

UMA VISITA AO DISCO DE POINCARÉ

ARLEY ANTES SOUZA

SANTARÉM-PA, 2026



Esta obra é distribuída sob a Licença Pública Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional. Leia o texto legal completo em:

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pt>

Você tem o direito de:

- **Compartilhar** — Copiar e redistribuir o material em qualquer suporte ou formato para qualquer fim, mesmo que comercial.
- **Adaptar** — Remixar, transformar, e criar a partir do material para qualquer fim, mesmo que comercial.

O licenciante não pode revogar estes direitos desde que você respeite os termos da licença.

De acordo com os seguintes termos:

- **Atribuição** — Você deve atribuir o devido crédito, fornecer um link para a licença, e indicar se foram feitas alterações. Você pode fazê-lo de qualquer forma razoável, mas não de uma forma que sugira que o licenciante o apoia ou aprova o seu uso.
- **CompartilhaIgual** — Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições ao abrigo da mesma licença que o original.
- **Sem restrições adicionais** — Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

Prefácio do autor

Entre 2007 e 2012 estive intensamente envolvido, como competidor, na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Em algum desses anos, eu recebi um livro delicioso intitulado *Círculos Matemáticos—A Experiência Russa*, de Dmitri Fomin. No capítulo 14 desse livro, Fomin introduz os problemas de Geometria com alguns breves comentários. Segundo ele, a Geometria pode ser considerada como um jogo cujas regras foram criadas pelos gregos antigos. Mas se a Geometria é um jogo, argumenta Fomin, então só pode ser comparada ao xadrez em sua complexidade e elegância.

Aqueles anos foram fundamentais para minha formação como estudante de Matemática. Os problemas de olimpíada não tentavam ser práticos ou realistas. Em geral, a única preocupação de um problema típico de olimpíada é ser interessante e divertido! Naquela época, o ímpeto de resolver problemas matemáticos era pouco extrínseco; não vinha da pressão de pais e professores ou da necessidade de tirar boas notas. A vida era mais simples e a única motivação necessária para resolver um problema é que este fosse desafiador ou elegante. A Matemática era menos uma Ciência e mais um jogo ou um tipo curiosamente belo de arte.

Quando fui admitido na Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) para cursar Licenciatura Integrada em Matemática e Física, trouxe comigo essas experiências como ex-aluno da OBMEP. A ideia de escrever este material surgiu por volta de 2017. Na época, eram várias as minhas preocupações. Uma delas era o estado do ensino de Geometria no país, tanto na Educação Básica como nos cursos de licenciatura. Outra preocupação estava relacionada à “cultura matemática” do professor da Educação Básica. Eu acreditava que estudar Matemática normalmente inacessível aos estudantes da Educação Básica era importante para todos os professores dessa disciplina. Estudar Matemática mais avançada abriria a possibilidade de fazer novas conexões entre as suas muitas áreas de estudo. Para o professor, uma consequência desse saber expandido pode incluir até mesmo uma mudança de atitude em relação à própria natureza da Matemática e de seu ensino.

Eventualmente, escolhi um tópico de Geometria que normalmente não é estudado em um curso de licenciatura. Sob orientação do Dr. Sebastián Mancuso, escrevi a primeira versão deste material como uma ferramenta didática para treinamento de professores. O objetivo era servir de material didático para alguma oficina de geometrias não euclidianas, possivelmente em um contexto de formação continuada. O escopo era muito limitado; não havia sequer uma tentativa de fazer um estudo sistemático do tema. Mas, inspirado em um outro trabalho da área [30, p. 17], propus fazer uma espécie de excursão por esse estranho universo geométrico. Em 2019, apresentei esse material, com sua justificativa, como meu Trabalho de Conclusão de Curso. [28]

Uma leitura crítica da primeira versão de *Uma Visita ao Disco de Poincaré* revela muitas falhas e omissões do material. Algumas partes eram de difícil compreensão por falta de clareza na forma como as ideias eram expostas. O tratamento de alguns conceitos matemáticos era descuidado. E aquele era um material didático de Matemática sem nenhuma proposta de atividades ou exercícios.

Desde 2019, sou professor de Matemática em escolas públicas. Depois de alguns anos de atuação profissional, fui selecionado para ingressar no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Como o PROFMAT é um programa de pós-graduação do tipo profissional, os mestrandos são encorajados a criar um produto educacional seguindo uma das linhas de pesquisa. Novamente sob orientação do prof. Mancuso, selecionamos a linha Formação de Professores de Matemática da Educação Básica. Nossa proposta era revisar e expandir aquela primeira versão de *Uma Visita ao Disco de Poincaré*. O resultado desse trabalho é o material que você tem em mãos.

Como usar este material

Muitas propriedades das geometrias não euclidianas são descritas como contraintuitivas. O objetivo desse material é prover algum tipo de intuição no estudo dessas geometrias. Em especial, o *Disco de Poincaré* será usado para visualizar as propriedades da geometria hiperbólica. Um estudante de Geometria

consegue facilmente imaginar o formato de um triângulo, quadrado ou círculo em um plano euclidiano. Queremos que o leitor consiga, com a mesma facilidade, imaginar o formato de figuras simples no modelo do disco, e que as propriedades dessas figuras passem de “estranhas” a simplesmente diferentes.

O primeiro capítulo trata da Teoria das Paralelas. Quando Euclides de Alexandria lançou as bases do estudo da Geometria, ele assumiu como verdadeira uma certa afirmação que implicitamente dizia respeito a retas paralelas. Desde essa época, geômetras procuravam uma prova rigorosa dessa afirmação. Essa busca foi a motivação por trás de muitos estudos fascinantes de Geometria que culminaram, eventualmente, na criação das geometrias não euclidianas. O segundo capítulo é uma revisão da geometria euclidiana. Alguns resultados importantes para o estudo do Disco de Poincaré são demonstrados. O terceiro capítulo introduz o Disco de Poincaré como modelo da geometria hiperbólica. Por fim, o quarto capítulo faz um estudo de algumas das propriedades dessa geometria usando o disco.

Todo texto exige do leitor uma certa generosidade para engajar-se com as ideias expostas. Em um texto matemático, essa generosidade pode ser expressa ao refazer os passos das demonstrações e até mesmo por suspeitar das figuras desenhadas pelo autor. Além disso, as atividades são essenciais para atingir o objetivo pedagógico do material, em particular aquelas que usam aplicativos de geometria dinâmica nos dois últimos capítulos. O texto foi escrito com o objetivo de ser acessível para professores de Matemática da Educação Básica, ou seja, pessoas com formação em cursos de licenciatura em Matemática. Dito isso, não há muitos pré-requisitos para a leitura do texto, e acreditamos que jovens estudantes da Educação Básica também podem achá-lo instrutivo, desde que tenham alguma maturidade no estudo da geometria euclidiana plana.

Esperamos que essa pequena excursão por um universo geométrico diferente seja, mais do que instrutiva, prazerosa!

Sumário

Prefácio do autor	iii
Como usar este material	iii
1 O quinto postulado de Euclides	3
1.1 As primeiras formas geométricas	3
1.2 Os primeiros postulados	4
1.3 Em busca de uma demonstração para o quinto postulado	5
1.4 Um mundo inteiramente novo	12
2 A geometria de Euclides	17
2.1 Ângulos entre circunferências	17
2.2 Potência de pontos	18
2.3 Inversão em relação a um círculo	19
2.4 Existência e unicidade de circunferências perpendiculares	21
Atividades	22
3 O modelo do Disco de Poincaré	25
3.1 O plano hiperbólico	25
3.2 Pontos e retas	26
3.3 Ângulos, perpendicularidade e paralelismo	27
Atividades	28
4 A geometria do Disco de Poincaré	29
4.1 Isometrias na geometria euclidiana	29
4.2 Reflexões no disco	29
4.3 A métrica do disco	31
4.4 As circunferências hiperbólicas	32
Atividades	34
Leituras adicionais	37
Bibliografia	39

Capítulo 1

O quinto postulado de Euclides

Apesar de muitos considerarem a matemática uma disciplina fria e difícil, existe alguma controvérsia entre o público leigo quanto a até que ponto a matemática é conectada à realidade. Alguns acham “matemática” em toda parte, e para isso podem citar a ubiquidade das operações aritméticas mais simples ou o fato de “encontrarem” formas geométricas, como triângulos e retângulos, em todo lugar. Por outro lado, há aqueles que caçoam do realismo dos problemas comumente encontrados nos livros didáticos, sobre o Joãozinho que foi comprar 54 melancias ou a Maria que precisa calcular os horários dos trens. A verdade é que as ideias matemáticas tiveram que ser inventadas por nós. Sendo assim, são marcadas por inexatidões e falhas, criticadas e corrigidas gradativamente. Considerando essa sua natureza, podemos investigar seu desenvolvimento histórico e encontrar suas raízes. Ao fazer isso, descobrimos um corpo de conhecimento vivo, em desenvolvimento; e, como estudantes ou professores, podemos atingir um entendimento mais profundo de suas ideias e conceitos.

Nesse capítulo, vamos comentar brevemente as origens do pensamento geométrico. Nosso objetivo não é fazer um estudo aprofundado desse tema, mas fornecer um plano de fundo da criação da matemática grega. Em especial, vamos ver as consequências da escolha por Euclides do seu quinto postulado, e como a crítica a essa escolha foi combustível para alguns desenvolvimentos matemáticos ao longo dos séculos, culminando na descoberta de novas geometrias! Nesta jornada, apresentaremos algumas propriedades das geometrias não euclidianas. Uma dessas geometrias é modelada pelo Disco de Poincaré, que vamos visitar a partir do terceiro capítulo deste material.

1.1 As primeiras formas geométricas

É muito difícil rastrear a origem dos conceitos matemáticos mais primitivos, como é o caso de quase tudo pré-histórico. Provavelmente nunca vamos saber quem foram os primeiros humanos a chamarem uma figura de quadrado, e outra de círculo. Por isso, vamos nos concentrar nos registros que temos da tradição geométrica no Egito e na Mesopotâmia, que provavelmente foram as culturas que tiveram maior influência sobre a matemática grega.

A palavra geometria quer dizer literalmente “medir terra”, o que descreve bem o trabalho dos agrimensores egípcios. Numa sociedade cuja subsistência e riqueza dependia muito do cultivo da pequena faixa de terra fértil ao longo do rio Nilo é natural que alguns conceitos geométricos tenham se desenvolvido a partir de motivações práticas. Segundo nos relata um dos mais proeminentes historiadores da Antiguidade, Heródoto, em cada ano o rio Nilo enchia e, na sua baixa, os campos de cultivo precisavam ser novamente medidos e distribuídos. O imposto pago por cada agricultor era proporcional ao seu pedaço de terra. Assim, o rei mantinha inspetores para medir cada terreno e cobrar o devido imposto. Da necessidade de medir esses campos, os egípcios desenvolveram métodos para calcular áreas. [8, p. 68]

Infelizmente, poucos papiros egípcios contendo textos matemáticos foram preservados até nossos dias. O mais famoso desses, conhecido como Papiro de Rhind, contém uma lista de 87 problemas resolvidos com diversos métodos matemáticos. [17, p. 3] [8, p. 58] Esses papiros revelam que os egípcios podiam calcular com exatidão a área de figuras simples, como triângulos e vários tipos de quadriláteros. Não apenas isso, mas eles sabiam calcular com precisão a área de círculos. Apesar de não terem uma noção parecida com a nossa do número π , os seus cálculos assumem implicitamente que o valor de $\frac{\pi}{4}$ seja $(\frac{8}{9})^2$, uma aproximação correta até a segunda casa decimal. [17, p. 9] [8, p. 69]

É surpreendente que o registro mais antigo do Teorema de Pitágoras em um texto egípcio date de 300 AEC, quando a influência grega já estava bem estabelecida. Talvez os egípcios não conhecessem esse

resultado ou, se conheciam, esse fato não foi preservado. Entretanto, outro povo da antiguidade parece ter conhecido bem esse teorema: os mesopotâmios. [5, p. 49]

Na região entre os rios Eufrates e Tigre, mais ou menos onde hoje é o Iraque, floresceram diversas civilizações que mostraram notável habilidade matemática. Essas civilizações muitas vezes são chamadas coletivamente de mesopotâmios. Diferentemente dos egípcios, a maior parte dos escritos preservados desses povos estão na forma de tabuinhas de argila escritas utilizando um estilete feito de cana. Como as marcas na argila tem forma de cunha, esse tipo de escrita é conhecida como cuneiforme.

O que as tabuinhas revelam sobre a matemática mesopotâmia é fantástico, e sua influência é sentida até hoje. Por exemplo, foram os mesopotâmios que criaram um sistema numérico sexagesimal, e é por isso que nós ainda dividimos uma hora (ou um grau) em sessenta minutos, e um minuto em sessenta segundos.

Assim como os egípcios, os mesopotâmios desenvolveram métodos para calcular as áreas de figuras planas. Lançando mão de diversos algoritmos, os escribas podiam calcular as áreas de figuras mais complicadas, e também o volume de vários sólidos. Mas parece que a geometria mesopotâmia era mais rebuscada que a egípcia em ainda outro aspecto: enquanto os egípcios se concentraram quase totalmente no cálculo de áreas, os mesopotâmios estudaram relações mais abstratas entre figuras. Em particular, as tabuinhas mostram que eles já conheciam o Teorema de Pitágoras uns mil anos antes dos dias de Pitágoras. Não somente isso, eles descobriram algum método para gerar ternas pitagóricas, isto é, ternas de números inteiros que satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$. Listas com tais números foram preservadas. [17, p. 19]

Como se vê, tanto os egípcios como os mesopotâmios desenvolveram a matemática que necessitavam para a manutenção de suas sociedades. Quais as principais diferenças entre a matemática desenvolvida por esses dois povos e aquela dos gregos? Como veremos na próxima seção, o que geralmente chamamos de matemática grega guarda poucas semelhanças com essas raízes. Não há evidência de que os egípcios e mesopotâmios aprofundaram-se em perguntar por que seus métodos realmente funcionavam. Os gregos, por outro lado, passaram a enfatizar as justificativas de seus enunciados. Não apenas isso, suas descobertas começaram a expressar relações cada vez mais abstratas entre figuras geométricas e se distanciaram muito da maior parte das aplicações práticas. De fato, enquanto alguma matemática ainda era necessária em toda a Grécia, o tipo de cálculo que interessava a escribas e engenheiros se desenvolveu de forma mais ou menos independente. A matemática grega era feita por pessoas que tinham tempo para isso e, estando livres de outras preocupações, podiam se dedicar a atividades recreativas. [2, pp. 15, 23, 24]

1.2 Os primeiros postulados

Não se sabe com certeza a quem se devem as primeiras demonstrações em matemática como conhecemos hoje, apesar dessa honra ser muitas vezes creditada a Tales de Mileto. Numa demonstração, o matemático tenta deduzir certas propriedades a partir de outras mais elementares, numa série de passos lógicos. É claro que ele sempre precisará começar de pelo menos algumas premissas básicas e partir daí. De acordo com certos comentários que chegaram a nossos dias, vários matemáticos tentaram organizar tais premissas básicas da geometria, mas somente uma dessas obras foi preservada até nossos dias. [26, p. 35] [17, pp. 51, 52] Não somente preservada, essa obra se tornou a segunda mais impressa, traduzida e reeditada de toda a história humana, atrás somente da Bíblia. Esse famoso texto matemático se chama *Os Elementos*, escrito por Euclides em cerca de 300 AEC.¹

Os Elementos estavam organizados em 13 volumes, que tratavam dos fundamentos, ou elementos, de toda a matemática grega. Alguns volumes eram dedicados à geometria espacial, outros à importante discussão sobre incomensurabilidade. Mas, sem dúvida, o mais famoso é o primeiro, que trata exclusivamente de geometria plana. Nesse livro, Euclides assume cinco axiomas e cinco postulados, e a partir deles deduz as propriedades elementares das figuras planas, culminando numa bela demonstração do Teorema de Pitágoras e de seu recíproco.

Note-se que Euclides fazia uma distinção entre axioma e postulado, que já não é mais relevante hoje. Os axiomas eram noções comuns, aplicáveis em qualquer área do conhecimento. Por exemplo, o primeiro axioma dizia que se duas coisas forem iguais a uma terceira, então elas mesmas são iguais entre si. Os postulados eram as premissas básicas da geometria, a partir dos quais Euclides ergueria um edifício matemático. Estes são os cinco postulados, traduzidos livremente do inglês para o português a partir da edição em inglês de Fitzpatrick [11, p. 7]:

¹Surpreendentemente, à parte seu nome e a época em que viveu, sabe-se quase nada sobre o próprio Euclides.

-
1. Que seja postulado traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto;
 2. E produzir (ou: aumentar, continuar a traçar) uma linha reta finita (ou seja, um segmento) continuamente em linha reta;
 3. E desenhar um círculo com qualquer centro e raio;
 4. E que todos os ângulos retos são iguais uns aos outros;
 5. E que, se uma linha reta cruzando duas outras linhas retas tem ângulos internos de um mesmo lado (somados) menores que dois ângulos retos, então, se produzidas (traçadas) ao infinito, as duas outras linhas retas se encontram naquele lado da linha original cuja soma dos ângulos internos é menor que dois ângulos retos (e não se encontram do outro lado).
-

É clara a diferença entre os primeiros quatro postulados e o quinto. Um postulado, por ser uma premissa básica, deveria ser “autoevidente”, o mais simples possível. Ao passo que os quatro primeiros são, de fato, afirmações muito simples, o quinto postulado é bem mais longo e complexo. A figura a seguir ajuda a entender o que Euclides está afirmando. Seja r uma reta que intersecta outras duas, s e t . Euclides diz que, se somarmos os dois ângulos internos em um mesmo lado de r e encontrarmos um valor menor do que dois ângulos retos, ou 180° , então as retas s e t se cruzam nesse lado.²

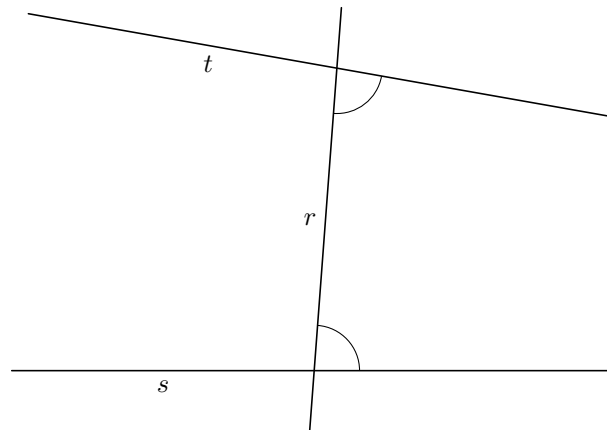


Figura 1.1: Segundo o quinto postulado de Euclides, as retas s e t se intersectam do lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

De certo modo, o quinto postulado de Euclides se parece mais com as proposições que são demonstradas ao longo do livro do que com os outros quatro postulados. Na verdade, desde a antiguidade muitos matemáticos parecem ter desconfiado que esse postulado deveria ser um teorema, e que, se não era apresentado como tal, era porque Euclides havia sido incapaz de demonstrá-lo. Dessa suspeita decorreram muitas tentativas de demonstração, e essa discussão ficou conhecida por muito tempo como *teoria das paralelas*.

