



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO  
NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT



**PROFMAT**

**RICHARDSON LUCAS CARDOSO DOS SANTOS**

# **MODELO MATEMÁTICO DO TIPO SIR APLICADO AO VÍRUS DA COVID-19 NO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE**

Orientadora:

**Profa. Dra. Débora Borges Ferreira**

Natal/RN - 2024

**RICHARDSON LUCAS CARDOSO DOS SANTOS**

# **Modelo matemático do tipo SIR aplicado ao vírus da Covid-19 no estado do Rio Grande do Norte**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira

Natal/RN - 2024

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**RICHARDSON LUCAS CARDOSO DOS SANTOS**

# **Modelo matemático do tipo SIR aplicado ao vírus da Covid-19 no estado do Rio Grande do Norte**

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira (UFRN - Orientadora)

Prof. Dr. Ronaldo César Duarte (UFRN - Examinador interno)

Profa. Rainelly Cunha de Medeiros (IFRN - Examinadora externa)

Natal/RN - 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Santos, Richardson Lucas Cardoso dos.

Modelo matemático do tipo SIR aplicado ao vírus da Covid-19 no estado do Rio Grande do Norte / Richardson Lucas Cardoso dos Santos. - 2024.

53 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN, 2024.

Orientação: Débora Borges Ferreira.

1. Modelagem Matemática - Dissertação. 2. Modelo SIR - Dissertação. 3. Excel - Dissertação. 4. Covid-19 - Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51-7

# Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que de alguma forma contribuíram com sua execução e à minha família, em especial à minha mãe, Maria Sueli e, à minha avó, Terezinha de Oliveira.

# Agradecimentos

Agradeço a todos os docentes do PROFMAT, polo UFRN Natal, pelo empenho e dedicação, em especial à minha orientadora, professora Dra. Débora Borges Ferreira, por sua paciência e compromisso em me orientar neste trabalho. Agradeço aos meus colegas de turma por todos os momentos divertidos, dentro e fora da universidade, e também por todos os momentos de estudos e dedicação em que estivemos juntos, principalmente no período pré-qualificação. Agradeço também à minha namorada e futura esposa, Rosângela, por todo apoio e incentivo durante essa jornada, sobretudo nos momentos mais difíceis da reta final.

”Enquanto estivermos vivos, as possibilidades são infinitas.”

**(Monkey D. Luffy - Anime: One Piece)**

# Resumo

A propagação do vírus SARS-CoV-2, causador da Covid-19, pode ser modelado matematicamente através de um modelo de contágio compartimental do tipo SIR, modelo que depende de um sistema de equações diferenciais. Dessa forma, um dos objetivos desse trabalho é apresentar uma discretização dessas equações diferenciais e aplicá-las à população do estado do Rio Grande do Norte com o propósito de analisar e compreender seu comportamento. Para tanto, foi utilizado o software de planilhas Excel para calcular os dados numéricos de sua propagação assim como os gráficos que descrevem a variação numérica dos compartimentos do modelo. Durante o processo a modelagem matemática se faz necessária o que nos leva a um segundo objetivo: inspirar o uso da modelagem matemática como técnica de apoio ao ensino de matemática no ensino básico, para isso ao final do trabalho é apresentado um roteiro de aula com o intuito de orientar o professor que desejar utilizar essa técnica em suas aulas.

**PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Modelo SIR; Excel; Covid-19**

# Abstract

The spread of the SARS-CoV-2 virus, which causes Covid-19, is mathematically modeled through a compartmental contagion model of the SIR (Susceptible-Infected-Removed) type, which depends on a system of differential equations. Therefore, this work aims to present a discretization of differential equations and apply them to the population of the state of Rio Grande do Norte with the purpose of analyzing and understanding their behavior. To this end, Excel spreadsheet software was used to calculate the numerical data of its propagation as well as the graphs that describe the numerical variation of the model compartments. During the process, mathematical modeling is necessary and in view of this, mathematical modeling was used as a technique to support the teaching of mathematics in basic education. At the end of the work, a lesson guide will be presented with the aim of guiding teachers who wish to use this technique in their classes.

**KEYWORDS :** Mathematical Modeling; SIR Model; Excel; Covid-19

# Lista de Figuras

2.5.1 Gráfico da reta tangente ao gráfico da função $y$ em $x = a$ . . . . .	28
2.5.2 Aproximações usando o Método de Euler no Exemplo 2.17 . . . . .	30
2.5.3 Estimativa de erro do Método de Euler no Exemplo 2.17 . . . . .	31
3.1.1 Modelo SIR . . . . .	34
3.2.1 Estado do rio Grande do Norte . . . . .	40
3.2.2 Relatório epidemiológico/RN . . . . .	40
3.2.3 Modelo SIR-Excel . . . . .	41
3.2.4 Parâmetros Iniciais modelo - SIR . . . . .	41
3.2.5 Valores de Variação modelo - SIR . . . . .	42
3.2.6 Fórmulas do MDF no Excel . . . . .	42
3.2.7 Atualização em valores contínuos do modelo SIR . . . . .	43
3.2.8 Tabela do Modelo SIR . . . . .	44
3.2.9 Gráfico Modelo SIR ( $d = 14$ ) . . . . .	45
3.2.10 Modelo SIR-Excel . . . . .	46
3.2.11 Gráfico Modelo SIR ( $d = 5$ ) . . . . .	46

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>16</b>
2.1	Equações diferenciais ordinárias . . . . .	17
2.1.1	Ordem de uma equação diferencial . . . . .	17
2.1.2	Solução de uma equação diferencial ordinária . . . . .	18
2.1.3	O problema do valor inicial (PVI) . . . . .	19
2.2	Equações de variáveis separáveis . . . . .	20
2.2.1	Soluções constantes de uma equação diferenciável de variáveis separáveis . . . . .	20
2.2.2	Soluções não constantes de uma equação diferencial de variáveis separáveis . . . . .	21
2.3	Equações diferenciais lineares de 1ª ordem . . . . .	23
2.3.1	Fórmula para encontrar as soluções de uma equação diferencial linear de 1ª ordem . . . . .	23
2.4	Sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem . . . . .	25
2.4.1	Sistemas homogêneos de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes. . . . .	25
2.4.2	Sistemas homogêneos de três equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes . . . . .	26
2.5	Discretização usando diferenças finitas - o Método de Euler . . . . .	27
<b>3</b>	<b>O Modelo epidemiológico do tipo SIR</b>	<b>33</b>
3.1	O Modelo Suscetível-Infecioso-Removido . . . . .	33

---

3.2	Construção do Modelo no software de planilhas Excel . . . . .	39
3.2.1	Simulações . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Roteiro de aula</b>	<b>48</b>
4.1	Aula 1: Introdução do modelo SIR . . . . .	48
4.2	Aula 2: Simulação e análise . . . . .	49

# Capítulo 1

## Introdução

Muitas vezes na sala de aula, ao ministrar um conteúdo novo de matemática, os alunos nos questionam onde vão usar este conteúdo e até mesmo se é realmente necessário estudá-lo, em varias dessas vezes é bem difícil explicar e contextualizar esses conteúdos de forma satisfatória no cotidiano de todos os alunos, mas cabe a nós professores continuar tentando e buscando novas formas e estrategias de ensino que nos auxiliem no processo ensino-aprendizagem.

Esse pensamento também está de acordo com a Lei de diretrizes e bases da educação Brasileira que diz que “A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social” (Art.1º § 2º da Lei nº 9.394/96).

Dessa forma uma das estrategias que podemos utilizar em nossas aulas é a modelagem matemática que segundo, Burak (1992, p. 62), “é o conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões”

A modelagem matemática é uma ferramenta extremamente importante ao analisar a propagação de doenças infecciosas que ocorrem por vírus do tipo SIR, que são vírus que para se propagar precisam do contato de um individuo infectado com um individuo suscetível a contrair a doença. Segundo Silva (2021, p. 1):

A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas remonta à década de 1760, quando Daniel Bernoulli fez um trabalho relativo ao estudo da disseminação da varíola. Mais recentemente, vários modelos matemáticos foram propostos e estudados para diversas doenças diferentes.

Em particular, o vírus da covid-19, o SARS-Cov-2, pode ser descrito por um desses modelos, como é dito por Azevedo (2021, p. 1):

Atualmente, modelos matemáticos em epidemiologia são uma importante ferramenta na análise da propagação e controle de doenças infecciosas como é o caso da COVID-19. Neste contexto, são consultados os dados existentes da COVID-19 para serem comparados a um modelo matemático discreto epidemiológico em que o indivíduo pode pertencer a três diferentes classes: Suscetível, Infectado e Recuperado (SIR).

