

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ARLEY ANTES SOUZA**

**UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ: UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA PROFESSORES DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

**SANTARÉM-PA  
2026**

**ARLEY ANTES SOUZA**

**UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ: UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA PROFESSORES DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Oeste do Pará como componente curricular obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.  
Orientador: Dr. Sebastián Mancuso

**SANTARÉM-PA**  
**2026**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA**

---

S725v Souza, Arley Antes  
Uma visita ao Disco de Poincaré: um produto educacional para professores da Educação Básica / Arley Antes Souza. – Santarém, 2026.  
20 p. : il.  
Inclui bibliografias.

Orientador: Sebastián Mancuso.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1. Ensino de Geometria. 2. Recurso educacional. 3. Geometria hiperbólica. 4. História da Matemática. 5. Formação de professores. I. Mancuso, Sebastián, *orient.* II. Título.

CDD: 23 ed. 370.71


ARLEY ANTES SOUZA

**UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ: UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA PROFESSORES DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Oeste do Pará como componente curricular obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.


Conceito: Aprovado

Data de aprovação: 12 de fevereiro de 2026

Documento assinado digitalmente  
 **SEBASTIAN MANCUSO**  
Data: 15/03/2026 11:40:50-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Dr. Sebastián Mancuso – Orientador  
Universidade Federal do Oeste do Pará

Documento assinado digitalmente  
 **AROLDO EDUARDO ATHIAS RODRIGUES**  
Data: 15/03/2026 21:52:13-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Dr. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues  
Universidade Federal do Oeste do Pará

Documento assinado digitalmente  
 **MARCOS MONTEIRO DINIZ**  
Data: 15/03/2026 19:26:40-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Dr. Marcos Monteiro Diniz  
Universidade Federal do Pará

## **AGRADECIMENTOS**

Sou grato ao apoio recebido de meu orientador, Dr. Sebastián Mancuso, durante os anos em que trabalhamos na criação de Uma Visita ao Disco de Poincaré, tanto no curso de licenciatura como nesse programa de mestrado.

O texto da versão revisada de nosso recurso educacional recebeu muitas melhorias graças às gentis sugestões de Dr. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues.

E sou muito grato ao suporte leal que recebi de minha querida esposa, Ariele Souza. Não é exagero dizer que este trabalho só foi possível graças a seu apoio nesses anos difíceis de pós-graduação.

Esta produção teve apoio financeiro da CAPES, por meio de uma bolsa de mestrado.

*Euclid alone has looked on Beauty bare.  
Let all who prate of Beauty hold their peace,  
And lay them prone upon the earth and cease  
To ponder on themselves, the while they stare  
At nothing, intricately drawn nowhere  
In shapes of shifting lineage; let geese  
Gabble and hiss, but heroes seek release  
From dusty bondage into luminous air.  
O blinding hour, O holy, terrible day,  
When first the shaft into his vision shone  
Of light anatomized! Euclid alone  
Has looked on Beauty bare. Fortunate they  
Who, though once only and then but far away,  
Have heard her massive sandal set on stone.*

—Edna St. Vincent Millay

## RESUMO

Em 2019, publicamos um recurso educacional para treinamento de professores, em formação inicial ou continuada, intitulado Uma Visita ao Disco de Poincaré. Esta dissertação apresenta uma versão revisada e expandida dessa produção. Ao examinar como o conceito de paralelismo evoluiu no decorrer de séculos de pesquisa matemática, Uma Visita ao Disco de Poincaré usa História da Matemática para ensinar geometrias não euclidianas. As propriedades da geometria hiperbólica são estudadas por meio do modelo conhecido como Disco de Poincaré, com apoio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. O público-alvo da nova edição de nosso recurso educacional continua sendo professores de Matemática da Educação Básica.

**Palavras-chave:** Ensino de Geometria; Recurso educacional; Geometria hiperbólica; História da Matemática; Formação de professores.

## ABSTRACT

In 2019, we published an educational resource for teacher training programs, useful in both initial training and also continuous professional development of teachers, titled *Uma Visita ao Disco de Poincaré*. This thesis presents a revised and expanded version of that work. By examining how the concept of parallelism has evolved over centuries of mathematical research, *Uma Visita ao Disco de Poincaré* makes use of the History of Mathematics to teach non-Euclidean geometries. The properties of hyperbolic geometry are studied using the model known as Poincaré Disk, with support of the dynamic geometry software GeoGebra. As before, the target audience for this new edition of our educational resource is math teachers.

