Excel.
- Interpretar o resultado da média no contexto da vida escolar.

Exemplo 4.2.2. A professora Ana registrou as notas de Matemática de 5 alunos ao longo de três avaliações. Ela deseja saber qual foi a média de cada aluno para decidir quais precisarão de reforço escolar.

Aluno	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Amanda	6,5	7,0	8,0
Bruno	5,0	4,5	6,0
Carla	8,0	9,0	8,5
Daniel	3,0	4,0	5,0
Érica	7,5	7,0	6,5

Figura 4.6: Tabela boletim contendo as respectivas notas

Solução.

1. Passo 01 - Abrindo o Excel e montando a tabela. Abra o Microsoft Excel e digite os dados conforme o modelo abaixo:

	A	B	C	D	E
1	Aluno	Nota 1	Nota 2	Nota 3	
2	Amanda	6,5	7,0	8,0	
3	Bruno	5,0	4,5	6,0	
4	Carla	8,0	9,0	8,5	
5	Daniel	3,0	4,0	5,0	
6	Érica	7,5	7,0	6,5	
7					

Figura 4.7: Tabela notas do boletim colocadas no excel

2. Passo 02 - Inserindo a fórmula da média. Na coluna E, crie o título "Média". Abaixo, vamos calcular a média aritmética de cada aluno. Clique na célula E2 (mesma linha do nome Amanda e coluna E) e digite a fórmula: =MÉDIA(B2:D2)

	A	B	C	D	E	F
1	Aluno	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Média	
2	Amanda	6,5	7,0	8,0	=MÉDIA(B2:D2)	
3	Bruno	5,0	4,5	6,0		
4	Carla	8,0	9,0	8,5		
5	Daniel	3,0	4,0	5,0		
6	Érica	7,5	7,0	6,5		
7						

Figura 4.8: Tabela Calculando a média das notas de cada aluno

Depois de digitar, pressione enter. A média será exibida automaticamente.

3. Passo 03 - Copie essa fórmula para os demais alunos, arrastando a alça de preenchimento (aquele quadradinho no canto inferior da célula selecionada).

	A	B	C	D	E	F
1	Aluno	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Média	
2	Amanda	6,5	7,0	8,0	7,2	
3	Bruno	5,0	4,5	6,0	5,2	
4	Carla	8,0	9,0	8,5	8,5	
5	Daniel	3,0	4,0	5,0	4,0	
6	Érica	7,5	7,0	6,5	7,0	
7						

Figura 4.9: Tabela com as respectivas médias

4. Passo 04 - Interpretando os resultados. Agora que temos as médias, analise:
- Quais alunos ficaram com média abaixo de 6,0?
 - Quem teve o melhor desempenho?
 - Que recomendações você daria com base nesses dados?

Note que a média aritmética é uma forma simples de representar o desempenho de um conjunto de dados. No contexto escolar, ela ajuda a identificar padrões de desempenho e necessidades de reforço.

Pergunta aberta: Você acha que a média sozinha é suficiente para avaliar o desempenho dos alunos? Por quê?

■

4.2.3 ATIVIDADE 03 - Atividade: Média ou Mediana? Analisando Consumo de Energia com o Excel.

Objetivos:

- Compreender a diferença entre média aritmética e mediana.
- Analisar como valores discrepantes influenciam a média.
- Utilizar o Excel para calcular ambas as medidas.

Exemplo 4.2.3. *Dona Lúcia acompanhou o consumo mensal de energia elétrica (em kWh) da sua casa ao longo de um ano organizando-os em uma tabela. Ela deseja saber qual é o consumo “típico” para poder estimar futuras contas. No entanto, dois meses tiveram consumo atipicamente alto porque ela hospedou parentes e usou muitos eletrodomésticos.*

Mês	Consumo (kwh)
janeiro	180
fevereiro	175
março	190
abril	185
maio	182
junho	180
julho	178
agosto	185
setembro	182
outubro	500
novembro	185
dezembro	470

Figura 4.10: Tabela contendo os consumos

Vamos ajudá-la a analisar os dados com o Excel!

Solução.