1.3 Em busca de uma demonstração para o quinto postulado

Da antiguidade ao século XIX, muitas técnicas diferentes foram empregadas na tentativa de demonstrar o quinto postulado.³ Alguns tentaram dar uma nova definição, supostamente mais clara, de retas paralelas; mas, na própria definição, incluíram sem perceber uma afirmação equivalente ao quinto postulado. Outros desenvolveram vários passos detalhados, como em uma demonstração, mas em algum ponto tacitamente utilizaram outro pressuposto, também equivalente a esse postulado. É notável que alguns

²Na linguagem de Euclides, as retas s e t seriam o que chamamos hoje de segmentos. Por isso ele diz que, se “prolongadas ao infinito”, vão se encontrar.

³Talvez a primeira obra dedicada a demonstrar o quinto postulado tenha sido escrita por Arquimedes não muito tempo depois da publicação dos Elementos. Essa obra, chamada *Sobre linhas paralelas*, não sobreviveu até nossos dias, mas é citada pelos matemáticos árabes da Idade Média.

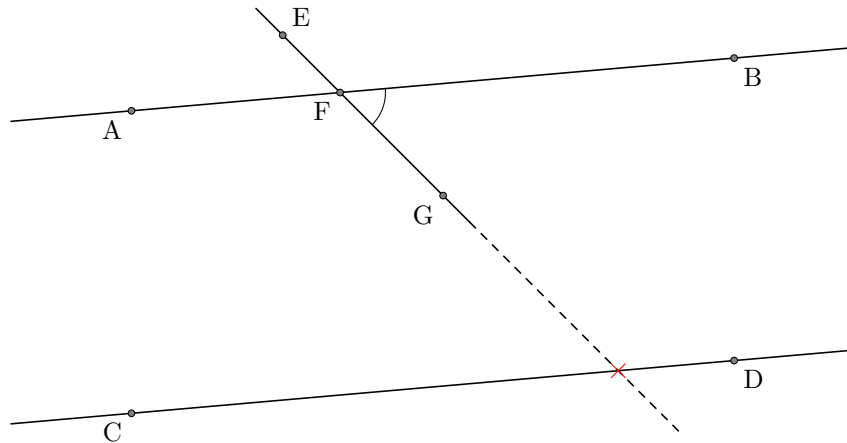


Figura 1.2: Segundo o lema de Proclo, se uma reta EG corta uma reta AB, paralela a CD, então EG também corta CD.

matemáticos perceberam que estavam usando algo fora dos outros quatro postulados para demonstrar o quinto, e enunciaram isso explicitamente, sugerindo postulados alternativos. Por fim, alguns geômetras lançaram mão de técnicas da lógica, como redução ao absurdo, para tentar excluir qualquer possibilidade distinta daquela especificada no quinto postulado. Por um motivo ou por outro, é claro, todas essas tentativas falharam. Aquelas que não continham outros erros lógicos sempre incluíam alguma afirmação equivalente ao resultado que se queria provar.

No time dos que tentaram redefinir o que eram retas paralelas jogou Possidônio, matemático grego do primeiro século antes de Cristo. Euclides havia definido como paralelas as retas que, se prolongadas indefinidamente, nunca se tocam. Possidônio, por outro lado, definiu como paralelas as retas (no mesmo plano) que ‘nunca se aproximam nem se separam’; isto é, todos os segmentos perpendiculares traçados a partir de uma das retas até a outra são congruentes. [26, p. 41] Esta definição confere às retas paralelas uma propriedade que não pode ser demonstrada a partir dos outros postulados. Por isso, a rigor, ela mesma precisa ser considerada um postulado. Como veremos, na geometria hiperbólica as retas paralelas no sentido de Euclides (ou seja, retas que não se tocam) não permanecem a uma distância fixa uma da outra.⁴

Proclo viveu no quinto século da Era Comum, quando a matemática grega já estava em decadência. Ele editou uma versão comentada do primeiro volume dos Elementos muito importante, entre outros motivos, por incluir informações sobre história da matemática não encontradas em nenhuma outra obra que tenha sobrevivido. Nessa edição, Proclo critica uma “demonstração” dada por Ptolomeu e apresenta sua própria, resumida a seguir. [16, pp. 45, 207, 208]

Proclo usa um argumento emprestado de Aristóteles, tomando como axioma que, em um ângulo qualquer, a distância entre seus lados se torna cada vez maior conforme nos afastamos do vértice. Dessa forma, tal distância pode ser maior que qualquer valor finito. Sejam então duas retas paralelas, AB e CD, e seja EG uma reta que corte AB no ponto F, como na Figura 1.2. Para Proclo, a distância entre os lados de $\angle GFB$ vai se tornar cada vez maior, até ultrapassar a distância entre AB e CD. Neste momento, a reta EG intersecta CD.

Tendo “demonstrado” o lema acima, Proclo dá a sua demonstração do quinto postulado: Sejam AB e CD duas retas cortadas por uma terceira, formando os ângulos $\angle BEF$ e $\angle DFE$ tal que a soma desses é menor do que dois ângulos retos. (Veja a Figura 1.3.) Sendo assim, traçamos a reta EH tal que o ângulo $\angle BEH$ seja igual à diferença entre dois retos e a soma de $\angle BEF$ com $\angle DFE$. Neste caso, a reta EF corta as retas EH e CD formando ângulos que, somados, são iguais a dois retos. Por isso, sabemos que as retas EH e CD são paralelas. Pelo lema anterior, a reta AB corta a reta construída EH e, portanto, também corta a reta CD. Concluímos que as retas AB e CD se encontram no lado em que a soma dos ângulos com EF é menor do que dois retos.

Vamos analisar os erros cometidos por Proclo na “demonstração” do seu lema. Ao contrário de Possidônio, o seu argumento não depende de retas paralelas manterem-se a uma distância fixa uma da outra. Mas, implicitamente, Proclo assumiu que a distância entre duas retas paralelas, quando prolongadas indefinidamente, não aumenta tanto a ponto de ser ilimitada. Sem essa suposição, ele não poderia afirmar que

⁴Veja a Atividade 4.2

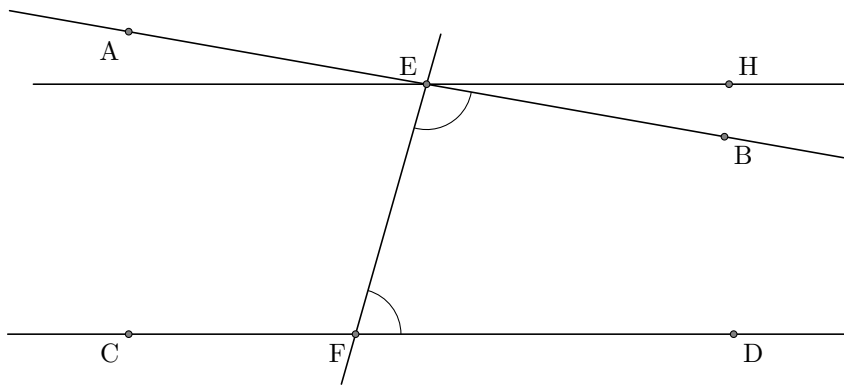


Figura 1.3: Diagrama ilustrando a tentativa de demonstração de Proclo, do quinto século.

a reta EG da Figura 1.2 intersecta a reta CD. E, de fato, essa suposição é falsa na geometria hiperbólica, fato que iremos estudar no Capítulo 4.

Um segundo (e menos sutil) problema com a “demonstração” de Proclo é o uso do axioma de Aristóteles. Se o objetivo de Proclo era demonstrar o quinto postulado a partir dos outros quatro, ele também deveria demonstrar o que assume como axioma usando exclusivamente os outros axiomas e postulados de Euclides. Ao usar o axioma de Aristóteles, a “demonstração” de Proclo torna-se, no máximo, uma sugestão de enunciado alternativo para o quinto postulado. Dito isto, o axioma de Aristóteles não é válido na geometria elíptica. Nesta geometria, simplesmente não é verdade que a distância entre os lados de um ângulo, como o ângulo $\angle GFB$ da Figura 1.2, é ilimitada.

Na época de Proclo, que viveu logo antes do início da Idade Média, a matemática ocidental estava entrando em um prolongado período de decadência. Pouco teria sobrevivido se não fosse pelo monumental esforço dos estudiosos árabes em preservar e traduzir as obras clássicas dos pensadores gregos. Além disso, os matemáticos árabes produziram muito material original. É deles que recebemos as palavras algoritmo, algarismo e álgebra. E, com respeito a geometria, os árabes tinham um fascínio especial pelo quinto postulado de Euclides. Não seria sequer possível, em apenas parte de uma seção, recontar todas as contribuições dos árabes relacionadas ao conceito de paralelismo e ao quinto postulado. Por isso, vamos comentar apenas algumas das ideias que se destacam.

Thābit ibn Qurra viveu durante o nono século em Bagdá, que poderia ser descrita como o centro intelectual do mundo da época. Sendo um dos maiores pensadores de seu tempo, Thābit traduziu diversas obras de matemáticos gregos, tendo inclusive revisado uma tradução anterior dos Elementos. Mas ele também foi um matemático original, e dedicou pelo menos dois trabalhos a demonstrar o quinto postulado de Euclides. [26, pp. 39, 40]

No segundo de seus trabalhos, Thābit tenta justificar o uso de movimento dentro da geometria. Primeiro, ele faz uma crítica a certa demonstração de Euclides sobre congruência de triângulos, argumentando que fica implícito o uso de movimento em um de seus passos. Se essa demonstração era aceita por Euclides, então também deveria ser aceita a técnica que ele estava para introduzir. Argumentando que quando uma figura geométrica se move em linha reta todos os seus pontos se movem em linhas retas e paralelas, Thābit consegue “demonstrar” o quinto postulado. Apesar desse argumento não ser exatamente de natureza geométrica, ele revela uma falha importante nos Elementos. Quando David Hilbert reformulou a geometria euclidiana usando 21 postulados ao invés de apenas cinco, um dos postulados é exatamente essa afirmação sobre congruência de triângulos que Euclides havia tentado demonstrar. [13, p. 44]

Além de antecipar por vários séculos uma das críticas aos Elementos associada ao rigor da matemática moderna, a segunda tentativa de Thābit é duplamente notável por outro motivo. Como parte de sua “demonstração”, ele estudou quadriláteros com certas propriedades especiais. [8, pp. 302, 303] Ainda nesta seção, vamos ver que esses quadriláteros são hoje conhecidos pelos nomes de Saccheri e de Lambert. Levando em conta que Thābit viveu cerca de oito séculos antes de Saccheri, mais uma vez é evidente que suas ideias estavam à frente de seu tempo.

Omar Khayyam, do décimo primeiro século e a quem são atribuídos muitos poemas persas, também se interessou pelo quinto postulado. Sendo um pensador de grande erudição, Khayyam estava muito bem familiarizado tanto com a geometria como com a filosofia gregas. Pelo visto, ele teve acesso a algumas obras de Aristóteles que não sobreviveram até nossos dias. [8, p. 307] Este fato é importante, pois Aristóteles, que viveu antes de Euclides, havia se interessado e escrito sobre o tema, criticando o

tratamento que os matemáticos de sua época davam às retas paralelas. É provável que as críticas de Aristóteles tenham até mesmo influenciado a escolha dos postulados de Euclides. [13, p. 33]

Khayyam primeiro criticou a natureza do quinto postulado, pois, segundo ele, Euclides havia feito questão de demonstrar alguns teoremas que pareciam até mais evidentes que esse postulado. A seguir, Khayyam analisou as tentativas de demonstração de outros árabes, apontando as falhas em suas deduções. Em especial, ele também rejeitou o uso de movimento dentro da geometria. Só então ele apresenta a sua demonstração. Khayyam usou algumas construções que já haviam sido apresentadas por Thābit, e que voltaram a aparecer com Saccheri e Lambert. A sua originalidade reside no fato de que sua tentativa pode ser considerada, de fato, uma demonstração; ao invés de aceitar tacitamente uma afirmação equivalente ao quinto postulado, ele usou outro axioma mais simples, que aparecia em certa obra de Aristóteles. [26, pp. 64, 65] [17, p. 302] Segundo Khayyam, “O Filósofo” havia dito: “Duas retas convergentes se intersectam, e é impossível que retas convergentes divirjam na direção de convergência.” Esta afirmação é, de fato, equivalente ao quinto postulado. [26, pp. 38, 39]

Infelizmente, quando a matemática voltou a florescer na Europa, nem todas as obras escritas em árabe se tornaram imediatamente disponíveis. Alguns matemáticos europeus, trabalhando em tópicos pelos quais os árabes já haviam se interessado, redescobriram diversos resultados. Por isso, a despeito da grande influência árabe sobre as ciências, algumas de suas descobertas não levaram o devido crédito. Apesar disso, sabemos que uma tentativa anteriormente atribuída a al-Tusi⁵, que viveu no século XIII, chegou às mãos de John Wallis, matemático inglês do século XVII. [26, pp. 80, 81] [13, p. 51] A partir daí, o interesse em demonstrar o quinto postulado parece ter sido renovado.

Assim como Khayyam havia feito alguns séculos antes, Wallis baseou sua demonstração em outro axioma mais simples. Dada qualquer figura geométrica, ele postulou que fosse possível construir outra figura semelhante à primeira, mas de tamanho arbitrário. [26, p. 97] Novamente, tal axioma fazia muito sentido, já que resultados envolvendo figuras semelhantes eram conhecidos e amplamente utilizados desde a Grécia Antiga. Todavia, Wallis foi incapaz de demonstrar o quinto postulado usando apenas os outros quatro. Um dos fatos mais simples e ao mesmo tempo intrigante das geometrias não euclidianas é que *qualquer figura geométrica semelhante precisa ser necessariamente congruente*. [15, p. 152]

Já comentamos que o chamado *quadrilátero de Saccheri* havia sido estudado por Thābit; de fato, por vários outros matemáticos. Girolamo Saccheri foi um sacerdote jesuíta que estudou e ensinou filosofia e matemática em universidades italianas no final do século XVII e início do século XVIII. Saccheri teve um grande interesse no método de redução ao absurdo e, pelo visto, foi o primeiro a aplicar essa técnica de demonstração ao quinto postulado. [10, pp. 66, 67] No entanto, nada indica que Saccheri tenha duvidado da veracidade do quinto postulado. Roger Cooke diz que a sua tentativa é ‘um bom exemplo da criatividade que uma pessoa muito inteligente demonstra quando tenta manter uma crença forte’. [8, p. 482]

Saccheri começa demonstrando um resultado elementar sobre quadriláteros que não depende do quinto postulado. Na primeira proposição, ele considera o quadrilátero ABDC onde os ângulos na base AB são congruentes, e os lados opostos AC e BD também são congruentes. Usando semelhança de triângulos, é fácil demonstrar que os ângulos $\angle ACD$ e $\angle BDC$ no topo do quadrilátero também são congruentes.

Sem perder tempo, Saccheri investiga o quadrilátero que seria conhecido pelo seu nome, ilustrado na Figura 1.4. Dessa vez, os lados opostos AC e BD são, além de congruentes, perpendiculares à base AB. Por construção, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABD$ são retos. Saccheri sabia (assim como Thābit e outros) que, se pudesse demonstrar que os ângulos $\angle ACD$ e $\angle BDC$ também são retos, tal resultado implicaria no quinto postulado. Assim, ele passa a demonstrar diversas propriedades desse quadrilátero, usando apenas os primeiros quatro postulados e as proposições dos Elementos que não dependem do quinto.

Saccheri já sabia, pelo resultado anterior, que os ângulos no topo da figura são congruentes. Então ele mostra que, se em um quadrilátero desse tipo um de tais ângulos é agudo, em todos os outros quadriláteros desse tipo no plano tais ângulos serão agudos; da mesma forma, se forem obtusos e se forem retos. A partir daí, ele chama essas possibilidades de hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo obtuso e hipótese do ângulo reto. [27, p. 77] Saccheri também demonstra que, na hipótese do ângulo agudo, a soma dos ângulos internos dos triângulos do plano é menor do que dois retos; na hipótese do ângulo obtuso, é maior do que dois retos; e, como é sabido na geometria euclidiana, na hipótese do ângulo reto é exatamente igual a dois ângulos retos.

Usando a hipótese do ângulo obtuso, Saccheri provou o quinto postulado como enunciado por Euclides, isto é, que duas retas cortadas por uma terceira realmente se encontram no lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Demonstrado o quinto postulado, todos os demais teo-

⁵Não se sabe quem é, de fato, o autor dessa tentativa de demonstração. É provável que tenha sido um dos estudantes de al-Tusi, como seu próprio filho, Sadr al-Din.