**Keywords:** Geometry teaching; Educational resource; Hyperbolic geometry; History of Mathematics; Teacher training.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>RESENHA DE UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ (2019)</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>O conteúdo do livreto original</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Defeitos e limitações</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>PROCESSO DE REVISÃO DO RECURSO EDUCACIONAL</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3.1</b>	<b>História da Matemática e seu Ensino</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3.2</b>	<b>Escrevendo sobre História da Matemática</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3.2.1</b>	Obras de referência de História da Matemática . . . . .	<b>15</b>
<b>3.2.2</b>	Obras de referência de História das geometrias não euclidianas . . . . .	<b>15</b>
<b>3.2.3</b>	Fontes primárias . . . . .	<b>15</b>
<b>3.3</b>	<b>Primeiro capítulo: O quinto postulado de Euclides</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>3.4</b>	<b>Segundo capítulo: A geometria de Euclides</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>3.5</b>	<b>Terceiro capítulo: O modelo do Disco de Poincaré</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>3.6</b>	<b>Quarto capítulo: A geometria do Disco de Poincaré</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>3.7</b>	<b>Leituras Adicionais</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>18</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>19</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 2019, como parte de seu Trabalho de Conclusão de Curso, o autor apresentou um recurso educacional para ensino de geometrias não euclidianas intitulado Uma Visita ao Disco de Poincaré. O recurso educacional tinha o formato de ebook e seu principal público-alvo era professores de Matemática da Educação Básica em formação continuada (Souza, 2019).

Esta dissertação apresenta uma nova versão dessa ferramenta didática (Souza, 2026). Vamos justificar a existência desse produto, argumentar a necessidade que havia de revisá-lo e detalhar o processo de revisão, mostrando as diferenças entre a versão atual e a anterior. Defendemos que o texto revisado pode ser útil em cursos mais curtos ou oficinas acadêmicas com professores de Matemática da Educação Básica, tanto em formação inicial como em formação continuada.

Pavanello (1993) analisa o quase desaparecimento do ensino de geometria das escolas brasileiras algum tempo após o golpe militar de 1964. Nesse artigo, Pavanello mostra que a dualidade entre escola da elite  $\times$  escola do povo gradualmente passou a se expressar como escola particular  $\times$  escola pública. O acesso à rede pública foi expandido, mas com pouca preocupação em relação à qualidade do ensino. Essa precarização se manifestou nos espaços físicos das escolas, na desvalorização salarial dos professores e na remoção de tópicos do currículo, incluindo os estudos de Geometria. É nesse contexto que Pavanello não considera a suposta democratização do acesso à educação, que teria acontecido nesse período, como sendo verdadeira. Para ela, a velha dualidade entre escola da elite  $\times$  escola do povo agora poderia ser chamada de “escola onde se ensina geometria”  $\times$  “escola onde não se ensina geometria”. Portanto, em último caso, o abandono do ensino de geometria tinha causa política!

Mais tarde, Lorenzato (1995) aponta dois outros porquês de não ensinar geometria. O primeiro deles era que muitos professores não sabiam geometria, nem entendiam plenamente o seu poder, beleza e importância para uma formação cidadã. O outro motivo apontado por Lorenzato é uma dependência exagerada dos livros didáticos. A apresentação da geometria nos livros muitas vezes se resumia a uma lista de definições, propriedades e fórmulas. Essa apresentação árida, carente de explicações históricas e até mesmo lógicas, e desconectada de aplicações na própria Matemática e nas outras ciências é absolutamente inapropriada. Além disso, a parte de Geometria nos livros didáticos costumava aparecer apenas nas últimas páginas. Por isso, o estudo da Geometria era visto como menos prioritário e, com o encerramento do ano letivo, muitas classes nem chegavam a usar essa parte do material.

Nossa leitura é que o tipo de despreparo mencionado em Lorenzato (1995) nunca foi acidental, mas uma consequência nefasta da causa política já apontada em Pavanello (1993). O mesmo vale para o segundo motivo, e esse fato é observado e explicitado pelo próprio Lorenzato, adiante em seu artigo. Esses dois artigos, publicados há mais de 30 anos, ainda são relevantes para entender o ensino de geometria no Brasil.

Escolhemos começar essa discussão a partir da realidade brasileira, mas o tratamento dado à Geometria nas escolas é uma preocupação internacional. Para Grattan-Guinness (1978), é deplorável a quase eliminação da Geometria em alguns movimentos educacionais. E sobre a situação americana no início dos anos 2000, Clements (2003, p. 171) chama a maioria dos currículos então correntes e das práticas pedagógicas de ‘simplesmente abomináveis’. As palavras duras foram motivadas por sua observação crítica de que o ensino de geometria era de qualidade tão inferior que deixava os estudantes despreparados para prosseguir seus estudos dentro da própria Geometria e das muitas áreas da Matemática que dependem de conhecimento geométrico.