1. Passo 01 - Insira os dados abaixo no Excel, como mostrado a seguir:

	A	B
1	Mês	Consumo (kwh)
2	janeiro	180
3	fevereiro	175
4	março	190
5	abril	185
6	maio	182
7	junho	180
8	julho	178
9	agosto	185
10	setembro	182
11	outubro	500
12	novembro	185
13	dezembro	470

Figura 4.11: Tabela consumos colocados no excel

2. Passo 02 - Calculando a média e a mediana. Na célula C1 digite o nome da coluna (Média). Clique na célula C2 e digite a fórmula: =MÉDIA(B2:B13) e aperte enter

	A	B	C
1	Mês	Consumo (kwh)	Média
2	janeiro	=MÉDIA(B2:B13)	
3	fevereiro	175	
4	março	190	
5	abril	185	
6	maio	182	
7	junho	180	
8	julho	178	
9	agosto	185	
10	setembro	182	
11	outubro	500	
12	novembro	185	
13	dezembro	470	
14			

Figura 4.12: Tabela calculando a média aritmética dos consumos

3. Passo 03 - Analogamente, na célula D1 digite o nome da coluna (Mediana). Clique na célula D2 e digite a fórmula: =MED(B2:B13) e aperte

enter.

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	Mês	Consumo (kwh)	Média	Media	1	Mês	Consumo (kwh)	Média	Media
2	janeiro	180	=MED(B2:B13)		2	janeiro	180	R\$ 232,67	R\$ 183,50
3	fevereiro	175			3	fevereiro	175		
4	março	190			4	março	190		
5	abril	185			5	abril	185		
6	maio	182			6	maio	182		
7	junho	180			7	junho	180		
8	julho	178			8	julho	178		
9	agosto	185			9	agosto	185		
10	setembro	182			10	setembro	182		
11	outubro	500			11	outubro	500		
12	novembro	185			12	novembro	185		
13	dezembro	470			13	dezembro	470		

Figura 4.13: Tabela encontrando a mediana

4. Passo 04 - Analisando o resultado. Compare os dois valores obtidos:

- A média ficou próxima da maioria dos consumos?
- A mediana representa melhor o consumo típico da casa?
- O que aconteceu com a média nos meses com consumo alto?

A presença de valores muito altos ou baixos pode distorcer a média, mas não afeta a mediana, que continua apontando o valor central.

Pergunta aberta: Em uma análise de consumo ou renda, quando é mais adequado usar a mediana em vez da média? Esse exemplo evidencia como os valores muito altos (outubro e dezembro) distorcem a média, tornando-a menos representativa do consumo típico, enquanto a mediana permanece estável e mais fiel à realidade da maioria dos meses.

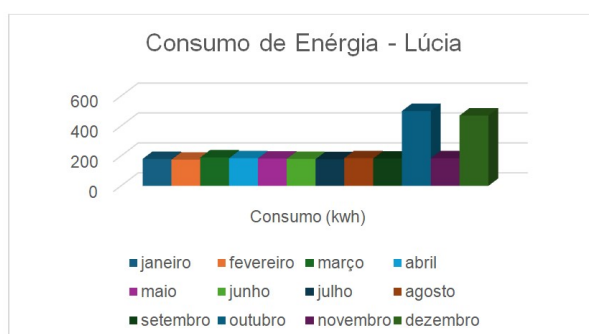


Figura 4.14: Gráfico dos consumos mensais

O gráfico comparativo visa destacar visualmente a discrepância dos

dados da tabela.

■

4.2.4 ATIVIDADE 04 - Analisando a Variância – A média é igual... mas o desempenho é?

Objetivos

- Compreender o conceito de variância como medida de dispersão.
- Utilizar o Excel para calcular a variância de conjuntos de dados. o significado da variância no contexto do desempenho de atletas

Exemplo 4.2.4. *Dois atletas, Ana e Bruno, estão sendo avaliados por seu treinador com base em seus desempenhos nos treinos de arremesso de peso. Cada um realizou 10 lançamentos, e o treinador deseja identificar qual dos dois apresenta um desempenho mais consistente. Um dos modos para responder ao problema acima, é calculando a variância dos lançamentos usando o Excel e interpretar os resultados.*

Solução.

1. Passo 01 - Inserindo os dados no Excel. Insira os dados em uma planilha com três colunas: “Lançamento”, “Ana” e “Bruno”.