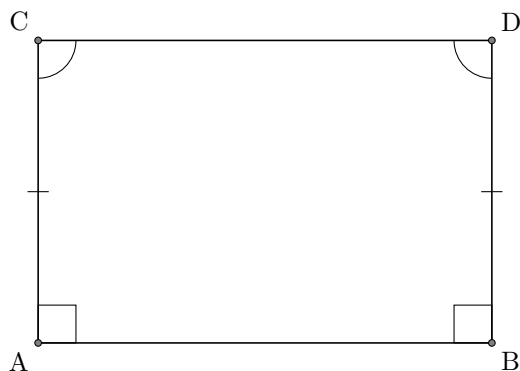


Figura 1.4: O quadrilátero de Saccheri é construído de tal modo que os dois ângulos da base sejam retos.

remas demonstrados por Euclides também deveriam ser verdadeiros na hipótese do ângulo obtuso. Esse resultado é contraditório; por exemplo, não é possível que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer seja, ao mesmo tempo, igual e maior do que dois retos. Assim, usando o método de redução ao absurdo, Saccheri demonstrou a inconsistência da hipótese do ângulo obtuso. [27, p. 93]

Na sua demonstração, Saccheri usa a Proposição 16 dos Elementos, onde Euclides mostra que, em qualquer triângulo, os ângulos externos são maiores do que os ângulos internos não adjacentes. Entretanto, a demonstração dada por Euclides assume que linhas retas são infinitas em comprimento. Mas uma leitura cuidadosa do segundo postulado (veja p. 2) revela uma ambiguidade. É possível interpretar o segundo postulado como declarando que linhas retas não têm limites, sem serem necessariamente infinitas.⁶ Seja como for, a leitura feita pelos geômetras da época de Saccheri era de que linhas retas são, de fato, infinitas em comprimento. [25, pp. 41–42] Assim sendo, a demonstração dada por Saccheri aponta uma real inconsistência entre a geometria dos Elementos e a hipótese do ângulo obtuso. Mas a prova dada por ele não funciona se removida a pressuposição de que retas podem ser estendidas infinitamente. [13, p. 64] De fato, na geometria elíptica as retas não têm comprimento infinito, o que exige a interpretação alternativa do segundo postulado.

Estando satisfeito com o resultado obtido, Saccheri começa a estudar a hipótese do ângulo agudo, novamente em busca de uma contradição. Essa hipótese, entretanto, se mostrou muito mais difícil de quebrar. Na verdade, Saccheri demonstrou uma coleção de teoremas da geometria hiperbólica! Além de mostrar, como já mencionado, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois retos, ele mostrou que, por um ponto fora de uma reta l , passam infinitas retas que não cortam l . Ele também identificou que todas essas retas têm uma reta perpendicular em comum com l , exceto duas. De modo inteligente, ele mostra que essas duas retas são assintóticas a l , ou seja, que se aproximam arbitrariamente de l , mas não se tocam a uma distância finita. [4, pp. 40–42]⁷

Infelizmente para Saccheri, esse é o limite que ele poderia chegar usando exclusivamente métodos sintéticos. Em certo ponto, ele tenta demonstrar que as retas assintóticas mencionadas acima encontram-se em um ponto no infinito, onde finalmente elas teriam uma perpendicular em comum. É junto dessa “demonstração” que Saccheri escreve que a hipótese do ângulo agudo é falsa por ser repugnante à natureza das linhas retas. [27, p. 155] Mas as referências que Saccheri faz a pontos no infinito carecem de significado preciso, e essa falta de precisão, em último caso, levou-o a cometer erros matemáticos. Por exemplo, ele atribui a esses pontos e retas no infinito as mesmas propriedades de pontos e retas no plano. [26, p. 98] [13, p. 68] [8, p. 484] [25, p. 45] Sobre esse final anticlimático das investigações de Saccheri, Marvin Greenberg escreveu: ‘É como se alguém encontrasse um diamante raro, mas, incapaz de acreditar no que vê, declarasse que é vidro.’ [15, p. 155]

Apesar do trabalho de Saccheri não ter tido grande impacto na comunidade matemática da época, outro matemático importante pelo visto teve acesso a sua obra e construiu sobre ela. [25, pp. 49, 53] Johann Lambert, assim como Euler, nasceu na Suíça e viveu no século XVIII. Usando os métodos de Saccheri, ele também escreveu um tratado sobre a teoria das paralelas, que foi publicado postumamente. Nesse tratado, Lambert, como Saccheri, faz um estudo minucioso de certo quadrilátero que hoje leva seu nome. O quadrilátero de Lambert é construído de tal modo que três de seus ângulos são retos. A partir

⁶Por enquanto, para dar um exemplo dentro da geometria euclidiana, pense em como circunferências não tem um começo ou fim, em contraste com segmentos de reta. Entretanto, assim como segmentos de reta, circunferências não são, evidentemente, infinitas em comprimento.

⁷Veja a Atividade 4.2

daí, Lambert desenvolve as consequências do quarto ângulo ser agudo, reto ou obtuso. Veja a Figura 1.5.

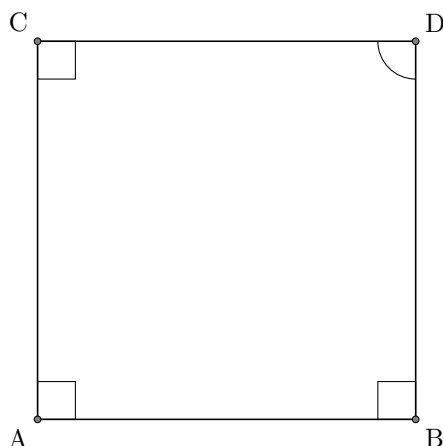


Figura 1.5: Por construção, um quadrilátero de Lambert possui três ângulos retos.

Embora Saccheri tivesse encontrado algumas consequências importantes da negação do quinto postulado, Lambert foi capaz de chegar ainda mais fundo. Por exemplo, ele também demonstrou que cada uma das hipóteses sobre o quarto ângulo corresponde a todos os triângulos do plano terem a soma de seus ângulos internos menor do que, igual, ou maior do que dois retos. Mas, adicionalmente, ele percebeu que a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e a soma de dois retos é proporcional à área deste triângulo. [10, p. 69] Quer dizer, dentro da hipótese do quarto ângulo ser agudo ou obtuso, a soma dos ângulos internos de triângulos de área muito pequena é bem próxima a dois retos. No entanto, quanto maior a área do triângulo, mais a soma de seus ângulos internos se distancia de dois retos.⁸

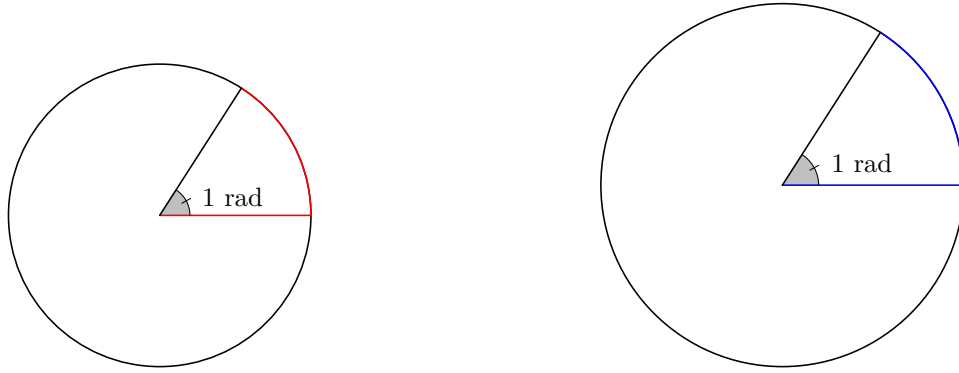
Este fato demonstrado por Lambert tem grandes consequências sobre as geometrias não euclidianas. Wallis havia demonstrado anteriormente que a existência de figuras semelhantes, mas não congruentes, é suficiente para demonstrar o quinto postulado de Euclides. Agora é possível entender exatamente a relação entre as duas ideias. Na hipótese do ângulo reto, todos os triângulos tem seus ângulos internos somados equivalentes a dois retos, não importa sua área. Em contraste, dentro das outras hipóteses os ângulos internos e a área de um triângulo estão intimamente relacionados. Se dois triângulos são semelhantes, a soma de seus ângulos internos é a mesma. Mas, nesse caso, a medida de sua área também é a mesma. Por isso, triângulos (e outras figuras) semelhantes são obrigatoriamente congruentes.

Prosseguindo com as implicações desses resultados temos um fato interessantíssimo sobre unidades de medida para comprimento. Na geometria euclidiana, podemos definir unidades de medida absolutas para ângulos. Por exemplo, um grau corresponde a uma parte entre 360 de uma circunferência qualquer, e um radiano corresponde a um arco de circunferência com a mesma medida de seu raio. Mas a medida de um grau ou de um radiano não depende da circunferência em questão; dois ângulos, construídos a partir de circunferências distintas, de tal forma que suas medidas sejam iguais a 1 rad são, de fato, congruentes. (Veja a Figura 1.6.) No entanto, não existe maneira similar de definir uma unidade de medida de comprimento absoluta. Para efetuar qualquer medida de comprimento na geometria euclidiana é necessário fazer uma comparação com algum segmento cuja medida é conhecida. Em último caso, é necessário escolher algum segmento como referência, e toda medida será feita, direta ou indiretamente, em comparação a esse segmento. [13, p. 73]

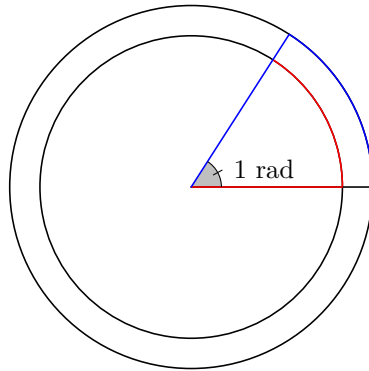
Entretanto, nas geometrias não euclidianas, como mencionado, *não* é possível reproduzir uma figura do plano em escala, de tal forma que a cópia seja semelhante, mas de “tamanho diferente”. Consideremos, por exemplo, um triângulo equilátero, que por conseguinte também é equiângulo. Para qualquer que seja o valor de seus ângulos, e existe uma unidade de medida absoluta para medir ângulos, admite-se um único valor para o comprimento de seus lados. Usando este fato, é possível associar de forma biunívoca os valores de ângulos (no intervalo entre zero e $\frac{\pi}{3}$) e comprimentos, efetivamente definindo uma unidade de medida absoluta também para comprimentos. [22, p. 3]

Tratando especificamente da hipótese do ângulo obtuso, Lambert demonstrou que duas retas perpendiculares a uma terceira se cruzam. [4, pp. 45, 46] Ao contrário de Saccheri, ele não usou o teorema do ângulo externo. Sendo assim, a refutação de Lambert é um pouco mais provocadora, pois aponta para o papel desempenhado pelo Segundo Postulado. [25, p. 44] Sagazmente, Lambert observou que essa

⁸Veja a Atividade 3.3



(a) O ângulo marcado na figura é construído de tal forma que o comprimento do arco em vermelho e do raio, também em vermelho, é o mesmo. (b) O mesmo procedimento da subfigura (a) é usado para construir o ângulo marcado acima, mas o círculo nesta subfigura é maior.



(c) Esta subfigura sobrepõem as partes (a) e (b), ilustrando que os ângulos marcados anteriormente são, de fato, congruentes e têm a mesma medida.

Figura 1.6: As figuras ilustram a construção de um ângulo cuja medida é 1 radiano.

hipótese se torna verdadeira sobre a superfície de uma esfera, caso se considerem seus círculos máximos como retas. [26, p. 100] Ademais, Lambert já conhecia o seguinte teorema provado por Albert Girard: Dado um triângulo ABC, de ângulos internos α , β e γ , construído sobre uma esfera de raio r , a área desse triângulo é igual a $r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$. Então, como já mencionado, Lambert provou⁹ que, na hipótese do ângulo agudo, a área de um triângulo é proporcional a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. [13, p. 74] Note-se que, quando tomamos um valor imaginário ir para o raio, a fórmula obtida por Girard torna-se:

$$\begin{aligned} (ir)^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi) &= \\ &= -r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= r^2[\pi - (\alpha + \beta + \gamma)] \end{aligned}$$

É nessa parte do manuscrito que Lambert, motivado pelas muitas analogias entre a segunda e a terceira hipótese, conjecturou que a hipótese do ângulo agudo poderia ser observada sobre algum tipo de esfera de raio imaginário.

Por que Lambert não fez questão de publicar esse importante tratado em vida? A verdade é que, provavelmente, ele deve ter ficado decepcionado. [14, p. 85] Como virtualmente todos os matemáticos da época, ele provavelmente acreditava que a única hipótese correta para a geometria plana era aquela do quarto ângulo reto. Sendo incapaz de provar o quinto postulado, ele deve ter pensado que havia fracassado, sem se dar conta de quão valiosas eram aquelas descobertas. De fato, nas últimas seções de seu manuscrito, Lambert esboça várias demonstrações da inconsistência do quinto postulado, mas reconhece que todas as tentativas são inconclusivas. A última seção foi deixada incompleta. [22, p. 21]

⁹Sendo um pouco pedante, Lambert provou um resultado mais fraco. Depois disso, ele enunciou que há proporcionalidade, dizendo que era fácil de demonstrar, mas a prova não é dada em seu manuscrito.

1.4 Um mundo inteiramente novo

Os dois mil anos de história da matemática que condensamos neste capítulo não renderam como fruto uma demonstração para o quinto postulado de Euclides. Isso não quer dizer, todavia, que esses esforços tenham sido em vão! Eles revelaram como várias propriedades da geometria euclidiana dependem desse postulado, incluindo, como vimos, a existência de figuras semelhantes, mas não congruentes. Ademais, mesmo com a introdução da técnica de redução ao absurdo no estudo de retas paralelas, nenhum matemático pudera encontrar uma contradição ao se admitir uma alternativa que negasse o quinto postulado. Por isso, era questão de tempo até que a possibilidade de outras geometrias, consistentes em si mesmas, mas com propriedades diferentes da euclidiana, pudesse entrar em discussão. Aqueles que geralmente levam o crédito pela descoberta dessas novas geometrias são o alemão Carl F. Gauss, o húngaro Bolyai Janós¹⁰ e o russo Nikolai Lobachevsky.

Vamos começar discutindo a participação de Gauss (1777–1855), por ter sido provavelmente o primeiro e ainda assim não ter publicado, na prática, nada sobre o assunto. Gauss é amplamente considerado um dos maiores nomes da matemática em toda a história. Tendo contribuído com tantos ramos da pesquisa matemática, e até mesmo fundado alguns, era de se esperar que ele também se interessasse por geometria, incluindo a teoria das paralelas. Ao que indicam suas cartas, reunidas e publicadas após sua morte, Gauss havia se debruçado por um bom tempo sobre o quinto postulado de Euclides com a intenção de produzir uma demonstração rigorosa. Em suas tentativas, como havia acontecido com tantos outros, ao invés de encontrar uma demonstração, encontrou diversos resultados geométricos contraintuitivos. A mudança de atitude de Gauss é refletida em suas correspondências. Da esperança de encontrar uma demonstração, ele passa a aceitar a existência de uma outra geometria independente do quinto postulado. [26, pp. 214, 215] [4, pp. 64–67] Se tivesse publicado suas descobertas, na lista (de todo modo enorme) de suas façanhas matemáticas estaria também a criação das geometrias não euclidianas. Ressalte-se, porém, que Gauss foi grande contribuidor da geometria diferencial, campo que acabaria se tornando tão importante para o estudo das novas geometrias.

Em seus dias de estudante, Gauss se tornou muito amigo de um certo Bolyai Farkas¹¹, com quem manteve contato pelo restante de sua vida. O filho desse amigo, Bolyai Janós (1802–1860), é o segundo personagem desta seção. Em certo ponto, Bolyai considerou uma definição alternativa de retas paralelas. Para sua surpresa, essa definição alternativa rendeu uma geometria diferente, onde não valia o quinto postulado de Euclides. Abismado com aquilo com que havia se deparado, ele escreveu a seu pai dizendo ter criado ‘um novo e diferente mundo a partir do nada’. [14, p. 103]

Em 1832, Bolyai Farkas publicou uma obra sobre os fundamentos da matemática. Nessa publicação, incluiu como apêndice a criação de seu filho Janós, com material concebido até uma década antes. O longo título em latim desse apêndice ficou conhecido simplesmente como o *Appendix* de Bolyai. Em menos de 30 páginas, Bolyai Janós delineou as bases da geometria hiperbólica. A profundidade das ideias contidas nesse breve trabalho não pode ser ignorada, e explicar toda a matemática contida ali já foge do escopo desta seção. Vamos destacar algumas ideias principais.

A definição alternativa de retas paralelas usada por Bolyai aparece logo na abertura do Appendix. [3, p. 75] Ele considera como paralelas as semirretas AM e BN, no mesmo plano, satisfazendo duas condições: BN não intersecta AM; BP intersecta AM para todo ponto P no interior do ângulo $\angle ABN$. (Veja a Figura 1.7.) Partindo dessa definição, Bolyai desenvolve uma trigonometria consistente. A seguir, ele deduz muitos teoremas importantes dessa geometria, como os que já consideramos sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, a relação entre essa soma e a área do triângulo, e a dependência entre ângulos e comprimentos. Mas existe um abismo de diferença conceitual entre Bolyai e os outros matemáticos que consideramos até aqui (com exceção de Gauss). Não há qualquer tentativa de demonstrar o quinto postulado, nem é expressa qualquer esperança nesse sentido. Bolyai não via defeito nessa nova geometria. De fato, ele reconhece não saber se a realidade física é euclidiana, mas afirma que o seu sistema geométrico é logicamente válido independente disso. [3, p. 108]

Uma das inovações de Bolyai está na classificação explícita que ele faz entre os teoremas que são válidos apenas na geometria euclidiana, apenas na geometria hiperbólica e nas duas ao mesmo tempo. O seu interesse estava principalmente nessa última classe de resultados, a que ele se referia como “ciência absoluta do espaço”. [6, p. 29] Hoje em dia, o estudo dos teoremas geométricos independentes do quinto postulado é conhecido como *geometria neutra*. Bolyai mostrou que toda a trigonometria esférica é parte da geometria neutra, um resultado que possivelmente lhe causou espanto. [14, p. 109] Ainda sobre a trigonometria do plano hiperbólico, Bolyai observou que, quando o valor de certa constante tende ao

¹⁰Em húngaro, o sobrenome vem primeiro.

¹¹Esse Farkas também era conhecido como Wolfgang, e alguns livros de história da matemática o chamam por esse nome.

