6 Aplicação Didática: Sequência de Ensino e Análise de Recurso

Neste capítulo, apresentamos uma proposta didática estruturada para o ensino dos conceitos integrados da estratégia Maximin e do modelo de duopólio de Cournot. A sequência de ensino foi desenvolvida visando facilitar a compreensão dos alunos sobre tomada de decisão estratégica em contextos econômicos, utilizando uma abordagem ativa e contextualizada. Além disso, discutimos a análise do recurso didático elaborado, considerando aspectos pedagógicos, matemáticos e tecnológicos que potencializam a aprendizagem.

A fundamentação teórica para a construção da sequência de ensino encontra respaldo em (Kasper, 2017), que ressalta que a Teoria dos Jogos pode ser utilizada como ferramenta para promover o pensamento crítico e a tomada de decisões em situações de incerteza, além de favorecer um aprendizado ativo e contextualizado, aproximando os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes.

Este capítulo está organizado em duas partes principais: a primeira apresenta a sequência de ensino detalhada, incluindo objetivos, atividades, recursos e estratégias de avaliação; a segunda parte realiza uma análise crítica do recurso didático aplicado, identificando suas potencialidades e limitações no contexto escolar.

6.1 Alinhamento com a BNCC e Justificativa Pedagógica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que o ensino de Matemática deve promover o desenvolvimento do pensamento lógico, da resolução de problemas, da modelagem e da argumentação matemática. Nesse contexto, a Teoria dos Jogos, por meio do modelo de Cournot e da estratégia Minimax, constitui uma abordagem inovadora que articula conteúdos matemáticos com situações reais de tomada de decisão.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018), no Ensino Médio, a área da Matemática e suas Tecnologias deve:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca desoluções (Brasil, 2018, p. 267).

Nesse cenário, propor atividades que envolvam decisões estratégicas entre empresas simula situações reais de mercado e mobiliza conhecimentos como funções do 2º grau, sistemas de equações, interpretação de tabelas e raciocínio lógico. Ao utilizar o modelo de Cournot com funções quadráticas (sem recorrer a derivadas), cria-se uma ponte direta entre os conteúdos da Matemática escolar e a modelagem de contextos econômicos.

6.2 Planejamento de Aulas com Base em Competências

A proposta didática está alinhada às seguintes competências gerais e específicas da BNCC:

- **Competência específica 3**: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 535).
- **Habilidade (EM13MAT301)**: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 536).
- **Habilidade (EM13MAT302)**: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 536).

6.3 Sequência de Ensino Proposta

Tema:

Estratégias de produção e competição entre empresas: uma abordagem matemática.

Ano/Série:

2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Duração:

5 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Compreender o conceito de duopólio e o modelo de Cournot.
- Explorar a noção de equilíbrio por meio de funções quadráticas.
- Resolver problemas com tabelas, gráficos e sistemas lineares.
- Aplicar a estratégia Minimax em decisões econômicas simuladas.
- Analisar estratégias racionais em ambientes competitivos.

Etapas da Sequência:

1. **Aula – Introdução à competição e tomada de decisão:** Discussão inicial sobre tipos de mercado (concorrência, monopólio, duopólio). Introdução à ideia de que empresas fazem escolhas estratégicas sobre produção. Levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos sobre funções e gráficos.
2. **Aula – Situação contextualizada e simulação com funções:** Apresentação do problema: duas empresas competem em um mercado. Os alunos, organizados em grupos, representam cada firma. Comparam tabelas de lucros para diferentes quantidades produzidas. Construção conjunta das funções de lucro e identificação do ponto de máximo por meio do vértice da parábola, sem uso de derivadas.
3. **Aula – Estratégia Minimax e análise de decisão:** Exploração do conceito de "escolha segura no pior cenário". Aplicação em jogos simples (pedra-papel-tesoura) e transição para o modelo de empresas. Os grupos comparam estratégias, constroem matrizes de lucros e identificam estratégias minimax.
4. **Aula – Estratégia Maximin e simetria da decisão:** Revisão dos conceitos de minimax vistos na aula anterior, agora sob a ótica do jogador que busca maximizar seu ganho mínimo garantido (estratégia Maximin). Comparação entre as estratégias Minimax e Maximin em diferentes jogos simples. Aplicação da lógica do Maximin no contexto das empresas, refletindo sobre o ponto de vista do segundo jogador (concorrente). Ênfase na ideia de simetria estratégica e na identificação de pontos de equilíbrio nos jogos de soma zero.
5. **Aula – Discussão crítica e interdisciplinaridade:** Análise comparativa entre o equilíbrio de Cournot (cooperação racional) e a estratégia Maximin (precaução individual). Discussão sobre qual estratégia leva a maior lucro ou maior segurança. Reflexão final: como a Matemática pode apoiar decisões na vida real.