O modelo mencionado é baseado em equações diferenciais, equações que segundo Silva (2021, p. 1):

Começaram com o estudo do cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Com o passar do tempo, o estudo das equações diferenciais mostrou-se uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes. Naturalmente, chamou a atenção de vários matemáticos renomados, que fizeram suas contribuições. Dentre eles podemos destacar, os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, o matemático mais prolífico de todos os tempos, Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

Nesse contexto o principal objetivo do presente trabalho é apresentar um modelo do tipo SIR para o vírus da covid-19, mais especificamente, apresentar um modelo discretizado que represente a propagação da doença em uma determinada região, no trabalho vamos aplicar o modelo a população do estado do Rio Grande do Norte. Um outro objetivo é apresentar uma sugestão de roteiro

de aula que possa ser utilizado por professores que desejem trabalhar o modelo SIR em sala de aula com os alunos do ensino básico.

A dissertação será estruturada em capítulos, com o primeiro dedicado ao estudo dos conceitos fundamentais da teoria das equações diferenciais. Nesse capítulo, apresentamos definições e exemplos que ilustram os conceitos introdutórios dessa área. Embora o modelo central do trabalho seja discreto e, portanto, não exija conhecimento prévio sobre equações diferenciais, optamos por incluir este capítulo sobre o tema. Isso se justifica pelo fato de que muitos modelos utilizam equações em tempo contínuo, o que torna essencial esse entendimento para abordar casos mais gerais

No capítulo seguinte, vamos falar sobre o modelo de contágio e descrever detalhadamente as equações que o compõe, como também aplicar o modelo à população do estado do Rio Grande do Norte, apresentando tabelas e gráficos que mostram o comportamento da propagação desse vírus.

Por fim vamos apresentar o roteiro de aula mencionado anteriormente, com sugestões de como abordar o tema em salas do ensino básico.

## Capítulo 2

# Equações Diferenciais

Neste capítulo vemos alguns conceitos matemáticos importantes que são necessários para o entendimento de vários modelos epidemiológicos do tipo SIR (Suscetível – Infeccioso - Removido), que é o objeto principal de estudo do presente trabalho. A análise matemática desse modelo é baseada nas soluções de um sistema de equações, conhecidas por equações diferenciais. Segundo (BOYCE, DIPRIMA, MEADE, 2020, p.27):

Equações diferenciais são de interesse para, principalmente, não matemáticos por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias.

Em particular, as equações diferenciais são importantes na construção de grande parte dos modelos epidemiológicos.

Segundo (Edwads, Penney, 2008, p.1):

**Definição 2.1.** *Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas.*

## 2.1 Equações diferenciais ordinárias

As equações diferenciais se separam em dois tipos, como vemos nas definições a seguir.

**Definição 2.2.** *As equações diferenciais ordinárias (EDO) são equações cuja função incógnita depende apenas de uma variável independente.*

**Definição 2.3.** *As equações diferenciais parciais (EDP) são equações diferenciais onde a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes.*

**Exemplo 2.1.** *As equações a seguir são exemplos de equações diferenciais ordinárias:*

$$(a) \quad y'(x) = xy(x)$$

$$(b) \quad y'(x) = 5x + 4$$

$$(c) \quad y'(x) = \frac{7x+9}{2x-5}$$

$$(d) \quad y'(x) = x \cdot (3 + y(x)^2)$$

**Exemplo 2.2.** *As equações a seguir são exemplos de equações diferenciais parciais:*

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u(x,t) \text{ (equação do calor)}$$

$$(b) \quad \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u(x,t) \text{ (equação da onda)}$$

$$(c) \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f^2(x,y).$$

Para o objetivo principal desse trabalho apenas as EDO's são necessárias.

### 2.1.1 Ordem de uma equação diferencial

**Definição 2.4.** *A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem das derivadas que aparecem nela. De forma geral, uma EDO de ordem  $n$  na variável independente  $x$  e variável dependente  $y$  é da forma  $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$ .*

Para nosso estudo, assumiremos apenas equações do tipo  $y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ .

**Exemplo 2.3.** *Uma equação diferencial de 1ª ordem é uma equação do tipo:*

$$y'(x) = F(x, y) \tag{2.1}$$

onde  $F(x, y)$  é uma função definida em um aberto do plano real.

### 2.1.2 Solução de uma equação diferencial ordinária

Agora sendo  $y = y(x)$  uma função definida em um conjunto aberto I, dizemos que  $y$  é solução da Equação 2.1 se para todo  $x$  em I acontecer:

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

**Exemplo 2.4.** *A função  $y(x) = e^{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é uma solução da equação diferencial  $y'(x) = 2xy$ .*

Neste caso  $F(x, y) = 2xy$  e o aberto no qual  $F(x, y)$  está definida é o  $\mathbb{R}^2$ . Note que, utilizando a regra da cadeia temos:

$$y'(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} = 2xy.$$

Portanto,  $y(x) = e^{x^2}$  é uma solução de  $y'(x) = 2xy$ .

**Exemplo 2.5.** *Verifique que  $y(x) = \frac{4}{x^3-1}$  é solução da equação diferencial  $y'(x) = \frac{-3y \cdot x^2}{x^3-1}$ .*

**Solução:** *Note que pela regra do quociente temos:*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(4)' \cdot (x^3-1) - 4 \cdot (x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = \frac{0 \cdot (x^3-1) - 4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-12x^2}{(x^3-1)^2} = -\left(\frac{4}{x^3-1}\right) \cdot \left(\frac{3x^2}{x^3-1}\right) \\ &= -y(x) \cdot \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{-3y \cdot x^2}{x^3-1}. \end{aligned}$$

Portanto temos que  $y(x) = \frac{4}{x^3-1}$  é solução da equação diferencial  $y'(x) = \frac{-3y \cdot x^2}{x^3-1}$ .

### 2.1.3 O problema do valor inicial (PVI)

A definição a seguir foi extraída integralmente de (Silva, 2021 p.8).

**Definição 2.5.** *Um problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem consiste em uma equação diferencial de primeira ordem, juntamente com uma condição inicial da função incógnita num determinado ponto. Uma solução de um (PVI) num intervalo  $I$  contendo  $x_0$  é uma função  $y(x)$  que satisfaz não só a equação diferencial dada, mas também a condição inicial.*

Em outras palavras, encontrar a solução de um (PVI) de primeira ordem, consiste em encontrar a solução do sistema:

$$\begin{cases} y'(x) = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde  $x_0 \in I$  e  $y_0$  é uma constante dada.

**Exemplo 2.6.** *Determinar a solução do PVI a seguir:*

$$\begin{cases} y'(x) = 3x + 5 \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

**Solução:** Precisamos de uma função  $y(x)$ , tal que  $y'(x) = 3x + 5$ , para tal observe que:

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int (3x + 5) dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + k, k \in \mathbb{R}.$$

Utilizando a condição de que  $y(0) = 3$ , obtemos  $k = 3$ , logo uma solução do PVI é

$$y(x) = \frac{3x^2}{2} + 5x + 3.$$

Uma pergunta natural é quando podemos garantir que os PVI's tenham solução? O teorema a seguir nos responde:

**Teorema 2.1.** (*Existência e unicidade*) *Seja  $f(x,y)$  uma função real contínua em algum retângulo do plano contendo o ponto  $(a,b)$  em seu interior. Então o problema de valor inicial*

$$y'(x) = f(x,y) \text{ com } y(a) = b$$

*tem pelo menos uma solução em algum intervalo aberto contendo o ponto  $x = a$ . E mais, se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  for contínua neste retângulo, então a solução é única em algum intervalo contendo  $x = a$ .*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Theory of ordinary differential equations, de E.A. Coddington e N. Levinson. Em tempo, nesse trabalho estudamos situações onde o PVI tem solução.

## 2.2 Equações de variáveis separáveis

**Definição 2.6.** *Uma equação diferencial de 1ª ordem  $y' = F(x,y)$  é dita de variáveis separáveis quando  $F(x,y)$  pode ser escrita como o produto de uma função  $g(x)$ , que depende apenas de  $x$  por uma função  $h(y)$  que depende de  $y$ , em outras palavras:*

$$y'(x) = F(x,y(x)) = g(x) \cdot h(y(x)). \quad (2.2)$$

**Exemplo 2.7.**  $y'(x) = xy^3$  é uma equação de variáveis separáveis onde  $g(x) = x$  e  $h(y) = y^3$ .

### 2.2.1 Soluções constantes de uma equação diferenciável de variáveis separáveis

Supondo em  $y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$  que  $g(x)$  seja diferente de 0, a função constante  $y(x) = a$  só será solução se  $a$  for raiz da equação  $h(y(a)) = 0$ .

**Exemplo 2.8.** *Determine as soluções constantes da equação diferencial  $y'(x) = x \cdot (8 - y^3)$ .*

Note que  $h(y) = 8 - y^3$ , fazendo  $h(y) = 0$  temos:

$$8 - y^3 = 0 \iff y^3 = 8 \iff y = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Desta forma uma solução constante de  $y'(x)$  é  $y(x) = 2$ .