A posição de Clements torna-se ainda mais interessante quando notamos as razões que ele dá para ensinar Geometria. Ele diz que ‘a Geometria oferece uma forma de interpretar e refletir sobre nosso ambiente físico e que pode servir como ferramenta no estudo de outros tópicos em Matemática e nas Ciências’ (Clements, 2003, p. 171). Essa contradição

entre objetivos e resultados indica que é necessário dar mais atenção ao ensino de Geometria, tanto em dedicar mais tempo como em melhorar a qualidade do uso desse tempo. Entendemos que também indica uma incongruência entre objetivos e práticas pedagógicas, conforme observada por outros pesquisadores desde há muito (Brown, 1950).

Enquanto defende o seu ensino, Grünbaum (1981) define a Geometria como uma maneira especial de substituir objetos do mundo real por formas e figuras mais simples ou idealizadas, e então investigar as relações mútuas entre estas. Para Grünbaum, é supersticiosa a ideia de que o conhecimento geométrico tem natureza *a priori*. Para ele, toda a Geometria é um produto do pensamento humano e representa apenas uma das maneiras nas quais nós tentamos comunicar sobre nossos arredores e entender certos aspectos da realidade. Não é à toa que em Lorenzato (1995, p. 5) nós encontramos essa passagem: “Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.”

Certamente podemos chamar de distorcida a visão da Matemática como uma disciplina fria, chata e rígida. Vamos investigar brevemente a raiz dessa distorção. Heiede (1996, p. 232) reflete que ensinar Matemática como se fosse um produto acabado, divorciado de sua história, é parcialmente responsável por tantos estudantes jovens acharem que ela é desinteressante ou chata. Siu e Siu (1979) chegam ao ponto de dizer que a tarefa *mais importante e mais difícil* em educação matemática é fazer o estudante perceber que a ‘Matemática como produto final’ é muito diferente da ‘Matemática em criação’.

Os fundamentos de uma teoria matemática geralmente são criados muito depois de partes significativas dessa teoria. Mas a típica apresentação formal de uma teoria matemática acontece na ordem histórica reversa: começa-se pelos fundamentos, e a teoria é rigorosamente desenvolvida a partir desses fundamentos (Grattan-Guinness, 1978, p. 271). No entanto, não faz sentido ensinar crianças a partir de fundamentos que não podem ser apreciados por elas. Ensinar Matemática dessa forma pode induzir o estudante a pensar que a Matemática é chata e rígida, quase que um fóssil epistemológico que, infelizmente, foi desenterrado. Parece que fazer Matemática é apenas decorar e aplicar regras arbitrárias e sem sentido. Os papéis desempenhados pela exploração, imaginação e criatividade ficam obscurecidos (Siu; Siu, 1979).

Concordamos com a posição de que a principal motivação para estudar História da Matemática é compreender melhor a própria Matemática (Siu, 2000, p. 6). Por exemplo, a quem não entende que a Matemática tem sua História, que ela nem sempre foi do jeito que é hoje e que no futuro será diferente, *não foi ensinado Matemática* (Heiede, 1992). Por outro lado, entender como surgiram certas ideias matemáticas, como as alternativas para o quinto postulado, leva a um apreço mais maduro dessas ideias. E a Geometria, especialmente quando ensinada a partir de uma abordagem histórica, pode ser decisiva em revelar a verdadeira natureza da Matemática (Grattan-Guinness, 1978, p. 281, 282). De fato, um dos objetivos principais do recurso educacional que estamos apresentando é deixar clara a natureza da Matemática como um corpo *vivo* de saberes e técnicas. Assim, a escolha de ensinar geometria usando uma abordagem que é parcialmente histórica torna-se natural.

Por fim, gostaríamos de justificar a escolha das geometrias não euclidianas como tópico de um material para treinamento de professores da Educação Básica. Lamenta Heiede (2000) que a maioria dos professores de Matemática não conhecem quase nada sobre geometrias não euclidianas. Em seguida, o pesquisador faz a seguinte reflexão:

But does it matter if a teacher does not know about non-Euclidean geometry, one could ask. Nobody would after all expect him or her to teach it to children. The answer is that it does matter, profoundly. If a teacher knows that geometry is true on its own conditions and not as a sort of physics or a part of it, then this teacher will perhaps teach Euclidean geometry differently from how he or she would otherwise have done it. Moreover, knowledge of the existence of non-Euclidean geometry gives one a different view of what mathematics really is, and this may leave its mark everywhere on one's teaching of mathematics. (Heiede, 2000, p. 209)

Portanto, aprender sobre a existência de outras geometrias leva o professor a um entendimento mais profundo do que é a Matemática. Ademais, as geometrias não euclidianas foram criadas muito mais recentemente que quase todos

os outros tópicos típicos da matemática escolar. Estudá-las é um lembrete de que a Matemática ainda está sendo criada.