	A	B	C
1	Lançamentos	Bruno	Ana
2	1	8	2
3	2	9	4
4	3	10	6
5	4	11	8
6	5	12	10
7	6	10	12
8	7	9	14
9	8	10	16
10	9	11	18
11	10	10	20

Figura 4.15: Tabela lançamentos de Bruno e Ana

2. Passo 02 - Calcule a média dos lançamentos para cada atleta:

	A	B	C
1	Lançamentos	Bruno	Ana
2	1	8	3
3	2	9	5
4	3	10	6
5	4	11	7
6	5	12	8
7	6	10	12
8	7	9	13
9	8	10	14
10	9	11	15
11	10	10	17
12	Média	10	10

Figura 4.16: Tabela média aritmética dos lançamentos

3. Passo 03 - Calcule a variância amostral para cada atleta. Para fazer isso, na célula A13 escreva Variância, analogamente à Média. Na célula B13 digite o seguinte código: =VAR.A(B2:B11) e aperte enter

	A	B	C
1	Lançamentos	Bruno	Ana
2	1	8	3
3	2	9	5
4	3	10	6
5	4	11	7
6	5	12	8
7	6	10	12
8	7	9	13
9	8	10	14
10	9	11	15
11	10	10	17
12	Média	10	10
13	V _i =VAR.A(B2:B11)		

Figura 4.17: Tabela encontrando a variância dos lançamentos de Bruno

4. Passo 04 - Agora, analogamente na célula C13 digite o código: =VAR.A(C2:C11) e aperte enter.

	A	B	C
1	Lançamentos	Bruno	Ana
2	1	8	3
3	2	9	5
4	3	10	6
5	4	11	7
6	5	12	8
7	6	10	12
8	7	9	13
9	8	10	14
10	9	11	15
11	10	10	17
12	Média	10	10
13	Variância	=VAR.A(C2:C11)	

Figura 4.18: Tabela encontrando a variância dos lançamentos de Ana

	A	B	C
1	Lançamentos	Bruno	Ana
2	1	8	3
3	2	9	5
4	3	10	6
5	4	11	7
6	5	12	8
7	6	10	12
8	7	9	13
9	8	10	14
10	9	11	15
11	10	10	17
12	Média	10	10
13	Variância	1,33333	22,8889

Figura 4.19: Tabela variância dos lançamentos de Bruno e Ana

Perguntas para Análise e Discussão:

1. Qual dos dois atletas apresenta maior variância?
2. O que isso significa em relação à regularidade dos lançamentos?
3. A média foi suficiente para comparar os desempenhos? Por quê?

4. Em quais outras situações confiar apenas na média pode ser perigoso ou enganoso?

Embora Ana e Bruno tenham médias iguais, a variância dos lançamentos de Ana é significativamente maior, revelando que ela tem um desempenho muito mais irregular. Isso mostra que a variância complementa a média e oferece uma visão mais justa e detalhada sobre os dados analisados.

4.2.5 ATIVIDADE 05 - Construindo o gráfico de dispersão

O gráfico de dispersão é uma ferramenta essencial para analisar a relação entre duas variáveis. Neste caso temos como variáveis os lançamentos e a distância alcançada em cada lançamento realizado por Ana e Bruno. Por meio da distribuição dos pontos no plano cartesiano, é possível identificar tendências, padrões de comportamento e possíveis correlações entre os dados. Além disso, o gráfico facilita a detecção de valores discrepantes que podem influenciar a interpretação dos resultados. Ele é muito utilizado em estudos estatísticos, científicos e em pesquisas de mercado, tornando a análise de dados mais visual, crítica e fundamentada.

Para construir os gráficos iremos dividir a nossa tabela em duas. Veja a figura abaixo

	A	B	C	D	E	F
1	Lançamentos	Bruno		Lançamentos	Ana	
2	1	8		1	3	
3	2	9		2	5	
4	3	10		3	6	
5	4	11		4	7	
6	5	12		5	8	
7	6	10		6	12	
8	7	9		7	13	
9	8	10		8	14	
10	9	11		9	15	
11	10	10		10	17	
12	Média	10		Média	10	
13	Variância	1,33333		Variância	22,8889	
14						

Figura 4.20: Tabela com colunas separadas

1. Passo 01 - Construindo gráfico referente aos lançamentos de Bruno. -
Selecione com o mouse as duas colunas (Lançamento e Bruno) até o

último valor do lançamento.

- Passo 02 - Clique na aba *inserir*. Vá no grupo *gráficos* e escolha a opção *Gráficos de Dispersão*. Aperte enter.