**Exemplo 2.9.** A equação  $y'(x) = x \cdot (3 + y^2)$  não possui nenhuma solução constante uma vez que  $h(y) = 3 + y^2 = 0$  não possui raiz real.

### 2.2.2 Soluções não constantes de uma equação diferencial de variáveis separáveis

Considerando  $y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$  e  $h(y(x)) \neq 0$  para todo  $x$  podemos escrever que:

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x),$$

aplicando a integral em ambos os lados teremos:

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int g(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável  $y'(x)dx = dy$  e  $y = y(x)$  teremos:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx.$$

A expressão anterior pode ser escrita como:

$$H(y) = G(x) + k,$$

onde  $H(y)$  é uma primitiva de  $\frac{1}{h(y)}$ ,  $G(x)$  é uma primitiva de  $g(x)$  e  $k$  é uma constante arbitrária. Quando se tratar, de um PVI, a condição inicial nos possibilitará determinar um valor para a constante.

**Exemplo 2.10.** Resolva a equação  $y'(x) = x \cdot y^3$ .

**Solução:** Primeiro vamos encontrar as soluções constantes, sendo  $h(y) = y^3$  temos:

$$h(y) = 0 \iff y^3 = 0 \iff y = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Dessa forma,  $y(x) = 0$  é a única solução constante. Vamos agora determinar as soluções não constantes.

Considerando  $h(y) \neq 0$ , podemos escrever a equação  $y'(x) = x \cdot y^3$  como:

$$\frac{y'(x)}{y^3} = x.$$

aplicando a integral dos dois lados da equação temos:

$$\int \frac{y'(x)}{y^3} dx = \int x dx.$$

Fazendo a substituição  $y'(x)dx = dy$  temos

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int x dx.$$

Resolvendo as integrais encontramos:

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + k \iff -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2+2k}{2}.$$

$$-2 = 2y^2(x^2 + 2k) \iff y^2 = -\frac{2}{2(x^2+2k)}.$$

$$y^2 = -\frac{1}{x^2+2k} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{x^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

dessa forma:

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y = \left(-\frac{1}{x^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

é uma família de soluções da equação  $y'(x) = x \cdot y^3$ .

**Exemplo 2.11.** *Se no exemplo anterior tivéssemos a condição inicial  $y(0) = 1$ , como ficaria a solução?*

**Solução:** Usando  $y = \left(-\frac{1}{x^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}}$  e  $y(0) = 1$  temos:

$$1 = \left(-\frac{1}{0^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} \iff k = -\frac{1}{2}.$$

Dessa forma uma solução para o PVI dado é:

$$y(x) = \sqrt{\frac{-1}{x^2-1}} \text{ com } -1 < x < 1.$$

## 2.3 Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Uma equação diferencial é dita linear de primeira ordem quando pode ser escrita na forma:

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x),$$

em que  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções contínuas definidas em um mesmo intervalo aberto. Quando acontecer de  $g(x) = 0$  para todo  $x$  do intervalo, dizemos também que a equação é linear de primeira ordem homogênea.

**Exemplo 2.12.**  $y'(x) = x^2y + 5$  é uma equação diferencial linear de 1ª ordem, nela temos  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 5$ . Esta equação é dita linear, mas não é homogênea.

**Exemplo 2.13.** A equação  $y'(x) = x^3y$  é linear de 1º ordem com  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = 0$ , além disso temos uma equação linear de 1º grau homogênea uma vez que  $g(x) = 0$  para todo  $x$ .

### 2.3.1 Fórmula para encontrar as soluções de uma equação diferencial linear de 1ª ordem

**Proposição 2.1.** Considere a equação:

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x).$$

As soluções dessa equação são dadas pela fórmula:

$$y(x) = e^{\int f(x)dx} \cdot \left[ k + \int g(x)e^{-\int f(x)dx} dx \right],$$

onde  $k$  é uma constante real.

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em Guidorizzi, Hamilton Luiz, Um curso de cálculo : volume 4.

**Exemplo 2.14.** Resolva a equação  $y'(x) = 5y + 3$ , considerando  $y(0) = 2$ .

**Solução:** Por ser uma equação diferencial de primeira ordem linear, faremos  $f(x) = 5$  e  $g(x) = 3$ . Substituindo na fórmula, encontramos a seguinte expressão:

$$y(x) = e^{\int 5dx} \cdot \left[ k + \int 3e^{-\int 5dx} dx \right].$$

Resolvendo as integrais encontramos:

$$y(x) = e^{5x} \cdot \left[ k + \int 3e^{-5x} dx \right].$$

Que também pode ser escrita como:

$$y(x) = ke^{5x} + e^{5x} \cdot \int 3e^{-5x} dx.$$

Agora utilizando o fato de  $\int 3e^{-5x} dx = -\frac{3}{5}e^{-5x}$  encontramos que:

$$y(x) = ke^{5x} + e^{5x} \cdot \left( -\frac{3}{5}e^{-5x} \right).$$

Que pode ser simplificada para a expressão:

$$y(x) = ke^{5x} - \frac{3}{5}.$$

Agora para termos  $y(0) = 5$  precisamos que:

$$5 = ke^{5 \cdot 0} - \frac{3}{5} \iff 5 = k - \frac{3}{5}$$

$$\iff k = 5 + \frac{3}{5} \iff k = \frac{28}{5}.$$

Portanto a solução de  $y'(x) = 5y + 3$  com  $y(0) = 5$  é

$$y(x) = \frac{28}{5}e^{5x} - \frac{3}{5}.$$

## 2.4 Sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Os sistemas de equações diferenciais são de grande importância nas diversas áreas do conhecimento como fica evidenciado em (Silva, 2021 p.12).

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. Por exemplo, circuitos elétricos têm essa característica, assim como problemas em mecânica, problemas em epidemiologia e em outros campos. Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem.

Um desses problemas em epidemiologia consiste na elaboração de modelos de contágio, em particular, o modelo do tipo SIR que é objeto de estudo do presente trabalho.

Nesse contexto vamos utilizar essa seção para apresentar alguns conceitos e exemplos importantes referentes aos sistemas homogêneos de equações diferenciais lineares, com foco naqueles (sistemas homogêneos) de duas ou três equações de primeira ordem.

### 2.4.1 Sistemas homogêneos de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

Os sistemas do tipo:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha_1 x(t) + \beta_1 y(t) \\ y'(t) = \alpha_2 x(t) + \beta_2 y(t). \end{cases}$$

são chamados de sistemas de duas equações diferenciais de primeira ordem homogêneos, onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes reais dadas. Uma solução desse sistema é um par de funções  $(x(t), y(t))$  que satisfaz as equações do sistema em todo  $t \in I$  onde  $I$  é um intervalo aberto onde as derivadas estão definidas.

**Exemplo 2.15.** Verifique que o par de funções  $(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

**Solução:** Note que,  $x(t) = \cos t \iff x'(t) = -\sin t$  e que  $y(t) = \sin t \iff y'(t) = \cos t$ , logo:

$$\begin{cases} (\cos t)' = -\sin t \\ (\sin t)' = \cos t. \end{cases}$$

Portanto o par de funções  $(\cos t, \sin t)$  é solução do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

### 2.4.2 Sistemas homogêneos de três equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

De forma análoga ao de duas equações, um sistema com três equações diferenciais de 1ª ordem homogêneo é um sistema da forma:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha_1 x(t) + \beta_1 y(t) + \delta_1 z(t) \\ y'(t) = \alpha_2 x(t) + \beta_2 y(t) + \delta_2 z(t) \\ z'(t) = \alpha_3 x(t) + \beta_3 y(t) + \delta_3 z(t). \end{cases}$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_1, \delta_2$  e  $\delta_3$  são constantes reais dadas. Uma solução desse sistema é um terno de funções  $(x(t), y(t), z(t))$  que satisfaz as equações do sistema em todo  $t \in I$ ,  $I$  sendo um intervalo real aberto onde as derivadas estão definidas.