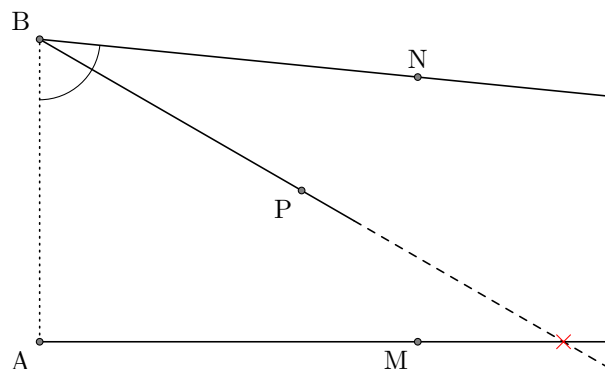


Figura 1.7: Segundo a definição usada por Bolyai, a semirreta BN é paralela a AM se elas não se cortam e se, para todo ponto P no interior do ângulo $\angle ABN$, BP corta AM.

infinito, suas fórmulas coincidem com as da trigonometria euclidiana. [3, p. 107] [17, p. 845] Como consequência, regiões pequenas do espaço hiperbólico têm uma geometria aproximadamente euclidiana. [14, p. 111]

Antes de prosseguirmos em comentar o impacto dessa publicação, há mais dois resultados interessantíssimos encontrados no Appendix (na verdade, há uma grande porção deles). Bolyai chegou muito perto de criar um modelo para a geometria hiperbólica dentro de uma porção do plano, mas infelizmente não deu esse passo crucial. [14, p. 113] O que ele de fato apresenta, no entanto, é impressionante. Partindo de uma geometria espacial onde o quinto postulado não vale, ele define uma certa superfície, define certas linhas sobre essa superfície, e então mostra que essas linhas na superfície, se consideradas como retas no plano, são um modelo da geometria euclidiana plana dentro de um espaço não euclidiano. [14, pp. 105–107] O segundo resultado que vamos comentar aqui tem a ver com o clássico problema grego de construir um quadrado de área igual a um círculo dado usando apenas régua e compasso. Suspeitava-se que esse velho problema não possuía solução. De fato, haveria de ser demonstrado posteriormente no mesmo século que, na geometria euclidiana, não é possível dar tal construção. Mas Bolyai foi capaz de fazê-lo na geometria hiperbólica. [4, p. 110]

Desafortunadamente, a publicação de Bolyai praticamente não teve repercussão, apesar de sua grande originalidade e da popularidade da discussão sobre as paralelas. A verdade é que, naquela época, ainda eram poucas as pessoas preparadas para compreender suas ideias e aceitar a existência de outras geometrias. [17, p. 845] É claro que Gauss poderia ter contribuído se tivesse ido a público defender esta linha de pesquisa em que ele mesmo havia trabalhado. Mas suas ações, pelo visto, tiveram o efeito contrário. Segundo se relata, Farkas havia lhe enviado uma cópia do trabalho de seu filho. Em uma carta a outro de seus correspondentes, Gauss descreve Janós como um “gênio de primeira classe”. Mas a Farkas, ele escreve dizendo que elogiar o trabalho dele seria elogiar a si mesmo, pois ele já havia seguido por aquele caminho e chegado às mesmas conclusões. Ainda que Gauss expressasse sua admiração (não por qualquer originalidade, mas por outra pessoa ter também chegado a seus resultados) e aprovasse a publicação, Janós desanimou e nunca mais publicou sobre o tema. [14, p. 131]

Enquanto isso, Lobachevsky (1792–1856), trabalhando em Kazan, na Rússia, também teve a visão matemática para vislumbrar esse novo mundo. Embora tenha sido, ao que tudo indica, o último dos três a desvendar a nova geometria, ele foi o primeiro a publicar, e continuou desenvolvendo, publicando e lutando para que suas ideias fossem aceitas até o final de sua carreira acadêmica. Em 1826, Lobachevsky deu uma palestra com o tema *Sobre os princípios da geometria, com uma rigorosa demonstração da teorias das paralelas*. Não é possível saber com certeza o conteúdo dessa palestra, pois suas notas foram perdidas com o tempo. Apesar disso, é possível inferir que a “demonstração rigorosa” do tema não era uma demonstração do quinto postulado; provavelmente se refere, na verdade, à tese de que procurar tal demonstração era fútil, pois a rejeição do postulado resultava em outra geometria igualmente válida. Uma versão estendida dessas notas, escrita em russo, foi publicada nos anos de 1829–1830 em um periódico local, intitulada apenas *Sobre os princípios da geometria*. [5, p. 365] [17, p. 841] [14, p. 120]

As semelhanças entre a obra de Lobachevsky e Bolyai são imensas. Por exemplo, Lobachevsky usa basicamente a mesma definição de Bolyai para retas paralelas; depois, estuda a geometria espacial resultante dessa definição, encontra a mesma superfície estudada por Bolyai, e prova que tal superfície serve de modelo da geometria euclidiana plana dentro da geometria espacial hiperbólica. Lobachevsky também mostra que as fórmulas da geometria esférica continuam valendo sobre as esferas dessa nova geometria

espacial e, portanto, são independentes do quinto postulado. [15, pp. 184, 185] Nota-se, é claro, algumas diferenças no estilo e nos interesses de cada matemático. Se Bolyai tinha tentado desenvolver sua “ciência absoluta do espaço”, com o máximo de teoremas válidos em ambas as geometrias, Lobachevsky estava mais interessado nos teoremas exclusivos da geometria hiperbólica. Em contraste com as 28 páginas do apêndice de Bolyai, apenas o primeiro artigo de Lobachevsky já se prolonga por mais de 60 páginas. Ao invés da notação abreviada do primeiro, ele dá nomes que considera apropriados aos objetos geométricos que vai descobrindo. Ainda outra contribuição de Lobachevsky está na interpretação de algumas integrais como a área de figuras simples dentro da geometria hiperbólica. [14, p. 120] [17, pp. 488, 489]

Como consequência de seu trabalho, Lobachevsky apresenta a possibilidade de que a melhor geometria para descrever o universo não seja euclidiana. Para verificar qual delas seria mais apropriada, ele tenta medir a soma dos ângulos de um triângulo de magnitude astronômica, usando dados disponíveis de estrelas distantes e o movimento da Terra ao redor do Sol. Entretanto, a diferença encontrada era tão pequena que estava dentro do erro de medição dos aparelhos. [13, pp. 122, 123] [14, pp. 122, 123] [8, p. 488] [17, p. 845] Todavia, Lobachevsky mostra em sua obra que, para triângulos pequenos, a geometria hiperbólica se aproxima muito da euclidiana; isto é, a soma dos ângulos internos de um triângulo é muito próxima de π , e as duas paralelas a uma reta por um certo ponto praticamente coincidem. Dependendo da escala do universo, o triângulo medido seria pequeno demais em comparação com aquele onde se pudesse medir os efeitos hiperbólicos. [19, pp. 44, 45]

Infelizmente, assim como acontecia com Bolyai, Lobachevsky quase não foi reconhecido em vida. Dentro da Rússia, seu trabalho passou despercebido ou foi cruelmente ridicularizado. Tentando ganhar mais projeção dentro da comunidade matemática, Lobachevsky publicou um tratado em alemão em 1840, e publicaria ainda outro em francês em 1855, o ano anterior ao de sua morte. [26, pp. 208–210] A estratégia teve um pequeno sucesso na medida em que o tratado de 1840 chegou até às mãos de Gauss. Novamente surpreso que uma terceira pessoa houvesse chegado àqueles resultados, Gauss se esforça para encontrar e ler os artigos originais em russo. Apesar de afirmar, como havia feito com Bolyai, que nada ali era novo para ele mesmo, por sua recomendação Lobachevsky foi eleito membro correspondente da Academia de Ciências de Göttingen. É triste que, ainda assim, Lobachevsky não tenha sido levado a sério nem mesmo em seu país natal. Após deixar a posição de reitor em Kazan, passou seus últimos dias em condições difíceis, decorrentes de problemas pessoais. Hoje a geometria hiperbólica é muitas vezes chamada por seu nome. [14, pp. 132–134]

A razão dos trabalhos tão ricos e inovadores de Bolyai e Lobachevsky não terem chamado atenção em seus dias pode explicar por que Gauss estava tão relutante em publicar suas descobertas, que alega ter deduzido primeiro. O filósofo Immanuel Kant havia argumentado em sua *Crítica da Razão Pura* que a geometria era um conhecimento que temos *a priori*, algo inato ao ser humano e independente de nossas experiências. Obviamente que a postura dos três matemáticos entra em franca contradição com uma das mais influentes e respeitadas obras da história da filosofia. As cartas de Gauss revelam que ele tinha grande consciência da oposição que enfrentaria caso publicasse. [26, pp. 208, 210, 215] [4, p. 92] [15, pp. 182, 184]

Outro motivo mais simples está nas dificuldades de comunicação da época. Gauss, é claro, não trouxe suas ideias à luz do dia. Bolyai e Lobachevsky, os que foram a público, o fizeram em relativo isolamento, longe dos grandes centros acadêmicos do mundo da época. Bolyai, por um lado, desistiu após sua única publicação; e Lobachevsky, por outro lado, escreveu a maior parte de sua obra em russo em revistas de circulação limitada. O fato de que a publicação póstuma de diários, notas e correspondências de Gauss, que elogiavam diretamente Bolyai e Lobachevsky, gerou imediatamente interesse considerável em seus trabalhos mostra que a natureza desconhecida desses matemáticos contribuiu para que suas obras passassem despercebidas. [14, pp. 217, 229] [4, p. 121] [10, p. 78] [6, pp. 37, 38]

Há ainda um terceiro motivo: nem Lobachevsky, nem Bolyai, apresentaram um modelo para a geometria hiperbólica dentro da geometria euclidiana. Sem um modelo, os resultados contraintuitivos da nova geometria eram de difícil visualização. Não só isso, mas nada garantia que uma inconsistência não seria encontrada com maiores desenvolvimentos dessa geometria. [17, p. 845] [10, pp. 78, 79]

Demorou algum tempo até que o trabalho desses matemáticos pudesse ser reconhecido. Nesse meio tempo, a geometria diferencial despontava como um campo de pesquisa muito produtivo. Gauss havia sido pioneiro em demonstrar uma série de resultados sobre superfícies de curvatura constante. Então outro professor de Göttingen, Bernhard Riemann, estendeu e generalizou muitas das ideias de Gauss. Com as generalizações que ele proveu, o estudo axiomático da geometria no estilo de Euclides perdeu relevância. Havendo uma maneira de medir distâncias, existe uma geometria em qualquer superfície que satisfaça alguns requisitos básicos. [17, pp. 846, 847] [8, p. 492]

Baseando-se nos estudos de Gauss, o matemático italiano Eugenio Beltrami foi capaz de prover o

primeiro modelo da geometria hiperbólica dentro da geometria euclidiana. Esse modelo leva hoje o nome de Klein (algumas vezes, Beltrami-Klein), pois Felix Klein desenvolveu mais a fundo as suas conexões com a geometria projetiva. De fato, em um dos trabalhos de Klein as geometrias não euclidianas são chamadas pela primeira vez de hiperbólica e elíptica, dependendo do sinal de sua curvatura. [29, pp. 3, 63, 64] Quando o trabalho de Riemann foi finalmente publicado dois anos após sua morte, Beltrami imediatamente submeteu mais dois modelos, um em um disco (mas com uma nova maneira de representar retas) e outro em um semiplano. [21, p. 11] Não se sabe com certeza se Poincaré teve ou não acesso ao trabalho de Beltrami, mas ele fez um estudo muito profundo desses modelos e encontrou neles aplicações originais, que conectaram as geometrias não euclidianas a outras áreas da matemática. Até certo ponto, é pela importância que Poincaré conferiu a esses modelos que eles acabaram levando seu nome. [29, pp. 113, 114] [30, p. 17] [14, pp. 285–287]

Apesar das razões apresentadas no parágrafo anterior, é realmente uma injustiça que o nome de Beltrami seja pouco mencionado junto aos modelos que ele foi capaz de conceber. [29, p. 35] Esses modelos resolvem definitivamente a questão do quinto postulado, pois servem como demonstração de que este era independente dos demais; e, para qualquer contradição encontrada na geometria hiperbólica, teria necessariamente de haver uma equivalente na geometria euclidiana. [17, p. 851] Adicionalmente, os modelos de Beltrami possuem uma característica em comum: eles representam todo o plano hiperbólico dentro de uma região do plano euclidiano. A fronteira que separa essa região do restante do plano é essencial para o estudo e visualização de propriedades importantes da geometria hiperbólica.¹²

No próximo capítulo, vamos estudar algumas definições e teoremas da geometria euclidiana. Com essas ferramentas em mão, estaremos prontos para considerar mais de perto o Disco de Poincaré.

¹²Veja o que são *pontos ideais* na seção 3.2.

Capítulo 2

A geometria de Euclides

Apesar das discussões científicas e filosóficas sobre em qual geometria vivemos, é inegável que, como seres humanos, nós damos uma interpretação euclidiana para nosso mundo, isto é, nossas experiências diárias. No próximo capítulo, nós vamos construir um modelo de geometria hiperbólica a partir da geometria euclidiana. Esse modelo vai nos permitir visualizar a nova geometria.

Para construir esse modelo, no entanto, nós precisamos de algumas definições e teoremas da geometria de Euclides. Esses resultados são interessantes em si mesmos! Este capítulo foi escrito com o intuito não apenas de fundar a base para o que virá a seguir, mas de ser uma chance de ver ou rever conceitos de geometria muito importantes. Vamos começar com uma definição e demonstração essenciais para as construções subsequentes. Depois, vamos ver o que é inversão em relação a um círculo e o que são potências de pontos. Por último, o teorema no final do capítulo é fundamental para a consistência do modelo do Disco de Poincaré, que é o destino desse passeio matemático.

2.1 Ângulos entre circunferências

Para construir algumas figuras geométricas que usaremos com frequência, precisamos dar uma definição para ângulo entre circunferências. Consideremos duas circunferências no plano euclidiano que se intersectam em exatamente dois pontos. Tomemos as tangentes dessas circunferências em um dos pontos de intersecção. O ângulo entre as circunferências será definido como o ângulo entre essas retas tangentes. Dizemos que as duas circunferências são perpendiculares, ou ortogonais, quando essas tangentes cruzam-se em um ângulo reto. A Figura 2.1 ilustra um caso em que as circunferências são ortogonais e um caso em que as circunferências não são ortogonais.

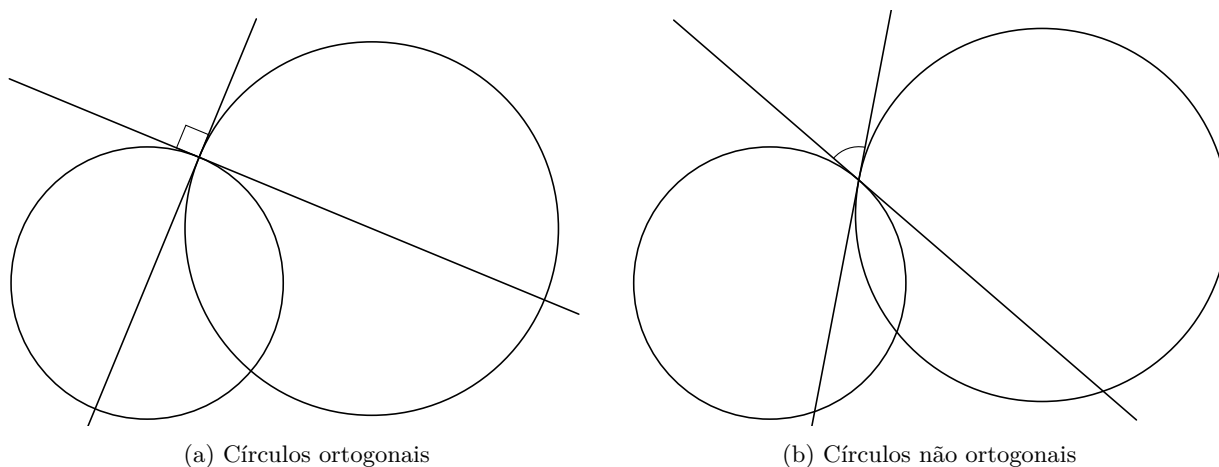
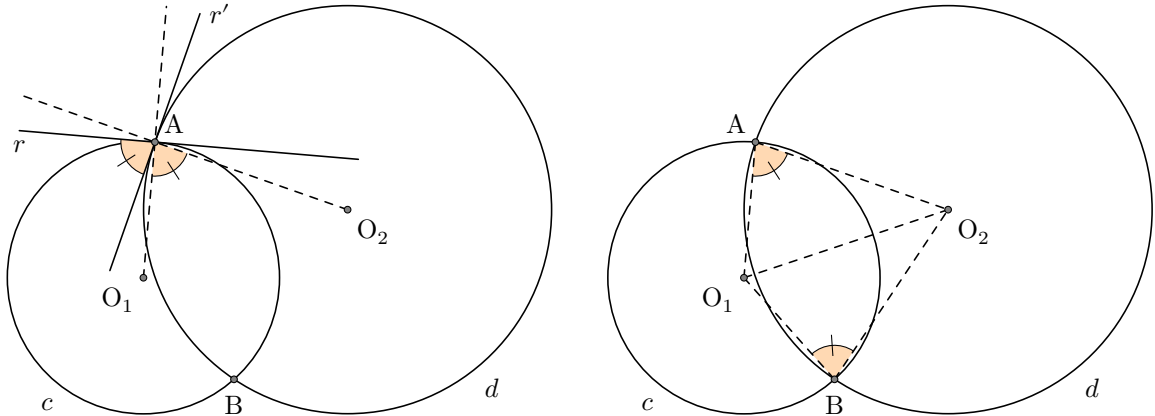


Figura 2.1

Nós acabamos de definir o ângulo entre circunferências que se intersectam em dois pontos distintos. Mas a definição só faz sentido se o ângulo entre as tangentes em um ponto de intersecção for congruente ao ângulo entre as tangentes no outro ponto de intersecção. De outro modo, haveriam dois valores de ângulos associados a um par de circunferências que se intersectam!

Para demonstrar que de fato são congruentes, vamos usar um fato conhecido da geometria euclidiana: a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Sendo assim, sejam c e d duas circunferências, de centros O_1 e O_2 , que se intersectam nos pontos A e B . Vamos chamar de r a reta tangente a c no ponto A , e r' a reta tangente a d também no ponto A . Como sabemos, o segmento O_1A , que é raio de c , é perpendicular à reta r . Pelo mesmo motivo, o segmento O_2A , raio de d , é perpendicular à reta r' . Assim, um dos ângulos formados pelas retas r e r' é congruente ao ângulo $\angle O_1AO_2$. Veja a Figura 2.2a.



(a) O ângulo $\angle O_1AO_2$ é congruente ao ângulo entre as tangentes às circunferências.