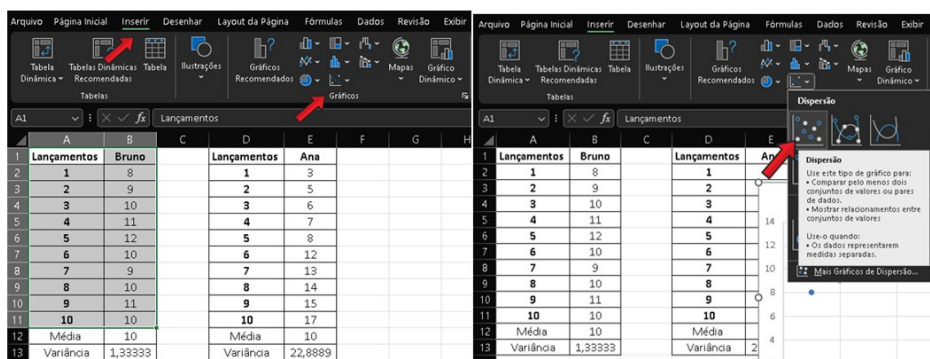


Figura 4.21: Tabela inserido o gráfico de dispersão

- Passo 03 – O gráfico de dispersão dos lançamentos realizados por Bruno será semelhante a esse. Algumas formatações ficam a cargo do elaborador.

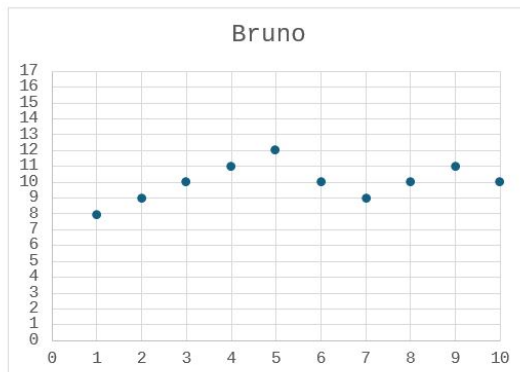


Figura 4.22: Gráfico de dispersão de Bruno.

- Passo 04 - Para construir o gráfico referente aos lançamentos de Ana siga os passos anteriores e será mostrado na tela um gráfico semelhante a esse. Algumas formatações ficam a cargo do elaborador.

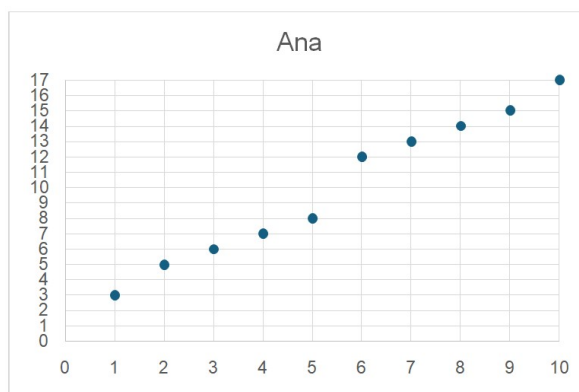


Figura 4.23: Gráfico de dispersão de Ana.

5. Passo 05 - Comparando os gráficos. Para auxílio inserimos uma linha de tendência. Vá na aba Design do Gráfico, procure pelo grupo Layout de Gráfico, clique no botão Adicionar Elemento de Gráfico, Selecione Linha de Tendência, escolha a opção Linear.

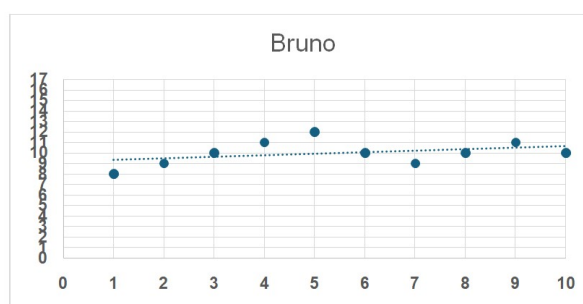


Figura 4.24: Gráfico de dispersão de Bruno com linha de tendência

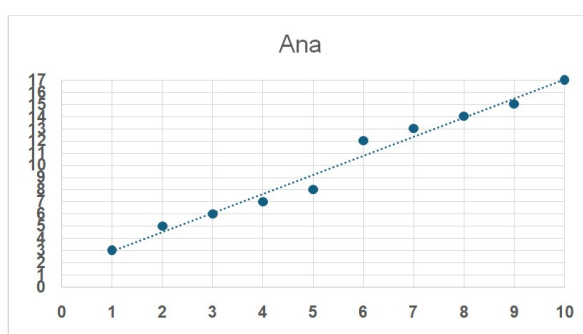


Figura 4.25: Gráfico de dispersão de Ana com linha de tendência

Perguntas sobre o gráfico:

1. Observando os gráficos de dispersão, qual dos dois atletas apresenta maior regularidade nas distâncias dos lançamentos?