Produto final sugerido

Como forma de consolidar os conhecimentos desenvolvidos ao longo da sequência, sugere-se que os alunos elaborem um produto final que envolva:

- **Construção das curvas de reação**: Utilizar as funções de lucro e os valores fornecidos para determinar, via maximização, as curvas de reação de cada empresa. Em seguida, representar graficamente essas curvas em um mesmo plano cartesiano. Indicar o ponto de interseção das curvas, que corresponde ao equilíbrio de Cournot. Identificar no gráfico as quantidades produzidas por cada empresa nesse equilíbrio. Nomear adequadamente os eixos, definir escalas e inserir legenda.
- **Cálculo do equilíbrio de Cournot:** Resolver o sistema de equações obtido pelas curvas de reação, determinando q_1^* e q_2^*. Calcular o preço de equilíbrio P^*. Determinar o lucro de cada empresa no equilíbrio.
- **Aplicação da estratégia Maximin:** Considerando um cenário conservador, aplicar a estratégia Maximin às funções de lucro. Definir qual quantidade de produção cada empresa escolheria de modo a maximizar seu lucro mínimo possível. Comparar o resultado com o equilíbrio de Cournot
- **Análise e apresentação:** Preparar uma apresentação oral contendo: Justificativa matemática dos cálculos realizados; Interpretação econômica dos resultados; Comparação entre as quantidades obtidas no equilíbrio de Cournot e pela estratégia Maximin; Discussão sobre o impacto da escolha de estratégia nas decisões de produção.

Problema Proposto

Duas empresas competem em um mercado cuja função de demanda inversa é:

$$P = 120 - 2(q_1 + q_2).$$

em que:

- P representa o preço de mercado;
- q_1 e q_2 são as quantidades produzidas pelas empresas 1 e 2, respectivamente.

Ambas as empresas apresentam custo marginal constante:

$$C_m = 30.$$

Passo 1: Funções de Lucro

A receita total de cada empresa é dada por $R_i = P \cdot q_i$, e o lucro é a diferença entre a receita e o custo total.

Para a Empresa 1:

$$\pi_1 = (P - C_m)q_1 = [120 - 2(q_1 + q_2) - 30]\, q_1,$$

$$\pi_1 = (90 - 2q_1 - 2q_2)q_1,$$

$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2.$$

Para a Empresa 2:

$$\pi_2 = (P - C_m)q_2 = [120 - 2(q_1 + q_2) - 30]\, q_2,$$

$$\pi_2 = (90 - 2q_1 - 2q_2)q_2,$$

$$\pi_2 = 90q_2 - 2q_1q_2 - 2q_2^2.$$

Passo 2: Curvas de Reação

Para determinar a quantidade ideal a ser produzida por cada empresa, observamos que o lucro de cada uma é uma função quadrática em relação à sua própria produção. O valor que maximiza o lucro corresponde ao*vértice da parábola definida por essa função.

Sabemos que, para uma função da forma $ax^2 + bx$, o valor de x que maximiza a função é dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Para a Empresa 1, a função lucro é:

$$\pi_1 = -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1.$$

Aplicando a fórmula do vértice:

$$q_1 = \frac{90 - 2q_2}{4} = 22{,}5 - 0{,}5q_2.$$

Para a Empresa 2 a função lucro é:

$$\pi_2 = -2q_2^2 + (90 - 2q_1)q_2.$$

Aplicando a fórmula do vértice:

$$q_2 = \frac{90 - 2q_1}{4} = 22{,}5 - 0{,}5q_1.$$

Passo 3: Equilíbrio de Cournot

Sistema:

$$q_1 = 22,5 - 0,5q_2,$$
$$q_2 = 22,5 - 0,5q_1,$$

Substituindo q_2 na primeira:

$$q_1 = 22,5 - 0,5(22,5 - 0,5q_1),$$
$$q_1 = 22,5 - 11,25 + 0,25q_1,$$
$$q_1 - 0,25q_1 = 11,25,$$
$$0,75q_1 = 11,25, \quad \Rightarrow \quad q_1^* = 15,$$
$$q_2^* = 22,5 - 0,5(15) = 15.$$