**Exemplo 2.16.** Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -\frac{y(t)}{5} \\ z'(t) = -\frac{z(t)}{2}. \end{cases}$$

**Solução:** Note que:

$$x'(t) = x(t) \iff x(t) = k_1 e^t$$

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{5} \iff y(t) = k_2 e^{-\frac{t}{5}}$$

$$z'(t) = -\frac{z(t)}{2} \iff z(t) = k_3 e^{-\frac{t}{2}}.$$

Dessa forma o terno de funções  $(k_1 e^t, k_2 e^{-\frac{t}{5}}, k_3 e^{-\frac{t}{2}})$  representa a família de soluções do sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -\frac{y(t)}{5} \\ z'(t) = -\frac{z(t)}{2}. \end{cases}$$

## 2.5 Discretização usando diferenças finitas - o Método de Euler

Em muitas situações não é factível a solução dos sistemas de equações apresentados anteriormente devido a natureza não-elementar das funções envolvidas. Suponha que temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

onde  $f$  é uma função contínua com domínio no  $\mathbb{R}^2$  e imagem em  $\mathbb{R}$ ,  $y(x)$  é uma solução da equação diferencial e  $\alpha$  é o valor assumido por  $y(x)$  quando  $x = a$ . Desejamos prever, com certo grau de precisão, como  $y(x)$  se comporta, ou seja, queremos conhecer o comportamento dela em algum intervalo  $[a,b]$ , e não necessariamente precisamos de uma forma analítica para a mesma. Para tanto, transformaremos essa equação diferencial do problema em uma equação algébrica discreta, num processo que chamamos discretização..

Considerando um intervalo  $[a,b]$ , vamos dividi-lo em  $N$  partes. Embora essas partes não precisem ser uniformemente espaçadas, nesta abordagem vamos considerar comprimentos iguais e denotaremos esses comprimentos por  $h$ . Dessa forma temos  $h = \frac{b-a}{N}$ , além disso, fazendo  $x_0 = a$  e  $x_N = b$  podemos dizer que todos os elementos dessa partição do intervalo  $[a,b]$  serão da forma  $x_i = a + ih$  com  $i \in 0,1,2,\dots,N$ .

Nosso objetivo é encontrar aproximações para  $y(x_i)$ , denotaremos essas aproximações por  $y_i$ , isto é,

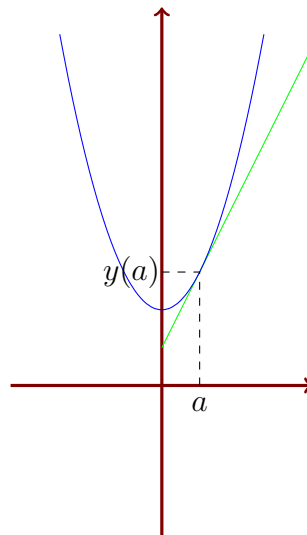
$$y(x_i) \approx y_i$$

com  $i \in 1,2, \dots, N$  e  $y(x_0) = y(a) = \alpha$ .

No ponto  $x_0 = a$ , temos a imagem  $y(a) = \alpha$  e a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $y$  no ponto  $(a,y(a))$  é  $y'(x_0) = y'(a) = f(x_0,y_0)$ , segundo o PVI. A equação dessa reta tangente será:

$$z(x) = f(x_0,y_0)x + y_0 - f(x_0,y_0)a.$$

Figura 2.5.1: Gráfico da reta tangente ao gráfico da função  $y$  em  $x = a$ .



Assim, se supusermos que no próximo ponto da partição,  $x_1$ , a imagem estará próxima da imagem da reta tangente anterior, então podemos escolher

$$y_1 = f(x_0,y_0)x_1 + y_0 - f(x_0,y_0)a = f(x_0,y_0)(a + h) + y_0 - f(x_0,y_0)a$$

$$y_1 = hf(x_0, y_0) + y_0 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Analogamente, escolhemos  $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$  como uma aproximação para  $y(x_2)$ . De forma recursiva, se obtém o Método de Euler.

**Teorema 2.2.** *Dado o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

*o Método de Euler com passo  $h$  consiste em aplicar a fórmula iterativa*

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i)$$

*para  $i \geq 0$  a fim de encontrar aproximações sucessivas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  dos valores procurados  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ .*

**Exemplo 2.17.** *Dado o PVI:*

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 2x + 3y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

*aplique o método de Euler com passo  $h = 0,1$  no intervalo  $[0,1]$ , para encontrar uma aproximação para a solução do PVI.*

**Solução:** *Temos:*

$$y_{n+1} - y_n = h(1 - 2x_n + 3y_n).$$

*Na primeira iteração, vamos ter:*

$$y_1 - y_0 = h(1 - 2x_0 + 3y_0).$$

*Substituindo os valores:*

$$y_1 - 1 = (0,1) \cdot (1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1) \Leftrightarrow y_1 - 1 = 0,4$$

$$\Rightarrow y_1 = 0,4 + 1 \Leftrightarrow y_1 = 1,4.$$

Para  $y_2$  :

$$y_2 - 1,4 = (0,1) \cdot (1 - 2(0,1) + 3 \cdot 1,4) \Leftrightarrow y_2 - 1,4 = 0,5$$

$$\Rightarrow y_2 = 0,5 + 1,4 \Leftrightarrow y_2 = 1,9.$$

Continuando as iterações podemos montar a seguinte tabela com as aproximações:

Figura 2.5.2: Aproximações usando o Método de Euler no Exemplo 2.17

x	y
0	1
0,1	1,4
0,2	1,9
0,3	2,53
0,4	3,329
0,5	4,3477
0,6	5,652
0,7	7,3276
0,8	9,4859
0,9	12,2717
1	15,8732

Fonte: Feito pelo autor

Pode-se verificar que a função  $y(x) = \frac{10}{9}e^{3x} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{9}$  é a solução analítica do nosso PVI e que nos permite estimar o erro do método de Euler.

Para  $x = 0,1$  temos:

$$y(0,1) = \frac{10}{9}e^{3(0,1)} + \frac{2(0,1)}{3} - \frac{1}{9} \approx 1,4554,$$

ou seja, temos um erro de 0,0874, aplicando para os outros valores vamos ter os resultados apresentados a seguir:

Figura 2.5.3: Estimativa de erro do Método de Euler no Exemplo 2.17

x	y	Erro do metodo de Euler
0	1	0
0,1	1,4554	0,0554
0,2	2,0468	0,1468
0,3	2,8218	0,2918
0,4	3,8446	0,5156
0,5	5,2019	0,8542
0,6	7,0107	1,3587
0,7	9,4291	2,1015
0,8	12,6702	3,1843
0,9	17,0219	4,7502
1	22,8728	6,9996

Fonte: Feito pelo autor

Agora, para aplicar o Método de Euler para um sistemas de duas equações do tipo:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x,y), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = g(t,x,y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

basta aplicar as fórmulas iterativas em cada uma delas

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n).$$

O exemplo a seguir foi tirado de (Boyce, 2015 p.399)

**Exemplo 2.18.** *Determine valores aproximados para a solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x'(t) = x - 4y, & x(0) = 1 \\ y'(t) = -x + y, & y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto  $t = 0,2$ , usando o Método de Euler com passo  $h = 0,1$ .

**Solução:** Para isso, vamos considerar  $f_n = -x_n + 4y_n$  e  $g_n = -x_n + y_n$ , logo,

$$f_0 = 1 - 4(0) = 1 \text{ e } g_0 = -1 + 0 = -1.$$

Nas fórmulas de Euler obtemos:

$$x_1 = 1 + (0,1)(1) = 1,1, \quad y_1 = 0 + (0,1)(-1) = -0,1.$$

*No próximo passo,*

$$f_1 = 1,1 - 4(-0,1) = 1,5; \quad g_1 = -1,1 - 0,1 = -1,2.$$

*Portanto,*

$$x_2 = 1,1 + (0,1)(1,5) = 1,25; \quad y_2 = -0,1 + (0,1)(-1,2) = -0,22.$$

Para estimar o erro dessa solução precisamos saber que a solução analítica desse sistema é:

$$x(t) = \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \quad y(t) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{4}$$

Dessa forma encontramos  $x(0,2) = 1,3204$  e  $y(0,2) = -0,2508$ , o que nos diz que os valores encontrados pelo método de Euler tem erros aproximados em torno de 0,0704 e 0,0308, respectivamente.

## Capítulo 3

# O Modelo epidemiológico do tipo SIR

### 3.1 O Modelo Suscetível-Infecioso-Removido

Neste capítulo apresentamos as informações sobre o modelo de contágio compartimental do tipo SIR (Suscetível-Infecioso-Removido). Este modelo foi inicialmente apresentado pelo médico escocês A.G.Mckendrick e pelo químico, também escocês W. O. Kermack. Essa apresentação inicial se deu através da publicação de uma série de artigos publicados a partir de 1927. O modelo SIR segundo (Oliveira,2023 p.58) é “considerado modelo fundamental da epidemiologia matemática baseado em EDO”. Neste modelo, a população é subdividida em três compartimentos ou grupos que estão apresentados a seguir:

- S - grupo de pessoas da população suscetíveis à doença, ou seja, que ainda não contraíram, mas podem contrair a doença.
- I - grupo de pessoas da população que contraíram a doença e estão transmitindo a doença dentro da população.
- R - grupo de pessoas da população que contraíram a doença, mas não estão mais transmitindo a doença, seja por ter se recuperado ou por ter vindo a óbito.