(b) $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O_1BO_2$

Figura 2.2

Pelo que foi considerado acima, para demonstrar que o ângulo entre as tangentes no ponto B será congruente ao ângulo entre as tangentes no ponto A , só precisamos demonstrar que os ângulos $\angle O_1AO_2$ e $\angle O_1BO_2$ são congruentes. Consideremos os triângulos $\triangle O_1AO_2$ e $\triangle O_1BO_2$. Como O_1A e O_1B são raios da mesma circunferência, $O_1A \equiv O_1B$. Da mesma forma, $O_2A \equiv O_2B$. Além disso, os dois triângulos têm o lado O_1O_2 em comum. Percebemos que, pelo caso LLL, os triângulos em questão são congruentes. Desse fato decorre que $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O_1BO_2$. Veja a Figura 2.2b.

Como corolário, duas circunferências são ortogonais se, e somente se, o ângulo formado pelos seus centros, com vértice em um dos pontos de intersecção, é reto.

2.2 Potência de pontos

Em 1826, o matemático Jakob Steiner publicou alguns teoremas geométricos muito elegantes. Por exemplo, Steiner percebeu que, dado um círculo e um ponto P no mesmo plano, se traçarmos uma reta qualquer que passe por P e intersekte o círculo em dois pontos Q e R , o valor de $PQ \times PR$ não depende da reta em questão, apenas da posição do ponto P em relação ao círculo! Steiner usou esse fato para definir a potência de um ponto em relação a um círculo, como veremos agora.

Seja P um ponto externo a uma dada circunferência. A partir do ponto P , traçamos duas retas que cortam a circunferência nos pontos Q e R , e S e T . Veja a Figura 2.3a. Consideremos os triângulos $\triangle PQT$ e $\triangle PSR$. Os dois têm o ângulo $\angle QPT = \angle SPR$ em comum. Além disso, os ângulos $\angle PRS$ e $\angle PTQ$ estão inscritos na circunferência. Estes últimos precisam ser congruentes, pois ambos medem metade do arco \widehat{QS} . Desses fatos, concluímos que os triângulos em questão são semelhantes, pois têm dois pares de ângulos congruentes.

Do fato de serem semelhantes, tiramos a seguinte relação:

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{PS}{PR}$$

que pode ser reescrita como:

$$PQ \times PR = PS \times PT.$$

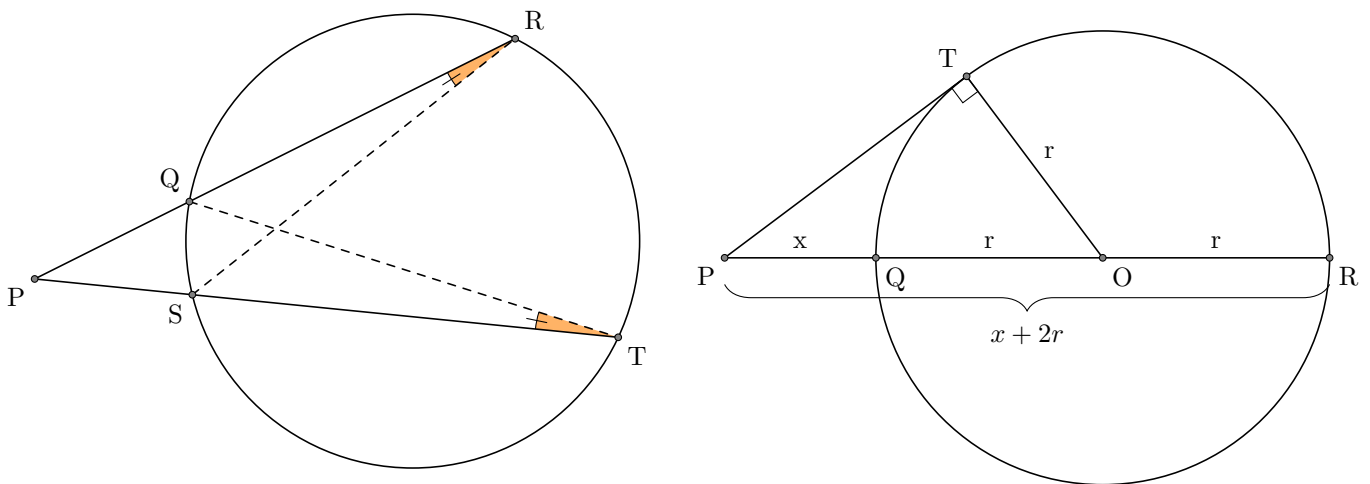
Como PQ e PS são retas quaisquer que cortam a mesma circunferência, o resultado segue para um ponto P exterior.

Ainda com um ponto P exterior ao círculo, convém considerarmos o caso limite onde a reta passando por P é tangente ao círculo no ponto T . Digamos que o círculo tenha centro O . Vamos traçar a reta PO e marcar os pontos Q e R nas intersecções com a circunferência. Veja a Figura 2.3b. Finalmente, vamos chamar o comprimento do segmento PQ de x . Se r é o raio do círculo, o comprimento de PR será $x + 2r$.

Como é sabido, a reta PT , por ser tangente à circunferência, é perpendicular ao raio OT . Assim, o triângulo $\triangle PTO$ é retângulo em T . Pelo Teorema de Pitágoras, $PO^2 = PT^2 + OT^2$. Podemos manipular esta equação como segue:

$$\begin{aligned}(x + r)^2 &= PT^2 + r^2 \\ PT^2 &= x^2 + 2xr = x(x + 2r) \\ PT^2 &= PQ \times PR.\end{aligned}$$

Portanto, no caso limite da reta passando por P ser tangente ao círculo em T , o valor de PT^2 será igual ao de $PQ \times PR$.



(a) Steiner demonstrou que $PQ \times PR = PS \times PT$.

(b) No caso limite, onde PT é tangente ao círculo, $PT^2 = PQ \times PR$.

Figura 2.3

Vamos definir que a potência do ponto P em relação a um círculo c , com P exterior a c , será o valor de PT^2 , onde PT é uma reta tangente a c no ponto T . Para pontos sobre c , definimos que sua potência é zero. É possível ampliar essa definição ainda mais para incluir pontos no interior de uma circunferência. Mas, como não faremos uso deste resultado, vamos omiti-lo. Na próxima seção, veremos outra definição que será proeminente neste trabalho.

2.3 Inversão em relação a um círculo

Uma *transformação geométrica*, dito de forma simples, transforma uma figura geométrica em outra. Ou, sendo mais rigorosos na linguagem, uma transformação geométrica é uma função bijetiva que associa dois conjuntos de pontos. Algumas transformações muito conhecidas são a translação, a reflexão em relação a uma reta e a rotação em torno de um ponto. Nesta seção, vamos definir o que é inversão em relação a um círculo, uma transformação que associa cada ponto no interior de um disco a um ponto em seu exterior de forma biunívoca.

Seja c um círculo de centro O e raio r , e P um ponto diferente de O no mesmo plano. Por definição, o ponto P' , inverso de P em relação a c , é um ponto sobre a semirreta OP tal que:

$$OP \times OP' = r^2.$$

Vamos apresentar uma construção clássica do inverso de um ponto no interior de um círculo. Novamente, consideremos um ponto P no interior de um círculo c , de centro O e raio r , com P distinto de O . Primeiro traçamos a semirreta OP , e então erguemos uma perpendicular à ela pelo ponto P . Na intersecção desta perpendicular com o círculo c , marcamos o ponto Q . Agora, passando por Q , traçamos

uma tangente a c . Chamaremos de P' a intersecção dessa reta tangente com a semirreta OP . (Figura 2.4.) Vejamos por que P' tem de ser inverso de P . Pelo modo como construímos os pontos P' e Q , os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OQP'$ são ambos retângulos, com o ângulo $\angle POQ$ em comum. Por isso, sabemos que $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$. Além disso, $|OQ| = r$. Desses fatos, tiramos que:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OP'}$$

$$OP \times OP' = OQ \times OQ$$

$$OP \times OP' = r^2.$$

Por definição, segue que o ponto P' é o inverso de P em relação ao círculo c , como queríamos mostrar. Para construir o inverso de um ponto exterior ao círculo, seguimos o mesmo caminho, apenas invertendo a ordem de alguns passos. É evidente que o inverso de um ponto no interior do círculo é exterior ao círculo, e vice-versa.

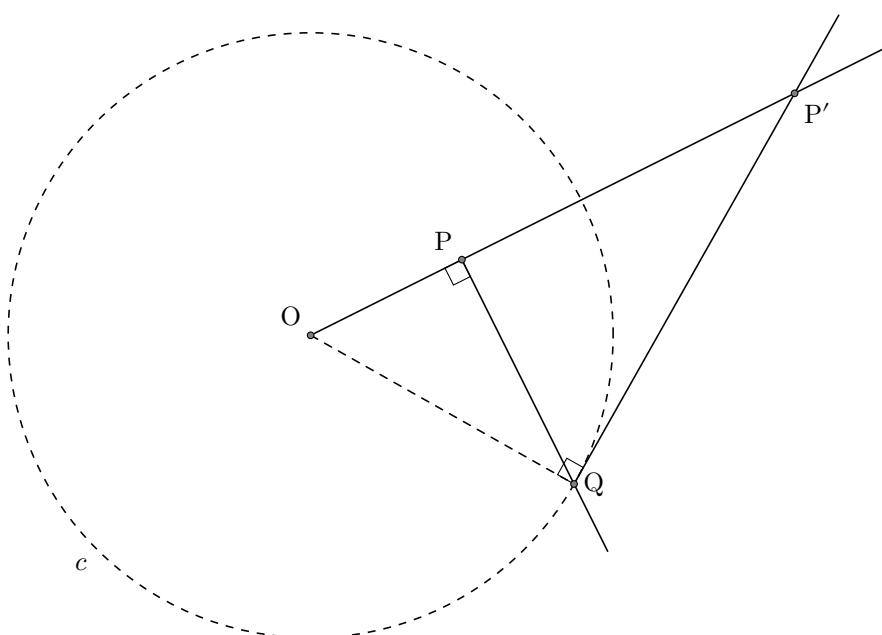


Figura 2.4: Construção do inverso de um ponto em relação a um círculo.

Consideremos alguns fatos sobre essa transformação. Primeiro, a medida do comprimento OP' , conforme a definição que demos, é bem determinada na equação $OP' = \frac{r^2}{OP}$. Levando em conta que este ponto P' está sobre a semirreta OP , só existe um único ponto P' que satisfaça essas condições. De fato, dois pontos distintos sobre uma semirreta tem de estar a distâncias diferentes da origem. Assim, *cada ponto no plano tem exatamente um inverso* (com exceção do centro do círculo de inversão). Não apenas isso, ainda considerando P' como inverso de P , o inverso P'' de P' tem de satisfazer a $OP' \times OP'' = r^2$, o que leva a $OP'' = \frac{r^2}{OP'}$. Pelos mesmos argumentos acima, o ponto P'' tem de coincidir com o ponto P . Portanto, *o inverso do inverso de um ponto, com relação ao mesmo círculo, é esse mesmo ponto*.

Pela definição, é fácil ver que os pontos sobre o círculo tem de ser os inversos deles mesmos. Segue imediatamente que a transformação, se aplicada duas vezes, leva quaisquer desses pontos a si mesmos. Já o centro do círculo é um assunto mais delicado. Se fôssemos aplicar a definição como está, mas com P e O sendo os mesmos pontos, teríamos que $0 \times OP' = r^2$. Claramente isto não pode ser satisfeito para um segmento OP' de comprimento finito. Por essa razão, a transformação geométrica de inversão em relação a um círculo não é definida para o centro do círculo.

Do que consideramos, podemos concluir que a inversão em relação a um círculo é uma *involução*, uma transformação geométrica que, aplicada duas vezes a uma figura qualquer, resulta na figura original.¹ Agora é hora de juntarmos o que definimos e provamos até aqui para demonstrar um resultado de muita importância para o modelo de geometria hiperbólica que veremos no próximo capítulo.

¹A reflexão em relação a uma reta é um exemplo de involução. A translação e a maioria das rotações não são involuções.

2.4 Existência e unicidade de circunferências perpendiculares

O teorema enunciado a seguir é de muita importância para o modelo do Disco de Poincaré. Por isso, decidimos dedicar toda esta seção a sua demonstração.

Dados dois pontos no interior de um círculo, não colineares com o centro, existe exatamente uma circunferência que passa pelos dois pontos e é ortogonal ao círculo.

Primeiro demonstraremos a existência de tal circunferência e, a seguir, sua unicidade.

Seja c um círculo de centro O e raio r , e A e B pontos em seu interior não alinhados com seu centro. Tomemos o ponto A' , inverso de A em relação a c . Por definição, A' está sobre a (semir)reta OA . Sendo assim, A , B e A' não são colineares, o que implica a existência de um círculo d de centro O' que passa por esses três pontos. Como A está dentro de c e A' está fora (pois é inverso de A), o círculo d intersecta c .

Consideremos uma das retas que passa por O e é tangente a d . Seja T o ponto de tangência. Pela potência do ponto O em relação ao círculo d , $OA \cdot OA' = OT^2$. Mas, como A' é inverso de A em relação a c , $OA \cdot OA' = r^2$. Assim, $|OT| = r$. Portanto, T está sobre c .

É sabido que a tangente de um círculo é perpendicular ao raio nesse ponto de tangência. Como OT é tangente a d , e $O'T$ é o raio nesse ponto de tangência, as retas OT e $O'T$ são perpendiculares. Além disso, por um ponto sobre uma reta, podemos levantar exatamente uma perpendicular. Como a tangente a c pelo ponto T precisa ser perpendicular a OT , sabemos que $O'T$ é esta tangente. Se OT e $O'T$ são tangentes a d e a c , respectivamente, no ponto de intersecção T , por definição concluímos que as circunferências c e d são ortogonais.

Essa construção depende de um pequeno fato geométrico: o ponto O precisa ser exterior a d , para que possamos aplicar o que demonstramos sobre potência de pontos. A demonstração é simples. Uma reta pode cortar um círculo em no máximo dois pontos. A reta OA já corta o círculo d nos pontos A e A' , de forma que o segmento AA' é toda a porção dessa reta interior ao círculo. Como A' está na semirreta OA , AA' não contém O , e segue que O é exterior a d .

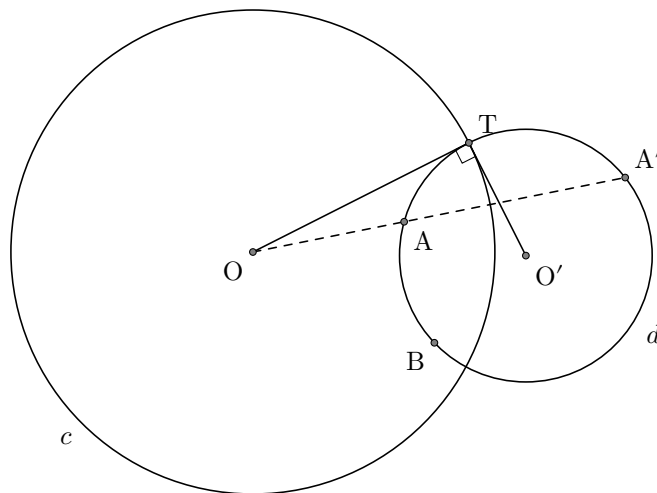


Figura 2.5: Um círculo d , passando por A , B e A' , é perpendicular a c . Por outro lado, um círculo d passando por A e B e perpendicular a c também passa por A' .

Resta saber se a construção acima é única. Seja c um círculo de centro O e raio r , assim como antes. Também, escolhamos dois pontos A e B em seu interior, não colineares com O . Seja d um círculo ortogonal a c que passe por A e B .

Como c e d se intersectam, seja T um ponto de intersecção. A reta OT , suporte do raio de c , é perpendicular à reta tangente a c que passa por T . Mas, já que c e d são ortogonais, por definição a tangente a c passando por T é perpendicular à tangente a d passando por T . Como mencionamos há pouco, por um ponto sobre uma reta é possível erguer exclusivamente uma perpendicular. Assim, a reta OT é a tangente a d no ponto T . Disso, vemos também que O é exterior a d , um fato importante para o que será discutido a seguir.

Tracemos a reta OA e marquemos o outro ponto de intersecção com d , que chamaremos de A' . Pela potência de O em relação a d , $OA \cdot OA' = OT^2$. Como OT é raio de c , $OA \cdot OA' = r^2$. Se essa relação vale, então A' é inverso de A com relação a c ! Portanto, o círculo d , além de passar por A e B , contém necessariamente o ponto A' , inverso de A . Três pontos (não colineares) determinam de forma única uma circunferência, o que conclui a demonstração de unicidade.

Outra propriedade importante das inversões é a preservação de ângulos entre curvas, como os ângulos entre circunferências que vimos na Seção 2.1. As provas geralmente usam conceitos elementares de Cálculo e não são particularmente difíceis, mas ainda assim saem do escopo desse material. Um esboço de demonstração, com auxílio didático do GeoGebra, pode ser encontrado em [7] sob a seção *Inversion in Circle*, como *Theorem 3*. Uma demonstração clássica aparece no apêndice de [31].

Atividades

As primeiras atividades desse capítulo, juntas, são os passos da demonstração de um teorema importante sobre inversão, enunciado perto do fim da seção.