2. Qual atleta mostra maior variação (diferença) nas medidas dos lançamentos?
3. Se você tivesse que prever a distância do próximo lançamento baseado no padrão dos dados, para qual atleta seria mais fácil fazer essa previsão?

Ao observar os gráficos de dispersão, notamos que Bruno apresenta lançamentos mais regulares, pois seus resultados ficam concentrados em uma faixa estreita de valores, variando pouco entre aproximadamente 9 e 12 metros. Isso mostra que seu desempenho é mais constante. Já Ana, embora mostre uma progressão crescente nos lançamentos, apresenta uma maior variação nas distâncias, indo de cerca de 3 metros até 17 metros, o que indica menor regularidade. Assim, considerando a estabilidade nos resultados, Bruno demonstra maior consistência em seus lançamentos.

■

4.2.6 ATIVIDADE 06 – Calculando o desvio padrão.

O desvio padrão é uma medida estatística fundamental por meio do qual entender a dispersão ou a variabilidade de um conjunto de dados em relação à média. Em outras palavras, ele nos indica o quanto os dados se espalham em torno da média. Quanto maior o desvio padrão, maior é a variação dos dados, e quanto menor, mais concentrados eles estão em torno da média. É o desvio padrão muito útil para avaliar a consistência ou a previsibilidade de um conjunto de dados. Por exemplo, em uma série de notas de uma turma, um desvio padrão baixo significa que a maioria dos alunos obteve notas próximas à média, enquanto um desvio padrão alto indica uma grande variação nas notas, com alguns alunos obtendo resultados muito diferentes dos outros.

Objetivos:

- Entender o conceito de desvio padrão e como ele pode ser calculado e interpretado.

- Utilizar o Excel para calcular o desvio padrão de um conjunto de dados.

Exemplo 4.2.5. *Em uma turma de especialização, para decidir quem seria o aluno laureado, percebeu-se que dois estudantes, Beto e Ravi, obtiveram a mesma média em suas notas semestrais. Diante desse impasse, um colega sugeriu que o critério de desempate fosse a constância das notas: seria laureado o aluno que apresentasse a maior regularidade em seu desempenho. Dadas as notas abaixo, determine quem foi o aluno laureado: Beto ou Ravi?*

Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9
Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10

Figura 4.26: Tabela notas de Beto e Ravi

Solução. Para resolver a situação acima iremos determinar o Desvio padrão, pois como vimos anteriormente esse valor determinar variação ou distância dos valores listado da média.

1. Passo 01 - Organizando as notas no Excel temos essa tabela abaixo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												Desvio Padrão
2	Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9	
3	Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10	

Figura 4.27: Tabela notas de Beto e Ravi np excel

2. Passo 02 - Para obter o desvio padrão das notas do aluno Beto façamos o seguinte. Na célula L2 digite o comando =DESVPAD.A(B2:K2) e aperte enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												Desvio Padrão	
2	Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9	=DESVPAD.A(B2:K2)	
3	Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10		

Figura 4.28: Tabela inserindo o comando = DESVPAD.A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												Desvio Padrão
2	Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9	1,957890021
3	Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10	

Figura 4.29: Tabela Desvio padrão referente as notas de Beto

3. Passo 03 - Para obter o desvio padrão das notas do aluno Ravi façamos o seguinte. Na célula L3 digite o comando =DESPAD.A(B3:K3) e aperte enter

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												Desvio Padrão	
2	Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9	1,957890021	
3	Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10	=DESPAD.A(B3:K3)	

Figura 4.30: Tabela inserindo o comando =DESPAD.A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												Desvio Padrão
2	Beto	10	8	9	9	7	8	5	4	6	9	1,957890021
3	Ravi	5	10	8	6	5	7	10	10	4	10	2,415229458

Figura 4.31: Tabela Desvio padrão referente as notas de Ravi

Assim o aluno escolhido para ser o Laureado da turma seria o aluno Beto, pois seu desvio padrão foi menor que o do aluno Ravi. Entende-se que o aluno Beto teve um desempenho mais constante.