Imaginemos que a população de certo local foi exposta a um vírus e durante um certo período os indivíduos transitaram entre esses três grupos definidos. Se

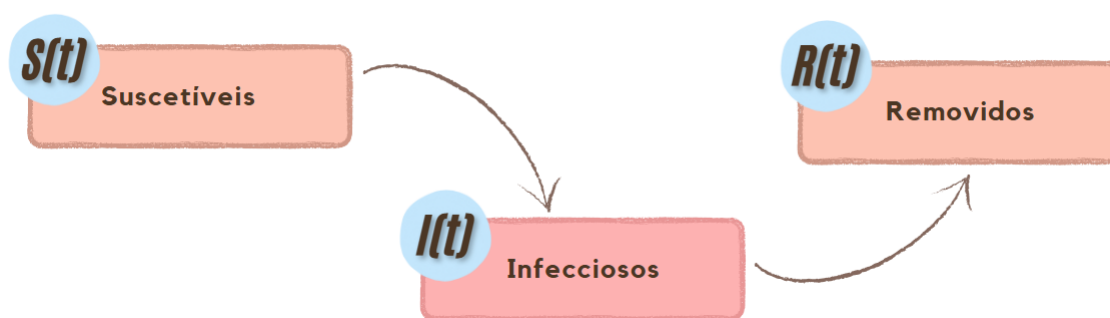
definirmos o período discretizado, isto é, o tempo medido em dias ou semanas, por exemplo, teríamos  $t_0$  o tempo inicial de estudo,  $t_1$  o primeiro dia,  $t_2$  o segundo dia e assim sucessivamente, podemos descrever essa dinâmica entre os grupos usando funções. Assim, definimos as funções  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ , como sendo a quantidade de pessoas nos respectivos grupos no tempo ou dia  $t$ .

Sendo  $P$  a quantidade total de pessoas da população, então

$$P(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Segundo (Onório da Silva, 2021 p.47/48), a suposição básica desse modelo é que um indivíduo pode passar sucessivamente pelos estágios de suscetível, infectado e removido. Essa passagem se dá sempre seguindo o movimento do fluxograma a seguir.

Figura 3.1.1: Modelo SIR



Fonte: Feito pelo autor

A título de curiosidade a dinâmica vital é um parâmetro importante na construção de modelos epidemiológicos como afirma (Lima J. P., 2021 p.61):

É preciso reconhecer se a doença tem potencial para durar por muito tempo, ou se possui uma taxa de morte elevada, pois, caso afirmativo, deve-se levar em consideração o número de mortes e nascimentos no período ativo da doença. Chamamos isso de dinâmica vital. Isso é relevante pois a modelagem via equação diferencial será diferente.

Entretanto, neste trabalho a simulação que será feita é restrita a uma localidade por um período de tempo de 365 dias, para simplificar o modelo a dinâmica vital não será considerada, logo  $P(t)$  é constante.

Vamos fazer algumas considerações para simplificar o modelo:

- (i) Desconsideramos efeitos aleatórios que podem afetar a mudança de grupo de um indivíduo.
- (ii) Consideramos que a população está distribuída de modo uniforme, isto é, a probabilidade de um indivíduo se contaminar é igual à dos demais.
- (iii) Um indivíduo se contamina após entrar em contato com um indivíduo do grupo I (infectado).
- (iv) Um indivíduo entra em I a partir do momento em que foi infectado, não consideramos o tempo que ele está assintomático.
- (v) Os indivíduos de I que se curam, não voltam a S.

Na dedução das equações a seguir foi tomado como base o proposto por Tavares, JN (2017), dessa forma vamos considerar a variação de tempo em dias, com  $\Delta t = 1$  dia. Dessa forma, a taxa de variação do compartimento de suscetíveis para o intervalo  $[t, t + 1]$  será representada por

$$\Delta S = S(t + 1) - S(t),$$

analogamente temos que a taxa de variação do compartimento dos infecciosos e do compartimento dos removidos serão representados, respectivamente por

$$\Delta I = I(t + 1) - I(t) \text{ e } \Delta R(t) = R(t + 1) - R(t).$$

Vale ressaltar que:

- (i) A taxa de variação  $\Delta S(t)$  é o número de indivíduos suscetíveis que foram infectados no intervalo  $[t, t + 1]$ .
- (ii) A taxa de variação  $\Delta R(t)$  é o número de indivíduos infectados que foram removidos no intervalo  $[t, t + 1]$ .
- (iii) A taxa de variação  $\Delta I(t)$  é o número de indivíduos suscetíveis que foram infectados no intervalo  $[t, t + 1]$  menos o número de indivíduos infectados que foram removidos no intervalo  $[t, t + 1]$ , ou seja,  $\Delta I(t) = -\Delta S(t) - \Delta R(t)$ .

Para calcular  $\Delta R(t)$ , vamos considerar que esse valor depende apenas do número de indivíduos infectados  $I(t)$ , dessa forma assumiremos que  $\Delta R(t)$  é diretamente proporcional a  $I(t)$  como também é diretamente proporcional ao intervalo de tempo utilizado  $\Delta t$ , obtemos a expressão:

$$\Delta R(t) = \beta I(t) \Delta t \quad (3.1)$$

onde  $\beta$  é uma constante de proporção que representa a taxa de recuperação da doença dada por  $\frac{1}{d}$ , sendo  $d$  o período médio de residência de um indivíduo no compartimento dos infectados. Para a Covid-19, segundo o Ministério da Saúde brasileiro, esse período varia de 5 a 14 dias, em outras palavras se usarmos  $d = 14$ , temos  $\beta = \frac{1}{14}$  o que significa que em um dia, 1 de 14 indivíduos é removido do compartimento dos infectados.

Agora precisamos calcular  $\Delta S(t)$ . Observe que a quantidade de pessoas em  $S$  diminuirá se houver novos infectados no intervalo de tempo em questão. Assim, a variação de pessoas em  $S$  será negativa se houver novos infectados. Suponhamos que cada indivíduo infectado entre em contato com  $k$  outros indivíduos, em uma unidade de tempo, e que esse contato aconteça de forma aleatória, ou seja, a probabilidade de um indivíduo infectado contatar um suscetível é  $\frac{S(t)}{P}$  onde  $P$  é a nossa população total. Dessa forma sendo  $p$  a probabilidade de um contato resultar em contágio e  $I(t)$  a quantidade de infectados no instante  $t$ , podemos concluir que a quantidade de novos infectados no intervalo  $[t, t + 1]$ ,  $\Delta t = 1$ , é dada pela expressão,  $kp \frac{S(t) \cdot I(t)}{P}$ , que pode ser reinscrita por:

$$\Delta S(t) = -\alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P} \Delta t. \quad (3.2)$$

onde  $\alpha = kp$ , sendo  $\alpha$  chamado de coeficiente de transmissão.

Com as duas equações já apresentadas temos que:

$$\Delta I(t) = -\Delta S(t) - \Delta R(t) = \left( \alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P} - \beta I(t) \right) \Delta t. \quad (3.3)$$

Uma observação importante deve ser feita: uma outra forma de estimar o valor de  $\alpha$  é através da expressão  $\alpha = R_0 \cdot \beta$ , onde  $R_0$  é a taxa de reprodutividade basal

da doença e  $\beta$  é a taxa de recuperação da doença mencionada anteriormente, e portanto as equações do nosso modelo ficam da forma apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \Delta S(t) = -\alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P} \Delta t \\ \Delta I(t) = \left( \alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P} - \beta I(t) \right) \Delta t \\ \Delta R(t) = \beta I(t) \Delta t \end{cases}$$

Além dos dados presentes nas figuras apresentadas vamos utilizar 2,63 como valor estimado para a taxa de reprodutividade basal ( $R_0$ ), dado fornecido pela (Oxford Brasil, 2023) e como mencionado anteriormente a taxa de transmissão do Covid-19 varia de 5 a 14 dias mudando de indivíduo para indivíduo e dependendo também se o indivíduo foi vacinado ou não, dessa forma faremos duas simulações considerando os extremos desse período de transmissão.

É natural imaginar que não sabemos exatamente qual o tamanho exato da população  $P$ . Logo, trabalhamos com proporções da população. Assim, dividimos todas as equações do sistema anterior por  $P$  :

$$\begin{cases} \frac{\Delta S(t)}{P} = -\alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P^2} \Delta t \\ \frac{\Delta I(t)}{P} = \left( \alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P^2} - \frac{\beta I(t)}{P} \right) \Delta t \\ \frac{\Delta R(t)}{P} = \frac{\beta I(t)}{P} \Delta t \end{cases}$$

Considerando que as taxas de variação também podem ser vistas como derivadas, fazendo  $\Delta t$  tender a 0, as quantidades de indivíduos nos compartimentos também podem ser apresentados através de um sistema de equações diferenciais, e as novas funções são proporções das apresentadas com peso  $\frac{1}{P}$ , o sistema de equações diferenciais fica da forma: (Luiz,2012)

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t) \end{cases}$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ .

Sintetizando, no sistema anterior  $S'$  representa a taxa de variação dos indivíduos do grupo de suscetíveis,  $I'$  representa a taxa de variação do grupo

de Infecciosos e  $R'$  a taxa de variação do grupo de removidos,  $\alpha$  é a taxa de transmissão da doença e  $\beta$  taxa de recuperados da doença que será considerada como  $\beta = \frac{1}{d}$  onde  $d$  é o período de duração da contaminação da doença em um indivíduo.

Cabe ressaltar que o modelo aplicado no Excel será a versão discretizada do sistema apresentada inicialmente, a aplicação será detalhada na Seção 3.2.

Um parâmetro importante que pode ser deduzido do sistema é o número de reprodutividade basal ( $R_0$ ) que segundo (Oliveira, 2023) "Esse parâmetro responde pelo número médio de pessoas a serem contaminadas a partir de um único indivíduo infectado" que utilizando os dados na forma apresentada no sistema tem-se  $R_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ .

Ainda Segundo (Oliveira, 2023 p.61).

Caso o valor de  $R_0$  seja maior que um ( $R_0 > 1$ ), significa que um único indivíduo infectado consegue infectar mais que um indivíduo suscetível, o que implica a possibilidade de espalhamento do agente infeccioso na população, ou seja, há grande possibilidade de o evento se tornar uma epidemia. Para um valor de  $R_0$  inferior a um ( $R_0 < 1$ ), nesse caso um indivíduo infectado, em média, se quer consegue infectar outro indivíduo, o que pode levar ao fim da propagação da doença. Por outro lado, se  $R_0$  apresentar um valor igual a um ( $R_0 = 1$ ), ou seja, um indivíduo infectado conseguindo infectar somente outro indivíduo, tal situação pode indicar a estabilidade desse evento, condição para o estabelecimento de uma endemia.

Em outras palavras o valor de  $R_0$  serve para analisar o quão contagiosa é uma doença, ou seja, qual é a sua capacidade de propagação. Outra coisa a ser analisada são os pontos de equilíbrio do sistema, que do ponto de vista matemático, representam para onde as trajetórias da solução de cada equação vão convergir com o passar do tempo atingindo equilíbrio em algum instante  $t$ , ou seja, não haverá mais variação. Para determinar esses pontos deve-se igualar

cada equação do sistema a zero obtendo o novo sistema representado a seguir:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI = 0 \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I = 0 \\ R'(t) = \beta I = 0 \end{cases}$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ .

Segundo (Marquesone, 2020 p.5)

Nesse modelo e em boa parte dos modelos epidemiológicos, há dois pontos de equilíbrio de interesse: o ponto de equilíbrio trivial, que ocorre na ausência da doença; e o ponto de equilíbrio não trivial, ou equilíbrio endêmico, que é quando a doença está em equilíbrio.

Note que, devido à como as funções foram definidas somente haverá ausência da doença quando ocorrer  $I(t) = 0$ , ou seja, quando o número de infectados no modelo for zero, o que conseqüentemente implica que  $R(t) = 0$  e toda a população  $P$  está no compartimento suscetível, esse ponto de equilíbrio é denotado por  $(P, 0, 0)$  e do fato de cada compartimento ter valores constantes tem-se que o sistema fica:

$$\begin{cases} S'(t) = 0 \\ I'(t) = 0 \\ R'(t) = 0. \end{cases}$$

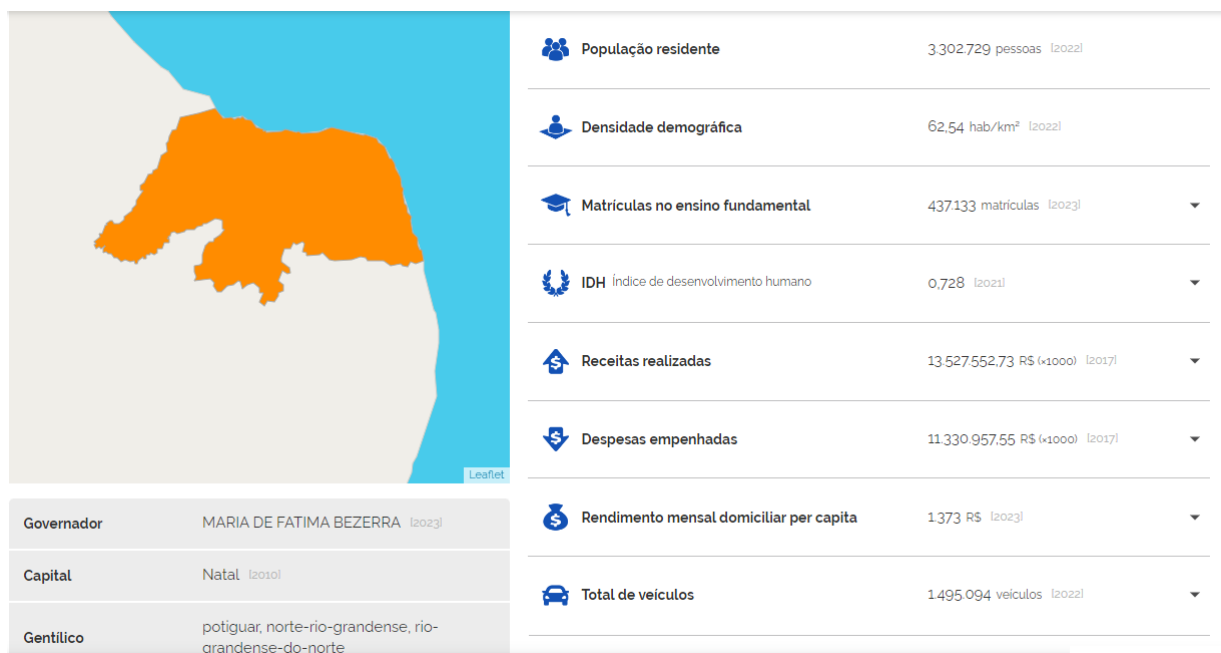
Agora considerando o caso em que  $I(t) \neq 0$  e conseqüentemente  $R(t) \geq 0$  teríamos uma solução analítica do sistema, em outras palavras uma equação que descreve ao longo do tempo o comportamento de cada compartimento do modelo de contágio, porém a apresentação dessa solução analítica foge do objetivo desse trabalho, ao invés disso vamos analisar as equações discretizadas através de iterações no software de planilhas Excel.

### 3.2 Construção do Modelo no software de planilhas Excel

Nesta seção será apresentado os dados do modelo SIR aplicados a região do estado do Rio Grande do Norte que tem suas principais informações descritas na

imagem a seguir:

Figura 3.2.1: Estado do rio Grande do Norte



Fonte: IBGE

Outros valores de referência que serão utilizados foram retirados do relatório epidemiológico publicado no site [portal covid19.saude.rn.gov.br](http://portal covid19.saude.rn.gov.br). Alguns desses dados podem ser verificados na imagem a seguir.

Figura 3.2.2: Relatório epidemiológico/RN



Fonte:portal covid19.saude.rn.gov.br

As simulações foram distribuídas em 3 tabelas montadas no software de planilhas Excel, como mostra a figura a seguir:

Figura 3.2.3: Modelo SIR-Excel

Fonte: Criado pelo autor

Os parâmetros iniciais utilizados no modelo aparecem em destaque na primeira planilha conforme Figura 3.2.4:

Figura 3.2.4: Parâmetros Iniciais modelo - SIR

Informações Iniciais do Modelo		
P	3302729	Indivíduos
$\Delta t$	1	Dias
S(0)	3302729	Indivíduos
I(0)	1	Indivíduos
R(0)	0	Indivíduos
$R_0$	2,63	
d	14	Dias
$\beta$	0,07	1/d
$\alpha$	0,19	$\beta \cdot R_0$

Fonte: Criado pelo autor

Na planilha  $P$  representa a população do estado do Rio Grande do Norte,  $\Delta t$  representa a variação de tempo medida em dias,  $S(0)$  é o total de indivíduos suscetíveis no instante inicial  $t = 0$ ,  $I(0)$  é o total de indivíduos infectados no instante  $t = 0$ ,  $R(0)$  é a quantidade de indivíduos removidos no instante  $t = 0$ ,  $R_0$  é a taxa de reprodutividade basal para o Covid-19,  $d$  é o tempo de transmissão da doença,  $\beta$  é a taxa de recuperação da doença dada por  $\frac{1}{d}$  e  $\alpha$  é a taxa de

transmissão da doença dada por  $\beta \cdot R_0$ .