No próximo capítulo, fazemos uma resenha crítica da versão de 2019 de Uma Visita ao Disco de Poincaré, refletindo sobre seus méritos e limitações. No Capítulo 3, mostramos o processo de revisão desse material. Algumas considerações finais são feitas no último capítulo.

## 2 RESENHA DE UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ (2019)

O recurso educacional *Uma Visita ao Disco de Poincaré* foi publicado originalmente como anexo em um Trabalho de Conclusão de Curso (Souza, 2019). O recurso educacional tinha o formato de ebook, com 25 páginas, e seu público-alvo era professores da Educação Básica, possivelmente em um contexto de formação continuada. Em três capítulos, o ebook introduzia a geometria hiperbólica por meio dos desenvolvimentos históricos da Teoria das Paralelas, e depois por meio do Disco de Poincaré. A seguir, vamos resumir e criticar o conteúdo desse material.

### 2.1 O conteúdo do livreto original

O primeiro capítulo de *Uma Visita ao Disco de Poincaré* (2019) é completamente dedicado ao processo histórico que levou à criação das geometrias não euclidianas. A primeira seção conta, de forma resumida, a história da criação da Geometria como área de estudo matemático. A segunda seção apresenta *Os Elementos* de Euclides e os seus postulados da Geometria. A seção enfatiza as diferenças entre o quinto postulado e os precedentes, introduzindo a Teoria das Paralelas. A terceira seção conta a história da Teoria das Paralelas e os seus desenvolvimentos desde a Antiguidade até a publicação póstuma do livro de Johann Lambert. Algumas tentativas de demonstração do quinto postulado são apresentadas e refutadas. A quarta e última seção mostra como séculos de pesquisa culminaram na criação da geometria hiperbólica quando alguns matemáticos consideraram uma definição alternativa de retas paralelas. Também conta como foi negativa a recepção inicial dessas ideias até que Riemann, Beltrami e outros deram contribuições fundamentais que encerraram de forma definitiva a Teoria das Paralelas como campo de estudo.

O segundo capítulo do texto de 2019 é uma revisão de tópicos da geometria euclidiana que são importantes para compreender o modelo do Disco de Poincaré. Por exemplo, as primeiras seções dão uma definição de ângulo entre circunferências, demonstram um teorema de potências de pontos, e fazem um estudo da transformação geométrica do tipo inversão em relação a um círculo. A última seção demonstra um teorema sobre circunferências ortogonais que é essencial para o modelo do Disco de Poincaré.

O terceiro capítulo introduz o modelo de geometria hiperbólica conhecido como Disco de Poincaré. O disco aberto é usado como modelo do plano hiperbólico. Mostra-se que forma tomam as retas hiperbólicas nesse modelo, como são medidos os ângulos entre retas, e algumas propriedades dessa geometria que a tornam diferente da euclidiana. O capítulo também apresenta a métrica do modelo. A última seção encerra o ebook com uma breve discussão das circunferências hiperbólicas no modelo do disco.

### 2.2 Defeitos e limitações

Há muito a ser criticado na versão de 2019 de nosso recurso didático. O primeiro capítulo foi escrito a partir de uma longa consulta bibliográfica, mas raramente são feitas referências diretas a essa bibliografia no texto. As poucas referências citam apenas a obra, mas não a página de consulta. Essa falta de rigor científico torna muito difícil verificar as suas declarações e argumentos e encontrar informações adicionais. Outro destaque negativo do texto é a falta de clareza em alguns trechos, como na “demonstração” de Proclo. Há também várias imprecisões históricas menores. Além disso, consideramos que alguns detalhes matemáticos interessantes deveriam ter sido incluídos, mas ficaram ausentes.

O segundo capítulo tenta introduzir pontos no infinito ao tratar das inversões em relação a um círculo dado. A definição não faz sentido matemático e precisava ser corrigida. A Figura 2.2 (a) tem um pouco de poluição visual, e a demonstração relacionada poderia ser simplificada.

Consideramos que o terceiro capítulo terminou limitado demais em escopo. Pelo menos a ideia de transformações geométricas no disco deveria ter sido introduzida de alguma maneira. Como resultado, não foi possível fazer um estudo apropriado de uma figura tão elementar como o círculo hiperbólico. O ebook termina de forma abrupta.

Além dos problemas específicos de cada capítulo mencionados acima, outra limitação do ebook original é a ausência de exercícios e atividades. Existe pouco incentivo em tornar a leitura menos passiva e não são sugeridas atividades de exploração da geometria do disco. Consideramos essa uma falha notável em um texto matemático escrito explicitamente para fins didáticos.