- 2.1. Seja c um círculo de centro O , e r uma reta no mesmo plano, externa ao círculo c . Seja T o pé da perpendicular a r que passa por O , e T' o inverso de T por c . Ademais, seja P um ponto de r distinto de T , e P' o seu inverso por c .
 - (a) Observe que podemos escolher pontos em r arbitrariamente distantes de c . Use um software de geometria dinâmica para explorar o que acontece com P' quando o ponto P se distancia de c .
 - (b) Use a definição de inversão para provar que $\triangle OPT$ e $\triangle OT'P'$ tem dois pares de lados proporcionais.
 - (c) Use o caso LAL para provar que $\triangle OPT \sim \triangle OT'P'$.
 - (d) Por fim, use os arcos capazes para provar que o inverso de r é o círculo de diâmetro OT' , sem o ponto O .
- 2.2. Seja c um círculo de centro O , e r uma reta no mesmo plano, tangente ao círculo c . Seja T o ponto de tangência.
 - (a) Seja P um ponto de r , diferente de T , e P' o seu inverso por c . Prove que $\triangle OPT \sim \triangle OTP'$.
 - (b) Prove que o inverso de r é o círculo de diâmetro OT , sem o ponto O .
- 2.3. Seja c um círculo de centro O , e seja r uma reta no mesmo plano, não incidente em O , e secante ao círculo c nos pontos R e S . Seja d o único círculo que passa por O , R e S .
 Seja P um ponto de r , distinto de R e S . Observe que a reta OP corta d em exatamente dois pontos, qualquer que seja P . Naturalmente, um desses pontos é o próprio O . Vamos chamar o outro ponto de P' .
 - (a) Prove que $\widehat{OR} \equiv \widehat{OS}$.
 - (b) Mostre que, se P é incidente na semirreta RS , ambos $\angle ORP$ e $\angle OP'R$ são inscritos em d . Use este fato para provar que $\angle ORP \equiv \angle OP'R$, e $\triangle ORP \sim \triangle OP'R$.
 - (c) Mostre que $\triangle ORP \sim \triangle OP'R$, independente da posição de P na reta r .
 - (d) Conclua que P' é o inverso de P pelo círculo c .
- 2.4. Seja c um círculo de centro O , e r uma reta no mesmo plano incidente em O . Prove que r é seu próprio inverso em relação a c .
- 2.5. Seja c um círculo de centro O , e seja d um círculo do mesmo plano, de centro O' , com o ponto O exterior a d . Sejam A e B as intersecções da reta OO' com d , e A' e B' seus inversos por c . Seja P um ponto de d distinto de A e B , e P' o seu inverso por c .
 - (a) Prove que $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ e $\triangle OBP \sim \triangle OP'B'$.

- (b) Observe que $\angle OAP$ é ângulo externo de $\triangle APB$, e que $\triangle APB$ é reto em P .
- (c) Prove que $\triangle A'B'P'$ é reto em P' .
- (d) Conclua que o inverso de d por c é o círculo de diâmetro $A'B'$.

2.6. Sejam c um círculo de centro O , e d um círculo de centro O' , com o ponto O no interior de d , mas O e O' distintos. Sejam A e B as intersecções da reta OO' com d , e A' e B' seus inversos por c . Seja P um ponto de d distinto de A e B , e P' o seu inverso por c .

- (a) Prove as congruências $\angle OAP \equiv \angle OP'A'$ e $\angle OBP \equiv \angle OP'B'$.
- (b) Prove que $\triangle A'P'B'$ é reto em P' .
- (c) Conclua que o inverso de d por c também é um círculo.

2.7. Sejam c e d círculos concêntricos em O . Seja P um ponto qualquer de d , e P' o seu inverso por c .

- (a) Expresse o comprimento do segmento OP' em função do raio de d .
- (b) Termine a prova de que o inverso de d por c é um círculo também concêntrico com c e d .

Conclua que, dado um círculo c qualquer, os inversos de retas e de círculos por c são sempre retas ou círculos.

2.8. Sejam c e d círculos ortogonais. Prove que d é seu próprio inverso por c . (Dica: Seja r uma reta incidente no centro de c e secante a d . Prove que os pontos de intersecção entre r e d são inversos um do outro usando o mesmo método do fim da seção 2.4.)

Capítulo 3

O modelo do Disco de Poincaré

No século XIX, o matemático italiano Enrico Beltrami concebeu alguns modelos para geometrias não euclidianas. Posteriormente, Henri Poincaré viria a fazer um estudo profundo de um desses modelos, hoje conhecido como Disco de Poincaré.¹ O modelo do disco nos permitirá visualizar algumas propriedades da geometria hiperbólica dentro de uma região limitada do plano euclidiano. As duas seções a seguir abordam os conceitos primitivos de plano, ponto e reta. Depois, vamos rever o significado de ângulo, e algumas relações binárias entre retas. Por fim, uma seção de atividades de geometria dinâmica encerra o capítulo.

3.1 O plano hiperbólico

Assim como o plano euclidiano é ilimitado em todas as direções, assim é o plano hiperbólico. Vamos analisar o que isso significa. Quando estudamos geometria, geralmente representamos as figuras como desenhos em uma parte do plano. Nesses desenhos, subentende-se que podemos estender uma reta indefinidamente. Em linguagem simples, o plano e as retas no plano não acabam, não importa o quanto queiramos estendê-los.

O plano hiperbólico guarda semelhanças e diferenças com o plano euclidiano. Assim como na geometria euclidiana, o plano hiperbólico estende-se indefinidamente em todas as direções. As retas hiperbólicas também podem ser prolongadas indefinidamente. Mas o modo como representamos o plano e as retas por meio do Disco de Poincaré muda drasticamente. Na verdade, nós representamos o plano hiperbólico inteiro, ilimitado, dentro de uma região do plano euclidiano limitada por um círculo. Como isso possível será explicado no próximo capítulo.

Por ora, é preciso saber que o modelo do Disco de Poincaré é construído em um disco aberto. Dizer que um disco é aberto quer dizer que estamos falando da região que é interior a uma circunferência, mas sem incluir a própria circunferência. Por exemplo, na Figura 3.1 vemos um disco representado por uma linha tracejada. Os pontos sobre a circunferência não fazem parte do disco (aberto), apenas os pontos dentro do círculo.

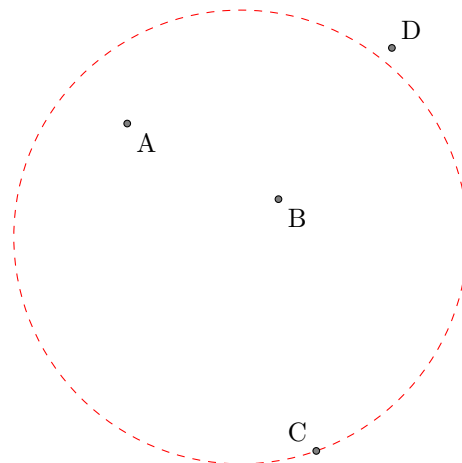


Figura 3.1: Representação de um disco aberto. Os pontos A e B, como exemplos, são parte do disco aberto. Os pontos C e D não fazem parte do disco aberto.

¹Outro modelo de Beltrami também usa um disco aberto, e ficou conhecido como Disco de Klein. Nesse trabalho, “modelo do disco” refere-se exclusivamente ao Disco de Poincaré, a menos que seja especificado o contrário.

3.2 Pontos e retas

Representamos os pontos do plano hiperbólico no Disco de Poincaré assim como fazemos no plano euclidiano. Mas é preciso fazer uma observação. Mencionamos na seção anterior que o modelo do disco é construído sobre um disco aberto. Assim, todos os pontos do plano hiperbólico serão representados *dentro* do círculo, ou seja, no disco aberto. Por exemplo, na Figura 3.1 apenas os pontos A e B representam pontos do plano hiperbólico. Entretanto, veremos que a borda do disco não é de nenhuma forma desinteressante. Por isso, vamos estudar também os pontos sobre essa borda. Esses pontos *não* fazem parte do plano hiperbólico, apesar de serem úteis em diversas construções. Vamos nos referir a eles como *pontos ideais*. Na Figura 3.1, o ponto C representa um ponto ideal.

Em um plano euclidiano, é possível escolher um sistema de coordenadas qualquer, e atribuir valores aos pontos do plano com base nesse sistema. Usando coordenadas cartesianas, por exemplo, um ponto é escolhido para ser a origem do sistema de coordenadas. Mas a escolha deste ponto como origem é arbitrária; não há, inicialmente, um ponto no plano euclidiano dotado de propriedades especiais que possa ser chamado de “centro”. O mesmo vale para o plano hiperbólico. Mesmo que estejamos representando os pontos em um disco, isto não significa que o ponto no centro do disco seja o centro do plano em qualquer sentido intrínseco. Ele é o centro do disco que estamos usando como modelo, mas apenas isso. Dentro da geometria hiperbólica, ele não tem nenhuma característica especial que o torne distinto dos seus vizinhos. Mas, assim como os pontos ideais, ele pode ser útil em algumas construções e demonstrações.

Assim como no plano euclidiano, esperamos que dois pontos no disco definam uma, e apenas uma, reta hiperbólica. No modelo do disco, porém, as retas geralmente tomam uma forma alternativa. Elas serão representadas por *arcos de circunferência* perpendiculares ao disco.² Como vimos na Seção 2.4, dois pontos dentro de um disco definem exatamente uma circunferência perpendicular ao disco. A exceção é quando esses dois pontos são colineares com o centro do disco. Neste caso, a reta hiperbólica definida pelos dois pontos é um diâmetro do disco. Alguns exemplos de retas hiperbólicas no modelo do disco são exibidas na Figura 3.2.

Assim, dois pontos quaisquer no Disco de Poincaré determinam exatamente uma reta, assim como acontece na geometria euclidiana. Da mesma forma, um ponto divide uma reta em duas semirretas e dois pontos determinam um segmento de reta.

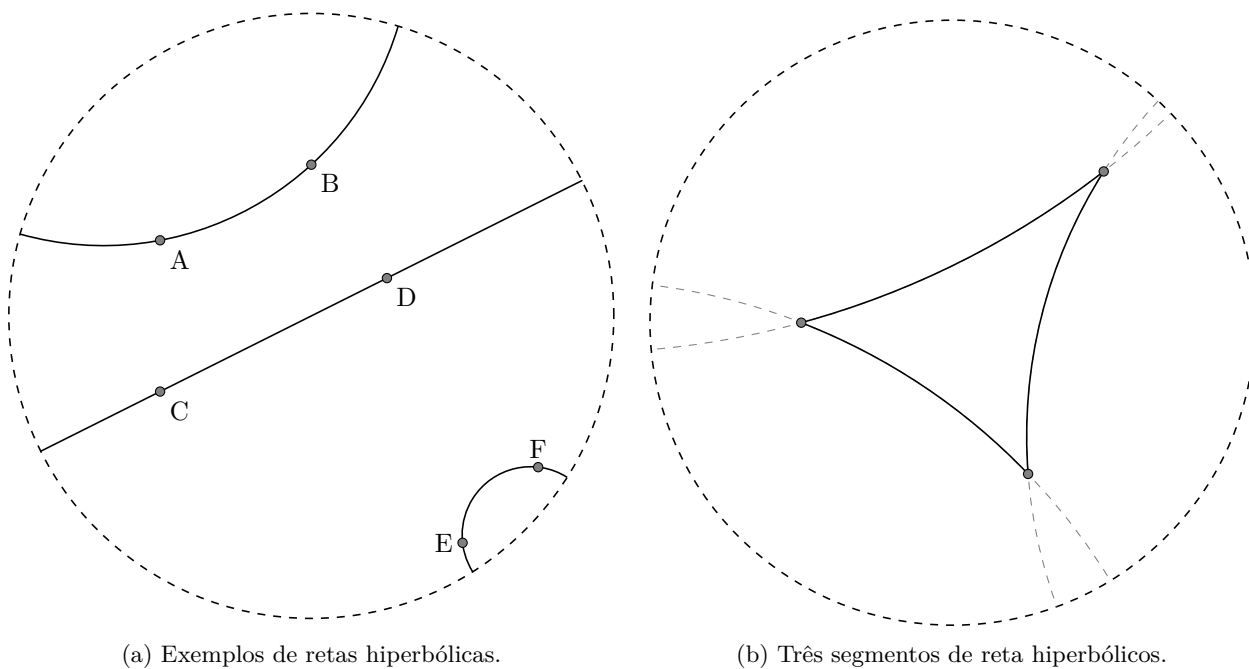
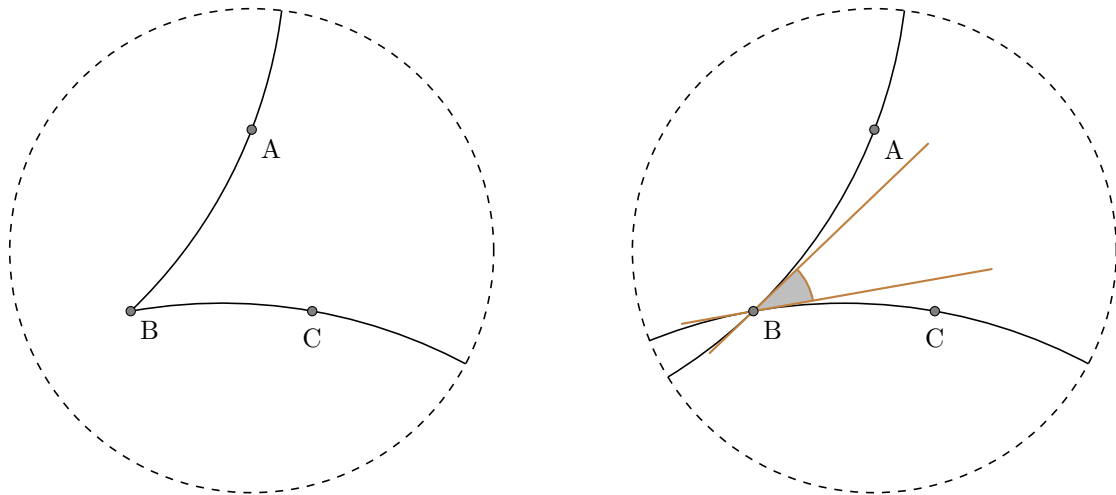


Figura 3.2

²O que são circunferências perpendiculares foi definido no capítulo anterior.



(a) Semirretas BA e BC formando o ângulo $\angle ABC$. (b) A medida do ângulo hiperbólico $\angle ABC$ a partir da construção de retas euclidianas.

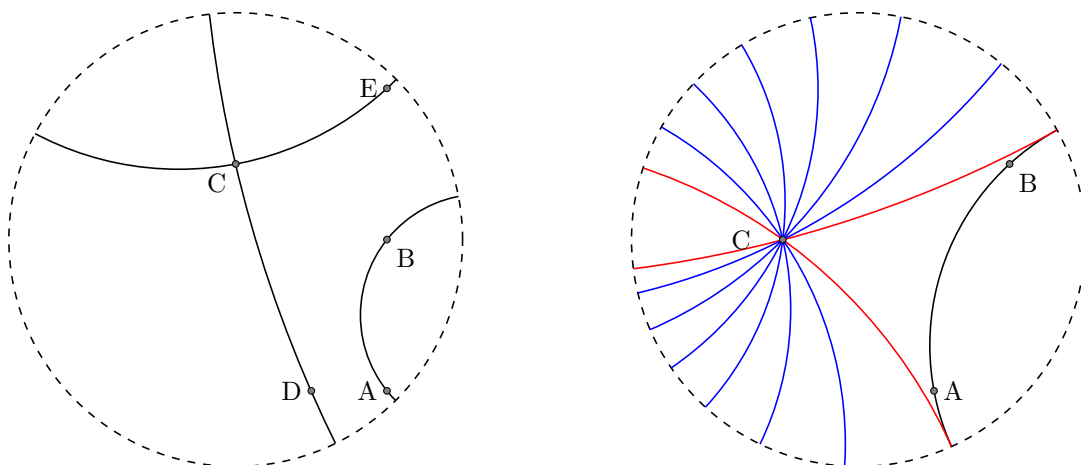
Figura 3.3

3.3 Ângulos, perpendicularidade e paralelismo

Vamos parar por um momento para refletir no que são ângulos na geometria euclidiana. Normalmente, *ângulo* é definido como a figura formada por duas semirretas que partem do mesmo ponto. Podemos fazer o mesmo no disco. Na Figura 3.3a, vemos representadas as semirretas BA e BC, e essa figura nada mais é que o ângulo $\angle ABC$.

Tendo dito isto, como podemos medir $\angle ABC$? Primeiro, tracemos as retas hiperbólicas AB e BC. É claro, essas retas se intersectam em B e são, para nós, arcos de circunferências (ou diâmetros do disco aberto). No caso de serem representadas por arcos, vamos tomar as retas euclidianas tangentes aos arcos no ponto B. O ângulo $\angle ABC$ na geometria hiperbólica tem a mesma medida que o ângulo euclidiano formado por essas retas. Este fato é ilustrado na Figura 3.3b.

Às vezes acontece de duas retas hiperbólicas se cruzarem em um ângulo de 90 graus. Nesse caso, dizemos que essas retas são perpendiculares, como fazemos na geometria euclidiana. Usando régua e compasso hiperbólicos, é possível mostrar que por um ponto sobre uma reta hiperbólica ergue-se exatamente uma perpendicular, e por um ponto fora da reta passa exatamente uma perpendicular.



(a) Pelo ponto C, fora da reta AB, passam as retas CD e CE. Ambas são paralelas (não secantes) à reta AB. (b) Algumas paralelas não secantes a AB, representadas em azul, e as duas paralelas limitantes em vermelho.

Figura 3.4: Na geometria hiperbólica, vale uma versão alternativa do quinto postulado de Euclides.

Já sabemos que as geometrias não euclidianas surgiram de questionamentos sobre o quinto postulado de Euclides. Na geometria hiperbólica, vale uma versão alternativa do postulado das paralelas: Por um

ponto fora de uma reta r qualquer passa mais de uma reta paralela a r . Podemos observar este postulado usando o Disco de Poincaré, conforme ilustrado na Figura 3.4a.

Convém lembrarmos dos *pontos ideais* que mencionamos na segunda seção. Quando duas retas paralelas “se encontram”, ou seja, convergem para o mesmo ponto ideal, dizemos que elas são *paralelas limitantes*. Caso elas simplesmente não se intersectem, sem convergir para o mesmo ponto, dizemos que são *não secantes*. Ambos os casos estão ilustrados na Figura 3.4b. Na geometria hiperbólica, por um ponto fora de uma reta passam exatamente duas retas paralelas limitantes. Eram essas duas retas que Bolyai e Lobachevsky definiram como paralelas, como vimos no primeiro capítulo.

Atividades

As atividades desta seção são uma proposta de exploração guiada do Disco de Poincaré usando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Com sua ajuda é possível observar algumas propriedades da geometria hiperbólica que estudamos neste capítulo. Lembre-se que o interior do disco representa o plano hiperbólico. Então, sempre que uma atividade pedir que você escolha um ponto do plano hiperbólico, você deve escolher um ponto no disco aberto. Outras sugestões de atividades estão na literatura citada. [23, p. 99]

Você pode encontrar implementações do Disco de Poincaré no GeoGebra no site projeto. Por exemplo, veja [20].