4. Passo 04 – Comparando as notas por meio do gráfico de dispersão

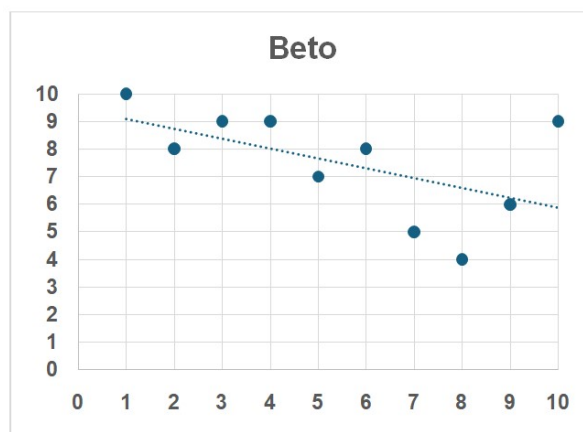


Figura 4.32: Gráfico de dispersão das notas de Beto com linha de tendência

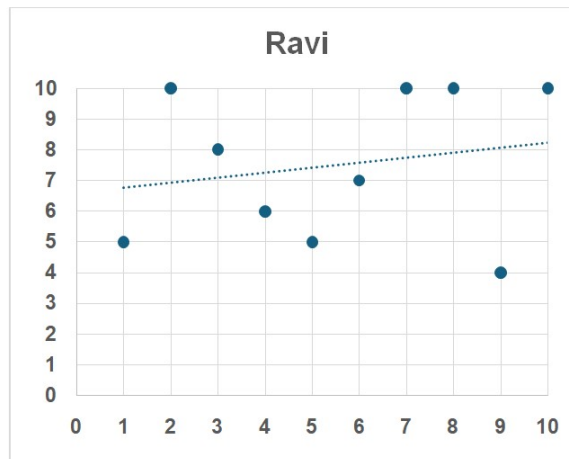


Figura 4.33: Gráfico de dispersão das notas de Ravi com linha de tendência

■

4.2.7 ATIVIDADE 06 – Analisando o melhor investimento – O desvio Padrão me diz!

Exemplo 4.2.6. A tabela abaixo mostra o retorno mensal dos últimos 12 meses de dois fundos de investimento Fundo A e Fundo B. De acordo com as informações em qual fundo é melhor investir?

RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO B(%)
Jan	5,25	1,23
Fev	4,37	2,28
Mar	5,36	3,4
Abr	5,64	7
Mai	4,77	6,75
Jun	4,51	7,47
Jul	4,82	7,28
Ago	4,93	5,29
Set	5,39	10,7
Out	5,29	5,37
Nov	4,68	-0,2
Dez	5,04	3,45

Figura 4.34: Tabela com os retornos dos fundos A e B

Solução.

Para responder essa pergunta vamos utilizar a análise do

Desvio Padrão. Quando falamos de investimentos, o desvio padrão é uma ferramenta poderosa para avaliar o risco. Em finanças, ele é utilizado para medir a volatilidade de um ativo ou de uma carteira de investimentos. Um ativo com um desvio padrão alto significa que seu preço varia bastante, o que implica maior risco. Já um desvio padrão baixo sugere que o ativo tende a ter um comportamento mais estável e previsível. Nos nossos cálculos sempre arredondaremos para duas casas decimais.

1. Passo 01 - Organizando em uma tabela teremos a seguinte estrutura.

	A	B	C	D	E	F	G
1	RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO B(%)				
2	Jan	5,25	1,23		Fundo A		
3	Fev	4,37	2,28		Média		%
4	Mar	5,36	3,4		Desvio Padrão		%
5	Abr	5,64	7				
6	Mai	4,77	6,75		Fundo B		
7	Jun	4,51	7,47		Média		%
8	Jul	4,82	7,28		Desvio Padrão		%
9	Ago	4,93	5,29				
10	Set	5,39	10,7				
11	Out	5,29	5,37				
12	Nov	4,68	-0,2				
13	Dez	5,04	3,45				

Figura 4.35: Gráfico média aritmética dos fundos A e B

2. Passo 02 - Vamos determinar as médias de retorno nas células F3 e F7 como fizemos anteriormente. Veja as médias abaixo.

Fundo A		
Média	5,00	%
Desvio Padrão		%
Fundo B		
Média	5,00	%
Desvio Padrão		%

Figura 4.36: Gráfico média aritmética dos fundos A e B

Note que os dois fundos tiveram a mesma média de retornos. Quando dois fundos de investimento apresentam a mesma média de retorno, é insuficiente definir qual o “melhor” apenas com base nesse valor, já que a média por si só não revela a variabilidade dos retornos. A média de retornos é uma boa indicação do desempenho geral de

um fundo, mas ela não informa sobre o risco envolvido. Aqui entra o desvio padrão, que é crucial para dar mais contexto à análise. Mesmo que dois fundos tenham a mesma média de retorno, um pode ter uma maior variação (ou volatilidade) nos seus retornos, o que o torna mais arriscado. O outro, por outro lado, pode ter uma menor variação, o que implica em um risco menor e mais estabilidade.