### 3 PROCESSO DE REVISÃO DO RECURSO EDUCACIONAL

Os detalhes do processo de criação de *Uma Visita ao Disco de Poincaré* (2019) estão disponíveis em Souza (2019). Inevitavelmente vamos repetir algumas dessas informações neste capítulo, mas seu objetivo principal é mostrar os princípios que guiaram a revisão de nosso recurso educacional.

#### 3.1 História da Matemática e seu Ensino

Para ensinar Matemática, é necessário ensinar História da Matemática, porque a história de um assunto é parte do assunto! (Heiede, 1992, p. 152) Desse modo, a inclusão de um capítulo inteiro em nosso recurso educacional tratando principalmente da chamada Teoria das Paralelas torna-se natural. Nós damos o contexto social do surgimento da Geometria como área de estudo e, depois, da criação da matemática grega. É nesse contexto histórico que se situam Euclides de Alexandria e *Os Elementos*. Mencionamos um fato que consideramos crucial nessa história: *Os Elementos* não foi o único livro a tentar dar os fundamentos do estudo axiomático da geometria. Esse fato é importante para entendermos que os postulados de Euclides não são oriundos de inspiração divina, e sim criação de sua mente humana. É a partir desse entendimento que a posição do quinto postulado será questionada nos mais de 20 séculos que seguiram. Como enfatizamos, a Matemática *vive*. Por meio das críticas ao quinto postulado e as muitas tentativas de demonstrá-lo, o recurso educacional mostra como certas ideias geométricas se desenvolveram.

#### 3.2 Escrevendo sobre História da Matemática

De acordo com Gray (2011, p. x), um texto de História da Matemática estuda as ideias e as práticas de matemáticos. Para Gray, é necessário discutir a produção e a recepção de ideias, e como esses processos históricos são afetados pelo contexto social. Gray argumenta que a ideia de que um bom historiador simplesmente conta o que aconteceu no passado é ingênua. O registro histórico é imperfeito, seja porque parte dele foi perdida, seja porque contém erros. Assim, parte do trabalho de um historiador envolve tecer argumentos, fazer julgamentos e expressar opiniões baseadas nesse registro (Gray, 2011, p. 137).

A obra citada acima foi escrita a partir de notas de aula, que o autor ministrou a alunos de graduação, e contém tarefas para estudantes de História da Geometria. Sobre referências bibliográficas, Gray orienta a seus alunos:

Every substantial piece of information should be referenced, especially if it is a quotation. This may seem pedantic, but it is the only way to keep misinformation from creeping in. No one's memory is completely reliable. (Gray, 2011, p. 146)

Permitimos que esse princípio guiasse o processo de revisão do primeiro capítulo de *Uma Visita ao Disco de Poincaré*. Toda informação do texto de 2019 recebeu uma referência que a apoiasse, ou foi removida. Por exemplo, na página 9 foi dito que Bolyai, no contexto de seus estudos em Geometria Neutra, tentou expressar suas fórmulas trigonométricas na forma mais geral possível. É fato que a obra de Bolyai tem uma preocupação maior com os teoremas da Geometria Neutra se comparada à obra de Lobachevsky, e temos as fontes necessárias para fazer essa afirmação. Mas não pudemos determinar o que seria essa “forma geral” usada exclusivamente por Bolyai e, por essa razão, o parágrafo foi reescrito. Além disso, algumas vezes historiadores diferentes têm opiniões conflitantes sobre personagens históricos e os méritos de suas obras. Por fornecer referências para cada afirmação, esperamos ter feito nossos próprios julgamentos com rigor histórico e em um formato que possa ser examinado pelo leitor.

### 3.2.1 Obras de referência de História da Matemática

As duas principais obras de referência em História da Matemática utilizadas nessa revisão são Cooke (2013) e Katz (2009). Essas obras são relativamente novas se comparadas, por exemplo, a Boyer e Merzbach (2012), publicada primeiro em 1968 e que também foi consultada. Os dois textos, Cooke (2013) e Katz (2009), contém interpretações mais modernas de eventos históricos. Ilustrando esse ponto, ambos são mais generosos em relação à contribuição dos matemáticos árabes para a Teoria das Paralelas. Observamos esse fato tanto na quantidade de páginas dedicadas a suas obras, como na qualidade da discussão matemática das ideias ali expressas.