- 3.1. Escolha dois pontos no plano hiperbólico e trace a reta hiperbólica que passa por eles. Observe o formato da reta:
 - (a) quando os pontos estão perto da borda do disco;
 - (b) quando os pontos estão perto do centro do disco;
 - (c) quando os pontos estão aproximadamente alinhados com o centro do disco;
 - (d) quando o centro do disco está bem distante da reta.
- 3.2. Na geometria euclidiana, dado um ponto P do plano e uma reta r não incidente em P , existe uma única reta incidente em P que não corta r . Verifique que isso não é verdade na geometria do disco.
- 3.3. Escolha três pontos A , B e C no plano hiperbólico, não colineares. Depois, trace segmentos de reta hiperbólicos conectando esses pontos para formar o triângulo ABC .
 - (a) Use a ferramenta de medir ângulos hiperbólicos para encontrar os valores dos ângulos internos de $\triangle ABC$. O que é possível notar sobre a soma das medidas desses ângulos?
 - (b) Use a ferramenta Mover para aproximar os pontos A , B e C . Faça uma nota com o valor da soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$. Depois, use a ferramenta Mover para separar os vértices do triângulo, aumentando o seu tamanho. O que aconteceu com a soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$?
 - (c) A soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$ tende para algum valor quando os vértices se aproximam? E quando estes se afastam?
- 3.4. Escolha dois pontos A e B no plano hiperbólico, e trace a reta r que passa por eles. Depois, escolha um ponto P incidente em r e um ponto Q não incidente em r .
 - (a) Use as ferramentas do GeoGebra para traçar as retas perpendiculares a r e incidentes em P e Q .
 - (b) Agora que você sabe usar essas ferramentas, tente desenhar um retângulo no disco. Você consegue ver a relação entre a impossibilidade dessa tarefa e o item 3.3 (a)?

Capítulo 4

A geometria do Disco de Poincaré

No capítulo anterior, discutimos a representação dos conceitos primitivos de ponto, reta, e plano hiperbólico usando o modelo do Disco de Poincaré. Também discutimos os conceitos de perpendicularidade e paralelismo, e a medição de ângulos no modelo. Neste capítulo, vamos comparar transformações geométricas no plano euclidiano e no plano hiperbólico, usando o modelo do disco. Estamos especialmente interessados em um tipo específico de transformação, que vai nos ajudar a entender a geometria do disco.

4.1 Isometrias na geometria euclidiana

As transformações geométricas que preservam distâncias são chamadas de *isometrias*. Na geometria euclidiana, alguns exemplos de isometrias são a translação, a reflexão por uma reta, e a rotação em torno de um ponto. Vamos aproveitar este momento para visitar esses velhos amigos.

Seja P um ponto e r uma reta qualquer do plano. Se r não é incidente em P , a reflexão de P por r será definida como o ponto P' tal que a reta r seja a mediatriz do segmento PP' . Mas, caso r seja incidente em P , o ponto P será sua própria imagem.

Observe que construir a imagem de P refletida por r é uma tarefa muito simples. Basta traçar uma reta perpendicular a r passando por P , e traçar a circunferência de centro no pé da perpendicular, passando por P . A imagem P' será a intersecção entre a perpendicular e a circunferência, como na Figura 4.1.

É possível compor reflexões por aplicá-las em sequência. Como a reflexão por uma reta é uma isometria, a composição também será uma isometria. Na Figura 4.2, as retas r e s são transversais, e T é o seu ponto de intersecção. O triângulo cinza é a imagem do triângulo azul quando refletido pela reta r , e o triângulo vermelho é a reflexão do triângulo cinza pela reta s . Compor essas duas reflexões tem o mesmo efeito que “girar” o triângulo azul em torno do ponto de intersecção T , e o ângulo de rotação mede 2α , o dobro do ângulo entre as retas r e s .

Na Figura 4.3, as retas r e s são paralelas. Novamente, o triângulo cinza é a imagem do azul por uma reflexão pela reta r , e o vermelho é a imagem do cinza por uma reflexão pela reta s . Aplicar as duas reflexões em seguida tem o efeito de “mover” o primeiro triângulo no plano, por uma distância igual ao dobro da distância entre as retas r e s . A direção do movimento é a mesma das retas perpendiculares a r e s .

4.2 Reflexões no disco

Um teorema interessante da geometria euclidiana diz que qualquer isometria do plano é equivalente a uma composição de até três reflexões por retas. Com este fato em mente, vamos estudar as isometrias

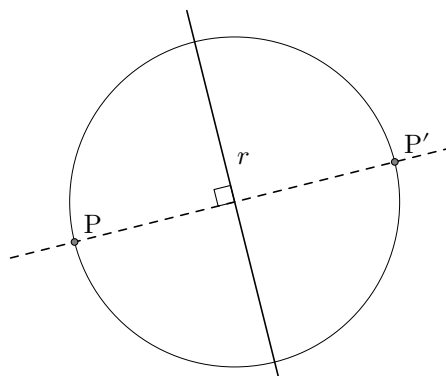


Figura 4.1: Construção do ponto P' , a imagem de P por uma reflexão em relação à reta r .

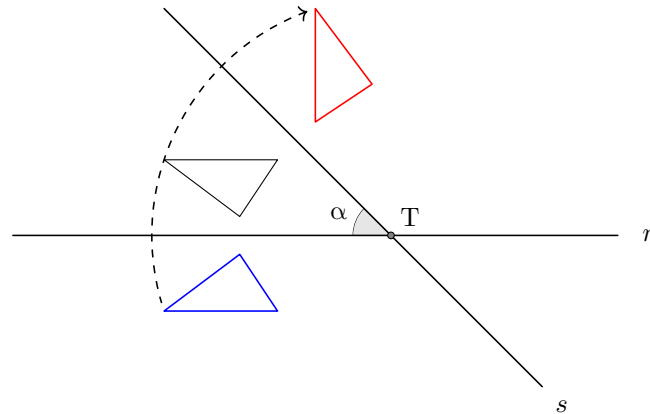


Figura 4.2: O triângulo cinza é a imagem do triângulo azul quando refletido pela reta r , e o triângulo vermelho é a imagem do cinza, refletido pela reta s . Alternativamente, o triângulo vermelho é a imagem do azul por uma rotação em torno do ponto T .

do disco a partir das reflexões por retas hiperbólicas. Entretanto, a maioria das retas no modelo do disco de Poincaré não se parece muito com as retas da geometria euclidiana. Por isso, precisamos de uma definição alternativa para reflexões.

Nossa definição de reflexão no disco precisa imitar algumas propriedades importantes das reflexões euclidianas. Por exemplo, a imagem por uma reflexão de qualquer ponto do plano hiperbólico precisa estar bem definida. Quer dizer que a imagem de um ponto do disco também precisa ser um ponto do disco. Além disso, as imagens de retas hiperbólicas também precisam ser retas hiperbólicas, e as imagens de círculos também precisam ser círculos. E queremos que a reflexão por uma reta hiperbólica seja uma isometria, assim como na geometria euclidiana. Entretanto, ainda não descrevemos círculos no plano hiperbólico, nem aprendemos a medir distâncias. Na verdade, depois de definir reflexões no modelo do disco de Poincaré, vamos usá-las para estudar círculos, distâncias, e outros objetos e propriedades hiperbólicas.

Definiremos a reflexão por uma reta hiperbólica, quando representada no disco por um de seus diâmetros, como a reflexão euclidiana pela reta suporte desse diâmetro. Note que a imagem do disco por tal reflexão é o próprio disco. Portanto, a transformação está bem definida para todos os pontos do plano hiperbólico, representados no disco. Como essa transformação é uma isometria da geometria euclidiana, é claro que retas hiperbólicas também são mapeadas para retas hiperbólicas.

Para as retas hiperbólicas representadas por arcos de circunferência, precisamos dar uma definição alternativa de reflexão. Nesses casos, vamos definir reflexões por essas retas como a inversão em relação a suas circunferências de suporte. Como demonstrado no exercício 2.8, a inversão de um círculo qualquer por um círculo que lhe seja ortogonal é o próprio círculo. Um resultado um pouco mais forte mostra que a inversão de um disco por um círculo ortogonal à sua borda é o próprio disco. Este fato é importante para mais uma vez garantir que a imagem de um ponto do plano seja, de fato, um ponto do plano.

Uma de nossas exigências para as propriedades de reflexões no disco é que a imagem de retas hiperbólicas também seja uma reta hiperbólica. Já sabemos que a inversão por um círculo transforma retas e

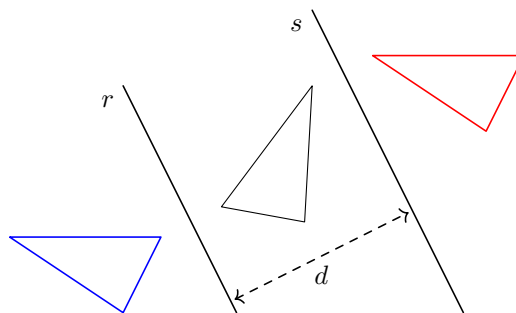
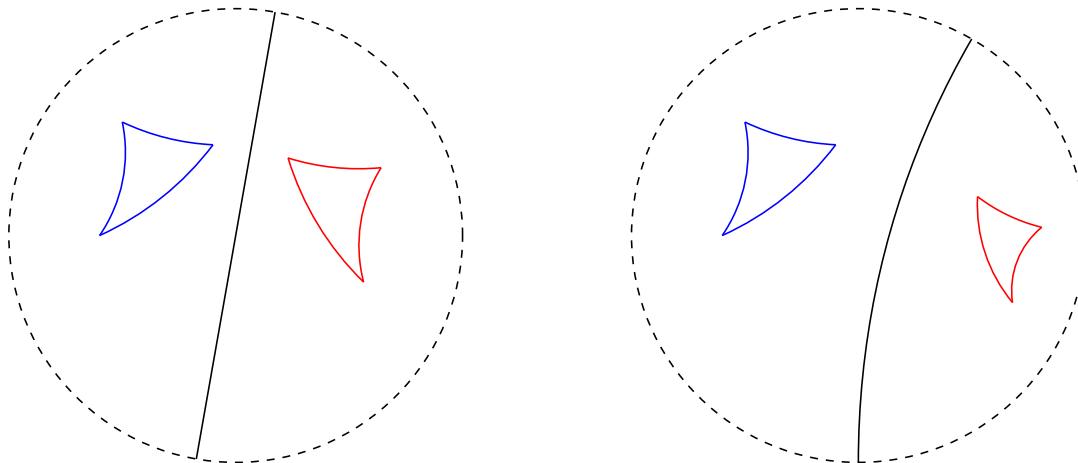


Figura 4.3: O triângulo cinza é a imagem do triângulo azul quando refletido pela reta r , e o triângulo vermelho é a imagem do cinza, refletido pela reta s . Alternativamente, o triângulo vermelho é a imagem do azul por uma translação.

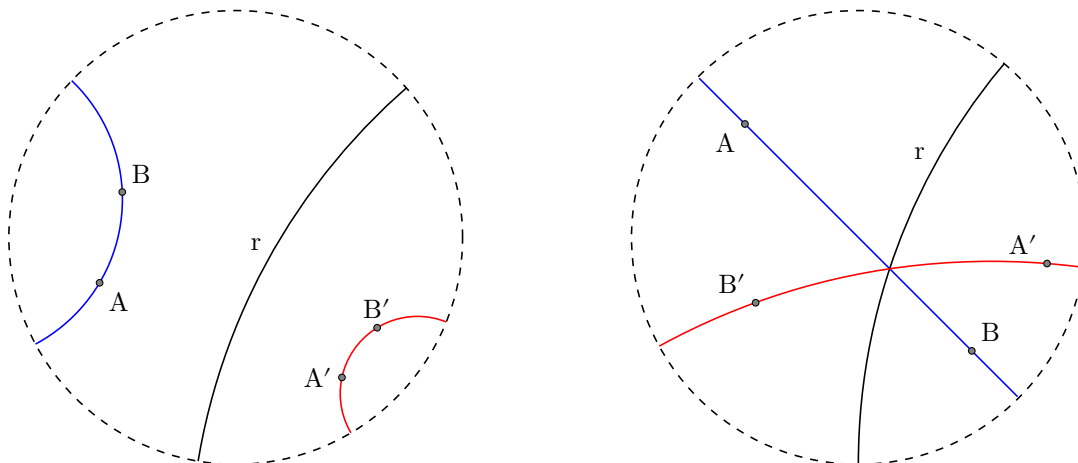


(a) A reta hiperbólica é representada por um diâmetro do disco. (b) A reta hiperbólica é representada por um arco de circunferência no disco.

Figura 4.4: Reflexões no Disco de Poincaré.

círculos em outras retas e círculos. Então as retas do plano hiperbólico, que no modelo de Poincaré são representadas por um diâmetro ou um arco de circunferência ortogonal à borda do disco, serão transformadas em outras cordas ou arcos no disco. E, como a inversão é uma transformação que preserva ângulos entre curvas, essas cordas e arcos vão ser, necessariamente, ortogonais à borda do disco. (Observe que uma corda é perpendicular a seu círculo se, e somente se, for diâmetro desse círculo.) Isso garante que retas hiperbólicas têm como imagem outras retas hiperbólicas, quando refletidas.

Em ambas as Figuras 4.5a e 4.5b, os pontos A' e B' são as imagens dos pontos A e B , refletidos pela reta r . Como esperado, nos dois casos a imagem da reta AB é a reta $A'B'$, representada por um arco de circunferência ortogonal à borda do disco.



(a) Os pontos A e B foram refletidos pela reta r .

(b) A reta AB intersecta r .

Figura 4.5: A imagem de uma reta por uma reflexão no plano hiperbólico também é uma reta.

4.3 A métrica do disco

Estamos acostumados à ideia de que a distância mais curta entre dois pontos é percorrida sobre uma reta. Isto não deixa de ser verdade na geometria hiperbólica, mas o que chamamos de “retas” aqui têm uma forma especial. Para que haja consistência, precisamos de um novo jeito de medir o comprimento de segmentos de reta. O que precisamos se chama *métrica*: Uma função que toma dois pontos e retorna

a distância entre eles.¹

Para calcular a distância entre dois pontos no plano hiperbólico, usando o modelo do disco, vamos lançar mão de construções euclidianas. Dados os pontos A e B, primeiro traçamos a reta hiperbólica AB e então marcamos os pontos ideais A' e B', como na Figura 4.6. A seguir, traçamos os segmentos euclidianos A'A, A'B, AB' e BB'. Na fórmula a seguir, k representa uma constante positiva. A distância entre A e B será dada por:

$$d(A, B) = k \left| \ln \frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'} \right|.$$

Esta expressão, apesar de aparentemente arbitrária, funciona perfeitamente como a métrica do disco. Antes de mais nada, vemos que o valor da distância é o valor absoluto de um certo logaritmo. Ser um valor absoluto nos garante que a distância entre dois pontos nunca será negativa. O que acontece quando os pontos A e B se aproximam? Nesse caso, A'B se aproxima de A'A e AB' de BB'. Por isso, a razão $\frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}$ se aproxima de um, e o valor de seu logaritmo, de zero. Vemos assim que a distância tende a zero quando os dois pontos se aproximam. No caso de coincidirem, não conseguimos marcar uma única reta que passe pelos dois pontos, mas definimos coerentemente que a distância seja zero.

Por outro lado, o que acontece quando um dos pontos, A ou B, se aproxima da borda do disco? Suponhamos que A esteja próximo da borda. Assim, o comprimento do segmento AA' se aproxima de zero, assim como o denominador da razão $\frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}$. Por isso, o valor dessa razão se torna muito grande, o que faz com que o valor da distância aumente. De fato, podemos tornar essa distância tão grande como quisermos, aproximando suficientemente um dos pontos A ou B da borda. Este fato é coerente com a noção de que os pontos ideais estão a uma distância infinitamente grande de qualquer ponto no interior do disco.

As expressões do tipo $\frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}$ são chamadas de razões cruzadas. Tanto a reflexão por uma reta como a inversão por um círculo preservam razões cruzadas. Esse fato é muito importante, pois, para ser métrica desse modelo, a distância entre pontos precisa ser preservada pelas isometrias do disco vistas na seção anterior.²

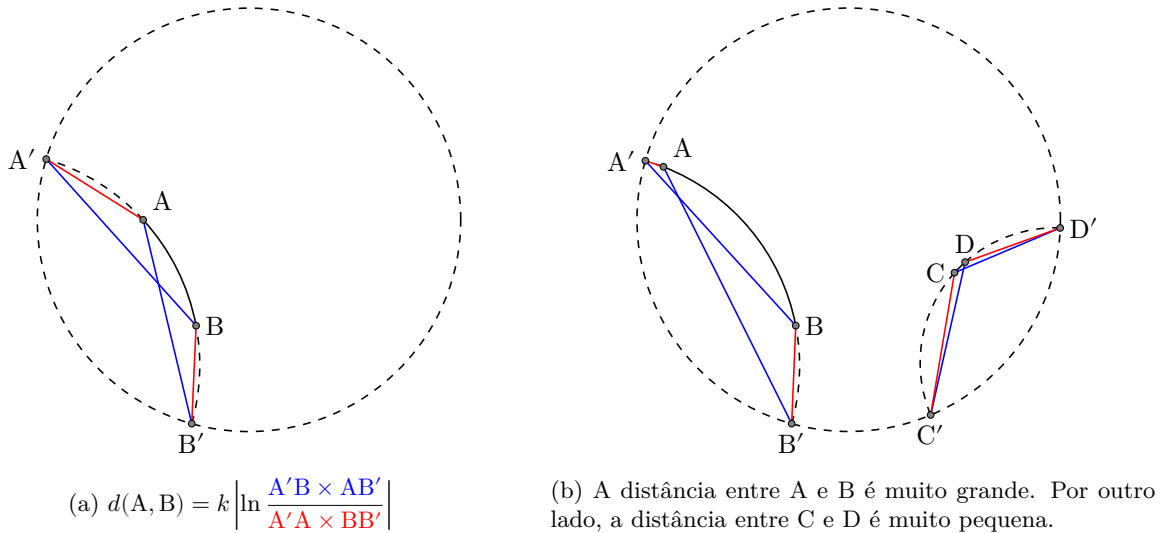


Figura 4.6: Para calcular a distância entre dois pontos no disco de Poincaré, usamos construções auxiliares.