3. Passo 03 - Calculando os desvios padrões. Na célula F4 digite =DESPAD.A(B2:B13) e aperte enter.

	A	B	C	D	E	F	G
1	RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO A(%)				
2	Jan	5,25	1,23				
3	Fev	4,37	2,28				
4	Mar	5,36	3,4				
5	Abr	5,64	7				
6	Mai	4,77	6,75				
7	Jun	4,51	7,47				
8	Jul	4,82	7,28				
9	Ago	4,93	5,29				
10	Set	5,39	10,7				
11	Out	5,29	5,37				
12	Nov	4,68	-0,2				
13	Dez	5,04	3,45				

Figura 4.37: Tabela Calculando o Desvio padrão do fundo A

	A	B	C	D	E	F	G
1	RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO A(%)				
2	Jan	5,25	1,23				
3	Fev	4,37	2,28				
4	Mar	5,36	3,4				
5	Abr	5,64	7				
6	Mai	4,77	6,75				
7	Jun	4,51	7,47				
8	Jul	4,82	7,28				
9	Ago	4,93	5,29				
10	Set	5,39	10,7				
11	Out	5,29	5,37				
12	Nov	4,68	-0,2				
13	Dez	5,04	3,45				

Figura 4.38: Tabela com o Desvio padrão do fundo A

4. Passo 04 – Analogamente, na célula F8 digite =DESPAD.A(C2:C13) e aperte enter.

	A	B	C	D	E	F	G
1	RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO A(%)				
2	Jan	5,25	1,23				
3	Fev	4,37	2,28				
4	Mar	5,36	3,4				
5	Abr	5,64	7				
6	Mai	4,77	6,75				
7	Jun	4,51	7,47				
8	Jul	4,82	7,28				
9	Ago	4,93	5,29				
10	Set	5,39	10,7				
11	Out	5,29	5,37				
12	Nov	4,68	-0,2				
13	Dez	5,04	3,45				

Figura 4.39: Tabela Calculando o Desvio padrão do fundo B

	A	B	C	D	E	F	G
1	RETORNOS	FUNDO A(%)	FUNDO A(%)				
2	Jan	5,25	1,23				
3	Fev	4,37	2,28				
4	Mar	5,36	3,4				
5	Abr	5,64	7				
6	Mai	4,77	6,75				
7	Jun	4,51	7,47				
8	Jul	4,82	7,28				
9	Ago	4,93	5,29				
10	Set	5,39	10,7				
11	Out	5,29	5,37				
12	Nov	4,68	-0,2				
13	Dez	5,04	3,45				

Figura 4.40: Tabela com o Desvio padrão do fundo A

O desvio padrão, portanto, nos ajuda a medir essa volatilidade e a entender como os retornos de um fundo estão dispersos ao redor da média. Para um investidor com um perfil mais conservador, por exemplo, fundos com menor desvio padrão seriam preferíveis, pois oferecem maior previsibilidade e menor risco, assim o Fundo A seria a melhor escolha. Já para um investidor com perfil mais arrojado, que aceita maior risco em busca de possíveis retornos mais altos, fundos com maior desvio padrão pode ser atraentes, mesmo que isso implique em mais flutuações no valor do investimento, sendo o Fundo B mais indicado.