### 3.2.2 Obras de referência de História das geometrias não euclidianas

A primeira grande obra de referência a organizar e apresentar uma História das geometrias não euclidianas foi Bonola (1912). Na verdade, esse livro se tornou tão influente que Gray (1979) atribui a Roberto Bonola um padrão típico observado em quase todas as discussões subsequentes. Apesar de muito antigo, continua sendo relevante por conter muitos trechos de fontes primárias, além da reconhecida qualidade da organização do material.

Rosenfeld (1988) é um excelente livro soviético publicado no aniversário de 150 anos da palestra seminal sobre geometrias não euclidianas apresentada pelo matemático russo Nikolai Lobachevsky. De particular interesse foi o segundo capítulo, por conter uma exposição bem detalhada da Teoria das Paralelas, principalmente das contribuições árabes.

Gray (1989) é outra importante referência sobre a Teoria das Paralelas e inclui exposições acessíveis dos resultados obtidos por Giovanni Saccheri e Johann Lambert. Do mesmo autor, Gray (2011) é uma História da Geometria do século 19 e é notável em seguir detalhadamente os passos trilhados por Lobachevsky e Bolyai Janós na fundação definitiva das geometrias não euclidianas.

### 3.2.3 Fontes primárias

Sempre que uma tradução de fonte primária está disponível em português ou inglês, a obra foi consultada.

Uma edição de Os Elementos, Heath (1908), contém a “demonstração” de Proclo reproduzida no Recurso Educacional, além de comentários sobre outras tentativas famosas de demonstrar o quinto postulado de Euclides.

O livro de Saccheri, escrito originalmente em latim, foi consultado em Saccheri (2014). Essa edição, com tradução para o inglês por George Halsted e Linda Allegri, também inclui as revisões e comentários de Vincenzo De Risi.

O apêndice escrito por Bolyai está disponível, em inglês, em Bolyai (1987).

Um dos livros escritos por Lobachevsky, publicado por ele em alemão, recebeu tradução para o inglês em Lobachevsky (1914). O trabalho de tradução também é creditado a George Halsted.

Stillwell (1996) contém traduções para o inglês das duas publicações de Beltrami com seus modelos da geometria hiperbólica, além de comentários do editor e tradutor John Stillwell.

Infelizmente, o livro póstumo de Lambert sobre a Teoria das Paralelas ainda não está disponível em português ou inglês e não pode ser consultado diretamente. Trechos dessa publicação são reproduzidas nas obras citadas na Subseção 3.2.2.

## 3.3 Primeiro capítulo: O quinto postulado de Euclides

A revisão mais importante desse capítulo é, como mencionado, a inclusão de referências mais precisas. Além disso, listamos abaixo algumas das outras mudanças e adições.

- Os personagens gregos mencionados têm versões aporuguesadas de seus nomes. O texto passou a usar a forma portuguesa, por consistência.
- Quando reproduzimos a tentativa de demonstração de Proclo, consideramos necessário dar mais detalhes dos passos dessa demonstração e dos erros cometidos por ele. Por isso, adicionamos alguns parágrafos a essa discussão.
- A informação que relaciona Aristóteles a Os Elementos foi considerada relevante demais para ser mantida como nota de rodapé.
- Expandimos a nota sobre a tentativa de demonstração erroneamente atribuída a al-Tusi em textos antigos.
- O jesuíta Giovanni Girolamo (às vezes, Gerolamo) Saccheri é um dos personagens mais importantes da Teoria das Paralelas. Onde o texto original simplesmente proferia que Saccheri não teve dificuldade em encontrar uma contradição na hipótese do ângulo obtuso, escrevemos alguns parágrafos sobre essa parte de seu manuscrito. A relação entre essa hipótese, o segundo postulado de Euclides e a proposição 16 de Os Elementos é uma discussão exclusiva dessa revisão. Identificamos nessa parte do texto revisado uma oportunidade para introduzir alguns fatos matemáticos da geometria elíptica.
- Além do ponto acima, adicionamos muitos detalhes sobre as investigações de Saccheri em sua hipótese do ângulo agudo. Essa inclusão tornou-se possível ao consultarmos Saccheri (2014).
- Johann Lambert é outro personagem crucial na história da Teoria das Paralelas. A parte do texto que trata de suas contribuições foi tanto expandida como retificada. Por exemplo, dedicamos muito mais espaço a uma das consequências encontradas por Lambert da hipótese do ângulo agudo. Também deixamos de mencionar as funções hiperbólicas junto de Lambert. É verdade que ele foi um dos pioneiros no uso de funções hiperbólicas, como se vê em sua demonstração de que  $\pi$  é irracional. Mas ele nem introduziu essas funções na Matemática de forma geral, nem especificamente na Teoria das Paralelas. A associação entre a geometria hiperbólica e as funções hiperbólicas seria feita muito mais tarde. Em 2019, erramos ao sugerir o contrário.
- A matemática escolar no Brasil usa majoritariamente o grau como medida de ângulo. Incluímos uma discussão sobre radianos que consideramos pertinente.
- Incluímos a descoberta, por Bolyai, de que a trigonometria esférica é completamente independente do quinto postulado.
- Na versão de 2019, mencionamos que Gauss estava guiando experimentos sobre a melhor geometria para descrever nossa realidade física. É espúria a anedota de que Gauss teria conduzido experimentos assim na Terra. É possível que Bartels, um dos colaboradores de Gauss, tenha feito experimentos astronômicos sob sua supervisão. Mas não está claro o objetivo desse suposto experimento e, por isso, decidimos omitir essa informação.
- Incluímos a informação de que a publicação póstuma da correspondência de Gauss gerou interesse nas obras de Bolyai e Lobachevsky. Esse fato histórico dá peso a uma das teses que apresentamos sobre a recepção imediata dessas obras.
- Mencionamos que Felix Klein introduziu a classificação das geometrias não euclidianas em elíptica e hiperbólica.