4.4 As circunferências hiperbólicas

Agora que sabemos medir distâncias no modelo do disco, chegou o momento de estudar outra figura geométrica elementar, o círculo. Por definição, dado um ponto qualquer no plano, chamado centro, uma circunferência é formada por todos os pontos que lhe sejam equidistantes. Neste texto, usamos as

¹Métricas são funções muito importantes, então não é surpresa que haja muito mais a se dizer sobre elas. Na verdade, existem vários critérios que uma função deve obedecer para ser chamada de métrica. Por exemplo, a distância entre dois pontos deve ser sempre positiva, ou então nula se, e somente se, os dois pontos coincidirem. Outra propriedade digna de nota: deve satisfazer a desigualdade triangular.

²Para uma demonstração de que razões cruzadas são invariantes sob inversões por círculos, veja [18, p. 481] ou [7].

palavras *círculo* e *circunferência* como sinônimas, e reservamos a palavra *disco* para nos referir ao interior da figura.³ Um segmento unindo um ponto na circunferência e seu centro é chamado de *raio*. É costume se referir ao “raio” como sendo um valor, o seu comprimento, assim como já fazemos com ângulos e outros segmentos.

Queremos saber qual o formato das circunferências dentro do disco, ou seja: Dado um ponto no disco, onde estão os pontos a certa distância fixa, considerando a métrica do disco? Como mencionado na seção 3.2, o plano hiperbólico em si não possui um centro. Mas, na demonstração a seguir, usaremos o centro do disco para simplificar as contas e facilitar a visualização do resultado.

Seja d um disco de raio r e centro em O . Este é o disco que usaremos como modelo do plano hiperbólico. Tomemos o círculo euclidiano c , de raio $r' < r$, também com centro em O . Sejam A e B dois pontos sobre esse círculo. Tracemos as retas hiperbólicas AO e BO , marcando os pontos ideais A', A'', B' e B'' , conforme a Figura 4.7. Observe que, como essas retas passam pelo centro do disco, são representadas por segmentos de reta euclidianos. Por isso, os pontos A', A, O e A'' são colineares também no sentido euclidiano, assim como B', B, O e B'' . As distâncias entre A e O , e B e O , são dadas por:

$$d(A, O) = k \left| \ln \frac{A'O \times AA''}{A'A \times OA''} \right|,$$

$$d(B, O) = k \left| \ln \frac{B'O \times BB''}{B'B \times OB''} \right|.$$

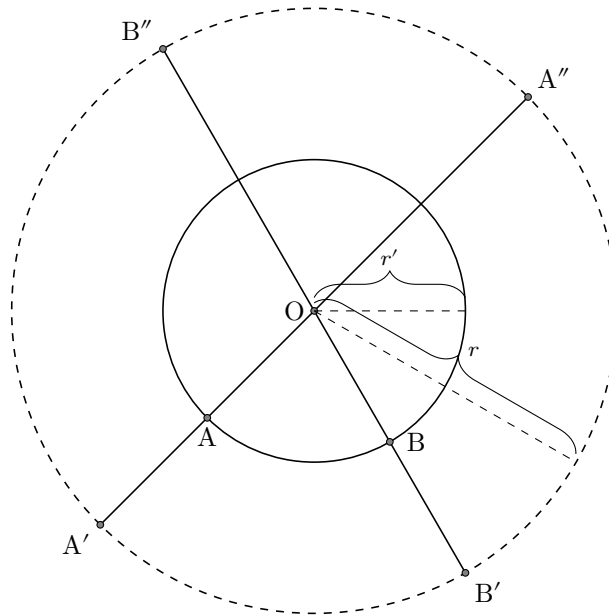


Figura 4.7: A distância hiperbólica entre A e O , e entre B e O , é a mesma.

Nas expressões acima, $|A'O| = |B'O| = r$, $|AA''| = |BB''| = (r + r')$, $|A'A| = |B'B| = (r - r')$ e $|OA''| = |OB''| = r$. Portanto, ambas as distâncias podem ser expressas como:

$$d(O, A) = d(O, B) = k \left| \ln \frac{r(r + r')}{(r - r')r} \right| = k \left| \ln \left(\frac{r + r'}{r - r'} \right) \right|.$$

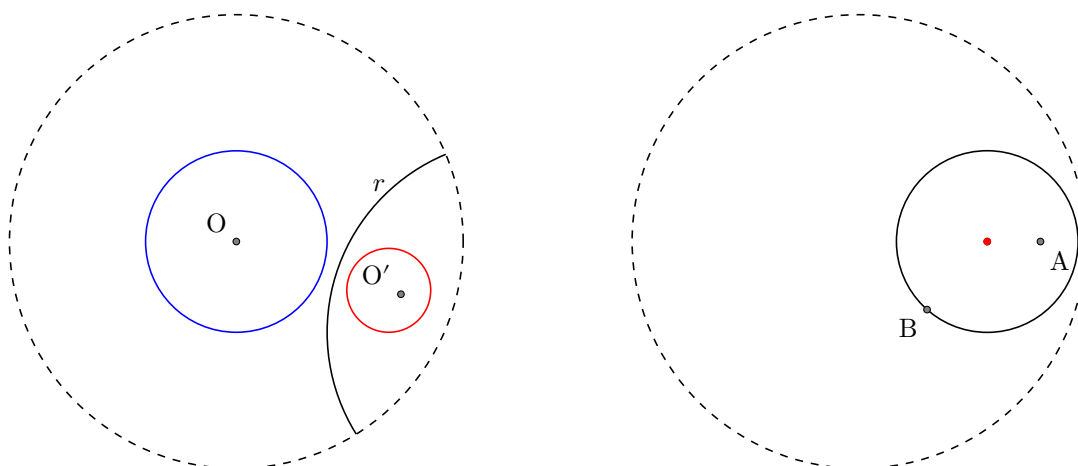
Como A e B são pontos genéricos sobre o círculo c , concluímos que todos os pontos sobre c são equidistantes, no sentido hiperbólico, de O . Além disso, uma função $f(r') = \ln \frac{r+r'}{r-r'}$ é crescente para r constante e $r > r' > 0$. Assim, vemos que qualquer ponto no exterior de c estará a uma distância hiperbólica de O maior, e no interior, menor. Do que foi considerado, concluímos que o círculo c , na verdade, é um círculo hiperbólico!

Agora que conhecemos a representação de certos círculos hiperbólicos no Disco de Poincaré, podemos estudar a forma geral de círculos no disco usando reflexões hiperbólicas. Já sabemos que um círculo euclidiano concêntrico com o disco representa um círculo no plano hiperbólico e que, nesse caso, o centro

³Como já mencionado, um disco fechado é formado pela circunferência e seu interior. Um disco aberto, por outro lado, é exclusivamente o interior de um círculo.

do círculo euclidiano coincide com o centro do círculo hiperbólico. Também conhecemos um tipo de transformação isométrica da geometria hiperbólica. De posse dessa ferramenta, uma pergunta surge naturalmente: O que acontece quando tomamos um círculo hiperbólico, representado no centro do disco, e o refletimos por uma reta hiperbólica?

Se a reta em questão for representada por um diâmetro do disco, o problema se reduz ao caso euclidiano, e o círculo é simplesmente a imagem de si mesmo. Mas, quando a reta de reflexão é representada por um arco de circunferência, a reflexão por essa reta é, dentro do modelo do disco, uma inversão euclidiana. E, das propriedades das inversões, nós sabemos que a imagem de círculos (que não passam pelo centro do círculo de inversão) são outros círculos.



(a) Os pontos O e O' são reflexos um do outro pela reta r , assim como os círculos em azul e vermelho. (b) Círculo hiperbólico de centro A e incidente em B . O centro euclidiano foi marcado em vermelho.

Figura 4.8: Círculos hiperbólicos no modelo do disco.

Na Figura 4.8a, o círculo hiperbólico de centro O é representado por um círculo euclidiano concêntrico com o disco. A reta hiperbólica r é representada por um arco de circunferência. O ponto O' é a imagem do ponto O por uma reflexão pela reta r no plano hiperbólico. O círculo em vermelho representa a imagem do círculo azul pela mesma reflexão. Observe que o centro euclidiano do círculo em vermelho *não* é O' . Mas, como a reflexão é uma isometria, o círculo em vermelho é, de fato, um círculo hiperbólico de centro O' .

Com isso, aprendemos que círculos euclidianos dentro do disco representam círculos do plano hiperbólico, com a ressalva de que, em geral, o centro euclidiano e o centro hiperbólico desses círculos não coincidem. A Figura 4.8b ilustra melhor este fato.

Atividades

Assim como no capítulo passado, propomos algumas atividades de exploração do Disco de Poincaré usando geometria dinâmica.

- 4.1. Marque um ponto O no centro do disco e trace uma semirreta com origem em O e ponto ideal S . Naturalmente, essa semirreta será representada por um raio do disco. Depois, encontre uma maneira de dividir essa semirreta em vários segmentos de mesmo comprimento hiperbólico, começando em O . (Dica: você pode traçar uma reta arbitrária não incidente em O e usar uma série de reflexões; ou pode usar a ferramenta de desenhar círculos hiperbólicos.)
 - (a) Observe a aparência dos segmentos de reta que você marcou. O que isso indica sobre as medidas de distância entre pontos próximos à borda do disco?
 - (b) É possível dividir todo o segmento de reta euclidiano OS em segmentos menores usando esse mesmo procedimento um número finito de vezes? O que isso ensina sobre a distância hiperbólica entre pontos do plano (representados no disco aberto) e pontos ideais (representados sobre a borda do disco)?

- 4.2. Trace uma reta hiperbólica r e use um dos seus pontos ideais para traçar uma de suas paralelas limitantes, s . Depois disso, escolha um ponto P sobre s e use a ferramenta apropriada para obter a distância hiperbólica entre o ponto P e a reta r .

Observe o que acontece quando você desliza o ponto P em direção ao ponto ideal comum entre r e s . O que isso mostra sobre a distância entre retas paralelas limitantes na geometria hiperbólica?

- 4.3. Na geometria euclidiana, três pontos não colineares sempre definem uma circunferência. Isso ainda acontece na geometria do disco?

Leituras adicionais

Esperamos que essa pequena introdução tenha atingido o seu objetivo de ser tanto instrutiva como prazerosa. Há muito mais a se explorar no modelo do Disco de Poincaré, e muitos outros tópicos infelizmente não puderam ser incluídos. Se tivemos a honra de guiar sua visita à geometria hiperbólica até aqui, vamos deixar sugestões de outros guias que podem acompanhar o leitor a partir desse ponto. Infelizmente, alguns desses guias falam apenas em inglês.

Em *Compass and Straightedge in the Poincaré Disk*, de Chaim Goodman-Strauss, o autor constrói as ferramentas necessárias para desenhar figuras no disco usando régua e compasso hiperbólicos; para ser mais preciso, o autor mostra como usar régua e compasso convencionais para simular suas contrapartes hiperbólicas no modelo do disco. O espírito desse artigo de 2001 certamente pertence a outra época. O GeoGebra ainda não existia e alguns dos conselhos são pertinentes apenas a quem está fazendo as construções com régua e compasso físicos. Mas as instruções podem ser adaptadas para criar ferramentas hiperbólicas de régua e compasso no GeoGebra. Ao final do artigo, o autor mostra como essas ferramentas podem ser usadas para tesselar o disco com figuras regulares. [12]

Um dos primeiros produtos educacionais brasileiros a abordar o Disco de Poincaré usando geometria dinâmica foi apresentado em 2013 por Ricardo Ribeiro e Maria Gravina. *Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra* tem atividades acessíveis para estudantes do Ensino Médio. [24]

Em seu site *Non-Euclidean Geometry*, Malin Christersson usa animações e ferramentas interativas para apresentar as geometrias não euclidianas. Uma seção é dedicada a inversões, com muitas demonstrações, e duas outras seções tratam especificamente do Disco de Poincaré. A segunda dessas usa as tesselações do plano hiperbólico para estudar algumas das propriedades dessa geometria. Todas as seções terminam com uma subseção de exercícios, vários deles com GeoGebra. [7]

Um bom livro de introdução à Geometria para alunos de graduação é *College Geometry: a Unified Development*, de David Kay. Gostamos em particular da exposição clara, acompanhada de muitos exemplos e bons exercícios. Em especial nos capítulos 7 e 8, o autor trata de ferramentas importantes para estudar o Disco de Poincaré, como potências de pontos, razão cruzada e transformações geométricas. O capítulo 9 introduz o Disco de Poincaré como modelo da geometria hiperbólica, mas a abordagem é principalmente analítica e exige alguma familiaridade com as funções hiperbólicas. [18]

H. S. M. Coxeter escreveu muitos livros clássicos de Geometria. Mas é no pequeno capítulo *Angels and Devils*, do livro *The Mathematical Gardner*, que Coxeter conta a história de sua correspondência com M. C. Escher. O artista holandês se disse chocado com uma das imagens produzidas por Coxeter e pediu ajuda para reproduzi-la. Essa correspondência viria a inspirar a criação das famosas obras da série *Circle Limit*. O foco de Coxeter em *Angels and Devils* é algébrico, mostrando os grupos de simetria nas tesselações esféricas e hiperbólicas construídas por Escher em suas obras. [9]

Por fim, para uma exposição formal, em português, da geometria hiperbólica recomendamos o livro de Plácido Andrade, *Introdução à Geometria Hiperbólica: O Modelo de Poincaré*. O leitor encontrará nesse livro um desenvolvimento completo da teoria e um estudo de muitas outras propriedades e figuras geométricas exclusivas da geometria hiperbólica que não puderam ser incluídas aqui. [1]

Bibliografia

- [1] Plácido Andrade. *Introdução à Geometria Hiperbólica: O Modelo de Poincaré*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (ver p. 37).
- [2] William P Berlinghoff e Fernando Q Gouvêa. *A Matemática Através dos Tempos: Um Guia Fácil e Prático para Professores e Entusiastas*. Trad. por Elza Gomide Helena Castro. São Paulo: Blücher, 2008 (ver p. 4).
- [3] János Bolyai. *Appendix: The Theory of Space*. Ed. por Ferenc Kárteszi. Amsterdam: Elsevier e Akadémiai Kiadó, 1987 (ver pp. 12, 13).
- [4] Roberto Bonola. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1912 (ver pp. 9, 10, 12–14).
- [5] Carl B Boyer e Uta C Merzbach. *História da Matemática*. Trad. por Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012 (ver pp. 4, 13).
- [6] Horatio Scott Carslaw. *The Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry*. London: Longmans, Green & Company, 1916 (ver pp. 12, 14).
- [7] Malin Christersson. *Non-Euclidean Geometry*. 2018. URL: <https://www.malinc.se/noneuclidean/en/index.php>. Acessado em 14 de janeiro de 2026 (ver pp. 22, 32, 37).
- [8] Roger L Cooke. *The History of Mathematics: A Brief Course*. 3ª ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2013 (ver pp. 3, 7–9, 14).
- [9] HSM Coxeter. “Angels and Devils”. Em: *The Mathematical Gardner*. Ed. por David A. Klarner. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt, 1981, pp. 197–209 (ver p. 37).
- [10] Howard Eves. *Great Moments in Mathematics (After 1650)*. The Mathematical Association of America, 1983 (ver pp. 8, 10, 14).
- [11] Richard Fitzpatrick. *Euclid’s Elements of Geometry*. 2007 (ver p. 4).
- [12] Chaim Goodman-Strauss. “Compass and Straightedge in the Poincaré Disk”. Em: *The American Mathematical Monthly* 108.1 (2001), pp. 38–49 (ver p. 37).
- [13] Jeremy Gray. *Ideas of space: Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*. 2ª ed. New York: Oxford University Press, 1989 (ver pp. 7–11, 14).
- [14] Jeremy Gray. *Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. London: Springer-Verlag, 2011 (ver pp. 11–15).
- [15] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 3ª ed. New York: W. H. Freeman & Company, 1993 (ver pp. 8, 9, 14).
- [16] Thomas L Heath. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1908 (ver p. 6).
- [17] Victor J Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. 3ª ed. Boston: Pearson, 2009 (ver pp. 3, 4, 8, 13–15).
- [18] David C Kay. *College Geometry: A Unified Development*. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2011 (ver pp. 32, 37).
- [19] Nikolai Ivanovich Lobachevsky. *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*. Trad. por George Halsted. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1914 (ver p. 14).
- [20] Tibor Marcinek. *Hyperbolic Canvas (Poincaré Disk)*. 2016. URL: <https://www.geogebra.org/m/eJAw9rcQ>. Acessado em 14 de março de 2026 (ver p. 28).

- [21] John W Milnor. “Hyperbolic Geometry: The First 150 Years”. Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.1 (1982), pp. 9–24 (ver p. 15).
- [22] Athanase Papadopoulos e Guillaume Th  ret. *Hyperbolic Geometry in the Work of Johann Heinrich Lambert*. 2015. arXiv: 1503.01865 [math.MG]. URL: <https://arxiv.org/abs/1503.01865> (ver pp. 10, 11).
- [23] Ricardo Silva Ribeiro. “Geometrias Não-Euclidianas na Escola: Uma Proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica”. Diss. de mestr. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013 (ver p. 28).
- [24] Ricardo Silva Ribeiro e Maria Alice Gravina. “Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra”. Em: *Revista Professor de Matemática Online* 1.1 (2013), pp. 53–66 (ver p. 37).
- [25] Vincenzo De Risi. Introduction. Em: *Euclid Vindicated from Every Blemish*. Ed. por Vincenzo De Risi. Su  a: Springer, 2014, pp. 3–58 (ver pp. 9, 10).
- [26] Boris A Rosenfeld. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. New York: Springer-Verlag, 1988 (ver pp. 4, 6–9, 11, 12, 14).
- [27] Gerolamo Saccheri. *Euclid Vindicated from Every Blemish*. Ed. e anot. por Vincenzo De Risi. Su  a: Springer, 2014 (ver pp. 8, 9).
- [28] Arley Antes Souza. “Uma Visita ao Disco de Poincaré: Proposta de Material para Aperfeiçoamento de Professores”. Trabalho de Conclusão de Curso. Santarém, Pará: Universidade Federal do Oeste do Pará, 2019 (ver p. iii).
- [29] John Stillwell. *Sources of Hyperbolic Geometry*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996 (ver p. 15).
- [30] *The Scientific Legacy of Poincaré*. Trad. por Joshua Bowman. Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc., 2010 (ver pp. iii, 15).
- [31] Harold E Wolfe. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Mineola, New York: Dover Publications, 2012 (ver p. 22).