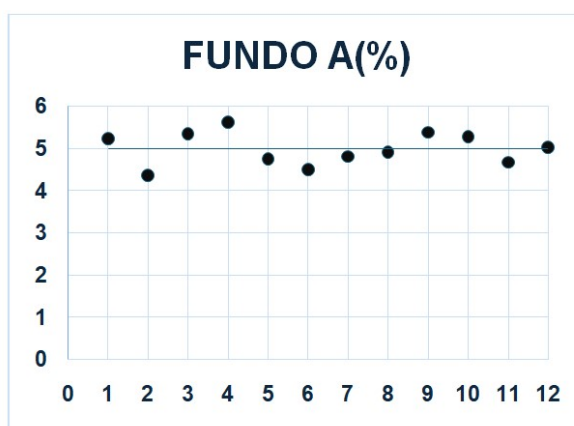


Figura 4.41: gráfico de dispersão do fundo A com a linha de tendência

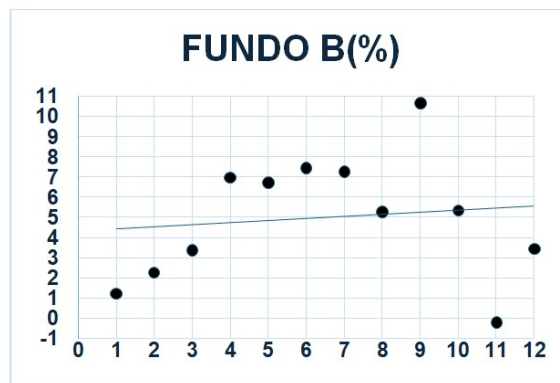


Figura 4.42: gráfico de dispersão do fundo B com a linha de tendência

■

Considerações finais - Conclusão

O presente trabalho teve como principal objetivo propor uma intervenção pedagógica voltada à superação das dificuldades identificadas no ensino das médias. Para isso, incluímos no planejamento dessa dessas atividades o uso do programa Excel como ferramenta dinâmica, capaz de auxiliar na visualização do comportamento dos dados em relação às diferentes médias. A relevância deste estudo reside, sobretudo, no fato de abordar conteúdos pouco explorados no Ensino Básico, como a desigualdade das médias, um recurso matemático valioso para a resolução de problemas acadêmicos e do cotidiano. Foram contemplados conceitos estatísticos, cada vez mais essenciais à formação pessoal e profissional.

Compreender esses conceitos desde a educação básica pode favorecer a tomada de decisões mais conscientes, como a análise de investimentos, a avaliação de riscos e o planejamento de recursos, com base em dados estatísticos e no raciocínio probabilístico.

A estrutura do trabalho foi pensada com o intuito de oferecer ao docente do Ensino Básico subsídios para enriquecer sua prática docente, por meio de definições claras, demonstrações matematicamente consistentes, exemplos graduais, do mais simples ao mais elaborado, e uma sequência didática eficaz, capaz de evidenciar a aplicação concreta dos conceitos abordados.

A proposta aproxima o uso da matemática à realidade do aluno, estimulando-o reflexões melhor embasadas sobre decisões que impactam

diretamente sua vida. É o caso, por exemplo, da análise de investimentos com base na variância e no desvio padrão de determinada ação.

Por fim, por adotarmos uma abordagem metodológica que integra teoria e prática, acreditamos que este trabalho alcança seu objetivo e contribui para o enriquecimento do ensino de matemática, além de fomentar experiências pedagógicas mais significativas.

Referências Bibliográficas

- [1] Baroni, M. A. (2001). Desigualdades das médias e aplicações didáticas. *Revista do Professor de Matemática*, 46, 24–30.
- [2] Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília. MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 19 mar. 2025.
- [4] Bussab, W. O.; Morettin, P. A. (2017). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.
- [5] Cazorla, I. M. (2007). Estatística e educação matemática: fundamentos e reflexões. *Bolema*, 26(1), 75–98.
- [6] Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contexto & aplicações*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- [7] Editora Moderna (org). *Conexões: Matemática e suas tecnologias: Manual do professor*. Concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável: Fabio Martins de Leonardo. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. Obra em 6 v.
- [8] Ghesi, C. R.; Leme da Silva, A. L. (2013). *Estatística Descritiva e Inferencial*. São Paulo: Pearson.
- [9] GOMES, Carlos A.; DINIZ, Iesus C, GURGEL, Roberto T. *Matemática discreta: Conjuntos, recorrências, combinatória e probabilidade*. Livraria da Física da USP, 2023.
- [10] Grimaldi, R. P. (2005). *Matemática Discreta: Uma Introdução*. 3ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall.

- [11] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. *Fundamentos de Matemática Elementar: Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*. 9. ed. V. 11. São Paulo: Atual, 2013.
- [12] Lages, Elon, Morgado A. C., Sociedade Brasileira de Matemática. (2012). *A Matemática do Ensino Médio*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM.
- [13] Lopes, C. E.; Fávero, L. P. (2015). *Estatística Aplicada: Análise de Variância e Regressão*. São Paulo: Atlas.
- [14] Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (2009). *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. Rio de Janeiro: LTC.
- [15] Rosen, K. H. (2012). *Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª ed. São Paulo: McGraw-Hill.
- [16] Teixeira, L. M. (2020). *Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática: Teoria e Prática com Planilhas*. Curitiba: Appris.
- [17] Triola, M. F. (2011). *Introdução à Estatística*. Rio de Janeiro: LTC.
- [18] Viana, M. M. (2010). *Matemática Aplicada: Uma Abordagem Introdutória*. Belo Horizonte: Editora UFMG.