Preço:

$$P^* = 120 - 2(15 + 15) = 120 - 60 = 60.$$

Lucro:

$$\pi_1^* = (60 - 30)(15) = 30 \cdot 15 = 450,$$
$$\pi_2^* = 450.$$

Passo 4: Estratégia Maximin

Considerando comportamento conservador: Para a Empresa 1, fixando $q_2 = 20$ (cenário menos favorável), a função de lucro fica:

$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 2(20)q_1,$$
$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 40q_1,$$
$$\pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2.$$

Como o coeficiente de q_1^2 é negativo, trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, o valor máximo ocorre no vértice da parábola.

1) Utilizando a fórmula do vértice:

A abscissa do vértice de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

$$q_1 = -\frac{b}{2a},$$

No caso:

$$a = -2, \quad b = 50 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -\frac{50}{2 \cdot (-2)} = \frac{50}{4} = 12{,}5.$$

2) Completando o quadrado:

$$\pi_1 = -2q_1^2 + 50q_1 = -2(q_1^2 - 25q_1).$$

Completando o quadrado dentro dos parênteses:

$$q_1^2 - 25q_1 = \left(q_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2,$$

Substituindo:

$$\pi_1 = -2\left[\left(q_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2\right] = -2\,(q_1 - 12{,}5)^2 + 312{,}5,$$

O valor máximo de π_1 ocorre quando o termo quadrático for zero, ou seja, quando:

$$q_1 = 12{,}5.$$

Portanto, o ponto de produção que maximiza o lucro da Empresa 1 em cenário conservador é:

$$\boxed{q_1 = 12{,}5}$$

Passo 5: Comparação

- **Cournot:** $q_1 = q_2 = 15,\ P = 60,\ \pi_1 = \pi_2 = 450.$
- **Maximin:** $q_1 = q_2 = 12,5,\ P = 120 - 2(25) = 70,\ \pi_1 = \pi_2 = (70 - 30)12,5 = 500.$

Passo 6: Representação Gráfica

Representar graficamente:

- Curvas de reação $q_1 = 22,5 - 0,5q_2$ e $q_2 = 22,5 - 0,5q_1$;
- Ponto de interseção $(15, 15)$ para Cournot;
- Pontos correspondentes à estratégia Maximin $(12,5, 12,5)$.

6.4 Análise do Recurso Didático Utilizado

A simulação baseada no modelo de Cournot e na estratégia Minimax se configura como um recurso didático de alto potencial pedagógico. Sua estrutura permite que o aluno mobilize diferentes saberes matemáticos ao mesmo tempo em que analisa situações contextualizadas.

Potencialidades do recurso:

- Integra conteúdos como funções do 2º grau, álgebra e lógica.
- Estimula a argumentação matemática e o trabalho colaborativo.
- Permite a simulação de um problema real, favorecendo o protagonismo do aluno.
- Desenvolve competências socioemocionais como negociação, empatia e pensamento estratégico.

Limitações e cuidados necessários:

- Exige um planejamento prévio para adaptação do contexto ao nível da turma.
- Pode demandar uso de recursos tecnológicos (planilhas, projetor, quadros de dupla entrada).
- É importante garantir que todos os alunos compreendam a função de lucro antes de avançar para estratégias.

A aplicação didática da Teoria dos Jogos no Ensino Médio, por meio do modelo de Cournot e da estratégia Minimax, constitui uma proposta inovadora, acessível e alinhada à BNCC. Ao se basear em funções quadráticas e sistemas de equações, conteúdos do currículo escolar, torna-se possível explorar a tomada de decisão racional, o raciocínio estratégico e a modelagem matemática de situações do cotidiano e do mundo do trabalho. A sequência apresentada visa evidenciar que a Matemática pode ir além dos cálculos tradicionais, promovendo uma aprendizagem significativa e conectada com a realidade.

7 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da simulação da proposta didática fundamentada na Teoria dos Jogos, em especial no modelo de duopólio de Cournot e na estratégia Maximin. O objetivo é analisar de que forma os conteúdos matemáticos e as estratégias de decisão podem ser apropriados pelos estudantes, além de discutir o impacto pedagógico potencial da atividade.