### 3.4 Segundo capítulo: A geometria de Euclides

O objetivo do segundo capítulo é dar as ferramentas necessárias para estudar o Disco de Poincaré como modelo da geometria hiperbólica. O conteúdo do capítulo, pelo menos até a Seção 2.3, não deve ser inédito para o professor de Matemática. Ainda assim, achamos necessário revisar essas definições e teoremas. Além da motivação de estudar o Disco de Poincaré, os resultados são interessantes por si mesmos. A inclusão desse capítulo também nos dá a oportunidade de apresentar algumas demonstrações matemáticas.

As mudanças efetuadas nas duas primeiras seções foram pequenas e tiveram o alvo de melhorar a clareza do texto. A principal mudança no corpo do texto é a correção mencionada em nossa crítica ao material na Seção 2.2. Adicionalmente, incluímos exercícios.

### 3.5 Terceiro capítulo: O modelo do Disco de Poincaré

No material de 2019, o terceiro capítulo era intitulado *A geometria do Disco de Poincaré*. Agora, esse é o título do quarto capítulo. Mas as três seções que formam esse capítulo não sofreram grandes mudanças. É nele que introduzimos o modelo da geometria hiperbólica conhecido como Disco de Poincaré, explicando o que são pontos e retas no modelo. A única adição é da seção de atividades. Usamos o *software* GeoGebra para explorar algumas das propriedades mais elementares dessa geometria. Esse recurso didático já havia sido empregado na dissertação Ribeiro (2013), que consultamos.

Duas seções que estavam no terceiro capítulo foram movidas para o capítulo seguinte.

### 3.6 Quarto capítulo: A geometria do Disco de Poincaré

As duas primeiras seções do quarto capítulo são exclusivas dessa revisão. É nelas que introduzimos as transformações isométricas dentro do disco. As duas seções seguintes estavam na versão de 2019, mas ampliamos o estudo de circunferências no modelo. O material antigo analisava apenas os círculos concêntricos com o disco.

Assim como no capítulo anterior, adicionamos atividades usando o GeoGebra.

### 3.7 Leituras Adicionais

Decidimos inserir um capítulo não numerado intitulado apenas Leituras Adicionais. Achamos que o texto terminava de forma muito abrupta e que essa seria uma oportunidade conveniente para incluir algumas recomendações de leitura. Dada a natureza introdutória do material, consideramos que esse também é um incentivo para que o leitor continue seus estudos.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O projeto de revisão e ampliação de *Uma Visita ao Disco de Poincaré* resultou em um material que julgamos muito superior à versão antiga. O uso da Teoria das Paralelas, tópico de História da Matemática, mostrou-se apropriado aos objetivos pedagógicos do recurso educacional. A inclusão de atividades exploratórias por meio de geometria dinâmica também deve ser mencionada.

Defendemos que o texto revisado pode ser usado em oficinas acadêmicas com professores de Matemática, em formação inicial ou continuada. Outra possibilidade é usá-lo como material de apoio em um curso de História da Matemática; ou, ainda, em um curso de Geometria para estudantes de licenciatura, dedicando alguns encontros à discussão das geometrias não euclidianas. Além disso, o material não requer necessariamente a intervenção de um instrutor, podendo ser usado por professores da Educação Básica interessados no tema.

Apesar disso, o recurso educacional que escrevemos poderia receber diversas melhorias. Por exemplo, adicionamos atividades como parte desse projeto de expansão do material, mas ainda são poucas.