As fórmulas do modelo apresentadas anteriormente, foram introduzidas nas células da terceira planilha intitulada "valores de Variação" e podem ser verificada em destaque na Figura 3.2.5:

Figura 3.2.5: Valores de Variação modelo - SIR

K	L	M	N
Valores de Variação			
$\Delta S$	$\Delta I$	$\Delta R$	
-0,19	0,11857	0,07143	
-0,212528559	0,13263	0,0799	
-0,237728356	0,14836	0,08937	
-0,265916123	0,16595	0,09997	
-0,297446143	0,18562	0,11182	
-0,332714712	0,20763	0,12508	
-0,37216511	0,23225	0,13991	
-0,416293179	0,25979	0,1565	
-0,465653552	0,2906	0,17506	
-0,520866623	0,32505	0,19581	
-0,582626347	0,36359	0,21903	
-0,651708959	0,40671	0,245	
-0,728982732	0,45493	0,27405	
-0,815418885	0,50887	0,30655	
-0,912103795	0,56921	0,3429	
-1,020252643	0,6367	0,38355	

Fonte: Criado pelo autor

A planilha de variações utiliza os valores iniciais de  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  da segunda planilha intitulada de "Atualização com valores de população discreta" as fórmulas foram introduzidas nas células de acordo com a Figura 3.2.6:

Figura 3.2.6: Fórmulas do MDF no Excel

Célula	Fórmula
K4	$((-B15/B4)*G4*H4)$
L4	$((B15/B4)*G4*H4 - (1/B13)*H4)$
M4	$((1/B13)*H4)$

Fonte: Criado pelo autor

Na quarta planilha os valores da tabela "Atualização com valores de população discreta" são acrescidos de suas respectivas variações gerando a planilha inti-

tulada “Atualização em valores contínuos” que pode ser vista em destaque na Figura 3.2.7:

Figura 3.2.7: Atualização em valores contínuos do modelo SIR

P	Q	R
Atualização em valores contínuos		
S(t)	I(t)	R(t)
3302728,81	1,118571429	0,071428571
3302728,597	1,251202029	0,151326531
3302728,36	1,399558812	0,240698104
3302728,094	1,565506448	0,340666591
3302727,796	1,751130702	0,45248848
3302727,464	1,95876465	0,577569244
3302727,092	2,191017999	0,717481005
3302726,675	2,450809893	0,873982291
3302726,21	2,741405595	1,04904014
3302725,689	3,066457533	1,244854825
3302725,106	3,430051199	1,463887506
3302724,454	3,836756502	1,708891163
3302723,725	4,291685198	1,982945199
3302722,91	4,80055514	2,289494142
3302721,998	5,36976214	2,632390938
3302720,978	6,006460344	3,015945376

Fonte: Criado pelo autor

Para gerar o gráfico do modelo utilizando o software de planilhas Excel, basta seguir os passos: selecionar a tabela “Atualização com valores de população discreta” e em seguida na opção inserir selecionar o comando gráfico, como mostrado na Figura 3.2.8 a seguir:

Figura 3.2.8: Tabela do Modelo SIR

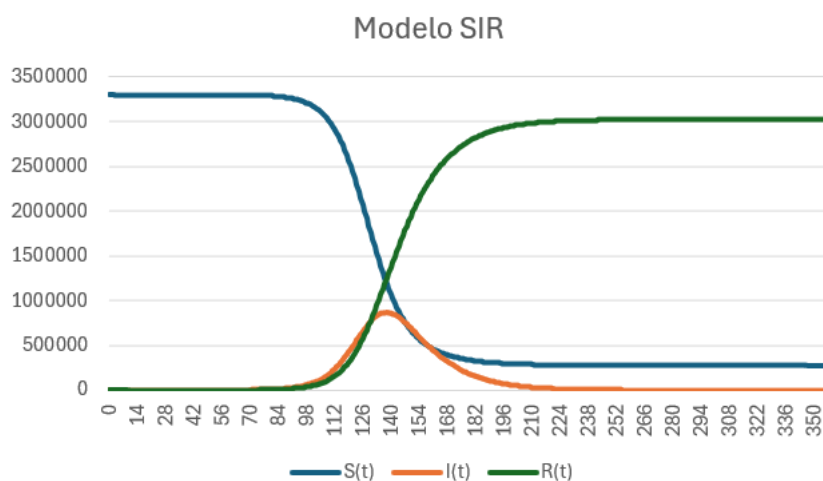
Atualização Com Valores de População Discreta			
Dias	S(t)	I(t)	R(t)
0	3302729	1	0
1	3302729	1,118571	0,071429
2	3302728	1,383833	0,231224
3	3302728	1,876082	0,52776
4	3302726	2,76588	1,063783
5	3302724	4,405649	2,051597
6	3302719	7,539945	3,939733
7	3302708	13,79807	7,709705
8	3302688	26,88639	15,59432
9	3302642	55,57743	32,87842
10	3302536	121,4736	72,57659
11	3302282	279,895	168,0201
12	3301644	678,0593	407,9301
13	3299970	1722,689	1037,557
14	3295391	4578,525	2760,246

Fonte: Criado pelo autor

### 3.2.1 Simulações

Na primeira simulação, utilizando  $d = 14$  obtivemos o seguinte gráfico:

Figura 3.2.9: Gráfico Modelo SIR (d = 14)



Fonte: Criado pelo autor

Note que em um certo momento  $I(t)$  atinge um ponto máximo, o que significa que existe uma grande quantidade de gente transmitindo a doença, aumentando consideravelmente a chance de contágio. Durante a pandemia, várias medidas foram tomadas com o intuito de diminuir esse ponto máximo de  $I(t)$ , como o uso de máscaras e o isolamento das pessoas em suas residências.

Na segunda simulação, vamos usar  $d = 5$ , o que faz o parâmetro  $\beta$  ser 0,2 e o parâmetro  $\alpha$  ser 0,526, com essas alterações no modelo obtemos a seguinte tabela:

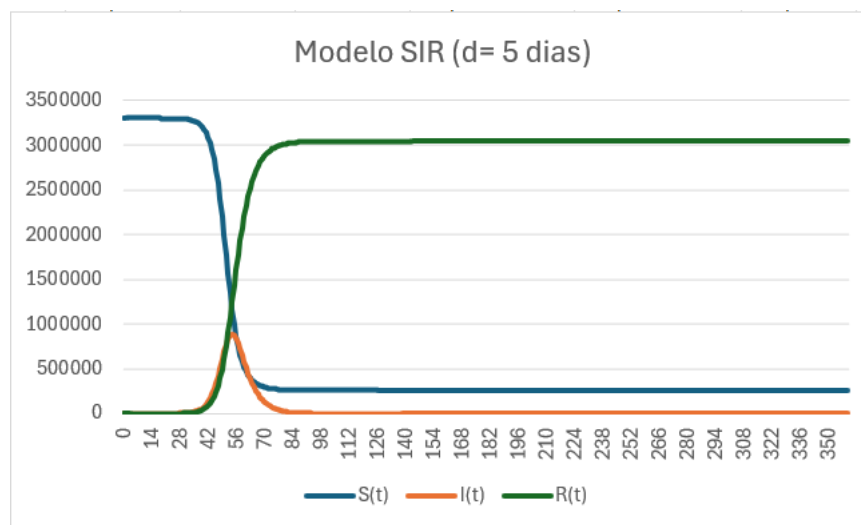
Figura 3.2.10: Modelo SIR-Excel

Informações Iniciais do Modelo			Atualização Com Valores de População Discreta				Valores de Variação			Atualização em valores contínuos			
			Dias	S(t)	I(t)	R(t)	$\Delta S$	$\Delta I$	$\Delta R$		S(t)	I(t)	R(t)
P	3302729	Individuos	0	3302729	1	0	-0,526	0,326	0,2		3302728,474	1,326	0,2
dt	1	Dias	1	3302728	1,326	0,2	-0,697475889	0,432275889	0,2652		3302727,777	1,758275889	0,4652
S(0)	3302729	Individuos	2	3302727	2,33147	0,81686	-0,924852775	0,573197597	0,35166		3302726,852	2,331473486	0,816855178
I(0)	1	Individuos	3	3302727	2,33147	0,81686	-1,226354256	0,760059559	0,46629		3302725,625	3,091533045	1,283149875
R(0)	0	Individuos	4	3302726	3,09153	1,28315	-1,62614472	1,007838111	0,61831		3302723,999	4,099371156	1,901456484
R <sub>0</sub>	2,63		5	3302724	4,09937	1,90146	-2,156265963	1,336391732	0,81987		3302721,843	5,435762888	2,721330715
d	5	Dias	6	3302722	5,43576	2,72133	-2,859205083	1,772052505	1,08715		3302718,984	7,207815393	3,808483293
β	0,2	1/d	7	3302719	7,20782	3,80848	-3,791299399	2,34973632	1,44156		3302715,192	9,557551713	5,250046371
α	0,526	β · R <sub>0</sub>	8	3302715	9,55755	5,25005	-5,027251184	3,115740841	1,91151		3302710,165	12,67329255	7,161556714
			9	3302710	12,6733	7,16156	-6,666113868	4,131455357	2,53466		3302703,499	16,80474791	9,696215225
			10	3302703	16,8047	9,69622	-8,839229152	5,478279569	3,38095		3302694,66	22,28302748	13,05716481
			11	3302695	22,283	13,0572	-11,72075059	7,264145091	4,45661		3302682,939	29,54717257	17,5137703
			12	3302683	29,5472	17,5138	-15,54159602	9,632161507	5,90943		3302667,397	39,17933408	23,42320482
			13	3302667	39,1793	23,4232	-20,60794534	12,77207852	7,83587		3302646,79	51,9514126	31,25907163
			14	3302647	51,9514	31,2591	-27,32576283	16,93548031	10,3903		3302619,464	68,88689291	41,64935415
			15	3302619	68,8869	41,6494	-36,23330394	22,45592536	13,7774		3302583,253	91,34281827	55,42673274