Na Seção 7.1, são discutidos os resultados matemáticos e estratégicos da simulação, com destaque para a aplicação do modelo de Cournot utilizando funções quadráticas e o cálculo do ponto de equilíbrio sem o uso de derivadas, além da comparação com a estratégia Maximin. Já a Seção 7.2 apresenta os resultados didáticos e pedagógicos projetados para a sequência de ensino, como o desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas, o engajamento dos alunos e o uso de estratégias interativas. Por fim, a Seção 7.3 discute as potencialidades e limitações da proposta, considerando seu alinhamento com a BNCC e sua viabilidade no contexto do Ensino Médio.

A análise aqui proposta busca evidenciar como a articulação entre teoria matemática e situações contextuais pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa, crítica e estratégica, conforme defendido por (Kasper, 2017).

7.1 Resultados Matemáticos e Estratégicos

Os resultados obtidos a partir da simulação do modelo de duopólio de Cournot com os parâmetros $a = 100$, $b = 1$, $c_1 = 20$ e $c_2 = 30$ evidenciaram que é possível calcular o ponto de equilíbrio do modelo sem o uso de derivadas, por meio da análise de vértices de funções quadráticas. As curvas de reação de ambas as firmas foram construídas com base na fórmula do vértice, permitindo a resolução do sistema de equações e a determinação do equilíbrio de Nash:

- Quantidade de equilíbrio da Firma 1: $q_1^* = 30$;
- Quantidade de equilíbrio da Firma 2: $q_2^* = 20$;
- Preço de mercado no equilíbrio: $P = 50$;
- Lucro da Firma 1: $\pi_1 = 900$;
- Lucro da Firma 2: $\pi_2 = 400$.

Além disso, foi possível aplicar a estratégia Minimax à matriz de lucros, identificando o ponto em que cada firma minimiza sua perda máxima. Isso permitiu uma comparação crítica entre o equilíbrio de Cournot (que considera reações mútuas) e a estratégia Minimax (que assume posturas mais defensivas), favorecendo a análise de decisões racionais em cenários com diferentes níveis de informação.

7.2 Resultados Didáticos e Pedagógicos

A construção da sequência didática fundamentada nos modelos matemáticos explorados evidenciou que conteúdos como funções do segundo grau, sistemas lineares e interpretação de gráficos podem ser aplicados a contextos reais de forma acessível e envolvente. A estruturação da proposta em quatro aulas foi planejada para favorecer a compreensão gradual dos conceitos e para possibilitar a participação ativa dos estudantes, com foco no raciocínio lógico, argumentação e tomada de decisão.

A utilização da Teoria dos Jogos como recurso pedagógico apresenta potencial para:

- Estimular a curiosidade dos alunos por envolver situações de competição e estratégia.
- Promover a interdisciplinaridade entre Matemática, Economia e Ética.
- Fortalecer competências previstas na BNCC, como modelagem, análise crítica de dados e uso da Matemática em contextos sociais.
- Tornar a aprendizagem mais significativa ao conectar a Matemática ao mundo real.

Além disso, a proposta mostra-se compatível com turmas de Ensino Médio, uma vez que não exige cálculo diferencial e utiliza apenas ferramentas presentes no currículo escolar, como fórmulas de funções quadráticas, sistemas de equações e leitura de gráficos.

7.3 Discussão das Potencialidades e Limitações

Dentre as principais potencialidades da proposta, destacam-se:

- A acessibilidade do conteúdo matemático, mesmo com a complexidade do tema.
- A possibilidade de desenvolver atividades investigativas, em que os alunos constroem e testam hipóteses.
- A promoção do protagonismo estudantil e do pensamento estratégico.

Contudo, algumas limitações foram identificadas:

- A necessidade de mediação docente ativa para contextualizar os modelos e garantir o engajamento dos alunos.
- O tempo necessário para a realização completa da sequência didática.
- A possível dificuldade de algumas turmas em interpretar tabelas de lucros e simulações econômicas sem o devido suporte visual.

Mesmo diante dessas limitações, a proposta mostrou-se viável, inovadora e alinhada às diretrizes curriculares, demonstrando que é possível abordar conceitos avançados por meio de recursos didáticos acessíveis, tornando a Matemática mais atraente, compreensível e útil para os estudantes.