O texto também seria mais instrutivo se pudéssemos ter incluído uma discussão sobre tesselações no plano. Já havíamos mencionado essa limitação em Souza (2019, p. 30). Na ocasião, comentamos que tesselações são um tópico interessante na geometria euclidiana e que essa seria uma boa oportunidade de revisá-lo. Comparar os padrões de ladrilhamento do plano hiperbólico com os do plano euclidiano poderia facilitar um entendimento mais profundo de algumas das propriedades de ambas as geometrias. Além disso, Heiede (2000) sugere que tesselações podem ser usadas para introduzir geometrias não euclidianas na Educação Básica, mostrando a pertinência do tema.

Infelizmente, também não foi possível organizar um minicurso ou oficina de geometrias não euclidianas a tempo de incluir um relato de aplicação do material.

São muitos e antigos os desafios do Ensino de Geometria no Brasil. Esperamos que esse trabalho seja uma pequena contribuição para vencê-los.

## REFERÊNCIAS

- BOLYAI, János. **Appendix: The Theory of Space**. Edição: Ferenc Kárteszi. Amsterdam: Elsevier e Akadémiai Kiadó, 1987. Citado na p. 15.
- BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1912. Citado na p. 15.
- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado na p. 15.
- BROWN, Kenneth E. Why Teach Geometry? **Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 43, n. 3, p. 103–106, 1950. Citado na p. 10.
- CLEMENTS, Douglas H. Teaching and Learning Geometry. *In: A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2003. cap. 11, p. 151–178. Citado na p. 9.
- COOKE, Roger L. **The History of Mathematics: A Brief Course**. 3. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2013. Citado na p. 15.
- GRATTAN-GUINNESS, I. On the Relevance of the History of Mathematics to Mathematical Education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taylor & Francis, v. 9, n. 3, p. 275–285, 1978. Citado nas pp. 9, 10.
- GRAY, Jeremy. **Ideas of space: Euclidean, non-Euclidean, and relativistic**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1989. Citado na p. 15.
- GRAY, Jeremy. Non-Euclidean Geometry—A Re-Interpretation. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 236–258, 1979. Citado na p. 15.
- GRAY, Jeremy. **Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century**. London: Springer-Verlag, 2011. Citado nas pp. 14, 15.
- GRÜNBAUM, Branko. Shouldn't We Teach Geometry? **The Two-Year College Mathematics Journal**, Taylor & Francis, v. 12, n. 4, p. 232–238, 1981. Citado na p. 10.
- HEATH, Thomas L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Cambridge: Cambridge University Press, 1908. v. 1. Citado na p. 15.
- HEIEDE, Torkil. History of Mathematics and the Teacher. *In: Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Edição: Ronald Calinger. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1996. p. 231–243. Citado na p. 10.
- HEIEDE, Torkil. The History of Non-Euclidean Geometry. *In: Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Edição: Victor J. Katz. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000. p. 201–211. Citado nas pp. 10, 18.

HEIEDE, Torkil. Why Teach History of Mathematics? **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 76, n. 475, p. 151–157, 1992. Citado nas pp. 10, 14.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3. ed. Boston: Pearson, 2009. Citado na p. 15.

LOBACHEVSKY, Nikolai Ivanovich. **Geometrical Researches on the Theory of Parallels**. Tradução: George Halsted. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1914. Citado na p. 15.

LORENZATO, Sérgio. Por Que Não Ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, v. 3, n. 4, p. 3–13, 1995. Citado nas pp. 9, 10.

PAVANELLO, Regina Maria. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993. Citado na p. 9.

RIBEIRO, Ricardo Silva. **Geometrias Não-Euclidianas na Escola: Uma Proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica**. 2013. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Citado na p. 17.

ROSENFELD, Boris A. **A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space**. New York: Springer-Verlag, 1988. Citado na p. 15.

SACCHERI, Gerolamo. **Euclid Vindicated from Every Blemish**. Edição e notas: Vincenzo De Risi. Suíça: Springer, 2014. Citado nas pp. 15, 16.

SIU, Fung-Kit; SIU, Man-Keung. History of Mathematics and its Relation to Mathematical Education. **International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology**, Taylor & Francis, v. 10, n. 4, p. 561–567, 1979. Citado na p. 10.

SIU, Man-Keung. The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. *In: Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Edição: Victor J. Katz. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000. p. 3–17. Citado na p. 10.

SOUZA, Arley Antes. **Uma Visita ao Disco de Poincaré**. 2026. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1174094>. Acessado em 14 de março de 2026. Citado na p. 9.

SOUZA, Arley Antes. **Uma Visita ao Disco de Poincaré: Proposta de Material para Aperfeiçoamento de Professores**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, Pará. Citado nas pp. 9, 12, 14, 18.

STILLWELL, John. **Sources of Hyperbolic Geometry**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996. Citado na p. 15.