Fonte: Criado pelo autor

Na simulação de 5 dias, temos o seguinte gráfico:

Figura 3.2.11: Gráfico Modelo SIR (d = 5)



Fonte: Criado pelo autor

Note que nessa situação, o ponto máximo de  $I(t)$  acontece bem antes do que no caso  $d = 14$ , isso significa que a doença entra em equilíbrio bem antes do que no caso anterior. O gráfico também reflete a importância da vacinação uma vez que um dos melhores jeitos de diminuir o tempo de permanência do vírus no

organismo é através da vacinação, informação que podemos deduzir a partir da pesquisa publicada por Harris, Hall, Zaidi, Andrews, Dunbar e Dabrera (2021).

# Capítulo 4

## Roteiro de aula

Neste capítulo será apresentado um roteiro de aula para auxiliar professores que queiram abordar o tema em suas aulas de matemática, o público alvo serão alunos do ensino básico, em especial os estudantes do ensino médio.

O roteiro necessita de dois momentos de 50 minutos com os alunos, onde no primeiro momento será abordado os aspectos gerais do modelo de contágio compartimental SIR e o segundo momento serão aplicados o modelo no Excel para que os alunos vejam de forma prática o compartimento numérico e gráfico da ação do vírus.

Os objetivos da aula são:

- Compreender o modelo SIR (Suscetível, Infectado, Recuperado)
- Aplicar o modelo SIR para simular a propagação da Covid 19 (ou outros vírus)
- Analisar os impactos de diferentes parâmetros no contágio e na recuperação da Covid 19.

### 4.1 Aula 1: Introdução do modelo SIR

No primeiro momento dessa aula (20 minutos), o professor deve explicar o que são os 3 grupos:

- **Suscetível ( $S(t)$ ):** Pessoas que podem contrair a doença.

- **Infectados (I(t)):** Pessoas que estão infectadas e podem transmitir o vírus.
- **Removidos (R(t)):** Pessoas que se recuperaram e estão imunes ou que vieram a óbito.

Aqui é interessante discutir como acontece a dinâmica entre esses grupos, ou seja, como os indivíduos se movem de S(t) para I(t) e de I(t) para R(t), essa dinâmica pode ser estudada no Capítulo 3 do presente trabalho.

No segundo momento (20 minutos), o professor deve apresentar as equações discretizadas do modelo.

$$\begin{cases} \frac{\Delta S(t)}{P} = -\alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P^2} \Delta t \\ \frac{\Delta I(t)}{P} = \left( \alpha \frac{S(t) \cdot I(t)}{P^2} - \frac{\beta I(t)}{P} \right) \Delta t \\ \frac{\Delta R(t)}{P} = \frac{\beta I(t)}{P} \Delta t \end{cases}$$

Aqui, caso o professor ache viável e possua tempo hábil seria interessante fazer a dedução de cada uma dessas equações, o procedimento de dedução também é descrito no Capítulo 3 do presente trabalho, mas o essencial é explicar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e como eles podem ser ajustados no modelo.

Para finalizar a aula (10 minutos), o professor pode dividir a turma em grupos para que eles discutam sobre o modelo e sobre fatores que possam influenciar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , como por exemplo, medidas de distanciamento social, vacinação, dentre outros.

## 4.2 Aula 2: Simulação e análise

No primeiro momento (30 minutos), o professor deve apresentar a ferramenta de simulação, a dica é utilizar o Excel, inserindo as equações discretizadas em suas células para montar uma planilha com os dados numéricos de contágio. Uma localidade precisa ser escolhida e a população utilizada no modelo, a ideia principal é mostrar aos alunos como o modelo SIR se comporta em diferentes cenários. Também é interessante permitir que os alunos modifiquem os

parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e observem seus efeitos nos gráficos de  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ . O passo a passo pra montar essa planilha é encontrado na Seção 3.2 deste trabalho.

No segundo momento (15 minutos), é a hora de analisar os resultados obtidos, o professor pode pedir aos alunos que anotem suas observações sobre como a alteração dos parâmetros influenciou na propagação do vírus, também é relevante discutir a importância das simulações e suas implicações práticas, como identificar quais medidas tomar e qual o melhor momento para implementar uma intervenção de saúde pública.

Por fim é o momento da reflexão final (5 minutos), o professor deve questionar os alunos se o modelo SIR pode ajudar na tomada de decisões envolvendo a saúde pública.

Sugestões de avaliação:

- Participação dos alunos nas discussões em grupo.
- Relatório curto, onde os alunos descrevem suas simulações e suas conclusões sobre os resultados

Materiais para as aulas:

- Computador com software de simulação (Excel ou outro software de planilhas).
- Projetor para a apresentação das equações e de resultados
- Material de apoio sobre a Covid-19 e o modelo SIR.

# Bibliografia

- [1] AZEVEDO, Jocenir Aureliano de. **Um modelo matemático discreto do tipo SIR aplicado à Covid-19 e considerações sobre o uso da modelagem matemática no ensino médio.** 2021. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2021.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 10. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2015.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1996
- [5] BURAK, D. **Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série.**, Dissertação (Mestrado em Matemática), Unesp, Rio Claro, 1987.
- [6] E.A. Coddington e N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [7] EDWARDS, C. H. e PENNEY, D. E. **Equações Diferenciais Elementares - com problemas de contorno.** 3ªed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1995.
- [8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo:** volume 4. 6. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2019.

- [9] HARRIS, Ross J.; HALL, Jennifer A.; ZAIDI, Asad; ANDREWS, Nick J.; DUNBAR, J. Kevin; DABRERA, Gavin. Effect of Vaccination on Household Transmission of SARS-CoV-2 in England. *New England Journal Of Medicine*, [S.L.], v. 385, n. 8, p. 759-760, 19 ago. 2021. Massachusetts Medical Society. <http://dx.doi.org/10.1056/nejmc2107717>.
- [10] LIMA, J. P. **Sistemas Complexos aplicado a modelos epidemiológicos**. *Revista Physicae Organum*, v.7, n. 1, pp. 59-71. 20 de abril de 2021.
- [11] LUIZ, Mônica Helena Ribeiro. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. 2012. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática Universitária, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.
- [12] MARQUESONE, Evandro Estevão. A Matemática nos modelos do tipo SIR. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**. Cornélio Procópio, p. 1-16. jan. 2020.
- [13] OLIVEIRA, Rêmulo Márcio Gomes de. **A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONTEXTUALIZAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: modelos epidemiológicos e o uso do software excel no estudo de casos de covid-19 no município de colorado do oeste - Rondônia**. 2023. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2023.
- [14] OXFORD Brasil, “Quando isso acabará?”: Uma introdução aos números de reprodução viral,  $R_0$  e  $R_e$ . <https://oxfordbrazilebm.com/>; <https://oxfordbrazilebm.com/index.php/quando-isso-acabara-uma-introducao-aos-numeros-de-reproducao-viral-r0-e-re/>. Acesso em: 07 de Out. de 2024.
- [15] SABETI, Mehran. **Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante**. 2011. 135 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática

da Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

- [16] SILVA, Amarildo Oliveira da. **Modelos de evolução de epidemias dadas por equações diferenciais**. 2022. 56 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2022.
- [17] SILVA, Fabrício Onório da. **Modelos matemáticos de equações diferenciais aplicados ao estudo da pandemia de SARS-CoV-2**. 2021. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Rondonópolis, Rondonópolis, 2021.
- [18] TAVARES, JN., (2017) **Modelo SIR em epidemiologia**, Rev. Ciência Elem., V5(2):020